Bibl / Mag

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 37

voor tweedejaarsstudenten van de afdeling Bouwkunde

Lineaire Algebra

Syllabus van het college van prof. dr. S.T.M. Ackermans

Dictaatnr. 2.267 Prijs ƒ 4,50

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 37

Syllabus van het college

Lineaire Algebra

van Prof. Dr. S.T.M. Ackermans

voor tweedejaarsstudenten van de afdeling Bouwkunde

Najaarssemester 1977

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 37

Syllabus van het college over

LINEAIRE ALGEBRA

voor tweedejaarsstudenten van

de afdeling BOUWKUNDE

gegeven door

PROF.DR. S.T.M. ACKERMANS

Najaarssemester 1977

VOORWOORD

Lineaire algebra is het deel van de wiskunde dat gegroeid is uit de theorie van de stelsels van eerstegraads vergelijkingen in meerdere onbekenden. Wiskundige beschrijvingen met behulp van eerstegraads (ook wel genoemd lineaire) betrekkingen worden in zeer veel gebieden van onderzoek gebruikt. Om die reden worden methoden en resultaten van de lineaire algebra toegepast in talrijke uiteenlopende gebieden van wetenschap. De grondslag van het succes van de lineaire algebra is de synthese van twee geheel verschillende benaderingswijzen, nl. de rekenkundige en de (abstract) meetkundige. In de eerste benadering is de lineaire algebra een techniek ontwikkeld om doelmatig en systematisch te rekenen met stelsels lineaire betrekkingen; in de meetkundige benadering worden de objecten uit de lineaire algebra voorgesteld als meetkundige grootheden, waardoor ze een aanschouwelijke inhoud krijgen. In dit college worden beide gezichtspunten besproken: het rekenkundige in hoofdstuk 1, waarin men tevens een aantal toepassingsgebieden van de lineaire algebra aangeduid vindt, het meetkundige in hoofdstuk 2. Het laatste hoofdstuk vat de verkregen inzichten samen.

De voorbeelden uit toepassingsgebieden zijn gekozen met als enig oogmerk de te ontwikkelen theorie te motiveren en illustreren; uiteraard geven zij een beeld van de bruikbaarheid van de behandelde ideeën, maar dit college geeft geen min of meer volledig overzicht over de toepassingen van de lineaire algebra.
Het voor de toepassingen uiterst belangrijke aspect van het numeriek uitwerken van problemen met behulp van een computer kan in dit college niet aan de orde komen.

INHOUDSOPGAVE

HOOFDSTUK 1. MATRIXREKENING 7

§ 1.1. Bewerkingen met matrices 7
§ 1.2. Toepassingen en voorbeelden 18

HOOFDSTUK 2. LINEAIRE RUIMTEN, LINEAIRE AFBEELDINGEN 32

§ 2.1. De ruimte $\mathbb{R}^n$ 32
§ 2.2. Lineaire deelruimten 41
§ 2.3. Afhankelijkheid en onafhankelijkheid 44
§ 2.4. Bases 48
§ 2.5. Het bepalen van een basis 51
§ 2.6. Lineaire afbeeldingen 56

HOOFDSTUK 3. LINEAIRE VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN 67

§ 3.1. Homogene lineaire vergelijkingen 67
§ 3.2. Inhomogene lineaire vergelijkingen 68
§ 3.3. Positieve oplossingen van stelsels lineaire vergelijkingen 72
§ 3.4. Lineaire ongelijkheden 81
§ 3.5. Iets over lineaire programmering 83

APPENDIX. DETERMINANTEN 87

HOOFDSTUK 1 MATRIXREKENING

§ 1.1. Bewerkingen met matrices

1.1.1. Matrices zijn rechthoekige schema's van getallen.
Voorbeelden

$$\begin{bmatrix} 1, & 4, & 4, & x \\ 2, & 1, & 2, & a \\ 3, & 0, & 0, & 6 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad [3, 5, 0, 4, 7] .$$

We spreken van rijen, kolommen, elementen. De volgende notaties voor een matrix met m rijen en n kolommen zijn gebruikelijk

$$A = A^{(m\times n)} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Is $A = [a_{ij}]$ een matrix dan duidt A_{ij} aan het element in de i-de rij en j-de kolom; dus $A_{ij} = a_{ij}$. Als de duidelijkheid er om vraagt gebruike men komma's: $[1, 2, 3, 7]$; $a_{i+1,j+1}$. Matrices met slechts één rij of slechts één kolom noemt men vectoren: (zie 2.1.1) rijvectoren, kolomvectoren; we noteren kolomvectoren vaak met onderstreepte letters: $\underline{a}$.
Vanuit het rekenkundige standpunt zijn matrices niet meer dan een hulpmiddel om ingewikkelde algebraïsche en numerieke berekeningen te systematiseren. We zullen voor matrices bewerkingen definiëren die generalisaties zijn van de bewerkingen met reële getallen (een reëel getal is op te vatten als een matrix met één rij en één kolom).
Zijn A en B matrices met hetzelfde aantal rijen en hetzelfde aantal kolommen (we zeggen dan dat A en B van hetzelfde formaat zijn) dan betekent $A \geq B$ dat

$$a_{ij} \geq b_{ij} \quad \text{voor alle i en j.}$$

1.1.2. Optelling

Als A en B matrices zijn van hetzelfde formaat dan is de som A + B gedefinieerd door

$$(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij} .$$

Anders geformuleerd: A + B = C met $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
$C = [c_{ij}]$ betekent: A, B en C hebben hetzelfde formaat en $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ voor alle voorkomende i en j.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & x & 1 \\ 2 & 5 & 0 & y & 3 \\ 3 & 6 & 0 & z & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 & x & 2 \\ 2 & 10 & 2 & y+3 & 5 \\ 3 & 6 & a & z+1 & 2 \end{bmatrix} .$$

1.1.3. Scalaire vermenigvuldiging

Is $A = [a_{ij}]$ een m × n matrix, $k \in \mathbb{R}$ (k een reëel getal), dan is kA de m × n matrix $[ka_{ij}]$. Dus

$$7\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 4 & y \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7x \\ 14 & 28 & 7y \\ 7 & 0 & 7z \end{bmatrix} .$$

We schrijven −A voor −1A. Duidt $\mathcal{O}$ een matrix aan waarvan alle elementen nul zijn (een zgn. nulmatrix) dan is $0A^{(m\times n)} = \mathcal{O} = \mathcal{O}^{(m\times n)}$.

1.1.4. Eigenschappen (als we bewerkingen met matrices aangeven is steeds zwijgend verondersteld dat de formaten zo zijn dat de bewerkingen gedefinieerd zijn; zie ook 1.1.5, 1.1.7, 1.1.8).

$$(A + B) + C = A + (B + C) = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]$$

$$A + B = B + A$$

$A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$ ($\mathcal{O}$ stelt hierin een nulmatrix voor van hetzelfde formaat als A)

$$A - A := A + (-A) = \mathcal{O}$$

$$(p + q)A = pA + qA$$

$$p(A + B) = pA + pB$$

$$p(qA) = (pq)A .$$

1.1.5. Blokmatrices

Vaak is het handig matrices opgebouwd te denken uit kleinere: bijvoorbeeld

$$\left[\begin{array}{cc|c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{17} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \hline a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_{57} \end{array}\right] =: \begin{bmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \end{bmatrix},$$

waarbij

$$P := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ldots, U = \begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{54} & \cdot & \cdot & a_{57} \end{bmatrix}.$$

Als alle formaten van overeenkomstige blokken overeenstemmen kan men matrices optellen door de blokken op te tellen:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}.$$

1.1.6. De getransponeerde matrix

Is A een $m \times n$ matrix dan is de getransponeerde A^T een $n \times m$ matrix die uit A ontstaat door rijen en kolommen te verwisselen.

Is

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

dan is

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

We hebben dus:

$$A^T_{ij} = A_{ji} \ ;$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T \ ;$$

de getransponeerde van een rijvector is een kolomvector.

1.1.7. Het inwendig product van vectoren

Zijn

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

vectoren met een gelijk aantal elementen, dan is het inwendige product $(\underline{u},\underline{v})$ gedefinieerd door:

$$(\underline{u},\underline{v}) := u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i \ .$$

Eenvoudig ziet men in dat:

$$(\underline{u},\underline{v}) = (\underline{v},\underline{u}) \ ;$$

$$(\underline{u},\underline{v}+\underline{w}) = (\underline{u},\underline{v}) + (\underline{u},\underline{w}) \ ;$$

$$(k\underline{u},\underline{v}) = k(\underline{u},\underline{v}) \ ; \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$(\underline{u},\underline{u}) \geq 0$ en uit $(\underline{u},\underline{u}) = 0$ volgt $\underline{u} = \underline{0}$, waarin $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, de nulvector.

We definieerden het inwendig product voor kolomvectoren; het kan met dezelfde formule ook voor rijvectoren of voor een kolom- en een rijvector.

1.1.8. Het matrixproduct

Van twee matrices A en B zullen we het product in de volgorde AB alleen definiëren indien het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B.

Is $A^{(m\times n)} = [a_{ij}]$; $B^{(n\times p)} = [b_{ij}]$, dan is $AB = C = [c_{ij}]$ een $m \times p$ matrix gedefinieerd door

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\,, \qquad i = 1,\ldots,m;\; k = 1,\ldots,p\,.$$

$$\underset{A^{(4\times 6)}}{\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}} \underset{B^{(6\times 3)}}{\begin{bmatrix} * & b_{12} & * \\ * & b_{22} & * \\ * & b_{32} & * \\ * & b_{42} & * \\ * & b_{52} & * \\ * & b_{62} & * \end{bmatrix}} \underset{=}{=} \underset{C^{(4\times 3)}}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & c_{32} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}}$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} + a_{35}b_{52} + a_{36}b_{62}\,.$$

Is $AB = C$ dan is het <u>element</u> in de i-de rij en de k-de kolom van C het inwendige product van de i-de rijvector van A met de k-de kolomvector van B.
In de notaties van 1.1.8 en 1.1.6 is $(\underline{u},\underline{v}) = \underline{u}^T\underline{v}$.
Nog een voorbeeld:

$$[a_1,a_2]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2] = a_1b_1 + a_2b_2$$

(bij een 1×1 matrix, d.i. een getal, laten we de haken weg);

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}[a_1,a_2] = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 \\ b_2a_1 & b_2a_2 \end{bmatrix}.$$

Men ziet dat de factoren in een matrixproduct <u>niet</u> verwisseld mogen worden. Bij $A^{(4\times 6)}$ en $B^{(6\times 3)}$ is AB wel maar BA niet gedefinieerd. Is A vierkant (d.i. $n \times n$) dan is AA gedefinieerd; we schrijven $AA = A^2$.

De volgende eigenschappen zijn door napuzzelen te verifiëren (denk aan de afspraak uit 1.1.4):

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(AB)^T = B^T A^T \ .$$

1.1.9. Voorbeeld

Een steenfabriek fabriceert stenen in vijf kwaliteiten. De fabriek heeft vier magazijnen met verkooppunten. Voorraadgegevens worden nu handig geadministreerd met 4×5 matrices waarbij de rijen overeenkomen met de magazijnen, de kolommen met de kwaliteiten.
Stelt A de aanwezige voorraad op 1 januari 1970 voor

$$\begin{array}{rc} \begin{array}{r} \text{magazijn } 1 \rightarrow \\ 2 \rightarrow \\ 3 \rightarrow \\ 4 \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \\ \text{kwaliteit} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \end{array}$$

(a_{34} is het aantal op 1-1-1970 aanwezige stenen in magazijn 3 van kwaliteit 4); Stelt $B^{(4\times5)}$ de door de fabriek aan de verkooppunten geleverde hoeveelheden en $C^{(4\times5)}$ de verkoop gedurende 1970 voor, dan is $A + B - C$ de voorraadsmatrix per 1-1-1971.
Laten we aannemen dat grondstofkosten, fabricagekosten en verkoopsprijs afhangen van de kwaliteit. Laat $g_1, g_2, \ldots, g_5$ de grondstofkosten, $f_1, f_2, \ldots, f_5$ de fabricagekosten en $v_1, v_2, \ldots, v_5$ de verkoopskosten per steen zijn. Laat

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & * & * & a_{15} \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ a_{41} & * & * & * & a_{45} \end{bmatrix}} \ \underset{V}{\begin{bmatrix} g_1 & f_1 & v_1 \\ g_2 & f_2 & v_2 \\ g_3 & f_3 & v_3 \\ g_4 & f_4 & v_4 \\ g_5 & f_5 & v_5 \end{bmatrix}} = \underset{P}{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ * & * & * \\ * & * & * \\ p_{41} & * & p_{43} \end{bmatrix}}$$

Dan stelt de k-de rij van P voor achtereenvolgens de in de voorraad van magazijn k geïnvesteerde grondstofkosten ($= p_{k1}$), de geïnvesteerde fabricagekosten ($= p_{k2}$), de verkoopswaarde ($= p_{k3}$).

Als

$$\begin{bmatrix} p_{11} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & p_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix},$$

dan is m_k de winst die gemaakt zou worden bij totale uitverkoop van magazijn k.

Noemen we

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan is de winst gemaakt per magazijn in 1970:

$$C\ V\ \underline{d} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}.$$

Is $\underline{j} = [1, 1, 1, 1]$, dan is de totale winst $\underline{j}C V\underline{d}$; verder is $\underline{j}C$ een 1×5 matrix: $[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5]$ waar s_m het aantal door alle 4 magazijnen gezamenlijk verkochte stenen van kwaliteit m ($m = 1,\ldots,5$) voorstelt; $V\underline{d}$ is een 5×1 matrix:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_5 \end{bmatrix}$$

waarin t_k de winst bij verkoop van één steen van kwaliteit k voorstelt.

1.1.10. Opmerkingen

(1) $$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & -1\end{bmatrix} = \mathcal{O} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -4\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -4\\0 & 2\end{bmatrix}.$$

Dus uit $PA = PB$ volgt niet $A = B$; uit $CQ = DQ$ volgt niet $C = D$; uit $QR = \mathcal{O}$ volgt niet $Q = \mathcal{O}$ of $R = \mathcal{O}$.

(2) Als A en B $n \times n$ matrices zijn, dan is

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

en omdat AB in het algemeen ongelijk aan BA is, is dit niet verder te vereenvoudigen.

(3) Eenheidsmatrix

$$I^{(n\times n)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & & 0\\0 & 1 & & \vdots\\0 & 0 & \ddots & \vdots\\0 & \vdots & & \vdots\\\vdots & \vdots & & 0\\0 & 0 & & 1\end{bmatrix}$$

d.w.z.

$$I_{ij} = \begin{cases}0 \text{ als } i \neq j\\1 \text{ als } i = j\end{cases}.$$

Nu is

$$A^{(m\times n)}\, I^{(n\times n)} = A^{(m\times n)}$$
$$I^{(n\times n)}\, B^{(n\times p)} = B^{(n\times p)}.$$

(4) Diagonaalmatrix

$D^{(n\times n)} = [d_{ij}]$ heet diagonaalmatrix indien $d_{ij} = 0$ als $i \neq j$. Rechtsvermenigvuldiging met een diagonaalmatrix betekent vermenigvuldiging van de kolommen, linksvermenigvuldiging betekent vermenigvuldiging van de rijen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_{11} & qa_{12} & ra_{13} \\ pa_{21} & qa_{22} & ra_{23} \\ pa_{31} & qa_{32} & ra_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_{11} & pa_{12} & pa_{13} \\ qa_{12} & qa_{22} & qa_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{bmatrix} .$$

(5) Een (vierkante) matrix heet symmetrisch als $A^T = A$.
Met iedere homogene kwadratische vorm in n veranderlijken correspondeert een symmetrische matrix. Bijvoorbeeld met $n = 3$

$$ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 = [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

Is A een $(n \times n)$ matrix en

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ,$$

dan is $\underline{x}^T A \underline{x}$ een homogene kwadratische vorm in $x_1, \ldots, x_n$. Bovendien is

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \tfrac{1}{2} \underline{x}^T (A + A^T) \underline{x} .$$

(6) Veranderingen van de volgorden van de rijen of kolommen van een matrix kan men verkrijgen door links- of rechtsvermenigvuldiging met zgn. <u>permutatiematrices</u>. We geven de algemene definitie maar beperken ons verder tot een voorbeeld van een 3×3 matrix. Zij f een één-éénduidige afbeelding van $\{1,2,3,\ldots,n\}$ op $\{1,2,3,\ldots,n\}$ (f heet een permutatie van $\{1,2,\ldots,n\}$), dan is de permutatiematrix P behorende bij f gedefinieerd door:

$$P_{ij}^{(n \times n)} = \begin{cases} 1 \text{ als } i = f(j) \\ 0 \text{ als } i \neq f(j) \end{cases} \qquad (i,j = 1,\ldots,n) ,$$

in elke rij en kolom van P staat dus precies één 1.

Laat nu een permutatie f van $\{1,2,3\}$ gegeven zijn door $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, dan is de permutatiematrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu is

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

Merk op dat de i-de kolom van AP gelijk is aan de f(i)-de kolom van A, terwijl voor PA geldt dat de i-de rij van A als f(i)-de rij van PA optreedt.

(7) Stelsels lineaire vergelijkingen zijn te beschouwen als speciale gevallen van matrixvermenigvuldiging. Is

$$A^{(m\times n)} = [a_{ij}], \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

dan is het stelsel

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ook te schrijven als: $A\underline{x} = \underline{b}$.

Als we dus een matrix $G^{(n\times m)}$ kunnen vinden zó dat $G^{(n\times m)}\,A^{(m\times n)} = I^{(n\times n)}$ dan is

$$GA\underline{x} = I\underline{x} = \underline{x} = G\underline{b}$$

een oplossing van (*).

(8) Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Als er een matrix B bestaat zodat $BA = I^{(n\times n)}$, dan heet B de inverse van A, notatie A^{-1}. Later (2.6.11) zullen we bewijzen dat dan ook $AA^{-1} = I$ en dat een vierkante matrix ten hoogste één inverse heeft. Eén voorbeeld:

Als we de inverse willen bepalen van $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ moeten we x, y, u en v vinden zó dat

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Of:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3u + 7v = 0 \\ 2u + 5v = 1 \end{cases} .$$

We vinden: $x = 5$, $y = -2$, $u = -7$, $v = 3$, en dus:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} .$$

Merk op dat

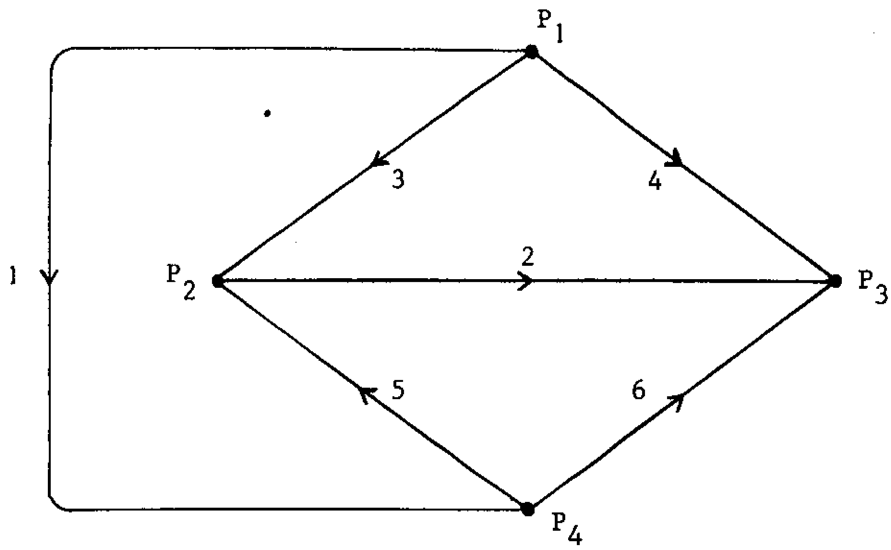
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

§ 1.2. Toepassingen en voorbeelden

Uit de veelheid van toepassingen van de matrixrekening kiezen we er enkele die een goede illustratie zijn van de overzichtelijkheid die door het gebruik van matrices gewonnen wordt. Men moet echter niet uit het oog verliezen dat we ons beperken tot eenvoudige problemen, en dat het voordeel van het benutten van lineaire algebra groter wordt naarmate de problemen gecompliceerder worden.

1.2.1. Een transportnetwerk

Vier steden P_1, P_2, P_3, P_4 bevatten ieder een gasfabriek. Er liggen zes pijpleidingen, 1 t/m 6, volgens onderstaand plaatje, die we willekeurig van een richting voorzien.



De prijs van een m^3 gas in P_k is w_k. Uit P_k wordt per tijdseenheid u_k m^3 gas uitgevoerd (u_k <0 betekent invoer); het prijsverschil tussen eindpunt en beginpunt van pijp ℓ is v_ℓ. Langs pijpleiding ℓ wordt per tijdseenheid t_ℓ m^3 gas vervoerd (t_ℓ < 0 betekent dat het transport tegen de pijlrichting in geschiedt). We nemen aan dat geen gas verloren gaat.

Zij

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}.$$

De onderlinge ligging van de steden en pijpleidingen wordt beschreven door een matrix $A^{(4\times 6)} = [a_{ij}]$ waarvan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } P_i \text{ beginpunt is van pijp } j; \\ -1 & \text{als } P_i \text{ eindpunt is van pijp } j; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De samenhang tussen $\underline{u}$, $\underline{t}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ wordt nu gegeven door

$$\underline{u} = A\underline{t} \; ; \quad \underline{v} = -A^T\underline{w} .$$

We kunnen de beschrijving uitbreiden met beschouwingen over transportkosten; we zullen dit niet doen. We wijzen er op dat volkomen analoge beschouwingen gelden voor electrische netwerken. Een systeem bestaande uit eindig veel punten met gerichte verbindingen heet een <u>gerichte graaf</u>. Een matrix zoals A heet de <u>incidentiematrix</u> van de gerichte graaf. Ook in andere problemen waarin de gerichte graaf een rol speelt is de incidentiematrix een machtig hulpmiddel.

1.2.2. Evenwicht van de prijsbalans

Een n tal producenten $P_1,\ldots,P_n$ produceren elk één product $g_1,\ldots,g_n$. P_i koopt en verbruikt per jaar een deel, nl. a_{ij}, van de jaarproductie van het product g_j. We nemen aan dat het systeem van producenten en producten gesloten is, d.w.z. dat de gehele productie aan $g_1,\ldots,g_n$ door $P_1,\ldots,P_n$ wordt verbruikt en dat niets van buiten het systeem wordt toegevoegd. (Deze aanname is iets minder streng dan op het eerste gezicht lijkt omdat we altijd kunnen veronderstellen dat een overproductie aan g_i door P_i wordt opgenomen en dus verrekend wordt in a_{ii}.)
Voor de matrix $A = [a_{ij}]$ geldt nu:

(i) $\quad a_{ij} \geq 0 \quad (i,j = 1,\ldots,n) \quad$ dus $\quad A \geq 0$;

(ii) $\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1,\ldots,n)$

($P_1,\ldots,P_n$ gebruiken per jaar de hele geproduceerde hoeveelheid g_j).
Een matrix A die voldoet aan (i) en (ii) heet ruilmatrix. Laat de prijs van de jaarproductie van g_j zijn w_j. De uitgave van P_i is dan $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j$; de inkomst van P_i is w_i (interpreteer dit goed als $a_{ii} > 0$).
Beschouw de prijsvector

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} .$$

Het productiesysteem met ruilmatrix A heet in evenwicht als er een prijsvector $\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ bestaat zó dat geen van de producenten $P_1,\ldots,P_n$ genoodzaakt is meer uit te geven dan hij ontvangt. Evenwicht betekent dus dat er $\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ bestaat zó dat

$$A\underline{w} \leq \underline{w} \text{ .} \tag{*}$$

Een vector $\underline{w}$ die aan (*) voldoet heet een stabiele prijsvector van A. Het lijkt alsof dit een ongelijkheid is; dit is echter niet zo, want:
Voor iedere $\underline{w}$ die aan $A\underline{w} \leq w$ voldoet is $A\underline{w} = \underline{w}$. Stel nl.

$$A\underline{w} \leq \underline{w} \quad \text{en} \quad w_k > \sum_{j=1}^{n} a_{kj}w_j \ ,$$

dan is

$$\sum_{i=1}^{n} w_i > \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j) = \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} w_j ,$$

hetgeen onmogelijk is. De stabiele prijsvectoren zijn dus oplossingen $\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ van $A\underline{w} = \underline{w}$ ($\underline{w}$ heet een eigenvector van A, zie 2.6.11) ofwel $(I - A)\underline{w} = \underline{0}$. Als $\underline{w}$ een oplossing is en $r \geq 0$, dan is ook $r\underline{w}$ een oplossing; voor evenwicht is alleen de onderlinge verhouding der prijzen van belang. Men kan bewijzen dat er bij iedere A die aan (i) en (ii) voldoet een $\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ bestaat met $A\underline{w} = \underline{w}$.

1.2.3. Input-output-analyse

Een concern bestaat uit n fabrieken $F_1,\dots,F_n$ die elk één product maken: $g_1,\dots,g_n$ resp. Voor de bereiding van één eenheid g_j gebruikt fabriek F_j een hoeveelheid van b_{ij} eenheden van product g_i.
De matrix $B = [b_{ij}]$ heet de consumptiematrix van het productiesysteem. Kennelijk is $B \geq \mathcal{O}$. Als e_i de hoeveelheid van product g_i is die niet binnen het concern gebruikt wordt, x_i de geproduceerde hoeveelheid van g_i, dan is

$$x_i = e_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \qquad (i = 1,\dots,n) .$$

Met

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

kan dit geschreven worden als: $\underline{x} = \underline{e} + B\underline{x}$ of $(I - B)\underline{x} = \underline{e}$.
Laat nu $B \geq \mathcal{O}$ gegeven zijn; we willen nu B beschouwen als de consumptiematrix van een productiesysteem als zoëven beschreven. Nu doen zich de volgende vragen voor.

(i) Is dit mogelijk, d.w.z. bestaat er een $\underline{x} \geq \underline{0}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ zó dat

$$(I - B)\underline{x} \geq \underline{0} \ ?$$

(ii) Zo ja, welke van de producten $g_1,\dots,g_n$ worden in overschot door het systeem geleverd; we zeggen dat het systeem g_i effectief produceert indien er een $\underline{x} \geq \underline{0}$ bestaat zó dat

$$(I - B)\underline{x} \geq \underline{0} \quad \text{en} \quad x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j > 0 \ .$$

(iii) Gegeven een systeem dat alle producten $g_1,\dots,g_n$ kan produceren, dan is het uiteraard mogelijk een gevraagde productie $\underline{e}$ te maken; d.w.z. er is een $\underline{x} \geq \underline{0}$ zó dat $(I - B)\underline{x} \geq \underline{e}$. Men kan bewijzen dat het dan ook mogelijk is de gevraagde productie precies te leveren zonder enig overschot van één van de producten. D.w.z. men kan een niet negatieve oplossing vinden van het stelsel in $x_1,\dots,x_n$ (de benodigde hoeveelheden):

$$(I - B)\underline{x} = \underline{e} \ .$$

Voor elke $\underline{e} \geq \underline{0}$ blijkt de oplossing dan éénduidig bepaald te zijn:

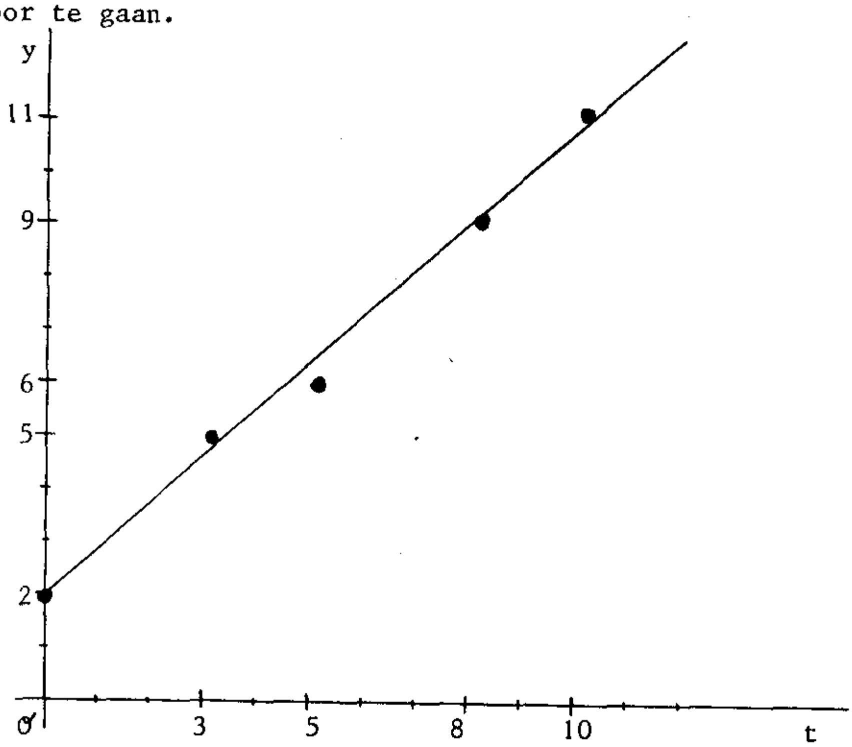
$$\underline{x} = (I - B)^{-1}\underline{e} \ .$$

1.2.4. De methode der kleinste kwadraten

Het gebeurt in de praktijk heel vaak dat we metingen verrichten van een verschijnsel dat afhangt van een veranderlijke.
Meten we bijv. de afgelegde weg van een deeltje dat zich met constante snelheid beweegt, dan is de gemeten grootheid, y, afhankelijk van de tijd, t.
Laat het volgende tabelletje de meetresultaten weergeven:

t	0	3	5	8	10
y	2	5	6	9	11

Anderzijds weten we dat het verband tussen y en t lineair is: $y = vt + a$.
Als we in een grafiek de waarnemingsuitkomsten uitzetten blijkt er <u>geen</u> rechte door te gaan.



Dit brengt ons op het probleem de rechte te vinden die het "best" past bij de gevonden resultaten. We moeten een criterium hebben dat aangeeft wat we onder "best" verstaan. Men gebruikt meestal het volgende:
Laat $\underline{t} = [t_1,\ldots,t_n]$ de waarden van de onafhankelijke veranderlijke zijn, $\underline{y} = [y_1,\ldots,y_n]$ de gemeten waarden. Dan is $y_i = vt_i + a + r_i \quad (i = 1,\ldots,n)$.
We trachten nu die waarden van de getallen v en a te vinden waarvoor $\sum_1^n r_i^2$ minimaal is.
We moeten dus v en a bepalen zó dat

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - vt_i - a)^2$$

minimaal is. Laat $\underline{e} = [1,1,1,\ldots,1]$ zijn. Nu is (zie 1.1.7):

$$S = (\underline{y} - v\underline{t} - a\underline{e},\ \underline{y} - v\underline{t} - a\underline{e}) =$$

$$= v^2(\underline{t},\underline{t}) + 2av(\underline{t},\underline{e}) + a^2(\underline{e},\underline{e}) - 2v(\underline{y},\underline{t}) - 2\underline{a}(\underline{y},e) + (\underline{y},\underline{y}) \ .$$

S is dus een gewone tweedegraads vorm in a en v.

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial v} = 2v(\underline{t},\underline{t}) + 2a(\underline{t},\underline{e}) - 2(\underline{y},\underline{t}) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial a} = 2v(\underline{t},\underline{e}) + 2a(\underline{e},\underline{e}) - 2(\underline{y},\underline{e}) = 0 \,. \end{cases}$$

Dit zijn 2 vergelijkingen waaruit de v en a te berekenen zijn (zie § 3.1). Omdat $(\underline{t},\underline{t})(\underline{e},\underline{e}) \geq (\underline{t},\underline{e})^2$ (zie 2.1.6), is er sprake van een minimum.
In ons voorbeeld vinden we voor (*)

$$\begin{cases} 198v + 26a = 227 \\ 26v + 5a = 33 \end{cases}$$

met als oplossing $v \approx 0{,}88$, $a \approx 2{,}01$.

1.2.5. Markov processen. Een bevolkingsprobleem

In een land trekt elk jaar 2½% van de plattelandsbevolking naar de stad en vestigt zich 1% van de stadsbevolking op het platteland. In het jaar t = 0 woont 60% van de bevolking in de stad; 40% op het land. Hoe is de situatie 1 jaar later en 10 jaar later en op den duur?
Zij

$$\underline{x}_t = \begin{bmatrix} s_t \\ \ell_t \end{bmatrix}$$

waarbij s_t het gedeelte van de totale bevolking, N, is dat in jaar t in de stad woont en ℓ_t het gedeelte dat op het land woont. Dan is:

$$\begin{cases} s_1 N = 0{,}99\ s_0 N + 0{,}025\ \ell_0 N \\ \ell_1 N = 0{,}01\ s_0 N + 0{,}975\ \ell_0 N \end{cases} .$$

Met

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0{,}025 \\ 0{,}01 & 0{,}975 \end{bmatrix}$$

staat hier: $\underline{x}_1 = P\underline{x}_0$. Hieruit volgt $\underline{x}_{10} = P^{10}\underline{x}_0$. (Merk op dat de Markov matrix, P, een matrix is van het soort dat in 1.2.3 ruilmatrix genoemd werd.) De verdeling op den duur zou iets betekenen als $\lim_{t\to\infty} P^t\underline{x}_0$. Als we een eigenvector $\underline{x}$ bij eigenwaarde 1 (zie 2.6.11) kunnen vinden, d.w.z. een oplossing $\underline{x} \neq \underline{0}$ van $P\underline{x} = \underline{x}$, dan is dat een stabiele verdeling. Schrijven we

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$$

dan is de oplossing van $P\underline{x} = \underline{x}$ de vector:

$$\underline{x} = \frac{1}{p+q}\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} .$$

In de stabiele toestand woont dus $\frac{q}{p+q} = \frac{5}{7}$ deel van de bevolking in de stad.

1.2.6. Nog een Markov proces

De totale cementmarkt in een land is in handen van slechts drie leveranciers A, B, C. Elk jaar verliest A 5% van zijn klanten aan B en 10% aan C; 85% van de klanten blijft A trouw. Leverancier B behoudt 75% van zijn klanten; hij verliest 15% aan A en 10% aan C. C behoudt 90%, verliest 5% aan A en 5% aan B.
In zeker jaar was de verdeling van de kopers over A, B en C resp. 40%, 20% en 40%. Hoe was het een jaar later; en twee jaar later? Welke verdeling van de klanten aantallen is de stabiele? Het antwoord op deze vragen geeft aanleiding tot rekenwerk als in 1.2.5.

1.2.7. Kevers uit Birma

In Birma leeft een soort kevers, waarvan de maximale levensduur drie jaar is. Voortplanting vindt alleen in het derde jaar plaats. Neem aan dat het gedeelte van de éénjarigen dat het tweede levensjaar ingaat p is; het gedeelte van de tweejarigen dat overleeft tot in het derde jaar zij q; en het gemiddelde aantal nakomelingen van een driejarige kever zij r. (We rekenen alsof elke driejarige precies r nakomelingen heeft.)

Zij het aantal eenjarige kevers in jaar t x_t, het aantal tweejarige y_t en het aantal driejarige z_t, dan is

$$\underline{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} .$$

Hieruit volgt dat $\underline{x}_{t+3} = pqr\ \underline{x}_t$, zodat de keverpopulatie uitsterft als $pqr < 1$, toeneemt als $pqr > 1$, stabiel is (gerekend per driejarige cyclus!) als $pqr = 1$.

1.2.8. Het dieetprobleem

We bespreken nu enkele voorbeelden waar het essentieel gaat om het vinden van het maximum of minimum van een lineaire vorm $f(\underline{x}) := (\underline{a},\underline{x})$ in $\underline{x}$, als $\underline{x}$ tevens voldoet aan een aantal vergelijkingen of ongelijkheden. Optimaliseringsproblemen als deze behoren tot het terrein der lineaire programmering (zie § 3.5). In het klassieke voorbeeld van het dieet gaat het over de samenstelling van een gezonde voeding tegen minimale kosten. Laat er n levensmiddelen $L_1,\dots,L_n$ beschikbaar zijn, bijv. brood, aardappelen, bonen, enz. Een dieet

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

is een lijst bevattende de dagelijks te eten hoeveelheden van $L_1,\dots,L_n$. De benodigde voedingsstoffen zijn $S_1,\dots,S_m$, bijv. eiwit, vet, koolhydraat, calcium, vitamine A, enz. Laat in $A^{(m\times n)} = [a_{ij}]$ het element a_{ij} aangeven het aantal eenheden S_i in een eenheid L_j. Laat de dagelijkse behoefte aan S_i zijn b_i eenheden; zij

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

Voor een goed dieet is $A\underline{d} \geq \underline{b}$. Als p_j de prijs is van een eenheid L_j en $p = [p_1,\dots,p_n]$, dan is de dagelijkse prijs van het dieet: $pr(\underline{d}) := (\underline{p},\underline{d})$.

De taak van de diëtist is nu: vind bij gegeven A, $\underline{b}$ en $\underline{p}$ onder alle vectoren $\underline{d}$ die voldoen aan:

$$\underline{d} \geq 0$$
$$A\underline{d} \geq \underline{0}$$

er een waarvoor $(\underline{p},\underline{d})$ minimaal is.
We zullen in 3.5.2 zien dat we zulke problemen steeds kunnen schrijven als: vind onder de positieve oplossingen $\underline{x} \geq 0$ van een stelsel vergelijkingen $B\underline{x} = \underline{c}$ er één waarvoor een lineaire vorm $(\underline{q},\underline{x})$ minimaal is.

1.2.9. De volgende opgave is een voorbeeld van het type problemen aangegeven in 1.2.8.
Grondstof voor beton is een mengsel van zand, grint en beton. Het gewicht van zand, grint, cement per m^3 zij resp. 3, 4, 2 ton. De prijs van zand, grint en cement per m^3 bedraagt 20, 30, 50 gulden resp. Wegens kwaliteitseisen moet een betonmengsel voor tenminste 30 volume % uit cement en voor ten hoogste 20 volume % uit grint bestaan.
Typische vragen zijn nu:

1. Wat is de mengverhouding van het goedkoopste mengsel?
2. Hoeveel weegt het zwaarste mengsel dat aan de kwaliteitseisen voldoet; wat kost dit per m^3; wat is de samenstelling van dit beton?
3. Wat is het zwaarste mengsel dat voor ten hoogste ƒ 30,-- per m^3 geleverd kan worden?

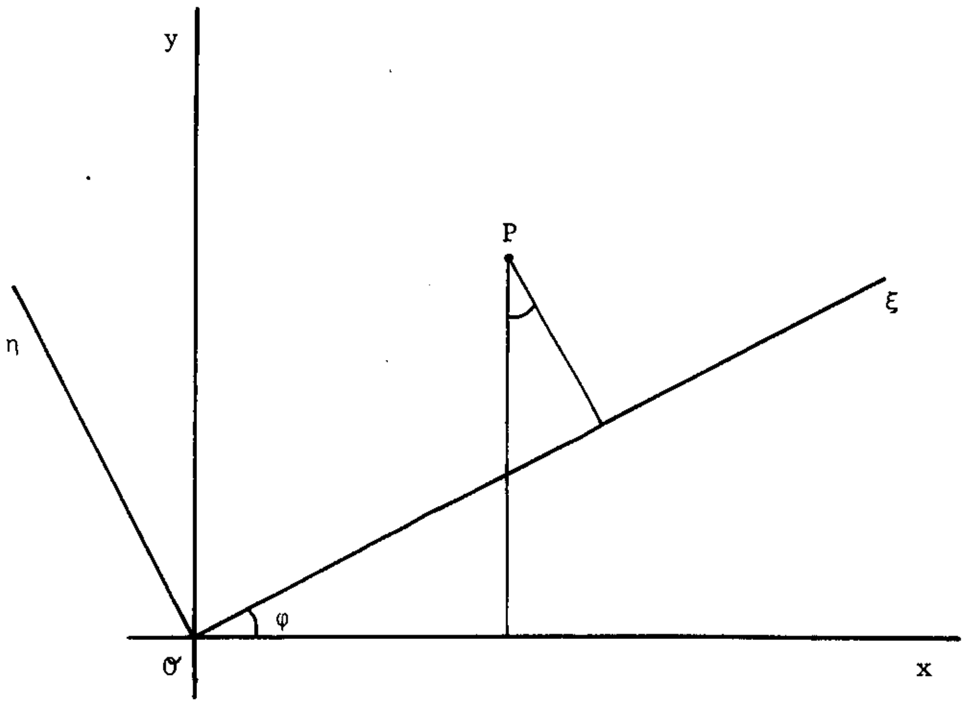
1.2.10. Klassificatie van kegelsneden

Beschouw de kromme K in het XY vlak met vergelijking

$$ax^2 + 2kxy + by^2 = c \ . \qquad (1)$$

Merk op dat de oorsprong punt van symmetrie is: als $(x_0,y_0) \in K$, dan is ook $(-x_0,-y_0) \in K$.

We proberen door een draaiing van het assenkruis de vergelijking in de vorm $\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = c$ te krijgen.



De samenhang tussen oude en nieuwe coördinaten is:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ y &= \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi . \end{aligned} \tag{2}$$

We schrijven

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & k \\ k & b \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} .$$

Nu is (1) te schrijven als

$$\underline{x}^T A \underline{x} = c$$

en (2) is te schrijven als

$$\underline{x} = S\underline{\xi} , \quad \underline{x}^T = \underline{\xi}^T S^T ,$$

waaruit volgt

$$\underline{\xi} = S^T \underline{x} . \tag{3}$$

In het (ξ,η) stelsel heeft K als vergelijking

$$\underline{\xi}^T S^T A S \underline{\xi} = c . \tag{4}$$

Als

$$S^T AS = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$$

dan is

$$\alpha = a \cos^2\varphi + 2k \cos\varphi \sin\varphi + b \sin^2\varphi$$

$$\gamma = (b - a)\sin\varphi \cos\varphi + k(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$\beta = a \sin^2\varphi - 2k \sin\varphi \cos\varphi + b \cos^2\varphi \ .$$

We bepalen φ zō dat $\tan 2\varphi = \frac{2k}{a-b}$, dan is $\gamma = 0$ en

$$S^T AS = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} =: D \ .$$

De vorm (4) is nu $\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = c$.
Uit (3) volgt $S^T S = SS^T = I$. We zetten

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}; \ \underline{t} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

dan is $S = [\underline{s},\underline{t}]$. Nu is $AS = SD$ ofwel $A\underline{s} = \alpha\underline{s}$, $A\underline{t} = \beta\underline{t}$ (zie 2.6.11).

1.2.11. Een productieproces

We besluiten deze paragraaf met een iets ingewikkelder voorbeeld.
Een drinkwaterfabriek maakt ruw grondwater geschikt voor levering aan een waterleidingbedrijf door het viermaal een periode van biologische zuivering te laten doormaken. Deze vier perioden zijn even lang. Het bedrijf beschikt over vier bassins, genummerd 1,2,3,4 waarin achtereenvolgens de eerste, tweede, derde en vierde zuivering plaatsvindt. Alle vier bassins zijn gelijktijdig in bedrijf. Na afloop van elke zuiveringsperiode wordt water overgepompt van bassin 4 naar het waterleidingbedrijf, van bassin 3 naar 4, van 2 naar 3 en van 1 naar 2. Bij het overpompen van water uit bassin i $(i = 1,2,3,4)$ blijft een vast deel, d, van de inhoud in bassin i achter, een vast deel b, komt in de volgende productiefase, de rest, $1 - b - d$, gaat bij het overpompen verloren. Tenslotte wordt voor de nieuwe periode ingaat N m^3 onbewerkt grondwater in bassin 1 gebracht. In de vector $\underline{s}(t) = [s_1(t),s_2(t),s_3(t),s_4(t)]^T$ stelt $s_i(t)$ het aantal m^3 water voor, dat zich gedurende periode t in bassin i bevindt. Aan het einde van periode t wordt dan $bs_4(t)$ m^3 aan het waterleidingbedrijf geleverd. Zij

$$v := \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; A := \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix},$$

dan is $\underline{s}(t+1) = \underline{v} + A\underline{s}(t)$.

We willen berekenen hoe groot de inhoud van de bassins moet zijn opdat deze elke periode dezelfde is. Dit betekent dat we moeten proberen een $\underline{s} \in \mathbb{R}^4$ te vinden die voldoet aan $\underline{s} = \underline{v} + A\underline{s}$. Anders geschreven: $(I-A)\underline{s} = \underline{v}$. We kunnen dit direct oplossen en vinden dan

$$\underline{s} = N[\frac{1}{1-d}, \frac{b}{(1-d)^2}, \frac{b^2}{(1-d)^3}, \frac{b^3}{(1-d)^4}]^T .$$

We bespreken echter een andere gedachtengang. Als we over een inverse van $I-A$ zouden beschikken zou de oplossing zijn: $\underline{s} = (I-A)^{-1}\underline{v}$. Nu is

$$(I-A)(I+A+A^2+\ldots+A^n) = I - A^{n+1} .$$

Dit doet ons aan machtreeksen denken. We definiëren een limietbegrip voor matrices aldus: $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ betekent dat alle B_n en B hetzelfde formaat hebben en dat $\lim_{n\to\infty} (B_n)_{ij} = B_{ij}$ voor alle i en j.

We zullen nu bewijzen dat de matrix-machtreeks $I + A + A^2 + A^2 + \ldots$ convergeert. Het is dan duidelijk dat de som de inverse is van $I - A$. Zij

$$Z := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan is

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; Z^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en $Z^4 = 0$. Nu geldt $A = dI + bZ$; $A^2 = d^2I + 2bdZ + b^2Z^2$ (denk aan $IZ = ZI = Z$) $A^3 = d^3I + 3d^2bZ + 3bd^2Z^2 + b^3Z^3$. Omdat $Z^4 = 0$ is algemeen:

$$A^n = d^nI + \binom{n}{1}d^{n-1}bZ + \binom{n}{2}d^{n-2}b^2Z^2 + \binom{n}{3}d^{n-3}b^3Z^3 .$$

(We gebruiken hierin het binomium van Newton.)

Hieruit volgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (\sum_{n=0}^{\infty} d^n)I + (\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} d^{n-1})bZ + (\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} d^{n-2})b^2Z^2 +$$

$$+ (\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} d^{n-3})b^3Z^3 .$$

Op grond van de convergentie van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} d^n = (1 - d)^{-1}$$

en van haar afgeleiden naar d vinden we

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - d)^{-1}I + (1 - d)^{-2}bZ + (1 - d)^{-3}b^2Z^2 + (1 - d)^{-4}b^3Z^3 =$$

$$= \begin{bmatrix} (1-d)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ (1-d)^{-2}b & (1-d)^{-1} & 0 & 0 \\ (1-d)^{-3}b^2 & (1-d)^{-2}b & (1-d)^{-1} & 0 \\ (1-d)^{-4}b^3 & (1-d)^{-3}b^2 & (1-d)^{-2}b & (1-d)^{-1} \end{bmatrix} = (I - A)^{-1} .$$

HOOFDSTUK 2 LINEAIRE RUIMTEN EN LINEAIRE AFBEELDINGEN

§ 2.1. De ruimte $\mathbb{R}^n$

2.1.1. De verzameling van alle kolomvectoren met n rijen noemen we $\mathbb{R}^n$ ($n = 1,2,\ldots$). In het verleden (wiskunde IB) schreven we de elementen van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ als rijvectoren; voor de meetkundige interpretatie maakt het echter geen verschil of we de coördinaten van een punt onder of naast elkaar schrijven.
Voor elementen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van $\mathbb{R}^n$ definieerden we in § 1.1: $\underline{a} + \underline{b}$, $r\underline{a}$ ($r \in \mathbb{R}$), $(\underline{a},\underline{b})$. Als we de elementen van een vector uit $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ beschouwen als coördinaten van een punt hebben deze bewerkingen een meetkundige betekenis.

Als we een punt opvatten als het eindpunt van een pijl (deze pijl noteren we ook weer met $\underline{a}$) die in $\mathcal{O}$ begint, dan zijn $\underline{a} + \underline{b}$ (parallellogram van krachten) en $r\underline{a}$ juist de bewerkingen die men in de mechanica met zulke pijlen (daar eveneens geheten vectoren) toepast. We zullen in de toekomst de pijlbeschouwing en de puntbeschouwing gelijktijdig toepassen.

2.1.2. Het inwendig product in $\mathbb{R}^2$

Zij $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ dan is $\sqrt{(\underline{a},\underline{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ de afstand van $\underline{a}$ tot 0. We noemen dit ook de lengte van de pijl $\underline{a}$, notatie $\|\underline{a}\|$. Eveneens is $\sqrt{(\underline{a}-\underline{b}, \underline{a}-\underline{b})}$ de afstand van $\underline{a}$ tot $\underline{b}$.
Volgens de cosinusregel is:

$$(\underline{a}-\underline{b},\underline{a}-\underline{b}) = (\underline{a},\underline{a}) + (\underline{b},\underline{b}) - 2\|\underline{a}\|\,\|\underline{b}\|\cos\varphi, \quad (\varphi \text{ is de hoek tussen } \underline{a} \text{ en } \underline{b})$$

hieruit volgt

$$(\underline{a},\underline{b}) = \|\underline{a}\|\,\|\underline{b}\|\cos\varphi\ .$$

Nu betekent $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ dat de lijnstukken $\mathcal{O}\underline{a}$ en $\mathcal{O}\underline{b}$ onderling loodrecht zijn.

Opmerking. De analoge interpretatie van $(\underline{a},\underline{a})$ en $(\underline{a},\underline{b})$ voor $\underline{a}$ en $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ is eenvoudig te verifiëren.

Opmerking. Als een massapunt van $\underline{a}$ naar $\underline{b}$ verplaatst wordt onder invloed van een kracht die in grootte en richting overeenkomt met $\underline{k}$, dan is de verrichte arbeid: $(\underline{k},\underline{b} - \underline{a})$.

2.1.3. Meetkunde met vectoren in $\mathbb{R}^2$

De verzameling $\{\underline{x} = [x,y] \mid \underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v},\ \lambda \in R\}$ is bij vaste $\underline{a}$ en $\underline{v}$, $\underline{v} \neq 0$ uit $\mathbb{R}^2$, de verzameling van alle (pijlen met beginpunten in $\mathcal{O}$ en eind-) punten op een rechte door $\underline{a}$ waarvan de richting dezelfde is als van (het segment beginnend in $\mathcal{O}$ en eindigend in) $\underline{v}$. De uitdrukking $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v}$ heet een parametervoorstelling van deze rechte; $\underline{a}$ heet steunvector, $\underline{v}$ heet richtingsvector.

Voorbeeld 1. $\underline{x} = [1,2] + \lambda[3,1]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Op deze rechte ligt $\underline{x} = [10,5]$, want we kunnen een λ vinden zo dat

$$\begin{cases} 10 = 1 + 3\lambda \\ 5 = 2 + \lambda \end{cases}$$

nl. $\lambda = 3$. Het punt $[4,-1]$ ligt niet op de rechte. Het snijpunt met de x-as is te vinden uit:

$$\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{cases} p = 1 + 3\lambda \\ 0 = 2 + \lambda \end{cases}$$

waaruit volgt: $\lambda = -2$, $p = -5$.
Om de vergelijking van de rechte te vinden moeten we λ elimineren uit

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda\ . \end{cases}$$

Resultaat $x - 3y + 5 = 0$.
Is omgekeerd een vergelijking gegeven: $2x + y - 12 = 0$, dan zijn heel gemakkelijk parametervoorstellingen te vinden. Bijv. neem $x = \lambda$, dan is $y = -\ 2\lambda + 12$. Dus

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

Voorbeeld 2. Zij $\underline{x} = [2,1] + \lambda[3,1]$ een parametervoorstelling van ℓ_1; $2x + y - 12 = 0$ de vergelijking van ℓ_2, dan vinden we het snijpunt door λ te berekenen uit $2(2 + 3\lambda) + (1 + \lambda) - 12 = 0$, $\lambda = 1$, en in te vullen in de parametervoorstelling van ℓ_1: het snijpunt is $[5,2]$.

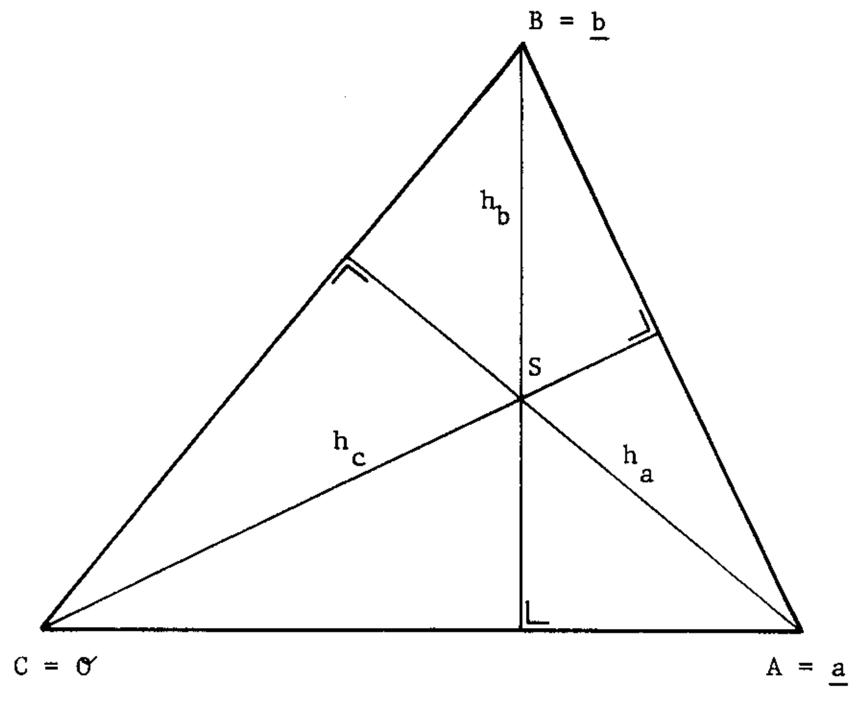
Voorbeeld 3. De vergelijking van een lijn $\perp \underline{v}$ is: $(\underline{x},\underline{v}) = C$. De richtingsvector van een normaal van een rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ is $[a,b]$.

Een vector met de grootte en richting van het verbindingssegment van $A = [a_1,a_2]$ en $B = [b_1,b_2]$ is $[a_1 - b_1, a_2 - b_2]$. Een parametervoorstelling van de lijn door AB is nu:

$$\underline{x} = [a_1,a_2] + \lambda[a_1 - b_1, a_2 - b_2] .$$

We illustreren vectorbeschouwingen nu aan enkele bekende stellingen uit de planimetrie.

Voorbeeld 4. De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.



Plaats de driehoek als in de figuur: $C = \mathcal{O}$, $A = \underline{a}$, $B = \underline{b}$.
Vergelijking van

$$h_a\text{: } (\underline{b},\underline{x}) = (\underline{b},\underline{a})$$

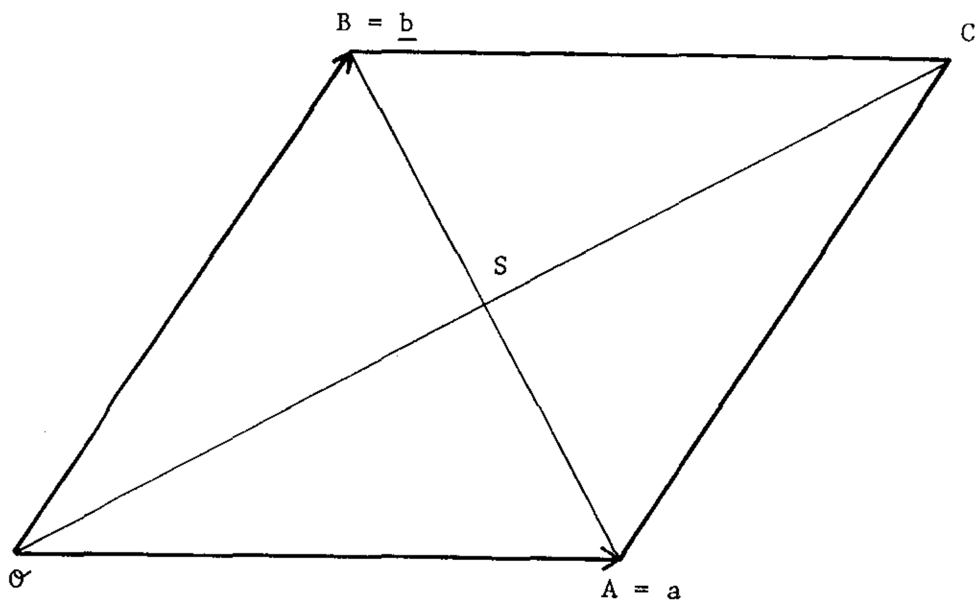
$$h_b\text{: } (\underline{a},\underline{x}) = (\underline{a},\underline{b}) .$$

Het snijpunt $S = \underline{s}$ voldoet aan

$$(\underline{a},\underline{s}) = (\underline{a},\underline{b}) = (\underline{b},\underline{s}) .$$

$\mathcal{O}S$ heeft richtingsvector $\underline{s}$ (parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda\underline{s}$). AB heeft richtingsvector $\underline{b} - \underline{a}$. Nu is $(\underline{b} - \underline{a}, \underline{s}) = 0$ dus $\mathcal{O}S$ is een hoogtelijn, q.e.d.

Voorbeeld 5. De diagonalen in een ruit delen elkaar loodrecht middendoor.



Plaats de ruit met één hoekpunt in $\mathcal{O}$. Uit het feit dat OACB een ruit is volgt:

$$C = \underline{a} + \underline{b} \; ; \quad (\underline{a},\underline{a}) = (\underline{b},\underline{b}) \; .$$

Parametervoorstelling van $\mathcal{O}C$ is: $\underline{x} = \lambda(\underline{a} + \underline{b})$, van AB: $\underline{x} = \underline{a} + \mu(\underline{b} - \underline{a})$. Nu is

$$(\underline{a} + \underline{b},\, \underline{b} - \underline{a}) = (\underline{a},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{a}) + (\underline{b},\underline{b}) - (\underline{b},\underline{a}) = 0 \; ;$$

dus $\mathcal{O}C \perp BA$. S volgt uit:

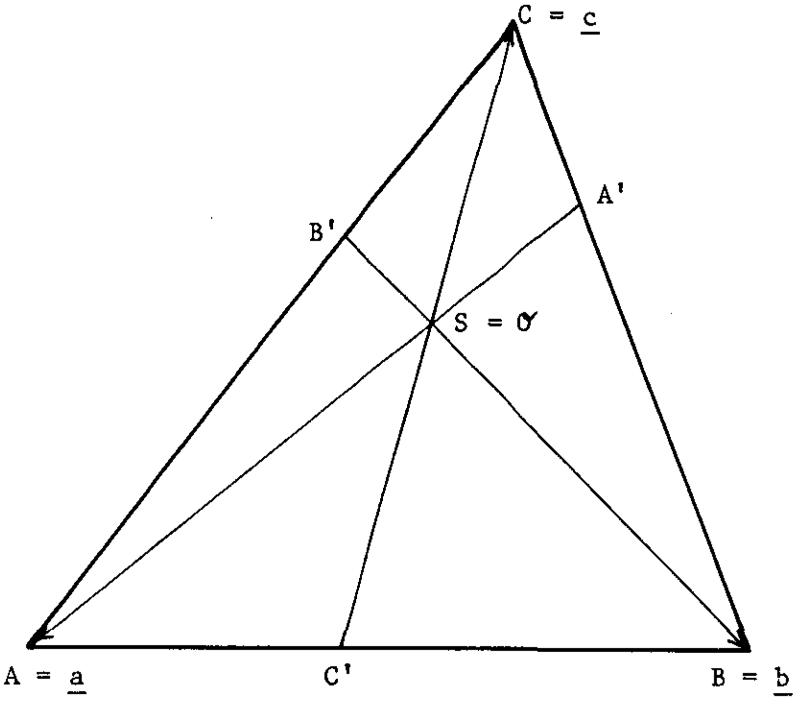
$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{a} + \mu(\underline{b} - \underline{a}) \quad \text{of} \quad (\lambda + \mu - 1)\underline{a} = (\mu - \lambda)\underline{b} \; .$$

Van deze twee laatste vectoren valt de linker langs $\mathcal{O}A$, de rechter langs $\mathcal{O}B$, dus beide zijn $\underline{0}$ (vergelijk met § 2.3). Dus

$$\begin{cases} \lambda + \mu - 1 = 0 \\ \mu - \lambda \qquad = 0 \end{cases} ; \quad \lambda = \mu = \tfrac{1}{2} \; ; \quad \mathcal{O}S = \tfrac{1}{2}\mathcal{O}C \; , \quad \text{q.e.d.}$$

<u>Voorbeeld 6</u>. Stelling van <u>de Ceva</u>. S is een willekeurig punt binnen Δ ABC; AS, BS en CS snijden de overstaande zijden in A', B', C'. Nu geldt:

$$\frac{\overline{AB'}\cdot\overline{BC'}\cdot\overline{CA'}}{\overline{A'B}\cdot\overline{B'C}\cdot\overline{C'A}} = 1 \qquad (\overline{AB'} \text{ duidt de lengte van AB' aan}).$$



We kiezen S = $\underline{0}$, A =: $\underline{a}$, B =: $\underline{b}$, C =: $\underline{c}$. Dan is lijn SA': $\underline{x} = \lambda\underline{a}$; lijn BC: $\underline{x} = \underline{b} + \mu(\underline{b} - \underline{c})$; omdat A' op BC ligt zijn er getallen r_1 en r_3 zó dat $r_1\underline{a} = \underline{b} + r_3(\underline{b} - \underline{c})$. Noem $r_3 + 1 := -r_2$, dan geldt $r_1\underline{a} + r_2\underline{b} + r_3\underline{c} = 0$. (Zie ook § 2.3.)

We kunnen nu lijn BC ook schrijven met $\mathcal{O}$A' als steunvector:

$$\underline{x} = r_1\underline{a} + \nu(\underline{b} - \underline{c}) \ .$$

Een vector, $\nu_c(\underline{b} - \underline{c})$ met grootte en richting van het lijnstuk CA', is nu te vinden uit:

$$\underline{c} = r_1\underline{a} + \nu_c(\underline{b} - \underline{c}) = -r_2\underline{b} - r_3\underline{c} + \nu_c(\underline{b} - \underline{c}) \ .$$

Hieruit volgt: $(1 + r_3 + \nu_c)\underline{c} = (\nu_c - r_2)\underline{b}$ en dus (zie voorbeeld 5) $\nu_c = r_2$. $\overline{CA'} = |r_2|\ \|\underline{b} - \underline{c}\|$. Evenzo vinden we: $\overline{A'B} = |r_3|\ \|\underline{b} - \underline{c}\|$ en

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}} = \frac{|r_2|}{|r_3|} \ .$$

Analoog:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} = \frac{|r_3|}{|r_1|} \; ; \quad \frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}} = \frac{|r_1|}{|r_2|} \, , \qquad \text{q.e.d.}$$

Voorbeeld 7. De vergelijking van een cirkel met middelpunt $\underline{a}$ en straal r is: $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2$. De poollijn van $\underline{p}$ is $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2$; deze gaat door $\underline{q}$ als $(\underline{q} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2$. De poollijn van q: $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{q} - \underline{a}) = r^2$ gaat dan ook door $\underline{p}$.

2.1.4. Meetkunde met vectoren in $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$ hebben we analoog aan wat we in 2.1.3 voor $\mathbb{R}^2$ vaststelden dat $\underline{x} = [x,y,z] = \underline{a} + \lambda\underline{v}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, de parametervoorstelling is van een rechte door $\underline{a}$ (steunvector) met richting $\underline{v}$ (richtingsvector).
Zijn $\underline{v}$ en $\underline{w}$ twee vectoren zó dat $\mathcal{O}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ niet op een rechte liggen (zie § 2.3), dan is

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$$

de parametervoorstelling van een vlak door $\underline{a}$ evenwijdig aan het vlak door $\mathcal{O}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$.
Een vlak wordt ook gekarakteriseerd door een vergelijking, $ax + by + cz = d$; uit een parametervoorstelling vindt men de vergelijking door λ en μ te elimineren. Merk op dat $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$ drie lineaire betrekkingen zijn, nl.:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \qquad \text{als} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \; ; \; \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \; ; \; \underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} .$$

<u>Voorbeeld 1</u>. De rechte $\underline{x} = [1,1,1] + \lambda[0,1,2]$.
Het punt $[1,3,5]$ ligt op deze rechte (neem $\lambda = 2$!). Het snijpunt met het xy-vlak (vergelijking $z = 0$) vinden we uit: $0 = z = 1 + 2\lambda$, $\lambda = -\frac{1}{2}$; snijpunt $[1,\frac{1}{2},0]$. De rechte snijdt het yz-vlak ($x = 0$) niet, omdat (de verbindingslijn van $\mathcal{O}$ tot) $[0,1,2]$ evenwijdig is aan het vlak $x = 0$.

<u>Voorbeeld 2</u>. Beschouw het vlak

$$\underline{x} = [1,2,3] + \lambda[0,1,1] + \mu[1,0,-2] .$$

Het snijpunt met de y-as vinden we uit:

$$\begin{cases} 0 = x = 1 + \mu \\ 0 = z = 3 + \lambda - 2\mu \end{cases} ; \quad \begin{matrix} \mu = -1 \\ \lambda = -5 \end{matrix} ; \quad \text{snijpunt } [0,-3,0] .$$

De vergelijking van het vlak is $2x + y + z = 3$.
De snijlijn met het x,y-vlak wordt gegeven door het paar vergelijkingen:

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

of ook door

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2x - y = 3 . \end{cases}$$

Deze snijlijn heeft bijv. als parametervoorstelling (neem $x = \lambda$, dan $y = 2\lambda - 3$, $z = 0$):

$$x = [0,-3,0] + \lambda[1,2,0] .$$

<u>Voorbeeld 3</u>. Het snijpunt S van de rechte $\underline{x} = [1,1,1] + \lambda[0,1,2]$ met vlak $2x - y + z = 3$ vinden we door λ op te lossen uit

$$2(1) - (1 + \lambda) + (1 + 2\lambda) = 3 ; \quad \lambda = 1 ; \quad S = [1,2,3] .$$

<u>Voorbeeld 4</u>. Om een parametervoorstelling te vinden van het vlak met vergelijking $2x - 4y + 3z = 12$ stellen we bijv. $y = \lambda$, $z = 2\mu$, dan is $x = 6 + 2\lambda - 3\mu$, zodat we hebben verkregen

$$\underline{x} = [6,0,0] + \lambda[2,1,0] + \mu[-3,0,2] .$$

Voorbeeld 5. Om een parametervoorstelling te vinden van de snijlijn van de vlakken $x + y = 1$, $2x - y + z = 3$ stellen we bijv. $x = \lambda$; dan is $y = 1 - \lambda$, $z = -3\lambda + 4$, zodat we als parametervoorstelling vinden:

$$\underline{x} = [0,1,4] + \lambda[1,-1,-3] .$$

Voorbeeld 6. De vergelijking van een vlak $\perp \underline{v}$ is: $(\underline{x},\underline{v}) = C$. Een lijn loodrecht op het vlak met vergelijking $ax + by + cz = d$ is de lijn door $\mathcal{O}$ en $[a,b,c]$. Het vlak door de punten $A = \underline{a} = [a_1,a_2,a_3]$, $B = \underline{b} = [b_1,b_2,b_3]$ en $C = \underline{c} = [c_1,c_2,c_3]$ (A, B en C liggen niet op een rechte, zie § 2.3) heeft bijv. als parametervoorstelling:

$$\underline{x} = [a_1,a_2,a_3] + \lambda[b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3] + \mu[c_1-a_1,\ c_2-a_2,\ c_3-a_3]$$

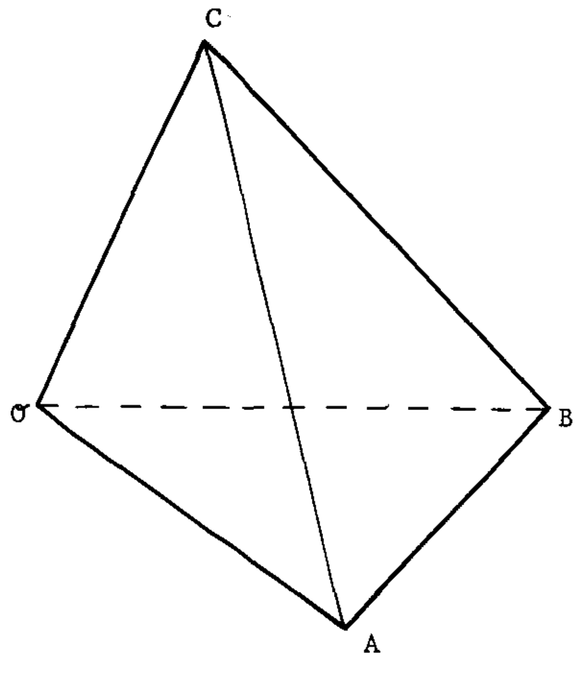
of:

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda(\underline{b} - \underline{a}) + \mu(\underline{c} - \underline{a}) .$$

Voorbeeld 7. De vergelijking van de bol met middelpunt $\underline{a}$ en straal r is: $(\underline{x} - \underline{a},\ \underline{x} - \underline{a}) = r^2$. Het poolvlak van $\underline{p}$ t.o.v. deze bol heeft als vergelijking: $(\underline{x} - \underline{a},\ \underline{p} - \underline{a}) = r^2$. Dit vlak staat dus loodrecht op $\underline{p} - \underline{a}$. Als $\underline{p}$ zelf op de bol ligt (dus $(\underline{p} - \underline{a},\ \underline{p} - \underline{a}) = r^2$) is het poolvlak een raakvlak.

We beperken ons tot één echt meetkundig voorbeeld.

Voorbeeld 8. Als van een viervlak twee paren overstaande ribben elkaar loodrecht kruisen, is ook het derde paar onderling loodrecht.



Bewijs. Zij $\mathcal{O} = \underline{0}$, $A = \underline{a}$, $B = \underline{b}$, $C = \underline{c}$ en zij gegeven $\mathcal{O}A \perp BC$, $\mathcal{O}B \perp AC$. We zullen nu laten zien dat ook $\mathcal{O}C \perp AB$. Het gegeven luidt in vectorvorm $(\underline{a},\underline{b} - \underline{c}) = 0$, $(\underline{b},\underline{a} - \underline{c}) = 0$; hieruit volgt $(\underline{a},\underline{c}) = (\underline{b},\underline{c})$ dus $(\underline{c},\underline{a} - \underline{b}) = 0$, q.e.d.

2.1.5. Meetkundige terminologie in $\mathbb{R}^n$ $(n > 3)$

Ook voor $n > 3$ voeren we meetkundige terminologie in. Neem bijv. $n = 4$. Het punt $\underline{0} = [0,0,0,0]$ heet de oorsprong; $\{[a,0,0,0] \mid a \in R\}$ heet de x-as, enz. De verzameling $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ heet een rechte met $\underline{a}$ als steunvector en $\underline{v}$ als richtingsvector $(\underline{v} \neq \underline{0})$.
Evenzo zeggen we voor $(\underline{x},\underline{y}) = 0$: $\underline{x} \perp \underline{y}$, $\underline{x}$ loodrecht op $\underline{y}$.
We noemen $\sqrt{(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y})} =: \|\underline{x} - \underline{y}\|$ de afstand van $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Dat dit een terechte naamgeving is, m.a.w. dat

$$\|\underline{x} - \underline{x}\| = \|\underline{0}\| = 0$$

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| > 0 \quad \text{als } \underline{x} \neq \underline{y}$$

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| = \|\underline{y} - \underline{x}\|$$

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| \leq \|\underline{x} - \underline{z}\| + \|\underline{z} - \underline{y}\| \qquad \text{(driehoeksongelijkheid)}$$

is direct duidelijk met uitzondering van de driehoeksongelijkheid die volgt uit 2.1.6.

2.1.6. Stelling (Cauchy-Schwarz). Voor alle $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$(\underline{x},\underline{y})^2 \leq (\underline{x},\underline{x})(\underline{y},\underline{y}) \; .$$

Bewijs. Als $\underline{x} = \underline{0}$ is er niets te bewijzen. Als $\underline{x} \neq \underline{0}$ is voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ de vierkantsvorm

$$(\lambda\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} + \underline{y}) = \lambda^2(\underline{x},\underline{x}) + 2\lambda(\underline{x},\underline{y}) + (\underline{y},\underline{y}) \geq 0 \; .$$

Voor de discriminant geldt derhalve

$$4(\underline{x},\underline{y})^2 - 4(\underline{x},\underline{x})(\underline{y},\underline{y}) \leq 0 .$$

Opgave. Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ en $(\underline{x},\underline{y})^2 = (\underline{x},\underline{x})(\underline{y},\underline{y})$. Bewijs dat er een $r \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $\underline{y} = r\underline{x}$.

Opgave. Zij $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} \neq \underline{0}$. Bepaal bij elke $\underline{x}$ het getal $\alpha(\underline{x})$ zó dat de vector $\alpha(\underline{x})\underline{y} - \underline{x}$ loodrecht staat op $\underline{y}$. (We noemen $\alpha(\underline{x})\underline{y}$ de projectie van $\underline{x}$ op $\underline{y}$.)

§ 2.2. Lineaire deelruimten

2.2.1. Definitie. Een niet lege verzameling L van vectoren uit $\mathbb{R}^n$ heet een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ indien:

(a) voor alle $\underline{x} \in L$, $\underline{y} \in L$ geldt $\underline{x} + \underline{y} \in L$;
(b) voor alle $\underline{x} \in L$, $r \in \mathbb{R}$ geldt $r\underline{x} \in L$.

(We spreken in plaats van over lineaire deelruimte ook wel kortweg over deelruimte of lineaire ruimte.)

Voorbeelden

1. $L := \{[x,0] \mid x \in \mathbb{R}\}$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbb{R}^n$ is een deelruimte van zichzelf.
3. Als $\underline{0} = [0,\ldots,0]$ de nulvector uit $\mathbb{R}^n$ is, dan is $\{\underline{0}\}$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$, geheten nulruimte.
   Uit (b) en $\underline{0} = 0\underline{a}$ volgt dat $\underline{0} \in L$ voor elke deelruimte L van $\mathbb{R}^n$.
4. Voortgebrachte deelruimte.
   Als $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_k$ een aantal vectoren uit $\mathbb{R}^n$ is, dan is

$$\{r_1\underline{u}_1 + \ldots + r_k\underline{u}_k \mid r_1 \in \mathbb{R},\ldots,r_k \in \mathbb{R}\}$$

   een deelruimte van $\mathbb{R}^n$. We noteren deze zgn. voortgebrachte lineaire deelruimte met $L(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_k)$. Een vector $r_1\underline{u}_1 + \ldots + r_k\underline{u}_k$ noemen we een lineaire combinatie van $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_k$. Is M een willekeurige verzameling van vectoren, dan is ook de verzameling van alle lineaire combinaties van eindig veel elementen uit M een lineaire deelruimte; notatie: L(M). Beschouwt men nu bijv. de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door $\underline{a} := [1,1,2,0]$, $\underline{b} := [0,2,0,1]$ en $\underline{c} := [0,0,1,3]$, dan is de vraag: is $\underline{d} := [d_1,d_2,d_3,d_4]$ element van $L(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$, in feite de vraag naar het bestaan van reële getallen x_1, x_2, x_3 zó dat $\underline{d} = x_1\underline{a} + x_2\underline{b} + x_3\underline{c}$. Dit is een stelsel lineaire vergelijkingen in x_1, x_2, x_3, nl.

$$\begin{cases} d_1 = x_1 \\ d_2 = x_1 + 2x_2 \\ d_3 = 2x_1 + x_3 \\ d_4 = x_2 + 3x_3 \,. \end{cases}$$

Zo is

$$[1,3,4,7] \in L(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$$

en

$$[1,3,4,6] \notin L(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \,.$$

5. Oplossingsruimte.

Oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

zijn vectoren uit $\mathbb{R}^n$. De verzameling van alle oplossingen vormt een deelruimte van $\mathbb{R}^n$, de oplossingsruimte van het stelsel. Deze noteren we wel als N(A) indien $A = A^{(m\times n)} = [a_{ij}]$. Dus

$$N(A) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\} \,.$$

6. Orthogonaal complement.

Zij M een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Als $\underline{x} \perp \underline{y}$ voor alle $\underline{y} \in M$ dan zeggen we $\underline{x} \perp M$; dit noteren we wel als $(\underline{x},M) = 0$.

Is M een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, dan is

$$M^{\perp} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x} \perp M\}$$

een deelruimte van R^n: het orthogonaal complement ("orthoplement") van M. Voorbeeld 6 bevat 5 als een bijzonder geval want $N(A) = R^{\perp}$ als R de verzameling is van de rijvectoren van A.

Dit laatste voorbeeld leidt tot de volgende belangrijke stelling.

2.2.2. Stelling. Is $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k$ een aantal vectoren uit $\mathbb{R}^n$, dan is

$$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k\}^{\perp} = (L(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k))^{\perp} .$$

In woorden: het orthoplement van een eindige verzameling vectoren is gelijk aan het orthoplement van de door die vectoren voortgebrachte lineaire deelruimte.

Opmerking. De stelling geldt ook voor oneindige verzamelingen vectoren maar dat zullen we niet gebruiken.

Bewijs. Afkortingen: $M := \{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k\}$, $L := L(M)$.

(i) Als $\underline{x} \in M^{\perp}$, dan is $(\underline{x},\underline{v}_i) = 0$ $(i = 1,\ldots,k)$. Voor elke vector uit L: $r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_k\underline{v}_k$ geldt dan:

$$(\underline{x}, r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_k\underline{v}_k) = r_1(\underline{x},\underline{v}_1) + \ldots + r_k(\underline{x},\underline{v}_k) = 0 ;$$

dus $\underline{x} \in L^{\perp}$. Conclusie $M^{\perp} \subset L^{\perp}$.

(ii) Daar $\underline{v}_1 \in L,\ldots,\underline{v}_k \in L$ volgt uit $\underline{x} \perp L$ ook $\underline{x} \perp \underline{v}_1,\ldots,\underline{x} \perp \underline{v}_k$, dus $\underline{x} \perp M$. Conclusie: $L^{\perp} \subset M^{\perp}$.
Eindconclusie: $L^{\perp} = M^{\perp}$, q.e.d.

2.2.3. Definitie. Een verzameling vectoren van de gedaante

$$\underline{a} + L = \{\underline{a} + \underline{x} \mid \underline{x} \in L\}$$

waarbij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ en L een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is heet een lineaire variëteit.

Voorbeeld. Is $\underline{a}$ een oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$, d.w.z. $A\underline{a} = \underline{b}$, dan is de algemene oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$ de lineaire variëteit: $\underline{a} + N(A)$.

We zien zonder moeite dat $\underline{a} + L$ zelf een deelruimte is dan en slechts dan als $\underline{a} \in L$.

2.2.4. Meetkundige betekenis van de begrippen lineaire deelruimte en lineaire variëteit

In $\mathbb{R}^2$ is een lineaire deelruimte, verschillend van $\{\underline{0}\}$ en van $\mathbb{R}^2$, een rechte door $\mathcal{O}$.

Een rechte niet door $\mathcal{O}$ is een lineaire variëteit die geen deelruimte is.

In $\mathbb{R}^3$ zijn de volgende typen lineaire deelruimten: $\{\underline{0}\}$, rechten door $\mathcal{O}$, vlakken door $\mathcal{O}$, $\mathbb{R}^3$.

Als lineaire variëteiten hebben we: punten, rechten, vlakken, en de hele $\mathbb{R}^3$.

§ 2.3. Afhankelijkheid en onafhankelijkheid

2.3.1. Definitie. De vectoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ uit $\mathbb{R}^n$ heten afhankelijk (of lineair afhankelijk) als er reële getallen $r_1, \ldots, r_k$ bestaan, die niet alle nul zijn zodanig dat

$$r_1\underline{v}_1 + r_2\underline{v}_2 + \ldots + r_k\underline{v}_k = \underline{0} .$$

Anders gezegd: $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ zijn afhankelijk als $\underline{0}$ op meer dan een manier als lineaire combinatie (2.2.1) van $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ te schrijven is. (Steeds is $\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \ldots + 0\underline{v}_k$!)

Voorbeeld. De vectoren $\underline{a} := [1,1,2,3]$, $\underline{b} := [0,1,0,1]$ en $\underline{c} := [1,3,2,5]$ zijn afhankelijk want

$$\underline{0} = \underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c} .$$

Het homogene stelsel

$$\underline{0} = x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c}$$

of

$$\begin{cases} 0 = x + z \\ 0 = x + y + 3z \\ 0 = 2x + 2z \\ 0 = 3x + y + 5z \end{cases}$$

heeft een van $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (de nuloplossing) verschillende oplossing, bijv.: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

2.3.2. Definitie. De vectoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ uit $\mathbb{R}^n$ heten onafhankelijk als ze niet afhankelijk zijn.
Anders gezegd: $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ zijn onafhankelijk als uit $r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_k\underline{v}_k = \underline{0}$ volgt $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = 0$.

Voorbeeld. $\underline{a} := [1,1,2,3]$, $\underline{b} := [0,1,0,1]$ en $\underline{d} := [1,3,2,6]$ zijn onafhankelijk, want uit $r_1\underline{a} + r_2\underline{b} + r_3\underline{d} = \underline{0}$ volgt:

$$\begin{cases} r_1 \phantom{{}+r_2} + r_3 = 0 \\ r_1 + r_2 + 3r_3 = 0 \\ 2r_1 \phantom{{}+r_2} + 2r_3 = 0 \\ 3r_1 + r_2 + 6r_3 = 0 \,. \end{cases}$$

Vooruitlopend op beschouwingen over stelsels vergelijkingen schrijven we dit stelsel nu met behulp van de $\mathbb{R}^3$ vectoren $\underline{a}_1 := [1,0,1]$, $\underline{a}_2 := [1,1,3]$, $\underline{a}_3 := [2,0,2]$, $\underline{a}_4 := [3,1,6]$, $\underline{r} := [r_1,r_2,r_3]$ als:

$$\begin{cases} (\underline{a}_1,\underline{r}) = 0 \\ (\underline{a}_2,\underline{r}) = 0 \\ (\underline{a}_3,\underline{r}) = 0 \\ (\underline{a}_4,\underline{r}) = 0 \,. \end{cases}$$

Hieruit volgt: $(\underline{a}_4 - \underline{a}_3 - \underline{a}_2,\underline{r}) = 0$, dus $r_3 = 0$. Daarna volgt uit $(\underline{a}_1,\underline{r}) = 0$ dat ook $r_1 = 0$ en tenslotte uit $(\underline{a}_2,\underline{r}) = 0$ dat $r_2 = 0$. (Merk op dat we gebruik gemaakt hebben van 2.2.2.)

2.3.3. Meetkundige betekenis van afhankelijkheid

In $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ geldt:

(1) Twee rechten zijn evenwijdig (of samenvallend) als hun richtingsvectoren afhankelijk zijn.

(2) Een vlak door $\mathcal{O}$ bestaat uit alle vectoren die een lineaire combinatie zijn van twee onafhankelijke vectoren.

(3) De rechte $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{u}$ is evenwijdig met (of ligt in) het vlak $\underline{x} = \underline{b} + \mu\underline{v} + \nu\underline{w}$ als $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ afhankelijk zijn. Omdat $\underline{u} \neq \underline{0}$ (anders is $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{u}$ geen rechte) en omdat $\underline{v}$ en $\underline{w}$ onafhankelijk zijn (vlak!) volgt in dit geval uit de afhankelijkheid van $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ dat $\underline{u}$ een lineaire combinatie is van $\underline{v}$ en $\underline{w}$ (ga na).

(4) De punten $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ liggen op een rechte als $\underline{b} - \underline{a}$ en $\underline{c} - \underline{a}$ afhankelijk zijn.

(5) De punten $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ liggen in een vlak als $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{c} - \underline{a}$, $\underline{d} - \underline{a}$ afhankelijk zijn.

2.3.4. Eigenschappen

Door nauwgezette toepassing van de definities zijn de volgende eigenschappen te bewijzen:

1. $\underline{0}$ is een afhankelijk stelsel.
2. Als $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ een afhankelijk stelsel is, dan is ook $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$, $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_\ell$ afhankelijk.
3. Is een van de vectoren $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ de nulvector, dan is $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ afhankelijk.
4. Het stelsel $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k$ is dan en slechts dan onafhankelijk als $\underline{v}_1 + \underline{v}_2,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k$ onafhankelijk is.
5. Zij $\alpha \neq 0$; het stelsel $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k$ is dan en slechts dan onafhankelijk als $\alpha\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k$ onafhankelijk is.
6. Als $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ een afhankelijk stelsel is, dan is tenminste één der $\underline{v}_i$ een lineaire combinatie van de overige vectoren uit het stelsel.
   Is nl. $r_1\underline{v}_1 + \dots + r_k\underline{v}_k = \underline{0}$ en $r_i \neq 0$, dan is

$$\underline{v}_i = -\frac{r_1}{r_i}\underline{v}_1 - \dots - \frac{r_{i-1}}{r_i}\underline{v}_i - \frac{r_{i+1}}{r_i}\underline{v}_{i+1} - \dots - \frac{r_k}{r_i}\underline{v}_k \,.$$

2.3.5. Het onderzoek naar de afhankelijkheid van een stelsel

Door herhaalde toepassing van de eigenschappen 4 en 5 tracht men het onderzoek naar de afhankelijkheid van een stelsel te vervangen door het onderzoek van een ander, eenvoudiger stelsel. Het systematisch uitvoeren van dit procédé noemen we "vegen".

Voorbeeld 1. Zijn $\underline{a} = [-1,1,1]$, $\underline{b} = [1,2,3]$, $\underline{c} = [5,1,3]$ afhankelijk? Schrijf de vectoren onder elkaar en veeg de tweede kolom schoon:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= [-1,1,1] & \underline{a} &= [-1,1,1] \\ \underline{b} &= [1,2,3] & \underline{b} - 2\underline{a} &= [3,0,1] \\ \underline{c} &= [5,1,3] & \underline{c} - \underline{a} &= [6,0,2] \,. \end{aligned}$$

Omdat blijkbaar $\underline{c} - \underline{a} = 2(\underline{b} - 2\underline{a})$, dus $3\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$, is het stelsel afhankelijk.

Voorbeeld 2. Is $\underline{a} = [1,2,3]$, $\underline{b} = [2,7,0]$, $\underline{c} = [1,2,-1]$ afhankelijk?

$$\begin{aligned} \underline{a} &= [1,2,3] & \underline{a} + 3\underline{c} &= [4,8,0] & \underline{a} + 3\underline{c} - 2\underline{b} &= [0,-6,0] \\ \underline{b} &= [2,7,0] & \underline{b} &= [2,7,0] & \underline{b} &= [2,7,0] \\ \underline{c} &= [1,2,-1] & \underline{c} &= [1,2,-1] & \underline{c} &= [1,2,-1] \,. \end{aligned}$$

Het laatste stelsel is onafhankelijk en $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ dus ook. Immers uit $r_1[0,-6,0] + r_2[2,7,0] + r_3[1,2,-1] = \underline{0}$ volgt: $2r_2 + r_3 = 0$, $-6r_1 + 7r_2 + 2r_3 = 0$, $-r_3 = 0$ en dus $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

Voorbeeld 3. Het stelsel $\underline{a} = [7,8,0,0]$, $\underline{b} = [1,2,4,3]$, $\underline{c} = [1,-2,-4,-3]$, $\underline{d} = [0,0,4,3]$ is afhankelijk, daar $2\underline{a} - 11\underline{b} - 3\underline{c} + 8\underline{d} = \underline{0}$ (ga na!).

2.3.6. Stelling. Indien $L(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k) \neq \{\underline{0}\}$, dan heeft $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ een onafhankelijk deelstelsel dat ook $L(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k)$ voortbrengt.

Bewijs. Als $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ onafhankelijk is, dan is er niets te bewijzen, anders is een der vectoren, zeg $\underline{v}_i$, een lineaire combinatie van de overige (2.3.4.6). In dit laatste geval is:

$$L := L(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k) = L(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_k) \,.$$

Indien $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_k$ nog steeds een afhankelijk stelsel is kunnen we wederom een der vectoren weglaten. Dit herhalen we tot we een onafhankelijk stelsel voortbrengenden overhouden. Daar $L \neq \{\underline{0}\}$ wordt dit inderdaad bereikt.

2.3.7. Een <u>orthonormaal stelsel</u> vectoren is een stelsel $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k$ waarvoor geldt:

$$(\underline{v}_i,\underline{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \; . \end{cases}$$

(In woorden: alle $\underline{v}_i$ hebben lengte 1 en zijn onderling loodrecht.)
We hebben nu:

<u>Stelling</u>. Een orthonormaal stelsel is onafhankelijk.

<u>Bewijs</u>. Zij $r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_k\underline{v}_k = \underline{0}$, dan is

$$(r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_k\underline{v}_k,\underline{v}_i) = (\underline{0},\underline{v}_i) = 0 \qquad (i = 1,\ldots,k) \; .$$

Als $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k$ orthonormaal is, is echter $(r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_k\underline{v}_k,\underline{v}_i) = r_i$, dus $r_i = 0$ $(i = 1,\ldots,k)$, q.e.d.

§ 2.4. <u>Bases</u>

2.4.1. <u>Definitie</u>. Zij $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_m$ een onafhankelijk stelsel in $\mathbb{R}^n$ dat de deelruimte $L \neq \{\underline{0}\}$ voortbrengt, dan heet $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_m$ een <u>basis</u> van L.

<u>Voorbeeld</u>. $\underline{e}_1 := [1,0,0,\ldots,0]$, $\underline{e}_2 := [0,1,0,\ldots,0]$, $\ldots$, $\underline{e}_n := [0,0,\ldots,1]$ is een basis van $\mathbb{R}^n$. Deze noemen we de <u>standaardbasis</u>.

In 2,3,5 is bewezen dat $L(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k)$, mits $\neq \{\underline{0}\}$, een basis heeft.

2.4.2. <u>Stelling</u>. Is $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_m$ een basis voor de deelruimte L van $\mathbb{R}^n$, dan is elk element van L op <u>éénduidige</u> wijze te schrijven als lineaire combinatie van $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_m$.

<u>Bewijs</u>. Omdat $L = L(\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_m)$ is elke $\underline{x} \in L$ te schrijven als lineaire combinatie van $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_m$. Stel

$$\underline{x} = r_1\underline{w}_1 + \ldots + r_m\underline{w}_m$$

en

$$\underline{x} = s_1\underline{w}_1 + \ldots + s_m\underline{w}_m \; ,$$

dan is

$$(r_1 - s_1)\underline{w}_1 + \dots + (r_m - s_m)\underline{w}_m = \underline{0} .$$

Omdat $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_m$ onafhankelijk zijn is nu

$$r_1 - s_1 = r_2 - s_2 = \dots = r_m - s_m = 0 , \qquad \text{q.e.d.}$$

Een lineaire ruimte kan verschillende bases hebben. Zo zijn $\underline{a} = [1,1,0,0]$ en $\underline{b} = [1,2,0,0]$ bases voor $L(\underline{e}_1,\underline{e}_2) \subset \mathbb{R}^4$. Echter:

2.4.3. Stelling. Is $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k$ een basis van de lineaire ruimte L, en is $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_m$ een onafhankelijk stelsel vectoren in L, dan is $m \leq k$.

Bewijs. Stel $m > k$. Daar $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k$ een basis van L vormen , is $\underline{b}_1 = r_1\underline{a}_1 + \dots + r_k\underline{a}_k$. Omdat $\underline{b}_1$ voorkomt in een onafhankelijk stelsel, is $\underline{b}_1 \neq \underline{0}$ (2.3.4.3), dus $[r_1,\dots,r_k] \neq [0,\dots,0]$. Uitsluitend voor het gemak van de notatie nemen we aan dat $r_1 \neq 0$ is (verandering van de volgorde van de $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k$). Nu is

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{r_1}\,\underline{b}_1 - \frac{r_2}{r_1}\,\underline{a}_2 - \dots - \frac{r_k}{r_1}\,\underline{a}_k .$$

Als we in iedere lineaire combinatie van $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k$, $\underline{a}_1$ vervangen door de nu gevonden uitdrukking zien we dat

$$L = L(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k) = L(\underline{b}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_k) .$$

Hieruit volgt:

$$\underline{b}_2 = s_1\underline{b}_1 + s_2\underline{a}_2 + \dots + s_k\underline{a}_k .$$

Hierin is $[s_2,\dots,s_k] \neq [0,\dots,0]$ (anders was $\underline{b}_1,\underline{b}_2$ afhankelijk en volgens 2.3.4.2 ook $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_m$). Neem gemakshalve aan dat $s_2 \neq 0$. Dan is

$$\underline{a}_2 = \frac{1}{s_2}\,\underline{b}_2 - \frac{s_1}{s_2}\,\underline{b}_1 - \frac{s_3}{s_2}\,\underline{a}_3 - \dots - \frac{s_k}{s_2}\,\underline{a}_k ,$$

en dus

$$L = L(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{a}_3,\dots,\underline{a}_k) .$$

We herhalen nu dit uitwisselingsproces. Na k stappen hebben we verkregen dat $L = L(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_k)$. Maar dan, daar $\underline{b}_m \in L$, is $\underline{b}_m = t_1\underline{b}_1 + \dots + t_k\underline{b}_k$ in tegenspraak met de onafhankelijkheid van $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_m$. Dus $m > k$ is onjuist, q.e.d.

2.4.4. Gevolg. Elk $(n+1)$-tal vectoren uit $\mathbb{R}^n$ is afhankelijk.

2.4.5. Gevolg. Elke deelruimte van $\mathbb{R}^n$ wordt door ten hoogste n vectoren voortgebracht.

2.4.6. Gevolg. Elke deelruimte van $\mathbb{R}^n$ heeft een basis.

2.4.7. Gevolg. Elke basis van een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ bestaat uit evenveel vectoren.

Bewijs. Als $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k$ en $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_m$ bases zijn van L, dan is $k \le m$ en $m \le k$.

2.4.8. Definitie. Het aantal vectoren in een basis van de lineaire ruimte L heet de dimensie van L ("dim L"). De dimensie van een lineaire variëteit, $\underline{a} + L$, is gedefinieerd door $\dim(\underline{a} + L) := \dim L$.
We hebben: $\dim \mathbb{R}^n = n$; $\dim \{\underline{0}\} = 0$; voor elke deelruimte L van $\mathbb{R}^n$ geldt $0 \le \dim L \le n$.

2.4.9. Stelling (uitbreidingsstelling). Zij L een deelruimte van $\mathbb{R}^n$, $\dim L = k < n$; zij $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ een basis van L, dan heeft $\mathbb{R}^n$ een basis $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k, \underline{w}_1,\dots,\underline{w}_{n-k}$. (Deze basis van $\mathbb{R}^n$ ontstaat dus door uitbreiding van de basis van L met $n - k$ vectoren.)

Bewijs. Neem een basis $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n$ van $\mathbb{R}^n$, d.w.z. $L(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n) = \mathbb{R}^n$. Het stelsel $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ is onafhankelijk. Volgens het uitwisselingsprincipe (zie 2.4.3) zijn k van de $\underline{u}$'s uit de basis van $\mathbb{R}^n$ uit te wisselen voor $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$, q.e.d.

2.4.10. We onderzoeken het verband tussen een k-dimensionale deelruimte L van $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$. Laat $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ een basis van L zijn; elke vector uit L is nu eenduidig bepaald door een $\underline{r} = [r_1,\dots,r_k] \in \mathbb{R}^k$, nl. middels $\underline{x} = r_1\underline{v}_1 + \dots + r_k\underline{v}_k$. De getallen $r_1,\dots,r_k$ heten de coördinaten (ook wel componenten) van $\underline{x}$ t.o.v. de basis $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$.

Dit één-éénduidige verband tussen L en $\mathbb{R}^k$ draagt ook de optelling en scalaire vermenigvuldiging over:
Als nl. $\underline{a} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_k\underline{v}_k$, $\underline{b} = b_1\underline{v}_1 + \dots + b_k\underline{v}_k$, met andere woorden $\underline{a} \leftrightarrow [a_1,\dots,a_k]$, $\underline{b} \leftrightarrow [b_1,\dots,b_k]$, dan $\underline{a} + \underline{b} \leftrightarrow [a_1 + b_1,\dots,a_k + b_k]$; $\alpha\underline{a} \leftrightarrow [\alpha a_1,\dots,\alpha a_k]$.
Iedere k-dimensionale lineaire ruimte ziet er precies zo uit als (we zeggen: is isomorf met) $\mathbb{R}^k$.

2.4.11. De basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ van $\mathbb{R}^n$ is tevens een orthonormaal stelsel; we noemen een basis die tevens orthonormaal is een <u>orthonormale basis</u>.

<u>Stelling</u>. Elke deelruimte L van $\mathbb{R}^n$ heeft een orthonormale basis.

<u>Bewijs</u>. Laat $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_k$ een basis voor L zijn. We construeren uit deze basis een orthonormale basis door middel van het zogenaamde orthonormalisatieproces van <u>Gram en Schmidt</u>

$$\underline{v}_1 := \frac{1}{\|\underline{u}_1\|}\underline{u}_1 \ ; \quad \underline{w}_2 := \underline{u}_2 - (\underline{u}_2,\underline{v}_1)\underline{v}_1 \ ; \quad \underline{v}_2 := \frac{1}{\|\underline{w}_2\|}\underline{w}_2 \ .$$

Nu is $\|\underline{v}_1\| = \|\underline{v}_2\| = 1$; $(\underline{v}_1,\underline{v}_2) = 0$.

$$\underline{w}_3 := \underline{u}_3 - (\underline{u}_3,\underline{v}_1)\underline{v}_1 - (\underline{u}_3,\underline{v}_2)\underline{v}_2 \ ; \quad \underline{v}_3 := \frac{1}{\|\underline{w}_3\|}\underline{w}_3$$

(merk op dat $\|\underline{w}_3\| \neq 0$). Ga na dat $(\underline{v}_3,\underline{v}_1) = (\underline{v}_3,\underline{v}_2) = 0$.

$$\underline{w}_4 := \underline{u}_4 - (\underline{u}_4,\underline{v}_1)\underline{v}_1 - (\underline{u}_4,\underline{v}_2)\underline{v}_2 - (\underline{u}_4,\underline{v}_3)\underline{v}_3 \ ; \quad \underline{v}_4 := \frac{1}{\|\underline{w}_4\|}\underline{w}_4 \ ,$$

enzovoort. Op deze wijze verkrijgt men een orthonormale basis $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$.

§ 2.5. <u>Het bepalen van een basis</u>

2.5.1. <u>Stelling</u> (veegstelling). Voor alle stelsels $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ uit $\mathbb{R}^n$ geldt:

(i) $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_m,\underline{0}) = L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_m)$;

(ii) $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k,\dots,\underline{v}_\ell,\dots,\underline{v}_m) = L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_\ell,\dots,\underline{v}_k,\dots,\underline{v}_m)$;

(iii) $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k,\dots,\underline{v}_m) = L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\alpha\underline{v}_k,\dots,\underline{v}_m)$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0)$;

(iv) $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k,\dots,\underline{v}_\ell,\dots,\underline{v}_m) =$

$= L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k + \beta\underline{v}_\ell,\dots,\underline{v}_\ell,\dots,\underline{v}_m)$ $(\beta \in \mathbb{R})$.

Het bewijs van deze stelling bestaat uit een herhaling van reeds gegeven argumenten. Deze stelling drukt uit dat de veegtechniek, geïntroduceerd in 2.3.5, ook gebruikt kan worden voor het bepalen van bases.

2.5.2. Voorbeeld. $\underline{u} = [0,0,1,1,1]$, $\underline{v} = [0,2,3,5,7]$, $\underline{w} = [0,3,6,2,-2]$, $\underline{x} = [0,1,2,3,4]$, $\underline{y} = [0,0,0,0,1]$. Bepaal een basis voor $L := L(\underline{u},\underline{v},\underline{w},\underline{x},\underline{y}) \subset \mathbb{R}^5$. Bij de nu volgende berekening zullen we vele malen een beroep moeten doen op de regels (i), (ii), (iii) en (iv) van stelling 2.5.1.

Allereerst: $L = L(\underline{x},\underline{v},\underline{w},\underline{u},\underline{y})$.

$$
\begin{array}{rl}
\underline{x} &= [0,1,2,3,4]\\
\underline{v} &= [0,2,3,5,7]\\
\underline{w} &= [0,3,6,2,-2]\\
\underline{u} &= [0,0,1,1,1]\\
\underline{y} &= [0,0,0,0,1]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\underline{x} &= [0,1,2,3,4]\\
\underline{v} - 2\underline{x} &= [0,0,-1,-1,-1]\\
\underline{w} - 3\underline{x} &= [0,0,0,-7,-14]\\
\underline{u} &= [0,0,1,1,1]\\
\underline{y} &= [0,0,0,0,1]\ .
\end{array}
$$

We zien nu:

$$L = L(\underline{x},\ \underline{v} - 2\underline{x},\ \underline{w} - 3\underline{x},\ \underline{u},\ \underline{y}) = L(\underline{x},\ \underline{u},\ -\tfrac{1}{7}(\underline{w} - 3\underline{x}),\ \underline{y})\ .$$

Van dit laatste viertal voortbrengenden is onmiddellijk te zien dat het lineair onafhankelijk en dus een basis is. We krijgen een fraaiere basis (waarom?) als we nog even verder werken.

Zij $\underline{t} := -\frac{1}{7}(\underline{w} - 3\underline{x})$.

$$
\begin{array}{rl}
\underline{x} &= [0,1,2,3,4]\\
\underline{u} &= [0,0,1,1,1]\\
\underline{t} &= [0,0,0,1,2]\\
\underline{y} &= [0,0,0,0,1]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\underline{x} - 2\underline{u} &= [0,1,0,1,2]\\
\underline{u} &= [0,0,1,1,1]\\
\underline{t} &= [0,0,0,1,2]\\
\underline{y} &= [0,0,0,0,1]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\underline{x} - 2\underline{u} - \underline{t} &= [0,1,0,0,0]\\
\underline{u} - \underline{t} &= [0,0,1,0,-1]\\
\underline{t} &= [0,0,0,1,2]\\
\underline{y} &= [0,0,0,0,1]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\underline{x} - 2\underline{u} - \underline{t} &= [0,1,0,0,0]\\
\underline{u} - \underline{t} + \underline{y} &= [0,0,1,0,0]\\
\underline{t} - 2\underline{y} &= [0,0,0,1,0]\\
\underline{y} &= [0,0,0,0,1]\ .
\end{array}
$$

Conclusie: $L = L(\underline{e}_2,\underline{e}_3,\underline{e}_4,\underline{e}_5)$.

2.5.3. Het met de hand uitvoeren van het veegproces kan op vele manieren; de ene manier is handiger dan de andere. We willen het nu ook nog op een meer systematische manier beschouwen, die in de praktijk tot een computerprogramma zou kunnen worden uitgebouwd. We wijzen er met klem op dat de rekentechniek van het vegen het fundament is waar de hele verdere ontwikkeling op rust.

Laat $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ vectoren uit $\mathbb{R}^n$ zijn. Beschouw een matrix $A^{(m\times n)}$ waarvan de rijen de vectoren $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ zijn. We kunnen nu het veegprogramma uitvoeren voor de rijen van A. Voor later gebruik zullen we nu de rijen $\underline{0}$ niet weglaten. De overige veegbewerkingen zijn nu geformuleerd voor rijen van A:

(α) Verwisseling van de k-de en de ℓ-de rij.

(β) Vermenigvuldiging van de k-de rij met $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

(γ) Vervanging van de k-de rij door de som van de k-de rij en β maal de ℓ-de rij.

Het standaardveegprogramma is nu het volgende:

I Begin bij de eerste kolom van A; is deze $\underline{0}$ (uit $\mathbb{R}^m$) neem dan de tweede kolom; laat k_1 het laagste rangnummer zijn van een kolom die ongelijk $\underline{0}$ is (als k_1 niet bestaat is $A^{(m\times n)} = [0]$); verwissel, zo nodig, rijen zodat het eerste element van de k_1-de kolom $\neq 0$ wordt; deel daarna de eerste rij door het element dat dan in de k_1-de kolom op de eerste plaats staat.

De matrix heeft nu de vorm ($m = 4$, $n = 7$, bijv. $k_1 = 2$, $\cdot$ duidt een element aan waarvan we nog niets weten)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Trek veelvouden van de eerste rij van de tweede t/m m-de rij af zó dat de k_1-de kolom de $\underline{e}_1$ uit $\mathbb{R}^m$ wordt ("veeg de k_1-de kolom schoon met de eerste rij"). A wordt dan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

II Als in de nu verkregen matrix de tweede t/m m-de rij alle gelijk $\underline{0}$ (uit $\mathbb{R}^n$) zijn, dan zijn we klaar. Laat anders k_2 het rangnummer zijn van de eerste kolom van links af aan die een element $\neq 0$ heeft in de tweede t/m m-de rij (gevolg $k_2 > k_1$); verwissel, zo nodig, rijen om te verkrijgen dat het tweede element van de k_2-de rij $\neq 0$ wordt; deel de tweede rij door dit element; veeg de k_2-de kolom met de tweede rij schoon. We hebben dan (gesteld $k_2 = 4$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & . & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \end{bmatrix} .$$

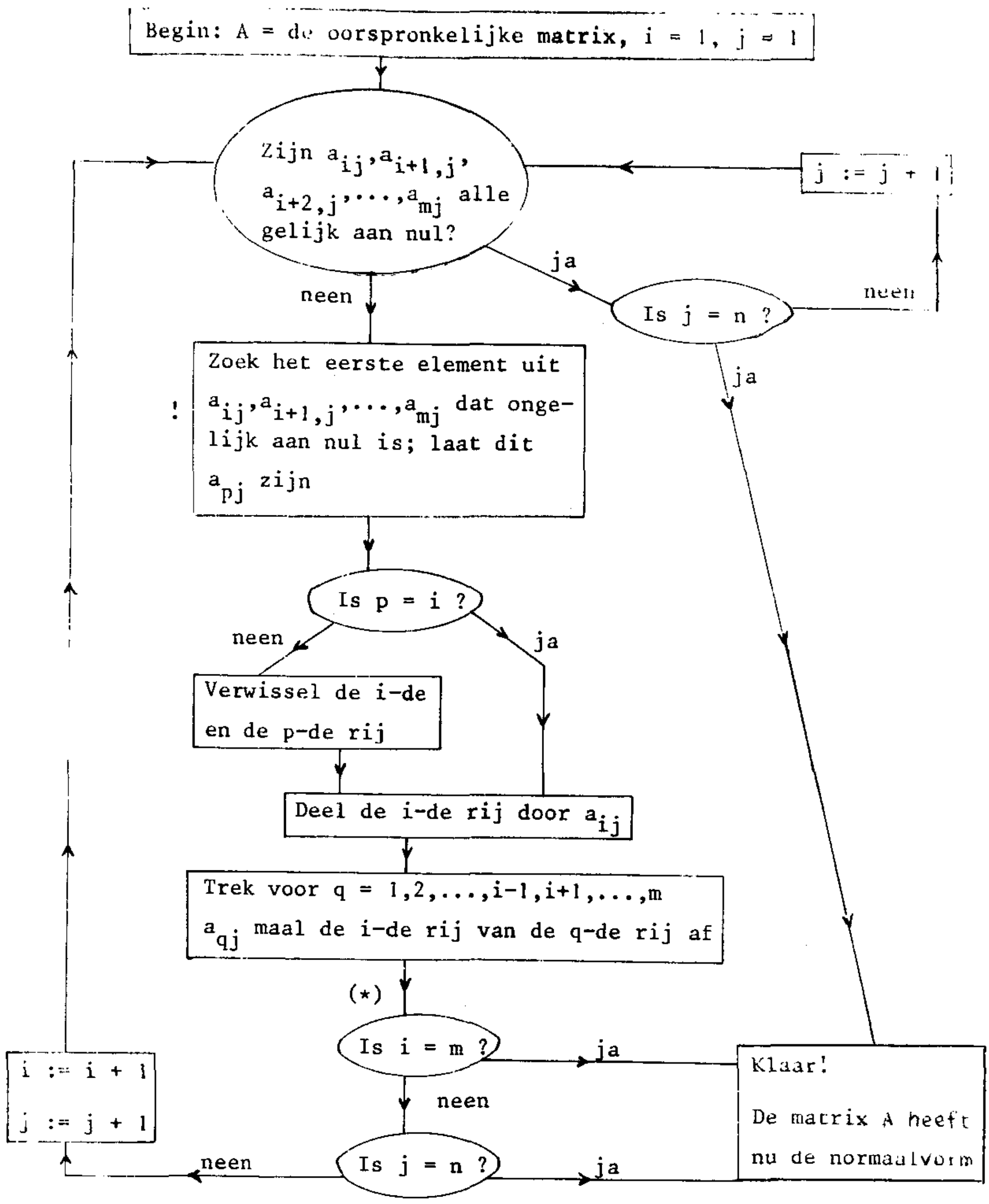
III Herhaal de procedure nu; k_3 is het rangnummer van de nu meest linkse kolom die ergens in de derde t/m m-de rij een element $\neq 0$ heeft. Verwissel, zonodig, rijen zodat het element in de derde rij, k_3-de kolom ongelijk 0 wordt; veeg de k_3-de kolom schoon. Daarna met k_4, enz.
Op zeker moment hebben we het volgende bereikt: de k_r-de kolom is tot $\underline{e}_r$ (uit $\mathbb{R}^m$) veranderd; verder gaan is niet mogelijk, hetzij doordat $r = m$, hetzij doordat $r < m$ en de rijen met nummers $r+1,\ldots,m$ zijn $\underline{0}$. We zijn nu klaar; A heeft zijn normaalvorm gekregen. Bijvoorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad k_1 = 2,\ k_2 = 4,\ k_3 = 5 ;$$

of

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & . & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . \end{bmatrix} , \quad k_1 = 2,\ k_2 = 4,\ k_3 = 5,\ k_4 = 6 .$$

2.5.4. We geven dit programma in een zgn. blokdiagram. Wat men doen moet is volgens de pijlrichting het schema doorlopen tot men bij <u>klaar</u> uitkomt. Op elk moment heeft men op papier of in het geheugen van de computer een matrix $A = A^{(m\times n)}$ en twee natuurlijke getallen i en j. Een rond hokje duidt op een vraag, een rechthoek op een opdracht. Een opdracht is steeds het veranderen van A, i of j. De oude waarden van deze grootheden worden dan weggeveegd. Met $j := j + 1$ bedoelen we: maak de nieuwe waarde van j gelijk aan de oude plus 1; $j := j + 1$ is dus de opdracht verhoog j met 1. We beginnen met A: de oorspronkelijke matrix; $i = 1$ en $j = 1$.



Begin: A = de oorspronkelijke matrix, i = 1, j = 1
Zijn $a_{ij}, a_{i+1,j}, a_{i+2,j}, \ldots, a_{mj}$ alle gelijk aan nul?
ja
neen
Is j = n ?
neen
$j := j + 1$
ja
Zoek het eerste element uit $a_{ij}, a_{i+1,j}, \ldots, a_{mj}$ dat ongelijk aan nul is; laat dit a_{pj} zijn
!
Is p = i ?
neen
ja
Verwissel de i-de en de p-de rij
Deel de i-de rij door a_{ij}
Trek voor $q = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$ a_{qj} maal de i-de rij van de q-de rij af
(*)
Is i = m ?
ja
neen
Klaar! De matrix A heeft nu de normaalvorm
$i := i + 1$
$j := j + 1$
neen
Is j = n ?
ja

Opmerking. Om de afrondingsfouten te verkleinen zal men in de praktijk in plaats van ! een andere opdracht geven.

Opmerking. Als men bovendien de kolomnummers $k_1,\ldots,k_r$ van de eenheidsvectoren $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r$ (uit $\mathbb{R}^m$) wil vastleggen, kan dit door op de plaats aangeduid met * de opdracht: $\boxed{\text{zet } k_i = j}$ in te lassen.

2.5.5. De verkregen normaalvorm kan nu beschreven worden met:

1. Er zijn getallen $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le n$ en de k_i-de kolom is $\underline{e}_i$ uit $\mathbb{R}^m$.
2. Iedere kolom met rangnummer $< k_1$ is $\underline{0}$; iedere kolom met rangnummer k met $k_i < k < k_{i+1}$ heeft nullen op de laatste (m-i) plaatsen; iedere kolom met rangnummer groter dan k_r heeft nullen op de laatste (m-r) plaatsen.

Gevolg. De eerste r rijen zijn $\neq \underline{0}$ (uit $\mathbb{R}^n$); de laatste m - r rijen zijn $\neq \underline{0}$.

Resultaat. De eerste r rijen van de normaalvorm van A vormen een basis (de zgn. standaardbasis) van de door de rijen $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m$ opgespannen deelruimte. Deze standaardbasis heeft het voordeel dat de componenten van elke vector uit de deelruimte t.o.v. deze basis direct af te lezen zijn.

§ 2.6. Lineaire afbeeldingen

2.6.1. Definitie. Een afbeelding A van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ heet lineair indien

(i) voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ geldt: $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y}$;

(ii) voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt: $A(\alpha\underline{x}) = \alpha A\underline{x}$.

N.B. We schrijven voor het beeld van $\underline{x}$ vaak $A\underline{x}$.

Als n = m spreekt men wel van een lineaire operator.
Als m = 1 spreekt men wel van een lineaire functionaal.

Voorbeeld. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de orthogonale projectie op het x,y-vlak, dit is de afbeelding A: $[x,y,z] \to [x,y,0]$; deze is lineair.

We beschouwen nu een algemener voorbeeld.

2.6.2. Voorbeeld. Zij $A^{(m\times n)}$ een matrix. Voor elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ is het matrixproduct $A\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ (herinner U dat de elementen uit $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ als kolomvectoren beschouwd worden; $A\underline{x}$ duidt hier matrixvermenigvuldiging aan). De afbeelding die aan $\underline{x}$ toevoegt:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

is lineair. We duiden deze "par abus de language" weer aan met A. We merken op dat de kolommen van de matrix A juist de beelden zijn van de eenheidsvectoren $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ uit $\mathbb{R}^n$.

We zullen bewijzen (2.6.4) dat dit voorbeeld volkomen algemeen is, dat nl. bij elke lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ een matrix hoort en omgekeerd. Eerst enige eigenschappen:

2.6.3. Zij A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineair, dan geldt:

(i) $A\underline{0} = A(0.\underline{0}) = 0A\underline{0} = \underline{0}$ $(\in \mathbb{R}^m\ !)$;

(ii) $A(-\underline{a}) = -A\underline{a}$;

(iii) $A(r_1\underline{v}_1 + r_2\underline{v}_2 + \ldots + r_k\underline{v}_k) = r_1A\underline{v}_1 + r_2A\underline{v}_2 + \ldots + r_kA\underline{v}_k$.

2.6.4. Stelling. Laat A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineair zijn. Als voor de eenheidsvectoren $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ uit $\mathbb{R}^n$ geldt:

$$A\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} ; \ A\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} ; \ \ldots ; \ A\underline{e}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} ,$$

dan geldt voor elke $\underline{x}$ uit $\mathbb{R}^n$ dat

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Bewijs. Voor elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ geldt: $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n$; wegens 2.6.3 (iii) is $A\underline{x} = x_1A\underline{e}_1 + \ldots + x_nA\underline{e}_n$ en wegens de definitie van matrixvermenigvuldiging klopt dit.

Voorbeeld. De matrix van de afbeelding uit het voorbeeld 2.6.1 is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Opmerking. Voor elke lineaire functionaal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is er een $\underline{a} = [a_1,\ldots,a_n] \in \mathbb{R}^n$ zodat de functionaal is $\underline{x} \to (\underline{a},\underline{x})$.

2.6.5. Stelling 2.6.4 geeft aan hoe de matrix van een lineaire afbeelding opgebouwd wordt uit de beelden van de eenheidsvectoren. Als we de beelden van een andere basis geven, dan zullen we de matrix bepalen op de wijze als nu besproken aan de hand van een $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ afbeelding. Laat van A gegeven zijn

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} ; \ A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} ; \ A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

I Programma. Neem de gegeven basisvectoren van $\mathbb{R}^3$ als rijen van een matrix M; hun beelden als de overeenkomstige rijen van een matrix N. Dus

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 5 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Omdat de rijen van M een basis van $\mathbb{R}^3$ vormen is de normaalvorm (zie 2.5.5) van M (ga na):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De normaalvorm van M wordt uit M gevormd door herhaalde uitvoering van de bewerkingen (α), (β) en (γ) uit 2.5.3. Voer met de rijen van N precies dezelfde bewerkingen uit; het resultaat is een matrix S. De matrix van A is nu S^T (ga na).

II Uitvoering

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 5 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 10 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 10 & 5 \\ 2 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

De matrix van A is dus

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Controleer het antwoord!

Voorbeeld. Projecteer de $\mathbb{R}^3$ met orthogonale projectie op het vlak V: $x + 2y + z = 0$. Dit is een lineaire afbeelding P. Om de matrix te bepalen merken we op dat voor vectoren in het vlak $P\underline{x} = \underline{x}$ geldt, terwijl voor vectoren loodrecht op het vlak $P\underline{x} = \underline{0}$ is. Dus

$$P\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \;;\; P\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Volgens het zoëven beschreven procédé is de matrix van P:

$$P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Een andere methode om dit te doen is de volgende: breng door $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ een rechte aan $\perp$ V; snijd deze met V en druk de coördinaten van het snijpunt uit in de coordinaten van $\underline{a}$. Dit snijpunt is $P\underline{a}$.

2.6.6. We gaan voort met de bestudering van een afbeelding A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. De matrix t.o.v. de standaardbases geven we ook aan met A. (Merk op dat het hele betoog nu verder op twee wijzen geïnterpreteerd kan worden, nl. doordat men $A\underline{x}$ nu kan lezen als "het beeld van $\underline{x}$ onder de afbeelding A", en ook als "het matrixproduct van A met de $(n \times 1)$ matrix $\underline{x}$".)

Eigenschappen

1. Is L een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ dan is A(L) een deelruimte van $\mathbb{R}^m$.

   Bewijs. Zij $\underline{b}_1 \in A(L)$ en $\underline{b}_2 \in A(L)$ en $r \in \mathbb{R}$. Er zijn $\underline{a}_1$ en $\underline{a}_2$ in L zodat $A\underline{a}_1 = \underline{b}_1$, $A\underline{a}_2 = \underline{b}_2$. Nu is $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 = A\underline{a}_1 + A\underline{a}_2 = A(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \in A(L)$ en $\alpha\underline{b}_1 = \alpha A\underline{a}_1 = A(\alpha\underline{a}_1) \in A(L)$, q.e.d.

De bewijzen van de overige eigenschappen zijn van hetzelfde eenvoudige karakter.

2. Is V een deelruimte van $\mathbb{R}^m$, dan is $\overset{\leftarrow}{A}(V)$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

3. In het bijzonder is $A(\mathbb{R}^n)$ een deelruimte van $\mathbb{R}^m$.

<u>Definitie</u>. $A(\mathbb{R}^n)$ heet de <u>beeldruimte</u> van A.

4. In het bijzonder is $\overset{\leftarrow}{A}(\{\underline{0}\})$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

<u>Definitie</u>. $\overset{\leftarrow}{A}(\{\underline{0}\})$ heet de <u>kern</u> van A; notatie $N(A)$.

5. $A(\mathbb{R}^n) = L(A\underline{e}_1, A\underline{e}_2, \ldots, A\underline{e}_n)$. De beeldruimte wordt opgespannen door de kolommen van de matrix.

6. $N(A)$ is de nulruimte van de matrix A.

7. Stellen $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ de rijen van A voor, dan is $N(A) = \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\}^{\perp}$.

<u>Definitie</u>. De <u>rang</u> van A is de dimensie van $A(\mathbb{R}^n)$.

8. De rang van A is de dimensie van de ruimte opgespannen door de kolomvectoren.

9. Als $A\underline{a} = \underline{b}$, dan is $\overset{\leftarrow}{A}(\{\underline{b}\}) = \underline{a} + N(A)$.

10. A is dan en slechts dan één-éénduidig als $N(A) = \{\underline{0}\}$.

2.6.7. <u>Dimensiestelling</u>. Zij $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineair, dan is

$$\dim N(A) + \dim A(\mathbb{R}^n) = n \;.$$

<u>Bewijs</u>. Daar $N(A) \subset \mathbb{R}^n$ geldt $k := \dim N(A) \le n$. Als $k = n$ is $N(A) = \mathbb{R}^n$ en $A = [0]$ en $\dim A(\mathbb{R}^n) = 0$, klaar.
Stel $k < n$; laat $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k$ een basis zijn van $N(A)$, vul die aan (2.4.9) met $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-k}$ tot een basis van $\mathbb{R}^n$. Daar $A\underline{u}_1 = \ldots = A\underline{u}_k = \underline{0}$, is

$$A(\mathbb{R}^n) = L(A\underline{v}_1, \ldots, A\underline{v}_{n-k}) \;.$$

Het bewijs is geleverd als we hebben laten zien dat $A\underline{v}_1,\ldots,A\underline{v}_{n-k}$ een onafhankelijk stelsel is.

Stel

$$r_1A\underline{v}_1 + \ldots + r_{n-k}A\underline{v}_{n-k} = \underline{0} ,$$

dan is

$$A(r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_{n-k}\underline{v}_{n-k}) = \underline{0}$$

en dus

$$r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_{n-k}\underline{v}_{n-k} \in N(A) .$$

Daar $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_k$ een basis voor $N(A)$ is, is

$$r_1\underline{v}_1 + \ldots + r_{n-k}\underline{v}_{n-k} = s_1\underline{u}_1 + \ldots + s_k\underline{u}_k .$$

Hieruit volgt $0 = r_1 = \ldots = r_{n-k}$ $(= s_1 = \ldots = s_k)$ omdat $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_k$, $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{n-k}$ een onafhankelijk stelsel is, q.e.d.

2.6.8. Stelling. Zij $A^{(m\times n)}$ een matrix. De dimensie van de ruimte opgespannen door de rijen (deelruimte van $\mathbb{R}^n$) is gelijk aan de dimensie van de ruimte opgespannen door de kolommen (deelruimte van $\mathbb{R}^m$) en derhalve gelijk aan rang A.

Bewijs. Laat $\underline{b}_1 := [a_{11},\ldots,a_{1n}]$, $\ldots$, $\underline{b}_m := [a_{m1},\ldots,a_{mn}]$ de rijen van A zijn, dan is

$$N(A) = \{\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m\}^\perp = (L(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m))^\perp \qquad (2.2.2).$$

Wegens 2.6.7 is

$$\dim(N(A)) = \dim(L(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m))^\perp = n - \text{rang}(A) .$$

Hieruit volgt

$$\dim(L(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m)) = n - \dim(L(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m))^\perp = \text{rang } A , \qquad \text{q.e.d.}$$

Gevolg. De rang van een matrix is gelijk aan de rang van zijn normaalvorm.

Gevolg. Het getal r uit 2.5.5 is de rang van de matrix.

2.6.9. Laat $A^{(m\times n)}$ een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ bepalen en $B^{(n\times p)}$ een afbeelding van $\mathbb{R}^p$ in $\mathbb{R}^n$. Zij $C^{(m\times p)} = AB$ de productmatrix. Deze bepaalt een afbeelding van $\mathbb{R}^p$ in $\mathbb{R}^m$, die de samengestelde, $A\circ B$, is van A en B; met de definitie van afbeeldingssamenstelling kunnen we dit aldus formuleren:

Stelling. Voor alle $\underline{x}$ uit $\mathbb{R}^p$ geldt:

$$C\underline{x} = A(B\underline{x}) \ .$$

Bewijs. We zullen laten zien dat het element in de i-de rij en j-de kolom van $A\circ B$ overeenkomt met c_{ij} (zie 1.1.8). De j-de kolom van $A\circ B$ is $A(B\underline{e}_j)$, $\underline{e}_j$ uit $\mathbb{R}^p$. Dit is

$$A\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} .$$

Het i-de element van deze vector is:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} \ , \qquad \text{q.e.d.}$$

2.6.10. Laat in het bijzonder A een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ op $\mathbb{R}^n$ zijn. Uit 2.6.8 volgt dat iedere lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ op $\mathbb{R}^n$ automatisch één-éénduidig is. De afbeelding A heeft nu een inverse. Uit 2.6.9 volgt dat de matrix van de inverse afbeelding de inverse matrix is. Merk op dat I de matrix van de identieke afbeelding is. Dit geeft ons een mogelijkheid om met behulp van de techniek uit § 2.5 de inverse van een matrix te bepalen. Uit het voorafgaande volgt dat een $n \times n$ matrix dan en slechts dan inverteerbaar is als de rang n is. Het is vanwege de eigenschappen van functiesamenstelling ook evident dat de rechter en linker inverse van een inverteerbare matrix gelijk zijn (zie 1.1.10.8). We behandelen een voorbeeld:
Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} .$$

Als A inverteerbaar is vormen de kolommen een basis van $\mathbb{R}^3$ (dit is het geval!). De inverse matrix wordt nu op de wijze van 2.6.5 berekend uit: $A^{-1}[1,2,0] = [1,0,0]$; $A^{-1}[1,1,1] = [0,1,0]$; $A^{-1}[1,0,3] = [0,0,1]$. Resultaat

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Controleer het antwoord!

2.6.11. Eigenwaarden en eigenvectoren

Definitie. Zij $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineair. Een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ heet een eigenwaarde van A indien er een $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, bestaat zó dat $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. Deze vector $\underline{v}$ heet een eigenvector bij de eigenwaarde λ.

We hebben al verschillende malen gezien hoe eigenwaarden en eigenvectoren in de toepassingen een rol spelen. Meetkundig zijn eigenvectoren vectoren $\underline{v} \neq \underline{0}$ waarvan het beeld op de lijn door $\mathcal{O}$ en $\underline{v}$ ligt.

Stelling. Als λ een eigenwaarde van $A^{(n\times n)}$ is, dan is $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\}$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ met positieve dimensie.

Stelling. Een getal λ is een eigenwaarde van A dan en slechts dan als $\dim N(A - \lambda I) > 0$ is. Alle vectoren $\neq \underline{0}$ uit $N(A - \lambda I)$ zijn eigenvectoren van A bij eigenwaarde λ.
Het vinden van eigenwaarden en eigenvectoren komt neer op het vinden van een λ en een $\underline{v} \neq \underline{0}$ die voldoen aan:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \dots + a_{2n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0 . \end{cases}$$

We behandelen een voorbeeld van het bepalen van eigenwaarden m.b.v. het vegen.

Zij

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Een getal λ is een eigenwaarde van A als $\dim(N(A - \lambda I)) > 0$;

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} ;$$

we willen: $\text{rang}(A - \lambda I) < 3$. Dan moeten de rijen afhankelijk zijn. Tel de eerste rij 3 maal bij de tweede en $-\lambda$ maal bij de derde op. Er komt:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & -1 \\ 6 - 3\lambda & -2 - \lambda & 0 \\ 2 - 3\lambda + \lambda^2 & 2 + \lambda & 0 \end{bmatrix} .$$

Opdat λ een eigenwaarde is moeten dus

$$[3(\lambda-2), \lambda+2, 0] \quad \text{en} \quad [(\lambda-2)(\lambda-1), \lambda+2, 0]$$

afhankelijk zijn. Dit is het geval bij $\lambda = 2$, $\lambda = -2$, $\lambda - 1 = 3$, dus $\lambda = 4$. Omdat eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden onafhankelijk zijn (ga dit na!) heeft een $n \times n$ matrix ten hoogste n verschillende eigenwaarden.

Het berekenen van de eigenvectoren is nu een kwestie van het oplossen van homogene stelsels (zie § 3.1). Bijv. voor $\lambda = 2$ vinden we

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 = 0 \end{cases} .$$

Oplossing: $\underline{x} = \alpha[1,0,1]$; controleer dit!

Het berekenen van eigenwaarden op deze manier is niet erg handig: er bestaan handigere methoden die buiten het bereik van dit college vallen. (Zie appendix.)

HOOFDSTUK 3 LINEAIRE VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN

§ 3.1. Homogene lineaire vergelijkingen

3.1.1. We beschouwen het stelsel:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0\,. \end{cases}$$

Zij $A = A^{(m\times n)} = [a_{ij}]$; zij $\underline{a}_1 = [a_{11},\dots,a_{1n}]$, ..., $\underline{a}_m = [a_{m1},\dots,a_{mn}]$.
We hebben al gezien dat de oplossingen van (1) een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ vormen, nl. $N(A) = (L(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_m))^{\perp}$. We noemen $N(A)$ ook oplossingsruimte van (1). Er is een van $\underline{0}$ verschillende oplossing dan en slechts dan indien rang $A < n$. Het berekenen van de oplossing gaat via de algoritme van § 2.5:

3.1.2. Stelling. Laat $\tilde{A}$ de normaalvorm zijn van A, dan is $N(\tilde{A}) = N(A)$.

Bewijs. De rijen van $\tilde{A}$ en A spannen dezelfde deelruimte op.

3.1.3. Laat $A^{(m\times n)}$ een matrix zijn in normaalvorm. Laat $k_1, k_2, \dots, k_r$ de kolommen zijn waarin de eenheidsvectoren uit $\mathbb{R}^m$ staan, dan vindt men elke oplossing van $A\underline{x} = \underline{0}$ door aan alle $x_1,\dots,x_n$ met uitzondering van $x_{k_1},\dots,x_{k_r}$ waarden toe te kennen en de $x_{k_1},\dots,x_{k_r}$ uit te rekenen.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 6$; rang $A = 3$, dus $\dim N(A) = 7 - 3 = 4$.
De oplossing van $A\underline{x} = \underline{0}$ is nu $x_1 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$, $x_5 = \lambda_3$, $x_7 = \lambda_4$, derhalve $x_2 = -2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$, $x_4 = -\lambda_4$, $x_6 = -\lambda_4$.

Dit kunnen we ook schrijven als:

$$\underline{x} = \lambda_1[1,0,0,0,0,0,0,0] + \lambda_2[0,-2,1,0,0,0,0,0] +$$

$$+ \lambda_3[0,-1,0,0,1,0,0,0] + \lambda_4[0,-1,0,-1,0,-1,1] .$$

Uit het feit dat dim N(A) = 4 volgt ook dat we de algemene oplossing hebben. We formuleren het nog eens anders:

Laat A een $m \times n$ matrix zijn. Een basis voor de oplossingsruimte van $A\underline{x} = \underline{0}$ krijgt men aldus:

(1) Breng A op normaalnorm.

(2) Splits de veranderlijken in twee groepen: $x_{k_1},\dots,x_{k_r}$ en de overige, zeg: $x_{\ell_1},\dots,x_{\ell_{n-r}}$.

(3) Voor elke $i \in \{1,2,\dots,n-r\}$ neemt men $x_{\ell_i} = 1$, $x_{\ell_j} = 0$ $(j \neq i)$ en berekent men $x_{k_1},\dots,x_{k_r}$. Zo verkrijgt men telkens een oplossing.

(4) De $n - r$ oplossingen die men zo vindt vormen een basis van N(A).

§ 3.2. <u>Inhomogene lineaire vergelijkingen</u>

3.2.1. We beschouwen het stelsel

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases}$$

A, $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m$ zijn als in 3.2.1; zij

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

We kunnen (2) schrijven als $A\underline{x} = \underline{b}$.
Volgens de bloknotatie is

$$[A,\underline{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Men noemt A en $[A,\underline{b}]$ de bij (2) horende kleine en grote matrix.
Door herhaling van reeds gegeven argumenten kan men alle onderstaande beweringen bewijzen.

(a) Het stelsel (2) is dan en slechts dan niet strijdig (= oplosbaar) indien $\underline{b} \in A(\mathbb{R}^n)$.

(b) Het stelsel (2) is dan en slechts dan oplosbaar indien rang A = rang$[A,\underline{b}]$.

(c) Als $A\underline{a} = \underline{b}$ dan is het stelsel (2) oplosbaar en de algemene oplossing is $\underline{x} = \underline{a} + N(A)$. (M.a.w. $\underline{a} + N(A)$ is de verzameling van alle oplossingen.)

(d) Als (2) oplosbaar is, is de dimensie van de oplossingsvariëteit (gelijk aan dim N(A)) gelijk aan: n - rang A.

(e) Als $[\tilde{A},\tilde{\underline{b}}]$ de normaalvorm is van $[A,b]$ dan hebben $\tilde{A}\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$ en $A\underline{x} = \underline{b}$ dezelfde oplossingen.

(f) Als n = m en A is één-éénduidig (d.w.z. $N(A) = \{\underline{0}\}$) dan is $A\underline{x} = \underline{b}$ ééduidig oplosbaar met oplossing $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$.

3.2.2. Uit bewering (e) volgt tevens een methode om het stelsel (2) op te lossen.

1. Breng $[A,\underline{b}]$ op normaalvorm. Er zijn nu twee mogelijkheden:
   (i) $k_r = n + 1$ en rang $[A,b]$ > rang A en het stelsel is strijdig.
   (ii) $k_r \leq n$ en rang $[A,b]$ = rang A; het stelsel is oplosbaar.

2. Laat het stelsel oplosbaar zijn en $[\tilde{A},\tilde{\underline{b}}]$ de normaalvorm zijn van de grote matrix, dan is

$$\underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Is nu $r = n$ dan is het stelsel éénduidig oplosbaar, is $r < n$ dan is er een $(n - r)$ dimensionale oplossingsvariëteit. Op grond van (c) is het voldoende één oplossing aan te geven en verder $N(A)$ volgens § 3.1. te bepalen (dit is, als $\tilde{A}$ bekend is, niet veel werk meer).
Een oplossing is: $x_{k_1} = \tilde{b}_1$, $x_{k_2} = \tilde{b}_2$, ..., $x_{k_r} = \tilde{b}_r$ en de eventuele overige x-en zijn gelijk aan 0.

3.2.3. Voorbeelden

1.
$$\begin{cases} \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$[A,\underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{A},\underline{\tilde{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(zie 2.6.5 II)} .$$

Oplossing: $x_1 = -2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$ of $\underline{x} = [-2,6,4]$.

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$[A,\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{A},\underline{\tilde{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

rang $[\tilde{A},\underline{\tilde{b}}]$ > rang $\tilde{A}$. Het stelsel is strijdig; er zijn geen oplossingen.

3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$[A,\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{A},\underline{\tilde{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

rang $[\tilde{A},\underline{\tilde{b}}]$ = rang $\tilde{A}$ = 2. Dimensie oplossingsvariëteit: 4 - 2 = 2.
Een oplossing: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$.
Algemene oplossing:

$$\underline{x} = [-1,1,0,0] + \lambda[13,-8,1,0] + \mu[-9,5,0,1] .$$

§ 3.3. Positieve oplossingen van stelsels lineaire vergelijkingen

3.3.1. In veel van de toepassingen van stelsels lineaire vergelijkingen, d.w.z. van $A\underline{x} = \underline{b}$, ging het er niet slechts om een oplossing te vinden, maar om een oplossing te vinden die bovendien voldoet aan $\underline{x} \geq \underline{0}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$. Zie bijv. 1.2.2, 1.2.3. We zullen ons met dit soort oplossingen gaan bezighouden. Als voorbereiding bestuderen we convexe verzamelingen in $\mathbb{R}^n$.

Afspraak. Een vector $\underline{x} \geq \underline{0}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ noemen we positief.

Definitie. Een vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ heet een convexe combinatie van $\underline{y}$ en $\underline{z}$ indien er een getal λ bestaat met $0 \leq \lambda \leq 1$, zó dat:

$$\underline{x} = \lambda\underline{y} + (1 - \lambda)\underline{z} \ .$$

De verzameling van alle convexe combinaties van $\underline{y}$ en $\underline{z}$ noemen we het segment tussen $\underline{y}$ en $\underline{z}$.

3.3.2. Definitie. Een deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ heet convex indien voor elke $\underline{y} \in U$ en elke $\underline{z} \in U$ en elke $\lambda \in [0,1]$ geldt:

$$\lambda\underline{y} + (1 - \lambda)\underline{z} \in U \ .$$

3.3.3. Voorbeelden van convexe verzamelingen

1. In $\mathbb{R}^2$ is de cirkelschijf $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ convex.
2. Het binnengebied van een driehoek in $\mathbb{R}^2$, van een viervlak in $\mathbb{R}^3$, ..., is convex.
3. In $\mathbb{R}^n$ is $\{\underline{x} \mid \underline{x} \geq \underline{0}\}$ convex.
4. Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$; de verzamelingen $\{\underline{x} \mid (\underline{a},\underline{x}) > r\}$ en $\{\underline{x} \mid (\underline{a},\underline{x}) \geq r\}$ zijn convexe verzamelingen (geheten open en gesloten halfruimten).

3.3.4. Definitie. Laat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$; $\underline{z}$ heet een convexe combinatie van $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ indien $\underline{z} = \lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{x}_n$ met $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, ..., $\lambda_n \geq 0$ en $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Eigenschappen:

1. Als U_1 en U_2 convex zijn, dan is $U_1 \cap U_2$ convex.
De doorsnede van een willekeurige collectie convexe verzamelingen is convex.
2. Iedere lineaire variëteit (in het bijzonder iedere deelruimte) is convex.
3. Als U convex is en als $\underline{x}_1 \in U, \dots, \underline{x}_k \in U$, dan ligt ook elke convexe combinatie van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ in U.

Bewijs. Voor k = 2 is dit de definitie van convexe verzameling. Laat bewezen zijn dat iedere convexe combinatie van een (k - 1)-tal elementen uit U in U ligt. Zij $\underline{x} = \lambda_1\underline{x}_1 + \dots + \lambda_k\underline{x}_k$, $\lambda_i \ge 0$, $\Sigma\lambda_i = 1$; als $\lambda_1 = 1$ zijn de overige $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ gelijk 0 en is $\underline{x} \in U$, anders is

$$\underline{x} = \lambda_1\underline{x}_1 + (1-\lambda_1)\left[\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}\underline{x}_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_1}\underline{x}_k\right] =: \lambda_1\underline{x}_1 + (1-\lambda_1)\underline{y}$$

daar $\underline{y} \in U$ krachtens aanname, is $\underline{x} \in U$, q.e.d.

4. Een convexe combinatie van convexe combinaties van $x_1, \dots, x_k$ is zelf een convexe combinatie van $x_1, \dots, x_k$.
5. Bij iedere verzameling V is er een kleinste convexe verzameling die V bevat; dit is de doorsnede van alle convexe verzamelingen die V bevatten.
Notatie: C(V); naam: convexe omhulsel van V.
6. Als $V = \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$, dan is

$$C(V) = \{\lambda_1\underline{x}_1 + \dots + \lambda_k\underline{x}_k \mid \lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_k \ge 0,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\}\ .$$

$C(\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\})$ heet het convexe polytoop opgespannen door $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$.
7. Als $\underline{x} \in C(\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\})$ dan is $C(\{\underline{x}, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\}) = C(\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\})$.
8. Er bestaat een eenduidig bepaalde verzameling $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_\ell\} \subset \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\}$ zó dat:
   i) $C(\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_\ell\}) = C(\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\})$.
   ii) Geen der $\underline{b}_i$ is gelegen in het convexe polytoop opgespannen door de overige $\underline{b}$'s.

Bewijs. Probeer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ achtereenvolgens weg te laten.
De $\underline{b}_i$ heten de hoekpunten van het polytoop.

9. $\{\underline{x} \mid \underline{x} \ge 0,\ x_1 + \dots + x_n = 1\}$ is een convex polytoop met als hoekpunten $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$.

3.3.5. Definitie. Zij U een convexe verzameling. Een vector $\underline{x} \in U$ heet een extreem element van U als uit $\underline{x} = \lambda\underline{y} + (1-\lambda)\underline{z}$, $\underline{y} \in U$, $\underline{z} \in U$, $\underline{y} \ne \underline{z}$, volgt $\lambda = 1$ en $\underline{x} = \underline{y}$ of $\lambda = 0$ en $\underline{x} = \underline{z}$.

We kunnen het ook zo formuleren:

$\underline{x}$ is extreem element als uit $\underline{x} = \alpha\underline{y} + (1 - \alpha)\underline{z}$, $\underline{y} \in U$, $\underline{z} \in U$, $0 < \alpha < 1$, volgt: $\underline{x} = \underline{y} = \underline{z}$; of

$\underline{x}$ is extreem element als $\underline{x}$ niet tussenpunt is van een segment in U, of als $\underline{x}$ geen convexe combinatie is van twee andere elementen van U.

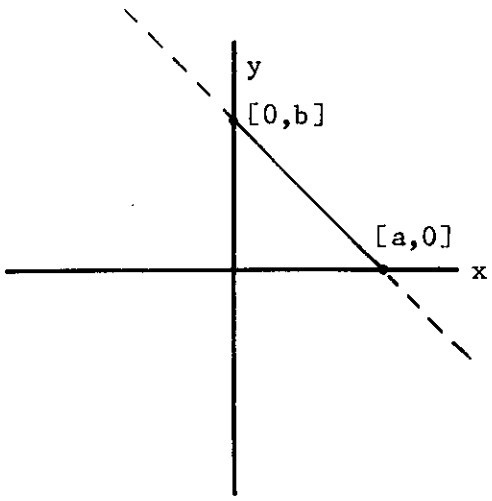
Voorbeelden

1. Open en gesloten halfruimten hebben geen extreme elementen.
2. De hoekpunten van een convex polytoop zijn extreme elementen.

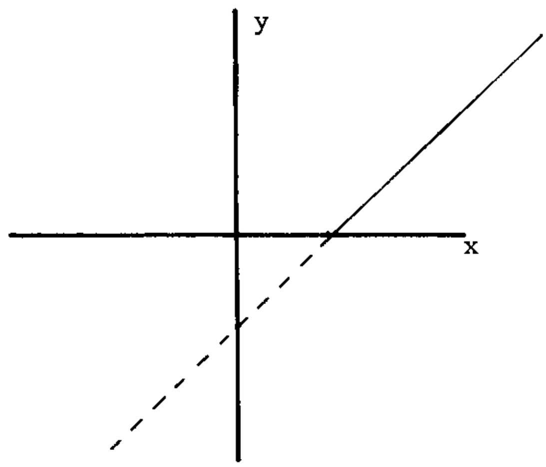
3.3.6. Stelling. De positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ vormen een convexe verzameling.

Bewijs. De verzameling van positieve oplossingen kan leeg zijn. De lege verzameling is convex. Zijn $\underline{y}$ en $\underline{z}$ positieve oplossingen en is $0 \le \lambda \le 1$, dan is ook $\lambda\underline{y} + (1 - \lambda)\underline{z}$ een positieve oplossing.

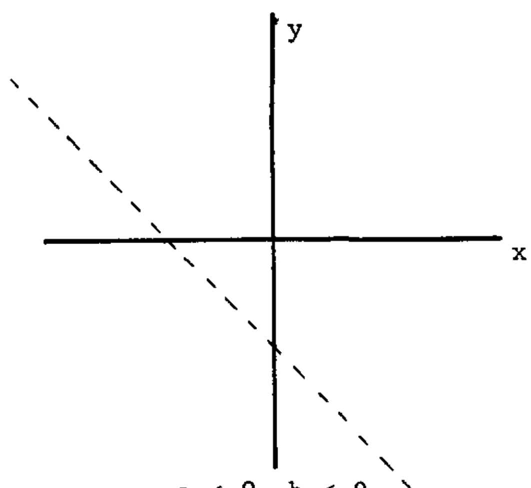
Voorbeeld. Om een idee te krijgen van wat verzamelingen positieve oplossingen kunnen zijn, schetsen we de positieve oplossingen van $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



a > 0, b > 0



a > 0, b < 0



a < 0, b < 0

We zien dat er twee, een, geen extreme elementen zijn.
In het geval dat de verzameling oplossingen begrensd is, is deze gelijk aan het convexe polytoop opgespannen door de extreme elementen. (We spreken van extreme oplossingen.)
Laat de kolomvectoren van A zijn: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$; d.w.z.

$$\underline{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

$A\underline{x} = \underline{b}$ is nu te schrijven als $x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}$.

3.3.7. Stelling. Zij $\underline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, 0, \ldots, 0]$ met $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_p > 0$ een positieve oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$. Nu is $\underline{x}$ een extreme oplossing dan en slechts dan als $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ een onafhankelijk stelsel is.

Bewijs

(i) Stel $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ onafhankelijk en stel $\underline{x} = \lambda_0\underline{u} + (1 - \lambda_0)\underline{v}$ voor zekere λ_0 met $0 < \lambda_0 < 1$ en positieve oplossingen $\underline{u}$ en $\underline{v}$.
Uit $\lambda_0 u_k + (1 - \lambda_0)v_k = 0$, $u_k \geq 0$, $v_k \geq 0$, volgt $u_k = 0$, $v_k = 0$.
We hebben dus: $u_{p+1} = \ldots = u_n = 0$, $v_{p+1} = \ldots = v_n = 0$. Nu is

$$\begin{aligned} x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_p\underline{a}_p &= \underline{b} \\ u_1\underline{a}_1 + \ldots + u_p\underline{a}_p &= \underline{b} \\ v_1\underline{a}_1 + \ldots + v_p\underline{a}_p &= \underline{b}\,. \end{aligned}$$

Omdat $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ onafhankelijk is, volgt hieruit $\underline{x} = \underline{u} = \underline{v}$.

(ii) Stel dat het stelsel $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ niet onafhankelijk is; er zijn nu getallen $y_1, \ldots, y_p$ niet alle gelijk aan nul, zó dat $y_1\underline{a}_1 + \ldots + y_p\underline{a}_p = \underline{0}$.
Beschouw $\underline{y} := [y_1, y_2, \ldots, y_p, 0, 0, \ldots, 0] \in R^n$, dan is $\underline{y} \neq \underline{0}$ (n.b. $\underline{y}$ kan negatieve componenten hebben!).
Laat $m := \min\{x_1, \ldots, x_p\}$, $M := \max\{|y_1|, \ldots, |y_p|\}$, dan is $m > 0$, $M > 0$. Zij $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{m}{M}$. Nu zijn $\underline{u} := \underline{x} + \varepsilon\underline{y}$ en $\underline{v} := \underline{x} - \varepsilon\underline{y}$ twee verschillende positieve oplossingen en $\underline{x} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, dus $\underline{x}$ is geen extreme oplossing, q.e.d.

3.3.8. Stelling. Zij $\underline{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ een positieve oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$. Nu is $\underline{x}$ een extreme oplossing dan en slechts dan indien het stelsel van de kolomvectoren van A met rangnummers i, waarvoor $x_i \neq 0$ is, een onafhankelijk stelsel is.

Bewijs. Pas 3.3.7 toe, eventueel na hernummering van de onbekenden.

3.3.9. Stelling. $A\underline{x} = \underline{b}$ heeft hoogstens eindig veel extreme positieve oplossingen.

Bewijs. $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n\}$ heeft eindig veel deelverzamelingen; alleen die deelverzamelingen die een onafhankelijk stelsel vormen hebben kans met een extreme oplossing verbonden te zijn.

Stelling 3.3.8 geeft ons tevens een mogelijkheid de extreme oplossingen te bepalen. We gaan daarbij als volgt te werk:
Bepaal een onafhankelijk stelsel kolomvectoren van A, bijv. $\underline{a}_1,\underline{a}_3,\underline{a}_7,\underline{a}_8$.
Probeer op te lossen: $x_1\underline{a}_1 + x_3\underline{a}_3 + x_7\underline{a}_7 + x_8\underline{a}_8 = \underline{b}$; er is ten hoogste één oplossing. Laat deze zijn $x_1 = \alpha_1$, $x_3 = \alpha_3$, $x_7 = \alpha_7$, $x_8 = \alpha_8$. Beschouw nu $[\alpha_1,0,\alpha_3,0,0,0,\alpha_7,\alpha_8,0,\ldots,0]$; als deze vector positief is, is het een extreme oplossing.

We kunnen ons bij het zoeken naar extreme oplossingen beperken tot lineair onafhankelijke kolomstelsels van maximale omvang. Immers is rang A = r, en, bijvoorbeeld $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_r$ een onafhankelijk stelsel kolommen, terwijl er een extreme positieve oplossing bestaat $(x_1,x_2,\ldots,x_p,0,\ldots,0)$, met $x_1 > 0$, $x_p > 0$, en $p < r$, dan heeft het stelsel

$$y_1\underline{a}_1 + \ldots + y_r\underline{a}_r = \underline{b}$$

als enige oplossing:

$$y_1 = x_1,\ldots,y_p = x_p,\ y_{p+1} = 0,\ldots,y_r = 0\ .$$

Omdat elk stelsel van p onafhankelijke kolommen met $p < r$ = rang A uit te breiden is tot een stelsel van r onafhankelijke kolommen vinden we derhalve alle extreme oplossingen door het zojuist beschreven zoekproces uit te voeren voor alle onafhankelijke r tallen van kolommen.

Belangrijk zijn gevallen waarin de verzameling van de positieve oplossingen begrensd is. Een voldoende (maar niet nodige!) voorwaarde hiervoor is:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} > 0 \quad (j = 1,\ldots,n) \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^{m} b_i \geq 0$$

(ga na!). Als de verzameling van positieve oplossingen begrensd is gelden fraaie stellingen.

3.3.10. Stelling. Laat de verzameling van positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ begrensd zijn; laat $\underline{x}_0$ zo'n positieve oplossing zijn en laat $\underline{a} \in N(A)$ zijn, dan vormen alle positieve oplossingen van de vorm $\underline{x}_0 + t\underline{a}$ met $t \in \mathbb{R}$ een segment in $\mathbb{R}^n$.

Bewijs. Triviaal.

We komen nu tot de hoofdstelling van deze paragraaf.

3.3.11. Stelling. Laat de verzameling V van de positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ niet leeg en begrensd zijn, dan bestaat V uit alle convexe combinaties van de extreme oplossingen, m.a.w. V is het convexe polytoop met de extreme oplossingen als hoekpunten.

Bewijs. We geven een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat er een positieve oplossing $\underline{z}$ is die geen convexe combinatie van extreme oplossingen is; $\underline{z}$ is dan zelf zeker geen extreme oplossing. Er zijn dan twee verschillende positieve oplossingen $\underline{u}$ en $\underline{v}$ en een λ met $0 < \lambda < 1$ zó dat $\underline{z} = \lambda\underline{u} + (1 - \lambda)\underline{v}$. Alle vectoren van de vorm $t\underline{u} + (1 - t)\underline{v} = \underline{v} + t(\underline{u} - \underline{v})$ met $t \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$. Wegens stelling 3.3.10 vormen de positieve oplossingen van deze vorm een segment S in $\mathbb{R}^n$. Laat $\underline{u}^*$ en $\underline{v}^*$ de eindpunten van S zijn; dan zijn $\underline{u}$ en $\underline{v}$, en dus ook $\underline{z}$, convexe combinaties van $\underline{u}^*$ en $\underline{v}^*$, terwijl $\underline{u}^* \neq \underline{v}^*$, $\underline{u}^* \neq \underline{z}^*$, $\underline{v}^* \neq \underline{z}^*$. Als $\underline{u}^*$ en $\underline{v}^*$ nu beide convexe combinaties van extreme oplossingen zouden zijn, dan zou hetzelfde gelden voor $\underline{z}$. Minstens een van beide $\underline{u}^*$ of $\underline{v}^*$, zeg maar $\underline{u}^*$, is dus geen convexe combinatie van extreme oplossingen. Laat er in $\underline{z}$ p coördinaten gelijk aan 0 zijn, dan zijn ook in $\underline{u}^*$ en $\underline{v}^*$ de overeenkomende coördinaten 0. We zullen laten zien dat er in $\underline{u}^*$ tenminste p + 1 coördinaten 0 zijn. Als dit nl. niet zo was, dan konden we als in het bewijs van 3.3.7 een getal ε zo klein vinden dat $\underline{u}^* + \varepsilon(\underline{v}^* - \underline{u}^*)$ en $\underline{u}^* - \varepsilon(\underline{v}^* - \underline{u}^*)$ beide positieve oplossingen zijn, in tegenspraak met het feit dat $\underline{u}^*$ een eindpunt is van het segment van positieve oplossingen van de vorm $\underline{u}^* + t(\underline{v}^* - \underline{u}^*)$; dit segment is immers hetzelfde als S.

Het aantal coördinaten gelijk 0 in $\underline{u}^*$ is dus $\geq p + 1$. Herinneren we ons dat $\underline{u}^*$ geen convexe combinatie van extreme oplossingen is. We laten nu $\underline{u}^*$ de rol van $\underline{z}$ spelen en herhalen het bovenstaande betoog. We vinden dan een positieve oplossing die geen convexe combinatie van extreme oplossingen is met tenminste $p + 2$ coördinaten gelijk aan nul. We herhalen het argument; zodoende vinden we positieve oplossingen die geen convexe combinatie van extreme oplossingen zijn, met steeds meer nullen. Op een gegeven moment (ga na!) zijn er nog zo weinig positieve coördinaten over, dat de overeenkomstige kolomvectoren van A onafhankelijk zijn en de vector zelf een extreme oplossing is. Tegenspraak. q.e.d.

3.3.12. Voorbeelden

1. Bepaal alle positieve oplossingen van:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \, . \end{cases}$$

Er kunnen geen onbegrensde positieve oplossingen zijn; immers elke oplossing moet ook voldoen aan: $3x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Voor we de extreme oplossingen zoeken gaan we over op de normaalvorm.

Zij

$$[A,\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(verwisseling der vergelijkingen!), dan is

$$[\tilde{A},\tilde{\underline{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} .$$

De oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$ is dus: $\underline{x} = [\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, 0] + \lambda[-1,2,1]$. Er is dus (3.3.10) een segment van positieve oplossingen, derhalve twee extreme oplossingen. Om deze te vinden kunnen we twee wegen bewandelen:

(a) Oplossingen zijn positief als $\frac{3}{4} - \lambda \geq 0$ en $-\frac{5}{4} + 2\lambda \geq 0$ en $\lambda \geq 0$ (minstens eenmaal moet er echt groter komen); dus $\frac{5}{8} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$. De extreme oplossingen zijn ($\lambda = \frac{5}{8}$): $[\frac{1}{8}, 0, \frac{5}{8}]$ en ($\lambda = \frac{3}{4}$): $[0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Alle positieve oplossingen zijn:

$$\underline{x} = t[\tfrac{1}{8}, 0, \tfrac{5}{8}] + (1 - t)[0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}] \qquad (0 \le t \le 1)\ .$$

(b) Beschouw alle lineair onafhankelijke tweetallen uit

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

en probeer voor elk van deze deelstelsels een oplossing te vinden die alleen voor de componenten overeenkomend met de vectoren uit het stelsel ongelijk nul is.

Onafhankelijk deelstelsel	op te lossen vergelijkingen	oplossing $[x_1, x_2, x_3]$
$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{5}{4}\end{bmatrix},\ x_3 = 0$	$[\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, 0]$ niet positief
$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = \frac{3}{4} \\ -2x_3 = -\frac{5}{4} \\ x_2 = 0 \end{cases}$	$[\frac{1}{8}, 0, \frac{5}{8}]$ extreme oplossing!
$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_3 = \frac{3}{4} \\ x_2 - 2x_3 = -\frac{5}{4} \\ x_1 = 0 \end{cases}$	$[0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ extreme oplossing!

2. $$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1\ . \end{cases}$$

De algemene oplossing is $\underline{x} = [1,1,0] + \lambda[1,1,1]$.
We zien dat de verzameling positieve oplossingen onbegrensd is. Iedere oplossing is positief waarvoor $\lambda \ge 0$ is. Er is één extreme oplossing, nl. $[1,1,0]$.
We zullen nog eens direct laten zien dat $[1,1,0]$ een extreem element is van de verzameling $\{[1+\alpha, 1+\alpha, \alpha] \mid \alpha \ge 0\}$. Zij nl.

$$[1,1,0] = \lambda[1+\alpha, 1+\alpha, \alpha] + (1 - \lambda)[1+\beta, 1+\beta, \beta]$$

met $0 < \lambda < 1$, dan volgt:

$$\begin{cases}(1+\alpha)\lambda + (1+\beta)(1-\lambda) = 1 \\ \alpha\lambda + (1-\lambda)\beta = 0\end{cases}$$

en dus $\alpha\lambda = 0$ en $(1 - \lambda)\beta = 0$; $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

De enige extreme oplossing van 2 is ook te vinden op de manier van 3.3.9.

$$[A,\underline{b}] = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \\ \underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \underline{a}_3 \quad \underline{b}\end{array}$$

Merk op dat rang A = 2

Onafhankelijk tweetallen	op te lossen vergelijkingen	oplossingen
$\underline{a}_1, \underline{a}_2$	$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$	[1,1,0], extreem
$\underline{a}_1, \underline{a}_3$	$\begin{cases}x_1 - x_3 = 1,\ x_2 = 0 \\ -x_3 = 1\end{cases}$	[0,0,-1], niet positief
$\underline{a}_2, \underline{a}_3$	$\begin{cases}-x_3 = 1,\ x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1\end{cases}$	[0,0,-1], niet positief

3. $$\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\ .\end{cases}$$

Merk op dat niet geldt: $\sum_{i=1}^{2} a_{ij} > 0$ $(j = 1,2,3)$. Toch is de verzameling positieve oplossingen begrensd, want een positieve oplossing moet ook voldoen aan ($\frac{3}{2}$ × de eerste vergelijking + 1 × de tweede):

$$\frac{5}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 5\ .$$

We zoeken nu de extreme oplossingen zonder eerst op normaalvorm over te gaan:

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix},\quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix}-1 \\ 2\end{bmatrix},\quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix},\quad \underline{b} = \begin{bmatrix}2 \\ 2\end{bmatrix}.$$

Wederom is rang A = 2

Onafhankelijke tweetallen	vergelijkingen	oplossing

Onafhankelijke tweetallen	vergelijkingen	oplossing
$\underline{a}_1,\underline{a}_2$	$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \; x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$	[2,0,0] extreme oplossing,
$\underline{a}_1,\underline{a}_3$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2, \; x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$	[2,0,0]
$\underline{a}_2,\underline{a}_3$	$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 2, \; x_1 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$	[0,4,6], extreme oplossing

Alle positieve oplossingen:

$$\underline{x} = \lambda[2,0,0] + (1-\lambda)[0,4,6] = [2\lambda,4-4\lambda,6-6\lambda] \qquad (0 \le \lambda \le 1)\ .$$

§ 3.4. Lineaire ongelijkheden

3.4.1. We beschouwen stelsels ongelijkheden van de vorm

$$\begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n \le \alpha \\ b_1x_1 + \dots + b_nx_n \ge \beta \\ \vdots \\ f_1x_1 + \dots + f_nx_n \le \eta\ . \end{cases}$$

Door vermenigvuldiging van sommige ongelijkheden met -1 kan elk stelsel geschreven worden in de vorm

$$A\underline{x} \le \underline{b}\ . \tag{1}$$

Laat de rijvectoren van A zijn: $\underline{v}_1 := [a_{11},\dots,a_{1n}]$, ..., $\underline{v}_m := [a_{m1},\dots,a_{mn}]$; dan is het stelsel $A\underline{x} \le \underline{b}$ ook te schrijven als:

$$\begin{cases} (\underline{v}_1,\underline{x}) \le b_1 \\ \quad\vdots \\ (\underline{v}_m,\underline{x}) \le b_m\ . \end{cases} \tag{2}$$

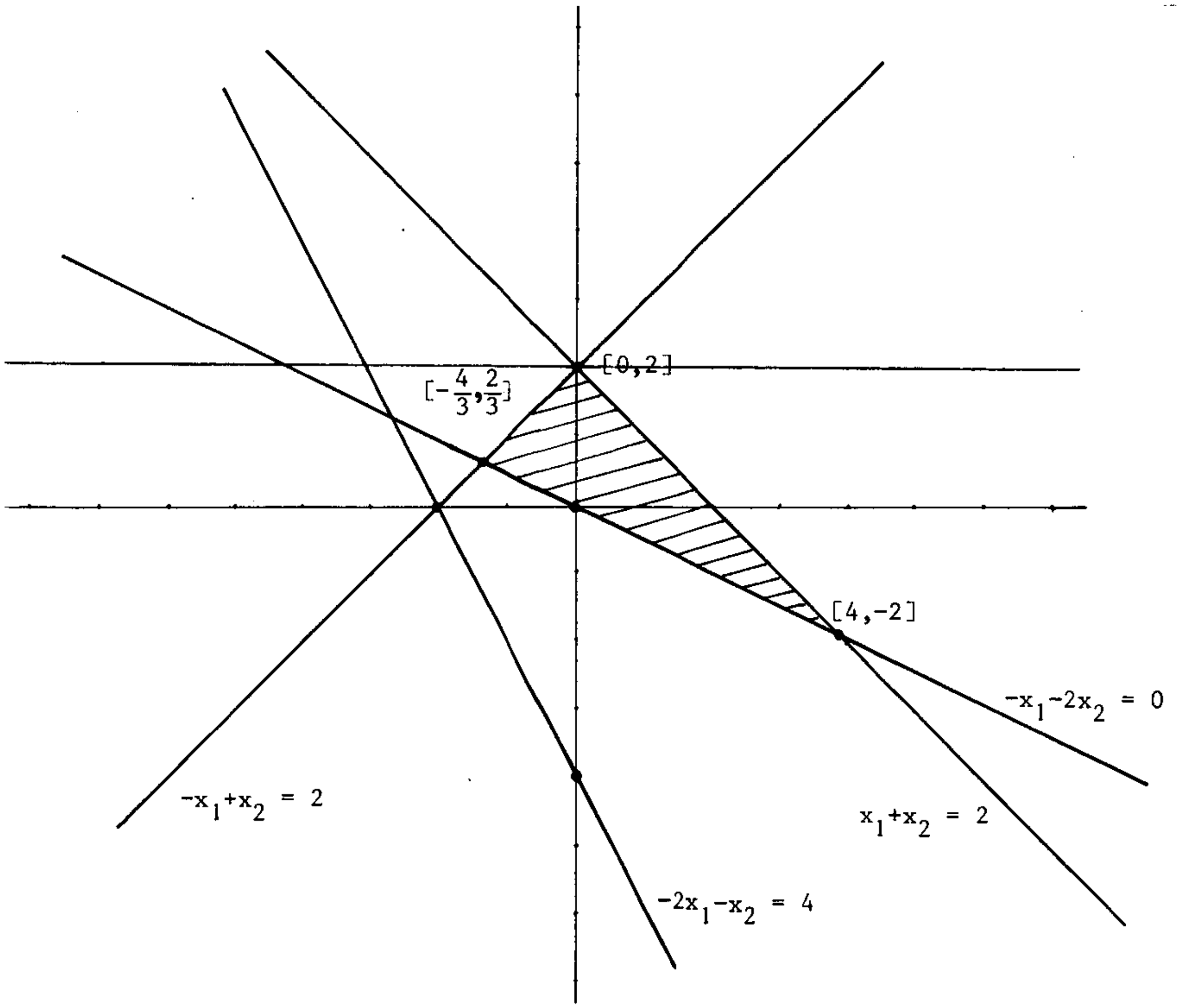
3.4.2. Stelling. De verzameling V van de vectoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ die voldoen aan $A\underline{x} \le \underline{b}$ is convex.

Bewijs. In de schrijfwijze (2) is duidelijk dat V de doorsnede is van convexe halfruimten.

3.4.3. In een stelsel als (2) kunnen overtollige ongelijkheden voorkomen; deze kan men weglaten zonder dat de oplossingsverzameling verandert.

<u>Voorbeeld</u>
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &\le 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 2 \\ -x_1 - 2x_2 &\le 0 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_2 &\le 2\,. \end{aligned}$$

Elk van deze ongelijkheden bepaalt een halfvlak in $\mathbb{R}^2$. We tekenen de begrenzende lijnen van deze halfvlakken.



We zien dat de eerste en laatste ongelijkheid overbodig zijn en dat de oplossing het convexe polytoop is met hoekpunten $[0,2]$, $[4,-2]$ en $[-\frac{4}{3},\frac{2}{3}]$.

3.4.4. Ook voor een stelsel ongelijkheden $\underline{A}\underline{x} \le \underline{b}$ geldt dat de oplossingsverzameling, indien begrensd, een convex polytoop is met extreme elementen als hoekpunten (zie ook 3.5.2).

§ 3.5. Iets over lineaire programmering

3.5.1. We hebben gezien in 1.2.8 dat een typisch lineair programmeringsprobleem het vinden is van een $\underline{x}$ die voldoet aan:

$$(*)\qquad \begin{cases} \underline{x} \geq 0\ , \quad \underline{x} \neq \underline{0} \\ A\underline{x} \geq \underline{b} \quad \text{of} \quad A'\underline{x} \leq \underline{b}'\ , \end{cases}$$

waarvoor een lineaire vorm $(\underline{p},\underline{x})$ minimaal of maximaal is.
Korter geformuleerd luidt het probleem: vind onder de positieve oplossingen van een stelsel lineaire ongelijkheden er een waarvoor een lineaire functionaal maximaal of minimaal is.
In 3.4.2 hebben we gezien dat de oplossingen van (*) een (eventueel lege) convexe verzameling vormen. Het gaat dus om het probleem extreme waarden te vinden van een lineaire functionaal op een convexe verzameling.

3.5.2. Loze veranderlijken

Door een eenvoudige kunstgreep is het mogelijk het stelsel lineaire ongelijkheden te vervangen door gelijkheden zodat we in de situatie van § 3.3 terechtkomen.
Laat het stelsel zijn:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0\ . \end{cases}$$

Aan de $x_1,\dots,x_n$ voegen we nu toe m nieuwe veranderlijken $y_1,\dots,y_m$, de zgn. loze veranderlijken. We proberen op te lossen:

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1 + \qquad\qquad + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad y_2 \qquad\quad + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\quad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad y_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ y_1 \geq 0,\dots,y_m \geq 0, x_1 \geq 0,\dots,x_n \geq 0\ . \end{cases}$$

Als $[\beta_1,\dots,\beta_m,\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ een oplossing van (2) is, is $[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ een oplossing van (1), de afgesneden oplossing. Omgekeerd is $\underline{x} = \underline{\alpha}$ een oplossing van (1), dan vindt men een oplossing $[\beta_1,\dots,\beta_m,\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ van (2) door te stellen

$$\beta_i = b_i - (a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n) \qquad (i = 1,\dots,m)\ .$$

N.B. Met een oplossing $\neq \underline{0}$ van (2) correspondeert niet steeds een oplossing $\neq \underline{0}$ van (1). Voorbeeld: $[b_1,\ldots,b_m,0,\ldots,0]$.

Eigenschap. Als we een extreme oplossing van (1) uitbreiden tot een oplossing van (2), dan is dit een extreme oplossing. (Bewijs dit!) Als wij dus alle extreme oplossingen van (2) kennen, dan komen alle extreme oplossingen van (1) voor onder de afgesneden oplossingen.

3.5.3. Voorbeeld. Beschouw

$$(*)\qquad \begin{cases} -x+y \le 1 \\ 4x - y \le 12 \\ -2x - y \le -2 \\ x \ge 0,\ y \ge 0\,. \end{cases}$$

(Telt men $2\times$ de eerste ongelijkheid op bij de tweede, dan komt er $2x + y \le 14$ waaruit volgt dat de verzameling oplossingen begrensd is.) We hebben nu twee method ter beschikking voor de bepaling van de hoekpunten van het convexe polytoop (*):

(a) grafisch,

(b) door toevoeging van loze veranderlijken en de techniek van § 3.3.

(Voor het resultaat zie verderop.)
We formuleren nu de hoofdstelling van deze paragraaf.

3.5.4. Stelling. Zij C een convex polytoop in $\mathbb{R}^n$ met hoekpunten $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_k$, dan neemt de lineaire vorm $(\underline{p},\underline{x})$ op C een minimum en een maximum aan. Het minimum wordt aangenomen in een hoekpunt (maar mogelijk ook elders); hetzelfde geldt voor het maximum.

Bewijs. We spreken slechts over een minimum; voor het maximum is het bewijs analoog. Zoek het kleinste onder de k getallen $(\underline{p},\underline{x}_1),\ldots,(\underline{p},\underline{x}_k)$. Zij dit m en laat $(\underline{p},\underline{x}_\ell) = m$. Het is mogelijk dat $m = (\underline{p},\underline{x}_i)$ voor meerdere waarden van i. Voor een willekeurige $\underline{x} = \lambda_1\underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{x}_k$ ($\lambda_i \ge 0$, $\Sigma\,\lambda_i = 1$) uit C geldt nu

$$(\underline{p},\underline{x}) = \lambda_1(\underline{p},\underline{x}_1) + \lambda_2(\underline{p},\underline{x}_2) + \ldots + \lambda_k(\underline{p},\underline{x}_k) \ge$$

$$\ge (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)m = m = (\underline{p},\underline{x}_\ell)\,, \qquad \text{q.e.d.}$$

3.5.5. Stelling. Als de verzameling V van de positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ (of $A\underline{x} \leq \underline{b}$) begrensd is wordt het minimum (of maximum) van $(\underline{p},\underline{x})$ aangenomen in een extreme oplossing.

Bewijs. 3.5.4 en 3.3.11 (3.4.4).

Opmerking. Als de verzameling oplossingen niet begrensd is hoeft een maximum of minimum van $(\underline{p},\underline{x})$ niet te bestaan. We beschouwen dit geval niet verder. In het geval dat de verzameling positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ begrensd is, biedt de techniek van § 3.3 dus de mogelijkheid een $\underline{x}$ te vinden waarvoor $(\underline{p},\underline{x})$ minimaal is.

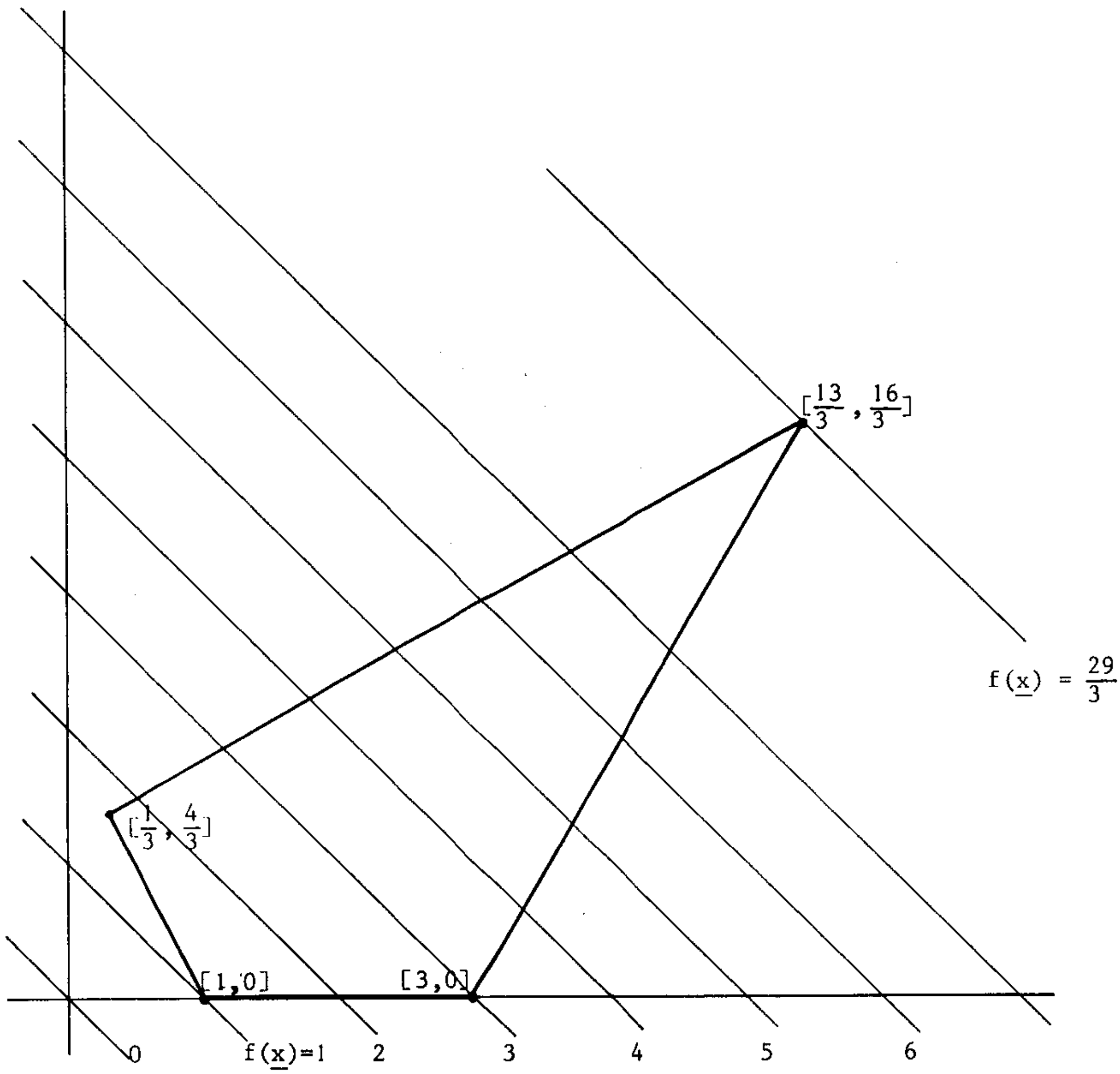
Opmerking. Men ziet gemakkelijk dat alle $\underline{x}$ waar het minimum wordt aangenomen het convexe polytoop is opgespannen door die extreme oplossingen waarvoor de waarde van $(\underline{p},\underline{x})$ gelijk aan het minimum is.

In het wiskundige vakgebied der operations research is een belangrijk deel gewijd aan het vinden van goede algoritmen voor het oplossen van lineaire programmeringsproblemen. De op § 3.3 berustende werkwijze is in de praktijk vaak omslachtig.

3.5.6. We laten nog aan een voorbeeld zien hoe lineaire programmeringsproblemen in twee veranderlijken grafisch opgelost kunnen worden.
Bepaal het minimum van $x + y = ([1,1],\underline{x}) = f(\underline{x})$ op de oplossingsverzameling van voorbeeld 3.5.3.
De oplossingsverzameling heeft vier extreme elementen:

$$[1,0],\ [3,0],\ [\tfrac{13}{3}\ ,\ \tfrac{16}{3}],\ [\tfrac{1}{3}\ ,\ \tfrac{4}{3}]\ .$$

De waarde van $f(\underline{x})$ in deze hoekpunten is $1,\ 3,\ \frac{29}{3}\ ,\ \frac{4}{3}$. Het minimum is 1 in $[1,0]$. Dit blijkt ook uit de hoogtekaart.



$[\frac{13}{3}, \frac{16}{3}]$
$f(\underline{x}) = \frac{29}{3}$
$[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$
[1, 0]
[3, 0]
0
$f(\underline{x})=1$
2
3
4
5
6

APPENDIX DETERMINANTEN

We zullen in deze appendix summier kennismaken met een rekentechniek die in oudere verhandelingen over lineaire algebra een grote rol speelt, maar door ons niet gebruikt is.

De determinant van een vierkante matrix A is een getal, det A, dat we aangeven door het blok getallen tussen rechte strepen te zetten.

De definitie van de determinant geven we recursief naar het aantal rijen en kolommen.

(i) Als $A = [a]$ is $\det A = a$.

(ii) Stel dat we voor elke $n \times n$ matrix een determinant hebben berekend, dan definiëren we:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdot & \cdots & \cdot & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} :=$$

$$= a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} - \cdots + (-1)^n a_{1,n+1}D_{1,n+1} ,$$

waarin $D_{i,j}$ de determinant is van de $n \times n$ matrix die uit A ontstaat door de i-de rij en j-de kolom weg te laten.

Enkele gevolgen:

(a) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

(b) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} .$$

De determinant heeft allerlei mooie eigenschappen, waarvan we enkele zonder bewijs vermelden.

1. $\det A = (-1)^{i+1}(a_{i1}D_{i1} - a_{i2}D_{i2} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{in}D_{in})$

   (ontwikkeling naar een rij).

2. $\det A = (-1)^{j+1}(a_{1j}D_{1j} - a_{2j}D_{2j} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{nj}D_{nj})$

   (ontwikkeling naar een kolom).

3. $\det AB = \det A \det B$.

4. $\det A = \det A^T$; $\det A = -\det B$ als B uit A ontstaat door verwisseling van twee rijen of kolommen.

5. $\det A = \det B$ als B uit A ontstaat door de i-de rij (of kolom) te vervangen door de som van de i-de rij (kolom) en p maal de j-de rij (kolom) $(i \neq j)$.

6. $\det A \neq 0$ dan en slechts dan als rang $A = n$, dus als de kolommen van A, zowel als de rijen een basis van $\mathbb{R}^n$ vormen.

We vermelden slechts een toepassing van determinanten. Deze heeft betrekking op een (de enige?) situatie waar het gebruik van determinanten duidelijk handiger is dan de rekentechniek die wij gebruikt hebben (2.6.11).

Stelling. Een getal λ is een eigenwaarde van A indien

$$\det(A - \lambda I) = 0 \ . \qquad (*)$$

De vergelijking in λ (van de n-de graad!) (*) heet de karakteristieke vergelijking van A.