TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

bij het college

WISKUNDE 27

Voorjaarssemester 1977

Bibl Mog

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

Wiskunde 27

Dictaatnr. 2.243 Prijs $f\,2,-$

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

VRAAGSTUKKEN BIJ HET COLLEGE WISKUNDE 27

voorjaarssemester 1977

Inhoudsbeschrijving
Vraagstukken bij het college Wiskunde 27
voorjaarssemesterjaar 1977

EXAMENS/TENTAMENS, HERKANSINGEN

JdG, 17 Juli 2005

WEEK 1

§§ 4.1-4.2 (Convergentie en divergentie van reeksen, reeksen met uitsluitend niet-negatieve termen, vergelijkingsstelling).

1. Bepaal de limiet van de volgende rijen.

(i) $(n^2 \sin \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$;

(ii) $(n \arcsin \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$;

(iii) $(\frac{\ln n}{n^p})_{n=1}^{\infty}$ $(p \in \mathbb{R})$.

In de volgende zes opgaven is de algemene term van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeven. Bepaal met behulp van de definitie of de reeksen convergeren dan wel divergeren. Bepaal in het geval van convergentie de som van de reeks.

2. $a_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^3}$.

3. $a_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.

4. $a_n = \frac{1}{4^n}$.

5. $a_n = 2^n$.

6. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

7. $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$.

8. (i) Bewijs dat $\frac{1}{3n^2 - 2n} \leq \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(ii) Ga na of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 2n}$ convergent dan wel divergent is.

9. (i) Bewijs dat $\sin \frac{\pi}{n} > \frac{1}{n}$ o.d.d.

(ii) Ga na of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$ convergent dan wel divergent is.

10. (i) Bewijs dat $\frac{1}{2^{\ln n}} \geq \frac{1}{n^{3/4}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(ii) Ga na of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-7}}{2^{\ln n}}$ convergent dan wel divergent is.

11. (i) Bewijs dat

$$\frac{n^3 - 100n^2 + n + 1}{n^4 + n^3 - 8n^2 + 1} > \frac{1}{20n} \quad \text{o.d.d.}$$

(ii) Ga na of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 100n^2 + n + 1}{n^4 + n^3 - 8n^2 + 1}$$

convergent dan wel divergent is.

12. (i) Bewijs dat

$$\frac{1}{\sqrt{5n(n^2-1)}} < \frac{1}{2n^{3/2}} \qquad (n \geq 3)\ .$$

(ii) Ga na of de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{10^{10}}{\sqrt{5n(n^2-1)}}$$

convergent dan wel divergent is.

13. (i) Bewijs dat

$$\frac{1}{n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2} \quad \text{o.d.d.}$$

(ii) Ga na of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$$

convergent dan wel divergent is.

WEEK 2

§§ 4.2-4.3 (Vergelijkingsstelling, convergentiekenmerken van Cauchy en d'Alembert, integraalkenmerk, alternerende reeks, absolute convergentie).

Onderzoek of de volgende reeksen convergent of divergent zijn.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{\ln n}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 2n)e^{-n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + n} - \sqrt{n^4 - n})$.

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} 2ne^{-n^2}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^p}$ $\quad (p \in \mathbb{R})$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^2}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos n$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{2n+1}}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \pi n}{n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}$.

20. Een kogel valt van een hoogte h op de grond en kaatst terug met een snelheid die een fractie α $(0 < \alpha < 1)$ is van de snelheid waarmee de kogel de grond raakt.

a) Na hoeveel tijd ligt de kogel stil?

b) Wat is de lengte van de baan die de kogel dan heeft doorlopen?

WEEK 3

§ 4.4 (Machtreeksen, convergentiestraal, onderzoek randpunten, som van een machtreeks).

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^{2n}}{n!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!(n+2)}$.

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen. Bepaal tevens het gedrag in de randpunten.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{n^2} x^n$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n - e^n)x^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)x^n$.

Bepaal de som van de volgende machtreeksen voor die waarden van x waarvoor de machtreeksen convergent zijn.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^n$.

11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n-2} x^n$.

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)x^n$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$.

16. Onderzoek voor welke waarden van x de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n \cos x}{n}$$

convergent is en bepaal de som van de reeks.

Onderzoek voor welke waarden van x de volgende reeksen convergeren.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{x})^n$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{x}{1+x})^{n-1}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n(x-x^2)}}{\ln n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(x+2)^{2n+1}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \arctan \frac{1}{n}$.

WEEK 4

§ 4.5 (Taylorreeksen, toepassing van reeksontwikkelingen bij het bepalen van limieten).

Geef met behulp van standaardreeksen de reeksontwikkelingen tot aan de term met x^7 van de volgende functies.

1. $\frac{\cos x}{1 + x}$.

2. $\frac{\sin x}{x(1 + x^2)}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

4. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Bepaal de Taylorreeksen van de volgende functies. Geef tevens aan voor welke waarden van x de reeksontwikkelingen geldig zijn.

5. $\cos x$ rond $x = \pi/3$.

6. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ rond $x = 2$.

7. $\sqrt{x}$ rond $x = 1$.

8. $\sqrt[4]{(x + 3)^3}$ rond $x = -1$.

9. $\sinh x$ rond $x = 0$.

Bereken de volgende limieten met behulp van reeksontwikkelingen.

10. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

11. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x)}{x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1-x)}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\tan x - x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{\cos x - 1}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - \arctan x^2}{x^3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \cos x}$.

17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - \arctan 2x}{x - \sin x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2} - 1 - \frac{1}{2}\sin x}{x^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - x}{x^3}$ (vergelijk pag. 141 van de syllabus Wisk. 17 en 27) .

WEEK 5

§§ 4.6-4.7 (Numerieke sommatie, Fourierreeksen).

1. Geef een reeksontwikkeling voor $\frac{1}{e}$. Hoeveel termen van deze reeksontwikkeling moeten voor de berekening van $\frac{1}{e}$ worden genomen, opdat de afbreekfout hoogstens $0,2.10^{-3}$ is?

2. Geef een reeksontwikkeling voor cos 0,1. Hoeveel termen van deze reeksontwikkeling moeten voor de berekening van cos 0,1 worden genomen, opdat de afbreekfout hoogstens $0,5.10^{-5}$ is?

3. Geef een reeksontwikkeling voor ln 0,6. Hoeveel termen van deze reeksontwikkeling moeten voor de berekening van ln 0,6 worden genomen, opdat de afbreekfout hoogstens $0,4.10^{-2}$ is?

4. Hoeveel termen van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ moeten worden genomen, opdat de afbreekfout hoogstens $0,5.10^{-1}$ is?

5. Bereken $\frac{1}{e}$ met een fout die hoogstens 10^{-3} is.

6. Bereken ln 0,6 met een fout die hoogstens 10^{-2} is.

7. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ met een fout die hoogstens 10^{-2} is.

8. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ met een fout die hoogstens 2.10^{-3} is.

9. Bereken ln 3 met een fout die hoogstens $1,3.10^{-2}$ is (vergelijk pag. 149 van de syllabus Wisk. 17 en 27).

10. Bereken $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ met een fout die hoogstens 10^{-2} is.

11. Bereken $\int_0^{0,1} e^{-x^2}\,dx$ met een fout die hoogstens $1,5.10^{-6}$ is.

Bepaal de Fourierreeks van de volgende functies.

12. $f(x) = \sin \frac{1}{2} x \qquad (-\pi \le x < \pi)$.

13. $f(x) = \sinh x \qquad (-\pi < x \le \pi)$ (vergelijk pag. 82-83 van de syllabus Wisk. 17 en 27).

14. $f(x) = x \sin x \qquad (-\pi \le x < \pi)$.

15. $f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le \pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$.

16. $f(x) = x + \cos x \qquad (-\pi < x \le \pi)$ (vergelijk pag. 153 van de syllabus Wisk. 17 en 27).

WEEK 6

§§ 5.1-5.3 (Coördinatenstelsels in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$: poolcoördinaten, cylindercoördinaten, bolcoördinaten; parametervoorstellingen van krommen).

1. Schets de krommen in $\mathbb{R}^2$ die in poolcoördinaten zijn gegeven door:

   a) $r = a$;

   b) $\varphi = \alpha$;

   c) $r = \varphi$;

   d) $r = \frac{1}{\varphi}$;

   e) $r = 2 \cos \varphi$;

   f) $r = \cos 2\varphi$.

2. Schets (omschrijf) de oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ die in cylindercoördinaten zijn gegeven door:

   a) $z = 2$;

   b) $\varphi = 2$;

   c) $r = 2$;

   d) $z = r$;

   e) $z = \varphi$;

   f) $\varphi = r$.

3. Schets de oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ die in bolcoördinaten zijn gegeven door:

   a) $\rho = 2$;

   b) $\theta = 2$;

   c) $\varphi = 2$;

   d) $\rho = \theta$.

4. Schets de krommen in $\mathbb{R}^3$ die in cylindercoördinaten, respektievelijk in bolcoördinaten, zijn gegeven door:

   a) $\begin{cases} z = 2 \\ \varphi = 2 \end{cases}$;

   b) $\begin{cases} z = \sin \varphi \\ r = 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} z = \sin 2\varphi \\ r = 2 \; ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \; . \end{cases}$

5. Bepaal de vergelijking in cartesische coördinaten van
   a) het oppervlak dat in bolcoördinaten gegeven is door

$$\rho^3 = \cos\theta \; ;$$

   b) de kromme die in poolcoördinaten gegeven is door

$$r = \sin\varphi + 2\cos\varphi \; .$$

6. Bepaal de vergelijking in poolcoördinaten van de kromme die in cartesische coördinaten gegeven is door

$$(x^2 + 2x + y^2)^2 = 4(x^2 + y^2).$$

7. Bepaal een parametervoorstelling van de volgende krommen in $\mathbb{R}^2$.

a) $y = mx + n$;

b) $x^2 = y - 4$;

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y = -4$.

8. Bepaal een parametervoorstelling van de volgende krommen in $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 5 \; ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = y \\ y = z \; ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 2 \; ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4 \; . \end{cases}$

9. Schets de krommen gegeven door de vectorfunctie $\underline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ in de gevallen:

   a) $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t, 2)$;

   b) $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$;

   c) $\underline{f}(t) = (t, t, t^2)$.

10. Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme

$$(2t,\ t^2 - 2t,\ t^3 + 2t^2)$$

in het punt dat correspondeert met $t = 1$.

11. In welke punten van de kromme $(\frac{1}{4} t^4, \frac{1}{3} t^3, t)$ is de raaklijn evenwijdig aan het vlak met vergelijking $x + 3y - 4z = 0$.

12. Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn in het punt $(0,2,0)$ aan de kromme

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 2 \ . \end{cases}$$

13. Een kromme in $\mathbb{R}^2$ is gegeven door de vectorfunctie $\underline{f}(t) = (t - 2\sin t, 1 - 2\cos t)$, $(t \in [-\pi, \pi])$.

   a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in $\underline{f}(\frac{\pi}{2})$.

   b) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn horizontaal of verticaal is.

   c) Schets de kromme.

14. Op de cirkel $(\sin t, \cos t)$ ligt het punt $A(0,1)$. In A wikkelt men een koord af langs de cirkel met de wijzers van de klok mee. Gevraagd de coördinaten van het uiteinde van het koord.

15. Gegeven is een kromme in $\mathbb{R}^3$ met parametervoorstelling $(t \cos t, t \sin t, t)$, $(t \geq 0)$.

   a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt $(\cos 1, \sin 1, 1)$.

   b) Schets de kromme.

16. Gegeven is een kromme in $\mathbb{R}^2$ met parametervoorstelling $(\sin t, \sin 2t)$, $(t \in [-\pi, \pi))$.

a) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn horizontaal is.

b) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn verticaal is.

c) Schets de kromme.

WEEK 7

§§ 5.3-5.5 (Parametervoorstellingen van krommen, hoogtekaart, continuïteit en differentieerbaarheid van functies van twee veranderlijken).

1. Zij $(x(t), y(t)) = (2 \cos t, 3 \sin t)$, $\quad (t \in [0,2\pi))$.

   a) Bepaal y als functie van x rond het punt $(1, \frac{3}{2}\sqrt{3})$, en bereken daarna $y'(1)$ en $y''(1)$.

   b) Bereken $y'(1)$ en $y''(1)$ zonder eerst $y(x)$ te bepalen.

2. Zij $(x(t), y(t)) = (t + 2 \cos t, 3 \sin t)$, $\quad (t \in [0,2\pi))$.
   In een omgeving van het punt $(x(\frac{\pi}{3}), y(\frac{\pi}{3}))$ is y te schrijven als een functie van x. Bepaal $y'(\frac{\pi}{3} + 1)$ en $y''(\frac{\pi}{3} + 1)$.

3. Schets de hoogtekaarten van de functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door:

   a) $f(x,y) = x - y$;

   b) $f(x,y) = \frac{y}{x}$;

   c) $f(x,y) = xy$;

   d) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2$;

   e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$;

   f) $f(x,y) = \max(x,y)$;

   g) $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.

4. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{y}{x-1} & (x \neq 1) , \\ f(1,y) = \alpha . \end{cases}$$

   a) Schets de hoogtekaart van f.

   b) Is het mogelijk α zodanig te bepalen dat f continu is in (1,0)?

5. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2-1} & (|x| \neq 1) , \\ f(1,y) = \alpha , \\ f(-1,y) = \beta . \end{cases}$$

a) Schets de hoogtekaart van f.

b) Toon aan dat het niet mogelijk is α en β zodanig te bepalen dat f continu is in (1,1) en (-1,-1).

6. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = 1 & (xy \neq 0)\ , \\ f(x,0) = x\ , & \\ f(0,y) = y^2\ . & \end{cases}$$

In welke punten is f discontinu?

7. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0))\ , \\ f(0,0) = 0\ . & \end{cases}$$

Bewijs dat f continu is in (0,0).

8. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ f(0,0) = 0\ . & \end{cases}$$

Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$.

9. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ((x,y) \neq (0,0))\ , \\ f(0,0) = 0\ . & \end{cases}$$

a) Bewijs dat voor alle m geldt

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = f(0,0)\ .$$

b) Kan men hieruit concluderen dat f continu is in (0,0)?

10. Toon met behulp van de definitie van differentieerbaarheid aan dat de volgende functies differentieerbaar zijn in het punt (1,2). Bepaal tevens de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak in het punt (1,2,f(1,2)).

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$;

b) $f(x,y) = 2x + y^3$.

11. De functie f is gedefinieerd door $f(x,y) = -\frac{x^2}{y} + 2$, $(y \neq 0)$.
Teken in één plaatje (in $\mathbb{R}^3$) de krommen $(1,y,f(1,y))$, $(y \in (0,4))$ en $(x,2,f(x,2))$, $(x \in (0,4))$, en de raaklijnen aan die krommen in het punt $(1,2,f(1,2))$.
Geef de waarden van $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in (1,2) in de figuur aan.
Bepaal een parametervoorstelling van die raaklijnen.
Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak in het punt $(1,2,f(1,2))$.

12. Beantwoord dezelfde vraag voor de functie $f(x,y) = \sqrt{2 - y^2}$, uitgaande van het punt $(1,1,f(1,1))$.

WEEK 8

§§ 5.5 (Differentieerbaarheid, partiële afgeleiden, raakvlak, kettingregel).

1. Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ van de functies f met

a) $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$;

b) $f(x,y) = x^y$;

c) $f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

d) $f(x,y) = xy^2 e^{x^3 + 2y}$.

2. De functie f is gegeven door

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} .$$

Toon aan dat

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = - f(x,y) .$$

3. De functie f is gegeven door

$$f(x,y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y} .$$

Toon aan dat

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y) .$$

4. Toon aan dat de eerste partiële afgeleiden van de functie f, gedefinieerd door $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, in het punt (0,0) niet bestaan.
Geef daarvoor een meetkundige verklaring.

5. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = 1 & (xy \neq 0) , \\ f(x,0) = x , \\ f(0,y) = y^2 . \end{cases}$$

Bepaal $(\frac{\partial f}{\partial x})_{(0,0)}$ en $(\frac{\partial f}{\partial y})_{(0,0)}$.

Opmerking. f is niet differentieerbaar in (0,0); zie daarvoor vraagstuk 6 van week 7.

6. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) , \\ f(0,0) = 0 . & \end{cases}$$

a) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in (0,0).
b) Onderzoek of f differentieerbaar is in (0,0).

7. Gegeven is het oppervlak met vergelijking $z = \sqrt[3]{12 - xy^2}$.
Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak in het punt (1,2,2).

8. Bepaal de punten van het oppervlak met vergelijking

$$z = 15x + 4x^2y^2 - 8xy^2 + 2y^2$$

waar het raakvlak evenwijdig loopt aan het vlak met vergelijking $45x - 12y - 3z = 1$.

9. Gegeven is het oppervlak met vergelijking $z = \sin(xy)$, $(|x| \leq \sqrt{2\pi}, |y| \leq \sqrt{2\pi})$.
Bepaal de punten van dit oppervlak waar het raakvlak horizontaal is.
Geef in een schets de ligging van deze punten aan.

10. Zij $z = x^3y + 3x^2\sqrt{y}$ en $y = -x^2 + 3$.

Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ in $(x,y) = (1,2)$.

Beschouw nu z als een functie van x, i.e. $z(x) = z(x,y(x))$, en bereken $\frac{dz}{dx}$ voor $x = 1$.

11. a) Gegeven is $z = xe^{xy}$ met $x = \ln t$, $y = \sin t$.
Bepaal $\frac{dz}{dt}$ met behulp van de kettingregel.

b) Gegeven is $z = \arctan(x^2 + y^2)$ met $x = e^t$, $y = \tan t$.

Bepaal $\frac{dz}{dt}$ met behulp van de kettingregel.

12. Gegeven is $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3)$ met $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $z = t$.

Bepaal $\frac{du}{dt}$ met behulp van de kettingregel.

13. Van de functie f is gegeven:

$$f(0,1) = -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x} = ye^x,\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x - \frac{1}{1+y^2}\ .$$

Als $g(t) = f(x(t),y(t))$, waarin $x(t) = \ln t$ en $y(t) = t$, bepaal dan $g'(t)$ en hieruit $g(t)$.

14. Bepaal alle partiële afgeleiden van de eerste en de tweede orde van de functies

a) $f(x,y) = 2x^3y^2 - 3xy + 5y + 7$;

b) $f(x,y) = e^{xy^2}$.

15. Bereken de lineaire benadering van $f(2\frac{1}{12}\ ,\ 3\frac{1}{6})$ rond $(2,3)$ als $f(x,y) = x^2y + xy - 3x$.

<u>Opmerking</u>: $f(2\frac{1}{12}\ ,\ 3\frac{1}{6}) = 14{,}09..$.

16. Bereken de lineaire en de kwadratische benadering van $f(0{,}1;\ 0{,}2)$ rond $(0{,}0)$ als

$$f(x,y) = ye^{x-y}\ .$$

<u>Opmerking</u>: vergelijk pag. 177 van de syllabus Wisk. 17 en 27;
$f(0{,}1;\ 0{,}2) = 0{,}221...$.

WEEK 9

§§ 5.5-5.7 (Impliciet gegeven functies, richtingsafgeleide en gradiënt, partiële differentiaalvergelijkingen).

1. Gegeven is de kromme met vergelijking $x^2 + xy + y^2 = 3$.
Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn evenwijdig aan de x-as loopt, respectievelijk de punten waar de raaklijn evenwijdig aan de y-as loopt.
Bepaal de symmetrie-assen en maak een schets van de kromme.

2. a) Door de betrekkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

zijn y en z als functies van x bepaald. Bereken $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ in het punt $(0,2,0)$.

b) Bereken de richtingsvector van de raaklijn aan de kromme

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 2 \, . \end{cases}$$

in het punt $(0,2,0)$.

Opmerking. Vergelijk vraagstuk 12 van week 6.

3. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 + z = 0 \\ x^2 + xy^2 + z^4 = 1 \end{cases}$$

zijn y en z bepaald als functies van x.
Bereken $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ in het punt $(-1,1,-1)$.

4. Een kromme in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de betrekkingen

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4z^2 = 16 \\ x + y + z = 6 \, . \end{cases}$$

Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt $(2,2,2)$.

5. Door de betrekking $z^3 + xz^2 + yz + 2 = 0$ in z in een omgeving van $(1,2,-1)$ impliciet gegeven als functie van x en y.
Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ in het punt $(1,2,-1)$.
Bepaal ook de vergelijking van het raakvlak in $(1,2,-1)$ aan het oppervlak gegeven door

$$z^3 + xz^2 + yz + 2 = 0 .$$

6. Gegeven is de betrekking $2e^{xy} - z^2 - z\cos y = 0$. Beschouw z als functie van x en y en bepaal de partiële afgeleiden van de eerste en tweede orde van z in het punt $(0,0,1)$.

7. Het oppervlak V in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de vergelijking

$$3x^2 + 5y^2 - 8xy + 4xz - 4yz - 2z^2 - 2x + 12y - 1 = 0 .$$

Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan V in het punt $(1,0,0)$.

8. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

zijn y en z als functie van x bepaald.
Bereken y', z', y'' en z'' in het punt $(4,-3,0)$.

9. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = x^2 + 3xy - 4 .$$

a) Bereken de richtingsafgeleiden van f in $(1,1)$ in de richtingen $(1,0)$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1,-1)$, $(0,-1)$.

b) Schets in één plaatje (in $\mathbb{R}^3$) de krommen $z = f(1,y)$, $z = f(x,1)$ en $z = f(x,-x)$, $(x \in (0,2),\ y \in (0,2))$.
Schets ook de raaklijnen aan deze krommen in het punt $(1,1,0)$.
Geef in deze schets de waarden van de richtingsafgeleiden aan.

Opmerking: Vergelijk vraagstuk 11 van week 7.

10. Bepaal de richtingsafgeleide van

a) $xy + yz + zx$
in $\underline{a} = (1,2,3)$ in de richting van $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$;

b) $x^3y + y^3z + z^3x$
in $\underline{a} = (1,1,1)$ in de richting van $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$.

11. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ f(0,0) = 0 \ . \end{cases}$$

a) Bestaan $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in het punt (0,0) ?

b) Bestaan de andere richtingsafgeleiden in (0,0)?

c) Is f continu in (0,0) ?

12. Bepaal de vergelijkingen van de orthogonale trajectoriën van de volgende stelsels krommen:

a) $\frac{1}{2}x^2 + \ln y = C$;

b) $x^2 - y^2 = C$;

c) $\frac{y}{x^2} = C$.

13. De functie f is gegeven door

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \ .$$

Toon aan dat f voldoet aan de vergelijking van Laplace

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 \ .$$

WEEK 10

§§ 5.8-5.9 (Extrema, extrema met nevenvoorwaarden, Lagrange multiplicatoren).

1. Schets de hoogtekaart van f en bepaal met behulp van de hoogtekaart de aard, plaats en waarde van de extrema van f in de volgende gevallen:

   a) $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$;

   b) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2$;

   c) $f(x,y) = \sin(xy)$;

   d) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$.

2. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = x^2y .$$

   Schets de hoogtekaart en bereken de extrema van deze functie.

3. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} \qquad (x \neq 0,\ y \neq 0) .$$

   a) Schets de niveaulijnen voor $x > 0$ en $y > 0$.

   b) Bepaal de extrema van deze functie op de verzameling

$$V = \{(x,y) | \tfrac{1}{2} \leq x \leq 1 ;\ \tfrac{1}{2} \leq y \leq 1\} .$$

4. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = xy .$$

   a) Schets de niveaulijnen.

   b) Bepaal de extrema van deze functie op de verzameling

$$V = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2\} .$$

5. De functie f is gedefinieerd door $f(x,y) = x^2 - y$.

   a) Bepaal met behulp van de multiplicatorenmethode van Lagrange de extrema van f op $\{(x,y) | x^2 + y^2 = 4\}$.

   b) Bepaal de extrema van f op $\{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

6. De functie f is gedefinieerd door $f(x,y) = 4x^2 + y^2$.
   a) Bepaal de raakpunten van de niveaulijnen van f met de kromme gegeven door $|x| + |y| = 1$.
   b) Bepaal de extrema van f op $|x| + |y| = 1$.
   c) Bepaal de extrema van f op $\{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

7. Bepaal de extrema van $x^2 + 2y^2$ op $\{(x,y) \mid x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$.

8. Bepaal de extrema van $x(x^2 + y^2 - 2x)$ op $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

9. Bepaal de extrema van $x^2y - 2y^3$ op $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

10. De functie f is gedefinieerd door $f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2x)$.
   a) Bepaal de extrema van f op $\{(x,y) \mid y^2 \leq x\}$.
   b) Bepaal de extrema van f op $\{(x,y) \mid y^2 \leq x \leq 3\}$.
   c) Bepaal de extrema van f op $\mathbb{R}^2$.

11. Bepaal de extrema van $2xy + y$ op $x^2 + 3y^2 = \frac{1}{4}$.

12. Bepaal de extrema van xy op $x^2 + y^2 = 2x$.

13. Bepaal het minimum en het maximum van de afstand van een punt op de parabool $4y = x^2$ tot het punt $(0,3)$.

14. Bepaal de extrema van $x^2 + y^2 + z^2 - 17x$ onder de voorwaarde $12x - 12y + z = 0$.

15. Bepaal de extrema van $(x + 1)^2 + y^2$ onder de voorwaarde $x^3 = y^2$.

16. Bepaal de extrema van de functie xyz onder de voorwaarden

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 , \\ x + y + z = 3 . \end{cases}$$

WEEK 11

§§ 6.1-6.2 (Dubbelintegraal, herhaalde integralen, verwisseling van integratievolgorde).

1. Bereken

$$\iint_G f(x,y)dxdy$$

in de volgende gevallen:

a) $G = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1;\ 2 \leq y \leq 3\}$;

$f(x,y) = xye^x$.

b) $G = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1\ ;\ 1 \leq y \leq 2\}$;
$f(x,y) = (x + y)^n$, (n geheel en ≥ 0).

c) $G = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 1\ ;\ 2 \leq y \leq 4\}$;
$f(x,y) = x^3 e^{x^2 y}$.

2. Bereken de oppervlakte van het in het eerste kwadrant gelegen eindige gebied G dat begrensd wordt door de volgende krommen:

a) $y = x$ en $y = x^2$.

b) $y^2 = x^3$ en $y = x$.

c) $y^2 = 4 - x$ en $y^2 = 4 - 4x$.

3. Maak een schets van G en bereken

$$\iint_G f(x,y)dxdy$$

in de volgende gevallen:

a) $G = \{(x,y) | x \geq 0;\ x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$;

$f(x,y) = y\sqrt{x}$.

b) $G = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 2;\ x^2 - y^2 \geq 1\}$;

$f(x,y) = x$.

c) G is het gebied in $\mathbb{R}^2$ dat begrensd wordt door de krommen $y = 1$, $y = 2$, $x = y$ en $x = 3y$;
$f(x,y) = x + y$.

d) G is het gebied in $\mathbb{R}^2$ dat begrensd wordt door de krommen $xy = 16$, $y = x$, $y = 0$ en $x = 8$;
$f(x,y) = x^2$.

4. Verwissel de integratievolgorde in de volgende herhaalde integralen:

a) $$\int_0^2 dy \int_y^{2y} f(x,y)dx \ .$$

b) $$\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)dy \ .$$

5. Bereken

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx \ .$$

6. Bereken

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y \frac{\sin x}{x} dx \ .$$

7. Bereken

$$\int_0^a dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} y^2 e^{y^2} dy + \int_a^{2a} dx \int_{\frac{x}{2}}^{a} y^2 e^{y^2} dy \ .$$

WEEK 12

§§ 6.1-6.2 (Vervolg dubbelintegraal, poolcoördinaten, inhoudsberekeningen).

1. a) In $\mathbb{R}^2$ is het gebied G gegeven door

$$0 \leq y \leq x; \quad x^2 + y^2 \leq 1 .$$

Maak een schets van G en bereken

$$\iint_G x^2 y\,dxdy .$$

b) In $\mathbb{R}^2$ is het gebied G gegeven door

$$x \geq 0 \; ; \; x^2 + y^2 - 2y \leq 0 .$$

Maak een schets van G en bereken

$$\iint_G x\,dxdy .$$

2. Bereken

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy$$

in de volgende gevallen:

a) $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0\}$;

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

b) $G = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$;

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} .$$

c) $G = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \; ; \; x \geq 0 \; , \; y \geq 0\}$;

$$f(x,y) = y^2 e^{x^2+y^2} .$$

d) G is de cirkelsector van een cirkel met middelpunt (0,0) en straal 1, de hoekpunten van de sector zijn $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$;

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

3. In $\mathbb{R}^2$ is het gebied G gegeven door

$$1 \le x^2 + y^2 \le x + y .$$

Maak een schets van G en bereken de oppervlakte van G.

4. Schets de volgende lichamen en bereken hun inhoud.

a) Het afgeknotte prisma dat begrensd wordt door de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ en $z = x + 2y$.

b) Het lichaam dat begrensd wordt door $x = 0$, $z = 0$, $y = 2$, $x = y^2$ en $z = xy$.

c) Het lichaam dat begrensd wordt door $z = 0$, $z = xy$ en $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

d) Het lichaam dat begrensd wordt door de vlakken $z = 0$ en $z = 2y$, en de rechte cylinder met grondvlak het in het eerste kwadrant gelegen gebied waarvoor geldt $9 \le x^2 \le 36 - y^2$.

e) Het lichaam dat gelegen is binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en binnen de cylinder $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

5. Maak een schets van L en bereken de inhoud van L in de volgende gevallen:

a) $L = \{(x,y,z) | x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y \le x;\ x+y+z \le 2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

b) $L = \{(x,y,z) | x \ge 0;\ y \ge 0;\ x + y \le 2;\ -2 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$.

c) $L = \{(x,y,z) | x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ (x + y)^2 + 2z \le 4\}$.

6. Bereken de massa van de in het eerste kwadrant gelegen schijf, die wordt begrensd door de krommen $r = a$ en $r = a(1 - \cos\varphi)$.

a) in het geval dat de massadichtheid 1 is;

b) in het geval dat de massadichtheid $\sin\varphi$ is.

7. Bereken het zwaartepunt van de halve cirkelschijf

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1;\ x \ge 0\}$$

a) in het geval dat de massadichtheid 1 is;

b) in het geval dat de massadichtheid $\sqrt{x^2 + y^2}$ is.

WEEK 13

§ 6.2 (Drievoudige integralen, cylindercoördinaten, bolcoördinaten).

1. Bereken

$$\iiint_L f(x,y,z)\,dxdydz$$

in de volgende gevallen:

a) $L = \{(x,y,z) \mid -1 \leq x \leq 1;\ -2 \leq y \leq 2;\ -3 \leq z \leq 3\}$;

$f(x,y,z) = x^2y^2z^2$.

b) $L = \{(x,y,z) \mid 1 \leq x \leq 2;\ 0 \leq y \leq 1;\ 0 \leq z \leq 4\}$;

$f(x,y,z) = x + y + z$.

c) $L = \{(x,y,z) \mid x \geq 0;\ y \geq 0;\ 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2};\ x^2 + y^2 \leq 4\}$;

$f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^n \cos z$.

d) $L = \{(x,y,z) \mid x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0;\ x^2 + y^2 \leq 1;\ z \leq y^2\}$;

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$.

e) $L = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)z$.

f) $L = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

$f(x,y,z) = z^2$.

g) $L = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;\ z \geq 0;\ z^2 \geq x^2 + y^2\}$;

$f(x,y,z) = z$.

2. In $\mathbb{R}^3$ is het lichaam L gegeven door

$x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0$;

$x^2 + y^2 \geq 2$;

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Schets L en bereken

$$\iiint_L xyz\,dxdydz \;.$$

3. In $\mathbb{R}^3$ is het lichaam L gegeven door

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 2z \;;$$

$$z^2 \le x^2 + y^2 \le 3z^2 \;.$$

Schets L en bereken de inhoud van L.

4. Bereken de massa van de bol met middelpunt (0,0,1) en straal 1; de massadichtheid $m(x,y,z) = z$.

5. Bereken de massa en het zwaartepunt van het lichaam L dat begrensd wordt door $x^2 + y^2 = z^2$ en $z = 1$; de massadichtheid $m(x,y,z) = x^2z$.
Bereken ook het traagheidsmoment van L ten opzichte van de z-as.

6. Bereken de massa van het lichaam L in het eerste octant, dat begrensd wordt door $x^2 + z^2 = 4$ en $x + y = 2$; de massadichtheid

$$m(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \;.$$

Bereken ook het traagheidsmoment van L ten opzichte van de y-as.

WEEK 14

§ 6.3 (Berekening van lengte en oppervlakte).

1. Bereken de lengte van de kromme $y = \cosh x$ $(-1 \leq x \leq 1)$.
(Vergelijk § 2.7.3 van de syllabus Wisk. 17 en 27.)

2. Bereken de lengte van de boog van de kromme

$$\begin{cases} x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) \\ y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \end{cases} \qquad (0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}) .$$

(Afwikkeling van een cirkel; vergelijk opgave 13 van week 6.)

3. Bereken de lengte van de doorsnijdingskromme van de parabolische cylinder $2x - y^2 = 0$ met het vlak $x + z = 3$ (voor zover deze kromme boven het xy-vlak ligt).

4. Bereken de lengte van de kromme die in bolcoördinaten wordt gegeven door $\rho = 1$, $\varphi = \ln\tan\frac{\theta}{2}$ $(\frac{\pi}{2} \geq \theta > 0)$.
(Beweging op een bol in NW-richting.)

5. De kromme K wordt gegeven door $r^2 = 4\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Bereken de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door K, $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

6. Bereken de oppervlakte van het gebied binnen de cirkel $r = 2a\cos\varphi$ en buiten de cirkel $r = a$.

7. Teken de kromme $r = 1 + \cos\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ en bereken de oppervlakte van het gebied dat door deze kromme wordt ingesloten.

8. De kromme K is in poolcoördinaten gegeven door

$$r = \cos 2\varphi \qquad (-\tfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{4}) .$$

Bereken de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door K.

9. Bereken de oppervlakte van het deel van de cylinder $y^2 + z^2 = 36$, waarvoor geldt $z \geq 0$, $0 \leq y \leq 3 - x$, $x \geq 0$.

10. Bereken de oppervlakte van het oppervlak $3z = x^2 - y^2$ dat gelegen is binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 4$.

11. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de paraboloïde $2az = x^2 - y^2$, waarvan de projectie op het xy-vlak binnen de kromme $r = a\sqrt{\cos \varphi}$ valt.

12. Bereken de oppervlakte van het deel van het bolopppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, dat wordt afgesneden door de cylinder $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

4 juni 1975

1. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} x^n .$$

a) Bereken de convergentiestraal.

b) Bereken de som van de reeks voor die waarden van x, waarvoor de reeks convergeert.

2. Ontwikkel e^{x^2} in een machtreeks en bereken

$$\int_0^{0.5} e^{x^2} dx$$

met een fout, die kleiner is dan 10^{-3}.

3. a) In $\mathbb{R}^2$ is de kromme K gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = t^2 + 3t - 2 , \\ y = 2 - t - t^2 . \end{cases}$$

Bepaal een punt (x,y) op K waar de raaklijn aan K evenwijdig is aan de Y-as.

b) Zij het oppervlak V gegeven door

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{27} = 1 .$$

Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan V in het punt (-2,1,-3).

4. Bereken met de multiplicatorenmethode van Lagrange de extrema van

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

onder de voorwaarde $x^2 + y^2 = 1$.

5. Bereken

$$\iint_G y \sin(x^2)\, dxdy$$

waarbij G gegeven is door $y^2 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

6. Bepaal het volume van het lichaam gegeven door

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2} \ .$$

12 juni 1975 (herkansing)

1. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{2-x}{1-x}\right)^n .$$

a) Voor welke waarden van x convergeert de reeks?

b) Bereken de som van de reeks voor die waarden van x, waarvoor de reeks convergeert.

2. Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1+x) + \cos\frac{x}{2} - 2}{x^2} .$$

3. De functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2y} + \tfrac{1}{2}y \qquad (y \neq 0) ,$$

$$f(x,0) = 0 .$$

a) Schets de hoogtekaart van f.

b) Onderzoek de continuiteit van f in (0,0).

c) Bereken de partiële afgeleiden f_x en f_y in (0,0) en in (2,2).

d) Bereken de richtingsafgeleide van f in (2,2) in de richting $\frac{1}{5}(3,4)$.

4. Bereken de globale extrema van

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - x - y$$

onder de voorwaarde $x^2 + y^2 = 1$.

5. In $\mathbb{R}^3$ is het lichaam L gegeven door

$$0 \le z \le x,\ x^2 + y^2 - 2y \le 0 .$$

Schets L en bereken de inhoud van L.

6. Bereken door verandering van de integratievolgorde

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 dy \int_0^{\sqrt{y^2-x}} dz \ .$$

5 januari 1976

1. Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

convergent of divergent is.

2. a) Schrijf de eerste drie termen op van de Taylorreeks rond $x = 0$ van $\sqrt{4+x}$.
   b) Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 4}{\ln(1+x) + \ln(1-x)} .$$

3. In $\mathbb{R}^3$ is de kromme K gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 , \\ y = 2t , \\ z = t^2 + 1 . \end{cases}$$

   a) Bewijs dat de raaklijn aan K in het punt (0,2,2) de x-as snijdt in (-2,0,0).
   b) Bewijs dat de kromme K ligt op een niveauvlak van de functie

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 .$$

4. Bepaal de extrema van $f(x,y) = x^2y + y^3 + x$ op de verzameling

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

5. Bereken

$$\iint_G \ln \frac{x}{y}\, dxdy ,$$

waarbij G is gegeven door $\begin{cases} 1 \leq x \leq ey , \\ 1 \leq y \leq e . \end{cases}$

6. Bereken

$$\iiint_L z^2 \, dxdydz \ ,$$

waarbij L gegeven is door

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2} \ .$$

19 januari 1976 (herkansing)

1. Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^3 - 3n^2 + 1}$$

convergent of divergent is.

2. Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1 + 3x}}{1 - \cos 2x} .$$

3. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} & (x + y \neq 0) , \\ f(x,-x) = 0 . \end{cases}$$

a) Schets een hoogtekaart van de functie f.

b) Is de functie f continu in (0,0)?

c) Bereken de gradiënt van f in die punten (x,y) waarvoor geldt dat $x + y \neq 0$ is.

d) Bereken de richtingsafgeleide van f in het punt (1,1) in de richting $(\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}})$ en laat zien dat dit getal gelijk is aan de lengte van de gradiënt in (1,1).
Bereken ook de richtingsafgeleide in het punt (1,1) in de richting $(\frac{1}{\sqrt{2}} , -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

4. Gegeven is de begrensde kromme K gedefinieerd door de vergelijking

$$x^2 - xy + y^2 = 3 .$$

a) Bepaal, bijvoorbeeld met de multiplicatorenmethode van Lagrange, de extreme waarden van de functie $x^2 + y^2$ op deze kromme K.

b) Bepaal de punten op K waar de raaklijn aan K evenwijdig is aan de x-as.
Bepaal ook de punten op K waar de raaklijn aan K evenwijdig is aan de y-as.

c) Schets de kromme K.

5. In $\mathbb{R}^3$ is het lichaam L gegeven door

$$0 \le y \le x,\ x^2 + z^2 \le 1 .$$

Bereken $\iiint_L e^z dxdydz$.

6. Bereken de oppervlakte van het deel van het cylinderoppervlak $y^2 + z^2 = 1$, dat in het eerste octant en tussen de vlakken $x = 0$ en $x = y$ ligt.

9 juni 1976

1. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n+1} .$$

a) Voor welke waarden van x convergeert de reeks?

b) Bereken de som van de reeks voor die waarden van x, waarvoor de machtreeks convergeert.

2. Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{(1 - \cos x)^2} .$$

3. In $\mathbb{R}^2$ is de kromme K gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 , \\ y = t^3 + 7t . \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan K in het punt, dat correspondeert met $t = 1$.
Doe dit ook voor het punt, dat correspondeert met $t = t_0$.

b) Bepaal de raakpunten van de raaklijnen uit het punt (1,3) aan de kromme K.

4. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2$$

op de verzameling

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 \le 0\} .$$

5. Bereken de inhoud van het deel van de ruimte gegeven door

$$0 \le y \le x, \ 0 \le z \le \frac{1}{(x^2 + y^2)^2 + 1} .$$

6. De kromme K is in poolcoördinaten gegeven door

$$r = \sqrt{1 + \cos 2\varphi}, \qquad (-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) .$$

Bereken de lengte van K.

17 juni 1976 (herkansing)

1. Ontwikkel $\frac{\sin x}{x}$ in een machtreeks en bereken

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

met een afbreekfout, die kleiner is dan 10^{-2}.

2. Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x+x^2} - e^x - e^{x^2} + 1}{\arctan x - x} .$$

3. In $\mathbb{R}^3$ is het oppervlak V gegeven door de vergelijking

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 .$$

Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan V in het punt (2,2,1).

b) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn in het punt (2,2,1) aan de kromme

$$\begin{cases} x + y + z = 5 , \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 . \end{cases}$$

4. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 4)$$

op de verzameling

$$v = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\} .$$

5. Bereken

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx .$$

6. Bereken de oppervlakte van dat deel van de kegel met vergelijking

$$z^2 = x^2 + y^2 ,$$

waarvoor geldt

$$x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0, \; 1 - x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} .$$