TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

bij het college

WISKUNDE 37

Najaarssemester 1980

Bihl wet

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.204
Prijs f. 4,50

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Vraagstukken bij het college

Wiskunde 37

37

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij het college Wiskunde 37

najaarssemester 1980

Serie 1	Rekenen met matrices.	1
Serie 2	Oplossen van matrixvergelijkingen.	4
Serie 3	Kleinste kwadratenmethode.	8
Serie 4	Snijpunten van rechten en vlakken. Afhankelijkheid.	10
Serie 5	Stelsels lineaire vergelijkingen. Convexe verzamelingen.	16

EXAMENS/TENTAMENS, HERKANSINGEN

17 januari 1972	22	20 januari 1976	54
25 januari 1972	24	8 juni 1976	56
8 juni 1972	26	16 juni 1976	58
15 januari 1973	28	17 januari 1977	60
23 januari 1973	30	25 januari 1977	62
29 mei 1973	31	13 juni 1977	64
13 juni 1973	33	22 juni 1977	66
14 januari 1974	35	16 januari 1978	67
22 januari 1974	37	24 januari 1978	69
5 juni 1974	39	5 juni 1978	71
12 juni 1974	41	14 juni 1978	73
13 januari 1975	43	15 januari 1979	75
21 januari 1975	46	23 januari 1979	77
3 juni 1975	48	5 juni 1979	78
11 juni 1975	50	14 januari 1980	80
12 januari 1976	52	22 januari 1980	82

JdG, 18 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college WISKUNDE 37

Najaarssemester 1980

Serie 1

1. De matrix $A^{(n\times m)}$ is gegeven door:

$$A^{(n\times m)} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 & 15 \\ 8 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Bepaal n en m.

b) Bepaal de elementen A_{13}; A_{24}; A_{33}; A_{42}.

c) Bepaal i en j z.d.d. $A_{ij} = 15$; $A_{ij} = 6$; $A_{ij} = 3$.

d) Bepaal r en s z.d.d. $A_{r+1,s+2} = A_{rs}$.

e) Schrijf de vector op, waarvan de elementen de sommen zijn van de elementen in de rijen van A.

2. Los x, y en z op uit:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 3 \\ 4 & 9 \\ 8 & x-4 \end{bmatrix}$$

3. A en B zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 6 & 11 & 3 \\ y & 4 & z \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ y & 11 & x \\ 8 & z & 9 \end{bmatrix}$$

a) Voor welke waarden van x, y en z geldt $A \leq B$?
Schrijf het resultaat in de vorm $\underline{u} \leq \underline{x} \leq \underline{v}$ waarbij $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

b) Los x, y en z op uit de vergelijking

$$A + B = C \text{ met } C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 22 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Een matrix $A^{(4\times 5)}$ is gegeven door:

$$A_{11} = a; \quad A_{i,j+1} = A_{ij} + 1; \quad A_{i+1,j} = A_{ij} - 1;$$

Bepaal A.

5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Geldt $A \leq B$ of $A \geq B$?

6. Bepaal λ en μ z.d.d. $\lambda A + \mu B = C$ met

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -11 & 15 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -19 \\ -9 & -22 \\ 45 & -41 \end{bmatrix}$$

7. Ga in elk van de volgende gevallen na welke van de producten AB, BA, A^TB, AB^T bestaan en geef de afmetingen van de productmatrix:

a) $A^{(2\times5)}$ en $B^{(5\times2)}$
b) $A^{(3\times4)}$ en $B^{(2\times3)}$
c) $A^{(3\times5)}$ en $B^{(3\times5)}$
d) $A^{(4\times2)}$ en $B^{(2\times4)}$
e) $A^{(3\times5)}$ en $B^{(5\times6)}$
f) $A^{(3\times4)}$ en $B^{(2\times5)}$.

8. Bewijs dat

$$(\underline{u} + \underline{v}, \underline{u} - \underline{v}) = (\underline{u},\underline{u}) - (\underline{v},\underline{v}).$$

9. Bepaal de volgende matrixproducten:

a) $$[2,-1,3]\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}[1,4,-2]$$

d) $$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

f) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Bij twee gegeven matrices $A^{(3\times4)}$ en $B^{(4\times4)}$ wordt een verdeling in blokken aangebracht:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}.$$

Men kan bewijzen, dat het product AB dan in blokvorm gegeven is door:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix}$$

mits de blokverdeling zodanig is dat al deze matrixproducten en sommen gedefinieerd zijn.

a) Gegeven is, dat A_1 een 2×2 matrix is.
Welke afmetingen moeten de andere blokken dan hebben om het product AB op bovenstaande wijze te berekenen?

b) Ga in een concreet geval de juistheid van het beweerde na.

11. In een fabriek maakt men uit de grondstoffen G_1 en G_2 in een eerste productiefase de tussenproducten T_1, T_2 en T_3. In een tweede fase worden uit deze tussenproducten de eindproducten E_1 en E_2 vervaardigd. Het materiaalverbruik per geproduceerde eenheid is in de twee onderstaande schema's gegeven:

	T_1	T_2	T_3
G_1	2	4	5
G_2	3	3	7

	E_1	E_2
T_1	2	4
T_2	6	4
T_3	4	2

a) Stel het schema op voor het verbruik van elke grondstof per eenheid eindproduct.

b) Hoeveel eenheden van elke grondstof zijn nodig voor de fabricage van 500 eenheden E_1 en 750 eenheden E_2?

1. Bereken de volgende matrixproducten en interpreteer de resultaten:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Los de volgende matrixvergelijkingen op:

a) $X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$

b) $X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 22 \\ 0 & 4 & -13 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 23 & 4 & -9 \end{bmatrix}.$

e) Bepaal X en Y z.d.d.

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 23 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Bepaal een matrix $B^{(2\times3)} \neq \mathcal{O}^{(2\times3)}$ z.d.d. $AB = \mathcal{O}^{(2\times3)}$.

b) Bepaal een matrix $C^{(2\times2)} \neq \mathcal{O}^{(2\times2)}$ z.d.d. $CA = \mathcal{O}^{(2\times2)}$.

4. Gegeven zijn de vier permutaties A, B, C, D van {1,2,3,4} met

$A(1) = 2;\quad A(2) = 3;\quad A(3) = 4;\quad A(4) = 1$

$B(1) = 3;\quad B(2) = 4;\quad B(3) = 1;\quad B(4) = 2$

$C(1) = 4;\quad C(2) = 1;\quad C(3) = 2;\quad C(4) = 3$

D is de identieke permutatie.

a) Geef de bijbehorende permutatiematrices.

b) Laat zien dat in alle onderlinge producten van deze vier matrices de factoren verwisseld mogen worden zonder dat het product verandert.

5.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Bepaal X z.d.d. $AX = I^{(2\times 2)}$ en bereken ook XA.

b) Ga na of er een Y bestaat z.d.d. $YA = I^{(3\times 3)}$.

c) Ga na of er een $Z \neq \mathcal{O}$ bestaat z.d.d. $ZA = \mathcal{O}^{(3\times 3)}$.

6. a) Bereken de inverse matrix A^{-1} van

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

en bereken ook AA^{-1}.

b) Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\left.\begin{aligned} 11x + 2y + 8z &= 5 \\ 6x + y + 4z &= 3 \\ 5x + y + 5z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

7. Gegeven is, dat $A^{(n\times n)}$, $B^{(n\times n)}$ en $C^{(n\times n)}$ voldoen aan:

$BA = I = AC$.

Bewijs dat $B = C$.

8. Aan welke eis moeten a, b, c en d voldoen, opdat de matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ een inverse heeft?

9. Bepaal alle $X^{(2\times 2)}$, z.d.d. $X^2 = -I$.

10. De verdeling van de drie vitaminen A, B en C over de drie soorten voedsel I, II en III is in de volgende tabel gegeven:

	I	II	III
A	1	2	3
B	3	3	0
C	4	5	3

dus bijvoorbeeld: een eenheid van voedsel II bevat 5 eenheden van vitamine C.

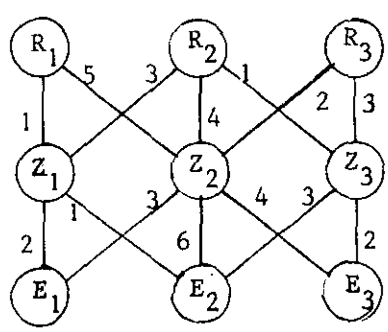
a) Men wenst uit I, II en III een maaltijd te bereiden, die 11 eenheden A, 9 eenheden B en 20 eenheden C bevat.
Hoeveel van elke soort voedsel moet men nemen?

b) De prijzen van de verschillende soorten voedsel per eenheid zijn:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \text{kost 60 cent} \\ \text{II} & \text{kost 10 cent} \\ \text{III} & \text{kost 10 cent} \end{array}\right\}$$

Is er onder de oplossingen van (a) een, die 100 cent kost?

11. Een bedrijf vervaardigt uit de drie grondstoffen R_1, R_2 en R_3 in een eerste productiefase de drie tussenproducten Z_1, Z_2 en Z_3. In een tweede productiefase worden hieruit de eindproducten E_1, E_2 en E_3 vervaardigd. De verdeling van de materiaalbenodigdheden is in het volgende schema weergegeven:



bijv. voor de productie van een eenheid Z_2 zijn 5 eenheden R_1 nodig.

a) Geef de verbruiksmatrix P, die aangeeft hoeveel eenheden van de grondstoffen nodig zijn voor de productie van de eindproducten.

b) Hoeveel van de grondstoffen R_1, R_2 en R_3 zijn nodig voor een eindproductievector $\begin{bmatrix}100\\200\\300\end{bmatrix}$?

c) De prijsvector per eenheid van de drie grondstoffen is $\underline{p} = \begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}$.

De verkoopsprijsvector per eenheid van de drie eindproducten is $\underline{g} = \begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix}$.

Per geproduceerde eenheid van de tussenproducten lijdt men een verlies, dat in vectorvorm gegeven is: $\underline{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$.

Bereken de gemaakte "winst" bij totale uitverkoop, als men uitgaat van een beginvoorraad $\underline{a} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ van de grondstoffen.

1. Bepaal met de methode der kleinste kwadraten de rechte die het beste past bij de volgende punten:

a) [1,2]; [2,4]; [-3,16] .

b) [4,1]; [0,2]; [1,2] .

2. Stel dat we het volgende onderscheid in de beroepen aanbrengen: academisch, geschoold, en ongeschoold.
Bij een onderzoek is gebleken:

i) van de zonen van academici zijn 70% academicus, 20% geschoold en 10% ongeschoold.

ii) van de zonen van geschoolden zijn 20% academicus, 60% geschoold en 20% ongeschoold.

iii) van de zonen van ongeschoolden zijn 20% academicus, 30% geschoold en 50% ongeschoold.

We nemen aan dat iedere man één zoon heeft.
Geef de overgangsmatrix van de ene generatie op de andere en bereken de percentages voor de kleinzonen van ongeschoolden.
Welke verdeling is stabiel?

3. Twee fabrieken F_1 en F_2 met een dagproductie g_1 resp. g_2 zorgen voor de bevoorrading van twee werkplaatsen W_1 en W_2 die dagelijks behoefte hebben aan voorraden b_1 resp. b_2. De totale productie van de beide fabrieken samen is precies voldoende voor de totale behoefte in de twee werkplaatsen samen. De afstanden van fabrieken naar werkplaatsen zijn in schema:

	W_1	W_2
F_1	d_{11}	d_{12}
F_2	d_{21}	d_{22}

De transportkosten zijn evenredig met de afstanden.
Stel een vervoersschema op zodanig dat:

i) iedere werkplaats voldoende bevoorraad wordt

ii) de transportkosten minimaal zijn.

4. 3 cementfabrieken A_1, A_2, A_3 leveren dezelfde kwaliteit cement en hebben allen per dag een capaciteit van 20 ton; 2 bouwwerken worden door deze fabrieken bevoorraad.

De behoeften van deze bouwwerken zijn:

B_1 : 40 ton per dag

B_2 : 20 ton per dag.

De transportkosten zijn evenredig met de afstanden van de fabrieken naar de bouwwerken.

Deze afstanden zijn in tabelvorm:

	B_1	B_2
A_1	17	5
A_2	14	3
A_3	4	6

Stel een vervoersschema op zodanig dat iedere bouwplaats voldoende cement heeft en de transportkosten minimaal zijn.

5. In een collegezalencomplex heeft men de beschikking over 8 grote en 8 kleine zalen. Aan een tentamen, dat in deze zalen wordt afgenomen nemen 1000 studenten deel. In een grote zaal kunnen 150 deelnemers plaats vinden, in een kleine zaal 50. Het aantal surveillanten in een grote zaal is 4, het aantal surveillanten in een kleine zaal is 2.

Maak een zodanige verdeling van de studenten dat iedere gebruikte zaal gevuld is en het aantal benodigde surveillanten minimaal.

6. Bepaal de aard van de volgende krommen:

a) $7x^2 - 7y^2 + 48xy = 100$

b) $6x^2 + 9y^2 + 4xy = 1.$

1. Op de zijde AB van ΔOAB ligt een punt P z.d.d. AP : PB = λ : μ. Druk de vector $\underline{OP}$ met behulp van λ en μ uit in de vectoren $\underline{OA}$ en $\underline{OB}$.

2. Bewijs, dat het punt [3,4] ligt op de rechte $\underline{x} = [1,5] + \lambda[2,-1]$. Bepaal de snijpunten van deze rechte met de coördinaatassen.

3. Bepaal het snijpunt van de rechten

$$\underline{x} = [2,1] + \lambda[1,3] \qquad \text{en} \qquad \underline{x} = [0,3] + \mu[1,1].$$

4. Geef een parametervoorstelling van de rechte met vergelijking

$$4x + 3y - 2 = 0 .$$

5. Geef een parametervoorstelling van de rechte door de punten

$$[-1,1] \qquad \text{en} \qquad [1,2] .$$

6. Bepaal het snijpunt van de twee rechten:

$$x + 2y - 3 = 0 \qquad \text{en} \qquad \underline{x} = [-2,-3] + \lambda[3,4] .$$

7. Bepaal de vergelijking van de lijn door [2,1] die loodrecht staat op de lijn

$$x - 2y = 1000.$$

8. Bepaal de afstand van de punten [4,2] en [1,6].

9. Bepaal de scherpe hoek tussen de rechten:

$$2x + 3y = 7 \qquad \text{en} \qquad x - 5y + 4 = 0 .$$

10. Bewijs dat de afstand van een punt $\underline{p} \in \mathbb{R}^2$ tot de lijn met vergelijking $(\underline{a},\underline{x}) = c$ gelijk is aan

$$\left| \frac{(\underline{a},\underline{p}) - c}{\|\underline{a}\|} \right| .$$

11. Bepaal de vergelijkingen van de bissectrices van de hoeken, die de lijnen $3x + 4y = 7$ en $x = 1$ met elkaar maken.

12. ABCD is een parallelogram met diagonalen AC en BD. Dan geldt:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 .$$

Bewijs dit.

13. Geef een parametervoorstelling van de rechte door $[-1,1,4]$ en $[1,2,3]$. Bepaal het snijpunt van deze rechte met het XY-vlak.

14. Geef een parametervoorstelling van het vlak α, dat gaat door het punt $[1,2,1]$ en evenwijdig is aan de rechten

$$\underline{x} = [-6,2,0] + \lambda[1,1,1] \qquad \text{en} \qquad \underline{x} = [5,1,3] + \mu[6,2,1].$$

15. Geef een parametervoorstelling van het vlak door $\mathcal{O}$ en de rechte

$$\underline{x} = [1,-1,0] + \lambda[2,1,1] .$$

Bepaal de vergelijking van dit vlak.

16. Bepaal het snijpunt van de rechte ℓ die door de punten $[1,2,3]$ en $[4,5,-3]$ gaat met het vlak dat gegeven wordt door de vergelijking

$$2x - y + 3z = 4 .$$

17. Bepaal het snijpunt van de lijn ℓ door $[1,0,-1]$ en $[2,3,4]$ met het vlak

$$\underline{x} = [1,0,3] + \lambda[1,4,5] + \mu[1,3,3] .$$

18. Gegeven het punt $A[1,1,2]$ en de lijn m met parametervoorstelling

$$\underline{x} = [0,0,1] + \lambda[1,0,0] .$$

Bepaal een parametervoorstelling van de lijn ℓ door A, die m en de Y-as snijdt.

19. Onderzoek onder welke omstandigheden voor twee vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in $\mathbb{R}^n$ geldt:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| = \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| .$$

20. Bepaal in $\mathbb{R}^3$ de projectie van een vector $\underline{x}$ op het vlak, opgespannen door de vectoren $[1,1,1]$ en $[-1,3,4]$. Generaliseer dit resultaat voor de projectie van een vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ op het vlak, opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$.

21. In $\mathbb{R}^n$ geldt voor een zekere vector $\underline{y}$: $(\underline{x},\underline{y}) = 0$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Bereken $\underline{y}$.

22. Bepaal in $\mathbb{R}^3$ het orthogonaal complement van de volgende deelverzamelingen:

a) $M := \{[1,1,2], [0,1,0]\}$,

b) $M := \{[1,1,2], [0,1,0], [4,5,8]\}$,

c) $M :=$ deelruimte, opgespannen door de vectoren $[3,1,0]$, $[2,1,-4]$ en $[5,1,4]$.

d) $M :=$ verzameling vectoren $[x,y,z]$, die voldoen aan $2x + y - 5z = 0$.

e) $M :=$ verzameling vectoren $[x,y,z]$, die voldoen aan $2x + y - 5z = 1$.

23. Ga na of de volgende drietallen punten op één rechte liggen

a) [6,1,-3] , [0,-2,3] en [10,3,-7]

b) [5,3,4], [8,5,2] en [2,1,5]

24. Ga na of de volgende viertallen punten in één vlak liggen:

a) [3,2,18], [1,-2,4], [5,0,2] en [2,-3,-4].

b) [-4,-2,3], [1,3,-2], [0,3,-2] en [5,-2,0].

25. Schrijf $\underline{v}$ als lineaire combinatie van $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

a) $\underline{v}$ = [6,7,16]; $\underline{a}$ = [1,4,5]; $\underline{b}$ = [2,5,4]; $\underline{c}$ = [1,2,0].

b) $\underline{v}$ = [-1,4,7]; $\underline{a}$ = [1,-2,3]; $\underline{c}$ = [4,-3,1]; $\underline{c}$ = [3,-2,5].

26. Onderzoek of de volgende stelsels vectoren afhankelijk zijn:

a) $\underline{a}$ = [1,2,3]; $\underline{b}$ = [3,2,1]; $\underline{c}$ = [-3,2,7]

b) $\underline{a}$ = [4,5,2]; $\underline{b}$ = [1,8,2]; $\underline{c}$ = [14,4,1]

c) $\underline{a}$ = [2,3,4]; $\underline{b}$ = [5,2,1]; $\underline{c}$ = [-4,5,10]

d) $\underline{a}$ = [2,4,-1,-1]; $\underline{b}$ = [1,5,1,-2]; $\underline{c}$ = [-1,3,3,-2]

e) $\underline{a}$ = [1,-1,4,2]; $\underline{b}$ = [2,0,2,1]; $\underline{c}$ = [7,-3,16,8].

27. Bepaal een basis voor de deelruimte van R^4, die wordt voortgebracht door

a) [1,3,0,3], [2,-1,-2,1], [0,7,2,5], [5,1,-4,5]

b) [1,2,3,-1], [2,3,4,0], [1,-1,2,1], [1,-4,1,3].

28. De vectoren

$\underline{a}$ = [3,-2,3,1], $\underline{b}$ = [2,1,-2,-1], $\underline{c}$ = [1,1,2,3]

spannen een vectorruimte U op.

a) Bepaal de dimensie van U.

b) Behoort $\underline{d}$ = [1,4,3,1] tot U?

c) Behoort $\underline{e}$ = [-4,2,1,3] tot U?

29. Bepaal de normaalvorm van de volgende matrices

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -3 & 9 & -5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

30. Van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven:

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\9\\2\end{bmatrix};\quad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\6\\-6\end{bmatrix};\quad A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\2\\9\end{bmatrix}.$$

a) Bepaal de matrix van A.

b) Druk de componenten van de vector $\underline{x}' = A\underline{x}$ uit in de componenten van $\underline{x}$.

c) Bewijs dat $\|A\underline{x}\| = 11\,\|\underline{x}\|$.

31. Van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven:

$$A\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\6\\7\end{bmatrix};\quad A\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\15\\10\end{bmatrix};\quad A\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\7\\4\end{bmatrix}.$$

a) Bepaal de matrix van A.

b) Bepaal het beeld van de vector $\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$.

32. Zij $A : L_1 \to L_2$ een lineaire afbeelding van de lineaire ruimte L_1 in de lineaire ruimte L_2. Zijn de volgende beweringen juist?
Zo ja, bewijs dit; zo neen, geef een tegenvoorbeeld.

a) als $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n \in L_1$ afhankelijk zijn, dan zijn ook $A\underline{a}_1,\ldots,A\underline{a}_n \in L_2$ afhankelijk.

b) als $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n \in L_1$ onafhankelijk zijn, dan zijn ook $A\underline{a}_1,\ldots,A\underline{a}_n \in L_2$ onafhankelijk.

c) als $A\underline{a}_1,\dots,A\underline{a}_n \in L_2$ onafhankelijk zijn, dan zijn ook $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n \in L_1$ onafhankelijk.

33. In $\mathbb{R}^3$ kiezen we een orthonormale basis $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$.
De afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing over $\pi/2$ om de lijn door $\underline{e}_3$.
De afbeelding $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op het vlak, opgespannen door $\underline{e}_2$ en $\underline{e}_3$.

a) Bepaal de matrices van A en B t.o.v. de basis $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$.

b) Bepaal de matrices van de afbeeldingen AB en BA.

34. Bepaal van de lineaire afbeeldingen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met de volgende matrices:

a) de rang.

b) de dimensie en een basis van de beeldruimte.

c) de dimensie en een basis van de nulruimte.

d) indien mogelijk de inverse A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 6 & -7 & -6 \\ 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 22 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & -11 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 6 & 15 & 7 \\ 7 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

35. Construeer een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^3$ waar $\frac{1}{5}[3,0,4]$ deel van uitmaakt.

Serie 5

Los de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op:

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. $$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 3 \\ 7 & -5 & -7 & 7 \\ -5 & 3 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. $$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. $$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 13 & 14 & -4 \\ -7 & -5 & 3 \\ 11 & 13 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

9. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

10. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

11. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

12. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

13. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \\ -12 \\ -8 \end{bmatrix} .$$

14. Los de volgende stelsels vergelijkingen op voor die waarde(n) van a waarvoor ze oplosbaar zijn:

(i)
$$\begin{aligned} x + y &= 2a + 2 \\ 2ax + y &= 3 \\ (3a - 1)x + ay &= 7a - 2 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= a + 2 \\ x - y + az &= (a + 1)^2 \\ ax + y + z &= a + 1. \end{aligned}$$

15. Bepaal de rang van de volgende matrices:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2a-2 \\ 2a & 1 & -3 \\ 3a-1 & a & -7a+2 \end{bmatrix}$

16. Bewijs dat de volgende verzamelingen convex zijn:

a) $\{(x,y) \mid x^2 - y^2 \geq 1 \text{ en } x \geq 0\}$

b) $\{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

c) $\{(x,y) \mid |x + y| \leq |x| + |y|\}$

d) $\{(x,y) \mid xy \geq 1 \text{ en } x \leq 0\}$.

17. a) De functie $f(x)$ is voor alle x gedefinieerd.
Bewijs dat de verzameling $\{(x,y) \mid y = f(x)\}$ convex is, dan en slechts dan als $f(x) = ax + b$ voor zekere constanten a en b.

b) De functie $f(x)$ is voor alle x gedefinieerd.
De kromme $y = f(x)$ verdeelt $\mathbb{R}^2$ in twee delen

$$U_1 = \{(x,y) \mid y \geq f(x)\}$$

$$U_2 = \{(x,y) \mid y \leq f(x)\} .$$

Dan geldt: U_1 en U_2 convex $\Leftrightarrow$ $f(x) = ax + b$ voor zekere constanten a en b.

18. Bepaal de extreme elementen van de verzameling der positieve oplossingen van de volgende stelsels vergelijkingen en bepaal de positieve oplossingen:

a) $x + 2y = 5$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = -3 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 5y - z = 5 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = -5 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} x - z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l} 8x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 7 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{array}\right\}$

19. Maak een tekening van de volgende convexe verzamelingen en bepaal de extreme elementen:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 9 \le 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 6 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3 \le 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge -1 \\ -x_2 \ge 2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 \le 4 \\ x_2 \le -4 \end{array}\right\}$

20. De familie Jansen is van plan een aantal boeken en een aantal grammofoonplaten aan te schaffen. Een boek kost ƒ12,-- en een plaat ƒ20,--. Ze zijn in slechts 6 boeken en 6 platen geïnteresseerd, en ze willen niet meer uitgeven dan ƒ120,-- waarvan minstens ƒ40,-- aan platen. Bovendien willen ze minstens tweemaal zoveel boeken als platen.
Welke mogelijkheden zijn er?

21. Een zeeppoederfabrikant wenst een Veronica-programma van een half uur te financieren en moet nu de samenstelling van dit programma bepalen. Hij wenst in ieder geval minstens 3 minuten reclame, terwijl het wettelijk vastgestelde maximum 15 minuten is. De presentator van het programma weigert langer dan 22 minuten op te treden. Gedurende de tijd, dat noch de presentator noch de reclame aan de beurt is, wordt een orkestje in het programma geplaatst. Bepaal de convexe verzameling C van alle mogelijke tijd-toewijzingen aan reclame, presentator en orkest, zodat de 30 minuten worden gevuld volgens bovenstaande eisen en bereken de extreme punten van C.

22. Geef de ongelijkheden aan, waardoor de convexe polytopen, opgespannen door de volgende punten, worden gekarakteriseerd:

a) [0,0]; [2,1]; [1,4]; [0,3]

b) [1,1]; [2,2]; [3,3]; [4,6]

c) [-2,4]; [2,7]; [6,2]; [0,4].

23. Bepaal de positieve oplossingen van de volgende stelsels ongelijkheden met behulp van loze variabelen:

a) $\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 16 \\ 2x_1 + x_2 &\le 17 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 23 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 16 \\ x_1 - 4x_2 &\le 4 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 33 \\ x_1 + x_2 &\le 15 \\ x_1 + 3x_2 &\le 27 \end{aligned}\right\}$

24. Bereken het maximum en het minimum van de functie f(x,y) op de positieve oplossingsverzameling van de volgende stelsels ongelijkheden:

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &\le 16 \\ 2x + y &\le 17 \\ 2x + 3y &\le 23 \\ f(x,y) &= 21x + 24y \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + 3y &\le 16 \\ 2x + y &\le 17 \\ 2x + 3y &\le 23 \\ f(x,y) &= 4x + 3y \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &\le 33 \\ x + y &\le 15 \\ x + 3y &\le 27 \\ f(x,y) &= 12x + 18y \end{aligned}\right\}$.

d) $\left.\begin{aligned} -4x + 3y &\le 6 \\ -x + 3y &\le 15 \\ x - 4y &\le 4 \\ f(x,y) &= 6x + y \end{aligned}\right\}$ e) $\left.\begin{aligned} x + 3y &\le 12 \\ x + 2y &\le 10 \\ 2x + 5y &\ge 30 \\ f(x,y) &= x - y \end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned} 3x + 5y &\le 60 \\ 3x + 2y &\le 36 \\ 6x + 5y &= 75 \\ f(x,y) &= 10x + 10y \end{aligned}\right\}$.

25. Een bedrijf produceert drie producten: 1, 2 en 3. De productie vindt plaats in drie machines, die ieder een beperkte capaciteit hebben. Per week geldt namelijk: machine I kan 32 tijdseenheden functioneren, machine II kan 43 tijdseenheden functioneren en machine III kan 30 tijdseenheden functioneren. De benodigde tijd per productieeenheid voor de verschillende machines en producten is in onderstaande tabel gegeven:

	I	II	III
1	1	2	3
2	2	1	2
3	4	2	2

Per geproduceerde eenheid is de winstvector voor de drie producten $\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Welk productieprogramma levert de meeste winst, aangenomen dat alle producten worden verkocht?

26. Een mijnmaatschappij exploiteert twee mijnen, die samen per week een bepaalde productie moeten leveren. De exploitatie van mijn A kost ƒ800,-- per dag, terwijl mijn B slechts ƒ640,-- per dag kost. De productie van de mijnen over de drie producten: superkolen, gewone kolen en rest-kolen is in onderstaande tabel gegeven: (productie per dag, hoeveelheden in tonnen)

	A	B
super	2	2
gewoon	2	2
rest	4	12

Om aan een contract te voldoen moeten de twee mijnen per week samen produceren: 12 ton super, 8 ton gewone kolen en 24 ton rest-kolen. Hoeveel weekdagen moet iedere mijn produceren om aan de order te voldoen, waarbij de exploitatiekosten minimaal moeten zijn?

27. Los de opgaven 3, 4 en 5 uit Serie 3 op met behulp van de theorie der convexe verzamelingen.

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 17 januari 1972.

1. In een meubelfabriek maakt men uit spaanplaat S en fineer F in een eerste productiefase kastjes van drie verschillende afmetingen, aangeduid met K_1, K_2 en K_3. In een tweede fase worden met deze kastjes twee typen bergmeubelen geconstrueerd, aangeduid met B_1 en B_2.
Het materiaalverbruik per geproduceerde eenheid wordt gegeven door onderstaande schema's:

	K_1	K_2	K_3
S	4	5	6
F	2	3	3

bijvoorbeeld: voor één kastje K_2 zijn nodig:
5 eenheden S en
3 eenheden F;

	B_1	B_2
K_1	3	4
K_2	5	4
K_3	7	3

bijvoorbeeld: voor één bergmeubel B_1 zijn nodig:
3 kastjes K_1,
5 kastjes K_2 en
7 kastjes K_3.

a) Stel het schema op voor het verbruik van S en F per eenheid van de eindproducten B_1 en B_2.
b) Hoeveel eenheden S en F zijn nodig voor de fabricage van 100 bergmeubelen B_1 en 200 bergmeubelen B_2?
c) Bereken de totale fabricagekosten van 10 bergmeubelen van type B_1 en 20 bergmeubelen van type B_2, als gegeven is:
spaanplaat kost per eenheid ƒ 10,--
fineer kost per eenheid ƒ 15,--
het totale arbeidsloon bij de fabricage van één bergmeubel van type B_1 is ƒ 24,--, en voor type B_2 is het arbeidsloon ƒ 10,--.

2. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op het vlak:

$$2x + y + z = 0 .$$

a) Bepaal de matrix van A.
b) Bepaal het beeld van de vectoren [1,1,1] en [1,-1,-1].

3. Geef alle oplossingen van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 \qquad + 4x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

4. De verdeling van de drie vitaminen A, B en C over de twee verschillende pillen I en II is in de volgende tabel gegeven:

	I	II
A	2	1
B	5	8
C	1	2

bijvoorbeeld: één pil I bevat:
2 eenheden vitamine A,
5 eenheden vitamine B en
1 eenheid vitamine C.

Een kuur bestaat uit het dagelijks innemen van een hoeveelheid pillen I en een hoeveelheid pillen II.
Om medische redenen is het niet toegestaan meer dan 30 eenheden vitamine A per dag in te nemen.
Bepaal de minimale hoeveelheid pillen die men per dag moet innemen om minstens 12 eenheden vitamine A, minstens 74 eenheden vitamine B en minstens 16 eenheden vitamine C naar binnen te krijgen.

5. Bepaal alle positieve oplossingen van het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad = 1 \,. \end{cases}$$

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 25 januari 1972.

1. In een metaalbedrijf vervaardigt men uit staal S, zink Z en plastic P drie verschillende typen buizen: B_1, B_2 en B_3, die gegalvaniseerd en geplastificeerd worden. Deze buizen zijn nodig bij de productie van drie verschillende typen droogmolens: M_1, M_2 en M_3.
De verdelingen van de materiaalbenodigdheden per geproduceerde eenheid zijn in de volgende schema's gegeven:

	B_1	B_2	B_3
S	2	3	4
Z	1	2	3
P	1	3	5

bijvoorbeeld: voor de productie van één buis B_1 heeft men nodig: 2 eenheden S, 1 eenheid Z en 1 eenheid P;

	M_1	M_2	M_3
B_1	3	3	5
B_2	1	2	4
B_3	2	4	6

bijvoorbeeld: voor de fabricage van één droogmolen M_1 heeft men nodig: 3 buizen B_1, 1 buis B_2 en 2 buizen B_3.

a) Geef de verbruiksmatrix M, die aangeeft hoeveel eenheden S, Z en P nodig zijn voor de fabricage van de verschillende droogmolens.
b) Hoeveel eenheden S, Z en P zijn nodig voor de productie van 2 droogmolens M_1, 2 droogmolens M_2 en 1 droogmolen M_3?

2. Men verdeelt de beroepsbevolking in een stad in twee categorieën:
A: degenen, die op weg naar hun werk gebruik maken van eigen vervoer,
B: degenen, die op weg naar hun werk gebruik maken van openbaar vervoer.

Per jaar besluit 2,5% van de mensen uit categorie A toe te treden tot categorie B, terwijl 1% van de mensen uit categorie B deel gaat uitmaken van categorie A.
We veronderstellen dat de totale beroepsbevolking constant blijft.
In het jaar t = 0 bevat categorie A 60% van de totale beroepsbevolking en categorie B 40%.

a) Hoe is de situatie 1 jaar later?
b) Welke verdeling is stabiel?

3. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling aan het vlak

$$2x + y + z = 0 .$$

a) Bepaal de matrix van A.

b) Bepaal het beeld van de vectoren $[1,1,1]$ en $[1,-1,-1]$.

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ 13x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 20 . \end{cases}$$

a) Geef alle oplossingen van dit stelsel.

b) Geef alle positieve oplossingen van dit stelsel.

5. Een bedrijf vervaardigt met behulp van een bepaalde machine twee producten: A en B. In deze machine, die per dag 1000 tijdseenheden beschikbaar is, kost de fabricage van één eenheid A twee tijdseenheden en van één eenheid B één tijdseenheid.

Omdat de toevoer van de grondstoffen beperkt is, kan de machine per dag niet meer dan 400 eenheden A en niet meer dan 700 eenheden B produceren, terwijl de totale dagproductie niet meer dan 800 eenheden bedraagt. De winst bij verkoop van één eenheid A is ƒ 40,-- en van één eenheid B ƒ 30,--.

Geef het dagelijkse productieschema dat de maximale winst oplevert, aangenomen dat alle gefabriceerde producten verkocht worden.

Examen/tentamen Wiskunde 37 op donderdag 8 juni 1972.

1. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

a) B kan uit A ontstaan worden gedacht door verwisseling van rijen.
   Bepaal een matrix D zodanig, dat DA = B.

b) Bepaal een matrix E zodanig, dat AE = C.

c) Bereken AA^T.

2. Bepaal de matrix van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, waarvan het volgende gegeven is:

i) de vector [1,1,1] is eigenvector met eigenwaarde 1.

ii) de nulruimte N(A) van A is de rechte

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} .$$

iii) A[1,0,1] = [0,0,1].

3. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases} .$$

Schrijf de verzameling positieve oplossingen van dit stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

4. Bepaal de vergelijking van de rechte in $\mathbb{R}^2$, die in de zin van de kleinste kwadraten het beste past bij de punten [0,0], [1,0], [1,-2], [2,2].

5. In een chemisch bedrijf staan twee machines: I en II, die zorg dragen voor de fabricage van een product P. Door gebrek aan arbeidskrachten kunnen de machines niet tegelijkertijd in bedrijf zijn. We nemen aan, dat een week uit 40 uren bestaat. Per week moeten er minstens 6 uren besteed worden aan een onderhoudsbeurt voor machine I en minstens 4 uren aan een onderhoudsbeurt voor machine II.
De energietoevoer is beperkt. Per week zijn er 250 eenheden energie beschikbaar. Wanneer machine I in bedrijf is, verbruikt ze 7 eenheden energie per uur. Voor machine II bedraagt dit 6 eenheden per uur. In één uur fabriceert machine I 2 ton P en machine II fabriceert 1 ton P per uur. De grondstoffentoevoer is zodanig, dat er wekelijks niet meer dan 60 ton P gefabriceerd kan worden. Een ton P, door machine I gefabriceerd, levert ƒ 300,-- winst op. Voor machine II bedraagt de winst ƒ 400,-- per ton.
Hoeveel uren per week moet machine I resp. machine II in bedrijf zijn, opdat de winst maximaal is?

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 15 januari 1973.

1. Men verdeelt de kiesgerechtigde bevolking van een land in drie politieke richtingen: conservatief, progressief en liberaal. Iedere inwoner voelt zich tot één van deze drie richtingen aangetrokken.
Ieder jaar blijkt zich de volgende wijziging voor te doen:

60%	van	de	conservatieven	blijft	conservatief
20%	"	"	"	wordt	progressief
20%	"	"	"	"	liberaal
80%	"	"	progressieven	blijft	progressief
20%	"	"	"	wordt	liberaal
50%	"	"	liberalen	blijft	liberaal
40%	"	"	"	wordt	progressief
10%	"	"	"	"	conservatief.

We nemen aan dat de totale kiesgerechtigde bevolking constant is: 14 miljoen.
In 1972 was de verdeling:

8 miljoen conservatief, 4 miljoen progressief, 2 miljoen liberaal.

a) Geef de overgangsmatrix.
b) Geef de verdeling een jaar later.
c) Geef de stabiele verdeling.

2. Bepaal de aard van de volgende kromme:

$$x^2 + 6xy + y^2 = 16 \ .$$

Schets deze kromme in het X-Y-vlak.

3. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de loodrechte projectie op de lijn $\underline{x} = \lambda[1,2,2]$, $(-\infty < \lambda < \infty)$.

a) Bepaal de matrix van A.
b) Bepaal het beeld van de vectoren $[1,3,1]$ en $[6,-2,-1]$.

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} -7x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 36 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= -8 . \end{aligned}$$

a) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel.

b) Schrijf de verzameling positieve oplossingen van dit stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

5. Een fabrikant van whisky verkoopt zijn producten op twee plaatsen A en B. Zijn maximale productie per week is 45 vaten. Naar A worden minstens 6 en hoogstens 27 vaten gestuurd per week en naar B minstens 3 per week. Alle whisky naar A en B gestuurd wordt daar ogenblikkelijk verkocht. De whisky die in A verkocht wordt bevat 40 liter alcohol per vat. De whisky die in B verkocht wordt bevat 60 liter alcohol per vat. De fabriek kan per week maximaal 2400 liter alcohol verwerken. De winst op een vat dat in A verkocht wordt is *f* 42,--. die op een vat in B is *f* 50,--. Geef aan hoeveel vaten naar A en hoeveel naar B gezonden moeten worden om de winst zo groot mogelijk te doen zijn.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 23 januari 1973.

1. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 14 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= -12 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 23 . \end{aligned}$$

a) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel.

b) Bepaal alle positieve oplossingen van dit stelsel.

2. Bepaal in $\mathbb{R}^3$ een parametervoorstelling van de rechte ℓ door [0,1,1], die de z-as snijdt en evenwijdig loopt aan het vlak $x + 2y + z = 4$.

3. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de spiegeling aan de lijn $y = 2x$.
Welke vectoren voldoen aan $\underline{A}\underline{x} = \underline{x}$, en welke aan $\underline{A}\underline{x} = -\underline{x}$?
Bepaal de matrix van A.
Bepaal het beeld van [3,4].

4. Bepaal de vergelijking van de rechte in $\mathbb{R}^2$, die in de zin van de kleinste kwadraten het beste past bij de punten: [0,1], [1,3], [2,6], [3,7],[4,9].

5. Een product P wordt vervaardigd uit twee grondstoffen A en B.
De veiligheid eist, dat in ieder product hoogstens 10 eenheden A en hoogstens 15 eenheden B verwerkt zijn. Kwaliteit eist, dat van de twee grondstoffen samen tenminste 16 eenheden per product gebruikt worden. Wegens een uit marktonderzoek gebleken voorkeur worden alleen producten vervaardigd, waarin B hoogstens 3 maal zoveel voorkomt als A.
Per eenheid zijn de kosten van A ƒ 0,50 en van B ƒ 0,70.
Bereken de minimale en de maximale grondstoffenkosten per product P.

Examen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 29 mei 1973.

1. Los de volgende matrixvergelijking op

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & -13 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 21 & 5 \\ 8 & 43 & 13 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} .$$

2. Breng de volgende matrix op normaalvorm

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -5 & 4 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 2 & 20 & -6 \\ 0 & 1 & 10 & -12 & 10 \end{bmatrix} .$$

3. Pas het orthonormalisatieproces van Gram en Schmidt toe op de volgende basis van $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{a}_1 = [1,0,0]; \ \underline{a}_2 = [0,1,2]; \ \underline{a}_3 = [4,3,0] .$$

4. Bepaal de extreme punten van de verzameling positieve oplossingen van

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 &= 3 . \end{aligned}$$

Bewijs dat de verzameling van positieve oplossingen begrensd is.
Bepaal het minimum en maximum van $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ op deze verzameling.

5. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Bepaal voor iedere reële waarde van p de nulruimte van A.

6. Een bandenfabriek maakt twee soorten autobanden A en B.
Voor de fabricage van een band van soort A is 3 kwartier arbeidstijd nodig, en voor een band van soort B is een half uur arbeidstijd nodig.
Per werkdag zijn 454 arbeidsuren beschikbaar. De toevoer van rubber is per dag voldoende voor hoogstens 800 banden. Voor banden van soort A zijn per dag 400 ventielen beschikbaar en voor banden van soort B zijn per dag 700 ventielen beschikbaar.
Een band van soort A levert een winst van ƒ 20,-- op, een band van soort B levert een winst van ƒ 15,-- op.
We nemen aan dat alle banden verkocht worden.
Geef het productieschema dat de meeste winst per dag oplevert.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op woensdag 13 juni 1973.

1. In een bepaald district verschijnen 3 kranten: de Koerier, De Nieuwsbode en de Gazet.

   Ieder jaar doen zich de volgende wijzigingen voor:

   - de Koerier behoudt $\frac{7}{8}$ van zijn abonnees en verliest de overigen aan de Nieuwsbode;
   - de Nieuwsbode verliest $\frac{3}{4}$ van zijn abonnees aan de Koerier, $\frac{1}{6}$ aan de Gazet en behoudt de overigen;
   - de Gazet behoudt $\frac{1}{3}$ van zijn abonnees, verliest de helft aan de Koerier en de overigen aan de Nieuwsbode.

   Het totale aantal abonnees is constant.

   Op 1 januari 1972 leest de helft van de abonnees de Koerier, $\frac{1}{4}$ leest de Nieuwsbode en $\frac{1}{4}$ de Gazet.

   a) Geef de overgangsmatrix.

   b) Bepaal de verdeling op 1 januari 1973.

   c) Bepaal de stabiele verdeling.

2. De lineaire afbeeldingen A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en B: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zijn gegeven door:

   A is een draaiing over $\frac{\pi}{3}$ om de z-as ,

   B is de draaiing over π om de y-as .

   a) Bepaal de matrices van A en B.

   b) Bepaal de matrix van de afbeelding BA.

   c) BA is ook een draaiing (dit hoeft U niet te bewijzen).
   Bepaal de as van deze draaiing.

3. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 - 9x_2 + x_3 - 4x_4 &= -3 \\ 14x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 &= 6 \,. \end{aligned}$$

   a) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel.

   b) Schrijf de verzameling positieve oplossingen van dit stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

4. De vectoren $\underline{a} = [1,1,0,1]$, $\underline{b} = [0,1,2,1]$, $\underline{c} = [4,3,-2,3]$ spannen een deelruimte L van $\mathbb{R}^4$ op.
Bepaal een basis van het orthoplement van L.

5. In $\mathbb{R}^2$ is de convexe verzameling V gegeven door

$$\begin{aligned} 0 \le x &\le 18 \\ 0 \le y &\le 20 \\ 5x + y &\ge 95 \\ x + y &\le 36 \\ x + 2y &\ge 46 . \end{aligned}$$

Bereken maximum en minimum van de functie $4x + 3y$ op V.

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 14 januari 1974.

1. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Bepaal de matrix X zodanig dat $XA = B$.

b) Bepaal de inverse van X en verifieer dat $X^{-1}B = A$.

2. Gegeven zijn de punten

$$A = [3,-2,1],\ B = [3,4,4],\ C = [1,2,3] \text{ en } D = [6,-2,1]\ .$$

a) Bewijs dat de vier punten in één vlak liggen en bepaal de vergelijking van dit vlak.

b) Bewijs dat de vier punten een gelijkbenig trapezium vormen.

c) Bereken de lengte van de diagonalen van het trapezium.

3. Van de lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven:

i) $A[1,1,1] = [1,5,1]$,

ii) $A[1,0,1] = [-1,4,-1]$,

ii) de vector $[0,1,1]$ is eigenvector met eigenwaarde 3.

a) Bepaal de matrix van deze lineaire afbeelding.

b) Bewijs dat $\|A\underline{x}\| = 3\|\underline{x}\|$ voor elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1\ , \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_4 &= 2\ , \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 4\ . \end{aligned}$$

a) Geef alle oplossingen van dit stelsel.

b) Schrijf de verzameling positieve oplossingen van dit stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

5. Een van de zustermaatschappijen van een internationaal werkend olieconcern houdt zich bezig met het lossen en opslaan van olie. Dit tankopslagbedrijf is gevestigd in een haven, waarvan de faciliteiten zodanig zijn dat zowel mammoettankers als gewone tankers de haven kunnen aandoen. Per week is een vaste dag beschikbaar voor het lossen van de olie. Bovendien is gegeven dat het lossen en schoonmaken van beide soorten tankers de gehele dag in beslag neemt. Mede in verband met andere beperkingen en verplichtingen kan het olieconcern per week slechts 9 mammoettankers en 15 gewone tankers naar de haven dirigeren. De mammoettankers kunnen per stuk 1.000.000 ton olie vervoeren, terwijl de vervoerscapaciteit van een gewone tanker 400.000 ton bedraagt. In de haven zijn 30 losplaatsen beschikbaar, waarvan een mammoettanker er 3 nodig heeft en een gewone tanker 1. Voor het lossen en schoonmaken van een mammoettanker zijn 20 havenarbeiders nodig; voor een gewone tanker bedraagt dit aantal 10. Bij het tankopslagbedrijf zijn in totaal 230 havenarbeiders werkzaam. Verder is nog gegeven dat de opslagcapaciteit van de tanks van het bedrijf ruimschoots voldoende is om de aangevoerde olie te verwerken.
Hoeveel mammoettankers en hoeveel gewone tankers moet het olieconcern per week naar de haven sturen, opdat er zoveel mogelijk olie gelost kan worden?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 22 januari 1974.

1. Bepaal de stabiele prijsvectoren van de ruilmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

d.w.z. de positieve vectoren $\underline{w}$ waarvoor geldt dat $A\underline{w} = \underline{w}$.

2. Bepaal in $\mathbb{R}^3$ het orthogonaal complement van de deelruimte opgespannen door de vectoren

$$[3,1,0],\ [2,1,-4] \text{ en } [1,0,4]\ .$$

3. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met matrix

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

is de spiegeling aan een vlak V.

a) Bereken A[2,1,1] en A[0,1,-1].

b) Bepaal de vergelijking van V.

c) Bewijs dat de vector [p,q,r] + A[p,q,r] in het vlak V ligt.

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$x + 2y - 5z - t = -1\ ,$$
$$x + 3y - 8z - 2t = -4\ .$$

a) Geef alle oplossingen van dit stelsel.

b) Geef de extreme elementen van de verzameling van de positieve oplossingen.

5. Op een landbouwbedrijf worden koeien en schapen gehouden. Op het bedrijf is een koestal aanwezig, die 50 koeien kan herbergen en een schapestal, die 200 schapen kan herbergen. Bovendien heeft men de beschikking over 1800 are weiland, terwijl voor 1 koe 25 are en voor 1 schaap 5 are nodig is. Voor de verzorging van het vee zijn per jaar maximaal 10.000 werkuren beschikbaar. Voor de verzorging van 1 koe zijn per jaar 150 werkuren en voor 1 schaap 25 werkuren nodig.
De jaarlijkse winst bedraagt per koe 250 gulden en per schaap 45 gulden. Bepaal het aantal koeien en schapen, dat het landbouwbedrijf moet houden opdat de totale winst per jaar zo groot mogelijk is.

Examen/tentamen Wiskunde 37 op woensdag 5 juni 1974.

1. Bepaal alle matrices X zodanig dat

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Gegeven zijn de punten A = [2,4,6], B = [3,10,-2] en C = [6,6,10].

   a) Bereken de cosinus van hoek C van driehoek ABC.

   b) Bepaal een parametervoorstelling van het vlak V, dat door A, B en C gaat. Bepaal ook de vergelijking van dit vlak.

   c) Bepaal de vergelijking van het vlak W, dat door C gaat en dat tevens loodrecht op de lijn AB staat.

   d) Bepaal de vergelijking van het vlak U, dat door het punt D = [2,3,2] gaat en dat tevens evenwijdig is met het vlak V.

3. Van de lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt de nulruimte gevormd door alle vectoren $\underline{x}$ = [x,y,z], die voldoen aan de betrekking x + y + z = 0. Verder geldt

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   a) Bepaal de matrix van A.

   b) Bewijs dat $A^2 = \mathcal{O}$ (nulmatrix).

   c) Geef een (meetkundige) interpretatie van het resultaat in b).

4. a) Breng de volgende matrix op normaalvorm

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ -2 & 8 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 13 & 5 & 9 & 9 \end{bmatrix}.$$

b) Gegeven is nu het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 13x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 9\ . \end{aligned}$$

i) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel.

ii) Bepaal alle positieve oplossingen van dit stelsel.

5. In een land bedraagt het olieverbruik tien milliard liter per jaar. Hiervan wordt 60% in de industrie gebruikt, 20% door het verkeer en 20% voor verwarming.
Door een complex van factoren is men gedwongen het totale verbruik met 1300 millioen liter te beperken. Men wil het industriële verbruik met niet meer dan 600 millioen liter verminderen, het verbruik door het verkeer met niet meer dan 750 millioen liter en het verbruik voor verwarming met niet meer dan 500 millioen liter.
Het economische verlies wordt begroot op tien millioen gulden per millioen liter olie voor de industrie, twee millioen gulden per millioen liter olie voor het verkeer en een millioen gulden per millioen liter olie voor verwarming.
Welke verdeling van de beperking over de drie genoemde categorieën houdt het verlies zo klein mogelijk?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op woensdag 12 juni 1974.

1. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ en } B = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Bepaal de matrix X zodanig dat XA = B.

b) Bepaal A^{-1}.

2. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 . \end{aligned}$$

a) Bepaal alle oplossingen van het stelsel.

b) Bewijs dat de verzameling van positieve oplossingen begrensd is.

c) Bepaal alle positieve oplossingen van het stelsel.

3. De lineaire afbeeldingen $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zijn als volgt gegeven:

P is de (loodrechte) projectie op het vlak met vergelijking $y = -x$,
S is de spiegeling aan het vlak met vergelijking $y = x$.

a) Bepaal de matrices van P en S.

b) Bepaal de matrix van de lineaire afbeelding PS.

c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van PS.

4. Gegeven is een vector $\underline{a}$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Geef de definitie van een convexe verzameling.

b) Bewijs met behulp van de definitie dat de verzameling

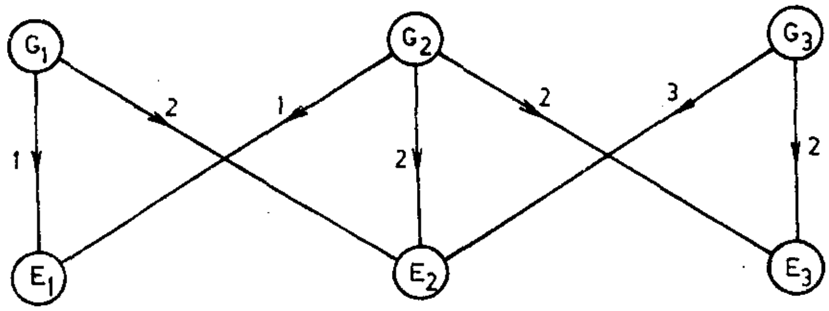
$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\underline{a},\underline{x}) \leq 1\}$$

convex is.

5. Een maatschappij bezit 2 ertsmijnen A en B.
De productiecapaciteit van mijn A bedraagt per dag 1 ton supererts, 3 ton erts van een normale kwaliteit en 5 ton erts van een minderwaardige kwaliteit.
Mijn B kan per dag 2 ton erts van elk van de drie soorten produceren.
Medio juni 1974 slaagt de mijndirectie erin een, financieel gezien, aantrekkelijk contract af te sluiten voor de levering van tenminste 80 ton supererts, 168 ton normaal erts en 216 ton minderwaardig erts.
Eén van de bepalingen van het contract is dat vóór medio oktober 1974 de hoeveelheid erts moet worden opgeleverd.
De exploitatiekosten van mijn A zijn ƒ 7500,-- per dag en die van mijn B bedragen ƒ 4500,-- per dag.
Hoeveel dagen moet elk van de mijnen gedurende de bovengenoemde periode in bedrijf zijn, opdat de baten van deze transactie zo hoog mogelijk zijn?

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 13 januari 1975.

1. In een fabricageproces worden uit grondstoffen G_1, G_2, G_3 producten E_1,E_2, E_3 gemaakt volgens het onderstaande schema:



Hierbij is de betekenis van " $G \xrightarrow{2} E$ " als volgt: Van grondstof G zijn twee eenheden nodig voor de bereiding van één eenheid van product E.

a) Stel de matrix A op, die aangeeft hoeveel eenheden van de grondstoffen nodig zijn voor het produceren van één eenheid van E_1, E_2, E_3.

b) Hoeveel eenheden van de grondstoffen G_1,G_2 en G_3 zijn nodig voor de productievector

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} \ ?$$

c) Bepaal A^{-1}.

d) Is het mogelijk om de grondstoffenvoorraad

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

geheel in producten E_1, E_2, E_3 om te zetten? Zo ja, welke hoeveelheid van E_1, E_2, E_3 ontstaan daarbij?

2. $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ zijn een drietal vectoren in $\mathbb{R}^3$. Van de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is gegeven dat ze een onafhankelijk stelsel vormen en bovendien loodrecht op elkaar staan.

Bepaal de getallen α en β zodanig dat de lengte van de vector

$$\underline{c} - (\alpha\underline{a} + \beta\underline{b})$$

minimaal is.

3. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met als matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

is een draaiing.

a) Bepaal een eigenvector bij de eigenwaarde 1,

b) Bewijs dat $[1,0,1]$ loodrecht op de onder a) gevonden eigenvector staat.

c) Laat zien dat de draaiingshoek $\frac{\pi}{3}$ is.

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 \phantom{{}+2x_3} + 3x_4 &= 7\,, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 21\,, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= -12\,, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 37\,. \end{aligned}$$

a) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel.

b) Bepaal alle positieve oplossingen van dit stelsel.

5. Twee studenten spreken met een baas af samen één vakantiebaan te nemen voor een periode, bestaande uit 24 werkdagen. Student A is geschoold, student B ongeschoold voor de baan die ze op het oog hebben. De voorwaarden die ze overeenkomen zijn de volgende:

1) Het verdiende geld wordt in een pot gestort en gebruikt voor een gemeenschappelijk doel.

2) Student A kan ten hoogste 15 dagen werken. Student B kan ten hoogste 20 dagen werken, maar wil in elk geval 10 dagen werken.

3) Iedere werkdag is tenminste één van beiden aan het werk.

4) Er is voor A en B samen in totaal voor 27 dagen werk beschikbaar.

5) B staat erop tenminste tweemaal zoveel dagen te werken als A.

6) A verdient ƒ 40,-- per dag, B slechts ƒ 20,-- per dag.

Hoeveel dagen moeten A en B elk werken, opdat ze gezamenlijk zoveel mogelijk geld verdienen?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 21 januari 1975.

1. a) Bewijs dat de lijn ℓ met parametervoorstelling

$$\underline{x} = [-1,-1,2] + \lambda[4,3,-4]$$

in het vlak V met vergelijking $4x + 4y + 7z = 6$ ligt.

b) Bewijs dat de lijn m met parametervoorstelling

$$\underline{x} = [7,6,5] + \mu[4,4,7]$$

de lijn ℓ loodrecht snijdt en bepaal de coördinaten van het snijpunt.

c) Bereken de afstand van het punt [7,6,5] tot het vlak V.

2. Gegeven zijn de volgende twee matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Bepaal de matrix L met de eigenschap dat $LA = \tilde{A}$.

b) Bepaal alle oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Gegeven is het vlak V met vergelijking $x - 2y + z = 0$.
De lineaire afbeelding $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van V.

a) Voor welke vectoren geldt $S\underline{x} = \underline{x}$; voor welke $S\underline{x} = -\underline{x}$?

b) Bepaal de matrix van S.

c) Bepaal de beeldruimte en de kern van S.

d) Is het stelsel

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wel of niet oplosbaar? (U hoeft geen berekening te geven, maar wel een motivering van Uw antwoord.)

e) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de lineaire afbeelding S^2.

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 2x_4 \quad &= 2\,, \\ x_2 + x_3 \quad &= 2\,, \\ x_1 \quad + x_3 \quad - 2x_5 &= 0\,. \end{aligned}$$

a) Bewijs dat de verzameling van positieve oplossingen begrensd is.

b) Bepaal alle positieve oplossingen van dit stelsel.

5. Een grootwinkelbedrijf heeft beslag weten te leggen op drie soorten vruchtensap. Het suikergehalte van de vruchtensappen is respectievelijk 15 gram, 11 gram en 7 gram per liter, terwijl de prijzen respectievelijk ƒ 1,20, ƒ 0,80 en ƒ 0,48 per liter bedragen.

Het bedrijf wil hier een mengsel uit samenstellen dat minstens 12 gram suiker per liter bevat.

Welke samenstelling heeft het product met de laagste literprijs?

Examen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 3 juni 1975.

1. In $\mathbb{R}^4$ zijn drie vectoren $\underline{a} = [0,1,0,1]$, $\underline{b} = [1,0,1,0]$ en $\underline{c} = [c_1,c_2,2,-1]$ gegeven.

   a) Geef een parametervoorstelling van het vlak V door $\underline{0}$, $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Bepaal c_1 en c_2 zodanig dat $\underline{c} \in V$.

   b) Zij $\underline{d} = [2,2,0,0]$. Bepaal de vector $\underline{e} \in V$ zodanig dat $\underline{d} - \underline{e}$ loodrecht op V staat.

   c) Geef een basis voor het orthogonale complement $V^{\perp}$ van V.

   d) Schrijf $\underline{d}$ als de som van een vector uit V en een vector uit $V^{\perp}$.

2. Gegeven zijn de meetwaarden

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$

   Bepaal de vergelijking van de lijn die in de zin van de kleinste kwadraten het beste past bij de gegeven meetwaarden, d.w.z. als $y(x) = \alpha + \beta x$, bepaal dan α en β zodanig dat

$$\sum_{i=1}^{5} (y(x_i) - y_i)^2$$

   minimaal is.

3. Van een lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Bepaal A^{-1}.

   b) Laat zien dat A orthogonaal is.

   c) Zij V het vlak met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda[1,0,-1,0] + \mu[0,1,0,-1]$. Bewijs dat voor elke $\underline{x} \in V$ geldt dat $A\underline{x} \in V$.

   d) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.

4. Voor het vervullen van een bepaalde opdracht moet een uitvoerder een werktuig gedurende 30 uren laten besturen. Hij beschikt daarvoor over drie personeelsleden A, B en C van wie in de onderstaande tabel de voorgeschreven minimale en maximale werkduur zijn vermeld. Bovendien zijn van elk der personeelsleden de loonkosten per uur aangegeven.

	A	B	C
minimale werkduur in uren	4	5	6
maximale werkduur in uren	14	17	18
loonkosten per uur	9	10	12

Verder dient de uitvoerder er voor te zorgen dat het verschil in werkduur tussen de personeelsleden A en C niet meer dan 5 uur bedraagt.
Bepaal de tijdtoewijzingen zodanig dat de loonkosten minimaal zijn; hoe hoog zijn deze kosten?

5. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_4 + x_5 &= 1 , \\ x_2 \qquad\quad + x_5 &= 2 , \\ x_3 + x_4 - ax_5 &= -3a - 1 . \end{aligned}$$

a) Geef alle oplossingen van dit stelsel.

b) Neem $a = -1$ en schrijf de verzameling van de positieve oplossingen van het stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

c) Voor welke reële waarden van a is de verzameling van de positieve oplossingen begrensd en niet leeg?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op woensdag 11 juni 1975.

1. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

   a) Bepaal het beeld van de lijn met parametervoorstelling

   $$\underline{x} = [-3,1,0] + \lambda[2,-2,1] .$$

   b) Bepaal de inverse van A.

   c) Bepaal de lijn waarvan het beeld de volgende parametervoorstelling heeft:

   $$\underline{x} = [1,1,1] + \lambda[0,2,1] .$$

2. Gegeven zijn de punten A = [1,2,3] en B = [4,5,-3] en het vlak V met vergelijking $2x - y + 3z = 4$.

   a) Bepaal het snijpunt van V met de lijn ℓ door A en B.

   b) Bepaal de lijn in V die ℓ loodrecht snijdt.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

   a) Bepaal een matrix B zodanig dat

   $$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

   b) Bereken B[1,2,1] en bepaal de algemene oplossing van $A\underline{x} = [1,2,1]$.

   c) Als $A\underline{x} = \underline{b}$ een oplossing heeft, dan is voor elke matrix B die aan a) voldoet, het derde kental van $B\underline{b}$ gelijk aan nul. Bewijs dit.

4. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A[x,y,z] = (x+y)[1,1,1] + (y-z)[1,-1,1] .$$

a) Laat zien dat $[1,1,1]$ en $[1,-1,1]$ eigenvectoren zijn en bepaal de bijbehorende eigenwaarden.

b) Bewijs dat de dimensie van de beeldruimte gelijk is aan twee.

c) Bepaal een eigenvector bij de derde eigenwaarde van A.

d) Zij $\underline{a} = [1,0,1]$ en S de lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ gedefinieerd door $S\underline{x} = (\underline{a}, A\underline{x})$.
Bepaal de vector $\underline{b}$ zodanig dat $S\underline{x} = (\underline{b},\underline{x})$ voor alle $\underline{x}$ uit $\mathbb{R}^3$.

5. Door de drie primaire kleuren rood, geel en blauw te mengen kunnen we, althans voor het oog, alle kleuren verkrijgen. De verkregen mengkleur kan worden beschreven door de verhouding van de gebruikte primaire kleuren op te geven, dus bijvoorbeeld door drie niet-negatieve getallen waarvan de som één is.
Helaas zijn de primaire kleuren in onze voorraad niet aanwezig, maar we beschikken wel over de mengsels

$$a = [\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}],\ b = [\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}],\ c = [\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{6}],\ d = [0,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}] ;$$

hierbij heeft het eerste kental betrekking op rood, het tweede op geel en het derde op blauw.

a) Bepaal alle mogelijke manieren om uit deze vier mengsels het mengsel $[\frac{2}{12},\frac{5}{12},\frac{5}{12}]$ samen te stellen.

b) Als de mengsels a en b 30 cent per eenheid kosten, c 20 cent per eenheid en d 70 cent per eenheid, wat is dan de voordeligste manier om het gewenste mengsel samen te stellen?

Voor belangstellenden zij verwezen naar W.A.H. Rushton "Visual pigments and color blindness", Scientific American <u>232</u>, March 1975, 64-75.

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 12 januari 1976.

1. Gegeven is de ruilmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} .$$

Bepaal alle positieve vectoren $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt $A\underline{w} = \underline{w}$.

2. Bij de waarden x_i zijn gegeven de meetresultaten y_i volgens onderstaande tabel:

x_i	0	1	2	3
y_i	-3	-2	2	3

Bepaal de vergelijking van de lijn die, in de zin van de kleinste kwadraten, het beste past bij de gegeven meetresultaten.

3. In $\mathbb{R}^3$ is gegeven de vector $\underline{a} = \frac{1}{3}[2,1,-2]$. Voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ definiëren we

$$A\underline{x} = \underline{x} - (\underline{a},\underline{x})\underline{a} .$$

a) Bewijs dat A lineair is.

b) Bewijs dat $\underline{a}$ een eigenvector is van A en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.

c) Bewijs dat voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$

$$A(A\underline{x}) = A\underline{x} .$$

d) Bewijs dat de beeldruimte het vlak $2x + y - 2z = 0$ is.

e) Bepaal een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$, die geheel uit eigenvectoren van A bestaat.

4. De verdeling van 3 voedingsstoffen V_1, V_2 en V_3 over 4 levensmiddelen L_1, L_2, L_3 en L_4 is in de volgende tabel gegeven

	L_1	L_2	L_3	L_4
V_1	2	1	4	3
V_2	4	3	5	2
V_3	6	2	5	3

Dus bijvoorbeeld: per eenheid L_1 komen 2 eenheden V_1, 4 eenheden V_2 en 6 eenheden V_3 voor.
Bepaal alle mogelijke manieren om uit L_1, L_2, L_3 en L_4 een maaltijd te bereiden, die 23 eenheden V_1, 36 eenheden V_2 en 49 eenheden V_3 bevat.

5. Een slijter wil een drank samenstellen die 12% alcohol bevat. Hiertoe gaat hij 4 verschillende dranken mengen, die een alcoholgehalte hebben van resp. 16%, 8%, 16% en 0%, terwijl de prijzen resp. *f* 4,--, *f* 3,--, *f* 6,-- en *f* 2,-- per liter bedragen.
Welke samenstelling is het goedkoopst en welke het duurst?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 20 januari 1976.

1. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 , \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 , \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 . \end{aligned}$$

a) Bewijs dat de verzameling van positieve oplossingen van dit stelsel begrensd is.

b) Bepaal van de verzameling der positieve oplossingen de extreme elementen.

2. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

a) Voor welke waarde(n) van a heeft de matrix A een inverse?

b) Bepaal de inverse van A, indien $a = 1$.

3. De lineaire afbeelding $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de loodrechte projectie op het vlak $x + y + z = 0$.

a) Bepaal van P de matrix, de eigenwaarden en de eigenvectoren.

b) Bepaal het beeld onder P van de z-as.

c) Geef een parametervoorstelling van het vlak dat door P op de rechte

$$\underline{x} = [1,0,-1] + \lambda[1,-2,1]$$

wordt afgebeeld.

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 , \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 0 . \end{aligned}$$

Bepaal een basis voor de oplossingsruimte, en geef ook een orthonormale basis voor de oplossingsruimte.

5. Een kaashandelaar wenst een kaasmengsel samen te stellen voor de bereiding van kaasfondue. Hiervoor heeft hij de beschikking over drie soorten kaas: A, B en C.
Hij wil een zodanig mengsel samenstellen dat in 600 gram van het mengsel minstens 180 gram en hoogstens 240 gram van soort A voorkomt; van soort B minstens zoveel als van soort A en can soort C minstens 100 gram.
Indien de prijzen van A, B en C respectievelijk ƒ 1,20, ƒ 1,80 en ƒ 1,60 per 100 gram bedragen, bepaal dan de samenstelling, die het goedkoopst is.

Examen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 8 juni 1976.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

a) Bepaal de matrix P zodanig, dat

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

b) Bepaal de matrix A^{-1}.

2. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad &= 4 , \\ 2x_1 + 7x_2 \qquad + x_4 &= 9 . \end{aligned}$$

a) Bepaal van de verzameling der positieve oplossingen de extreme elementen.

b) Bepaal alle positieve oplossingen.

3. Zij V de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ die wordt opgespannen door de vectoren [1,0,2,2] en [2,2,-1,0].
$\underline{a}$ is de vector [2,2,3,2].

a) Bepaal een basis van het orthogonale complement $V^{\perp}$ van V.

b) Bepaal de projectie van de vector $\underline{a}$ op V.

c) Schrijf $\underline{a}$ als $\underline{a} = \underline{v} + \underline{w}$, waarbij $\underline{v} \in V$ en $\underline{w} \in V^{\perp}$.

4. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met als matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

is een draaiing.

a) Bepaal de draaiingsas en de draaiingshoek.

b) Zij V het vlak met vergelijking $x + y + z = 0$.
Bepaal de vergelijking van het beeld van V.

5. Een slijter heeft de beschikking over drie soorten vruchtenwijn, waarvan het percentage alcohol, het percentage vruchtensap en de kostprijs per liter volgens onderstaande tabel zijn gegeven:

wijnsoort	A	B	C
perc. alcohol	5%	6%	5,5%
perc. vruchtensap	60%	80%	30%
prijs per liter	ƒ 5,--	ƒ 6,--	ƒ 2,--

a) Is het mogelijk hieruit een mengsel samen te stellen, met een alcoholpercentage van 5,6% en een vruchtensappercentage van 73%? Motiveer Uw antwoord.

b) De slijter wil 100 liter mengsel samenstellen met een percentage van hoogstens 5,8% alcohol en minstens 68% vruchtensap. Welke samenstelling is dan het voordeligst?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op woensdag 16 juni 1976.

1. Bepaal de stabiele prijsvectoren van de ruilmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

d.w.z. de positieve vectoren $\underline{w}$ waarvoor geldt dat $A\underline{w} = \underline{w}$.

2. Bij de waarden x_i zijn gegeven de meetresultaten volgens onderstaande tabel:

x_i	-2	-1	1	2
y_i	1	-1	2	3

Bepaal de vergelijking van de lijn die, in de zin van de kleinste kwadraten, het beste past bij de gegeven meetresultaten.

3. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 10 , \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 40 . \end{aligned}$$

a) Bepaal van de verzameling der positieve oplossingen de extreme elementen.
b) Bepaal alle positieve oplossingen.

4. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Laat zien dat de vector [1,1,-1] loodrecht staat op de beeldruimte van A.
b) Zij V het vlak door de punten [2,2,0], [1,1,1] en [1,2,0].
Bepaal het beeld van V.

5. In een fabriek maakt men gebruikt van twee machines, M_1 en M_2, voor de fabricage van een product P. Per werkweek van 40 uren zijn 4 uren nodig voor een onderhoudsbeurt van machine M_1 en 5 uren voor het onderhoud van machine M_2. Wegens gebrek aan arbeidskrachten kunnen beide machines samen per week hoogstens 56 uren in bedrijf zijn. Machine M_1 produceert per uur van product P 1 ton, machine M_2 produceert 2 ton per uur. Wekelijks kan hoogstens 80 ton geproduceerd worden.
Wanneer machine M_1 werkt, verbruikt hij 5 eenheden energie per uur; machine M_2 verbruikt 6 eenheden energie per uur. Er zijn per week hoogstens 300 eenheden energie beschikbaar.
Een ton van product P gefabriceerd door M_1 levert *f* 150,-- winst op; een ton P afkomstig van M_2 levert *f* 100,-- winst op.
Hoeveel uren moeten de beide machines per week in bedrijf zijn, opdat de winst maximaal is?

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 17 januari 1977.

1. Bij de waarden x_i zijn gegeven de meetresultaten y_i volgens onderstaande tabel:

x_i	1	2	3	4
y_i	7	3	-1	-2

Bepaal de vergelijking van de lijn die, in de zin van de kleinste kwadraten, het best past bij de gegeven meetresultaten.
Teken de punten en de gevonden lijn.

2. Gegeven zijn het punt $A = [1,-1,2]$ en het vlak V met vergelijking $x + 2y + z = 2$.

   a) Bepaal een parametervoorstelling van de lijn ℓ, die door A gaat, evenwijdig loopt met het vlak V en de X-as snijdt.
   b) Bepaal het snijpunt van ℓ en de X-as.

3. Gegeven is het vlak V met vergelijking $x - y = 0$.
De lineaire afbeelding $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van V.
De lineaire afbeelding $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de loodrechte projectie op V.

   a) Bepaal de matrices van S en P.
   b) Bepaal de matrices van SP en PS en geef een (meetkundige) interpretatie van het resultaat.

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -x_1 + 4x_2 \qquad + 3x_4 &= -1 \;. \end{aligned}$$

   a) Bewijs dat de verzameling van positieve oplossingen begrensd is.
   b) Schrijf de verzameling van positieve oplossingen van het stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

5. Een vader wil een bedrag van ƒ 42000 verdelen onder zijn drie zoons Jan, Piet en Kees.

Jan moet minstens zoveel krijgen als Piet, maar niet meer dan drie keer zoveel als Piet.

Piet moet minstens zoveel krijgen als Kees, maar niet meer dan drie keer zoveel als Kees.

Bovendien bepaalt hij dat Jan van zijn aandeel $\frac{3}{10}$ moet afdragen aan een fonds, Piet $\frac{1}{10}$ en Kees $\frac{2}{10}$.

Jan, Piet en Kees proberen een zodanige regeling te treffen dat de bijdrage aan het fonds minimaal is.

Welke mogelijkheden hebben ze daartoe?

Bepaal dit minimale bedrag.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 25 januari 1977.

1. Gegeven is de matrix

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -a & -a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Bereken B^{-1}.

2. Gegeven zijn de rechte ℓ met parametervoorstelling

$$\underset{\sim}{x} = [1,-3,2] + \lambda[3,2,4]$$

en het vlak V met vergelijking $5x - 3y + 4z + 78 = 0$.

a) Bepaal het snijpunt van ℓ en V.

b) Bepaal een parametervoorstelling van het spiegelbeeld van de rechte ℓ ten opzichte van het vlak V.

3. U is de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ voortgebracht door de vectoren

$$\underset{\sim}{u}_1 = [1,0,0,-1],\ \underset{\sim}{u}_2 = [1,1,-1,0] \text{ en } \underset{\sim}{u}_3 = [0,1,0,-2] .$$

a) Bepaal een orthonormale basis van U.

b) Bepaal een orthonormale basis van U .

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_4 &= 21 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 . \end{aligned}$$

a) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel.

b) Bepaal alle positieve oplossingen van dit stelsel.

5. In een magazijn A bevindt zich 600 ton van een zeker materiaal en in magazijn B 800 ton van hetzelfde materiaal.
Naar plaats P moet 300 ton vervoerd worden, naar plaats Q 500 ton en naar plaats R 600 ton.
De transportkosten zijn evenredig met de afstanden en bedragen ƒ 100 per ton per km. Deze afstanden (in km) worden gegeven door onderstaande tabel:

	P	Q	R
A	10	20	100
B	70	90	30

Stel een vervoersschema op zodanig dat de transportkosten minimaal zijn.
Hoeveel bedragen deze kosten?

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 13 juni 1977.

1. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix}.$$

Bepaal p, q en r zodanig, dat er een matrix C bestaat waarvoor geldt dat $AC = B$.

2. Gegeven is het vlak U met vergelijking $x - 2y + 2z = 3$ en het vlak V met vergelijking $2x + y - 2z = -3$.
U' is het spiegelbeeld van U t.o.v. V.
Bepaal de vergelijking van U'.

3. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, waarvoor geldt dat het inwendig product $(\underline{a},\underline{b}) \neq 0$.
De afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door $A\underline{x} = (\underline{x},\underline{b})\underline{a}$.

   a) Bewijs dat A lineair is.
   b) Bepaal de nulruimte en de beeldruimte van A; geef ook hun dimensies.
   c) Bewijs dat $\underline{a}$ een eigenvector is van A en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + x_4 + x_4 &= 1\ , \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3\ , \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 11\ . \end{aligned}$$

   a) Bewijs dat de verzameling van positieve oplossingen begrensd is.
   b) Schrijf de verzameling van positieve oplossingen van het stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

5. Iemand heeft een zeker bedrag, dat belegd moet worden in drie objecten A_1, A_2 en A_3. Het rendement van deze objecten is resp. 6, 7 en 8%. De belegger is niet vrij in de keuze van zijn beleggingen, maar is gebonden aan de volgende voorwaarden:

   a) hoogstens 30% van het totale bedrag wordt belegd in object A_2,

   b) in A_3 wordt hoogstens tweemaal zo veel belegd als in A_2, doch minstens zoveel als in A_1.

   Om bepaalde redenen wil hij in een zeker jaar het rendement minimaal hebben.
   Hoe kan hij zijn geld beleggen opdat dit het geval is?
   Hoeveel procent is dit rendement?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op woensdag 22 juni 1977.

1. De kromme K is gegeven door de volgende vergelijking

$$2x^2 + 12xy - 3y^2 = 42 .$$

Het coördinatenstelsel (ξ,η) in $\mathbb{R}^2$ ontstaat door draaiing van het assenkruis over een scherpe hoek φ.

a) Leid de transformatieformules af voor de oude coördinaten x en y in termen van ξ en η.
b) Bepaal tan φ zodanig dat K in (ξ,η) coördinaten een vergelijking heeft van de vorm $\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = 42$.
c) Bepaal α,β en de aard van K.
d) Schets K in het (ξ,η)-vlak.

2. Van de lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven:

i) de vector [0,1,1] is eigenvector met eigenwaarde 3,
ii) de nulruimte is de rechte $x = y = z$,
iii) A[2,1,2] = [4,3,7].

a) Bepaal de matrix van deze lineaire afbeelding.
b) Bepaal de vergelijking van de beeldruimte.

3. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} 4x_1 + 16x_2 + 14x_3 - x_4 - x_5 &= 65 , \\ 3x_1 + 12x_2 + 11x_3 - x_4 - x_5 &= 48 , \\ 4x_1 + 16x_2 + 15x_3 - 2x_4 - x_5 &= 63 . \end{aligned}$$

Schrijf, zo mogelijk, de verzameling positieve oplossingen van dit stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

4. Bepaal het minimum van $x + 2y + 3z$, indien x, y en z voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$\begin{aligned} &x + y + z = 90, \\ &x \geq 0, \\ &y \geq x, \\ &z \geq y, \\ &y \leq 2x, \\ &z \leq 3y, \\ &x + y \leq 56 . \end{aligned}$$

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 16 januari 1978.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Bepaal A^{-1}.

b) Los m.b.v. a) op

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 6 \\ 5x - \ y - 2z &= 3 \\ -x + 5y - 2z &= 3 . \end{aligned}$$

2. Gegeven zijn het vlak U: $\underline{x} = [3,2,6] + \lambda[0,1,0] + \mu[2,0,3]$, de lijn ℓ: $\underline{x} = [-3,2,0] + \rho[4,0,3]$, en het vlak V: $\underline{x} = [2,4,5] + \sigma[4,0,1] + \tau[0,1,1]$. Gevraagd een parametervoorstelling van de lijn m die in U ligt, ℓ snijdt en evenwijdig V is.

3. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A[x,y,z] = [x,y,z] - \frac{1}{14}(2x - y + 3z)[2,-1,3] .$$

a) Laat zien dat $[2,-1,3]$ en $[-1,1,1]$ eigenvectoren zijn en bepaal de bijbehorende eigenwaarden.

b) Bewijs dat $A^2 = A$.

c) Bepaal de nulruimte van A.

d) Bepaal de matrix van A.

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - \ x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 4 . \end{aligned}$$

a) Geef alle oplossingen van dit stelsel.

b) Schrijf de verzameling positieve oplossingen van dit stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

5. Een sportvereniging bestaande uit 126 leden, te weten 54 dames en 72 heren, wil drie soorten trainingsgroepen formeren. De samenstelling en onkosten per trainingsgroep zijn volgens de onderstaande tabel gegeven.

soort	dames	heren	onkosten
A	0	9	ƒ 30,-
B	6	8	ƒ 40,-
C	9	0	ƒ 30,-

We nemen aan dat elk lid tot hoogstens één trainingsgroep mag behoren.
Het is niet noodzakelijk dat elk lid in een trainingsgroep wordt opgenomen.
De totale onkosten mogen het bedrag van ƒ 240,- niet overschrijden.
Een trainingsgroep van soort A traint 1 uur per week, van soort B 2 uur per week en van soort C eveneens 2 uur per week.
Om de aanwezige sportaccomodatie zo goed mogelijk te bezetten, wil de sportvereniging het totaal aantal trainingsuren per week maximaliseren.
Geef een opsomming van de verdelingen van de aantallen trainingsgroepen over de verschillende soorten waarvoor het maximum wordt bereikt.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 24 januari 1978.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

a) Bereken A^4.

b) A is de matrix van een draaiing.
Bepaal de draaiingsas en de draaiingshoek.

2. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 16 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 11x_4 &= 28 . \end{aligned}$$

a) Bepaal van de verzameling der positieve oplossingen de extreme elementen.

b) Bepaal alle positieve oplossingen.

3. De lineaire afbeelding $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de (loodrechte) projectie op het vlak $x - y - z = 0$.

a) Bepaal in $\mathbb{R}^3$ een basis die geheel uit eigenvectoren van P bestaat.

b) Bepaal de matrix van P.

4. In een bepaalde wijk zijn drie supermarkten gelegen: A, B en C, die hun klanten uit die wijk betrekken. Elk jaar doen zich de volgende wijzigingen voor:
- Supermarkt A behoudt 70% van zijn klanten, verliest 20% aan B en 10% aan C.
- Supermarkt B behoudt 80% van zijn klanten, verliest 10% aan A en 10% aan C.
- Supermarkt C behoudt 60% van zijn klanten, verliest 30% aan A en 10% aan B.

We nemen aan dat het totaal aantal klanten uit die wijk ieder jaar gelijk blijft.
De percentage verdeling in 1976 is gegeven door:
A: 40% B: 30% C: 30%.

a) Bepaal de percentageverdeling in 1977.

b) Bepaal de stabiele verdeling.

5. Bereken het maximum en het minimum van de functie $f(x,y) = 6x + 9y$ op de oplossingsverzameling van het stelsel ongelijkheden:

$$
\begin{aligned}
2x + 3y &\leq 38 \, , \\
x + y &\leq 17 \, , \\
x + 3y &\leq 31 \, , \\
x &\geq 1 \, , \\
y &\geq 1 \, .
\end{aligned}
$$

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 5 juni 1978.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

a) Bereken A^TA en AA^T.

b) Bepaal de beeldruimte van de lineaire afbeelding waarvan de matrix gelijk is aan AA^T.

c) Heeft de matrix AA^T een inverse? Motiveer Uw antwoord.

d) Laat zien dat voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ geldt

$$\underline{x}^T AA^T \underline{x} \geq 0 .$$

2. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de rechten

$$\ell : \underline{x} = [1,1,1] + \lambda[2,1,-3] ,$$

en

$$m : \underline{x} = [0,-3,0] + \mu[1,-2,1] .$$

Bepaal de vergelijking van het vlak dat evenwijdig is aan ℓ en m en waarvan de afstand tot ℓ gelijk is aan de afstand tot m.

3. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing met draaiingsas

$$d : \underline{x} = \lambda[3,0,-4] .$$

Verder is gegeven dat $A[4,0,3] = [0,5,0]$.

a) Bepaal de draaiingshoek.

b) Bepaal $A[0,1,0]$.

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 + 11x_2 + x_3 + 6x_4 = 7 , \\ 6x_1 - 10x_2 - 4x_3 - 7x_4 = -1 , \\ 27x_2 - 5x_3 + 11x_4 = 11 , \\ 4x_2 - 10x_3 - 3x_4 = -3 , \end{cases}$$

Bepaal alle oplossingen van dit stelsel.

5. Een bepaalde omroepvereniging wil een radioprogramma verzorgen met een totale tijdsduur van 80 minuten.
Besloten werd het programma uit 3 onderdelen te laten bestaan, nl.:

(a) lichte muziek,
(b) actualiteit,
(c) toeristische tips.

Om het programma een informatief karakter te geven mag de tijdsduur besteed aan onderdeel (a) niet meer zijn dan de totale tijdsduur van (b) plus (c), bovendien mag de tijdsduur van (a) die van (c) met niet meer dan 20 minuten overschrijden.
Onderdeel (b) mag hoogstens 45 minuten duren en onderdeel (c) moet minstens 10 minuten duren.
De programma-onderdelen (a), (b) en (c) krijgen een waarderingscijfer, resp. 4, 3 en 2.
De totale waardering voor het gehele programma verkrijgt men door de waarderingscijfers te vermenigvuldigen met de tijdsduur in minuten van de corresponderende programma-onderdelen en vervolgens deze getallen te sommeren.

Hoe moet het programma ingedeeld worden opdat de totale waardering maximaal is?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op woensdag 14 juni 1978.

1. Bij de waarden x_i zijn gegeven de meetresultaten y_i volgens onderstaande tabel:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	$-\frac{1}{2}$	1	1

.

Bepaal de vergelijking van de lijn die, in de zin van de kleinste kwadraten, het beste past bij de gegeven meetresultaten.
Teken de punten en de gevonden lijn.

2. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de rechte ℓ met parametervoorstelling

$$\underline{x} = [-1,3,6] + \lambda[6,1,-2]$$

en de rechte m met parametervoorstelling

$$\underline{x} = [0,-4,-3] + \mu[3,2,-2] .$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van de rechte die ℓ en m loodrecht snijdt.
b) Bepaal de afstand tussen ℓ en m.

3. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door de matrix

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} .$$

a) Toon aan dat elke vector $\neq \underline{0}$ in het vlak V met vergelijking $x + y + z = 0$ eigenvector bij de eigenwaarde 1 is.
b) Bepaal de eigenvectoren bij de eigenwaarde $\frac{1}{2}$.
c) Als $\underline{x}' = [x',y',z']$ de loodrechte projectie is van $\underline{x} = [x,y,z]$ op V, toon dan aan dat $A\underline{x} = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}')$.

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \,, \\ 2x_2 + x_4 = 1 \,, \\ 4x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 6 \,, \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 8 \,, \\ 10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 17 \,. \end{cases}$$

a) Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel.

b) Schrijf de verzameling van positieve oplossingen van het stelsel als een convexe combinatie van extreme elementen.

5. Bereken het maximum en het minimum van de functie $f(x,y,z) = 4x - 2y - z$ op de oplossingsverzameling van het stelsel ongelijkheden

$$\begin{cases} x + y + z \le 3 \,, \\ 2x + 2y + z \le 4 \,, \\ x - y \le 0 \,, \\ x \ge 0 \,, \\ z \ge 0 \,. \end{cases}$$

Examen /tentamen Wiskunde 37 op maandag 15 januari 1979.

1. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Zij I de (3×3)-eenheidsmatrix.

Bewijs:

$$A = a_0 I + a_1 P + a_2 P^2 .$$

b) Indien $a_0 = 0$ en $a_1 = a_2 = 1$, bereken dan A^{-1}.

2. Een kromme in $\mathbb{R}^2$ heeft in xy-coördinaten als vergelijking

$$x^2 + 2\sqrt{3}\, xy - y^2 = 4 .$$

a) Bepaal de aard van de kromme.

b) Schets de kromme.

3. Gegeven zijn de matrix A en de vector $\underline{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Bepaal een orthonormale basis van de nulruimte van A.

b) Bereken het maximum en het minimum van de functie

$$f(\underline{x}) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$$

op de verzameling in $\mathbb{R}^4$ bepaald door

$$A\underline{x} = \underline{b}, \ \underline{x} \geq \underline{0} .$$

4. Van de lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven

$$A[1,-1,1] = [0,0,0] \ ,$$

$$A[1,2,1] = [1,2,1] \ ,$$

$$A[1,0,-1] = [-1,0,1] \ .$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van het beeld van de rechte door [1,2,1] en [1,-1,1].

b) Bepaal een vergelijking voor de beeldruimte van A.

De lineaire afbeelding $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de loodrechte projectie op de beeldruimte van de lineaire afbeelding A.
Zij $\underline{a} = [1,2,1]$.

c) Laat zien dat

$$A\underline{x} = \frac{1}{3}(P\underline{x},\underline{a})\underline{a} - P\underline{x}$$

voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 23 januari 1979.

1. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven het punt $P = [1,2,8]$ en de rechte ℓ bepaald door

$$\ell: \begin{cases} x + 2y = 1 \ , \\ y + z = 0 \ . \end{cases}$$

Bepaal de loodrechte projectie van het punt P op de rechte ℓ.

2. Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{b}$, waarin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2\beta \\ 4 \\ 3\beta - 2 \end{bmatrix} \quad (\beta \in \mathbb{R}) \ .$$

a) Bepaal de rang van A en de rang van $[A,\underline{b}]$.

b) Voor welke waarden van β is het stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$ oplosbaar?

c) Bepaal de oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$ voor $\beta = 1$.

d) Bepaal de nulruimte van A.

3. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 6 \ , \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \ , \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \ . \end{cases}$$

a) Bereken de extreme elementen van de verzameling van positieve oplossingen.

b) Bepaal alle positieve oplossingen.

4. Een aannemer heeft drie ploegen metselaars in dienst: A, B en C. Hij heeft een karwei waarbij 84.000 stenen gelegd moeten worden. De loonkosten per uur zijn voor elke ploeg gegeven, evenals het aantal stenen dat de verschillende ploegen gemiddeld per uur leggen.

	A	B	C
loonkosten per uur	100	130	220
aantal stenen per uur	300	400	600

In verband met andere verplichtingen kan ploeg A hooguit 120 uur voor dit karwei worden ingezet en ploeg B hooguit 45 uur.

Hoeveel uur moeten de verschillende ploegen worden ingezet opdat de totale loonkosten minimaal zijn?

Examen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 5 juni 1979.

1. Bepaal de vergelijking van de rechte in $\mathbb{R}^2$, die in de zin van de kleinste kwadraten het beste past bij de punten [-2,2], [-1,0], [0,2], [1,2], [2,2].

2. Bepaal de vergelijking van het vlak V in $\mathbb{R}^3$ dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

   i) V gaat door de oorsprong,

   ii) de projectie van de rechte ℓ: $\underline{x} = \lambda(3,1,1)$ op V is de rechte m gegeven door

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \ , \\ y = 0 \ . \end{cases}$$

3. Van de lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de matrix gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

   a) Bepaal de vergelijking van de nulruimte van A.

   b) Laat zien dat de beeldruimte van A het orthogonale complement is van de nulruimte van A.

   c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

   d) Bepaal het beeld van het vlak $x + y + z = 1$.

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} \phantom{13x_1 - {}} 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 16 \ , \\ 3x_1 \phantom{{}- 4x_2} + 3x_3 + x_4 = 12 \ , \\ 13x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 20 \ , \\ 12x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 24 \ . \end{cases}$$

   a) Geef alle oplossingen van dit stelsel.

   b) Geef alle positieve oplossingen van dit stelsel.

5\. a) Bereken de extreme elementen van de convexe verzameling $V \subset \mathbb{R}^4$ gegeven door

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0\ ,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\ ,$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1\ .$$

b) Is het mogelijk de verzameling V te schrijven als een convexe combinatie van haar extreme elementen? Motiveer Uw antwoord.

c) Bereken het maximum van de functie $f(\underline{x}) = x_3$ op V.

Examen/tentamen Wiskunde 37 op maandag 14 januari 1980.

1) Bij de waarden x_i zijn gegeven de waarden y_i volgens onderstaande tabel

x_i	0	1	2	3
y_i	-2	13	6	7 .

Bepaal de vergelijking van de lijn die, in de zin van de kleinste kwadraten, het beste past bij de gegeven meetresultaten.

2) Bepaal in $\mathbb{R}^3$ een parametervoorstelling van de rechte ℓ door $[0,1,1]$ die evenwijdig loopt aan het vlak $2x + 2y + z = 4$ met minimale afstand tot de oorsprong.

3) De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1-p \\ 0 & 2 & 1 \\ p-2 & p & 3 \end{bmatrix}$$

Bepaal alle reële waarden van p waarvoor A de eigenwaarde 1 heeft en bepaal eveneens de bijbehorende eigenruimtes.

4) Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 14 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 14 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 18 \end{aligned}$$

a) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel.

b) Bepaal van de verzameling der positieve oplossingen de extrème elementen.

c) Bepaal alle positieve oplossingen.

5) Een tennisvereniging heeft de beschikking gekregen over een nieuwe accomodatie en gaat haar ledenbestand uitbreiden. De leden worden onderverdeeld in senioren, junioren en pupillen. De sporttotalisator verleent voor de nieuwe leden een eenmalige bijdrage aan de vereniging en wel als volgt: ƒ 5,-- voor een pupil, ƒ 30,-- voor een junior en ƒ 10,-- voor een senior. Bij de opname van nieuwe leden worden echter de volgende restricties gemaakt:

- Evenals het huidige ledenbestand zal het nieuwe ledenbestand moeten bestaan uit 60% seniorleden en 40% jeugdleden (dit zijn junioren en pupillen).
- De vereniging verleent aan de nieuwe leden een reductie op de trainingsgelden: een juniorlid ƒ 6,--, een seniorlid ƒ 4,--. (Pupillen krijgen geen reductie). Het totale bedrag aan verleende reductie mag niet hoger zijn dan ƒ 840.--
- Voor elk nieuw jeugdlid ontvangt de ontspanningscommissie een extra bijdrage van de penningmeester: voor een juniorlid ƒ 6,-- en voor een pupil ƒ 2,--. De totale bijdrage van de penningmeester aan deze post mag maximaal ƒ 400,-- bedragen.
- Er mogen niet meer dan 80 pupillen en niet meer dan 150 senioren worden aangenomen. Het aantal nieuwe junioren moet minstens 15 zijn.

Hoeveel senioren, junioren en pupillen zal de tennisvereniging aannemen opdat de totale bijdrage van de sporttotalisator zo groot mogelijk zal zijn en hoe groot is deze bijdrage dan?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 37 op dinsdag 22 januari 1980.

1. Een kromme in $\mathbb{R}^2$ heeft als vergelijking

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 = 20 \ .$$

Breng de vergelijking in een eenvoudiger gedaante en bepaal de aard van deze kromme.

2. Bepaal de parametervoorstellingen van de rechten in $\mathbb{R}^3$ die door de oorsprong gaan en die gelijke hoeken maken met de drie vlakken

$$3x = 4y \ ,$$
$$y = 0 \ ,$$
$$z = 0 \ .$$

3. De lineaire afbeelding P van $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ is de loodrechte projectie van $\mathbb{R}^3$ op het vlak $2x - 2y - z = 0$.
D is een draaiing van $\mathbb{R}^3$ om de as $\underline{x} = \lambda(2,-2,-1)$ over $\pi/2$.

   a) Bepaal de matrix van P.
   b) Bepaal de eigenwaarde(n) en bijbehorende eigenvectoren van DP.

4. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \ , \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \ , \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 11 \ . \end{cases}$$

   a) Bewijs dat de verzameling van positieve oplossingen begrensd is.
   b) Schrijf de verzameling van positieve oplossingen als een convexe combinatie van extreme elementen.

5. Bepaal het maximum van de functie $f(x,y) = 5x - 4y + 4$ op de verzameling V gegeven door de volgende ongelijkheden:

$$x - y + 1 \geq 0 \ ,$$
$$3x + 2y - 6 \geq 0 \ ,$$
$$-3x - y + 9 \geq 0 \ ,$$
$$7x - 2y - 3 \geq 0 \ ,$$
$$x \geq 0 \ ,$$
$$y \geq 0 \ .$$