

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

COLLOQUIUM

GOLFVOORTPLANTING

Prof. Dr. C.J. Bouwkamp

Cursus 1958-1959

Inhoudsbeschrijving
Colloquium Golfvoortplanting
C.J. Bouwkamp
1958-1959

HOOFDSTUK I	
§.1	Electromagnetische straling van antennes 1
§.2	Energiebeschouwingen 4
§.3	Stationnaire straling 7
§.4	Berekening van het veld van gegeven stromen en ladingen 10
§.5	Electrische dipool 18
§.6	Magnetische dipool 23
§.7	De integraal-sinus en soortgelijke functies 26
§.8	Halve-golfantenne 30
§.9	Theorie van Hallén voor de lineaire antenne 41
HOOFDSTUK II	
§.1	Stralende multipolen 55
	Reeksontwikkelingen voor de radiale componenten 61
	Constructie van de Debije-potentialen 64
	Electrische en magnetische multipoolvelden 67
	Verband tussen vectorpotentiaal en Debije-potentialen 71
§.2	Integraalformules in de potentiaaltheorie 74
§.3	Integraalformules in de golftheorie 82
	Representatiestelling 86
§.4	Integraalformules in de Maxwell-theorie 91
§.5	Kirchhoff-theorie van electromagneitsche buiging 102
§.6	Scalaire buiging aan vlakke obstakels 107
	Sommerfeld's halfvlakprobleem opgelost met Wiener-Hopf 111
§.7	Golfvoortplanting tussen twee halfvlakken 119

Colloquium Golfvoortplanting

door Prof.dr.C.J.Bouwkamp

cursus 1958/1959

§.1 Elektromagnetische straling van antennes.

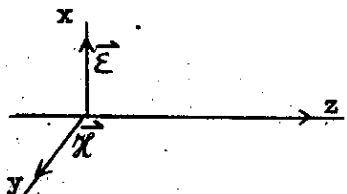
In verband met de ontwikkeling van de microgolftchniek is de antennetheorie na de oorlog een vruchtbaar arbeidsveld geworden. De theorie is een mengsel van wiskunde en fysica: De basis wordt gevormd door de vergelijkingen van Maxwell van het elektromagnetisch veld. In het volgende zal gebruik worden gemaakt van Gauss-eenheden. Indien nodig en nuttig zullen uiteindelijke resultaten in praktische eenheden worden gegeven.

Vergelijkingen van Maxwell in vrije ruimte (vacuum) :

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} &= \vec{0} & , \quad \text{div } \vec{\mathcal{E}} &= 0 \\ \text{rot } \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} &= \vec{0} & , \quad \text{div } \vec{\mathcal{H}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

($\vec{\mathcal{E}}$ is de elektrische, $\vec{\mathcal{H}}$ de magnetische vector).

Hieraan voldoen bijv. vlakke golven met fasesnelheid c



$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \cos(kz - \omega t) \\ \mathcal{H}_y &= \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Deze vlakke golven hebben hun bronnen in het oneindige. In de werkelijkheid zullen bronnen alleen in het eindige liggen. Daarom moeten de homogene vergelijkingen (1) worden uitgebreid tot de inhomogene vgl.:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} & , \quad \text{div } \vec{\mathcal{E}} &= 4\pi \rho \\ \text{rot } \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} &= \vec{0} & , \quad \text{div } \vec{\mathcal{H}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(\vec{j} is stroomdichtheid, ρ ladingsdichtheid).

Dit systeem van veldvergelijkingen is alleen dan consistent als we toevoegen de continuïteitsvergelijking.

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

d.w.z. \vec{J} en ρ moeten voldoen aan (3) doch kunnen verder willekeurig worden voorgeschreven.

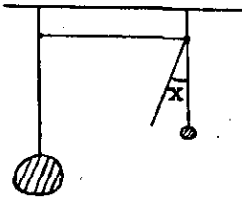
Opmerking: Maxwell's vergelijkingen zijn hier in differentiaalvorm geschreven. De integraalvorm is echter algemener. Bijv. in plaats van $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ moet men schrijven $\int (\vec{H} \cdot \vec{n}) dS = 0$ voor ieder enkelvoudig gesloten oppervlak. De twee vormen zijn niet equivalent. Voorlopig maakt het niets uit of we Maxwell's vergelijkingen in globale dan wel locale vorm geven.

Voor een eerste inleiding gaan we ons beperken tot het eenvoudigste medium dat homogeen en isotroop is, nl. vacuum. Dielectriciteitsconstante en permeabiliteit beide 1 ; $\epsilon = 1, \mu = 1$. Dit zullen we ook van de stroomgeleiders eisen. Deze onderscheiden zich van vacuum dat hun geleidingsvermogen van nul verschilt ($\sigma \neq 0$). Voor een perfecte geleider is $\sigma = \infty$. Antennes als "dielectric rods" vallen buiten deze beschouwingen.

Oorzaak, bronnen van elektromagnetische straling.

In het model dat we van onze antenne maken, en het is een goed model, zeggen we dat de oorzaak, de bron van de elektromagnetische straling, gegeven wordt door electriche stromen en corresponderende ladingen, respectievelijk gegeven door de vectorfunctie \vec{J} en de scalaire functie ρ . Afgezien van het onderlinge verband (3) kunnen deze functies willekeurig worden voorgeschreven.

Dat dit maar een model geeft, kan men aan een bekend mechanisch probleem illustreren. Beschouw twee zwak-gekoppelde slingers.



Is de massa van de ene veel groter dan de massa van de andere, dan gaat deze laatste slingeren volgens

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t,$$

waarin A en ω alleen van de zware slinger afhangen. Het rechterlid $A \cos \omega t$ beschrijft het effect van de buitenwereld op de lichte slinger. De variatie van x met t vertelt ons, omgekeerd, niets van de invloed van de lichte op de zware slinger. We hebben de lichte slinger geïsoleerd van de buitenwereld door invoering van de inhomogene term $A \cos \omega t$, en die als oorzaak opgevat van de trilling x .

Een analoge interpretatie geldt voor de inhomogene Maxwell-vergelijking (2). Als we \vec{J} en ρ beschouwen als oorzaak van het veld \vec{E} , \vec{H} , dan hebben we dit veld geïsoleerd van de rest van de wereld.

Dit nu is het standpunt van de elementaire antennetheorie.

Hierin worden \vec{J} en ρ als bronnen van het stralingsveld beschouwd, die à priori kunnen worden gegeven, en waarvan we niet vragen waar ze vandaan komen.

Het ene model kan een betere benadering tot de "werkelijkheid" zijn dan het andere. Voor de aangedreven slingers kunnen we een beter model maken: een systeem van twee gekoppelde slingers onder invloed van de zwaartekracht

Een dergelijke stap is ook mogelijk in antenne theorie. In deze theorie op hoger niveau berekent men de stromen en ladingen. Zij zijn dan niet langer de oorzaak of bron van de straling. Bronnen treden dan op in de vorm van elektromotorische krachten, bijv., vaak gelokaliseerd op een bepaalde plaats ('t voedingspunt). Stromen en ladingen in de antenne, plus veld, vormen dan één systeem. In de moderne theorie speelt dit model op hoger niveau een rol. Er blijven dan toch nog allerlei principiële moeilijkheden, die we niet kunnen oplossen. Ergens moeten we de stap van isoleren doen. We kunnen echter wel de moeilijkheden verschuiven. Zo kunnen we bij de slingers de aarde er in betrekken. In de antenne theorie kunnen we voedingslijn, de zendbuizen, de batterijen of de elektrische centrale er bij trekken, etc.! Daar wordt het misschien theoretisch wel bevredigender, maar toch ook zeer moeilijk van. We kunnen het hele natuurgebeuren toch niet in zijn geheel beschouwen!

Na deze filosofie, het résumé :

Voorlopig behandelen we de elementaire theorie. Hierbij zijn de rechterleden van (2) à priori gegeven functies van plaats en tijd, die voldoen aan (3).

Het directe probleem: bereken \vec{E} en \vec{H} uit \vec{J} en ρ .

Het omgekeerde: bereken \vec{J} en ρ als we het gedrag van \vec{E} en \vec{H} in een deel van de ruimte kennen. 't Laatste is moeilijker, en daarom beschouwen we voorlopig alleen het directe probleem.

We zullen zekere gladheidseisen aan onze functies stellen.

Bijv. \vec{J} en ρ bezitten continue partiële afgeleiden naar plaats en tijd van de eerste orde. Ook zullen gemengde afgeleiden $\partial^2/\partial x \partial t$ etc., bestaan en continu zijn. We zullen steeds onze eisen aanpassen aan de behoefte. Voorlopig is $E_1(x,y,z,t)$ de werkruimte. De vier scalaire functies

$\rho(x,y,z,t)$, $\vec{J}(x,y,z,t)$ kennen we in de hele E_1 en ze voldoen aan (3).

Dan is het geheel van Maxwell's vergelijking een simultaan systeem van inhomogene, lineaire, partiële differentiaalvergelijking van de eerste orde. Daarvan moeten we de oplossing(en) bestuderen. Het is duidelijk dat we een veelheid van initiaal- en randwaardeproblemen kunnen formuleren. Te veel om op te noemen, en dus teveel om hier te behandelen. We zullen maar een heel beperkte keuze doen uit deze hoeveelheid van problematiek.

§.2 Energiebeschouwingen.

Een zendantenne straalt elektromagnetische energie uit, die moet worden geleverd door de generator. Hoe berekenen we die energie? $\vec{J} = (\vec{E} \times \vec{H})$
Dit kunnen we doen door integratie van de Poynting vector $\vec{J} = (\vec{E} \times \vec{H})$ over de bol in het oneindige. Minder bekend is de methode van integratie van Poynting vector over het oppervlak van de antenne. Deze laatste methode geeft ons meer informatie, omdat ze ook de hoeveelheid energie geeft die tussen antenne en veld fluctueert (hierbij denken we vooral aan stationnaire straling, met een constante frequentie). Deze fysica gaan we mathematisch vertalen.

Uit (2) vinden we door de eerste vergelijking scalair met \vec{E} en de tweede scalair met \vec{H} te vermenigvuldigen en af te trekken:

$$-\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2). \quad (4)$$

Zij S een gesloten oppervlak dat alle bronnen \vec{J} en ρ omsluit (buiten S is $\vec{J} = \vec{0}$, $\rho = 0$). Zij V volume binnen S. Alles glad genoeg.
Pas Gauss toe :

$$-\int \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \, dV + \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS \quad (5)$$

Hierbij is \vec{n} de eenheidsnormaal naar buiten van S.
Fysisch wordt (5) als volgt geïnterpreteerd :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \, dV \right\} = \text{toename per tijdseenheid van energie opgepot binnen S.}$$

$$\frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS = \text{energieflux door S naar buiten.}$$

Laten we speciaal beschouwen: zuiver periodieke (in t) verschijnselen.
Als alle aanloopverschijnselen weggedempt zijn, is toestand stationnair.
Dan is het tijdsgemiddelde van de eerste term nul.

$$\text{Immers } \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t} \, dt = \frac{f(T) - f(0)}{T} = 0$$

als T de periode van het verschijnsel is. Geven we tijdsgemiddelde door een horizontale streep aan, dan geldt dus

$$-\int \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV = \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS \quad (6)$$

Duidelijk: Linkerlid van (6) is onafhankelijk van de keuze van S zolang S maar alle stromen omvat. Dus is ook het rechterlid daar onafhankelijk van S. Dus: de gemiddelde energieflux door een gesloten oppervlak dat de antenne omsluit is bij stationnaire straling onafhankelijk van S.

Deze grootheid kunnen we dan eventueel berekenen door voor S de oneindige bol te nemen (dan kunnen we met asymptotiek van het veld in het oneindige volstaan).

In plaats van de Poynting vector te integreren over de bol in het oneindige, kunnen we, op grond van (6), evengoed $-\int \vec{E} \cdot \vec{J} dV$ berekenen, als we het gemiddelde uitgestraalde vermogen van de antenne willen bepalen. De integraal $-\int \vec{E} \cdot \vec{J} dV$, die we dan toch eerst moeten berekenen (voordat we het tijdgemiddelde nemen), heeft echter zelf reeds technische betekenis, ook voor niet-periodieke verschijnselen.

Neem een antenne met materiaal van geleidsvermogen σ . Dan is het verband tussen stroomdichtheid, elektrische vector, en geïnduceerde elektromotorische krachten (\vec{E}_i) in de ruimte binnen de antenne:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i) \quad \text{of} \quad -\vec{E} = -\frac{\vec{J}}{\sigma} + \vec{E}_i \quad (7)$$

Dan wordt (5)

$$\begin{aligned} \int \vec{E}_i \cdot \vec{J} dV &= \int \frac{J^2}{\sigma} dV + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) dV + \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS \\ &= \int \frac{J^2}{\sigma} dV - \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV \end{aligned} \quad (8)$$

Het linkerlid is het vermogen geleverd door de elektromotorische kracht \vec{E}_i aan de antenne plus het stralingsveld. De term $\int \frac{J^2}{\sigma} dV$ geeft de warmteverliezen in het antennemateriaal. De term

$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) dV$ geeft de toename per tijdseenheid van de electro-magnetische veldenergie in de antenne plus verdere ruimte binnen S.

Tenslotte geeft $\frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS$ de flux door het oppervlak S naar buiten.

Bovenstaande energiebalans schrijven we als volgt

$$\mathcal{P}_i = \int \frac{J^2}{\sigma} dV + \mathcal{P}_r$$

met $\mathcal{P}_i = \int \vec{E}_i \cdot \vec{J} dV =$ geleverd vermogen (door de generator) (i = induced)

$\mathcal{P}_r = -\int \vec{E} \cdot \vec{J} dV =$ door generator "uitgestraald" vermogen (r = radiated)

Op grond van het voorafgaande hangt \mathcal{P}_r niet van S af, als S maar de antenne omsluit.

Kies nu voor S het oppervlak van de antenne zelf. Dan bestaat \mathcal{P}_r uit twee delen :

1°) $\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) dV$ geïntegreerd over het antenne-volume

2°) De flux door het antenne oppervlak volgens de Poynting vector

$$\frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS. \quad (= \mathcal{P}_r).$$

antenne
opp.

Het eerste deel is verantwoordelijk voor de elektromagnetische energie opbouw in het antenne materiaal. Het tweede deel is het eigenlijke, nuttige, door de antenne uitgestraalde vermogen. Het tweede beschrijft de pulsatie van energie door het antenne oppervlak. De som van 1° en 2° is de pulsatie van energie tussen generator aan de ene kant en antenne materiaal plus stralingsveld buiten antenne aan de andere kant.

In praktische gevallen speelt bijdrage 1°) geen rol, omdat de velden binnen de antenne verwaarloosbaar klein zijn (in oneindig goed geleidend materiaal is geen veld aanwezig). Dan is \mathcal{P}_r dus in zeer goede benadering ook het nuttig uitgestraalde vermogen \mathcal{P}_r . Verder kunnen we ook vaak de

Joule-verliezen $\int \frac{J^2}{\sigma} dV$ in de antenne buiten beschouwing laten.

Dan is dus in deze benadering

$$\mathcal{P}_i \approx \mathcal{P}_r \approx \mathcal{P} = \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS$$

antenne
opp.

In elk geval, als we $-\int \vec{E} \cdot \vec{J} dV$ berekenen, vinden we rigoureus het vermogen door de generator te leveren om op ieder ogenblik het veld in stand te houden, zonder dat we op details van de antenne-voeding behoeven in te gaan.

Résumé : Het vermogen door de generator op te leveren, opdat de stromen, ladingen, en 't veld stationnair zijn, moet voldoen aan

$$\mathcal{P} = - \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (9)$$

Dit geldt op ieder tijdstip. Hier is \vec{E} het elektrisch veld afkomstig van de gegeven stroom en lading. Hoe we \vec{E} berekenen uit \vec{J} en ρ is dan van latere zorg. En meteen is \mathcal{P} een zeer goede benadering voor het door de antenne uitgestraald vermogen.

§.3 Stationnaire straling. Equivalente antenne-impedantie.

De algemene beschouwingen golden voor willekeurige tijdsfuncties. Nu gaan we specialiseren tot sinusvormige tijd-functies. Aanloop verschijnselen worden genegeerd.

We nemen aan dat voor $-\infty < t < \infty$ alle veldvectoren, ladingen en stromen variëren met de tijd als $\exp(j\omega t)$, waarin $\omega/2\pi$ de frequentie en j de imaginaire eenheid. Het is bekend dat we altijd een complexe tijdfactor invoeren, en niet $\sin(\omega t)$ of $\cos(\omega t)$. Dit mag omdat Maxwell's vergelijkingen lineair zijn en dus superpositie kan worden toegepast. Aan het einde van onze berekeningen gaan we over op reële grootheden door eenvoudig het reële deel van de oplossing te nemen. Alleen bij energieberekeningen moeten we oppassen, omdat energie kwadratisch in de veldvectoren is!

In 't algemeen zullen de stromen niet overal in fase zijn in de ruimte.

Dus stel

$$\vec{J} = \text{Re} \{ \vec{I} e^{j\omega t} \} = \vec{I}_1 \cos \omega t - \vec{I}_2 \sin \omega t \quad (10)$$

waarbij de complexe stroomdichtheid $\vec{I} = \vec{I}_1 + j \vec{I}_2$ is en \vec{I}_1 en \vec{I}_2 reële functies van de plaatscoördinaten, onafhankelijk van de tijd, zijn.

Analoog voor de veldvectoren:

$$\vec{E} = \text{Re} \{ \vec{E} e^{j\omega t} \} = \vec{E}_1 \cos \omega t - \vec{E}_2 \sin \omega t \quad (11)$$

waarin $\vec{E} = \vec{E}_1 + j \vec{E}_2$.

N.B.: $\vec{I}_2 = \vec{0}$ impliceert niet $\vec{E}_2 = \vec{0}$!

Substitueer nu (10) en (11) in (9). Dan komt voor de energievergelijking:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & -\frac{1}{2} \int (\vec{E}_2 \cdot \vec{I}_2 + \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_1) dV \\ & + \frac{1}{2} \cos 2\omega t \int (\vec{E}_2 \cdot \vec{I}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_1) dV \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \int (\vec{E}_2 \cdot \vec{I}_1 + \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_2) dV. \end{aligned} \quad (12)$$

Bij het middelen over de tijd geeft alleen de eerste term een bijdrage ; dus

$$\bar{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2} \int (\vec{E}_1 \cdot \vec{I}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{I}_2) dV,$$

of, in complexe notatie :

$$\bar{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2} \text{Re} \int \vec{E} \cdot \vec{I}^* dV, \quad (13)$$

waarin * complex-geconjugeerde aangeeft. We mogen dit sterretje in (13) verschuiven van \vec{I} naar \vec{E} .

De ingenieur is gewend om de antenne door een equivalente "black box" te vervangen: een kastje met één paar klemmen. Gaat een wisselstroom $A \cos \omega t$ door een weerstand R , dan is de energiedissipatie gemiddeld over de tijd $\frac{1}{2} R A^2$. Dit suggereert dat de antenne met straling (13) als een ohmse belasting van de voedingslijn wordt beschouwd met weerstand

$$R = - \frac{1}{|A|^2} \operatorname{Re} \int \vec{E} \cdot \vec{I}^* dV \quad (14)$$

betrokken op de referentie stroom A (complexe amplitude). R noemt men dan de (equivalente) stralingsweerstand van de antenne. A mag willekeurig worden gekozen. Vaak neemt men $A = 1$. In andere gevallen is een andere keuze meer fysisch verantwoord. Is er bij de antenne maar één voedingslijn, dan ligt het voor de hand om voor A de ingangsstroom te nemen. Dan is R ook precies het weerstandsdeel van de belasting van de antenne t.o.v. voedingslijn.

In het algemeen is zo'n belasting niet alleen resistief, maar ook reactief. D.w.z. de antennebelasting is niet zuiver-ohms, maar heeft een capacitief of een inductief gedeelte. De impedantie is dan een complex getal : $Z = R + j X$.

Deze opmerking suggereert dat we de antenne kunnen proberen op te vatten als een impedantie

$$Z = - \frac{1}{|A|^2} \int \vec{E} \cdot \vec{I}^* dV \quad (15)$$

Inderdaad is dan $\operatorname{Re} Z = R$ met R uit (14).

Nadere analyse leert dat zonder meer het imaginaire deel van Z geen fysische betekenis heeft in de gezochte zin. Met een beetje fysisch inzicht is dit wel duidelijk. Als de antenne één voedingsklem heeft, dan schijnt het wel te gaan. Heeft men echter een gecompliceerd voedings-systeem met meerdere voedingspunten, dan heeft het imaginaire deel van (15) blijkbaar geen zin.

Bovendien, als we willekeurige stromen postulieren, dan moeten we een systeem van geïnduceerde \mathcal{EMK} 's \vec{E}_i invoeren om de stationnaire toestand te laten bestaan, en het zou al heel toevallig zijn als we dit systeem van verdeelde \vec{E}_i 's zouden kunnen vervangen door één "slice generator" met "reference current" A .

We kunnen bovenstaande opmerkingen mathematisch illustreren. Neem referentie stroom door de gezochte equivalente tweepool

$$\operatorname{Re} \{ A e^{j\omega t} \}, \quad A = A_1 + jA_2 \quad (16)$$

Corresponderende spanning over de klemmen van de tweepool zij :

$$\operatorname{Re} \{ U e^{j\omega t} \}, \quad U = U_1 + jU_2 \quad (17)$$

Het geconsumeerde vermogen door de tweepool is (moment opname)

$$p = \frac{1}{2} (U_2 A_2 + U_1 A_1) - \frac{1}{2} (U_2 A_2 - U_1 A_1) \cos 2\omega t - \frac{1}{2} (U_2 A_1 + U_1 A_2) \sin 2\omega t \quad (18)$$

Wil de tweepool equivalent zijn met de antenne, dan moeten corresponderende termen in (12) en (18) identiek zijn. Dit geeft de volgende relaties :

$$\left. \begin{aligned} U_2 A_2 + U_1 A_1 &= - \int (\vec{E}_2 \cdot \vec{I}_2 + \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_1) dV \\ U_2 A_2 - U_1 A_1 &= - \int (\vec{E}_2 \cdot \vec{I}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_1) dV \\ U_2 A_1 + U_1 A_2 &= - \int (\vec{E}_2 \cdot \vec{I}_1 + \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_2) dV \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Optellen en aftrekken van de eerste twee vergelijkingen geeft :

$$U_1 A_1 = - \int \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_1 dV, \quad U_2 A_2 = - \int \vec{E}_2 \cdot \vec{I}_2 dV \quad (20)$$

Deze vergelijkingen bepalen U_1 en U_2 ondubbelzinnig, bij gegeven A_1 en A_2 . Dan is dus (19) overbepaald. De constanten A_1 en A_2 , en de volgens (20) berekende U_1 en U_2 moeten nog aan de 3e vergelijking van (19) voldoen. Elimineert men U_1 en U_2 , dan vindt men een noodzakelijke voorwaarde voor de constanten A_1 en A_2 , nl.

$$A_1^2 \int \vec{E}_2 \cdot \vec{I}_2 dV + A_2^2 \int \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_1 dV = A_1 A_2 \int (\vec{E}_2 \cdot \vec{I}_1 + \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_2) dV \quad (21)$$

Deze voorwaarde kunnen we in een elegante vorm brengen door determinanten te gebruiken. Namelijk equivalent met (21) is

$$\int \begin{vmatrix} A & A^* \\ \vec{E} & \vec{E}^* \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & A^* \\ \vec{I} & \vec{I}^* \end{vmatrix} dV = 0 \quad (22)$$

Eventueel mag men in (22) de stroom A vervangen door de spanning U ; deze twee grootheden komen symmetrisch voor in vergelijking (19) !

Voor willekeurig aangenomen $\vec{I} = \vec{I}_1 + j\vec{I}_2$, en à priori gekozen

$A = A_1 + jA_2$, zal (22) in 't algemeen niet zijn vervuld. Dit impliceert de onmogelijkheid een spanning $U = U_1 + jU_2$ te vinden.

Dus is het in 't algemeen onmogelijk een equivalente stralingsimpedantie voor de antenne te geven.

Er is één belangrijk speciaal geval waarbij (21) of (22) automatisch is vervuld. Nl: als de stromen in de antenne overal dezelfde fase hebben: d.w.z. de vectoren \vec{I}_1 en \vec{I}_2 zijn overal evenwijdig met een constante amplitude verhouding : $\vec{I}_2 = C \vec{I}_1$, met C een scalair onafhankelijk van de plaatscoördinaten. Dan nemen we natuurlijk ook A niet geheel willekeurig, maar $A_2 = C A_1$ met dezelfde C .

Men verifieert gemakkelijk dat (21), beter (22) is vervuld.

In dat bijzondere geval volgt uit (20)

$$U_1 = - \frac{1}{A_1} \int \vec{E}_1 \cdot \vec{I}_1 dV, \quad U_2 = - \frac{1}{A_1} \int \vec{E}_2 \cdot \vec{I}_1 dV$$

en dus

$$\begin{aligned} U = U_1 + jU_2 &= - \frac{1}{A_1} \int \vec{E} \cdot \vec{I}_1 dV = - \frac{1}{(A_1 A^*)} (A_1 - jA_2) \int \vec{E} \cdot \vec{I}_1 dV \\ &= - \frac{1}{A^*} (1 - jC) \int \vec{E} \cdot \vec{I}_1 dV = - (A^*)^{-1} \int \vec{E} \cdot (\vec{I}_1 - j\vec{I}_2) dV \\ &= - \frac{1}{A^*} \int \vec{E} \cdot \vec{I}^* dV. \end{aligned}$$

De impedantie van de equivalente tweepool wordt dus

$$Z = \frac{U}{I} = - \frac{1}{|A|^2} \int \vec{E} \cdot \vec{I}^* dV,$$

welke vergelijking identiek is met (15).

Opmerking : Nu mogen we het sterretje niet van \vec{I} naar \vec{E} verplaatsen !

§.4 Berekening van het veld van gegeven stromen en ladingen.

We gaan het elektromagnetische veld van de antenne berekenen bij gegeven stroom- en ladingsverdeling. Zoals reeds gezegd: we onderstellen dat de dielectrische en magnetische eigenschappen van het antennemateriaal identiek zijn met die van de lege ruimte. Tijdsvariatie niet noodzakelijk zuiver-harmonisch.

We schrijven Maxwell's vergelijkingen in de volgorde :

$$\text{div } \vec{\mathcal{H}} = 0 \quad (23)$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = \vec{0} \quad (24)$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{E}} = 4 \pi \rho \quad (25)$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} \quad (26)$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (27)$$

De vector $\vec{\mathcal{J}}$ en de scalair ρ zijn bekende functies van plaats en tijd, die aan zekere gladheidseisen voldoen. In het oneindige zijn $\vec{\mathcal{J}}$ en ρ gelijk aan nul, voor alle tijden; verder totaal willekeurig, behalve dat ze voldoen aan (27).

Een bekende methode om vergelijkingen (23) - (27) op te lossen gaat met behulp van scalaire en vectoriele potentialen. Dit zijn hulpgrootheden, die misschien niet zo'n fysische betekenis hebben als de reeds genoemde scalairen en vectoren.

Uit de vectoranalyse is bekend dat de divergentie van een rotatie van een vector identiek nul is. Daarom suggereert (23) dat \vec{H} worde voorgesteld door middel van een hulpvector \vec{A} met behulp van

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (28)$$

Laten we aannemen, dat we een vector \vec{A} kunnen vinden zodanig dat (28) geldt. Dan substitueren we (28) in (24) :

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (29)$$

Anderzijds weten we dat de rotatie van een gradient van een scalar identiek nul is. We vermoeden dus dat de uitdrukking in (29) tussen haakjes gelijk is aan de gradient van een of andere scalar, - Φ

We stellen dus $\vec{E} = - \text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. (30)

Wat de functies Φ en \vec{A} ook mogen zijn (natuurlijk zullen ze aan zekere gladheidseigenschappen moeten voldoen), het is zeker dat de functies \vec{H} en \vec{E} gedefinieerd door (28) en (30) aan de eerste twee Maxwell vergelijkingen (23) en (24) voldoen.

Het is dus nu onze taak om Φ en \vec{A} (totaal 4 scalaire functies) zó te bepalen dat de functies (28) en (29) ook nog aan de twee andere vergelijkingen (25) en (26) voldoen. Daar deze laatste vergelijkingen inhomogeen zijn, zal deze gedachtengang tenslotte leiden tot expliciete uitdrukkingen voor Φ en \vec{A} in termen van de stromen en ladingen.

Substitueer (30) in (25) :

$$4\pi\rho = \text{div } \vec{E} = - \text{div grad } \Phi - \text{div} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}).$$

Hierbij is Δ de bekende drie-dimensionale Laplace-operator uit de potentiaaltheorie. De laatste vergelijking kan aldus worden geschreven

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right). \quad (31)$$

Vervolgens substitueren we (28) en (30) in (26). Dan komt er

$$\text{rot rot } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

en na een eenvoudige transformatie

$$\text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).$$

Nu is de vector-operatie "grad div - rot rot" equivalent met de Laplace operator Δ dan en slechts dan als de vector waarop wordt geopereerd in rechthoekige componenten is geschreven.

Met andere woorden $\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$ is een vector met orthogonaal-cartesiaanse componenten $\Delta(A_x)$, $\Delta(A_y)$, $\Delta(A_z)$.

In die zin heeft men dus

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (32)$$

De laatste formule is een systeem van drie scalaire vergelijkingen van hetzelfde type als (31).

Het is duidelijk dat de functies Φ en \vec{A} de veldgrootheden \vec{E} en \vec{H} ondubbelzinnig bepalen. Het omgekeerde is niet het geval. Als er überhaupt een systeem Φ, \vec{A} mogelijk is (dat moeten we nog laten zien) dan is het zeker niet eenduidig bepaald. Bijvoorbeeld: bij \vec{A} mogen we optellen de gradient van een willekeurige scalair, zonder dat \vec{H} verandert. Als \vec{A} aldus is gewijzigd, dan is \vec{E} ook veranderd ingevolge (30). Maar deze laatste verandering kan gemakkelijk worden geneutraliseerd door een geschikte verandering van Φ , welke verandering de \vec{H} niet beïnvloedt, omdat \vec{H} niet van Φ afhangt.

Anders gezegd: rot \vec{A} is vastgelegd, maar div \vec{A} kunnen wij nog kiezen. Een voor de hand liggende mogelijkheid is de keuze

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (33)$$

Doen we dit, dan gaat het systeem van differentiaalvergelijkingen (31) en (32) over in het formeel ongekoppelde systeem

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = - 4\pi \rho \quad (34)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (35)$$

Hier staan 4 scalaire inhomogene golfvergelijkingen.

Het is nu zaak om zekere particuliere oplossingen van (34) en (35) te construeren. We kunnen ons beperken tot (34).

De bewering nu is dat een oplossing van (34) wordt gegeven door

$$\Phi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (36)$$

waarin

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

de afstand is tussen veldpunt (x, y, z) en bronpunt (ξ, η, ζ) .

De functie Φ gedefinieerd door (36) noemt men de geretardeerde scalaire potentiaal. Het ladingselement op de plaats ξ, η, ζ doet zich niet instantaan gelden in de potentiaal op de plaats x, y, z . Er is een tijd nodig gelijk aan die waarin een signaal met snelheid c van bronpunt naar veldpunt kan komen.

Het is niet moeilijk, plausibel te maken dat Φ gedefinieerd door (36) aan vergelijking (34) voldoet, als we het corresponderende resultaat voor $c = \infty$ uit de gewone potentiaaltheorie bekend onderstellen. Verdeel de ruimte in twee stukken, S en S' , waarin S een klein bolletje is met straal ϵ rond het veldpunt x, y, z , en S' de rest van de ruimte. Binnen S ontwikkelen we de geretardeerde ladingsdichtheid naar machten van r :

$$\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}) = \rho - \frac{r}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \dots \quad (r \leq \epsilon)$$

waar de functie ρ in het rechterlid ongeretardeerd is: $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta, t)$.

Er volgt

$$\Delta \int_S \rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}) r^{-1} d\xi d\eta d\zeta =$$

$$\Delta \int_S \rho r^{-1} dS + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_S \rho \Delta r dS + \dots$$

$$= -4\pi \rho(x, y, z, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_S \rho r^{-1} dS + \dots$$

$$= -4\pi \rho + O(\epsilon^2).$$

Wat betreft de integraal voor de rest S' , merken we op:

$\Delta \phi = (1/r) (d^2/dr^2) (r\phi)$ voor elke functie ϕ die alleen van r afhangt. Dit toepassen geeft:

$$\Delta \int_{S'} \rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}) r^{-1} d\xi d\eta d\zeta = \int_{S'} r^{-1} (\partial^2/\partial r^2) \rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}) dS'$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{S'} r^{-1} \rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}) dS' = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_S r^{-1} \rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}) dS \right\}$$

De laatst opgeschreven integraal is $O(\epsilon^2)$. Optellen van de twee resultaten

geeft $\Delta \Phi = -4\pi \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + O(\epsilon^2)$. En voor $\epsilon \rightarrow 0$ vinden we (34).

Hiermee is het "bewijs" geleverd dat de geretardeerde potentiaal gegeven door (36) oplossing is van de golfvergelijking (34). Waarschijnlijk is het voldoende, voor het geven van een rigoreus mathematisch bewijs, te onderstellen dat $\rho(\xi, \eta, \zeta, t)$ als functie van t analytisch en, als functie van ξ, η, ζ , Hölder-continu is.

Natuurlijk is de overeenkomstige oplossing van (35) gegeven door

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\xi,\eta,\zeta,t - \frac{r}{c})}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (37).$$

Résumé: De geretardeerde scalaire potentiaal Φ gedefinieerd in termen van ρ door vergelijking (36), en de geretardeerde vector-potentiaal \vec{A} gedefinieerd door (37) in termen van \vec{J} , voldoen aan de corresponderende inhomogene golfvergelijkingen (34) en (35).

En ze doen zulks bij willekeurig voorgeschreven ρ en \vec{J} . Het is in dit opzicht niet nodig dat tussen ρ en \vec{J} een verband bestaat, zoals b.v. (27).

Het is vaak stilzwijgend aangenomen dat deze functies Φ en \vec{A} ook de vergelijking (33) bevredigen, maar dat zulks het geval is, moet expliciet worden geverifieerd! Inderdaad, als het zou blijken dat niet aan (33) wordt voldaan, zou ook het hele proces hebben gefaald.

We zullen dus nu aantonen dat de functies Φ en \vec{A} gedefinieerd door (36) en (37) ook aan (33) voldoen. We voeren de volgende notatie in:

Stel we hebben $f(x,y,z,t)$ gegeven, dan bedoelen we met $[f]$ de functie $F(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)$ gedefinieerd door

$$[f] = f(x,y,z,t - \frac{r}{c}), \text{ met } r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Verder geven we met een subscript x , respectievelijk ξ , aan dat we differentiëren naar de veldpuntscoördinaten, respectievelijk de bronpuntscoördinaten.

Met behulp van $\text{div}(\phi \vec{a}) = \phi \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad} \phi$ krijgen we

$$\text{div}_x \left[\frac{\vec{J}}{r} \right] = \frac{1}{r} \text{div}_x [\vec{J}] + [\vec{J}] \cdot \text{grad}_x \frac{1}{r}$$

$$\text{div}_\xi \left[\frac{\vec{J}}{r} \right] = \frac{1}{r} \text{div}_\xi [\vec{J}] + [\vec{J}] \cdot \text{grad}_\xi \frac{1}{r}.$$

Door te bedenken dat

$$\text{grad}_x \frac{1}{r} = - \text{grad}_\xi \frac{1}{r},$$

vinden we door optelling van bovenstaande twee vergelijkingen

$$\text{div}_x \left[\frac{\vec{J}}{r} \right] + \text{div}_\xi \left[\frac{\vec{J}}{r} \right] = \frac{1}{r} \text{div}_x [\vec{J}] + \frac{1}{r} \text{div}_\xi [\vec{J}]. \quad (38)$$

Verder vinden we, voor iedere vector \vec{J} ,

$$\text{div} \vec{J}(x,y,z,t - \frac{r}{c}) = \left\{ \text{div} \vec{J}(x,y,z,t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot \text{grad} r \right\}_{\tau = t - \frac{r}{c}}$$

of in onze haakjes-notatie:

$$\text{div} [\vec{J}] = \left[\text{div} \vec{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot \text{grad} r \right].$$

De laatste vergelijking passen we toe op de x en ξ coördinaten.
 Als we ze dan optellen komt er

$$\operatorname{div}_x [\vec{Y}] + \operatorname{div}_\xi [\vec{Y}] = [\operatorname{div}_x \vec{Y} + \operatorname{div}_\xi \vec{Y}]$$

Als we dit resultaat combineren met (38) vinden we

$$\operatorname{div}_x \frac{[\vec{Y}]}{r} + \operatorname{div}_\xi \frac{[\vec{Y}]}{r} = \frac{1}{r} [\operatorname{div}_x \vec{Y} + \operatorname{div}_\xi \vec{Y}] = \frac{1}{r} [\operatorname{div}_\xi \vec{Y}]$$

omdat in ons geval de niet-geretardeerde vector $\vec{Y} = \vec{Y}(\xi, \eta, \zeta, t)$ niet van x, y, z afhangt.

De laatste vergelijking integreren we over de hele ruimte ξ, η, ζ .

Dus

$$\operatorname{div}_x \int \frac{[\vec{Y}]}{r} d\xi d\eta d\zeta + \int \operatorname{div}_\xi \frac{[\vec{Y}]}{r} d\xi d\eta d\zeta = \int \frac{[\operatorname{div}_\xi \vec{Y}]}{r} d\xi d\eta d\zeta.$$

Met behulp van Gauss kan de tweede volume-integraal in een oppervlakte-integraal over de bol in het oneindige worden getransformeerd.

Omdat \vec{Y} nul is in het oneindige, is deze oppervlakte-integraal nul.
 Delen door c geeft dan

$$\frac{1}{c} \operatorname{div}_x \int \frac{[\vec{Y}]}{r} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{c} \int \frac{[\operatorname{div}_\xi \vec{Y}]}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (39)$$

Dit resultaat is gemakkelijk te onthouden: De operator "div", eerst te nemen met betrekking tot de veldpuntscoördinaten (x, y, z) , kan door het integraalteken en door de retardatie-haakjes worden geschoven als dan tegelijkertijd "div" gaat werken op de bronpuntscoördinaten (ξ, η, ζ) , terwijl in dit hele proces de factor $\frac{1}{r}$ als constant wordt beschouwd.

Deze regel gaat ook op voor de operator $\partial/\partial t$.

Inderdaad is de te bewijzen relatie bijna triviaal :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{[\rho]}{r} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{c} \int \frac{[\frac{\partial \rho}{\partial t}]}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (40)$$

Tellen we (39) en (40) bij elkaar op, en maken we gebruik van de definities (36) en (37), dan krijgen we

$$\operatorname{div}_x \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{c} \int \frac{[\operatorname{div}_\xi \vec{Y} + \frac{\partial \rho}{\partial t}]}{r} d\xi d\eta d\zeta.$$

In werkelijkheid is $\operatorname{div}_\xi \vec{Y} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ op grond van (27). Dus is het linkerlid ook nul. Daarmee is bewezen dat de uitdrukkingen (36) en (37) voor Φ en \vec{A} inderdaad aan de voorwaarde (33) voldoen.

Hiermee is bewezen dat het mogelijk is het elektromagnetische veld uit te drukken in zijn bronnen, nl. door middel van

$$\vec{\mathcal{E}} = - \text{grad} \int \frac{[\rho]}{r} dV - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{[\vec{\mathcal{J}}]}{r} dV \quad (41)$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{c} \text{rot} \int \frac{[\vec{\mathcal{J}}]}{r} dV. \quad (42)$$

Om eerlijk te zijn: bewezen is dat $\vec{\mathcal{E}}$ en $\vec{\mathcal{H}}$ gedefinieerd door de rechterleden (41) en (42) een particuliere oplossing van Maxwell's vergelijkingen vormen. Het is niet de algemene oplossing. Ook de overeenkomstige uitdrukkingen met geavanceerde potentialen ($t - \frac{r}{c}$ overall vervangen door $t + \frac{r}{c}$) geven een oplossing. De algemene oplossing van Maxwell's vergelijkingen wordt natuurlijk verkregen door bij (41) en (42) op te tellen de algemene oplossing van de homogene Maxwell vergelijkingen (met $\vec{\mathcal{J}}$ en ρ nul).

Nu komt echter de fysica om de hoek kijken. De fysicus erkent alleen (41) en (42) als het werkelijke elektromagnetische veld afkomstig van de gegeven bronnen $\vec{\mathcal{J}}$ en ρ . Deze uitdrukkingen geven het gewenste gedrag in het oneindige van de E_4 -ruimte; ze voldoen aan het causaliteitsprincipe

Deze discussie van scalaire en vectoriele potentialen zullen we besluiten met drie opmerkingen.

Eerste opmerking: De voorafgaande beschouwingen zijn in essentie overbekend. Alleen de logische manier van afleiding wijkt af van de conventie in leerboeken. We wijzen nogmaals op het belang van het expliciet

verifiëren van voorwaarde (33) door onze Φ en $\vec{\mathcal{A}}$. In zekere publikaties over antennes is dat over het hoofd gezien. Het daar berekende veld voldeed niet aan Maxwell. Er werd langs de antenne een zekere stroomverdeling aangenomen, en dan werd met (27) de overeenkomstige ladingsverdeling berekend. Vergeten echter werden de puntladingen aan de einden van de antenne (die daar optreden als de stroom aan de uiteinden niet nul is - base of toploaded antennes). Een eenvoudig voorbeeld: rechte draad met constante stroomverdeling. Dan is $\rho = 0$ langs de draad (afgezien van statische lading). Toch mogen we niet $\rho = 0$ zetten, omdat ρ de som is van twee deltafuncties. De stroom springt abrupt op nul, en de afgeleide is daar dus een δ -functie.

Tweede opmerking: In vele leerboeken redeneert men aldus: " $\text{div} \vec{\mathcal{H}} = 0$, dus is het mogelijk $\vec{\mathcal{A}}$ te vinden met $\vec{\mathcal{H}} = \text{rot} \vec{\mathcal{A}}$." Ik heb daartegen bezwaar, vooral tegen het "dus".

Beschouw de ruimte tussen twee concentrische bollen, en definieer daar de vector $\vec{v} = - \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$, waarbij r de afstand is tot het middelpunt der bollen. In die ruimte geldt vanzelfsprekend $\text{rot} \vec{v} = \vec{0}$. Maar ook geldt daar $\text{div} \vec{v} = 0$, omdat $\frac{1}{r}$ oplossing is van de potentiaalvergelijking voor $r \neq 0$.

Men kan nu eenvoudig bewijzen dat er in de beschouwde ruimte geen enkele vector \vec{a} te vinden is, zodanig dat $\vec{v} = \text{rot } \vec{a}$ geldt. Stel het was wél zo. Pas dan Stokes toe op een gesloten enkelvoudige kromme liggende op een bol, concentrisch met de twee gegeven bollen, in de beschouwde ruimte. Op de "bovenhelft" van de bol toegepast geeft Stokes

$$\int (\text{rot } \vec{a}) \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \int (\vec{a} \cdot \vec{s}_1) ds_1$$

op de onderste helft toegepast :

$$\int (\text{rot } \vec{a}) \cdot \vec{n}_2 dS_2 = \int (\vec{a} \cdot \vec{s}_2) ds_2$$

waarbij in beide gevallen op de juiste orientatie van (\vec{n}_1, \vec{s}_1) , resp. (\vec{n}_2, \vec{s}_2) moet worden gelet. Nemen we \vec{n}_1 en \vec{n}_2 beide naar buiten, dan is $\vec{s}_1 = -\vec{s}_2$. Tellen we de twee vergelijkingen op dan resulteert dus:

$$\int (\text{rot } \vec{a}) \cdot \vec{n} dS = 0,$$

waarbij over de gehele bol wordt geïntegreerd. In het voorbeeld zou $\vec{v} = \text{rot } \vec{a} = -\text{grad } \frac{1}{r}$ moeten zijn, maar

$$\begin{aligned} \int (\text{rot } \vec{a}) \cdot \vec{n} dS &= \int (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = -\int \vec{n} \cdot \text{grad } \frac{1}{r} dS = \int \vec{n} \cdot \frac{\vec{n}}{r^2} dS \\ &= \int \frac{dS}{r^2} \neq 0. \end{aligned}$$

Dus is \vec{v} niet als rot van een vector \vec{a} te schrijven.

Men kan inzien dat $\int \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$ (voor elk gesloten oppervlak) ook voldoende is opdat \vec{v} met $\text{div } \vec{v} = 0$ kan worden geschreven als $\vec{v} = \text{rot } \vec{a}$.

Neemt men de globale vorm van (23), te weten $\iint \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{n} dS = 0$ voor elk gesloten oppervlak, dan is het dus steeds mogelijk $\vec{\mathcal{H}}$ te schrijven als de rotatie van een andere vector !

Derde opmerking: In onze verdere beschouwingen over antennes zullen we steeds harmonische tijdafhankelijkheid onderstellen, met tijdfactor $\exp(j\omega t)$.

De tijdonafhankelijke Maxwell vergelijkingen zijn

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} + jk\vec{H} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\text{rot } \vec{H} - jk\vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{I}$$

$$\text{div } \vec{I} + j\omega\rho = 0.$$

$$(k = \omega/c)$$

$$(\rho = \text{functie van } x, y, z \text{ alleen})$$

$$(\vec{I} = \text{functie van } x, y, z \text{ alleen})$$

Dan is de scalaire potentiaal Φ eenvoudig uit te drukken in de vector-potentiaal \vec{A} , en kunnen we dus volstaan met de laatste.

Is $\Phi = \text{Re} (\varphi e^{j\omega t})$, $\vec{A} = \text{Re} (\vec{A} e^{j\omega t})$ dan volgt met (33)

$\text{div } \vec{A} + (j\omega/c)\varphi = 0$, en dus

$$\varphi = (j/k) \text{div } \vec{A} \quad (43)$$

waarin k het golfgetal is ($k = 2\pi/\lambda$, λ de golflengte).

Verder geeft (37)

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{I} \frac{e^{-jkr}}{r} dV \quad (44)$$

De expliciete uitdrukking voor φ in termen van de lading is nu overbodig vanwege (43). Het elektromagnetische veld is ondubbelzinnig bepaald door de complexe tijdonafhankelijke vector potentiaal alleen. We krijgen dan het volgende procédé voor antenne-veld berekening :

Eerst de vector potentiaal \vec{A} uitrekenen met (44) uit de gegeven \vec{I} , en dan het veld uit

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (45)$$

$$jk\vec{E} = k^2 \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} . \quad (46)$$

Als we deze laatste vergelijking gebruiken, zullen we eindladings-effecten nooit kunnen vergeten.

§.5 Elektrische dipool.

De eenvoudigste antenne is een fictie: de dipool van Hertz.

Er zijn twee types: de electriche dipool, en de magnetische dipool.

De electriche Hertz dipool bestaat fysisch in diverse benaderingsvormen. Bekend is het model van de harmonisch-oscillerende puntlading in de klassieke en kwantum theorie. Een ander model is dat van twee metalen geladen bollen, die ontladen via een metalen draad (gedempte golven). Hetzelfde effect heeft vonkontlading tussen twee dicht bij elkaar geplaatste bollen (zoals in de oorspronkelijke experimenten van Hertz). Echter, het mechanisme van de ontlading doet er niet zoveel toe, als we maar weten dat er oscillerende ladingen en stromen optreden.

Uit het standpunt van de antenne-theorie is het meest eenvoudige model van een elektrische dipool als volgt. Men neemt een rechte dunne draad, kort vergeleken met de golflengte en met een uniforme stroomverdeling.

Is de stroomamplitude \vec{I} en de lengte ℓ , dan neme men $|\vec{I}| \rightarrow \infty$ en $\ell \rightarrow 0$ zodanig dat $\vec{I}\ell$ eindig blijft. De constante $\vec{M} (= \vec{I}\ell)$ is het antenne-moment, met praktische eenheid meter maal ampère (het statisch dipoolmoment is meter maal coulomb). De elektrische Hertzse dipool is volledig bepaald door het moment \vec{M} in richting, zin en plaats.

Ondanks het zuiver-mathematisch karakter van de Hertzse dipool, is het een belangrijk begrip. De dipool is een uitstekend model voor een zender als het gaat om radio golfverschijnselen rond de aarde. Ook in "waveguides" is de dipool een geschikte bron. Kortom, een elektrische dipool is als punt singulariteit in een overigens analytisch veld onmisbaar in theoretische beschouwingen. Daarom zullen we het veld van zo'n singulariteit nauwkeurig bestuderen.

Neem aan dat de dipool is gericht langs de z-as, en geplaatst is in de oorsprong van het rechtse systeem (x,y,z). Dan is de vector-potentiaal overal evenwijdig met de z-as.

Dus

$$A_x = 0, A_y = 0, A_z = \frac{M}{c} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (47)$$

waarbij M het antennemoment van de dipool is; r is de afstand tussen dipool en veldpunt.

De veld-vectoren kunnen het eenvoudigst worden uitgedrukt in bolcoördinaten: r, θ , φ (rechts systeem!). Dan moeten we de uitdrukkingen (47) eerst in bolcoördinaten transformeren :

$$A_r = \frac{M}{c} \cos \theta \frac{e^{-jkr}}{r}, A_\theta = -\frac{M}{c} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r}, A_\varphi = 0 \quad (48)$$

We herhalen de bekende uitdrukkingen van rot in bolcoördinaten:

$$(\text{rot } \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\}$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\}$$

In ons geval wordt alleen de φ -component van het magnetisch veld van nul verschillend. Het elektromagnetische veld van een elektrische dipool is transversaal magnetisch! Dus hebben we $H_r = H_\theta = 0$

$$H_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\},$$

zodat er met (48) komt

$$H_{\varphi} = \frac{jkM}{c} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \quad (49)$$

Het elektrisch veld kan uit (46) worden berekend, maar het is gemakkelijker met $jk\vec{E} = \text{rot } \vec{H} - (4\pi/c)\vec{I}$ (Maxwell).

Buiten de dipool is $\vec{I} = 0$, dus $jk\vec{E} = \text{rot } \vec{H}$, met \vec{H} uit (49).

Dan volgt $E_{\varphi} = 0$ en de overblijvende componenten worden

$$E_{\theta} = -\frac{1}{jkr} \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\varphi}), \quad E_r = \frac{1}{jkr \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_{\varphi}).$$

Na enige manipulaties komt er

$$E_r = \frac{2jkM}{c} \cos \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \quad (50)$$

$$E_{\theta} = \frac{jkM}{c} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \quad (51)$$

De discussie van dit veld is eenvoudig voor twee gevallen: dichtbij en ver weg. In de buurt van de antenne heeft men

$$H_{\varphi} \approx \frac{M \sin \theta}{c r^2}, \quad E_r \approx \frac{2M \cos \theta}{j\omega r^3}, \quad E_{\theta} \approx \frac{M \sin \theta}{j\omega r^3} \quad (r \rightarrow 0) \quad (52)$$

Interpretatie: In de buurt van de dipool is het magnetische veld dat wat we verwachten op grond van Biot en Savart, met stroomelement $M = \mathcal{L}I$.

Het elektrisch veld is gelijk aan het statische veld van een gewone elektrische dipool met elektrisch dipoolmoment $M/j\omega$.

Verder merken we op dat de vectoren \vec{E} en \vec{H} een faseverschil van 90° vectoren (factor j in de laatste twee vergelijkingen (52)).

Is het beschouwde veldpunt zeer ver weg van de dipool, dan wordt het ook weer eenvoudig. Als we ons bepalen tot termen van de orde $1/r$ dan is

$$H_{\varphi} \approx E_{\theta} \approx \frac{jkM}{c} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (53)$$

terwijl $E_r = 0 \left(\frac{1}{r^2} \right)$ ($r \rightarrow \infty$). De corresponderende Poynting-vector is

in de limiet ($r \rightarrow \infty$) radiaal gericht. Het veld heeft het karakter van vlakke, lineair gepolariseerde golven. In deze golfzone zijn de elektrische en magnetische vectoren in fase.

Het veldverloop in het overgangsgebied (tussen $r \rightarrow 0$ en $r \rightarrow \infty$) is gecompliceerd, en niet zo interessant. Een opmerking echter :

Zoals we zagen, zijn de vectoren \vec{E} en \vec{H} in fase in de golfzone en 90° uit fase in de buurt van de dipool. Dit betekent dat de fase snelheid in het overgangsgebied van het elektrische veld verschilt van die voor het magnetische veld. Geen van beiden is constant, of gelijk aan c . Dit wordt wel eens over het hoofd gezien in de dimensionering van gekoppelde antennes. Afstandsverschillen worden daar altijd gehanteerd als zuiver evenredig met faseverschillen. En dit laatste is verkeerd: afstands en faseverschillen zijn alleen in de golfzone evenredig met elkaar.

Laten we nu de uitgestraalde energie berekenen. De hoofdterm van de Poynting-vector is radicaal gericht, en zijn tijdgemiddelde is

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} (H_\varphi) \operatorname{Re} (E_\theta) = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{kM}{cr} \right)^2 \sin^2 \theta$$

als we voor het gemak M reëel nemen.

Het vermogen P (totale energie uitgestraald per tijdseenheid) is

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \bar{S} = \frac{k^2 M^2}{4c} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta$$

ofwel

$$P = \frac{k^2 M^2}{3c} \quad (54)$$

De equivalente stralingsweerstand van de dipool, ten opzichte van de stroomamplitude I (reëel) is

$$R = \frac{2P}{I^2} = \frac{2k^2 \ell^2}{3c} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \quad (55)$$

Een andere bruikbare formule is die waarin het veld wordt uitgedrukt in het vermogen. Als we kM elimineren tussen (53) en (54) vinden we

$$|E_\theta| = |H_\varphi| = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3P}{c}} \sin \theta \quad (r \rightarrow \infty) \quad (56)$$

Omdat (53), (55) en (56) fundamentele formules zijn in praktische berekeningen, zullen we ze ook in praktische eenheden geven. Als men in vergelijking (53) voor het elektrisch veld de factor $\frac{1}{c}$ vervangt door 30 is de resulterende vergelijking consistent in het systeem van praktische eenheden. Als we verder de golflengte invoeren en de tijd-factor toevoegen krijgen we

$$E_\theta = \frac{60\pi \ell I}{\lambda r} \sin \theta e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{2})} \quad (57)$$

met E_θ de aantallen volts per meter, I de aantallen ampères, en λ , r en ℓ "gemeten in meters".

De uitdrukking voor het magnetisch veld in de golfzone krijgen we door het rechterlid van (57) te delen door 120π , wat de numerieke waarde in praktische eenheden is van de "intrinsieke impedantie" van de vrije ruimte. Dus

$$H_{\varphi} = \frac{\ell I}{2\lambda r} \sin \theta e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{2})}, \quad (58)$$

gemeten in ampère per meter.

Voor degenen die aan dimensies van fysische grootheden doen, merken we op dat (58) dimensioneel correct is, maar (57) niet. In (57) moet dan nog rechts een factor komen van de dimensie ohm met waarde 1. Ook merken we op dat we $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s hebben genomen (de verhoudingsfactor 120π tussen (57) en (58) is een benadering).

Dezelfde substitutie ($\frac{1}{c} = 30$ (ohm)) kan men uitvoeren in de uitdrukking voor de stralingsweerstand. Men vindt

$$R = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \approx 790 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \text{ (ohm)} \quad (59)$$

terwijl (56) wordt:

$$|E_{\theta}| = \frac{3\sqrt{10} P}{r} \sin \theta, \quad (60)$$

met E_{θ} in volts/meter, P in watts, r in meters.

Voor de radio-ingenieur is de volgende formule van belang

$$|E_{\theta}| = \frac{300 \sqrt{P_{\text{kW}}}}{r_{\text{km}}} \sin \theta \quad \left(\frac{\text{mV}}{\text{m}}\right) \quad (61)$$

waarbij veldsterkte nu is gemeten in millivolts per meter, het vermogen in kilowatts, en de afstand in kilometers.

Nog een opmerking: Deze formules geven top-waarden, geen effectieve waarden, voor de veldsterkte. Vergelijkingen (60) en (61) geven de "root-mean-square" waarden van E_{θ} als de dipool verticaal staat op een oneindig-goed geleidende vlakke aarde, en wanneer daarbij onder P wordt verstaan het vermogen uitgestraald in de halfruimte boven de aarde.

§.6 Magnetische dipool.

Thans volgt iets over het duale begrip van de elektrische dipool, te weten de magnetische dipool van Hertz. Ook deze is een mathematische fictie, maar hij kan fysisch worden benaderd door een gesloten winding met constante stroomverdeling en met de afmetingen klein t.o.v. de golflengte. We nemen speciaal een cirkelvormige winding met straal a en een stroomamplitude I , zodat de magnetische dipool is gekarakteriseerd door (1°) zijn as in richting en zin, loodrecht op het vlak van het cirkeltje, en (2°) zijn equivalent magnetisch moment :

$$m = \frac{\pi^2 a I}{c} \quad (62)$$

We nemen a "oneindig klein" en I "oneindig groot", zodat m "eindig" blijft.

We kunnen het veld van een magnetische dipool op eenvoudige wijze afleiden uit dat van een elektrische dipool. We maken dan gebruik van het feit dat het systeem van homogene Maxwell-vergelijkingen invariant is voor de substitutie

$$\vec{H} \rightarrow \vec{E}, \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{H}.$$

Met andere woorden, afgezien van een multiplicatieve constante is het veld van de magnetische dipool door bovenstaande substitutie direct afleidbaar uit vergelijkingen (49) - (51). Om de multiplicatieve constant te vinden, maken we gebruik van onze kennis dat de component H_θ voor de magnetische dipool in de buurt van de dipool gegeven is door

$$H_\theta \approx m \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (r \rightarrow 0).$$

Vergelijken we dit met de derde vergelijking (52) dan zien we dat M overall moet worden vervangen door $-j\omega m = -j\omega c m$. Het veld van de magnetische dipool is dus bepaald door

$$E_\phi = m k^2 \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{jkr} \right\} \quad (63)$$

$$H_r = -2m k^2 \cos \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \quad (64)$$

$$H_\theta = -m k^2 \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \quad (65)$$

De overige drie componenten van de veldvectoren zijn nul. De magnetische vector ligt in het vlak door de as, de elektrische vector staat loodrecht daarop. Deze configuratie van veldvectoren is van het transversaal - elektrische type, met \vec{E} transversaal (d.w.z. loodrecht) op de radiale richting, of ook van het magnetische type met een magnetische component in de radiale richting. Daarentegen is het veld van een elektrische dipool transversaal-magnetisch of ook van het elektrische type (dus met een elektrische component in de radiale richting).

En wel zijn het de eenvoudigst mogelijke velden van dit type (natuurlijk met een bron in het eindige).

Resumerende kunnen we zeggen :

Het veld van een elektrische dipool is van het TM- of E-type, het veld van een magnetische dipool is van het TE- of H-type.

Voor de afleiding van de formules (63)-(65) is het natuurlijk niet nodig om gebruik te maken van die van de elektrische dipool. Gewoonlijk leidt men het veld van een magnetische dipool af met behulp van de magnetische vectorpotentiala, het duale begrip van de elektrische

vectorpotentiala \vec{A} van voorheen. De magnetische vectorpotentiala is echter minder fysisch grijpbaar, omdat hij is gebaseerd op het begrip van magnetische stromen, die in de fysica niet voorkomen. Toch is het begrip magnetische vectorpotentiala zeer bruikbaar in theoretische beschouwingen. Voorlopig mogen we volstaan met te vermelden dat het veld (63) - (65)

kan worden afgeleid uit een vector \vec{Q} volgens

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \text{rot } \vec{Q}, \quad -jk \vec{H} = \text{rot } \vec{E}, \quad Q_z = -jkm \frac{e^{-jkr}}{r} \\ Q_x &= Q_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Merk op dat Q_z buiten de oorsprong een oplossing van de golfvergelijking is.

Er bestaat nog een derde methode om het veld van de magnetische dipool af te leiden, gebaseerd op de gewone elektrische vectorpotentiala \vec{A} .

Natuurlijk bezit een cirkelvormige stroomkring een vectorpotentiala \vec{A} . In dit geval is de enige van nul verschillende component A_φ , die

bovendien onafhankelijk is van φ . Dit ziet men direct als we de bijdragen

tot \vec{A} vergelijken van twee stroomelementjes die symmetrisch liggen t.o.v. het vlak door z-as en veldpunt. Dit geldt voor een cirkelvormige stroomkring met willekeurige straal a. Om A_φ uit te rekenen, kunnen we dus

evengoed A_y uitrekenen voor $\varphi = 0$. Dan vindt men

$$A_\varphi = \frac{aI}{c} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{r^2+a^2-2ar \sin\theta \cos\alpha}}}{\sqrt{r^2+a^2-2ar \sin\theta \cos\alpha}} \cos\alpha \, d\alpha \quad (67)$$

Deze functie is niet elementair. De hoofdterm in de golfzone kunnen we voor een klein cirkeltje gemakkelijk aangeven :

$$A_{\varphi} \approx \frac{\pi j k a^2 I}{c} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty, a \rightarrow 0) \quad (68)$$

We moeten voor één ding waarschuwen. Zouden wij een vector \vec{A} definiëren, voor alle r , door $A_r = A_{\theta} = 0$ en A_{φ} gelijk aan het rechterlid van (68), dan zouden (45) en (46) niet leiden tot de correcte vergelijkingen (63)-(65). Dit hangt daarmee samen dat deze functie \vec{A} niet een oplossing van de vector-golfvergelijking is. Wel is het zo dat de hoofdtermen van (63)-(65) voor $r \rightarrow \infty$ uit (68) kunnen worden gevonden. Bijvoorbeeld :

$$H_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) \approx -\frac{\pi k^2 a^2 I}{c} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

welk resultaat inderdaad in overeenstemming is met (65).

Tenslotte geven we nog de formules voor het veld in de golfzone van de magnetische dipool.

Het analogon van (53) is

$$E_{\varphi} \approx -H_{\theta} \approx m k^2 \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (69)$$

en dat van (54) is

$$P = \frac{1}{3} \text{ cm}^2 k^4 \quad (70)$$

De equivalente stralingsweerstand, betrokken op de stroom I is

$$R = \frac{2\pi^2 k^4 a^4}{3c} = \frac{32\pi^6}{3c} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \quad (71)$$

terwijl vergelijking (56) niet veel verandert:

$$|E_{\varphi}| = |H_{\theta}| = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3P}{c}} \sin \theta \quad (72)$$

In praktische eenheden zien de formules van het veld in de golfzone er als volgt uit (vgl. 57 en 58)

$$E_{\varphi} = \frac{120\pi^3 a^2 I}{\lambda^2 r} \sin \theta e^{j(\omega t - kr)} \quad (73)$$

$$H_{\theta} = \frac{\pi^2 a^2 I}{\lambda^2 r} \sin \theta e^{j(\omega t - kr + \pi)} \quad (74)$$

De stralingsweerstand, uitgedrukt in ohms, wordt

$$R = 320 \pi^6 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 = 308 \cdot 10^3 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \quad (75)$$

terwijl in praktische eenheden geldt

$$|E_\varphi| = \frac{\sqrt{30P}}{r} \sin \theta \quad (76)$$

of in "nog praktischer" eenheden :

$$|E_\varphi| = \frac{300\sqrt{P_{\text{kW}}}}{r_{\text{km}}} \sin \theta \left(\frac{\text{mV}}{\text{m}}\right) \quad (77)$$

§.7 De integraal-sinus en soortgelijke functies.

In de theorie van antennes treden functies op die bekend staan onder de naam van integraal-sinus en integraal-cosinus. Deze en soortgelijke functies zullen we nu beschouwen om ze later te kunnen toepassen bij enkele antenneberekeningen.

De integraal-sinus is als volgt gedefinieerd :

$$\text{Si}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt. \quad (78)$$

We mogen x complex nemen, hoewel in antenneberekeningen meestal x reëel en positief is. Het is duidelijk dat $\text{Si}(x)$ een geheel-transcendent functie van x is; de machtreeksontwikkeling breekt niet af en convergeert voor elke eindige x :

$$\text{Si}(x) = x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5!} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (79)$$

Hiermee kan $\text{Si}(x)$ worden berekend voor kleine $|x|$. Voor de berekening bij grote x is praktisch alleen de asymptotische ontwikkeling te gebruiken :

$$\text{Si}(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots\right) - \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots\right) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (80)$$

Er bestaan talloze tabellen van deze functie. Hetzelfde geldt voor de integraal-cosinus :

$$Ci(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt, \quad (81)$$

gedefinieerd in het complexe x -vlak opengesneden langs de negatieve reële as. Buiten de snede is de functie holomorfe; in de oorsprong bevindt zich een logarithmische singulariteit. Men heeft

$$Ci(x) = \gamma + \log x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (82)$$

waarbij γ de constante van Euler voorstelt :

$$\gamma = 0.57721566\dots$$

en \log de hoofdwaaarde van de natuurlijke logarithme betekent. Voor grote waarden van x hebben we de asymptotische ontwikkeling

$$Ci(x) \sim \frac{\sin x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) - \frac{\cos x}{x} \left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (83)$$

Net als we bij $\sin x$ en $\cos x$ de functie $\cos x - j \sin x = e^{-jx}$ invoeren, definiëren we nu door combinatie

$$Ni(x) \stackrel{\text{def.}}{=} Ci(x) - j Si(x). \quad (84)$$

Dan kunnen we ook integralen van het volgende type de baas :

$$\int_a^b \frac{e^{-jt}}{t} dt = Ni(b) - Ni(a) \quad (a > 0, b > 0) \quad (85)$$

Andere types van integralen die bij de antennetheorie voorkomen kunnen we eveneens uitdrukken in de functie Ni , bijv.

$$\int_0^x \frac{e^{j(t - \sqrt{t^2 + y^2})}}{\sqrt{t^2 + y^2}} dt = Ni(y) - Ni(\sqrt{x^2 + y^2} - x) \quad (x \geq 0, y > 0) \quad (86)$$

Formule (86) kan worden bewezen via de substitutie $u = \sqrt{t^2 + y^2} - t$. Op dezelfde wijze heeft men

$$\int_0^x \frac{e^{-j(t + \sqrt{t^2 + y^2})}}{\sqrt{t^2 + y^2}} dt = Ni(\sqrt{x^2 + y^2} + x) - Ni(y) \quad (x \geq 0, y > 0) \quad (87)$$

Door optellen en aftrekken verkrijgen we formules die we later nodig hebben :

$$\int_0^x \cos t \frac{e^{-j\sqrt{t^2+y^2}}}{\sqrt{t^2+y^2}} dt = \frac{1}{2} \{ \text{Ni}(\sqrt{x^2+y^2}+x) - \text{Ni}(\sqrt{x^2+y^2}-x) \} \quad (88)$$

$$\int_0^x \sin t \frac{e^{-j\sqrt{t^2+y^2}}}{\sqrt{t^2+y^2}} dt = \frac{1}{2}j \{ \text{Ni}(\sqrt{x^2+y^2}+x) + \text{Ni}(\sqrt{x^2+y^2}-x) - 2\text{Ni}(y) \}, \quad (89)$$

beide geldig voor $x \geq 0, y > 0$.

De integraal-cosinus heeft het nadeel dat hij oneindig is voor $x = 0$. Daarom werkt men in antennetheorie met een variant, nl. de functie

$$C(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt \quad (90)$$

De relatie tussen $Ci(x)$ en $C(x)$ is

$$C(x) = \gamma + \log x - Ci(x), \quad (91)$$

zodat de singulariteit is verschoven van $x = 0$ naar $x = \infty$.

Voor iedere eindige x kunnen we de machtreeksontwikkeling opschrijven :

$$C(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4!} + \frac{1}{6} \frac{x^6}{6!} - \dots \quad (92)$$

zodat in dit opzicht $C(x)$ eerder dan $Ci(x)$ de analoge functie van $Si(x)$ is. Daarom zullen we ook de notatie $S(x)$ voor $Si(x)$ invoeren :

$$S(x) \stackrel{\text{def.}}{=} Si(x) \quad (93)$$

Om de logarithmische singulariteit van $Ni(x)$ bij $x = 0$ te elimineren voeren we de volgende combinatie in :

$$E(x) \stackrel{\text{def.}}{=} C(x) + j S(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-jt}}{t} dt \quad (94)$$

zodat

$$E(x) = \gamma + \log x - Ni(x) \quad (95)$$

Speciaal van belang zijn uitdrukkingen van de functies (86)-(89) voor kleine positieve y . Zo bijvoorbeeld

$$\text{Ni}(\sqrt{x^2+y^2}+x) \approx \text{Ni}(2x) = \gamma + \log 2x - E(2x)$$

$$\text{Ni}(\sqrt{x^2+y^2}-x) \approx \gamma + \log(\sqrt{x^2+y^2}-x) \approx \gamma + \log(y^2/2x)$$

$$\text{Ni}(y) \approx \gamma + \log y$$

en tenslotte

$$\int_0^x \cos t \frac{e^{-j\sqrt{t^2+y^2}}}{\sqrt{t^2+y^2}} dt = \log(2x/y) - \frac{1}{2} E(2x) + o(y) \quad (y \downarrow 0)$$

$$\int_0^x \sin t \frac{e^{-j\sqrt{t^2+y^2}}}{\sqrt{t^2+y^2}} dt = -\frac{1}{2}j E(2x) + o(y) \quad (y \downarrow 0)$$

waarbij de 0-termen natuurlijk niet uniform in $x (\geq 0)$ zijn,

Numerieke waarden van de functies $E(x)$, $E(2x)$ en $E(4x)$ zijn te vinden in bijgevoegde tabellen voor $x = 0(0.1) 5[8D]$.

Tabel I

$$E(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-jt}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-jxt}}{t} dt$$

x	E(x)	x	E(x)
0.1	0.0024 9896 + 0.0999 4446 j	2.6	1.2793 9049 + 1.8003 9445 j
0.2	0.0099 8335 + 0.1995 5609 j	2.7	1.3503 8256 + 1.8182 1208 j
0.3	0.0224 1579 + 0.2985 0404 j	2.8	1.4203 4669 + 1.8320 9659 j
0.4	0.0397 3428 + 0.3964 6146 j	2.9	1.4890 3108 + 1.8421 9019 j
0.5	0.0618 5256 + 0.4931 0742 j	3.0	1.5561 9817 + 1.8486 5253 j
0.6	0.0886 6075 + 0.5881 2881 j	3.1	1.6216 2595 + 1.8516 5931 j
0.7	0.1200 2601 + 0.6812 2224 j	3.2	1.6851 0906 + 1.8514 0090 j
0.8	0.1557 9350 + 0.7720 9579 j	3.3	1.7464 5985 + 1.8480 8078 j
0.9	0.1957 8732 + 0.8604 7071 j	3.4	1.8055 0917 + 1.8419 1398 j
1.0	0.2398 1174 + 0.9460 8307 j	3.5	1.8621 0718 + 1.8331 2540 j
1.1	0.2876 5247 + 1.0286 8522 j	3.6	1.9161 2386 + 1.8219 4812 j
1.2	0.3390 7804 + 1.1080 4720 j	3.7	1.9674 4949 + 1.8086 2168 j
1.3	0.3938 4136 + 1.1839 5801 j	3.8	2.0159 9488 + 1.7933 9035 j
1.4	0.4516 8132 + 1.2562 2673 j	3.9	2.0616 9157 + 1.7765 0136 j
1.5	0.5123 2446 + 1.3246 8353 j	4.0	2.1044 9172 + 1.7582 0314 j
1.6	0.5754 8678 + 1.3891 8049 j	4.1	2.1443 6803 + 1.7387 4363 j
1.7	0.6408 7555 + 1.4495 9229 j	4.2	2.1813 1335 + 1.7183 6856 j
1.8	0.7081 9120 + 1.5058 1678 j	4.3	2.2153 4026 + 1.6973 1985 j
1.9	0.7771 2920 + 1.5577 7531 j	4.4	2.2464 8049 + 1.6758 3396 j
2.0	0.8473 8202 + 1.6054 1298 j	4.5	2.2747 8418 + 1.6541 4041 j
2.1	0.9186 4102 + 1.6486 9864 j	4.6	2.3003 1905 + 1.6324 6035 j
2.2	0.9905 9843 + 1.6876 2483 j	4.7	2.3231 6942 + 1.6110 0517 j
2.3	1.0629 4917 + 1.7222 0748 j	4.8	2.3434 3520 + 1.5899 7528 j
2.4	1.1353 9278 + 1.7524 8550 j	4.9	2.3612 3068 + 1.5695 5894 j
2.5	1.2076 3520 + 1.7785 2017 j	5.0	2.3766 8333 + 1.5499 3124 j

Tabel II $E(2x) = \int_0^{2x} \frac{1 - e^{-jt}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-2jxt}}{t} dt$

x	E(2x)	x	E(2x)
0.1	0.0099 8335 + 0.1995 5609 j	2.6	2.4011 2789 + 1.5136 7095 j
0.2	0.0397 3428 + 0.3964 6146 j	2.7	2.4180 0054 + 1.4823 0008 j
0.3	0.0886 6075 + 0.5881 2881 j	2.8	2.4286 5401 + 1.4566 6838 j
0.4	0.1557 9350 + 0.7720 9579 j	2.9	2.4345 1425 + 1.4373 5918 j
0.5	0.2398 1174 + 0.9460 8307 j	3.0	2.4370 3238 + 1.4246 8755 j
0.6	0.3390 7804 + 1.1080 4720 j	3.1	2.4376 3798 + 1.4187 0682 j
0.7	0.4516 8132 + 1.2562 2673 j	3.2	2.4376 9507 + 1.4192 2297 j
0.8	0.5754 8678 + 1.3891 8049 j	3.3	2.4384 6218 + 1.4258 1615 j
0.9	0.7081 9120 + 1.5058 1678 j	3.4	2.4410 5756 + 1.4378 6842 j
1.0	0.8473 8202 + 1.6054 1298 j	3.5	2.4464 3054 + 1.4545 9661 j
1.1	0.9905 9843 + 1.6876 2483 j	3.6	2.4553 3963 + 1.4750 8906 j
1.2	1.1353 9278 + 1.7524 8550 j	3.7	2.4683 3800 + 1.4983 4475 j
1.3	1.2793 9049 + 1.8003 9445 j	3.8	2.4857 6638 + 1.5233 1379 j
1.4	1.4203 4669 + 1.8320 9659 j	3.9	2.5077 5344 + 1.5489 3746 j
1.5	1.5561 9817 + 1.8486 5253 j	4.0	2.5342 2332 + 1.5741 8682 j
1.6	1.6851 0906 + 1.8514 0090 j	4.1	2.5649 0981 + 1.5980 9851 j
1.7	1.8055 0917 + 1.8419 1398 j	4.2	2.5993 7645 + 1.6198 0660 j
1.8	1.9161 2386 + 1.8219 4812 j	4.3	2.6370 4163 + 1.6385 6965 j
1.9	2.0159 9488 + 1.7933 9035 j	4.4	2.6772 0767 + 1.6537 9219 j
2.0	2.1044 9172 + 1.7582 0314 j	4.5	2.7190 9271 + 1.6650 4008 j
2.1	2.1813 1335 + 1.7183 6856 j	4.6	2.7618 6424 + 1.6720 4945 j
2.2	2.2464 8049 + 1.6758 3396 j	4.7	2.8046 7294 + 1.6747 2917 j
2.3	2.3003 1905 + 1.6324 6035 j	4.8	2.8466 8580 + 1.6731 5698 j
2.4	2.3434 3520 + 1.5899 7528 j	4.9	2.8871 1723 + 1.6675 6962 j
2.5	2.3766 8333 + 1.5499 3124 j	5.0	2.9252 5719 + 1.6583 4759 j

Tabel III $E(4x) = \int_0^{4x} \frac{1 - e^{-jt}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-4jxt}}{t} dt$

x	E(4x)	x	E(4x)
0.1	0.0397 3428 + 0.3964 6146 j	2.6	2.9923 4125 + 1.6311 1714 j
0.2	0.1557 9350 + 0.7720 9579 j	2.7	3.0445 7123 + 1.5965 4124 j
0.3	0.3390 7804 + 1.1080 4720 j	2.8	3.0808 2291 + 1.5604 1575 j
0.4	0.5754 8678 + 1.3891 8049 j	2.9	3.1022 3557 + 1.5283 5386 j
0.5	0.8473 8202 + 1.6054 1298 j	3.0	3.1119 0232 + 1.5049 7124 j
0.6	1.1353 9278 + 1.7524 8550 j	3.1	3.1142 9495 + 1.4932 6980 j
0.7	1.4203 4669 + 1.8320 9659 j	3.2	3.1145 2290 + 1.4942 9674 j
0.8	1.6851 0906 + 1.8514 0090 j	3.3	3.1175 4351 + 1.5071 1142 j
0.9	1.9161 2386 + 1.8219 4812 j	3.4	3.1274 4113 + 1.5290 4688 j
1.0	2.1044 9172 + 1.7582 0314 j	3.5	3.1468 7664 + 1.5562 1105 j
1.1	2.2464 8049 + 1.6758 3396 j	3.6	3.1767 7835 + 1.5841 4092 j
1.2	2.3434 3520 + 1.5899 7528 j	3.7	3.2163 0685 + 1.6085 0528 j
1.3	2.4011 2789 + 1.5136 7095 j	3.8	3.2630 8449 + 1.6257 4987 j
1.4	2.4286 5401 + 1.4566 6838 j	3.9	3.3136 4190 + 1.6335 9248 j
1.5	2.4370 3238 + 1.4246 8755 j	4.0	3.3640 0458 + 1.6313 0227 j
1.6	2.4376 9507 + 1.4192 2297 j	4.1	3.4103 2534 + 1.6197 3239 j
1.7	2.4410 5756 + 1.4378 6842 j	4.2	3.4494 6635 + 1.6011 1292 j
1.8	2.4553 3963 + 1.4750 8906 j	4.3	3.4794 4617 + 1.5786 4633 j
1.9	2.4857 6638 + 1.5233 1379 j	4.4	3.4996 9117 + 1.5559 7529 j
2.0	2.5342 2332 + 1.5741 8682 j	4.5	3.5110 6253 + 1.5366 0810 j
2.1	2.5993 7645 + 1.6198 0660 j	4.6	3.5156 6463 + 1.5233 9021 j
2.2	2.6772 0767 + 1.6537 9219 j	4.7	3.5164 7330 + 1.5180 9920 j
2.3	2.7618 6424 + 1.6720 4945 j	4.8	3.5168 4740 + 1.5212 1909 j
2.4	2.8466 8580 + 1.6731 5698 j	4.9	3.5200 0257 + 1.5319 2054 j
2.5	2.9252 5719 + 1.6583 4759 j	5.0	3.5285 2812 + 1.5482 4170 j

§.8 Halve-golfantenne.

Wij hebben twee eenvoudige antennes besproken: de elektrische dipool en de magnetische dipool. In het begin van de radio kon men volstaan met deze antenne-types omdat men werkte met zeer lange golven (golflengte van 10 km was geen uitzondering), zodat de gebruikte antennes meestal klein waren vergeleken met de golflengte. In de latere tijd van de radio-omroep gebruikte men golflengtes in het 100-metergebied, en zo ontstonden de kwart-golflengte masten van de omroepzenders. Deze werden aan de basis gevoed, en werkten met hun spiegelbeeld in de aarde als halve-golfantenne. In de huidige radio en radar techniek speelt de echte halve-golfantenne een belangrijke rol, zowel als enkelvoudig element als in combinatie met anderen in gecompliceerde, sterk-bundelende antenne-systemen.

Als model van de halve-golf antenne nemen we een dunne, rechte, cilindrische draad die in het midden is doorgeknipt en aldaar wordt gevoed door middel van de voedingslijn, bestaande uit een coaxiale leiding of een eenvoudig Lecher-systeem. De stroom- en spanningsverdeling langs de voedingslijn is sinusvormig als stralings- en andere dempingsverliezen door ohmse weerstand worden verwaarloosd. De dwarsafmetingen van de voedingslijn zijn klein, de lengte afmeting groot t.o.v. de golflengte.

De transmissielijn is de logische voorganger van de halve-golfantenne. Deze laatste kunnen we opvatten als het eind van een opengebogen Lecher systeem. De straling van dit opengebogen eind is groter geworden (dat is juist het doel van de antenne) maar in eerste benadering zal toch de stroomverdeling langs de draad dezelfde zijn gebleven.

Wat betreft de spanningsverdeling langs de antenne kan men opmerken dat het begrip spanning langs de antenne weinig zinvol is. Alleen de spanning over de ingangsklemmen in het midden van de antenne heeft fysische betekenis.

Van uit het standpunt van de transmissielijn, ligt het voor de hand aan te nemen dat de stroomverdeling langs dunne metaaldraden in zeer goede benadering sinusvormig is. Dit is in elk geval in overeenstemming met het experiment. Deze sinusvormige stroomverdeling blijkt in theorieën op hoger niveau ook uit de bus te komen als eerste benadering.

Na deze fysische orientatie, nu de theoretische behandeling van de halve-golf antenne, vanuit het standpunt van de elementaire theorie.

We nemen een hypothetische stroomverdeling in een mathematisch segment ter lengte 2ℓ langs de z -as tussen $z = -\ell$ en $z = \ell$. We denken de stroom als het ware geconcentreerd in de as van de dunne cilindervormige antenne. Om ook effecten buiten resonantie te kunnen beschrijven, nemen we 2ℓ niet precies gelijk aan een halve golflengte, maar willekeurig. Dan zal de stroomverdeling langs deze antenne worden voorgesteld door

$$I(z) = I_0 \sin [k(\ell - |z|)] \quad (-\ell \leq z \leq \ell) \quad (96)$$

De stroom is nul aan de uiteinden, en verder continu langs de antenne, terwijl de afgeleide naar z een sprong vertoont in het midden ($z = 0$), tenzij de antenne in resonantie is, in welk geval

$$I(z) = I_0 \cos kz, \quad k\ell = \frac{\pi}{2}, \quad (97)$$

en de antenne dan precies een halve golf lang is.

De werkelijke antenne verschilt nogal van dit hypothetisch model. De draad heeft een "eindige" straal $a \neq 0$. We zouden dus twee cylinders met kleine opening tegen elkaar moeten zetten, en in deze "gap" staat dan de "slice generator". De invloed van de "gap" en van de hele voeding lijn bij de echte antenne is echter niet te vangen met onze elementaire theorie.

Het is plausibel dat het veld in de golfzone niet gevoelig is voor variaties van de stroomverdeling over de dwarsdoorsnede van de antenne-draad, en ook niet afhangt van de preciese condities in het voedingspunt. Daarom zal ook het reële deel van de ingangsimpedantie, dus de stralings weerstand, van het model kloppen met de experimentele waarde. Anders is het echter met de reactieve component van de ingangsimpedantie zoals we later zullen zien.

Het veld ten gevolge van de stroom (96) is afleidbaar uit een vector-potentiaal waarvan alleen de z -component van nul verschilt :

$$A_z = \frac{I_0}{c} \int_{-\ell}^{\ell} \sin k(\ell - |\zeta|) \frac{e^{-jkR}}{R} d\zeta \quad (98)$$

waarin R de afstand is tussen veldpunt en bronpunt.

Omdat het veld axiaal symmetrisch om de z -as is, voeren we cylinder coördinaten z, ρ, φ in. Ook is duidelijk dat het veld onafhankelijk van φ is. Dus hangt A_z alleen van z en ρ af. Daarom voeren we in de notatie $A_z = \Pi(z, \rho)$.

Is $\Pi(z, \rho)$ bekend, dan volgt uit (45) en (46) :

$$H_\varphi = - \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \quad (99)$$

$$jk E_z = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \quad (100)$$

$$jk E_\rho = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial \rho} \quad (101)$$

Alle andere componenten van het veld zijn nul.

We zullen eerst het veld in de golfzone berekenen, en daarvoor zijn bolcoördinaten (r, θ, φ) de geschikte variabelen.

In deze laatste coördinaten is de vectorpotentiaal

$$A_r = A_z \cos \theta, \quad A_\theta = -A_z \sin \theta, \quad A_\varphi = 0 \quad (102)$$

We zullen ons beperken tot de hoofdtermen in de golfzone, dus tot termen van de orde van grootte $1/r$. Dan moeten we de hoofdterm van (98) hebben voor $r \rightarrow \infty$. Met

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk\zeta \cos \theta} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (103)$$

krijgt men

$$A_z \approx \frac{I_0}{kc} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-x}^x \sin(x - |t|) e^{jt \cos \theta} dt, \quad (104)$$

na invoering van de integratievariabele $t = k\zeta$ en de afkorting

$$x = k\ell = \frac{2\pi\ell}{\lambda} \quad (105)$$

De integraal in (104) is gemakkelijk te berekenen :

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \sin(x - |t|) e^{jt \cos \theta} dt &= \int_{-x}^0 (\dots) dt + \int_0^x (\dots) dt \\ &= \int_0^x \sin(x - t) e^{-jt \cos \theta} dt + \int_0^x \sin(x - t) e^{jt \cos \theta} dt = \\ &= 2 \int_0^x \sin(x-t) \cos(t \cos \theta) dt = \int_0^x [\sin(x-t+t \cos \theta) + \sin(x-t-t \cos \theta)] \\ &= 2 \frac{\cos(x \cos \theta) - \cos x}{\sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

en dit resultaat is in elegante vorm te brengen :

$$\int_{-x}^x \sin(x - |t|) e^{jt \cos \theta} dt = \frac{\sin(x \sin^2 \frac{\theta}{2})}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\sin(x \cos^2 \frac{\theta}{2})}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad (106)$$

Aan elegantie hebben we hier niets, en we schrijven daarom

$$A_z = \frac{2I_0}{kc} \frac{\cos(x \cos \theta) - \cos x}{\sin^2 \theta} \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (107)$$

Hierbij is de uitdrukking $O\left(\frac{1}{r}\right)$ een ontwikkeling naar positieve gehele machten van $\frac{1}{r}$, met coëfficiënten die functies zijn van θ en die absoluut en uniform convergeert voor $r > \ell$.

De hoofdtermen in de golfzone vindt men uit.

$$H_{\varphi} \approx E_{\theta} \approx -jkA_{\theta} = jk A_z \sin \theta \quad (r \rightarrow \infty),$$

zodat

$$H_{\varphi} \approx E_{\theta} \approx \frac{2jI_0}{c} \frac{\cos(x \cos \theta) - \cos x}{\sin \theta} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (108)$$

en hiermee kunnen we dus het veld in de golfzone berekenen.

Vervolgens leiden we een formule af voor de equivalente stralingsweerstand. Het tijdgemiddelde van de radiale component van de Poynting-vector, tot termen $1/r^2$, is

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} |E_{\theta}|^2 = \frac{|I_0|^2}{2\pi cr^2} \left[\frac{\cos(x \cos \theta) - \cos x}{\sin \theta} \right]^2.$$

Als we dit over alle richtingen integreren en $r \rightarrow \infty$ nemen, dan wordt het vermogen

$$P = \frac{1}{c} |I_0|^2 \int_0^{\pi} \frac{[\cos(x \cos \theta) - \cos x]^2}{\sin \theta} d\theta \quad (109)$$

Deze integraal kunnen we uitdrukken in onze vroegere functies C en S. We stellen $u = \cos \theta$, en krijgen

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\dots) d\theta &= 2 \int_0^1 \frac{(\cos xu - \cos x)^2}{1-u^2} du = \int_0^1 \frac{(\cos xu - \cos x)^2}{1-u} du \\ &+ \int_0^1 \frac{(\cos xu - \cos x)^2}{1+u} du = \int_0^2 [\cos(x-xt) - \cos x]^2 \frac{dt}{t} \quad (\text{Stel } t = 1 \pm u) \end{aligned}$$

Door elementaire transformatie:

$$\begin{aligned} [\cos(x-xt) - \cos x]^2 &= [1 - \cos xt] + \sin 2x \left[\frac{1}{2} \sin 2xt - \sin xt \right] \\ &+ \cos 2x \left[(1 - \cos xt) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2xt) \right] \end{aligned}$$

zodat

$$\int_0^{\pi} \frac{[\cos(x \cos \theta) - \cos x]^2}{\sin \theta} d\theta = C(2x) + \left[\frac{1}{2} S(4x) - S(2x) \right] \sin 2x + \left[C(2x) - \frac{1}{2} C(4x) \right] \cos 2x. \quad (110)$$

Hiermee kunnen we P berekenen als functie van $x = k\ell$.

De equivalente ingangsweerstand R wordt berekend uit $R = 2P/|I|^2$, waarin $I = I_0 \sin k\ell =$ ingangsstroom. Als we dan $\frac{1}{c}$ door 30 vervangen, krijgen we het resultaat in praktische eenheden (ohms) :

$$R = \frac{60}{\sin^2 x} \left[C(2x) + \left\{ \frac{1}{2} S(4x) - S(2x) \right\} \sin 2x + \left\{ C(2x) - \frac{1}{2} C(4x) \right\} \cos 2x \right] \quad (111)$$

Hierin is dus $x = k\ell = 2\pi\ell/\lambda =$ halve "electrische lengte" van de antenne.

Een controle op deze formule is als volgt, voor $x \rightarrow 0$ heeft men

$$R \approx 20x^2 = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \quad (x \rightarrow 0) \quad (112)$$

Dit is precies formule (59), maar ℓ in formule (112) is de halve antennelengte en in (59) is ℓ de hele dipoolengte. Er is echter geen discrepantie, omdat in geval (112) de stroom niet uniform is, maar driehoekig, zodat de gemiddelde stroom gelijk is aan $\frac{1}{2}I$, terwijl deze bij de electriche dipool gelijk I is; I is hierbij de stroom in het voedingspunt.

Van het meeste belang is het byzondere geval $x = \frac{1}{2}\pi$, wanneer 2ℓ precies een halve golflengte is. Dan geeft (111)

$$R_{\lambda/2} = 30 C(2\pi) = 73.13 \text{ (ohm)} \quad (113)$$

Voor dit geval geldt verder (in de golfzone)

$$E_{\theta} = \frac{60 I}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{2})} \quad (114)$$

waarbij I de amplitude van de ingangsstroom (in ampère) is, en r de afstand in meters.

De formule voor de veldsterkte in termen van het vermogen wordt

$$|E_{\theta}| = 1.046 \frac{\sqrt{10P}}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}, \quad (115)$$

waar de numerieke factor komt van

$$\sqrt{\frac{80}{R_{\lambda/2}}} = \sqrt{\frac{80}{73.13}} = 1.046 \quad (116)$$

Vergelijken we (115) met de corresponderende (56) voor de elektrische dipool, dan ziet men dat de winst in veldsterkte in de richting van maximale intensiteit ($\theta = \pi/2$) slechts 4.6% is.

De stralingspatronen van elektrische dipool en halve-golfantenne zijn practisch gelijk. De laatste concentreert de straling iets meer in het equator-vlak.

De analoge formule van (61) wordt voor de halve-golfantenne

$$|E_{\theta}| = \frac{314\sqrt{P_{kW}}}{r_{km}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \left(\frac{mV}{m} \right) \quad (117)$$

Nog een opmerking over vergelijking (116). Het getal 80 wordt meestal geïnterpreteerd als een zekere stralingsweerstand. Inderdaad, als $\ell = \lambda/\pi$ komt er $R = 80$ ohm. Er wordt dan wel eens gezegd dat de straling weerstand van een lineaire antenne ter lengte λ/π , met uniforme stroomverdeling, gelijk is aan 80 ohm. Dat klopt echter niet. In werkelijkheid blijkt de stralingsweerstand van een antenne ter lengte λ/π met uniforme stroomverdeling gelijk te zijn aan

$$60 \left\{ 2 S(2) + \frac{1}{2} \sin 2 + \cos 2 - 2 \right\} = 75.0 \text{ ohm.}$$

Nu nog iets over het begrip "gain" van een antenne.

De tot nu toe besproken antennes vertonen zekere richtwerking: in de ene richting wordt meer energie uitgestraald dan in de andere. Als vergelijkingsobject neemt men een hypothetische standaard, te weten een antenne die in alle richtingen evenveel uitstraalt (men kan bewijzen dat zo'n antenne niet bestaat, maar wel willekeurig dicht kan worden benaderd).

"Power gain" of "directivity" van een antenne is gedefinieerd door

$$g = P_0/P \quad (118)$$

met P_0 = vermogen van de standaardantenne nodig om een energieflex te produceren even groot als die in de richting van maximum intensiteit van de beschouwde antenne als deze straalt met vermogen P .

De ingenieur is gewend om de "gain" van een antenne te meten in een logaritmische maat, en wel in decibel, volgens de formule

$$G = 10 \log g \quad (119)$$

(Briggse logarithme). Optellen is gemakkelijker dan vermenigvuldigen, als het er om gaat antennes van verschillende gain met elkaar te vergelijken of te combineren.

Voorbeelden :

Voor een elektrische of magnetische dipool van Hertz geldt

$$g = 1.5 , \quad G = 1.76$$

Voor de halve-golfantenne geldt

$$g = 1.641, \quad G = 2.15$$

De relatieve gain van de halve-golfantenne (d.i. de gain t.o.v. de Hertzse dipool) is

$$g_r = \frac{1.64}{1.5} = 1.094 = (1.046)^2$$

terwijl $G_r = 2.15 - 1.76 = 0.39$.

Tenslotte: de Hertzse dipool en de halve-golfantenne hebben maar een zeer klein richteffect, vergeleken met de antenne-systemen uit de korte-golftechniek.

We gaan nu het veld van de halve-golfantenne in de buurt van de antenne bestuderen, teneinde een formule af te leiden voor het reactieve gedeelte van de ingangsimpedantie.

Daarvoor moeten we de functie Π van (98) kennen. Omdat de antenne symmetrisch is gevoed, kunnen we schrijven

$$\Pi(z, \rho) = \Pi_1(z, \rho) + \Pi_1(-z, \rho), \quad (120)$$

waarin $\Pi_1(z, \rho)$ de z-component van de vectorpotentiaal corresponderende met de bovenste helft van de antenne voorstelt :

$$\Pi_1(z, \rho) = \frac{I_0}{c} \int_0^{\ell} \sin(k\ell - k\zeta) \frac{e^{-jk\sqrt{(z-\zeta)^2 + \rho^2}}}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + \rho^2}} d\zeta \quad (121)$$

Deze integraal kan worden uitgedrukt in de functie Ni , want hij is kennelijk een combinatie van de types integralen (88) en (89). Aan de vervelende transformaties gaan we voorbij, en we geven alleen het resultaat :

$$2cj \Pi_1(z, \rho) / I_0 = e^{-jk\ell + jkz} [Ni(ku_1) - Ni(ku_3)] + e^{jk\ell - jkz} [Ni(ku_2) - Ni(ku_4)] \quad (122)$$

waarbij de diverse parameters u zijn gegeven door

$$u_1 = \sqrt{(z-\ell)^2 + \rho^2} + z - \ell, \quad u_3 = \sqrt{z^2 + \rho^2} + z$$

$$u_2 = \sqrt{(z-\ell)^2 + \rho^2} - z + \ell, \quad u_4 = \sqrt{z^2 + \rho^2} - z$$

Zoals we straks zullen zien, kan de ingangsimpedantie van de antenne worden uitgedrukt in de waarden van $\Pi(z, \rho)$ bij $z = 0$ en $z = \ell$. Dus moeten we Π_1 kennen voor $z = 0, \ell$, en $-\ell$.

Ter vereenvoudiging van de notatie stellen we, als vroeger, $x = k\ell$, en bovendien

$$y = k\rho.$$

Dan vindt men

$$2cj \Pi_1(0, \rho) / I_0 = e^{-jx} [Ni(\sqrt{x^2 + y^2} - x) - Ni(y)] + e^{jx} [Ni(\sqrt{x^2 + y^2} + x) - Ni(y)]$$

$$2cj \Pi_1(\ell, \rho) / I_0 = 2Ni(y) - Ni(\sqrt{x^2 + y^2} - x) - Ni(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$$

$$2cj \Pi_1(-\ell, \rho) / I_0 = e^{-2jx} [Ni(\sqrt{4x^2 + y^2} - 2x) - Ni(\sqrt{x^2 + y^2} - x)] + e^{2jx} [Ni(\sqrt{4x^2 + y^2} + 2x) - Ni(\sqrt{4x^2 + y^2} + x)].$$

Voor de berekening van de ingangsimpedantie moeten we deze functies kennen voor kleine waarden van y ; deze limietformules vinden we op de vroeger aangegeven wijze :

$$2cj \Pi_1(0, \rho) / I_0 = 2j \sin x \log(2x/y) - e^{jx} E(2x) + O(y)$$

$$2cj \Pi_1(\ell, \rho) / I_0 = E(2x) + O(y)$$

$$2cj \Pi_1(-\ell, \rho) / I_0 = 2j \sin 2x \log 2 + e^{2jx} [E(2x) - E(4x)] + O(y)$$

waarbij de 0-termen ($y \rightarrow 0$) natuurlijk van x afhangen. Vgl.(120) geeft dan voor $y \approx 0$:

$$\left. \begin{aligned} \Pi(0, \rho) &\approx \frac{I_0}{c} [2 \sin x \log(2x/y) + j e^{jx} E(2x)] \\ \Pi(\ell, \rho) &\approx \frac{I_0}{c} [\sin 2x \log 2 - \frac{1}{2} j E(2x) + \frac{1}{2} j e^{2jx} \{E(4x) - E(2x)\}] \end{aligned} \right\} (123)$$

Na deze berekeningen komen we tot het probleem van de ingangsimpedantie. We hebben in ons antennemodel aangenomen dat de stroom in de as van de cilindrische draad is geconcentreerd. In werkelijkheid zal de draad een diameter $2a$ hebben, en voor oneindig-goed geleidend materiaal zal de stroom hoofdzakelijk aan de oppervlakte lopen. De antenne is dan een holle buis. Het veld van deze laatste is niet identiek met het hier berekende veld. Voor de golfzone is het wel in orde, maar in de buurt van de antenne zullen de verschillen groot zijn. Niettegenstaande dat zullen we aannemen dat de berekende veldgrootheden voldoende nauwkeurig blijven tot op afstanden ρ van de as van de antenne, d.w.z. tot aan het oppervlak der antenne.

Om de ingangsimpedantie te krijgen, moeten we eerst $-\vec{E} \cdot \vec{I}^*$ over het antennevolume integreren. De stroomdichtheid heeft alleen een z -component; dus kunnen we volstaan met E_z . We nemen nu E_z op het oppervlak en vermenigvuldigen die met de stroom I op de as. Delen we door het kwadraat van de ingangsstroom ($= I_0 \sin x$) die we reëel zullen onderstellen, dan vinden we zo een "benadering" voor de antenne-ingangsimpedantie:

$$Z = - \frac{1}{I_0^2 \sin^2 x} \int_{-\ell}^{\ell} E_z(\zeta, a) I(\zeta) d\zeta$$

Met behulp van (100) kunnen we dan schrijven

$$\begin{aligned} jk Z I_0^2 \sin^2 x &= - \int_{-\ell}^{\ell} \left\{ \frac{\partial^2 \Pi(\zeta, a)}{\partial \zeta^2} + k^2 \Pi(\zeta, a) \right\} I(\zeta) d\zeta \\ &= \left[\Pi(\zeta, a) \frac{dI(\zeta)}{d\zeta} \right]_{\zeta=-\ell}^{\zeta=\ell} - \int_{-\ell}^{\ell} \left\{ \frac{d^2 I(\zeta)}{d\zeta^2} + k^2 I(\zeta) \right\} \Pi(\zeta, a) d\zeta \end{aligned}$$

als we tweemaal partieel integreren en gebruik maken van het feit dat $I(\zeta)$ nul is voor $\zeta = \pm \ell$.

De resterende integraal is gemakkelijk te berekenen, omdat de stroom sinusvormig is. De integrand is nul langs de antenne, behalve in het voedingspunt. Als men de notatie van deltafuncties gebruikt, geldt

$$\frac{d^2 I(\zeta)}{d\zeta^2} + k^2 I(\zeta) = \{ I'(+0) - I'(-0) \} \delta(\zeta),$$

zodat de bedoelde laatste integraal gelijk is aan $\Pi(0, a) \{ I'(+0) - I'(-0) \}$ waarbij het accent differentiatie naar ζ aangeeft.

Daarmee vinden we

$$\begin{aligned} jk Z I_0^2 \sin^2 x &= \Pi(\ell, a) I'(\ell) - \Pi(-\ell, a) I'(-\ell) + \Pi(0, a) \{ I'(-0) - I'(+0) \} \\ &= 2k I_0 \{ \Pi(0, a) \cos x - \Pi(\ell, a) \}, \end{aligned}$$

als we de symmetrie in z in acht nemen.

Vullen we nu ons resultaat (123) in voor $\rho = a$, vervangen we $\frac{1}{c}$ door 30, en bedenken we dat $x/y = \ell/a$, dan vinden we voor de ingangsimpedantie in ohms :

$$Z = \frac{60}{\sin^2 x} \left[-j \sin 2x \log \left(\frac{\ell}{a} \right) + E(2x) + e^{2jx} \left\{ E(2x) - \frac{1}{2} E(4x) \right\} \right] \quad (124)$$

Men controleert gemakkelijk dat het reële deel van deze uitdrukking juist het rechterlid van (111) is. Het reactieve deel van de ingangsimpedantie, dus het imaginaire deel van Z , blijkt te zijn :

$$\begin{aligned} X &= -120 \log \left(\frac{\ell}{a} \right) \cot x + \\ &+ \frac{60}{\sin^2 x} \left[S(2x) + \left\{ C(2x) - \frac{1}{2} C(4x) \right\} \sin 2x + \left\{ S(2x) - \frac{1}{2} S(4x) \right\} \cos 2x \right] \quad (125) \end{aligned}$$

De formules (111), (124), (125) zijn reeds bekend sinds 1933 door het werk van Labus. De hier gegeven vorm is echter compacter omdat we de juiste combinaties van de integraal-sinus en -cosinus functies hebben gekozen en de logarithmische singulariteit bij $x = 0$ hebben vermeden. Voor numeriek werk kan men de bijgevoegde tabel gebruiken. Deze geeft $E(2x) + e^{2jx} \{ E(2x) - \frac{1}{2} E(4x) \}$ voor $x = 0(0.1)5$ [6D] en nog enkele hulpwaarden in de buurt van resonantie ($x = \pi/2$), te weten $x = 1.05(0.10)1.95$ [6D].

We merken op dat, in tegenstelling tot R , de grootte X afhangt van de dikte van de draad, vanwege de term met $\log(\ell/a)$, behalve in het geval van de halve-golfantenne, wanneer $x = \pi/2$ is. Dan vindt men, onafhankelijk van de draaddikte,

$$X_{\lambda/2} = 30 S(2\pi) = 42.54 \text{ ohm} . \quad (126)$$

Tabel IV $E(2x) + e^{2jx} \{ E(2x) - \frac{1}{2} E(4x) \}$.

x		x	
0.1	0.000 033 + 0.198 891 j	2.6	3.441 866 + 1.041 260 j
0.2	0.000 529 + 0.391 192 j	2.7	3.515 098 + 1.224 272 j
0.3	0.002 652 + 0.570 610 j	2.8	3.544 572 + 1.420 590 j
0.4	0.008 264 + 0.731 439 j	2.9	3.529 541 + 1.623 047 j
0.5	0.019 814 + 0.868 821 j	3.0	3.470 844 + 1.823 928 j
0.6	0.040 186 + 0.978 962 j	3.1	3.370 926 + 2.015 295 j
0.7	0.072 517 + 1.059 315 j	3.2	3.233 799 + 2.189 331 j
0.8	0.120 003 + 1.108 693 j	3.3	3.064 936 + 2.338 680 j
0.9	0.185 676 + 1.127 331 j	3.4	2.871 103 + 2.456 777 j
1.0	0.272 202 + 1.116 879 j	3.5	2.660 136 + 2.538 149 j
1.1	0.381 673 + 1.080 330 j	3.6	2.440 660 + 2.578 675 j
1.2	0.515 424 + 1.021 897 j	3.7	2.221 783 + 2.575 792 j
1.3	0.673 889 + 0.946 816 j	3.8	2.012 751 + 2.528 639 j
1.4	0.856 483 + 0.861 121 j	3.9	1.822 591 + 2.438 133 j
1.5	1.061 540 + 0.771 369 j	4.0	1.659 762 + 2.306 972 j
1.6	1.286 294 + 0.684 341 j	4.1	1.531 808 + 2.139 556 j
1.7	1.526 919 + 0.606 733 j	4.2	1.445 054 + 1.941 848 j
1.8	1.778 618 + 0.544 845 j	4.3	1.404 329 + 1.721 157 j
1.9	2.035 763 + 0.504 288 j	4.4	1.412 758 + 1.485 863 j
2.0	2.292 082 + 0.489 712 j	4.5	1.471 601 + 1.245 098 j
2.1	2.540 883 + 0.504 581 j	4.6	1.580 181 + 1.008 385 j
2.2	2.775 311 + 0.550 990 j	4.7	1.735 872 + 0.785 257 j
2.3	2.988 618 + 0.629 552 j	4.8	1.934 169 + 0.584 869 j
2.4	3.174 450 + 0.739 333 j	4.9	2.168 840 + 0.415 624 j
2.5	3.327 118 + 0.877 874 j	5.0	2.432 139 + 0.284 813 j
1.05	0.323 966 + 1.101 630 j	1.55	1.171 670 + 0.727 090 j
1.15	0.445 463 + 1.053 543 j	1.65	1.404 901 + 0.643 953 j
1.25	0.591 579 + 0.986 075 j	1.75	1.651 718 + 0.573 454 j
1.35	0.762 248 + 0.904 894 j	1.85	1.906 889 + 0.521 584 j
1.45	0.956 351 + 0.816 330 j	1.95	2.164 437 + 0.493 506 j

De halve-golfantenne is dus een inductieve belasting van de voedingslijn (hij gedraagt zich als een zelfinductie). Om de impedantie zuiver-resistief (zuiver-ohms) te maken, moeten we de antennelengte iets kleiner dan een halve golflengte nemen, en het bedrag van die verkorting hangt van de draaddikte af. Deze resonantieverkorting kunnen we als volgt vinden. In de buurt van resonantie geldt :

$$X \approx - 120 \log \left(\frac{\ell}{a} \right) \cot x + 30 S(2\pi).$$

Het rechterlid is bij benadering nul voor de waarde van x corresponderende met

$$x_{\text{res}} \approx \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{S(2\pi)}{2\pi \log(\ell/a)} \right] \quad (127)$$

Dit betekent een verkorting van

$$-\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{50 S(2\pi)}{\pi \log\left(\frac{\ell}{a}\right)} = \frac{22.6}{\log\left(\frac{\ell}{a}\right)} \% \quad (128)$$

Bijvoorbeeld: als $\ell/a = 100$, dan is de resonantieverkorting ongeveer 5 procent. Dit klopt wel met het experiment.

Meestal geeft men de volgende verklaring van dit effect van resonantieverkorting. De fasesnelheid van electromagnetische signalen is langs de antenne iets kleiner dan in de vrije ruimte, dus is ook de golflengte langs de antenne kleiner dan in de vrije ruimte. De antenne is wel een halve golf lang, maar niet een halve golf van die in de vrije ruimte. Het is echter twijfelachtig of dit argument juist is.

Bij resonantie ($x = x_{\text{res}} < \pi/2$) is de stralingsweerstand iets kleiner dan bij de echte halve-golfantenne ($x = \pi/2$), omdat R daalt bij dalende x . Deze verkleining is in de orde van enkele ohms, en afhankelijk van de draaddiameter. Voor praktische toepassingen (koperen buizen) kan men de stralingsweerstand van een symmetrisch gevoede staafantenne stellen op 70 ohm.

Tot besluit van de elementaire theorie van de halve-golfantenne merken we op dat (124) een benadering is voor de ingangsimpedantie van de halve-golfantenne uit de praktijk. Deze benadering is goed in het geval van resonantie, maar wordt waardeloos voor het geval van anti-resonantie ($x = 0, \pi, 2\pi, \dots$). Om dat te corrigeren moet de theorie worden verfijnd en verbeterd. Hoe dat kan gebeuren is het levenswerk van Hallén geworden. Deze theorie op hoger niveau zal ik in de eerstvolgende colleges behandelen.

§.9 Theorie van Hallén voor de lineaire antenne.

De antenne is een rechte cilindrische draad ter lengte 2ℓ en diameter $2a$, met $a \ll \ell$. Voor het gemak nemen we de draad oneindig-goed geleidend, zodat de stroom langs het oppervlak loopt. Het beste denken we aan een holle koperen buis.

We zullen de problemen van zendantenne en van ontvangantenne tegelijkertijd beschouwen. Bij gebruik als zendantenne wordt de draad in het midden gevoed door een "slice generator". Als ontvangantenne werkende, zal hij een uitwendige impedantie over de klemmen in het midden hebben. In het laatste geval zullen we het invallend veld beperken tot een lineair gepolariseerde vlakke golf met de elektrische vector parallel aan de draad.

We nemen weer aan dat de stroom overal evenwijdig is aan de draadas (z-as); de as van de antenne is $|z| \leq \ell$. Zodoende laten we zekere antenne-eindeffecten buiten beschouwing. Fouten daardoor begaan zijn ruwweg van de orde a/ℓ ; termen van deze orde grootte worden in Hallén's beschouwingen over de "één-dimensionale" antenne altijd weggelaten.

De vectorpotential heeft weer alleen de z-component. Deze is gemakkelijk te berekenen op de as van de cylinder; er heerst natuurlijk axiale symmetrie. Laat $\varphi(z)$ zijn de waarde van A_z in het punt z van de as. Is dan I(z) de totale stroom door de dwarsdoorsnede van de draad bij z, dan geldt :

$$\varphi(z) = \frac{1}{c} \int_{-\ell}^{\ell} I(\zeta) \frac{e^{-jk\sqrt{(z-\zeta)^2+a^2}}}{\sqrt{(z-\zeta)^2+a^2}} d\zeta \quad (129)$$

De axiale component E van de elektrische vector in de as van de holle buis is berekenbaar uit

$$jk E = k^2 \varphi + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \quad (130)$$

Afgezien van termen van de orde a/ℓ zijn φ en E de axiale componenten van de vectorpotential en de elektrische vector aan de oppervlakte van de antennedraad.

Daar de antenne oneindig-goed geleidend is, moet de stroom I(z) worden bepaald zódanig dat het veld E juist wordt opgeheven door de geïnduceerde elektromotorische kracht.

Bijvoorbeeld: als een vlakke golf met amplitude E_0 (evenwijdig aan de antenne) op de antenne invalt, dan hebben we

$$\varphi'' + k^2 \varphi = -jk E_0 \quad (|z| \leq \ell) \quad (131)$$

In het geval dat de antenne als zendantenne werkt, heeft men

$$\varphi'' + k^2 \varphi = -jk E_i ,$$

waar $E_1 = 0$ buiten de "gap", maar E_1 zeer groot binnen de "gap".
 En wel zodanig dat $U = \int E_1 dz$ eindig blijft; U is dan de opgedrongen spanning over de voedingsklemmen.
 Voor de zendantenne geldt dus

$$\varphi'' + k^2 \varphi = -jk U \delta(z) \quad (|z| \leq \ell) \quad (132)$$

Kennelijk zijn $I(z)$ en $\varphi(z)$ even functies van z . De oplossingen van (131) en (132) kunnen worden gecombineerd tot

$$\varphi = A \sin k |z| + B \cos kz + C \quad (133)$$

waarin A , B en C onafhankelijk van z zijn.

Voor de onbelaste (kortgesloten) ontvangantenne geldt

$$A = 0, \quad C = -j E_0 / k \quad (134)$$

en voor de zendantenne geldt

$$A = -\frac{1}{2} j U, \quad C = 0 \quad (135)$$

We merken even op dat $\sin k |z|$ oplossing is van $\varphi'' + k^2 \varphi = 2k \delta(z)$. De constante B moet later worden bepaald.

Het mathematisch probleem is nu gereduceerd tot het bepalen van de stroom $I(\zeta)$ en de constante B , zodanig dat voor $|z| \leq \ell$ geldt

$$A \sin k |z| + B \cos kz + C = \frac{1}{c} \int_{-\ell}^{\ell} I(\zeta) \frac{e^{-jk\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2}} d\zeta \quad (136)$$

en

$$I(z) = I(-z), \quad I(\pm \ell) = 0 \quad (137)$$

Zò geformuleerd heeft het zendantenne-probleem geen oplossing. Immers, het linkerlid vertoont bij $z = 0$ een sprong in de afgeleide naar z ($A \neq 0$), het rechterlid heeft een continue afgeleide, voor elke $a > 0$. Maar we moeten bedenken dat (136) niet in de buurt van $z = 0$ in alle strengheid geldt. In het fysische probleem spelen termen van de orde a/ℓ juist een grote rol in de buurt van $z = 0$ (zie opmerking volgende op formule 130). Men kan zeggen: vgl. (136) geldt globaal; uitzonderingen als bij $z = 0, \pm \ell$ moeten we in acht nemen.

Hallén gaat als volgt verder. De hoofdbijdrage tot $\varphi(z)$ in (129) komt van de punten ζ in de buurt van z , afgezien van de punten z met $I(z) = 0$. Hij schrijft daarom

$$\int_{-\ell}^{\ell} I(\zeta) \frac{e^{-jkr}}{r} d\zeta = I(z) \int_{-\ell}^{\ell} \frac{d\zeta}{r} + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{I(\zeta)e^{-jkr} - I(z)}{r} d\zeta \quad (138)$$

waarin $r = \sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2}$. De eerste term rechts kan expliciet worden bepaald in logarithmes. Deze kan worden benaderd door

$$\Omega + \log\left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right)$$

waarbij

$$\Omega = 2 \log \left(\frac{2\ell}{a}\right) \quad (139)$$

Voor grote waarden van de parameter Ω hebben we dus

$$I(z) \int_{-\ell}^{\ell} \frac{d\zeta}{r} \approx \Omega I(z) + I(z) \log\left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) \quad (140)$$

hetgeen zelfs een bruikbare benadering is voor $z \approx \pm \ell$, waar $I(z) \approx 0$. Vgl. (140) demonstreert ook dat $\varphi(z)$ ongeveer evenredig is met $I(z)$ en dat uit $E = 0$ aan 't oppervlak volgt dat φ precies en dus I bij benadering sinusvormig langs de draad varieert.

In de tweede term van het rechterlid van (138) vervangen we r door $|z - \zeta|$. We krijgen dan de "integraalvergelijking":

$$I(z) = \frac{C}{\Omega} [A \sin k |z| + B \cos kz + C] - \frac{1}{\Omega} [I(z) \log\left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{I(\zeta) e^{-jk|z-\zeta|} - I(z)}{|z-\zeta|} d\zeta] \quad (141)$$

Deze vergelijking is natuurlijk bij benadering geldig. Zonder op details in te gaan, merken we echter op dat deze relatie (141) exact is tot op termen van de orde a/ℓ , zoals men kan verifiëren aan de hand van Hallén's publicaties. Het karakteristieke van de theorie van lineaire antennes van Hallén is het te voorschijn komen van de grote constante Ω . In zijn theorie worden termen van de orde a/ℓ buiten beschouwing gelaten, maar termen van de orde Ω^{-1} , Ω^{-2} , ..., moeten worden meegenomen.

We schrijven nu vgl. (141) op voor $z = \ell$, en omdat $I(\ell) = 0$ is, wordt dit

$$0 = \frac{C}{\Omega} [A \sin k\ell + B \cos k\ell + C] - \frac{1}{\Omega} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{I(\zeta) e^{-jk(\ell-\zeta)}}{\ell-\zeta} d\zeta \quad (142)$$

Als we (142) van (141) aftrekken, komt er

$$I(z) = \frac{C}{\Omega} [A \{ \sin k|z| - \sin k\ell \} + B \{ \cos kz - \cos k\ell \}] - \frac{1}{\Omega} [I(z) \log\left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{I(\zeta) e^{-jk|z-\zeta|} - I(z)}{|z-\zeta|} d\zeta - \int_{-\ell}^{\ell} \frac{I(\zeta) e^{-jk(\ell-\zeta)}}{\ell-\zeta} d\zeta] \quad (143)$$

Dit nu is een vergelijking die men door iteratie gaat oplossen. Voor grote Ω is $I(z)$ in eerste benadering gelijk aan

$$I(z) \approx \frac{c}{\Omega} [A \{ \sin k|z| - \sin k\ell \} + B \{ \cos kz - \cos k\ell \}] \quad (144)$$

waar B nog kan afhangen van Ω . In elk geval wordt door (144) voldaan aan de bijvoorwaarden (137).

Een betere benadering voor $I(z)$ vinden we door in het rechterlid van (143) de $I(z)$ of $I(\zeta)$ te vervangen door de corresponderende uitdrukking in eerste benadering (144). Zo doorgaande krijgen we een formele machtreeks in Ω^{-1} , nl.

$$I(z) = \frac{cA}{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(z) - G_n(\ell)}{\Omega^n} + \frac{cB}{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z) - F_n(\ell)}{\Omega^n} \quad (145)$$

waarbij

$$F_0(z) = \cos kz, \quad G_0(z) = \sin k|z|$$

en de functies $F_n(z)$ recurrent kunnen worden bepaald uit

$$F_{n+1}(z) = \{ F_n(\ell) - F_n(z) \} \log\left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\{ F_n(\ell) - F_n(\zeta) \} e^{-jk|z-\zeta|} - \{ F_n(\ell) - F_n(z) \}}{|z - \zeta|} d\zeta$$

en analoog voor G_n .

De functies F_1 en G_1 kunnen worden uitgedrukt in elementaire functies en integraalsinus en integraalcosinus functies :

$$F_1(z) = \{ \cos k\ell - \cos kz \} \log\left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) + \frac{1}{2} \{ e^{jkz} E(2k\ell + 2kz) + e^{-jkz} E(2k\ell - 2kz) \} - \cos k\ell \{ E(k\ell + kz) + E(k\ell - kz) \} \quad (146)$$

$$G_1(z) = \{ \sin k\ell - \sin k|z| \} \log\left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) + \frac{1}{2} j \{ e^{jkz} E(2k\ell + 2kz) + e^{-jkz} E(2k\ell - 2kz) \} - \sin k\ell \{ E(k\ell + kz) + E(k\ell - kz) \} - j e^{jk|z|} E(2k|z|) + 2 \sin k|z| \log\left(1 + \frac{\ell}{|z|}\right) \quad (147)$$

Het vele werk nodig om deze uitdrukkingen af te leiden is niets vergeleken bij dat vereist voor het berekenen van de functies F_2 en G_2 . Toch is Hallén daarin geslaagd, daarbij gebruik makende van geïteerde integraalsinus en cosinus functies. Het kopiëren van Hallén's formules op het bord vereist zoveel tijd, dat ik dat graag nalaat.

De constante B is nog steeds niet bepaald. Om dat te doen, substitueren we in vergelijking (142) de uitdrukking (145) verkregen voor $I(\zeta)$. Het resultaat is

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(\ell)}{\Omega^n} + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\ell)}{\Omega^n} + C = 0.$$

Als we dan B elimineren tussen deze vergelijking en (145) vinden we voor de stroom

$$I(z) = -\frac{C}{\Omega} \frac{A \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(\ell)}{\Omega^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{\Omega^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\ell)}{\Omega^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(z)}{\Omega^n} \right] + C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z) - F_n(\ell)}{\Omega^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\ell)}{\Omega^n}} \quad (148)$$

De stroom is dus tenslotte gevonden in de vorm van een breuk, waarvan teller en noemer formele machtreeksen zijn in de kleine parameter Ω^{-1} . Het probleem van convergentie is nooit in details onderzocht, maar we mogen verwachten dat de reeksen tenminste asymptotisch zullen zijn. In elk geval geeft (148) een asymptotische oplossing (dat hoeft nog niet een asymptotische ontwikkeling van de oplossing te zijn!). In analoge gevallen kan men streng bewijzen dat de reeksen convergeren.

Laten we eerst de hoofdterm in de teller van (148) nemen. Deze is

$$A \sin k(\ell - |z|) + C \{ \cos kz - \cos k\ell \} \quad (149)$$

Voor $C = 0$ vinden we dus de stroomverdeling langs de zendantenne zoals werd aangenomen in de elementaire behandeling volgens Labus. In het geval van de kortgesloten ontvangantenne (met $A = 0$) verkrijgen we de stroomverdeling van Von Korshenewsky, evenredig met $(\cos kz - \cos k\ell)$. Deze speelt een rol in parasitaire elementen van een antennesysteem.

Met redelijke moeite kan men de volgende term ($n=1$) uitrekenen, zoals door King en leerlingen is gedaan. De termen met $n=2$ geven "onoverkoombare moeilijkheden, omdat tabellen ontbreken. Dit echter geldt niet voor de stroom in het midden, $z = 0$.

Daarvoor kunnen we schrijven, tot en met termen Ω^{-2} :

$$I(0) = -\frac{c}{\Omega} \frac{A \left[\sin x + \frac{b_1}{\Omega} + \frac{b_2}{\Omega^2} \right] + C \left[1 - \cos x + \frac{c_1}{\Omega} + \frac{c_2}{\Omega^2} \right]}{\cos x + \frac{a_1}{\Omega} + \frac{a_2}{\Omega^2}} \quad (150)$$

Hierbij is weer $x = k\ell$. De coëfficiënten a_1, \dots, c_2 zijn functies van x . Die van de eerste orde (a_1, b_1, c_1) kunnen worden uitgedrukt in elementaire en integraal-sinus en cosinus functies. Te weten :

$$a_1(x) = \frac{1}{2} e^{jx} E(4x) - \cos x E(2x) \quad (151)$$

$$b_1(x) = \frac{1}{2} j e^{jx} [E(4x) - 4 E(2x)] + \sin x [\log 4 - E(2x)] \quad (152)$$

$$c_1(x) = -\frac{1}{2} e^{jx} E(4x) + (1 + \cos x) E(2x) - 2 \cos x E(x) \quad (153)$$

De coëfficiënten van de tweede orde zijn niet in deze functies uit te drukken. De coëfficiënt a_2 is betrekkelijk eenvoudig :

$$a_2(x) = -a_1(x) [\log 4 + E(2x)] - \frac{1}{2} \cos x E^2(2x) + 2j \sin x E_1(4x) + \cos x [E_1(4x) - 2 E_1(2x)] \quad (154)$$

met
$$E_1(x) = \int_0^x \frac{E(s)}{s} ds.$$

Het resultaat (154) is door Hallén en Bouwkamp gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar gevonden. Dat is een prachtige controle op de bewerkelijke afleiding !

De coëfficiënt b_2 is ingewikkelder. Volgens Hallén geldt

$$b_2(x) = -\sin x E(4x) - 6j \cos x E(2x) - \frac{1}{2} j e^{jx} E(2x) E(4x) + \frac{1}{2} \sin x E^2(2x) + 2 \sin x C(2x) + 2 \cos x S(2x) + 2j e^{-jx} \int_0^{2x} \frac{e^{js}}{s} [E(2s) - E(s)] ds \quad (155)$$

Een expliciete formule voor $c_2(x)$ schijnt niet te zijn afgeleid.

We geven nu de formule voor deingangsimpedantie van de zendantenne. Deze is gelijk aan .

$$Z_i = \frac{U}{I(0)} = \frac{2jA}{I(0)}$$

als we het verband tussen klemspanning U en de grootheid A uit vergelijking (135) in acht nemen. Na invullen van de gevonden uitdrukking $I(o)$, voor het geval $C = 0$ (zendantenne), en $c = 1/30$ stellende, krijgen we in ohms :

$$Z_1 = -60j\Omega \frac{\cos x + \frac{a_1(x)}{\Omega} + \frac{a_2(x)}{\Omega^2}}{\sin x + \frac{b_1(x)}{\Omega} + \frac{b_2(x)}{\Omega^2}} \quad (156)$$

Deze manier van impedantieberekening is wel fundamenteel verschillend van die in de elementaire theorie ! De uitdrukking (156) leidt niet tot oneindigheden, zoals de corresponderende Labus-formule (124). Buiten het kritieke interval waar $\sin x \approx 0$ is, zijn de twee formules evenwel identiek, tot op termen van de orde Ω^{-1} . Als men (156) naar machten van Ω^{-1} ontwikkelt, komt er

$$Z_1 = \frac{60}{\sin^2 x} \left[-\frac{1}{2}j\Omega \sin 2x + \frac{1}{2}j \sin 2x \log 4 + E(2x) + e^{2jx} \left\{ E(2x) - \frac{1}{2} E(4x) \right\} + O(\Omega^{-1}) \right]$$

hetgeen, afgezien van de 0-term precies (124) is, omdat geldt

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}j\Omega \sin 2x + \frac{1}{2}j \sin 2x \log 4 = \\ & = -j \sin 2x \left[\frac{1}{2}\Omega - \frac{1}{2} \log 4 \right] = -j \sin 2x \log \left(\frac{\ell}{a} \right). \end{aligned}$$

Beide vergelijkingen (124) en (156) zijn benaderingen waarin termen $O(a/\ell)$ zijn verwaarloosd. De afwijking van de sinusvormige stroomverdeling is bij Hallén van de orde Ω^{-1} . Daarmee in overeenstemming is dus dat (124) en (156) overeenstemmen tot op termen Ω^{-1} .

Numerieke tabellen voor de functies $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b_1(x)$ en $b_2(x)$ zijn bijgevoegd voor $x = 0.1(0.1)5$ [4D]. De tweede-orde coëfficiënten zijn onverwacht groot. Redelijk-goede resultaten van Hallén's theorie mag men verwachten voor $\Omega > 10$ à 15 .

Evenals in de elementaire theorie, kunnen we nu vragen naar de resonantie verkorting. We beschouwen eerst faseresonantie, wanneer de ingangsimpedantie zuiver-ohms is. Dan moeten we de wortels bepalen van $\text{Im}(Z_1) = 0$, tot en met termen Ω^{-2} .

Bij de n -de resonantie stellen we

$$x = x_n = n \frac{\pi}{2} - \frac{A_n}{\Omega} - \frac{B_n}{\Omega^2} \quad (157)$$

Tabel V $a_1(x) = \frac{1}{2} e^{jx} E(4x) - \cos x E(2x)$

x	$a_1(x)$	x	$a_1(x)$
0.1	- 0.0100 + 0.0007 j	2.6	0.3550 + 1.3695 j
0.2	- 0.0393 + 0.0053 j	2.7	0.4686 + 1.2690 j
0.3	- 0.0865 + 0.0175 j	2.8	0.5756 + 1.1534 j
0.4	- 0.1490 + 0.0407 j	2.9	0.6749 + 1.0247 j
0.5	- 0.2235 + 0.0773 j	3.0	0.7661 + 0.8851 j
0.6	- 0.3061 + 0.1292 j	3.1	0.8487 + 0.7362 j
0.7	- 0.3924 + 0.1973 j	3.2	0.9225 + 0.5800 j
0.8	- 0.4780 + 0.2815 j	3.3	0.9875 + 0.4180 j
0.9	- 0.5583 + 0.3807 j	3.4	1.0436 + 0.2514 j
1.0	- 0.6291 + 0.4930 j	3.5	1.0905 + 0.0816 j
1.1	- 0.6866 + 0.6156 j	3.6	1.1280 - 0.0904 j
1.2	- 0.7278 + 0.7451 j	3.7	1.1556 - 0.2634 j
1.3	- 0.7503 + 0.8777 j	3.8	1.1730 - 0.4363 j
1.4	- 0.7528 + 1.0091 j	3.9	1.1795 - 0.6080 j
1.5	- 0.7345 + 1.1351 j	4.0	1.1743 - 0.7771 j
1.6	- 0.6957 + 1.2517 j	4.1	1.1569 - 0.9422 j
1.7	- 0.6376 + 1.3550 j	4.2	1.1265 - 1.1016 j
1.8	- 0.5618 + 1.4419 j	4.3	1.0828 - 1.2535 j
1.9	- 0.4708 + 1.5097 j	4.4	1.0253 - 1.3960 j
2.0	- 0.3672 + 1.5563 j	4.5	0.9542 - 1.5271 j
2.1	- 0.2540 + 1.5805 j	4.6	0.8695 - 1.6446 j
2.2	- 0.1343 + 1.5819 j	4.7	0.7720 - 1.7468 j
2.3	- 0.0109 + 1.5604 j	4.8	0.6625 - 1.8315 j
2.4	0.1134 + 1.5170 j	4.9	0.5423 - 1.8973 j
2.5	0.2361 + 1.4528 j	5.0	0.4130 - 1.9426 j

Opmerking: Laatste decimaal nauwkeurig afgerond.
Berekend door Bouwkamp.

Tabel VI $b_1(x) = \frac{1}{2j} e^{jx} \{ E(4x) - 4 E(2x) \} + \sin x \{ \log 4 - E(2x) \}$

x	$b_1(x)$	x	$b_1(x)$
0.1	0.3374 + 0.0000 j	2.6	- 0.7142 + 3.1931 j
0.2	0.6667 + 0.0006 j	2.7	- 0.9833 + 3.2883 j
0.3	0.9802 + 0.0028 j	2.8	- 1.2479 + 3.3520 j
0.4	1.2710 + 0.0083 j	2.9	- 1.5065 + 3.3828 j
0.5	1.5326 + 0.0197 j	3.0	- 1.7560 + 3.3799 j
0.6	1.7594 + 0.0397 j	3.1	- 1.9946 + 3.3422 j
0.7	1.9475 + 0.0713 j	3.2	- 2.2200 + 3.2732 j
0.8	2.0938 + 0.1176 j	3.3	- 2.4292 + 3.1705 j
0.9	2.1960 + 0.1811 j	3.4	- 2.6196 + 3.0361 j
1.0	2.2540 + 0.2641 j	3.5	- 2.7884 + 2.8713 j
1.1	2.2682 + 0.3681 j	3.6	- 2.9325 + 2.6772 j
1.2	2.2403 + 0.4941 j	3.7	- 3.0495 + 2.4552 j
1.3	2.1725 + 0.6423 j	3.8	- 3.1375 + 2.2070 j
1.4	2.0681 + 0.8112 j	3.9	- 3.1945 + 1.9344 j
1.5	1.9308 + 0.9996 j	4.0	- 3.2188 + 1.6393 j
1.6	1.7644 + 1.2042 j	4.1	- 3.2096 + 1.3235 j
1.7	1.5731 + 1.4216 j	4.2	- 3.1662 + 0.9889 j
1.8	1.3601 + 1.6477 j	4.3	- 3.0891 + 0.6383 j
1.9	1.1301 + 1.8781 j	4.4	- 2.9790 + 0.2743 j
2.0	0.8864 + 2.1071 j	4.5	- 2.8369 - 0.1003 j
2.1	0.6317 + 2.3304 j	4.6	- 2.6647 - 0.4823 j
2.2	0.3691 + 2.5431 j	4.7	- 2.4645 - 0.8681 j
2.3	0.1011 + 2.7393 j	4.8	- 2.2390 - 1.2535 j
2.4	-0.1701 + 2.9154 j	4.9	- 1.9903 - 1.6345 j
2.5	-0.4425 + 3.0676 j	5.0	- 1.7214 - 2.0072 j

Opmerking: Laatste decimaal niet verantwoord.
Berekend door King and Blake.

Tabel VII $a_2(x)$ (zie vergelijking 154)

x	$a_2(x)$	x	$a_2(x)$
0.1	- 0.0359 + 0.0022 j	2.6	- 2.2678 + 3.4640 j
0.2	- 0.1415 + 0.0171 j	2.7	- 1.9045 + 3.3755 j
0.3	- 0.3099 + 0.0563 j	2.8	- 1.4931 + 3.2385 j
0.4	- 0.5311 + 0.1284 j	2.9	- 1.0397 + 3.0487 j
0.5	- 0.7919 + 0.2392 j	3.0	- 0.5524 + 2.8034 j
0.6	- 1.0784 + 0.3901 j	3.1	- 0.0402 + 2.5018 j
0.7	- 1.3762 + 0.5790 j	3.2	0.4869 + 2.1447 j
0.8	- 1.6723 + 0.8004 j	3.3	1.0187 + 1.7349 j
0.9	- 1.9560 + 1.0462 j	3.4	1.5450 + 1.2770 j
1.0	- 2.2191 + 1.3070 j	3.5	2.0560 + 0.7771 j
1.1	- 2.4564 + 1.5727 j	3.6	2.5430 + 0.2427 j
1.2	- 2.6654 + 1.8344 j	3.7	2.9979 - 0.3177 j
1.3	- 2.8455 + 2.0844 j	3.8	3.4141 - 0.8948 j
1.4	- 2.9977 + 2.3171 j	3.9	3.7862 - 1.4792 j
1.5	- 3.1232 + 2.5291 j	4.0	4.1100 - 2.0611 j
1.6	- 3.2229 + 2.7192 j	4.1	4.3828 - 2.6312 j
1.7	- 3.2969 + 2.8875 j	4.2	4.6030 - 3.1808 j
1.8	- 3.3437 + 3.0355 j	4.3	4.7700 - 3.7021 j
1.9	- 3.3604 + 3.1644 j	4.4	4.8840 - 4.1880 j
2.0	- 3.3431 + 3.2752 j	4.5	4.9459 - 4.6330 j
2.1	- 3.2867 + 3.3680 j	4.6	4.9568 - 5.0323 j
2.2	- 3.1862 + 3.4413 j	4.7	4.9180 - 5.3825 j
2.3	- 3.0369 + 3.4923 j	4.8	4.8308 - 5.6811 j
2.4	- 2.8350 + 3.5166 j	4.9	4.6959 - 5.9264 j
2.5	- 2.5787 + 3.5091 j	5.0	4.5142 - 6.1172 j

Opmerking: Laatste decimaal nauwkeurig afgerond.
Berekend door Bouwkamp.

Tabel VIII $b_2(x)$ (zie vergelijking 155)

x	$b_2(x)$	x	$b_2(x)$
0.1	1.3462 + 0.0002 j	2.6	- 19.3764 + 17.9411 j
0.2	2.6426 + 0.0039 j	2.7	- 21.1756 + 18.6030 j
0.3	3.8420 + 0.0192 j	2.8	- 22.8220 + 19.1159 j
0.4	4.9014 + 0.0591 j	2.9	- 24.2878 + 19.4628 j
0.5	5.7838 + 0.1399 j	3.0	- 25.5479 + 19.6277 j
0.6	6.4599 + 0.27.. j	3.1	- 26.5798 + 19.5964 j
0.7	6.9079 + 0.4946 j	3.2	- 27.3644 + 19.3568 j
0.8	7.1141 + 0.8018 j	3.3	- 27.8859 + 18.8991 j
0.9	7.0723 + 1.2134 j	3.4	- 28.1322 + 18.2165 j
1.0	6.7825 + 1.7374 j	3.5	- 28.0945 + 17.3054 j
1.1	6.2504 + 2.3770 j	3.6	- 27.7679 + 16.1655 j
1.2	5.4859 + 3.1306 j	3.7	- 27.1510 + 14.7998 j
1.3	4.5019 + 3.9915 j	3.8	- 26.2459 + 13.2150 j
1.4	3.3135 + 4.9495 j	3.9	- 25.0578 + 11.4213 j
1.5	1.9376 + 5.9908 j	4.0	- 23.5957 + 9.4320 j
1.6	0.3921 + 7.0994 j	4.1	- 21.8709 + 7.2642 j
1.7	- 1.3036 + 8.2580 j	4.2	- 19.8980 + 4.9376 j
1.8	- 3.1291 + 9.4484 j	4.3	- 17.6939 + 2.4748 j
1.9	- 5.0620 + 10.6524 j	4.4	- 15.2780 - 0.0991 j
2.0	- 7.0786 + 11.8517 j	4.5	- 12.6714 - 2.7570 j
2.1	- 9.1530 + 13.0282 j	4.6	- 9.8976 - 5.4705 j
2.2	- 11.2576 + 14.1641 j	4.7	- 6.9814 - 8.2099 j
2.3	- 13.3631 + 15.2414 j	4.8	- 3.9490 - 10.9449 j
2.4	- 15.4390 + 16.24.. j	4.9	- 0.8285 - 13.6451 j
2.5	- 17.4539 + 17.1481 j	5.0	2.3511 - 16.2805 j

Opmerking: Laatste decimaal op twee eenheden nauwkeurig.
Berekend door Hallén.

We vermenigvuldigen in (156) teller en noemer met het geconjugueerd-complexe van de noemer. Aldus wordt de conditie voor faseresonantie

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{\Omega} \{a_1 \sin x + b_1^* \cos x\} + \frac{1}{\Omega^2} \{a_2 \sin x + a_1 b_1^* + b_2^* \cos x\}\right] = 0$$

ofwel

$$\sin 2x + \frac{P(x)}{\Omega} + \frac{Q(x)}{\Omega^2} = 0 \quad (158)$$

met

$$P(x) = 2 \sin x \operatorname{Re}(a_1) + 2 \cos x \operatorname{Re}(b_1)$$

$$Q(x) = 2 \sin x \operatorname{Re}(a_2) + 2 \cos x \operatorname{Re}(b_2) + 2 \operatorname{Re}(a_1) \operatorname{Re}(b_1) + 2 \operatorname{Im}(a_1) \operatorname{Im}(b_1)$$

Invullen van (157) in (158) en nulstellen van de coëfficiënten van Ω^{-1} en Ω^{-2} geeft

$$A_n = \frac{1}{2} P \cos n\pi$$

$$B_n = \frac{1}{2} Q \cos n\pi - \frac{1}{4} P P' \quad (159)$$

waar het accent differentiatie naar x betekent en waar P, P', Q de waarden van de overeenkomstige functies zijn in $x = n\pi/2$. Na enig rekenwerk vindt men

$$A_n = S(n\pi) + (-1)^n \left\{ S(n\pi) - \frac{1}{2} S(2n\pi) \right\} \quad (160)$$

$$\begin{aligned} B_n = & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{Re}\left[b_2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{Re}\left[a_2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \\ & + \log 2 \left\{ S(2n\pi) - 4 S(n\pi) \right\} \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{2} (-1)^n \left\{ S(n\pi) C(2n\pi) - C(n\pi) S(2n\pi) \right\} \end{aligned} \quad (161)$$

Speciaal voor $n = 1$ geldt:

$$A_1 = \frac{1}{2} S(2\pi) = 0.7091$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left\{ C(\pi) S(2\pi) - S(\pi) S(2\pi) \right\} - \operatorname{Re}\left[a_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2.108$$

en voor $n = 2$:

$$A_2 = 2 S(2\pi) - \frac{1}{2} S(4\pi) = 2.090$$

$$\begin{aligned} B_2 = & \frac{1}{2} \left\{ S(2\pi) C(4\pi) - C(2\pi) S(4\pi) \right\} + \\ & + \left\{ S(4\pi) - 4 S(2\pi) \right\} \log 2 - \operatorname{Re}\left[b_2(\pi)\right] = 24.43 \end{aligned}$$

Voor het eerste resonantie punt geldt dan

$$x_{\text{res}} = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{0.451}{\Omega} - \frac{1.34}{\Omega^2} \right] \quad (162)$$

en voor het eerste anti-resonantie punt

$$x_{\text{ares}} = \pi \left[1 - \frac{0.665}{\Omega} - \frac{7.78}{\Omega^2} \right] \quad (163)$$

Vgl.(162) kan worden vergeleken met het resultaat van de elementaire theorie (127)

$$x_{\text{res}} = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{S(2\pi)}{2\pi \log \frac{\lambda}{a}} \right] = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{0.451}{\Omega} + o(\Omega^{-2}) \right]$$

zodat de niet-sinusvormige term van de stroomverdeling in Hallén's theorie tot een additionele resonantieverschuiving $O(\Omega^{-2})$ leidt.

Het is ook nuttig de resonantiecorrectie te geven in termen van de karakteristieke golflengte. Deze zijn

$$\lambda_1 = 4\ell \left[1 + \frac{0.451}{\Omega} + \frac{1.55}{\Omega^2} \right] \quad (\text{eerste reson.}) \quad (164)$$

$$\lambda_2 = 2\ell \left[1 + \frac{0.665}{\Omega} + \frac{8.22}{\Omega^2} \right] \quad (\text{eerste anti-reson.}) \quad (165)$$

We merken op dat de eindcorrectie voor anti-resonantie veel groter is dan die voor resonantie. We moeten echter bedenken dat speciaal de impedantie bij anti-resonantie erg afhankelijk is van de omstandigheden in het voedingspunt. De interactie tussen voedingslijn en eigenlijke antenne is niet volledig in de formules verwerkt, zodat we ook niet al te veel betekenis moeten toekennen aan ons resultaat, tenzij we door het afspitsen van de vlakke cilindrische eindvlakken de capaciteit tussen de twee antennehelften bij 't voedingspunt verkleinen.

In de praktijk stemt men vaak een antenne af door de ingangsstroom maximaal te maken, bij constante spanning. Deze resonantie is niet precies gelijk aan faseresonantie, want de voorwaarde is nu $|Z_1|$ minimaal, wat niet 't zelfde is als $\text{Im}(Z_1) = 0$. Men spreekt dan van stroomresonantie.

In 't algemeen is de voorwaarde voor stroomresonantie en anti-resonantie: $|Z_1|$ extremaal (maximum voor anti-resonantie, minimum voor resonantie).

De oplossingen van $|Z_1|$ stationair stellen we

$$x = \bar{x}_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{\Omega} - \frac{\beta}{\Omega^2} \quad (166)$$

Dan blijkt $\alpha_n = A_n$ te zijn, terwijl men voor β_n vindt :

$$\begin{aligned} \beta_n &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{Re}\left[b_2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{Re}\left[a_2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \\ &+ \log 2 \{S(2n\pi) - 4S(n\pi)\} \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left[\{C(2n\pi) - 4C(n\pi)\} \{S(n\pi) - \frac{1}{2}S(2n\pi)\} + \right. \quad (167) \\ &+ \{S(2n\pi) - 4S(n\pi)\} \{C(n\pi) - \frac{1}{2}C(2n\pi)\} \left. \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left[C(2n\pi) \{S(n\pi) - \frac{1}{2}S(2n\pi)\} + S(2n\pi) \{C(n\pi) - \frac{1}{2}C(2n\pi)\} \right] \end{aligned}$$

Voor $n = 1$ en $n = 2$ geven deze formules

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2} \{S(\pi)C(2\pi) + S(2\pi)C(\pi) - S(2\pi)C(2\pi)\} - \operatorname{Re}\left[a_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= 4.898. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{2} \{3S(2\pi)C(4\pi) + 3S(4\pi)C(2\pi) - 8S(2\pi)C(2\pi) - S(4\pi)C(4\pi)\} + \\ &+ \log 2 \{S(4\pi) - 4S(2\pi)\} - \operatorname{Re}\left[b_2(\pi)\right] = \\ &= 19.97. \end{aligned}$$

Verdere berekening leert dan dat:

$$\bar{x}_1 = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{0.451}{\Omega} - \frac{3.12}{\Omega^2} \right] \quad (168)$$

$$\bar{x}_2 = \pi \left[1 - \frac{0.665}{\Omega} - \frac{6.36}{\Omega^2} \right] \quad (169)$$

ofwel

$$\bar{\lambda}_1 = 4\ell \left[1 + \frac{0.451}{\Omega} + \frac{3.33}{\Omega^2} \right] \quad (170)$$

$$\bar{\lambda}_2 = 2\ell \left[1 + \frac{0.665}{\Omega} + \frac{6.80}{\Omega^2} \right] \quad (171)$$

Tenslotte kunnen we nog formules afleiden voor de punten waar de ohmse weerstand van de antenne maximaal is. Deze maxima van R liggen in de buurt van $x = n\pi$. Men kan bewijzen :

$$x_{R_{\max}} - x_{\text{ares}} = \frac{1}{\Omega^2} \left[S(2n\pi) - \frac{1}{2}S(4n\pi) \right] \left[2C(2n\pi) - \frac{1}{2}C(4n\pi) \right]$$

waar de anti-resonantie betrekking heeft op fase-resonantie.

Voor $m = 1$ is bovenstaand verschil $2.23/\Omega^2$, zodat

$$x_{R_{\max}} = \pi \left[1 - \frac{0.665}{\Omega} - \frac{7.07}{\Omega^2} \right] \quad (172)$$

We merken op dat de coëfficiënten van de Ω^{-2} termen in (163) (169) en (172) voldoen aan

$$7.07 = \frac{1}{2} (7.78 + 6.36)$$

De plaats waar R maximaal is ligt dus precies midden tussen de plaatsen van fase en stroom antiresonanties, tot en met termen Ω^{-2} . Dit blijkt te gelden voor elke m.

We geven ook nog even een formule voor de waarde van R in dit maximum:

$$R_{\max} = 60 \Omega^2 \frac{1 + \frac{p_m}{\Omega}}{q_m + \frac{r_m}{\Omega}} \quad (173)$$

$$\text{met } p_m = \frac{1}{2} C(4m\pi) - C(2m\pi)$$

$$q_m = 2C(2m\pi) - \frac{1}{2} C(4m\pi)$$

$$r_m = \{2S(2m\pi) - \frac{1}{2} S(4m\pi)\} \{S(2m\pi) - \frac{1}{2} S(4m\pi)\} - (-1)^m \text{Im}[b_2(m\pi)].$$

Voor $m = 1$ vinden we

$$p_1 = -0.880, \quad q_1 = 3.318, \quad r_1 = 20.93.$$

Dus krijgen we voor het eerste maximum

$$R_{\max} = 60 \Omega^2 \frac{1 - 0.880/\Omega}{3.318 + 20.93/\Omega} \quad (174)$$

Tabelletje:

$\frac{a}{\lambda}$	$\Omega = 2 \log \left(\frac{2\ell}{a} \right)$	R_{\max} (ohm)
0.0000075	25	8700
0.000091	20	5250
0.00111	15	2700
0.0135	10	1000

Nu stappen we af van de zendantenne, en we zullen overgaan tot het probleem van de ontvang-antenne, als het invallend veld een vlakke lineair-gepolariseerde golf is met de elektrische vector evenwijdig aan de draad.

We onderstellen dat de klemmen van de antenne zijn verbonden via een belastingsimpedantie Z_e (e van "external"). Voor de aldus belaste ontvang-antenne zijn de constanten A en C uit onze algemene vgl.(133) gegeven door

$$A = \frac{1}{2j} Z_e I(0), \quad C = -j E_0/k \quad (175)$$

omdat $Z_e I(0)$ het spanningsverlies over de impedantie Z_e is (zie ook vgl.134 en 135). Door eliminatie van A en C tussen (175) en de uitdrukking (150) voor $I(0)$, krijgen we

$$I(0) = \frac{Z_e I(0)}{60j\Omega} \frac{\sin x + \dots}{\cos x + \dots} + \frac{jE_0}{30k\Omega} \frac{1 - \cos x + \dots}{\cos x + \dots}.$$

Lossen we $I(0)$ op, en gebruiken we de uitdrukking (156) voor Z_i , zijnde de ingangsimpedantie van dezelfde antenne als zendantenne gebruikt, dan komt er

$$I(0) = \frac{\mu \cdot 2\ell E_0}{Z_i + Z_e} \quad (176)$$

waarin μ een afkorting is voor

$$\mu(x) = \frac{1}{x} \frac{1 - \cos x + c_1(x)/\Omega + c_2(x)/\Omega^2}{\sin x + b_1(x)/\Omega + b_2(x)/\Omega^2} \quad (177)$$

De fysische interpretatie van (176) is als volgt: De grootheid $2\ell E_0$ is het product van antennelengte en invallend elektrisch veld; $2\ell E_0$ is dus de geïnduceerde electromotorische kracht. De grootheid μ is antennenvormfactor, zodat $2\ell\mu$ de "effectieve lengte" van de antenne is. Het effect van de ontvangantenne op de transmissielijn is equivalent aan dat van een generator met klemspanning $2\ell\mu E_0$ en inwendige weerstand Z_i . Merk op dat μ complex kan zijn.

Voor een zeer dunne antenne ter lengte $\frac{1}{2}\lambda$ is de antennenvormfactor gelijk aan $2/\pi$. De effectieve antennelengte is dan λ/π . Voor een zeer korte antenne geldt $\mu = \frac{1}{2}$.

De energie-absorptie door de impedantie per tijdseenheid gemiddeld is

$$P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z_e) |I(0)|^2 \quad (178)$$

Bij gegeven antenne-afmetingen en gegeven invallend veld is P_a maximaal wanneer Z_e zó wordt gekozen dat

$$\text{Im}(Z_i + Z_e) = 0, \quad \text{Re}(Z_e - Z_i) = 0 \quad (179)$$

Onder deze omstandigheden (men spreekt dan van aanpassing, power match) is het vermogen geabsorbeerd door de antenne uit het invallend veld gelijk aan

$$P_m = \frac{1}{8} (2\ell E_o)^2 \frac{|\mu|^2}{R} \quad (180)$$

waarin R de ingangsweerstand (het reële deel van de ingangsimpedantie) van de antenne voorstelt onder zendcondities.

In het bijzonder geldt voor de halve-golfantenne, in de limiet van draaddoorsnede nul, met $2\ell = \lambda/2$, $\mu = 2/\pi$, $R = 30 C(2\pi)$:

$$P_m = \frac{\lambda^2 E_o^2}{240 \pi^2 C(2\pi)} = 0.0001732 \lambda^2 E_o^2 \quad (181)$$

gemeten in Watt, λE_o gemeten in volt.

Het absorberend vermogen van een antenne kan worden beschreven met het begrip: effectieve absorptie doorsnede. Dit laatste is de verhouding σ van P_m tot de powerflux P_o van de invallende golf. In praktische eenheden heeft men $P_o = E_o^2 / 240 \pi$, zodat in boven besproken situatie geldt:

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{\pi C(2\pi)} = 0.13 \lambda^2 \quad (182)$$

gemeten in vierkante meter, λ in meter. De grootheid σ is de maximum effectieve doorsnede van de halve-golfantenne, verkregen onder goede aanpassing en bovendien invallende golf gepolariseerd evenwijdig aan de draad.

Een ander maximum probleem is als volgt. We laten \vec{E}_o constant en weer parallel aan de draad, maar beschouwen variaties in antennelengte. We kunnen dan vragen naar het maximum van σ als functie van x . In geval van aanpassing volgens (179) geldt bij vaste x

$$\frac{P_m}{\lambda^2 E_o^2} = \frac{|x \mu(x)|^2}{8 \pi^2 R(x)}$$

Het rechterlid is maximaal, in de limiet $\Omega \rightarrow \infty$, daar waar

$$\frac{(1 - \cos x)^2}{C(2x) + \left\{ \frac{1}{2} S(4x) - S(2x) \right\} \sin 2x + \left\{ C(2x) - \frac{1}{2} C(4x) \right\} \cos 2x}$$

maximaal is. De corresponderende x-waarden voldoen aan de transcendentale vergelijking:

$$C(2x) \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \left\{ C(2x) - \frac{1}{2}C(4x) \right\} \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \left\{ \frac{1}{2}S(4x) - S(2x) \right\} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0.$$

De kleinste positieve wortel van deze vergelijking is $x = 3.987$, welke correspondeert met antennelengte $2\ell = 1.269\lambda$. Deze wortel geeft tevens het absolute maximum. De effectieve absorptie doorsnede is ongeveer tweemaal zo groot als van de "power-matched half-wave dipole", nl.

$$\sigma_{\max} = 0.26 \lambda^2 \quad (183)$$

Tenslotte nog enkele opmerkingen, zonder op details in te gaan.

De grootst mogelijke waarde van de effectieve absorptie doorsnede van de cilindrische antenne is niet die gegeven door (183). Als het invalend veld niet evenwijdig is aan de draad, kan σ veel groter worden (natuurlijk bij de juiste antennelengte).

Laat de invallende golf gepolariseerd zijn in het vlak door de as van de draad en de invalsricting, en laat θ de hoek zijn tussen antenne en invalsricting. Dan kan men bewijzen dat de absorptie doorsnede voor power-match is gegeven door ($\Omega \rightarrow \infty$)

$$\sigma(\theta) = \frac{30 \lambda^2}{\pi R(x)} \left[\frac{\cos(x \cos \theta) - \cos x}{\sin x \sin \theta} \right]^2 \quad (184)$$

Bijvoorbeeld. Neem $\cos \theta = 0.9$; dan is (184) maximaal voor $x = 11.15$, $x = 14.40$, etc. Deze maxima corresponderen met respectievelijk $\sigma = 0.31 \lambda^2$ ($2\ell = 3.55\lambda$) en $\sigma = 0.40 \lambda^2$ ($2\ell = 4.58\lambda$).

Men kan verder opmerken dat de typische θ -afhankelijkheid van $\sigma(\theta)$ volgens (184) precies dezelfde is als die van de Poyntingvector \bar{S} vroeger gegeven (zie tussen 108 en 109) voor de zendantenne. Bedenken we dat de power bij het zenden gelijk is aan $P = \frac{1}{2} R(x) I_0^2 \sin^2 x = \frac{1}{2} R(x) I^2(0)$ dan controleert men gemakkelijk de geldigheid van

$$\bar{S}(\theta) = \frac{P}{r^2} \frac{\sigma(\theta)}{\lambda^2} \quad (185)$$

In deze relatie betekent dus: $\bar{S}(\theta)$ de energieflox (|Poyntingvector|) op afstand r van de zendantenne bij een totaal uitgestraald vermogen P , en $\sigma(\theta)$ is de werkzame doorsnede van dezelfde antenne onder conditie van power match als hij wordt getroffen door een in het vlak van de antenne lineair gepolariseerde golf die onder een hoek θ met de antenne invalt. Relatie (185) is een voorbeeld van het z.g. reciprociteitsbeginsel. Kent men de eigenschappen van een antenne als zendantenne, dan weet men ook iets over dezelfde antenne als ontvangantenne gebruikt. Zo kunnen we voor een elektrische dipool direct uit de formules op bl.21 afleiden dat zijn absorptiedoorsnede gelijk is aan $(3\lambda^2/8\pi)\sin^2\theta$.

Hiermee hebben we de ideeën van Hallén uitvoerig toegelicht voor een praktische antenne. Hallén's onderzoek is veel algemener; zijn theorie geldt voor "een-dimensionale" antennes (dwarsafmetingen klein t.o.v. lengte-afmetingen) al of niet gebogen. De dwarsdoorsnede is niet noodzakelijk constant, het antennemateriaal niet noodzakelijk oneindig goed geleidend, etc. Hallén is de theoreticus op het gebied van antennes, en we mogen dan ook graag de studie van zijn werk van harte aanbevelen.

HOOFDSTUK II

§.1 Stralende multipolen.

Wij hebben vroeger de theorie van elektrische dipool en magnetische dipool gegeven. Ze doen dienst als prototype van electromagnetische zenders, en kunnen worden gerealiseerd door een korte rechte stroomdraad, respectievelijk een kleine cirkelvormige stroomkring. Ze hebben een typische veldverdeling om zich heen en een bepaalde singulariteit in de oorsprong. In het volgende gaan we oplossingen van de Maxwell-vergelijkingen construeren die als generalisaties van dipoolvelden kunnen worden beschouwd en die hogere singulariteiten in de oorsprong hebben. In een nog nader te definiëren zin, zullen we een compleet systeem van deze multipoolvelden construeren. Ook zullen we het probleem behandelen, het veld van een willekeurige stroom- en ladingsverdeling in multipoolvelden te ontwikkelen.

Notaties:

x, y, z een rechts cartesiaans systeem.

R een bol met eindige straal die alle stromen omvat.

r, θ, φ bijbehorende bolcoördinaten.

functies van de plaats: $f(x, y, z)$, of $f(r, \theta, \varphi)$, of $f(\vec{r})$.

Om veldpunt van bronpunt te onderscheiden geven we de laatsten een accent. Hetzelfde geldt voor de operaties rot, div, grad.

Alle volume-integralen strekken zich uit over R , tenzij anders vermeld.

In tegenstelling tot vroeger gebruiken we nu de tijdfactor $\exp(-i\omega t)$.

Ook nu weer: Gauss-eenheden.

De vector \vec{I} geeft weer de stroomdichtheid; voorlopig nemen we aan dat \vec{I} tweemaal continu differentieerbaar is, en buiten R nul is.

We weten dat het veld \vec{E}, \vec{H} , door deze \vec{I} geproduceerd, als volgt kan worden berekend :

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = \frac{4\pi i}{kc} \vec{I} - \frac{1}{ik} \text{rot rot } \vec{A} \quad (1)$$

met

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{I}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \quad (2)$$

formules die we vroeger hebben afgeleid door het oplossen van Maxwell's vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} + ik \vec{E} &= (4\pi/c) \vec{I}, & \text{div } \vec{H} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} - ik \vec{H} &= \vec{0}, & \text{div } \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \text{div } \vec{I} &= ikc\rho \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Het is gemakkelijk in te zien dat de rechthoekige componenten van $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}$ in de vrije ruimte aan de golfvergelijking $\Delta\Phi + k^2\Phi = 0$ voldoen.

Dit geldt dus in het bijzonder voor de ruimte buiten R. Daar is het veld uitgedrukt in drie scalaire golf functies A_x, A_y, A_z . Het is bekend dat bij gegeven vectoren \vec{E} en \vec{H} , de grootheid \vec{A} met $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$,

- $ik\vec{E} = \text{rot } \vec{H}$ (geldig buiten R) niet eenduidig vastligt, omdat we bij \vec{A} nog grad χ kunnen optellen. Dit feit wijst er op dat men in bepaalde situaties met minder dan drie scalaire functies kan volstaan, om het veld uit te drukken. Zo'n voorbeeld zullen we hier behandelen. We zullen namelijk aantonen, dat het veld van de beschouwde \vec{I} , zoals berekend uit (1) en (2), buiten R kan worden voorgesteld door

$$\vec{E} = \text{rot rot } (\vec{r}\Pi_1) + ik \text{ rot } (\vec{r}\Pi_2) \quad (4)$$

$$\vec{H} = -ik \text{ rot } (\vec{r}\Pi_1) + \text{rot rot } (\vec{r}\Pi_2) \quad (5)$$

waarin Π_1 en Π_2 scalaire golf functies zijn. Het is dan verder mogelijk om Π_1 en Π_2 uit te drukken in de gegeven stroomverdeling \vec{I} binnen R.

We noemen Π_1 en Π_2 potentials van Debye, die dergelijke functies het eerst invoerde bij buiging van vlakke golf aan een bol. Het blijkt vervolgens dat we daarmee corresponderende het veld \vec{E}, \vec{H} hebben ontwikkeld in een reeks van elektrische en magnetische multipoolvelden, wier bronnen in het centrum van R liggen. Op zeer natuurlijke wijze kunnen we de coëfficiënten van de reeks uit de gegeven stroomverdelingsfunctie berekenen. De hier te bespreken methode heeft het voordeel dat ze elementair is. We gebruiken geen resultaten van de groepentheorie (quantummechanica) of tensorrekening, doch alleen elementaire vectorrekening. Onze theorie is gebaseerd op eenvoudige eigenschappen van de grootheden $\vec{r} \cdot \vec{E}$ en $\vec{r} \cdot \vec{H}$. We zullen van deze grootheden laten zien dat:

- 1° ze bepalen het totale veld buiten R ondubbelzinnig
- 2° ze hebben eenvoudige bron-voorstelling
- 3° ze voldoen aan de golfvergelijking
- 4° ze zijn nauw verbonden met de functies Π_1 en Π_2 .

Stelling van eenduidigheid

Zij D de ruimte tussen twee concentrische boloppervlakken met stralen r_1 en r_2 :

$$D : \begin{cases} 0 < r_1 \leq r \leq r_2 \leq \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Neem aan dat D geen stromen bevat. Laat binnen D een electromagnetisch veld \vec{E}, \vec{H} zijn met de radiale componenten E_r, H_r identiek nul.

Dan geldt: het veld \vec{E}, \vec{H} is identiek nul binnen D.

Voor het bewijs van deze stelling schrijven we Maxwell's vergelijkingen (met $\vec{I} = \vec{0}, \rho = 0$) in spherische componenten, en substitueren daarin $E_r = H_r = 0$.

Dan blijft een systeem van zes differentiaalvergelijkingen voor vier grootheden:

$$\begin{aligned} (\partial/\partial\theta)(H_\varphi \sin \theta) &= (\partial/\partial\varphi)H_\theta, & (\partial/\partial\theta)(E_\varphi \sin \theta) &= (\partial/\partial\varphi)E_\theta \\ ikr E_\theta &= (\partial/\partial r)(r H_\varphi), & - ikr H_\theta &= (\partial/\partial r)(r E_\varphi) \\ - ikr E_\varphi &= (\partial/\partial r)(r H_\theta), & ikr H_\varphi &= (\partial/\partial r)(r E_\theta). \end{aligned}$$

Integratie naar r kan direct worden uitgevoerd. Uit de laatste vier vergelijkingen vinden we, met vier nog-onbekende functies,

$$\begin{aligned} r E_\theta &= A_1(\theta, \varphi) e^{ikr} + B_1(\theta, \varphi) e^{-ikr} \\ r H_\varphi &= A_1(\theta, \varphi) e^{ikr} - B_1(\theta, \varphi) e^{-ikr} \\ r H_\theta &= A_1(\theta, \varphi) e^{ikr} - B_2(\theta, \varphi) e^{-ikr} \\ r E_\varphi &= -A_2(\theta, \varphi) e^{ikr} - B_2(\theta, \varphi) e^{-ikr} \end{aligned}$$

Substitutie van deze vier uitdrukkingen in de resterende twee partiële differentiaalvergelijkingen geeft, na enige vereenvoudiging

$$(\partial/\partial\theta)(C \sin \theta) = \mp i(\partial C/\partial\varphi)$$

waarin

$$C = A_1 \mp i A_2 \text{ of } C = B_1 \mp i B_2$$

De algemene oplossing C van deze laatste differentiaalvergelijking kan worden aangegeven. Daarvoor transformeren we zowel de afhankelijke, als de onafhankelijke variabele:

$$f = C \sin \theta, \quad \phi = \mp \log \tan \left(\frac{1}{2}\theta\right)$$

Dan wordt namelijk

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = i \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

met algemene oplossing $f = g(\varphi + i\phi)$, waarbij g een willekeurige functie van de complexe variabele $\varphi + i\phi$ is.

Bij gevolg geldt

$$C = C(\theta, \varphi) = \frac{g(\varphi \mp i \log \tan \frac{1}{2}\theta)}{\sin \theta}$$

en dus

$$A_1 - i A_2 = \frac{g_1(\varphi + i \log \tan \frac{1}{2}\theta)}{\sin \theta}$$

$$B_1 - i B_2 = \frac{g_2(\varphi + i \log \tan \frac{1}{2}\theta)}{\sin \theta}$$

Daarmee is (algemeen) E_θ , H_φ , H_θ , E_φ uitgedrukt in de willekeurige functies g_1 en g_2 onder voorwaarde $E_r = H_r = 0$. In ons geval zijn deze functies binnen D oneindig vaak differentieerbaar naar r, θ en/of φ . (In de vrije ruimte is elk electromagnetisch veld analytisch, op grond van de speciale structuur van de Maxwell-vergelijkingen). Onder de voorwaarde van de stelling zien we dat de functies g eenwaardig-analytische functies van de complexe variabele $\varphi + i\theta$ zijn, en wel in het hele complexe vlak. ($\varphi + i\theta$ doorloopt pas het hele complexe vlak als $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\infty \leq \varphi \leq \infty$). Voor $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ moet C eindig zijn, dus $g(\varphi \pm i\infty) = 0$. Bovendien moet g in φ de periode 2π hebben. Dus g is uniform begrensd in het hele complexe vlak. Met behulp van de stelling van Liouville weten we dan dat g constant is, maar omdat ze naar nul gaat in de richting van de imaginaire as moet deze constante nul zijn. Dus g is identiek nul. Dus alle functies A en B zijn nul, en dus $\vec{E} = \vec{H} = 0$ binnen D .

Hiermee is de stelling bewezen. We zien dat iedere oplossing van Maxwell's vergelijkingen in de ruimte binnen twee concentrische boloppervlakken inderdaad geheel bepaald is door zijn radiale componenten E_r en H_r . Speciaal is dus het veld \vec{E} , \vec{H} afkomstig van de stromen \vec{I} buiten R eenduidig bepaald door de grootheden $\vec{r} \cdot \vec{E}$ en $\vec{r} \cdot \vec{H}$.

Bron-voorstellingen van de radiale componenten.

Door eenvoudige manipulaties in rechthoekige componenten bewijst men

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{v}) &= 2 \operatorname{div} \vec{v} + \vec{r} \cdot (\Delta \vec{v} + k^2 \vec{v}) \\ &= 2 \operatorname{div} \vec{v} + \vec{r} \cdot (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} + k^2 \vec{v}) \end{aligned} \quad (6)$$

waarbij \vec{v} een willekeurige vector is en Δ de Laplace-operator.

Immers, met $\vec{r} \cdot \vec{v} = xv_x + yv_y + zv_z$ wordt

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{r} \cdot \vec{v}) = v_x + x \frac{\partial v_x}{\partial x} + y \frac{\partial v_y}{\partial x} + z \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\vec{r} \cdot \vec{v}) = 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$$

Analoge vergelijkingen, verkregen voor $(\partial^2/\partial y^2)(\vec{r} \cdot \vec{v})$ en $(\partial^2/\partial z^2)(\vec{r} \cdot \vec{v})$, daarbij optellen levert :

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{r} \cdot \vec{v}) &= 2 \operatorname{div} \vec{v} + \vec{r} \cdot \Delta \vec{v} \\ &= 2 \operatorname{div} \vec{v} + \vec{r} \cdot (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}). \end{aligned}$$

Het is voldoende dat \vec{v} twee keer differentieerbaar is.

Pas (6) toe op $\vec{v} = \vec{H}$, en maak gebruik van Maxwell's vergelijking (3) :

$$\begin{aligned}
 (\Delta + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{H}) &= 2 \operatorname{div} \vec{H} + \vec{r} \cdot (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} + k^2 \vec{H}) \\
 &= \vec{r} \cdot (k^2 \vec{H} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}) \\
 &= \vec{r} \cdot \left\{ k^2 \vec{H} - \operatorname{rot} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{I} - ik \vec{E} \right) \right\} \\
 &= \vec{r} \cdot \left\{ k^2 \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{I} + ik(ik \vec{H}) \right\} \\
 &= - \frac{4\pi}{c} \vec{r} \cdot \operatorname{rot} \vec{I}
 \end{aligned}$$

We hebben dus eenvoudig

$$(\Delta + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{H}) = - \frac{4\pi}{c} \vec{r} \cdot \operatorname{rot} \vec{I} \quad (7)$$

Vergelijking (7) laat zien dat $(\vec{r} \cdot \vec{H})$ oplossing van de homogene golfvergelijking is overal daar waar de stromen identiek nul zijn, dus in de vrije ruimte.

De techniek voor het oplossen van (7) is bekend uit het vroeger behandelde van de vectorpotentiaal. De enige oplossing van (7) die aan de uitstralingsvoorwaarde voldoet is

$$\vec{r} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int (\vec{r}' \cdot \operatorname{rot}' \vec{I}) \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (8)$$

Dit is dus een opmerkelijk eenvoudige voorstelling van $\vec{r} \cdot \vec{H}$ in zijn bronnen $\vec{r} \cdot \operatorname{rot} \vec{I}$.

Een analoge formule kunnen wij vinden voor $\vec{r} \cdot \vec{E}$. Past men (6) toe op $\vec{v} = \vec{E}$, dan komt er

$$(\Delta + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{E}) = - 4\pi \left\{ \frac{ik}{c} \vec{r} \cdot \vec{I} - \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \rho - 2\rho \right\}. \quad (9)$$

Immers:

$$\begin{aligned}
 &2 \operatorname{div} \vec{E} + \vec{r} \cdot (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + k^2 \vec{E}) \\
 &= 8\pi\rho + \vec{r} \cdot (4\pi \operatorname{grad} \rho - ik \operatorname{rot} \vec{H} + k^2 \vec{E}) \\
 &= 8\pi\rho + 4\pi \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \rho + \vec{r} \cdot \left[- ik \left(- ik \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{I} \right) + k^2 \vec{E} \right] \\
 &= 8\pi\rho + 4\pi \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \rho - \frac{4\pi ik}{c} \vec{r} \cdot \vec{I} = \text{rechterlid van (9)}.
 \end{aligned}$$

Door integratie vindt men dus

$$\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int \left(\frac{ik}{c} \vec{r}' \cdot \vec{I} - \vec{r}' \cdot \operatorname{grad}' \rho - 2\rho \right) \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (10)$$

Dit resultaat is ingewikkeld. We kunnen er wat beters van maken door (7) toe te passen op $\vec{v} = \vec{E} - \frac{4\pi}{ikc} \vec{I}$.

De differentiaalvergelijking wordt dan

$$(\Delta + k^2) \{ \vec{r} \cdot (\vec{E} - \frac{4\pi}{ikc} \vec{I}) \} = \frac{4\pi}{ikc} (\vec{r} \cdot \text{rot rot } \vec{I}) \quad (11)$$

en deze oplossen onder de stralingsvoorwaarde levert

$$\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{ikc} \vec{r} \cdot \vec{I} - \frac{1}{ikc} \int (\vec{r}' \cdot \text{rot}' \text{ rot}' \vec{I}) \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (12)$$

Ook nu zien we dat buiten de stromen, $\vec{r} \cdot \vec{E}$ aan de homogene golfvergelijking voldoet. Deze bronvoorstellingen (8) en (10) gelden overal in de ruimte. In de vrije ruimte voldoen $r E_r$ en $r H_r$ aan de homogene golfvergelijking. Voor punten buiten R kunnen ze worden ontwikkeld naar eigenfuncties van de golfvergelijking, door eenvoudig de Greense functie $e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} / |\vec{r} - \vec{r}'|$ naar deze eigenfuncties te ontwikkelen.

Dit doen we in de volgende paragraaf.

Reeks ontwikkelingen voor de radiale componenten

Men kan elementaire oplossingen van de golfvergelijking construeren door de methode van separatie der variabelen. Doen we dit in spherische coördinaten, dan worden we geleid tot cylinderfuncties en bolfuncties. Enige bekendheid met deze functies wordt hier ondersteld. In de notatie van Watson voor Bessel- en Hankelfuncties definiëren we

$$j_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi/2x)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (x \geq 0) \quad (13)$$

$$h_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi/2x)^{\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \quad (x > 0) \quad (14)$$

met $n = 0, 1, 2, \dots$

Verder zullen we, in de notatie van Barnes en Hobson, de Legendre functies $P_n^m(x)$ nodig hebben voor $-1 \leq x \leq 1$ en n, m geheel.

Dan definiëren we de "surface harmonic" van graad n en orde m ($-n \leq m \leq n, n = 0, 1, 2, \dots$) door

$$Y_n^m(\theta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (15)$$

waarbij de normeringsconstante zò is gekozen dat de gemiddelde waarde van $|Y_n^m|^2$ over alle richtingen θ, φ gelijk aan 1 is, onafhankelijk van n en m :

$$\frac{1}{4\pi} \int |Y_n^m|^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta |Y_n^m(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta = 1.$$

De functie (15) heeft de volgende eigenschap

$$Y_n^{-m} = (-1)^m \overline{Y_n^m} \quad (16)$$

waar de horizontale streep het complex geconjugeerde aangeeft.

Een volledig systeem van elementaire oplossingen van de golfvergelijking, die orthogonaal zijn op de bol, die voldoen aan de uitstralingsvoorwaarde in het oneindige, en die overal regulier zijn behalve in de oorsprong, is

$$\Pi_n^m(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} h_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (n \geq 0; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (17)$$

Een analoog systeem van oplossingen die orthogonaal zijn op de bol, die niet voldoen aan de uitstralingsvoorwaarde, maar wel overal regulier zijn (dus ook in de oorsprong) kan men uit (17) verkrijgen door $h_n(kr)$ te vervangen door $j_n(kr)$. Dit laatste systeem van functies zullen we slechts nodig hebben in de variabelen der integratie, onderscheiden door een accent van de veldpuntsvariabelen. Er is dus geen vrees voor verwarring als we het laatste systeem met dezelfde symbolen aanduiden, als we maar steeds de argumenten vermelden:

$$\Pi_n^m(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} j_n(kr') Y_n^m(\theta', \varphi')$$

$$(n \geq 0; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (18)$$

Het is bekend dat we de Greense functie van de golfvergelijking in de vrije ruimte in een reeks van functies (17) en (18) kunnen ontwikkelen. Door middel van het zg. additietheorema van cylinderfuncties hebben we eerst

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr') h_n(kr) P_n(\cos \phi)$$

met

$$r' < r \quad \text{en} \quad \cos \phi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

Verder kennen we het additietheorema voor Legendre functies in de vorm

$$P_n(\cos \phi) = \sum_{m=-n}^n (-1)^m P_n^m(\cos \theta) P_n^{-m}(\cos \theta') e^{im(\varphi - \varphi')}$$

zodat we tenslotte verkrijgen

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = ik \sum_{n,m} (-1)^m \Pi_n^{-m}(\vec{r}') \Pi_n^m(\vec{r}) \quad (19)$$

geldig voor $r' < r$.

Bij vaste r is deze reeks uniform convergent in r' voor

$$r' \leq r - \epsilon, \quad \text{met } \epsilon > 0.$$

We substitueren (19) in (8). Dan vinden we

$$\vec{r} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \frac{ik}{c} \sum_{n,m} (-1)^m \Pi_n^m(\vec{r}) \int (\vec{r}' \cdot \text{rot}' \vec{I}) \Pi_n^{-m}(\vec{r}') dV',$$

voor die waarden van \vec{r} welke voldoen aan $r >$ alle r' die bij integratie voorkomen. Bovenstaande reeksontwikkeling geldt dus in de ruimte buiten en op het oppervlak van de bol R (in het inwendige van R liggen alle stromen). De reeks is absoluut en uniform convergent in bedoelde ruimte.

De coëfficiënten der reeks gaan we omvormen. We passen de formule

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}$$

toe op de coördinaten van integratie, dus

$$\vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b} + \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b})$$

en nemen voor de vectoren \vec{a} en \vec{b} respectievelijk

$$\vec{a} = \vec{I}(\vec{r}'), \quad \vec{b} = \vec{r}' \Pi_n^{-m}(\vec{r}').$$

Dan vindt men dus

$$(\vec{r}' \cdot \operatorname{rot}' \vec{I}) \Pi_n^{-m} = \vec{I} \cdot \operatorname{rot}'(\vec{r}' \Pi_n^{-m}) + \operatorname{div}'(\vec{I} \times \vec{r}' \Pi_n^{-m}),$$

waar de ontbrekende variabelen (argumenten) gemakkelijk kunnen worden aangevuld.

Vervolgens integreren we beide leden over de ruimte. Volgens Gauss geldt daarbij

$$\int \operatorname{div}'(\vec{I} \times \vec{r}' \Pi_n^{-m}) dV' = \iint (\vec{I} \times \vec{r}' \Pi_n^{-m}) \vec{n} dV',$$

waarbij de integraal rechts over een gesloten oppervlak rondom R verloopt en dus nul is, omdat \vec{I} buiten R nul is. Bijgevolg geldt

$$\int (\vec{r}' \cdot \operatorname{rot}' \vec{I}) \Pi_n^{-m} dV' = \int \vec{I} \cdot \operatorname{rot}'(\vec{r}' \Pi_n^{-m}) dV',$$

zodat we voor bovengenoemde ontwikkeling kunnen schrijven

$$\vec{r} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \frac{ik}{c} \sum_{n,m} (-1)^m \Pi_n^m(\vec{r}) \int \vec{I} \cdot \operatorname{rot}'(\vec{r}' \Pi_n^{-m}(\vec{r}')) dV' \quad (20)$$

De analoge uitdrukking voor $\vec{r} \cdot \vec{E}$ volgt uit (12) op precies dezelfde wijze. Nemen we in aanmerking dat de eerste term in het rechterlid van (12) buiten R nul is, dan volgt, voor de ruimte buiten R,

$$\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \sum_{n,m} (-1)^m \Pi_n^m(\vec{r}) \int \vec{I} \cdot \operatorname{rot}' \operatorname{rot}'(\vec{r}' \Pi_n^{-m}(\vec{r}')) dV' \quad (21)$$

De termen in (20) en (21) met $n = 0$ kunnen worden genegeerd omdat $\operatorname{rot}'(\vec{r}' \Pi_0^0(\vec{r}')) = 0$ is, daar $\Pi_0^0(\vec{r}')$ alleen van r' en niet van θ', φ' afhangt:

$$\operatorname{rot} \vec{r} = \vec{0} \quad (\text{controleer})$$

$$\operatorname{rot}(\vec{r}\phi(r)) = \phi \operatorname{rot} \vec{r} - \vec{r} \times \operatorname{grad} \phi(r)$$

$$= -r \times \operatorname{grad} \phi(r) = -\phi'(r) \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}.$$

In (20) en (21) wordt dus gesommeerd over gehele n en m met $n \geq 1$,
 $-n \leq m \leq n$. De reeksen divergeren binnen de bol met minimale straal
 die juist alle stromen omvat.

Het is voldoende dat \vec{I} absoluut integreerbaar is.

Constructie van de Debije - potentialen.

We definiëren nu twee scalaire functies door de n -de termen der reeksen
 (20) en (21) te delen door $n(n+1)$:

$$\Pi_1(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{c} \sum_{n,m} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \Pi_n^m(\vec{r}) \int \vec{I} \cdot \text{rot}' \text{rot}' (\vec{r}' \Pi_n^{-m}(\vec{r}')) dV' \quad (22)$$

$$\Pi_2(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ik}{c} \sum_{n,m} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \Pi_n^m(\vec{r}) \int \vec{I} \cdot \text{rot}' (\vec{r}' \Pi_n^{-m}(\vec{r}')) dV' \quad (23)$$

Deze functies zijn dus gedefinieerd buiten R , in afhankelijkheid van
 de stroomverdeling \vec{I} binnen R . Iedere term der reeksen is oplossing
 van de scalaire golfvergelijking. De functies $\Pi_1(\vec{r})$ en $\Pi_2(\vec{r})$ zijn dus
 buiten R oplossingen van de homogene golfvergelijking.

De bewering is nu dat de functies (22) en (23), na substitutie in de
 rechterleden van (4) en (5) een electromagnetisch veld opleveren dat
 identiek is met het door de gegeven stromen geproduceerde, uit (1) en
 (2) berekende, veld.

Deze bewering wordt in twee stappen geverifieerd.

Allereerst de volgende eigenschap: Is Π een willekeurige oplossing van
 de homogene golfvergelijking $\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0$, dan is het systeem vectoren

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \text{rot rot} (\vec{r} \Pi), \quad \vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} -ik \text{rot} (\vec{r} \Pi) \quad (24)$$

oplossing van de homogene Maxwell-vergelijkingen.

Allereerst is duidelijk dat het veld (24) voldoet aan

$$\text{div} \vec{E} = \text{div} \vec{H} = 0, \text{ omdat } \text{div rot} \equiv 0 \text{ is.}$$

Verder is

$$\text{rot} \vec{H} + ik \vec{E} = -ik \text{rot rot} (\vec{r} \Pi) + ik \text{rot rot} (\vec{r} \Pi) = 0.$$

Tenslotte

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} - ik \vec{H} &= \text{rot rot rot} (\vec{r} \Pi) - k^2 \text{rot} (\vec{r} \Pi) \\ &= \text{rot} \{ \text{rot rot} (\vec{r} \Pi) - k^2 (\vec{r} \Pi) \} \\ &= \text{rot} \{ \text{grad div} (\vec{r} \Pi) - \Delta (\vec{r} \Pi) - k^2 (\vec{r} \Pi) \} \\ &= -\text{rot} \{ (\Delta + k^2) (\vec{r} \Pi) \}, \text{ omdat } \text{rot grad} \equiv 0. \end{aligned}$$

Nu is $\vec{r}\Pi$ de vector met rechthoekige componenten:

$$\vec{r}\Pi = (x\Pi, y\Pi, z\Pi)$$

Dus

$$\frac{\partial}{\partial x} (x\Pi) = x \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \Pi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x\Pi) = x \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \text{ etc.}$$

Dus

$$\begin{aligned} \Delta(x\Pi) &= 2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} + x \Delta \Pi \\ &= 2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} + x(-k^2\Pi) \end{aligned}$$

Dus

$$(\Delta + k^2)(x\Pi) = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

ofwel

$$(\Delta + k^2)(\vec{r}\Pi) = 2 \text{ grad } \Pi$$

Nu volgt dus

$$\text{rot } \vec{E} - ik \vec{H} = - \text{rot} \{ 2 \text{ grad } \Pi \} = 0.$$

Hiermee is geverifieerd dat het veld (24) aan Maxwell voldoet.

Op dezelfde manier volgt dat ieder veld van de gedaante

$$\vec{E} \stackrel{\text{def.}}{=} ik \text{ rot } (\vec{r}\Pi), \quad \vec{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \text{rot rot } (\vec{r}\Pi), \quad (25)$$

met $\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0$, oplossing van de homogene Maxwell-vergelijking is. Overigens merken we op dat dit uit vorig bewijs evident is, als men de transformatie $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ toepast, een transformatie waarvoor Maxwell's vergelijkingen invariant zijn.

In deze eerste stap is dus het volgende geverifieerd:

Als Π_1 en Π_2 maar aan de golfvergelijking voldoen, voldoet het veld gedefinieerd door (4) en (5) automatisch aan de Maxwell-vergelijkingen.

Conclusie: Substitueren we (22) en (23) in (4) en (5) dan krijgt men een veld \vec{E} , \vec{H} dat aan Maxwell voldoet. De zaak is helemaal rond als we kunnen aantonen dat de radiale componenten van het aldus gevonden veld overeenstemmen met de corresponderende grootheden voor het veld (1), (2). Immers dan vallen, op grond van onze eenduidigheidstelling, de twee velden volledig samen.

Deze tweede stap voeren we uit door op te merken dat het volgende geldt

$$\vec{r} \cdot \text{rot} \{ \vec{r} \Pi_n^m(\vec{r}) \} = 0 \quad (26)$$

$$\vec{r} \cdot \text{rot rot} \{ \vec{r} \Pi_n^m(\vec{r}) \} = n(n+1) \Pi_n^m(\vec{r}) \quad (27)$$

Neem aan dat (26) en (27) zijn bewezen, dan volgt op grond van onze speciale constructie van (22) en (23) uit (21) en (20) inderdaad

$$\vec{r} \cdot \text{rot} (\vec{r} \Pi_1) = 0 \quad \vec{r} \cdot \text{rot rot} (\vec{r} \Pi_1) = \vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

$$\vec{r} \cdot \text{rot} (\vec{r} \Pi_2) = 0 \quad \vec{r} \cdot \text{rot rot} (\vec{r} \Pi_2) = \vec{r} \cdot \vec{H}(r),$$

en dus stemmen (4), (5) enerzijds en (1), (2) anderzijds in radiale componenten overeen, en dus zijn de velden identiek.

Ons rest nog het bewijs van (26) en (27)

Zij ϕ een willekeurige scalair. Dan is, omdat $\text{rot } \vec{r} = \vec{0}$ is,

$$\text{rot} (\vec{r} \phi) = \phi \text{rot } \vec{r} + (\text{grad } \phi) \times \vec{r} = (\text{grad } \phi) \times \vec{r}$$

een vector die loodrecht op \vec{r} staat. Het inproduct met \vec{r} is dus nul. Hiermee is (26) bewezen, zonder gebruik te maken van de speciale eigenschappen van Π_n^m .

Nu de andere formule. Deze zou men kunnen bewijzen door verificatie in bol coördinaten, daarbij gebruik makende van enkele bijzondere eigenschappen van de cylinder- en bol-functies. Het volgende bewijs eist alleen dat men weet dat $h_n(kr)$ en $j_n(kr)$ oplossing zijn van de differentiaalvlg.

$$r \frac{d^2}{dr^2} (ry) + k^2 r^2 y = n(n+1)y.$$

Men heeft

$$\begin{aligned} \text{rot rot} (\vec{r} \Pi) &= \text{grad div} (\vec{r} \Pi) - \Delta (\vec{r} \Pi) \\ &= \text{grad div} (\vec{r} \Pi) + k^2 \vec{r} \Pi - 2 \text{grad } \Pi, \text{ volgens een} \\ &\text{relatie zojuist toegepast.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Verder is } \text{div} (\vec{r} \Pi) &= \Pi \text{div } \vec{r} + \vec{r} \text{grad } \Pi \\ &= 3\Pi + r \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \text{ omdat } \text{div } \vec{r} = 3 \text{ is.} \end{aligned}$$

Daarmee geldt:

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \text{rot rot} (\vec{r} \Pi) &= \vec{r} \cdot \text{grad} (3\Pi + r \frac{\partial \Pi}{\partial r}) + r^2 k^2 \Pi - 2 \vec{r} \cdot \text{grad } \Pi \\ &= \vec{r} \cdot \text{grad} (\Pi + r \frac{\partial \Pi}{\partial r}) + k^2 r^2 \Pi \\ &= r \frac{\partial}{\partial r} (\Pi + r \frac{\partial \Pi}{\partial r}) + k^2 r^2 \Pi \\ &= r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\vec{r} \Pi) + k^2 r^2 \Pi = n(n+1) \Pi. \end{aligned}$$

Hiermee is volledig aangetoond dat het veld (4), (5) berekend uit de Debye-potentialen (22) en (23) volledig overeenstemt met het veld (1), (2). voor de ruimte buiten R.

Electrische en magnetische multipoolvelden

In het voorafgaande is bewezen dat het veld buiten R, veroorzaakt door stromen binnen R, kan worden berekend met

$$\vec{E} = \text{rot rot } (\vec{r} \Pi_1) + ik \text{ rot } (\vec{r} \Pi_2) \quad (4)$$

$$\vec{H} = -ik \text{ rot } (\vec{r} \Pi_1) + \text{rot rot}(\vec{r} \Pi_2) \quad (5)$$

waarbij de Debije-potentialen gegeven zijn door

$$\Pi_1 = \sum_{n,m} a_n^m \Pi_n^m(\vec{r}), \quad \Pi_2 = \sum_{n,m} b_n^m \Pi_n^m(\vec{r})$$

met coëfficiënten

$$a_n^m = -\frac{1}{c} \frac{1}{n(n+1)} \int \vec{I}(\vec{r}') \text{ rot}' \text{ rot}' \{ \vec{r}' j_n(kr') \overline{Y}_n^m(\theta', \varphi') \} dV'$$

$$b_n^m = \frac{ik}{c} \frac{1}{n(n+1)} \int \vec{I}(\vec{r}') \text{ rot}' \{ \vec{r}' j_n(kr') \overline{Y}_n^m(\theta', \varphi') \} dV'$$

We definiëren: de eenheid van electrisch multipoolveld van de graad n en orde m is diè combinatie van vectoren \vec{E} en \vec{H} welke uit (4), (5) wordt verkregen door de keuze $\Pi_1 = \Pi_n^m, \Pi_2 = 0$.

Op analoge wijze, de eenheid van magnetisch multipoolveld van de graad n en orde m is die combinatie van vectoren \vec{E} en \vec{H} welke uit (4), (5) wordt verkregen door de keuze $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = \Pi_n^m$.

Met andere woorden, eenheids (n.m)-polen zijn

$$\left. \begin{array}{l} \text{electrisch : } \vec{E} = \text{rot rot } (\vec{r} \Pi_n^m), \quad \vec{H} = -ik \text{ rot } (\vec{r} \Pi_n^m) \\ \text{magnetisch : } \vec{H} = \text{rot rot } (\vec{r} \Pi_n^m), \quad \vec{E} = ik \text{ rot } (\vec{r} \Pi_n^m) \end{array} \right\} \quad (28)$$

Deze multipoolvelden voldoen aan Maxwell's (homogene) vergelijkingen behalve in de oorsprong en voldoen aan Sommerfeld's uitstralingsvoorwaarde.

Met deze definities van fundamentele multipoolvelden kunnen we nagaan hoe het veld van een electriche Hertzse dipool wordt voorgesteld door Debije-potentialen. Beschouw zo'n electriche dipool in de oorsprong en gericht langs de x-as (dus een infinitesimaal stroomelement ter lengte δx met uniforme stroomverdeling I_x). Men kan verifiëren dat het veld van deze dipool een superpositie is van twee electriche multipoolvelden van de graad n = 1 en orde m = ± 1, corresponderende met

$$\Pi_1 = - (k/c\sqrt{6})(I_x \delta x)(\Pi_1^1 - \Pi_1^{-1}), \quad \Pi_2 = 0.$$

Analoog voor een dipool in de y-richting:

$$\Pi_1 = (ik/c\sqrt{6})(I_y \delta y) \{ \Pi_1^1 + \Pi_1^0 \}, \Pi_2 = 0$$

of de z-richting:

$$\Pi_1 = - (k/c\sqrt{3})(I_z \delta z) \Pi_1^0, \Pi_2 = 0.$$

Analoog: ieder electrisch kwadrupoolveld is een zekere combinatie van fundamentele electrische multipoolvelden van de graad $n = 2$ en ordes $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

Hetzelfde geldt, mutatis mutandus, voor magnetische Hertzse dipolen, of magnetische kwadrupoolvelden.

Zonder op details in te gaan vermelden we nog de volgende formule ($m \geq 0$)

$$\Pi_n^m(\vec{r}) = i^{-n} \left\{ (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[\left\{ \frac{1}{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\}^m P_n^{(m)} \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \Pi_0^0(\vec{r})$$

waarin $P_n^{(m)}$ de m-de afgeleide van Legendre's polynoom P_n is.

Met deze formule zien we hoe we onze fundamentele multipoolvelden door een proces van differentiatie naar de coördinaten uit de scalaire monopool Π_0^0 kunnen verkrijgen.

Om een inzicht te krijgen in de vrij gecompliceerde multipoolvelden (28) kunnen we de corresponderende veldvectoren uitdrukken in rechthoekige componenten. Deze componenten zijn oplossingen van de scalaire golfvergelijking, en ze kunnen dus worden geschreven als lineaire combinatie van de functies Π_n^m .

Het is eenvoudig, doch zeer bewerkelijk, om de berekening expliciet uit te voeren. Men moet daarbij gebruik maken van de recurrente betrekkingen van Legendre- en Besselfuncties, etc. Zo vindt men voor het eenheids electrisch multipoolveld van graad n en orde m de voorstelling:

$$E_x \pm i E_y = k \left[\mp (n+1) \left\{ \frac{(n \mp m)(n \mp m - 1)}{(2n-1)(2n+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_{n-1}^{m \mp 1} \mp \right. \\ \left. \pm n \left\{ \frac{(n \pm m + 1)(n \pm m + 2)}{(2n+1)(2n+3)} \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_{n+1}^{m \pm 1} \right]$$

$$E_z = k \left[(n+1) \left\{ \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_{n-1}^m + n \left\{ \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)} \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_{n+1}^m \right]$$

$$H_x \pm i H_y = k \left[(n \mp m)(n \pm m + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \Pi_n^{m \mp 1}$$

$$H_z = - km \Pi_n^m.$$

De analoge formules voor het eenheids magnetisch multipoolveld verkrijgt men door in bovenstaande formules \vec{E} en \vec{H} te vervangen door respectievelijk \vec{H} en $-\vec{E}$.

Minder ingewikkeld is de representatie van deze multipoolvelden in bolcoördinaten.

Voor de elektrische (n,m)-pool geldt:

$$\begin{aligned} E_r &= n(n+1) \frac{1}{r} h_n Y_n^m & H_r &= 0 \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r h_n) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_n^m & H_\theta &= km h_n \frac{Y_n^m}{\sin \theta} \\ E_\varphi &= im \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r h_n) \frac{Y_n^m}{\sin \theta} & H_\varphi &= ik h_n \frac{\partial}{\partial \theta} Y_n^m \end{aligned}$$

en voor de magnetische (n,m)-pool geldt:

$$\begin{aligned} E_r &= 0 & H_r &= n(n+1) \frac{1}{r} h_n Y_n^m \\ E_\theta &= -km h_n \frac{Y_n^m}{\sin \theta} & H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r h_n) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_n^m \\ E_\varphi &= -ik h_n \frac{\partial}{\partial \theta} Y_n^m & H_\varphi &= im \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r h_n) \frac{Y_n^m}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Van deze laatste formules is nogmaals duidelijk dat:

- (1) Alle componenten nul zijn indien $n = m = 0$: er zijn geen stralende monopolen.
- (2) $H_r = 0$ voor elektrische multipolen. Een elektrisch multipoolveld is dus transversaal magnetisch (TM-golven) veld, of ook wel een E-veld, met betrekking tot de radiusvector.
- (3) $E_r = 0$ voor magnetische multipolen. Een magnetisch multipoolveld is dus transversaal elektrisch (TE), of ook een H-veld, met betrekking tot de radiusvector.

Eenvoudige benaderingsformules van de multipoolvelden voor $r \rightarrow \infty$ vindt men door gebruik te maken van de asymptotiek van Hankelfuncties:

$$h_n(x) \sim i^{-n-1} e^{ix}/x \quad (x \rightarrow \infty).$$

Men vindt voor het elektrisch multipoolveld

$$\vec{E} \sim i^{-n} e^{ikr} \text{grad } Y_n^m \quad (r \rightarrow \infty) \quad (\text{TM-golf}).$$

In de golfzone vormen \vec{E} , \vec{H} en \vec{r} een rechts orthogonaal systeem. De analoge formule voor een magnetische multipool is

$$\vec{H} \sim i^{-n} e^{ikr} \text{grad } Y_n^m \quad (r \rightarrow \infty) \quad (\text{TE-golf})$$

Het is nu voldoende bekend hoe we de uitgestraalde energie van zo'n multipool kunnen berekenen. Het tijdgemiddelde van de Poynting-vector is, voor $r \rightarrow \infty$,

$$\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (\vec{E} \times \vec{H}) \approx \frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2 \frac{\vec{r}}{r} \approx \frac{c}{8\pi} |\vec{H}|^2 \frac{\vec{r}}{r} \approx \frac{c}{8\pi} |\operatorname{grad} Y_n^m|^2 \frac{\vec{r}}{r}.$$

Gebruiken we verder

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c}{8\pi} r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\operatorname{grad} Y_n^m|^2 \sin \theta d\theta \\ = \frac{c}{8\pi} n(n+1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |Y_n^m|^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} n(n+1)c \end{aligned}$$

dan vinden we, zowel voor de elektrische als de magnetische multipool,

$$P = \frac{1}{2} n(n+1)c.$$

Ons systeem van multipoolvelden (28) is compleet in die zin dat het stralingsveld van een willekeurige stroomverdeling er naar kan worden ontwikkeld. (Niet overal, maar wel buiten R). Het systeem is bovendien hermitisch-orthogonaal. Dat wil zeggen:

$$\int \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{r} \Pi_n^m) \cdot \operatorname{rot} (\vec{r} \overline{\Pi_{n'}^{m'}}) d\Omega = 0$$

$$\int \operatorname{rot} (\vec{r} \Pi_n^m) \cdot \operatorname{rot} (\vec{r} \overline{\Pi_{n'}^{m'}}) d\Omega = 4\pi n(n+1) |h_n(kr)|^2 \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}$$

$$\int \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{r} \Pi_n^m) \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{r} \overline{\Pi_{n'}^{m'}}) d\Omega =$$

$$4\pi k^2 \frac{n(n+1)}{2n+1} \{ (n+1) |h_{n-1}(kr)|^2 + n |h_{n+1}(kr)|^2 \} \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}.$$

Hierbij is de integratie uitgestrekt over de bol met straal $r > 0$ en $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Bovenstaande orthogonaliteitsrelaties kan men bewijzen door op spherische of cartesische componenten over te gaan en aldus de inproducten te berekenen.

Op grond van de orthogonaliteit vindt men dat de totale uitgestraalde power additief is. Dus

$$P_{\text{totaal}} = \frac{1}{2} c \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \sum_{m=-n}^n (|a_n^m|^2 + |b_n^m|^2).$$

Verband tussen vectorpotentiaal en Debije-potentialen.

Hansen (Phys.Rev. 47, 139-143, 1935) was de eerste aan wien het gelukte het stralingsveld van een willekeurige stroomverdeling in multipoolvelden te ontwikkelen. De methode van Hansen is ook eenvoudig: hij gebruikt geen groepentheorie of vectordiaden.

Het verschil tussen Hansen's en onze methode is dat hij alles baseert op de vectorpotentiaal \vec{A} en wij Debije-potentialen gebruiken. Het is daarom interessant, om na te gaan wat het verband is tussen de vectorpotentiaal \vec{A} en de Debije-potentialen Π_1 en Π_2 van een en hetzelfde systeem van stromen. De uitdrukking die Hansen afleidt voor de potentiaal is, in onze notitie,

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = & \frac{1}{kc} \sum (-1)^m \text{grad} \Pi_n^m \int \vec{I}' \cdot \text{grad}' \Pi_n^{-m} dV' + \\ & + \frac{ik}{c} \sum \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \text{rot} (\vec{r} \Pi_n^m) \int \vec{I}' \cdot \text{rot}' (\vec{r}' \Pi_n^{-m}) dV' \\ & + \frac{1}{kc} \sum \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \text{rot rot} (\vec{r} \Pi_n^m) \int \vec{I}' \cdot \text{rot}' \text{rot}' (\vec{r}' \Pi_n^{-m}) dV'. \end{aligned}$$

Dit resultaat is equivalent met

$$ik \vec{A} = \text{rot rot} (\vec{r} \Pi_1) + ik \text{rot} (\vec{r} \Pi_2) + \text{grad} \Phi, \quad (29)$$

geldig voor de ruimte buiten R, waarbij Φ gedefinieerd is door

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \sum (-1)^m \Pi_n^m(\vec{r}) \int \vec{I}' \cdot \text{grad}' \Pi_n^{-m} dV'.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat Φ juist de scalaire potentiaal van de stroom en ladingsverdeling is. Door partiële integratie, met behulp van de continuïteitsvergelijking en de ontwikkeling (19), komt er

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \sum (-1)^m \Pi_n^m(\vec{r}) \int (\text{div}' \vec{I}') \Pi_n^{-m} dV' \\ &= ik \sum (-1)^m \Pi_n^m(\vec{r}) \int \rho(\vec{r}') \Pi_n^{-m} dV' \\ &= \int \rho(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'. \end{aligned}$$

Omgekeerd volgt Hansen's ontwikkeling van de vectorpotentiaal uit (29), welke op zijn beurt een gevolg is van onze relatie

$$\vec{E} = \text{rot rot} (\vec{r} \Pi_1) + ik \text{rot} (\vec{r} \Pi_2) \text{ en de bekende relatie } \vec{E} = ik \vec{A} - \text{grad} \Phi$$

(welke equivalent is met $\vec{E} = \frac{4\pi}{ikc} \vec{I} - \frac{1}{ik} \text{rot rot} \vec{A}$ in verband met

$$\text{div} \vec{A} = ik \Phi).$$

De rot rot in het rechterlid van (29) kan worden geelimineerd en we vinden dan

$$ik \vec{A} = k^2 \vec{r} \Pi_1 + ik \operatorname{rot} (\vec{r} \Pi_2) + \operatorname{grad} (\Phi + \Pi_1 + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \Pi_1) \quad (30)$$

Nemen we de rotatie van beide leden dan vinden we, zoals kan worden verwacht, eerste vgl.(1) en vgl.(5).

De formule (29) of (30) geeft dus het verband tussen de vectorpotentiaal en de Debije potentialen, natuurlijk alleen voor de ruimte buiten R.

Het is een kwestie van smaak of men de theorie van multipoolontwikkeling baseert op de vectorpotentiaal of op de Debije-potentialen; de resultaten zijn gelijk. Wij geloven dat de Debije-potentialen de voorkeur hebben omdat dan de overeenkomst tussen elektrische multipolen enerzijds en magnetische multipolen anderzijds direct vanaf het begin in aanmerking wordt genomen. Het nadeel van de Debije potentialen is dat ze het veld niet binnen R kunnen voorstellen. Maar dat is irrelevant als men ontwikkelingen naar multipoolvelden beschouwt, die toch alleen maar buiten R convergeren. Het is niet bekend of en hoe we \vec{A} en Φ kunnen uitdrukken in Π_1 en Π_2 , en omgekeerd!

Er zijn nog andere bezwaren in te brengen tegen het gebruik van de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ of een vectorpotentiaal. Door substitutie van (19) in (2) zien we dat ieder van de drie rechthoekige componenten van de vectorpotentiaal kan worden ontbonden in een reeks van functies Π_n^m die convergeert buiten R. Het is daarom interessant, na te gaan welke combinatie van multipoolvelden overeenkomt met de algemene term van deze reeks. Als voorbeeld nemen we het veld waarvan de vectorpotentiaal gegeven is door

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (\Pi_n^m, 0, 0) \quad (31)$$

De corresponderende scalaire potentiaal $\Phi = \frac{1}{ik} \operatorname{div} \vec{A}$ luidt dan

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{i}{2} \left[\left\{ \frac{(n+m)(n+m-1)}{(2n-1)(2n+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_{n-1}^{m-1} + \left\{ \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_{n+1}^{m-1} - \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_{n-1}^{m+1} - \left\{ \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_{n+1}^{m+1} \right] \end{aligned}$$

De radiale elektrische en magnetische componenten kunnen worden berekend, en de Debije-potentialen vindt men na deling der coëfficiënten door $n(n+1)$. Ze worden:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{i}{2n(n+1)} \left[(n+1) \left\{ \left(\frac{(n+m)(n+m-1)}{(2n-1)(2n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \Pi_{n-1}^{m-1} - \left(\frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \Pi_{n-1}^{m+1} \right\} - \right. \\ & \left. - n \left\{ \left(\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \right)^{\frac{1}{2}} \Pi_{n+1}^{m-1} - \left(\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \right)^{\frac{1}{2}} \Pi_{n+1}^{m+1} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = -\frac{i}{2n(n+1)} \left[\left\{ (n+m)(n-m+1) \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_n^{m-1} + \left\{ (n-m)(n+m+1) \right\}^{\frac{1}{2}} \Pi_n^{m+1} \right]$$

(Voor $n=0$, $m=0$ reduceren deze formules zich tot

$$\Phi = \Pi_1 = \frac{i}{\sqrt{6}} \{ \Pi_1^1 - \Pi_1^{-1} \}, \quad \Pi_2 = 0.)$$

Derhalve: Het veld afgeleid van de eenvoudige vectorpotentiala (31) is een lineaire combinatie van twee magnetische en vier elektrische multipoolvelden (afgezien van uitzonderingen, als $n=0$). Dit demonstreert duidelijk dat de vectorpotentiala een slechte basis is voor de theorie van multipolen.

Uit het bovenstaande is duidelijk dat we een voorstelling gebaseerd op \vec{A} onmiddellijk kunnen omzetten in een voorstelling gebaseerd op Π_1 en Π_2 , alles in termen van de functie Π_n^m .

Nu nog enkele woorden over het omgekeerde probleem. Gegeven de Debijepotentialen, wat is de of een vectorpotentiala. Het antwoord is niet ondubbelzinnig omdat we bij iedere vectorpotentiala die het "doet" nog een gradient van een scalair kunnen optellen. We vermelden en illustreren deze meerduidigheid aan één voorbeeld:

Het electromagnetisch veld corresponderende met $\Pi_1 = \Pi_n^m$, $\Pi_2 = 0$ kan men op de volgende twee manieren afleiden uit een combinatie van scalaire en vectoriele potentiala:

Eerste manier:

$$\Phi = n \Pi_n^m, \quad A_z = -i \left[\frac{2n+1}{2n-1} (n-m)(n+m) \right]^{\frac{1}{2}} \Pi_{n-1}^m$$

$$A_x \mp i A_y = \mp i \left[\frac{2n+1}{2n-1} (n \mp m)(n \mp m - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \Pi_{n-1}^{m \mp 1}$$

Tweede manier:

$$\Phi = -(n+1) \Pi_n^m, \quad A_z = -i \left[\frac{2n+1}{2n+3} (n-m+1)(n+m+1) \right]^{\frac{1}{2}} \Pi_{n+1}^m$$

$$A_x \mp i A_y = \mp i \left[\frac{2n+1}{2n+3} (n \mp m + 1)(n \mp m + 2) \right]^{\frac{1}{2}} \Pi_{n+1}^{m \mp 1}$$

Controle: Aftrekken van de twee velden moet nul leveren.

Inderdaad is het verschil van de twee vectorpotentialen de gradient van een scalair.

Verder: Vermenigvuldig alle grootheden in het eerste geval met $n+1$, in het tweede geval met n , tel op, en deel door $2n+1$. Dan krijgen we een representatie waarin $\Phi = 0$ is. Dan wordt \vec{A} essentieel identiek met de elektrische vector: $\vec{E} = ik \vec{A}$.

§.2 Integraalformules in de potentiaaltheorie.

Laat $f(z)$ holomorfe zijn in het gebied G van het complexe z -vlak. Zij J een rectificeerbare Jordankromme die, met zijn binnengebied, geheel binnen G ligt. Dan geldt volgens Cauchy, voor z binnen J ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Het karakteristieke van deze formule is dat de waarde van de functie voor z binnen J wordt uitgedrukt als integraal over de "randwaarden" van f , aangenomen op J .

Dergelijke integraalformules heeft men ook in de potentiaaltheorie, in de theorie van de golfvergelijking, en in de Maxwell-theorie, zoals we in de eerstvolgende voordrachten zullen zien. We beginnen met het eenvoudigste geval: dat van de potentiaaltheorie in drie dimensies (potentiaaltheorie in twee dimensies is identiek met complexe-functietheorie).

Stel ϕ is oplossing van $\Delta\phi = 0$, met continue afgeleiden van de tweede orde, in een gebied van de ruimte dat inwendig een begrensd volume D met voldoende-gladde rand T bevat.

Zij \vec{n} de inwendige normaal-eenheidsvector van T . Zij P een inwendig punt van D , en plaats in P een eenheidslading. De Newton-potentiaal van deze eenheidslading is dan $\phi = 1/r_{PQ}$, waarbij Q een variabel punt is, en r_{PQ} de afstand tussen P en Q is. Zou ϕ reguliere oplossing van de potentiaalvergelijking zijn, dan gold volgens de bekende formule van Green

$$\iiint_D (\phi \Delta\phi - \phi \Delta\phi) dV = \iint_T \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS. \quad (1)$$

De functie ϕ is regulier buiten P , maar niet in P . Daarom gaan we P isoleren door middel van een bolletje met straal ϵ , en passen (1) toe op de ruimte tussen T en het bolletje:

$$\iiint_{T-\epsilon} (\phi \Delta\phi - \phi \Delta\phi) dV = \iint_T \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS + \iint_{\epsilon} \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS.$$

Het linkerlid is nul, omdat $\Delta\phi = \Delta\phi = 0$ binnen $T-\epsilon$. Dan volgt

$$\iint_T \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS = - \iint_{\epsilon} \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS.$$

Laat $\epsilon \rightarrow 0$. De functie $\partial\phi/\partial n$ is continue functie van Q in omgeving van P . Verder is $\phi = O(r^{-1})$, oppervlak bolletje $= O(r^2)$, met $r = r_{PQ}$. Dus

$$\iint_{\epsilon} \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

De andere ϵ -term moet ook een limiet hebben, en die gaan we nu bepalen. Op 't bolletje geldt

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \quad \phi(Q) = \phi(P) + o(r),$$

dus

$$\iint_{\epsilon} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \rightarrow \phi(P) \iint -\frac{1}{r^2} dS = -4\pi \phi(P).$$

Daarmee is tenslotte gevonden

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) - \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_Q} \right\} dS_Q \quad (2)$$

geldig voor P binnen T.

Opmerking: Bovenstaande proces is natuurlijk overbekend. Formule (2) wordt verkregen zonder de poespas van het bolletje ϵ , als we direct formule (1) toepassen en bedenken dat ϕ overal voldoet aan de inhomogene vergelijking

$$\Delta_Q \phi(Q) = -4\pi \delta(P, Q)$$

waarin $\delta(P, Q)$ een deltafunctie is. Het linkerlid van (1) wordt dan

$$-4\pi \iiint_D \phi(Q) \delta(P, Q) dV_Q = -4\pi \phi(P)$$

Formule (2) drukt uit: ligt het oppervlak T binnen het regulariteitsgebied van de potentiaal ϕ , dan kunnen we deze potentiaal in een punt binnen T uitdrukken als integraal over de randwaarden van ϕ en van $\partial\phi/\partial n$. Dit is analoog aan de formule van Cauchy in de functietheorie, met dien verstande dat we niet alleen de randwaarden van de functie zelf, maar ook die van haar normaal-afgeleide hebben.

Zoals bekend is, zouden we kunnen volstaan met bv. de randwaarden van ϕ alleen. De corresponderende formule is echter niet triviaal, en de "kern" zou dan afhangen van T (het probleem komt neer op het bepalen van de Greense functie van de eerste soort - à la Dirichlet).

Opmerking: Met dezelfde bewijsmethode volgt zonder meer dat de integraal in het rechterlid van (1) nul is indien P buiten T ligt. Is P een punt van T, en bezit T daar een raakvlak, dan is de integraal gelijk aan $\frac{1}{2} \phi(P)$. Een en ander is direct duidelijk met de deltafunctie-techniek.

Opmerking: De integraalformule (2) toont onmiddellijk dat ϕ onbeperkt continu-differentieerbaar is binnen zijn regulariteitsgebied.

Opmerking: Zijn f en g continue functies over T, dan is

$$\chi(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \iint_T \left\{ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) - \frac{g(Q)}{r_{PQ}} \right\} dS_Q$$

natuurlijk binnen T oplossing van de potentiaalvergelijking.

Het zou mogelijk zijn dat $\chi(P)$ een limiet heeft voor $P \rightarrow Q \in T$ vanuit de binnenkant van T , maar in het algemeen zal deze limietwaarde niet gelijk zijn aan $f(Q)$. Een analoge opmerking geldt voor $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ en g .

Dit is duidelijk als men bedenkt dat φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ niet onafhankelijk van elkaar kunnen worden voorgeschreven op T , daar de potentiaalvergelijking elliptisch is.

Het is niet doenlijk formules als (2) steeds met alle argumenten P en Q op te schrijven. Kortheidshalve zullen we (2) schrijven als volgt:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \quad (3)$$

Equivalentente notatie is

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{grad}' \varphi \right\} \cdot \vec{n} dS$$

waarbij het accent duidt op differentiatie naar de coördinaten van integratie. We kunnen ook afspreken dat differentiaaloperatoren onder het integraalteken steeds zijn op te vatten als werkende op de coördinaten van integratie, zodat dan ook de accenten kunnen worden weggelaten. Operatoren buiten het integraalteken moeten dan worden geacht te werken op veldpuntscoördinaten. In deze zin geldt dan

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla \varphi \right\} \cdot d\vec{S} \quad (4)$$

waarbij we ook nog het vectoriële oppervlakte-element $d\vec{S} = \vec{n} dS$ hebben ingevoerd. Belangrijk om te onthouden is dat \vec{n} naar het inwendige is gericht.

We kunnen deze representaties gemakkelijk uitbreiden tot de oplossingen van de vergelijking van Poisson, $\Delta \varphi = -4\pi\rho$, waarin ρ de ladingsdichtheid voorstelt. De functie ρ onderstellen we continu-differentieerbaar (Hölder-continu is ook voldoende). Gaan we terug naar het bewijs van (2), dan zien we gemakkelijk dat in het rechterlid van (2) nog een term is toe te voegen, die precies de Newton-potentiaal van de ladingen ρ binnen T voorstelt. Dus voor Poisson geldt de identiteit:

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla \varphi \right\} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

De oppervlakte-integraal in (4) of (5) kunnen we fysisch interpreteren als combinatie van Newton-potentialen afkomstig van zekere lagen monopolen en dipolen op het oppervlak T .

Voor wat betreft de term

$$- \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \varphi}{r} \cdot d\vec{S} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{n} \cdot \nabla \varphi}{r} dS = \int \frac{\omega}{r} dS$$

is het onmiddellijk duidelijk. De bijbehorende oppervlakte-ladingsdichtheid is

$$\omega = - \frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \nabla \varphi = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (6)$$

Om de resterende term te interpreteren, beschouwen we het veld van een dipool. Neem een puntlading $-e$ op de plaats (ξ, η, ζ) en een puntlading $+e$ op de plaats $(\xi+d\xi, \eta+d\eta, \zeta+d\zeta)$. Dan is de corresponderende Newton-potentiaal gegeven door

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= e \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi-d\xi)^2 + \dots}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \dots}} \right\} \\ &\approx e \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi + \dots \right) \approx e d\vec{S} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

als $d\vec{S}$ de vector is van $-e$ naar $+e$, en het accent differentiatie naar (ξ, η, ζ) aangeeft.

Laat nu $e \rightarrow \infty$, $d\vec{S} \rightarrow \vec{O}$; zodanig dat $e d\vec{S} \rightarrow \vec{m}$ (eindige vector).

Dan krijgen we een electrostatische dipool met moment \vec{m} in het punt (ξ, η, ζ) . Het Newton-veld van deze dipool wordt beschreven door de potentiaal

$$\begin{aligned} \phi &= \vec{m} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) = -\vec{m} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -\text{div} \left(\frac{\vec{m}}{r} \right) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{|\vec{m}| \cos \theta}{r^2}, \end{aligned}$$

als θ de hoek tussen \vec{m} en \vec{r} is, met \vec{r} de vector van de dipool naar het veldpunt.

De term

$$\frac{1}{4\pi} \int \varphi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \int \varphi \vec{n} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) dS = \int \vec{m} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

komt dus overeen met de potentiaal van een dipool laag langs het oppervlak T met een moment-dichtheid

$$\vec{m} = \frac{\varphi}{4\pi} \vec{n} \tag{7}$$

Formule (4) zegt dus fysisch: Een reguliere potentiaal φ is in een gebied (binnen het regulariteitsgebied) op te vatten als de Newtonse potentiaal van een laag monopolen met dichtheid $-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ en een laag dipolen met momentdichtheid $\frac{\varphi}{4\pi} \vec{n}$ langs de rand van het gebied.

Hierbij is \vec{n} de naar binnen gerichte eenheidsnormaalvector.

We gaan nu verder met de discussie van formule (5). We nemen voor T in het bijzonder een bol B met straal R om het middelpunt P . Dus

$$\phi(P) = \int_B \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_B \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

waarbij in de eerste integraal over het volume der bol B , in de tweede integraal over het oppervlak der bol B wordt geïntegreerd; r is in beide gevallen de afstand van P tot het integratiepunt.

De oppervlakte-integraal wordt nu heel eenvoudig, omdat daarin geldt $r = R$, $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}$. Dan vindt men

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \int_B \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} - \varphi \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \right\} R^2 d\Omega \\ &= \int_B \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial R} (R\varphi) d\Omega \\ &= \int_B \frac{\rho}{r} dV + \frac{\partial}{\partial R} (RM),\end{aligned}$$

wanneer M de gemiddelde waarde van φ is op de bol B met straal R en middelpunt P:

$$M = M_\varphi(P; R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int \varphi d\Omega.$$

Er geldt dus

$$\varphi(P) = \int_B \frac{\rho}{r} dV + M + R \frac{\partial M}{\partial R} \quad (8)$$

Om de term met $\partial M / \partial R$ te verdrijven, passen we de formule van Green (1) toe op $\Delta \varphi = -4\pi\rho$ en $\varphi \equiv 1$. Dan komt

$$4\pi \int_B \rho dV = \int_B \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = - \int_B \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot R^2 d\Omega.$$

Dit geeft dus de relatie

$$\frac{\partial M}{\partial R} = - \frac{1}{R^2} \int \rho dV. \quad (9)$$

Ingevuld in (8) geeft dit

$$\varphi(P) = \int_B \frac{\rho}{r} dV + M - \frac{1}{R} \int_B \rho dV. \quad (10)$$

Als er geen lading binnen de bol B aanwezig is, dan volgt uit (10) dat $M = \varphi(P)$ is, een wel bekend resultaat, dat de gemiddelde waarde van een reguliere potentiaal over een bol oppervlak gelijk is aan de potentiaal in het middelpunt. Is de totale lading geconcentreerd in een begrensd volume D, en met totale lading m, dan geldt voor R groot genoeg (zodat D binnen B ligt)

$$\varphi(P) = \int_D \frac{\rho}{r} dV + M - \frac{m}{R} \quad (11)$$

Stelling

Het probleem: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ geldig in hele ruimte;
 ρ continu differentieerbaar (resp. Hölder-continu),
 $\rho \equiv 0$ buiten begrensde domein D ;
 $\varphi(P) \rightarrow 0$ ($P \rightarrow \infty$) uniform in alle richtingen, van één
vaste oorsprong uit,
heeft één en slechts één oplossing, nl.

$$\varphi = \int_D \frac{\rho}{r} dV. \tag{12}$$

Bewijs

Uit $\varphi(P) \rightarrow 0$ ($P \rightarrow \infty$) uniform in alle richtingen, volgt
 $M_\varphi(P, R) \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$), elke P .

Dan volgt $M - \frac{m}{R} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$), elke P .

Daar $M - \frac{m}{R}$ niet van R afhangt, maar alleen van P , geldt

$$M = \frac{m}{R}, \tag{13}$$

en dus $\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV$ volgens (11). Bestaat de oplossing, dan is het deze (eenduidigheid).

Dat (12) particuliere oplossing is van de Poisson vergelijking mogen we bekend onderstellen. En dat $\varphi(P) \rightarrow 0$ ($P \rightarrow \infty$) uniform in alle richtingen, is triviaal. Dus existentie van de oplossing ook bewezen.

Als nevenresultaat van deze stelling volgt de eigenschap dat (13) moet gelden voor de particuliere oplossing (12). Dat kan men als volgt controleren:

Neem bol B met middelpunt P en straal R zo groot dat D geheel binnen de bol ligt. Dan

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \frac{1}{4\pi} \int \varphi d\Omega = \frac{1}{4\pi R^2} \int \varphi dS = \frac{1}{4\pi R^2} \int dS \int \frac{\rho}{r} dV \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int \rho dV \int \frac{dS}{r}. \end{aligned}$$

Nu is $\int \frac{dS}{r}$ de potentiaal van een homogene ladingsverdeling op de bol B met dichtheid 1. Buiten deze bol is de potentiaal gelijk aan (totale lading gedeeld door afstand tot middelpunt) $\frac{4\pi R^2}{a}$. Voor een punt op de bol is deze dus $4\pi R$. Maar dat is ook de waarde van de potentiaal in elk punt binnen de bol. Dus in ons geval geldt $\int \frac{dS}{r} = 4\pi R$. Daarmee wordt dan

$$M_\varphi = \frac{1}{4\pi R^2} \int_D \rho dV \cdot 4\pi R = \frac{1}{R} \int_D \rho dV = \frac{m}{R}$$

Stelling

Is φ buiten en op het begrensde, gesloten oppervlak T twee maal continu-differentieerbare oplossing van $\Delta\varphi = 0$, en geldt

$$\varphi = O(1) \quad (r \rightarrow \infty) \text{ uniform in alle richtingen}$$

van één vaste oorsprong uit, dan heeft men buiten T voor φ de representatie

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS, \quad (14)$$

waarbij \vec{n} de uitwendige normaal van T is.

Bewijs Pas stelling van Green toe op de ruimte buiten T en binnen de bol om P als middelpunt met straal R , zò groot dat T geheel binnen B ligt. Dan geldt

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_B \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS + \frac{\partial}{\partial R} (R M_\varphi(P;R)). \end{aligned}$$

Passen we Green toe op dezelfde ruimte met $\varphi \equiv 1$, dan volgt

$$R^2 \frac{\partial M}{\partial R} = \frac{1}{4\pi} \int_T \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

en dus

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS + \frac{1}{4\pi R} \int_T \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + M_\varphi(P;R)$$

Voor $R \rightarrow \infty$ gaan de laatste twee termen naar nul, zodat de stelling is bewezen.

Opmerking: Men heeft bovendien voor de potentiaal (14) de relatie

$$M = - \frac{1}{4\pi R} \int_T \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Hier volgen enkele stellingen, die we niet in detail bewijzen. Uit de complexe-functietheorie weten we dat een analytische functie in de omgeving van een regulier punt in een machtreeks kan worden ontwikkeld. Analoog geldt in de potentiaaltheorie in drie dimensies de

Stelling:

Zij U reguliere oplossing van $\Delta U = 0$ in gebied G met rand T . Zijn r, θ, φ bolcoördinaten rondom enig inwendig \mathcal{O} punt van G , dan geldt

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} r^n Y_n^m(\theta, \varphi):$$

Deze ontwikkeling is absoluut en uniform convergent binnen de bol zóver opgeblazen dat hij juist de rand T van G ontmoet.

Bewijs: Pas de representatiestelling (4) toe op het punt P binnen een bol om \mathcal{O} die geheel binnen G ligt:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ U(\vec{r}') \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \nabla U(\vec{r}') \right\} \cdot d\vec{S}'.$$

Verder geldt

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(-1)^m}{2n+1} \frac{r^n}{(r')^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^{-m}(\theta', \varphi').$$

Substitutie en termgewijze integratie geeft het gewenste resultaat.

Stelling:

Voor de functie uit formule (14) geldt de ontwikkeling

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{b_{nm}}{p^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi)$$

waarin r, θ, φ de bolcoördinaten van P zijn t.o.v. een of andere vaste oorsprong. De ontwikkeling is absoluut en uniform convergent buiten de bol die zó klein is dat het oppervlak T er net nog binnen ligt.

Bewijs: Analoog als in 't vorige geval, met de rollen van r en r' verwisseld.

Stelling:

In de ruimte tussen twee concentrische bollen, met middelpunt als oorsprong van het bolcoördinatensysteem geldt, analoog aan de Laurent ontwikkeling uit de functietheorie:

$$\varphi(P) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n A_n(\theta, \varphi), \quad A_n = \sum_{m=-n}^n c_m Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Hiermee zijn ook de gewone processen van separatie der variabelen in bolcoördinaten goedgepraat.

§.3 Integraalformules in de golftheorie.

We gaan, voor zover mogelijk, de voorafgaande beschouwingen over de potentiaaltheorie uitbreiden tot de golfvergelijking in drie dimensies. De tijdafhankelijke golfvergelijking is:

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

Als we alleen stationnaire verschijnselen bespreken, krijgen we via de substitutie

$$U = \varphi(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (16)$$

te maken met de tijdonafhankelijke golfvergelijking

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (k = \frac{\omega}{c}) \quad (17)$$

Hierin is k het golfgetal. Voor $k = 0$ geeft (17) de potentiaalvergelijking. Dit is reeds een aanwijzing dat vele van onze beschouwingen uit de vorige paragraaf onmiddellijk kunnen worden overgenomen. Tot en met formule (7) gaat het onmiddellijk, met dien verstande dat we in plaats van de Newton-kern $1/r$ kiezen één der functies

$$\frac{e^{ikr}}{r}, \quad \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \frac{\cos kr}{r}$$

Met de keuze (16) van de tijdfactor stelt de eerste functie een uitstralende bolgolf voor; de tweede een instralende bolgolf, en de derde een staande bolgolf. Nemen we eenmaal de tijdfactor (16) dan zijn we om fysische redenen gebonden aan de functie e^{ikr}/r , als we met onbegrensde volumina te maken hebben (zie stralingsvoorwaarde verder op).

De relevante formules zullen we in het kort geven. De functie e^{ikr}/r voldoet aan de inhomogene vergelijking:

$$\Delta_Q \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = -4\pi \delta(P, Q), \quad r = r_{PQ}$$

Dan geeft Green (1), in dezelfde notatie en onder dezelfde afspraken als vroeger,

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \quad (18)$$

Ook deze formule laat zien dat φ onbeperkt differentieerbaar is in het regulariteitsgebied. Tevens is formule (18) de mathematische formulering van het Huygensse principe; er is ook geen "terugstraling" van het "golffront": de integraal (18) is nul voor P buiten het oppervlak T . De monopool- en dipool-lagen hebben dezelfde dichtheden als in geval van de potentiaaltheorie: formules (6) en (7).

Ook het geval van inhomogene golfvergelijking

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -4\pi \rho$$

kunnen we analoog behandelen. Het analogon van (5) wordt:

$$\varphi = \int \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \varphi \right\} \cdot d\vec{S} \quad (19)$$

Het verhaal van de bol B kunnen we grotendeels overnemen. Neem dus in (19) voor T weer een bol B met straal R en middelpunt P. Dan wordt

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \int_B \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_B \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \\ &= \int_B \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} - \varphi \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right) R^2 d\Omega \\ &= \int_B \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int e^{ikR} \left(\frac{\partial}{\partial R} - ik \right) (R\varphi) d\Omega \end{aligned}$$

Is weer M de gemiddelde waarde van φ over de bol B, dan geldt dus nu

$$\varphi(P) = \int_B \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV + e^{ikR} \left(\frac{d}{dR} - ik \right) (RM) \quad (20)$$

Net als vroeger, proberen we dM/dR te elimineren. Daarvoor gebruiken we de formule van Green (1) toegepast op de bol B met $\phi = (\sin kr)/r$. Dan wordt

$$\varphi \Delta \phi - \phi \Delta \varphi = \varphi (-k^2 \phi) - \phi (-k^2 \varphi - 4\pi \rho) = 4\pi \rho \frac{\sin kr}{r}$$

en dus geeft (1):

$$\begin{aligned} \int_B \rho \frac{\sin kr}{r} dV &= \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\sin kR}{R} \right) - \frac{\sin kR}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right\} R^2 d\Omega \\ &= \left(R^2 \frac{d}{dR} \left(\frac{\sin kR}{R} \right) \right) M - (R \sin kR) \frac{dM}{dR} \\ &= (kR \cos kR - \sin kR) M - (\sin kR) R \frac{dM}{dR} \end{aligned}$$

Voor $\sin kR \neq 0$, volgt dus

$$R \frac{dM}{dR} = (kR \cot kR - 1) M - \frac{1}{\sin kR} \int_B \rho \frac{\sin kr}{r} dV$$

Voor de tweede term in het rechterlid van (2) kunnen we dan schrijven

$$\begin{aligned} &e^{ikR} \left\{ M - ikRM + R \frac{dM}{dR} \right\} \\ &= e^{ikR} \left\{ M - ikRM + (kR \cot kR - 1) M - \frac{1}{\sin kR} \int_B \rho \frac{\sin kr}{r} dV \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{ikR} \left\{ (\cot kR - i)kRM - \frac{1}{\sin kR} \int_B \rho \frac{\sin kr}{r} dV \right\} \\
 &= \frac{kR}{\sin kR} M - \frac{e^{ikR}}{\sin kR} \int_B \rho \frac{\sin kr}{r} dV.
 \end{aligned}$$

Zo krijgen we in plaats van (20) de formule

$$\varphi(P) = \int_B \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV - \frac{e^{ikR}}{\sin kR} \int_B \rho \frac{\sin kr}{r} dV + \frac{kR}{\sin kR} M \quad (21)$$

Om af te komen van de uitzondering $\sin kR = 0$, kunnen we in (21) beide leden vermenigvuldigen met $(\sin kR)/kR$. Dan komt er:

$$\frac{\sin kR}{kR} \varphi(P) = \frac{\sin kR}{kR} \int_B \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV + M - \frac{e^{ikR}}{R} \int_B \rho \frac{\sin kr}{kr} dV. \quad (22)$$

Hiermee is formule (10) uit de potentiaaltheorie uitgebreid tot het geval van de golfvergelijking. Als we in (22) k naar nul laten gaan, krijgen we precies (10).

Is binnen de bol B geen lading aanwezig, dan ziet men uit (22) de geldigheid van

$$M = \frac{\sin kR}{kR} \varphi(P) \quad (23)$$

In dit geval is dus/gemiddelde waarde van de golf functie op een bol met straal R gelijk aan $(\sin kR)/kR$ maal de waarde van de golf functie in het middelpunt. Die factor is nul voor $R = n\pi/k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), zodat op zekere bollen altijd de middelwaarde nul is. Dit is wel geheel anders dan in de potentiaaltheorie.

Konden we voor $k = 0$ eenvoudige randvoorwaarden in het oneindige opleggen, om te maken dat we een eenduidige oplossing krijgen, - dit gaat niet meer op voor $k > 0$. De simpele voorwaarde $\varphi(P) \rightarrow 0$ ($P \rightarrow \infty$) is niet voldoende, zoals expliciet duidelijk is aan het voorbeeld $(\sin kr)/kr$: deze functie is overal regulier, in het oneindige nul, en toch niet identiek nul.

Voor complexe waarden van k gaat het wel weer eenvoudig. Voor een niet-absorberend medium is k positief; voor dempende media krijgen we te maken met complexe k , en wel is het zó dat we met onze tijdfactor (16) kunnen onderstellen

$$\text{Im}(k) > 0 \quad (24)$$

Stel dus k complex, met de voorwaarde (24). Stel verder $\varphi \rightarrow 0$ uniform in alle richtingen, van één vaste oorsprong uit, als de afstand tot de oorsprong groter en groter wordt. Dan geldt ook: $M \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$), voor elk punt P . In ons geval is $\sin kR$ van nul verschillend voor elke (reële) R . We kunnen dus onbepaald (21) gebruiken. Met $R \rightarrow \infty$ gaan $kR/(\sin kR)$ en $e^{ikR}/(\sin kR)$ naar nul, zodat uit (21) eenduidig volgt, als $R \rightarrow \infty$ gaat:

$$\varphi(P) = \int_D \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV \quad (25)$$

Omgekeerd is het duidelijk dat deze particuliere oplossing van $\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\rho$ het gewenste gedrag in het oneindige vertoont, nl. $\varphi(P) \rightarrow 0$ ($P \rightarrow \infty$), uniform in alle richtingen, onafhankelijk daarvan of $\text{Im}(k) > 0$ of $= 0$ is. Dan kunnen we concluderen:

Stelling: Het probleem

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\rho \text{ (geldig in hele ruimte)} \\ \rho \text{ continu-differentieerbaar (in hele ruimte)} \\ \rho \equiv 0 \text{ buiten begrensde domein } D \\ \varphi(P) \rightarrow 0 \text{ (} P \rightarrow \infty \text{) uniform in alle richtingen,} \\ \text{van één vaste oorsprong uit,} \\ \text{Im}(k) > 0 \end{array} \right.$$

heeft één en slechts één oplossing, nl. de oplossing gegeven door formule (25).

In verband hiermee, en uit formule (22) zien we dat voor deze "uitgezochte" oplossing (25) dan ook moet gelden

$$M_\varphi(P, R) = \frac{e^{ikR}}{R} \int_D \rho \frac{\sin kr}{kr} dV, \quad (26)$$

in de onderstelling dat D geheel binnen de bol B met straal R rondom P ligt.

Net als in het geval van de potentiaaltheorie kunnen we dit achteraf verifiëren:

$$M = \frac{1}{4\pi} \int \varphi d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \rho dV \int \frac{e^{ikr'}}{r'} d\Omega.$$

Hierbij is r' de afstand van dV tot het integratiepunt op de bol B . Heeft dV een afstand r tot P , dan geldt

$$\frac{e^{ikr'}}{r'} = \frac{e^{ik\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}} = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr) h_n(kR) P_n(\cos\theta),$$

als men zich een vroeger-gegeven formule herinnert. Nu is $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, als θ en ϕ de hoeken om de poolas zijn (poolas is van P naar dV). Bij integratie over de richtingen geeft alleen de term met $n=0$ een bijdrage. Derhalve is

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ikr'}}{r'} d\Omega &= ik j_0(kr) h_0(kR) = \\ &= ik \frac{\sin kr}{kr} \frac{e^{ikR}}{ikR} = \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sin kr}{kr}, \end{aligned}$$

zodat inderdaad (26) is geverifieerd.

Representatiestelling:

Is φ buiten en op het begrensde gesloten oppervlak T tweemaal continu differentieerbare oplossing van $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, en geldt

$$\begin{cases} \text{Im}(k) > 0 \\ \varphi \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \text{ uniform in alle richtingen, van één vaste oorsprong uit,} \end{cases}$$

dan heeft men buiten T voor φ de representatie

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS, \quad (27)$$

waarbij n de uitwendige normaal van T is.

Bewijs: Analoog aan dat van (14). Voor R groot genoeg geldt

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \\ &+ e^{ikR} \left(\frac{d}{dR} - ik \right) (R M_\varphi(P, R)). \end{aligned}$$

Passen we Green toe op de ruimte buiten T en binnen B met $\psi \equiv (\sin kr)/r$, dan volgt

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \\ &+ \frac{kR}{\sin kR} \left\{ M - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\sin kr}{kr} \right) - \frac{\sin kr}{kr} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \right\}. \end{aligned}$$

Voor $R \rightarrow \infty$ blijft alleen de eerste term over; dus geldt (27).

Voor de uitgezochte oplossing (27) geldt verder

$$M = - \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \int_T \left\{ \frac{\sin kr}{kr} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\sin kr}{kr} \right) \right\} dS$$

die voor $k \rightarrow 0$ weer de oude relatie uit de potentiaaltheorie teruggeeft.

Het geval van complexe k met $\text{Im}(k) > 0$ geeft dus geen essentiële veranderingen aan de theorie als men van potentiaal- op golfvergelijking overgaat. Dit is voor reële $k > 0$ niet meer het geval, en we moeten dan in het oneindige andere voorwaarden formuleren. Deze materie valt onder het begrip uitstralingsvoorwaarde.

Dat begrip is niet ondubbelzinnig. Dergelijke voorwaarden werden het eerst geformuleerd door Sommerfeld, en later verscherpt door Rellich, Magnus, Atkinson, Wilcox, en Miranker.

Ter inleiding gaan we eerst het asymptotisch gedrag (in het oneindige) van de speciale oplossing (25) onderzoeken. Neem een vaste oorsprong O; zij a de afstand van de oorsprong tot het integratiepunt Q in dV;

zij s de afstand van O tot het veldpunt P. Dan geldt

$r^2 = s^2 + a^2 - 2as \cos \chi$, met χ de hoek tussen OP en OQ. Voor s groot genoeg geldt

$$r = s \sqrt{1 - 2 \frac{a}{s} \cos \chi + \frac{a^2}{s^2}} = s + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n},$$

met α_n onafhankelijk van s. Dan wordt

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{r} &= \frac{e^{iks}}{s} \frac{e^{ik \sum_0^{\infty} (\alpha_n / s^n)}}{1 + \sum_0^{\infty} (\alpha_n / s^{n+1})} \\ &= \frac{e^{iks}}{s} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{s^n} \right) \end{aligned}$$

waarin de laatste reeks uniform in s en de hoekvariabelen (die in A_n zitten) convergeert voor s groot genoeg. Na vermenigvuldiging met ρ kunnen we deze reeks termgewijze integreren:

$$\varphi(P) = \int_D \rho \frac{e^{ikr}}{r} dV = \frac{e^{iks}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{s^n} \quad (28)$$

waarin B_n niet van s afhangt maar wel van de richting OP. Bovenstaande reeks convergeert uniform in alle variabelen voor s groot genoeg.

De keuze van de oorsprong is geheel willekeurig. Kies nu de oorsprong in het punt P, dan geldt

$$\varphi(Q) = \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{R^n}$$

waarbij R de afstand PQ is en C_n van de hoeken afhangt.

Het gemiddelde over de bol B rond P met straal R is dus

$$M_\varphi(P, R) = \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{R^n}$$

waarin D_n niet afhangt van R, maar natuurlijk wel van P. Deze reeks convergeert voor R groot genoeg. Deze reeks mag termgewijze worden gedifferentieerd. Er geldt dus

$$e^{ikR} \left(\frac{d}{dR} - ik \right) (RM) = - e^{2ikR} \sum_0^{\infty} \frac{n \dot{D}_n}{R^{n+1}}$$

$$\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

In verband met (20) kunnen we dus de volgende uitspraak doen: Nodig en voldoende opdat ons probleem $\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\rho$ één en slechts één oplossing heeft die wordt gegeven door (25) is:

$$e^{ikR} \left(\frac{d}{dR} - ik \right) (RM) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad \text{voor elke } P.$$

Ons rest eigenlijk nog alleen het geval $k > 0$. Dan is nodig en voldoende:

$$\left(\frac{d}{dR} - ik \right) (RM) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (\text{elke } P)$$

of ook nodig en voldoende:

$$M + R \left(\frac{dM}{dR} - ikM \right) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (\text{elke } P).$$

We zijn in de eerste plaats geïnteresseerd in voldoende voorwaarden. Voldoende is zeker

$$\varphi + R \left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - ik\varphi \right) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

uniform in alle richtingen, voor elke P.

Voldoende is dus ook

$$\left. \begin{array}{l} R\varphi \text{ begrensd} \\ R \left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - ik\varphi \right) \rightarrow 0 \end{array} \right\} (R \rightarrow \infty) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{uniform in alle richtingen} \\ \text{en voor elke } P \end{array} \right\} \quad (29)$$

Dit lijkt veel op Sommerfelds "Endlichkeitsbedingung" respectievelijk "Ausstrahlungsbedingung". Er is echter een belangrijk verschil. De voorwaarden hier geformuleerd moeten voor elk punt P gelden, terwijl in de Sommerfeld-voorwaarden het slechts voor één punt wordt geeist (de oorsprong). Dus volgens Sommerfeld:

$$\left. \begin{array}{l} r\varphi \text{ begrensd} \\ r \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - ik\varphi \right) \rightarrow 0 \end{array} \right\} (r \rightarrow \infty), \text{ uniform in alle richtingen} \\ \text{van de oorsprong uit } (r = OP). \quad (30)$$

Stel $k > 0$, φ (tweemaal continu differentieerbare) oplossing van $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ buiten het begrensd gesloten oppervlak T. Zij S oppervlak dat T in zijn inwendige bevat, en zij P enig punt binnen S en buiten T. Dan geldt

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\} dS + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\} dS. \end{aligned}$$

Nu is op S: $\frac{\partial}{\partial n} = \cos(n, r) \frac{\partial}{\partial r}$. De tweede integraal is dus te schrijven als

$$\frac{1}{4\pi} \int e^{ikr} \cos(n, r) \left\{ -\varphi + r \left(ik\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right\} d\Omega.$$

In absolute waarde wordt deze gemajoreerd door

$$\frac{1}{4\pi} \int \left\{ |\varphi| + \left| r \left(ik\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right| \right\} d\Omega.$$

Als φ aan (30) voldoet, gaat deze uitdrukking naar nul voor $r \rightarrow \infty$. Dan eindigen we onder de voorwaarden (30) dus met de oplossing

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS$$

dezelfde representatie die we ook voor complexe k hebben gevonden, en we weten reeds uit (28) dat inderdaad deze oplossing zelf ook aan de voorwaarden (30) voldoet.

Is φ in de hele ruimte reguliere oplossing van $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ en voldoet φ aan (30), dan is $\varphi \equiv 0$. Want we kunnen T dan samentrekken tot een punt.

Ook geldt kennelijk: (25) geeft de eenduidig bepaalde oplossing van $\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\rho$ als φ aan (30) voldoet.

Dit resultaat hebben we vroeger reeds gebruikt bij de multipoolontwikkelingen, zonder precies te hebben gezegd wat we onder de uitstralingsvoorwaarde moeten verstaan.

We zien dat we in plaats van de voorwaarde $r\varphi$ begrensd ook kunnen eisen $\varphi \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$, uniform in de richtingen). Onderzoekingen van Rellich, Atkinson en vele anderen hebben laten zien dat de hele "Endlichkeitsbedingung" overbodig is. Het blijkt dus dat

$$r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - ik\varphi \right) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty, \text{ uniform in de hoeken}) \quad (31)$$

reeds voldoende is voor de eenduidigheid. Dit volgt ook gemakkelijk als men de ontwikkeling (19) van blz. 62 te hulp roept. Men krijgt dan op constructieve wijze de diverse oplossingen in de vorm van reeksontwikkelingen naar eigen functies, net zoals we dat aan het eind van de vorigen paragraaf hebben gezien voor de potentiaalvergelijking. Te weten:

Stelling:

Is U reguliere oplossing van $\Delta U + k^2 U = 0$ binnen gebied G dan geldt in de omgeving van ieder inwendig punt O de ontwikkeling:

$$U(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi).$$

De reeks convergeert absoluut en uniform binnen elke bol die nog niet de rand van het gebied raakt.

Stelling Is U reguliere oplossing van $\Delta U + k^2 U = 0$ binnen twee concentrische bollen, dan geldt:

$$U = \sum \sum \{ a_{nm} j_n(kr) + b_{nm} h_n(kr) \} Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Stelling Is U reguliere oplossing van $\Delta U + k^2 U = 0$ buiten het oppervlak (begrensd!) T , en voldoet U aan de uitstralingsvoorwaarde, dan geldt:

$$U = \sum \sum c_{nm} h_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad \text{voor } r \text{ groot genoeg.}$$

Het laatste geval willen we wat nader bekijken. Onderstel dus dat U tweemaal continu differentieerbare oplossing is van $\Delta U + k^2 U = 0$ buiten een begrensd gesloten oppervlak T . Kies ergens een oorsprong O . Zij P buiten T met coördinaten r, θ, φ t.o.v. O . Zij verder B een bol met straal r' en middelpunt O , zodanig dat P binnen B ligt. Dan geldt

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS +$$

+ zelfde integraal over B .

Nu is de integraal over T ontwikkelbaar in een reeks van de vorm

$$\sum \sum \alpha_{nm} h_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi)$$

convergent, indien P ligt buiten een bol om O die T geheel inwendig bevat. Laat P daaraan voldoen. De integraal over B daarentegen kan worden ontwikkeld in de reeks

$$\sum \sum \beta_{nm} j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Dit kan ook worden gebracht in de vorm

$$\frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\theta, \varphi)}{r^n} + \frac{e^{-ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(\theta, \varphi)}{r^n}.$$

Het totale veld in P kan dan worden ontwikkeld in de vorm

$$\frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(\theta, \varphi)}{r^n} + \frac{e^{-ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(\theta, \varphi)}{r^n}$$

en deze reeksen convergeren absoluut en uniform buiten de bol die om 0 geslagen is en T in zijn inwendige bevat.

De eerste reeks voldoet aan $r(\frac{\partial}{\partial r} - ik)(\dots) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$).

De tweede reeks niet, tenzij $B_n \equiv 0$. Is gegeven dat $r(\frac{\partial}{\partial r} - ik)U \rightarrow 0$, dan moet dus $B_n = 0$ zijn, en kan alleen de ontwikkeling

$$U = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_0^{\infty} \frac{C_n(\theta, \varphi)}{r^n} \quad (r \text{ groot genoeg}) \quad (32)$$

overblijven.

§.4 Integraalformules in de Maxwell-theorie.

Representatie-theorema's in de Maxwell-theorie kunnen op verschillende manieren worden afgeleid. Eén manier gaat via een uitbreiding van Maxwell's vgl'n met fictieve magnetische lading en stroom:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathcal{H}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}, & \vec{\mathcal{D}} &= \epsilon \vec{\mathcal{E}}, \\ \text{rot } \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{K}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, & \vec{\mathcal{B}} &= \mu \vec{\mathcal{H}}, \\ \text{div } \vec{\mathcal{D}} &= 4\pi\rho, & \text{div } \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \text{div } \vec{\mathcal{B}} &= 4\pi m, & \text{div } \vec{\mathcal{K}} + \frac{\partial m}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

waarbij m de magnetische ladingsdichtheid en $\vec{\mathcal{K}}$ de magnetische stroomdichtheid voorstelt, met elkaar verbonden door een continuïteitsvergelijking.

Voor vacuum ($\epsilon = \mu = 1$) en in de theorie der stationnaire verschijnselen (tijdfactor $e^{-i\omega t}$) gaan bovenstaande vgl'n. over in

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{I} - ik \vec{E}, & \text{rot } \vec{E} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{K} + ik \vec{H} \\ \text{div } \vec{H} &= 4\pi m, & \text{div } \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \text{div } \vec{I} - i\omega\rho &= 0, & \text{div } \vec{K} - i\omega m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Het is voor latere beschouwingen nuttig nu al op te merken dat het systeem (33) invariant is voor de substitutie:

$$H \rightarrow E, E \rightarrow -H, I \rightarrow -K, K \rightarrow I, \rho \rightarrow -m, m \rightarrow \rho. \quad (34)$$

De theorie van de voorafgaande paragrafen was essentieel gebaseerd op de z.g. tweede formule van Green (1). Een analoge formule voor vectoren kan gemakkelijk worden aangegeven. Pas de formule van Gauss

$$\int_D \operatorname{div} \vec{v} dV = - \int_T \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

toe op de vector $\vec{v} = \vec{P} \times \operatorname{rot} \vec{Q}$. Met

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} (\vec{P} \times \operatorname{rot} \vec{Q}) = \operatorname{rot} \vec{P} \cdot \operatorname{rot} \vec{Q} - \vec{P} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{Q}$$

komt dan te voorschijn het vector-analoon van de eerste formule van Green:

$$\int_D (\vec{P} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{Q} - \operatorname{rot} \vec{P} \cdot \operatorname{rot} \vec{Q}) dV = \int_T (\vec{P} \times \operatorname{rot} \vec{Q}) \cdot \vec{n} dS.$$

Verwisselen we de rollen van \vec{P} en \vec{Q} , en "trekken we de twee formules van elkaar af", dan ontstaat het vector-analoon van de tweede formule van Green:

$$\int_D (\vec{P} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{Q} - \vec{Q} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{P}) dV = \int_T (\vec{P} \times \operatorname{rot} \vec{Q} - \vec{Q} \times \operatorname{rot} \vec{P}) \cdot \vec{n} dS \quad (35)$$

Beschouw nu een oplossing (\vec{E}, \vec{H}) van (33) die tweemaal continu-differentieerbaar is op en binnen het begrensde gesloten oppervlak T .

Neem dan in (35) $\vec{P} = \vec{E}$, en $\vec{Q} = G\vec{a}$, waarin \vec{a} een eenheidsvector van constante richting is, en $G = r^{-1} \exp(ikr)$. Hierbij is P (zonder pijl!) een inwendig punt van D , en r de afstand van P tot een variabel punt Q op of binnen T .

De vector \vec{Q} is binnen D , met uitzondering van de omgeving van P , regulier. We isoleren dus P met een bolletje en passen (35) toe op de ruimte D tussen bolletje en T . Het totale begrensde oppervlak noemen we $T' = T + \text{bolletje}$.

De integrand in het linkerlid van (35) wordt als volgt getransformeerd:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{Q} &= \operatorname{rot}(G\vec{a}) = G \operatorname{rot} \vec{a} + (\operatorname{grad} G) \times \vec{a} = -\vec{a} \times \operatorname{grad} G, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{Q} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Q} - \Delta \vec{Q} = \operatorname{grad} \operatorname{div} (G\vec{a}) - \Delta (G\vec{a}) \\ &= \operatorname{grad} (G \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} G) - \vec{a} \Delta G \\ &= \operatorname{grad} (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} G) + k^2 G \vec{a}, \end{aligned}$$

omdat $\Delta G + k^2 G = 0$.

Verder is

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{P} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{4\pi}{c} \vec{K} + ik \vec{H} \right) \\ &= -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{K} + ik \operatorname{rot} \vec{H} \\ &= -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{K} + ik \left(\frac{4\pi}{c} \vec{I} - ik \vec{E} \right) \\ &= -\frac{4\pi}{c} (\operatorname{rot} \vec{K} - ik \vec{I}) + k^2 \vec{E}. \end{aligned}$$

Ingevuld geeft dit

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \text{rot rot } \vec{Q} - \vec{Q} \cdot \text{rot rot } \vec{P} &= \\ &= \vec{E} \cdot \text{grad}(\vec{a} \cdot \text{grad } G) + \frac{4\pi}{c} G \vec{a} \cdot (\text{rot } \vec{K} - ik \vec{I}). \end{aligned}$$

Het rechterlid gaan we nog verder omvormen. Er geldt

$$\begin{aligned} \text{div}[(\vec{a} \cdot \text{grad } G) \vec{E}] &= (\vec{a} \cdot \text{grad } G) \text{div } \vec{E} + \vec{E} \cdot \text{grad}(\vec{a} \cdot \text{grad } G) = \\ &= 4\pi \rho \vec{a} \cdot \text{grad } G + \vec{E} \cdot \text{grad}(\vec{a} \cdot \text{grad } G). \end{aligned}$$

Dan vinden we

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \text{rot rot } \vec{Q} - \vec{Q} \cdot \text{rot rot } \vec{P} &= \\ &= \text{div}[(\vec{a} \cdot \text{grad } G) \vec{E}] + \frac{4\pi}{c} G \vec{a} \cdot (\text{rot } \vec{K} - ik \vec{I}) - 4\pi \rho \vec{a} \cdot \text{grad } G. \end{aligned}$$

Het linkerlid van (35), afgekort tot L_{35} , wordt dus

$$\begin{aligned} L_{35} &= \frac{4\pi}{c} \vec{a} \cdot \int_D G(\text{rot } \vec{K} - ik \vec{I}) dV \\ &\quad - 4\pi \vec{a} \int_D \rho \text{grad } G dV + \int_D \text{div}[(\vec{a} \cdot \text{grad } G) \vec{E}] dV. \end{aligned}$$

De laatste integraal kunnen we met Gauss omvormen tot

$$- \int_{T'} (\vec{a} \cdot \text{grad } G)(\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = - \vec{a} \int_{T'} (\text{grad } G)(\vec{E} \cdot \vec{n}) dS.$$

Het linkerlid van (35) neemt dan de vorm: $L_{35} = \vec{a} \cdot \vec{X}$, waarin \vec{X} een vector is gedefinieerd door

$$\vec{X} = \frac{4\pi}{c} \int_D G(\text{rot } \vec{K} - ik \vec{I}) dV - 4\pi \int_D \rho \text{grad } G dV - \int_{T'} (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{grad } G dS.$$

De term met $\text{rot } \vec{K}$ willen we nog wegwerken. Dit gaat met

$$\int_D \text{rot } \vec{v} dV = \int_{T'} (\vec{v} \times \vec{n}) dS.$$

Als we nemen $\vec{v} = G\vec{K}$, invullen $\text{rot } \vec{v} = G \text{rot } \vec{K} - \vec{K} \times \text{grad } G$, zodat

$$\int_D G \text{rot } \vec{K} dV = \int_D (\vec{K} \times \text{grad } G) dV + \int_{T'} (\vec{K} \times \vec{n}) G dS,$$

dan vinden we tenslotte voor \vec{X} de uitdrukking

$$\vec{X} = \int_D \left(\frac{4\pi}{c} \vec{K} \times \text{grad } G - \frac{4\pi}{c} \text{ik } \vec{I} G - 4\pi\rho \text{ grad } G \right) dV \\ + \int_{T'} \left\{ \frac{4\pi}{c} \vec{K} \times \vec{n} G - (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{grad } G \right\} dS.$$

Iets eenvoudiger gaat de omvorming van het rechterlid van (35), afgekort met R_{35} . Dit is

$$R_{35} = \int_{T'} (\vec{P} \times \text{rot } \vec{Q} - \vec{Q} \times \text{rot } \vec{P}) \vec{n} dS = \\ \int_{T'} \vec{n} \{ -\vec{E} \times (\vec{a} \times \text{grad } G) - G \vec{a} \times \text{rot } \vec{E} \} dS \\ = \int_{T'} \vec{n} \{ -\vec{E} \times (\vec{a} \times \text{grad } G) - G \vec{a} \times (\text{ik } \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{K}) \} dS \\ = \int_{T'} \{ -\vec{E} \times (\vec{a} \times \text{grad } G) + \frac{4\pi}{c} G(\vec{a} \times \vec{K}) - \text{ik } G(\vec{a} \times \vec{H}) \} \cdot \vec{n} dS.$$

In het "volume product" kunnen we cyclische verwisseling toepassen, zodat

$$(\vec{a} \times \vec{K}) \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot (\vec{K} \times \vec{n}) \\ (\vec{a} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot (\vec{H} \times \vec{n}).$$

Ook geldt

$$\{ -\vec{E} \times (\vec{a} \times \text{grad } G) \} \cdot \vec{n} = \{ (\vec{E} \cdot \vec{a}) \text{grad } G - (\vec{E} \cdot \text{grad } G) \vec{a} \} \cdot \vec{n} \\ = (\vec{E} \cdot \vec{a}) (\vec{n} \cdot \text{grad } G) - (\vec{n} \cdot \vec{a}) (\vec{E} \cdot \text{grad } G) \\ = \vec{a} \cdot \{ (\vec{n} \cdot \text{grad } G) \vec{E} - (\vec{E} \cdot \text{grad } G) \vec{n} \} \\ = \vec{a} \cdot \{ (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G \}$$

Nu is bereikt dat elke term een factor \vec{a} . heeft, die we dus voor het integraalteken kunnen brengen. Het rechterlid van (35) komt dan in de gedaante $R_{35} = \vec{a} \cdot \vec{Y}$, waarin \vec{Y} is gedefinieerd door

$$\vec{Y} = \int_{T'} \{ (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G + \frac{4\pi}{c} G(\vec{K} \times \vec{n}) - \text{ik } G(\vec{H} \times \vec{n}) \} dS.$$

Omdat (35) is gereduceerd tot $\vec{a} \cdot \vec{X} = \vec{a} \cdot \vec{Y}$, en \vec{a} eenheidsvector in constante, maar willekeurige richting is, moet noodzakelijk $\vec{X} = \vec{Y}$ gelden.

Dus:

$$\begin{aligned} \int_D \left\{ \frac{4\pi}{c} \vec{K} \times \text{grad } G - \frac{4\pi}{c} ik \vec{I}G - 4\pi\rho \text{ grad } G \right\} dV \\ + \int_{T'} \left\{ \frac{4\pi}{c} (\vec{K} \times \vec{n})G - (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{ grad } G \right\} dS \\ = \int_{T'} \left\{ (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G + \frac{4\pi}{c} G(\vec{K} \times \vec{n}) - ik G(\vec{H} \times \vec{n}) \right\} dS. \end{aligned}$$

Er zijn twee termen die tegen elkaar wegvallen:

$$\begin{aligned} \int_D \left\{ \frac{4\pi}{c} \vec{K} \times \text{grad } G - \frac{4\pi}{c} ik \vec{I}G - 4\pi\rho \text{ grad } G \right\} dV = \\ = \int_{T'} \left\{ (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{ grad } G + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G - ik G(\vec{H} \times \vec{n}) \right\} dS. \end{aligned}$$

De integraal over T' bestond uit twee stukken; dat over T en dat over het bolletje rond P . In de limiet $\epsilon \rightarrow 0$ geldt voor dit bolletje

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon} \left\{ (\vec{E} \cdot \vec{n}) \text{ grad } G + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G - ik G(\vec{H} \times \vec{n}) \right\} dS \\ \approx -4\pi\epsilon^2 \left\{ \frac{\vec{n}}{\epsilon^2} (\vec{E} \cdot \vec{n}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \frac{\vec{n}}{\epsilon^2} + o\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right\} \\ \rightarrow -4\pi [(\vec{n} \times \vec{E}) \times \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{E})\vec{n}] = -4\pi \vec{E}(P) \quad (\epsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Dan hebben we tenslotte dus de representatie:

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) = \int_D \left\{ \frac{ik}{c} G \vec{I} + \frac{1}{c} (\text{grad } G \times \vec{K}) + \rho \text{ grad } G \right\} dV \\ + \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ ikG(\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{ grad } G \right\} dS \end{aligned} \quad (36)$$

met $G = e^{ikr}/r$, en r afstand van P tot het integratiepunt.

De analoge formule voor $\vec{H}(P)$ kunnen we met de substitutieregels (34) en het invariantie-principe direct uit (36) afleiden:

$$\begin{aligned} \vec{H}(P) = \int_D \left\{ \frac{ik}{c} G \vec{K} - \frac{1}{c} (\text{grad } G \times \vec{I}) + m \text{ grad } G \right\} \\ + \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{ -ikG(\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } G + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{ grad } G \right\} dS \end{aligned} \quad (37)$$

De formules (36) en (37) gelden voor ieder inwendig punt P . Ligt P buiten T dan zijn de rechterleden beide nul. De operatoren onder de integraaltekens werken op de coördinaten van integratie, en \vec{n} wijst naar binnen!

De representatie-formules (36) en (37) kunnen we in een andere vorm brengen door het invoeren van elektrische en magnetische, vectoriële en scalaire, potentialen.

We definiëren:

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}_1 &= \frac{1}{c} \int_D \vec{I} G \, dV, & \phi_1 &= \int_D \rho G \, dV \\ \vec{F}_1 &= -\frac{1}{c} \int_D \vec{K} G \, dV, & \chi_1 &= \int_D m G \, dV \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

De vector \vec{A}_1 is de elektrische vectorpotentiaal van de elektrische stroomdichtheid \vec{I} voorzover deze laatste binnen T ligt. (Het beschouwde veld kan nog wel andere bronnen buiten T hebben!). Op dezelfde wijze is ϕ_1 de elektrische scalaire potentiaal van de ruimtelijke elektrische ladingsverdeling ρ binnen T. Analooq is \vec{F}_1 de magnetische vectorpotentiaal van de magnetische stroomdichtheid \vec{K} binnen T, en χ_1 de bijbehorende scalaire potentiaal. Deze 4 functies zijn in de hele ruimte (dus niet alleen binnen T) gedefinieerd.

De volume-integralen in de rechterleden van (36) en (37) kunnen we uitdrukken in de vier potentialen (38). Men heeft

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}_1 &= \frac{1}{c} \int_D \text{rot}_P (\vec{I} G) \, dV = \frac{1}{c} \int_D (\text{grad}_P G \times \vec{I}) \, dV \\ &= -\frac{1}{c} \int_D \text{grad } G \times \vec{I} \, dV, \end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{F}_1 = \frac{1}{c} \int_D \text{grad } G \times \vec{K} \, dV,$$

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi_1 &= \int_D \text{grad}_P (\rho G) \, dV = \int_D \rho \text{grad}_P G \, dV \\ &= -\int_D \rho \text{grad } G \, dV, \end{aligned}$$

$$\text{grad } \chi_1 = -\int_D m \text{grad } G \, dV.$$

Hiermee zijn (36) en (37) gebracht in de vorm.

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= ik \vec{A}_1 + \text{rot } \vec{F}_1 - \text{grad } \phi_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_T \{ ikG(\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad } G \} \, dS, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} &= -ik\vec{F}_1 + \text{rot } \vec{A}_1 - \text{grad } \chi_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_T \{ -ikG(\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } G + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad } G \} dS. \end{aligned} \right\} (40)$$

De resterende oppervlakte-integralen kunnen we op analoge wijze omvormen. We definiëren daarvoor 4 nieuwe functies, nl.

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{H}) G dS, & \phi_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{E}) G dS, \\ \vec{F}_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{E}) G dS, & \chi_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{H}) G dS. \end{aligned} \right\} (41)$$

Men heeft:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_T \text{rot}_P \{ (\vec{n} \times \vec{H}) G \} dS = \frac{1}{4\pi} \int_T (\text{grad}_P G) \times (\vec{n} \times \vec{H}) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } G dS, \\ \text{rot } \vec{F}_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G dS, \\ \text{grad } \phi_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad } G dS, \\ \text{grad } \chi_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad } G dS. \end{aligned}$$

Dan kunnen we voor de integraal in (39) substitueren:

$$ik\vec{A}_2 + \text{rot } \vec{F}_2 - \text{grad } \phi_2,$$

en voor de integraal in (40)

$$-ik\vec{F}_2 + \text{rot } \vec{A}_2 - \text{grad } \chi_2.$$

Als we dan de somfuncties invoeren:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \quad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \chi = \chi_1 + \chi_2 \quad (42)$$

krijgen we

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= ik\vec{A} + \text{rot } \vec{F} - \text{grad } \phi, \\ \vec{H} &= -ik\vec{F} + \text{rot } \vec{A} - \text{grad } \chi, \end{aligned} \right\} (43)$$

met, ter herhaling,

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{A} &= \frac{1}{c} \int_D \vec{I} G \, dV + \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{H}) G \, dS, \\
 \phi &= \int_D \rho G \, dV + \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{E}) G \, dS, \\
 \vec{F} &= -\frac{1}{c} \int_D \vec{K} G \, dV + \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{E}) G \, dS, \\
 \chi &= \int_D mG \, dV + \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{H}) G \, dS
 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

De rechterleden van (43) geven met de definities (44) een nulveld als het punt P buiten T ligt, en ze reproducereñ het veld $\vec{E}(P)$, $\vec{H}(P)$ als P binnen T ligt. In het laatste geval representeren de oppervlakte-integralen in (44) als het ware het effect van ladingen en stromen die buiten T zijn gelegen, op het veld binnen T. Dat effect kan kennelijk worden beschreven door fictieve oppervlakte-verdelingen op T, en wel:

$$\begin{aligned}
 \text{electrische stroomdichtheid:} & \quad \vec{i} = \frac{c}{4\pi} (\vec{n} \times \vec{H}), \\
 \text{magnetische stroomdichtheid:} & \quad \vec{k} = -\frac{c}{4\pi} (\vec{n} \times \vec{E}), \\
 \text{electrische ladingsdichtheid:} & \quad \sigma = \frac{1}{4\pi} (\vec{n} \cdot \vec{E}), \\
 \text{magnetische ladingsdichtheid:} & \quad \eta = \frac{1}{4\pi} (\vec{n} \cdot \vec{H}).
 \end{aligned}$$

Het blijkt dat we de beide scalaire potentialen kunnen elimineren in onze representatieformules (43). We hebben:

$$\begin{aligned}
 \text{div } \vec{A}_1 &= \frac{1}{c} \int_D \text{div}_P (\vec{I} G) \, dV = \frac{1}{c} \int_D \vec{I} \cdot \text{grad}_P G \, dV \\
 &= -\frac{1}{c} \int_D \vec{I} \cdot \text{grad} G \, dV = \frac{1}{c} \int_D (G \text{div } \vec{I} - \text{div} (\vec{I} G)) \, dV \\
 &= \int_D ik\rho G \, dV - \frac{1}{c} \int_D \text{div} (\vec{I} G) \, dV \\
 &= ik \phi_1 + \frac{1}{c} \int_T (\vec{I} \cdot \vec{n}) G \, dS,
 \end{aligned}$$

en dus

$$\text{div } \vec{A}_1 - ik \phi_1 = \frac{1}{c} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{I}) G \, dS. \quad (45)$$

Ook hebben we

$$\begin{aligned}
 \text{div } \vec{A}_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_T \text{div}_P \{(\vec{n} \times \vec{H}) G\} \, dS = \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \text{grad}_P G \, dS \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \text{grad} G \, dS = -\frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{H} \times \text{grad} G) \cdot \vec{n} \, dS.
 \end{aligned}$$

Verder,

$$\begin{aligned} ik\phi_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_T (ik \vec{E} \cdot \vec{n}) G \, dS = \frac{1}{4\pi} \int_T \left(\frac{4\pi}{c} \vec{I} - \text{rot } \vec{H} \right) \cdot \vec{n} G \, dS \\ &= \frac{1}{c} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{I}) G \, dS - \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{H}) G \, dS. \end{aligned}$$

Daarmee vinden we dan

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}_2 - ik\phi_2 &= -\frac{1}{c} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{I}) G \, dS + \frac{1}{4\pi} \int_T (G \text{ rot } \vec{H} - \vec{H} \times \text{grad } G) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= -\frac{1}{c} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{I}) G \, dS + \frac{1}{4\pi} \int_T \vec{n} \cdot \text{rot}(G \vec{H}) \, dS \\ &= -\frac{1}{c} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{I}) G \, dS - \frac{1}{4\pi} \int_D \text{div rot}(G \vec{H}) \, dS. \end{aligned}$$

De laatste integraal is nul, en dus volgt

$$\text{div } \vec{A}_2 - ik\phi_2 = -\frac{1}{c} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{I}) G \, dS \quad (46)$$

Combinatie van (45) en (46) geeft dan eenvoudig

$$\text{div } \vec{A} - ik\phi = 0. \quad (47)$$

Op dezelfde manier bewijst men

$$\text{div } \vec{F} + ik\chi = 0 \quad (48)$$

Zoals reeds aangekondigd kunnen we inderdaad ϕ en χ elimineren, en dan gaat (43) over in

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \text{rot } \vec{F} - \frac{1}{ik} (k^2 \vec{A} + \text{grad div } \vec{A}) \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} + \frac{1}{ik} (k^2 \vec{F} + \text{grad div } \vec{F}) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Tenslotte bedenken we dat $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$, en idem voor \vec{F} , zodat (49) overgaat in

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \text{rot } \vec{F} - \frac{1}{ik} \{ (k^2 + \Delta) \vec{A} + \text{rot rot } \vec{A} \} \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} + \frac{1}{ik} \{ (k^2 + \Delta) \vec{F} + \text{rot rot } \vec{F} \} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Nu weten we van vroeger dat voor een inwendig product van T geldt

$$(k^2 + \Delta) \vec{A}_1 = -\frac{4\pi}{c} \vec{I}, \quad (k^2 + \Delta) \vec{F}_1 = \frac{4\pi}{c} \vec{K}.$$

Dezelfde operatoren werkende op \vec{A}_2 en \vec{F}_2 geven voor een inwendig punt van T de nulvector. Daarom kunnen we (50) transformeren in

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{4\pi}{ikc} \vec{I} + \text{rot } \vec{F} - \frac{1}{ik} \text{rot rot } \vec{A} \\ \vec{H} &= \frac{4\pi}{ikc} \vec{K} + \text{rot } \vec{A} + \frac{1}{ik} \text{rot rot } \vec{F}\end{aligned}\quad (51)$$

Nog op te merken valt dat nu de rechterleden niet nul worden voor P buiten T, maar gelijk aan $\frac{4\pi}{ikc} \vec{I}(P)$, resp. $\frac{4\pi}{ikc} \vec{K}(P)$. Ook zien we dat we aan de invariantie-regels (34) kunnen toevoegen

$$A \rightarrow F, F \rightarrow -A, \phi \rightarrow -\chi, \chi \rightarrow \phi. \quad (52)$$

In de natuur treden geen magnetische stroom en lading op.

In de afgeleide formules kan men dus eenvoudig $\vec{K} = \vec{0}$ en $m = 0$ stellen. Als ook geen elektrische stroom en lading in het beschouwde volume aanwezig zijn, worden de representatieformules het eenvoudigste. Onder deze omstandigheden hebben we:

Stelling: Is (\vec{E}, \vec{H}) reguliere oplossing van

$$\text{rot } \vec{H} = -ik \vec{E}, \text{rot } \vec{E} = ik \vec{H},$$

op en binnen een begrensde enkelvoudig gesloten oppervlak T, dan gelden, voor P binnen T,

$$\left. \begin{aligned}\vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_T \{ ikG(\vec{n} \times \vec{H}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \text{grad } G + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad } G \} ds, \\ \vec{H}(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_T \{ -ikG(\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n} \times \vec{H}) \times \text{grad } G + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad } G \} dS,\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

en ook

$$\left. \begin{aligned}\vec{E}(P) &= \text{rot } \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{E}) G dS - \text{rot rot } \frac{1}{4\pi ik} \int_T (\vec{n} \times \vec{H}) G dS, \\ \vec{H}(P) &= \text{rot } \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \times \vec{H}) G dS + \text{rot rot } \frac{1}{4\pi ik} \int_T (\vec{n} \times \vec{E}) G dS,\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

met $G = e^{ikr}/r$; r afstand tussen P en het integratiepunt. Is P buiten T, dan zijn de rechterleden nul.

Opm: Bovenstaande formules gelden ook met $G = e^{-ikr}/r$ of $G = (\cos kr)/r$.

Het heeft weinig zin om middelwaarden over een bol te onderzoeken, omdat het vectorprobleem direct reduceerbaar is tot een scalair probleem. Uit de Maxwell' vgl. leiden we direct af

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{I}, \quad \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = -\frac{4\pi}{c} ik \vec{I} + 4\pi \text{grad } \rho,$$

zodat elk der zes rechthoekige componenten van (\vec{E}, \vec{H}) aan een inhomogene scalaire golfvergelijking voldoet.

Opgave: Zij $d\Omega$ ruimtehoekelement op eenheidsbol met P als middelpunt. Bewijs dan

$$\frac{1}{4\pi} \int \vec{E} d\Omega = j_0(kR) \vec{E}(P)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \vec{H} d\Omega = j_0(kR) \vec{H}(P)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int (\vec{n} \cdot \vec{E}) d\Omega = 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \int (\vec{n} \cdot \vec{H}) d\Omega = 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \int (\vec{n} \times \vec{E}) d\Omega = -i j_1(kR) \vec{H}(P)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int (\vec{n} \times \vec{H}) d\Omega = i j_1(kR) \vec{E}(P)$$

met $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$, $j_1(x) = \frac{1}{x} (\frac{\sin x}{x} - \cos x)$

We gaan niet uitvoerig in op de uitstralingsvoorwaarden in het geval van de Maxwell-vgl. Als k complex is met $\text{Im}(k) > 0$, dan is voldoende voor eenduidigheid: \vec{E} en \vec{H} naar nul voor $P \rightarrow \infty$, en de oplossing die overblijft, en hieraan voldoet, is

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{ik} \text{rot rot } \vec{A} \quad \text{met} \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int_D \vec{I} G dV,$$

een oplossing die overeenkomt met de vectorpotential van vroeger. Is $k > 0$ dan moeten we een sterkere voorwaarde opleggen. Het komt dan neer op de eis dat in het oneindige de vectoren \vec{E} , \vec{H} in eerste benadering een vlakke golf vormen in de richting \vec{r} . De transversale componenten van \vec{E} en \vec{H} kunnen worden ontwikkeld in reeksen van de vorm $(e^{ikr}/r) \sum_0^\infty A_n(\theta, \varphi) r^{-n}$, die uniform in r, θ, φ convergeren voor r

groot genoeg; \vec{E} , \vec{H} , \vec{r} vormen een rechthoekig systeem, E_r en H_r zijn van de orde $O(r^{-2})$. Tussen de verschillende functies $A_n(\theta, \varphi)$ bestaan allerlei recurrente differentie en differentiaal betrekkingen die door formele operaties uit elkaar kunnen worden afgeleid, omdat de betreffende reeksen allen uniform convergeren.

Het electromagnetische veld kan binnen een bol (zonder bronnen) worden ontwikkeld in multipoolvelden met radiale afhankelijkheid beschreven door $j_n(kr)$. Buiten een bol geldt een ontwikkeling in multipolen met radiale afhankelijkheid $h_n(kr)$. Tussen twee concentrische bollen heeft men een combinatie van de twee. Dit is allemaal analoog aan het geval van de scalaire golfvergelijking. Dergelijke kwesties zijn ook reeds ter sprake gekomen bij de theorie van de multipolen.

Het in deze paragraaf besprokene dient als fundament voor de exacte en de fysieke theorie der buiging en voortplanting van elektromagnetische golven in de aanwezigheid van obstakels van allerlei vorm en compositie.

§.5 Kirchhoff-theorie van elektromagnetische buiging.

Het is niet onze bedoeling diep in te gaan op de fysieke theorie der buiging. In deze fysieke theorie onderstelt men vaak dat het onderzochte golfverschijnsel kan worden beschreven door een scalaire golf-functie, waarvan het kwadraat een maat is voor de intensiteit (meestal buiging van natuurlijk = ongepolariseerd licht). Volgens de Maxwell-theorie van het licht is echter rekening te houden met polarisatie-effecten. In de buurt van scherpe kanten en ook voor het gebied der lange golven (licht is kortgolvig, radiogolven zijn lang) kunnen polarisatie-verschijnselen niet worden verwaarloosd. Dit leidt dwingend tot een buigingstheorie van vectorieel karakter.

Beschouw de buiging van een willekeurig invallend electromagnetisch veld \vec{E}^i, \vec{H}^i (bronnen in de linkerhalfruimte $z < 0$) door een opening A in een oneindig-uitgestrekt vlak scherm in het vlak $z = 0$. Hoe kunnen we dan het veld rechts van de opening ($z > 0$), achter het scherm, het z.g. buigingsveld, berekenen of benaderen ?

In principe konden we dat veld berekenen met behulp van de formules (53) of (54), door voor T te nemen het vlak $z = +0$ gecompliceerd tot een gesloten oppervlak met behulp van een halve bol met oneindig-grote straal. De bijdrage van deze halve bol is echter nul, vanwege de uitstralingsvoorwaarde in $z > 0$. Uit de opening A komen alleen golven die uitstralende bolgolven geven. Wij houden alleen over de integraal over de waarden in de opening en die achter het scherm. Deze waarden kennen we echter niet. Het enige dat de physicus doet is dat hij een goede benadering à priori voor die velden in de opening en achter het scherm aanneemt. Hij onderstelt dat het veld in de opening gelijk is aan het ongestoord-invallende veld daar ter plaatse, en dat onmiddellijk achter het scherm het veld identiek nul is.

Op basis van formules (54) krijgen we zo de "benadering" van Kirchhoff voor het buigingsveld

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_K &= \text{rot} \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{n} \times \vec{E}^i) G \, dS - \text{rot} \text{rot} \frac{1}{4\pi i k} \int_A (\vec{n} \times \vec{H}^i) G \, dS \\ \vec{H}_K &= \text{rot} \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{n} \times \vec{H}^i) G \, dS + \text{rot} \text{rot} \frac{1}{4\pi i k} \int_A (\vec{n} \times \vec{E}^i) G \, dS \end{aligned} \right\} (1)$$

waarbij \vec{n} in de positieve z-richting wijst, en het veldpunt dus aan de schaduwkant ligt ($z > 0$).

Ieder van de integralen in (1) is een vector die voor $z > 0$ voldoet aan de vector-golfvergelijking $(\Delta + k^2) \vec{v} = 0$, voor willekeurige functies \vec{E}^i, \vec{H}^i gedefinieerd en integreerbaar op en over A. Het door (1) gedefinieerde veld \vec{E}_K, \vec{H}_K is dus oplossing van de homogene Maxwell-vgl'n. in de halfruimte $z > 0$. De limietwaarden van \vec{E}_K en \vec{H}_K voor $z \rightarrow +0$ zouden, als het proces consistent was, gelijk zijn aan \vec{E}^i, \vec{H}^i op de opening A, en \vec{O}, \vec{O} op de rest van het vlak $z = 0$, d.w.z. op het scherm. Dit is echter geenszins het geval. Bij analytische voortzetting van het veld \vec{E}_K, \vec{H}_K door de opening heen naar de lichtzijde van het scherm, kan men ook de waarden van het veld op de lichtzijde van het scherm bepalen. Het blijkt dan dat de sprong in \vec{E}_K (waarde aan de voorkant min waarde aan de achterkant van het scherm) wel precies \vec{E}^i is, en dat ook de sprong in \vec{H}_K gelijk is aan \vec{H}^i daar ter plaatse. De aangenomen sprongen worden dus wel precies gereproduceerd, maar niet de individuele waarden aan het scherm. Dit kan men ook nog duidelijker zien door de representatieformule (54) toe te passen op een gesloten oppervlak dat wordt begrensd door een hele bol in 't oneindige en de beide kanten van het scherm, en dan te onderstellen met Kirchhoff dat aan de lichtzijde de waarde van het veld overeenkomt met dat van de ongestoord invallende golf, en aan de schaduwzijde identiek nul is. Dan is men ook van de inconsistentie af in het niet-reproducere van de waarden in de opening door de Kirchhoff-formules. In het kort: de formules (1) geven een exacte oplossing van een sprongwaarde-probleem. Als men dit eenmaal inziet, is het duidelijk dat (1) nooit kan worden beschouwt als de eerste stap in een iteratief proces van oplossing van een randwaarde-probleem, met bijvoorbeeld een oneindig-goed geleidend scherm.

Formules als (1) hebben hun nut vooral bewezen in de buiging van radiogolven aan diverse obstakels, waarop hier niet verder zal worden ingegaan.

Laat ons nu eens kijken naar de representatieformules (53) van de vorige paragraaf. Voor het oppervlak T nemen we hetzelfde als in geval van formules (1), en we nemen eveneens aan dat de onbekende waarden van \vec{E}, \vec{H} op het veld $z = +0$ kunnen worden vervangen door \vec{E}^i, \vec{H}^i op de opening, en \vec{O}, \vec{O} op het scherm. Misschien met enige verbazing, constateert men dan dat de gevonden uitdrukkingen voor \vec{E} en \vec{H} niet aan Maxwell's vergelijkingen voldoen! Hoe komt dat? Als reden kan men opgeven dat niet is voldaan aan de relaties (47) en (48) van §.4. Deze formules drukken in wezen uit dat men moet voldoen aan de continuïteitsvergelijking, dus aan de eis van de wetten van behoud van elektrische en magnetische lading. Om het goed te maken moet men termen invoeren in de twee scalaire potentialen die afkomstig zijn van ladingsverdelingen langs de rand van de opening. We zullen nu deze laatste expliciet aangeven. We kunnen zulks eenvoudig doen door geschikte definities van ψ en χ in termen van de benaderingen voor \vec{A} en \vec{F} inherent aan de formules (1), d.w.z.

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}_K &= \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{n} \times \vec{H}^i) G \, dS \\ \vec{F}_K &= \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{n} \times \vec{E}^i) G \, dS \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

We definiëren dus

$$\left. \begin{aligned} \phi_K &= \frac{1}{4\pi ik} \operatorname{div} \int_A (\vec{n} \times \vec{H}^i) G \, dS \\ \chi_K &= - \frac{1}{4\pi ik} \operatorname{div} \int_A (\vec{n} \times \vec{E}^i) G \, dS \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dan wordt

$$\begin{aligned} \phi_K &= \frac{1}{4\pi ik} \int_A \operatorname{div}_P \{ (\vec{n} \times \vec{H}^i) G \} dS \\ &= \frac{1}{4\pi ik} \int_A \{ G \operatorname{div}_P (\vec{n} \times \vec{H}^i) + (\vec{n} \times \vec{H}^i) \cdot \operatorname{grad}_P G \} dS \\ &= - \frac{1}{4\pi ik} \int_A (\vec{n} \times \vec{H}^i) \cdot \operatorname{grad} G \, dS = \frac{1}{4\pi ik} \int_A (\operatorname{grad} G \times \vec{H}^i) \cdot \vec{n} \, dS, \end{aligned}$$

als men gebruik maakt van de eigenschappen van het volumeproduct.
Nu is verder

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} G \times \vec{H}^i &= \operatorname{rot} (G \vec{H}^i) - G \operatorname{rot} \vec{H}^i \\ &= \operatorname{rot} (G \vec{H}^i) + ikG \vec{E}^i, \end{aligned}$$

op grond van de Maxwell-vgl: $\operatorname{rot} \vec{H}^i = - ik \vec{E}^i$ voor het invallend veld.
Invullen geeft

$$\phi_K = \frac{1}{4\pi ik} \int_A \operatorname{rot} (G \vec{H}^i) \cdot \vec{n} \, dS + \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{n} \cdot \vec{E}^i) G \, dS.$$

De eerste integraal kan met Stokes worden omgevormd tot een lijn-integraal langs de rand C van de opening A. Laat \vec{s} de eenheidsvector tangentieel aan C zijn, in de zin die positief is t.o.v. de normaal \vec{n} van A. Dan vindt men dus

$$\phi_K = \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{n} \cdot \vec{E}^i) G \, dS + \frac{1}{4\pi ik} \int_C (\vec{s} \cdot \vec{H}^i) G \, dS. \quad (4)$$

Voor een gesloten oppervlak A zou de lijnintegraal verdwijnen.

De echte waarde van de scalaire elektrische potentiaal is

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_T (\vec{n} \cdot \vec{E}) G \, dS$$

waarbij T het vlak $z = +0$ is, en \vec{E} het onbekende veld. Zou men, à la Kirchhoff, aannemen dat bij benadering $\vec{E} \sim \vec{E}^i$ in A, en $\vec{E} \sim \vec{0}$ achter het scherm, dan zou men voor ϕ_K hebben gevonden de integraal

$$\frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{n} \cdot \vec{E}^i) G \, dS,$$

maar dan zou niet zijn voldaan aan $\text{div } \vec{A}_K = ik \phi_K$. De additionele term \int_C in (4) zorgt er juist voor, dat wèl aan deze laatste vgl. is voldaan.

De uitdrukking voor χ_K uit (3) kan men op analoge manier **vervormen**.

Met onze substitutieregels vinden we direct:

$$\chi_K = \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{n} \cdot \vec{H}^i) G \, dS - \frac{1}{4\pi ik} \int_C (\vec{s} \cdot \vec{E}^i) G \, dS. \quad (5)$$

De linkerintegralen in formules (4) en (5) geven de bijdrage tot de scalaire potentialen afkomstig van de fictieve oppervlakte ladingen op A, en de extra lijnintegralen geven de bijdrage afkomstig van fictieve lijnloadingen, en wel met dichtheden

$$\text{electrische lading: } \sigma' = \frac{1}{4\pi ik} (\vec{s} \cdot \vec{H}^i) \quad (6)$$

$$\text{magnetische lading: } \eta' = - \frac{1}{4\pi ik} (\vec{s} \cdot \vec{E}^i) \quad (7)$$

Ter controle noteren we nog even de substitutieregels voor alle soorten ladingen:

$$\rho \rightarrow -m, m \rightarrow \rho, \sigma \rightarrow -\eta, \eta \rightarrow \sigma, \sigma' \rightarrow -\eta', \eta' \rightarrow \sigma' \quad (8)$$

die met (34) en (52) uit paragraaf 4 de invariantie-eigenschappen van de Maxwell-vgl'n. compleet maken.

Het veld gedefinieerd door formules (1) kan nu als volgt worden geschreven

$$\begin{aligned} \vec{E}_K &= \text{rot } \vec{F}_K + ik \vec{A}_K - \text{grad } \phi_K \\ \vec{H}_K &= \text{rot } \vec{A}_K - ik \vec{F}_K - \text{grad } \chi_K, \end{aligned} \quad (9)$$

als men de definities (2) en (3), dwz. (2) en (4), (5) aanhoudt.

Voeren we in (9) de operaties "rot" en "grad" expliciet uit, dan vindt men equivalent met (1):

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{E}_K &= \frac{1}{4\pi} \int_A \{ (\vec{n} \times \vec{E}^i) \times \text{grad } G + ik(\vec{n} \times \vec{H}^i)G + (\vec{n} \cdot \vec{E}^i) \text{ grad } G \} dS \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi ik} \int_C (\vec{s} \cdot \vec{H}^i) \text{ grad } G \, ds \\
 \vec{H}_K &= \frac{1}{4\pi} \int_A \{ (\vec{n} \times \vec{H}^i) \times \text{grad } G - ik(\vec{n} \times \vec{E}^i)G + (\vec{n} \cdot \vec{H}^i) \text{ grad } G \} dS \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi ik} \int_C (\vec{s} \cdot \vec{E}^i) \text{ grad } G \, ds
 \end{aligned} \right\} (10)$$

Hadden we in het representatie-theorema (53) eenvoudig op zijn Kirchhoff's ingevuld, dan zouden we alleen de oppervlakte-integralen hebben gevonden en dan zou het aldus geconstrueerde "benaderingsveld" niet aan Maxwell hebben voldaan. Nu is dat wel het geval, dank zij de extra lijnintegralen langs de rand van de opening.

Op de noodzakelijkheid van het invoeren van extra lijnladingen aan de rand van een buigend scherm werd het eerst gewezen door Kottler. Zijn formules luiden als volgt:

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{E}_K &= \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{E}^i \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \vec{E}^i}{\partial n}) \, dS \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_C (\vec{s} \times \vec{E}^i)G \, ds + \frac{1}{4\pi ik} \int_C (\vec{s} \cdot \vec{H}^i) \text{ grad } G \, ds \\
 \vec{H}_K &= \frac{1}{4\pi} \int_A (\vec{H}^i \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \vec{H}^i}{\partial n}) \, dS \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_C (\vec{s} \times \vec{H}^i)G \, ds - \frac{1}{4\pi ik} \int_C (\vec{s} \cdot \vec{E}^i) \text{ grad } G \, ds
 \end{aligned} \right\} (11)$$

Afgezien van de uiterlijke vorm is het veld (11) van Kottler precies hetzelfde als het veld (10). Bij de discussie van (11) kunnen we opmerken:

We weten dat elk van de zes rechthoekige componenten van \vec{E} en \vec{H} in de vrije ruimte voldoen aan de scalaire golfvergelijking $\Delta u + k^2 u = 0$. Met het representatiethorema

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \int_T (u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}) \, dS,$$

en T weer het oppervlak $z = +0$, en onder aanname van Kirchhoff dat $u = u^i$ op A en $u = 0$ op scherm, vindt men dan op zijn Kirchhoff's

$$u_K = \frac{1}{4\pi} \int_A (u^i \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u^i}{\partial n}) \, dS.$$

Deze formule geldt voor elk der zes componenten van \vec{E} en \vec{H} . Past men ze tegelijkertijd toe, en doet men dus alsof alle zes componenten onafhankelijk zijn, dan komt men in de verleiding om het volgende veld als benadering te aanvaarden:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}'_K &= \frac{1}{4\pi} \int_A \left(\vec{E}^i \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \vec{E}^i}{\partial n} \right) dS \\ \vec{H}'_K &= \frac{1}{4\pi} \int_A \left(\vec{H}^i \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \vec{H}^i}{\partial n} \right) dS. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dit zijn juist de oppervlakte-integralen in Kottler's formules (11). Dit veld (12) is echter geen oplossing van de Maxwell-vgl., en dit komt omdat dan zes scalaire golf functies zo ingewikkeld in elkaar grijpen en verre van onafhankelijk van elkaar zijn. De extra lijnintegralen in (11) zorgen er voor dat weer aan Maxwell wordt voldaan.

§.6 Scalaire buiging aan vlakke obstakels.

We beschouwen de buiging van een invallende golf $u_0(x,y,z)$ door een opening A in een oneindig, vlak scherm S. Het vlak A + S is identiek met $z = 0$. De invallende golf u_0 is oplossing van de golfvergelijking, en komt van links ($z < 0$).

Er zijn twee randwaardeproblemen te onderscheiden.

Eerste geval: golf functie nul op S. Dan geldt voor het totale veld

$$u_{a_1}(x,y,z) = \begin{cases} u_0(x,y,z) - u_0(x,y,-z) + \varphi_1(x,y,-z) & (z \leq 0) \\ \varphi_1(x,y,z) & (z \geq 0) \end{cases}$$

waarin φ_1 , gedefinieerd voor $z \geq 0$, aan de volgende eisen voldoet:

- (i) $\Delta \varphi_1 + k^2 \varphi_1 = 0 \quad (z > 0)$
- (ii) $\varphi_1 = 0$ op S
- (iii) φ_1 voldoet aan de uitstralingsvoorwaarde
- (iv) $\partial \varphi_1 / \partial z = \partial u_0 / \partial z$ op A
- (v) φ_1 eindig
- (vi) $|\nabla \varphi_1|^2$ integreerbaar over ieder domein van R_3 , met inbegrip van de rand van het scherm.

Tweede geval: golf functie heeft normaal afgeleide nul op S. Dan is het totale veld gegeven door

$$u_{a_2}(x,y,z) = \begin{cases} u_0(x,y,z) + u_0(x,y,-z) - \varphi_2(x,y,-z) & (z \leq 0) \\ \varphi_2(x,y,z) & (z \geq 0) \end{cases}$$

waarbij φ_2 , ook gedefinieerd voor alleen $z \geq 0$, voldoet aan (i), (iii), (v), (vi) en aan

$$(ii)' \quad \partial\varphi_2/\partial z = 0 \quad \text{op } S$$

$$(iv)' \quad \varphi_2 = u_0 \quad \text{op } A$$

Beschouw nu het complementaire buigingsprobleem, met A als scherm en S als opening. Ook nu zijn er weer twee randwaardeproblemen, maar deze kunnen worden opgelost met behulp van de functies φ_1 en φ_2 .
Namelijk:

Eerste geval: Golf functie nul op het scherm A

$$u_{d_1}(x,y,z) = u_0(x,y,z) - \varphi_2(x,y, \bar{z}) \quad (z \leq 0)$$

Tweede geval: Normaalafgeleide nul op het scherm A

$$u_{d_2}(x,y,z) = u_0(x,y,z) + \varphi_1(x,y, \bar{z}) \quad (z \leq 0)$$

Gevolg: Buiging aan een zacht (star) scherm is essentieel identiek met buiging aan de complementaire opening in een star (zacht) scherm. Dit is Babinet's principe in zijn rigoreuze vorm:

$$u_{a_1} + u_{d_2} = u_{d_1} + u_{a_2} = \bar{z} u_0(x,y, \bar{z}) \quad (z \leq 0)$$

In deze notaties wijzen de indices a en d op "aperture" en "disk", de indices 1 en 2 naar het type randvoorwaarde (1 voor functie nul, 2 voor afgeleide nul, op scherm).

In het algemeen zal men de functies φ_1 en φ_2 niet gemakkelijk kunnen vinden. De techniek van separatie is alleen toepasbaar op een elliptische opening en de diverse ontappingsen. Dan worden $\varphi_{1,2}$ oneindige reeksen in normaal oplossingen van de golfvergelijking na separatie der variabelen in elliptische coördinaten. Mathieu- en sferoid-functies complieceren de zaak ten eerste.

Een andere aanpak gaat via integraalvergelijkingen. Zoals we uitvoerig hebben besproken, is iedere oplossing u van de golfvergelijking die regulier is binnen een gesloten oppervlak Σ uitdrukbaar in de waarden op Σ van u en $\partial u/\partial n$. Als we bovendien de Greense of Neumannse functie van Σ kennen, kunnen we volstaan met de waarden van u of $\partial u/\partial n$. Voor een halfruimte kennen we die functies van Green en Neumann.

Als gevolg daarvan hebben we de volgende representatie theorema's, afkomstig van Rayligh.

Is u enige golf functie die regulier is voor $z \geq 0$, en die aan zekere voorwaarden in het oneindige voldoet (inclusief de uitstralingsvoorwaarde), dan gelden

$$u = - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad (1)$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) d\Sigma \quad (2)$$

waar de integratie over het vlak $z' = 0$ plaats vindt en r de afstand betekent tussen veldpunt (x,y,z) en bronpunt (x',y',z') , terwijl $\frac{\partial}{\partial n}$ betekent: differentiatie naar z' en dan stellen $z' = 0$.

Gezien de eisen (ii) en (ii)' passen we dan (1) op φ_2 toe, en (2) op φ_1 , omdat dan het scherm niet bijdraagt tot de integraal. Dan vinden we dus de identiteiten, of representatieformules van onze functies φ_1 en φ_2 als volgt:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_A \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) d\Sigma \quad (3)$$

$$\varphi_2 = - \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Sigma \quad (4)$$

Voor willekeurige opening A hebben we daarmee de functies φ_1 en φ_2 uitgedrukt in de waarden van φ_1 respectievelijk $\partial \varphi_2 / \partial z$, in de opening A.

Als we dan de eisen (iv) en (iv)' willen vervullen, krijgen we "integraalvergelijkingen", voor de onbekende waarden in de opening, zodat ons probleem van drie dimensies is gereduceerd tot een in twee dimensies.

Het geval φ_2 is het eenvoudigste. Voer in de "kern"

$$G(x,y,x',y') = \frac{\exp[ik \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}]}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

Dan geven (4) en (iv)' de integraalvergelijking

$$\int_A \frac{\partial \varphi_2}{\partial z'}(x',y',0) G(x,y;x',y') dx' dy' = - 2\pi u_0(x,y,0) \quad (5)$$

waarbij $(x,y,0)$ punt van de opening A is.

In het geval van φ_1 moet men wat voorzichtiger te werk gaan. Als men (iv) domweg toepast op (3), door onder het integraalteken te differentieren naar z , krijgt men formeel wel een integraalvergelijking, maar met een niet integreerbare kern

$(\partial^2 / \partial z \partial z') (e^{ikr} / r)_{z=z'=0}$. Dit leidt tot allerlei divergente integralen.

Deze divergenties kunnen allen worden vermeden, en we krijgen als resultaat niet een integraalvergelijking, maar een differentiaal-integraalvergelijking:

$$\left[k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \int_A G(x,y;x',y') \varphi_1(x',y',0) dx' dy' = 2\pi \frac{\partial u_0}{\partial z}(x,y,0) \quad (6)$$

waarbij $(x,y,0)$ in de opening A ligt.

Een van (6) verschillende functionaalvergelijking is door Maue gegeven, nl.

$$k^2 \int \varphi_1 G d\Sigma - \int (\nabla \varphi_1 \cdot \nabla G) d\Sigma = 2\pi \frac{\partial u_0}{\partial z} \quad (7)$$

waarbij de beide gradienten moeten worden genomen naar de integratie-coördinaten. Maue's vgl. volgt uit (6) door een proces van differentiëren en partieel integreren, en gebruik maken van $\varphi_1 = 0$ aan de rand. De tweede integraal in (7) is een Cauchy-hoofdwaarde. Een tweede partiële integratie is niet mogelijk vanwege de singulariteiten aan de rand. Doet men het toch dan komt tevens de niet-integreerbare kern van Levine en Schwinger te voorschijn!

Opmerking: Alleen in bepaalde gevallen is het gelukt om de differentiaal-integraal vergelijking (6) om te vormen tot een integraalvergelijking, eventueel met een asymmetrische kern.

We geven nu de integraalvergelijkingenformulering voor z.g. tweedimensionale buigingsproblemen. Stel dat de diverse golf functies onafhankelijk van x zijn. De relevante formules volgen dan gemakkelijk met de relatie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} dx' = \pi i H_0^{(1)}(k\rho)$$

waarbij $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$, $\rho^2 = (y-y')^2 + (z-z')^2$, en $H_0^{(1)}$ de Hankelfunctie van de eerste soort en orde nul is. Vgl. (3) en (4) reduceren zich nu tot de representatiestellingen

$$\varphi_1(y,z) = -\frac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial z} \int \varphi_1(y',0) H_0^{(1)} [k \sqrt{(y-y')^2 + z^2}] dy' \quad (8)$$

$$\varphi_2(y,z) = -\frac{1}{2} i \int \frac{\partial \varphi_2(y',0)}{\partial z'} H_0^{(1)} [k \sqrt{(y-y')^2 + z^2}] dy' \quad (9)$$

waarbij de integratie nu is over de doorsnijding van A met het vlak $x = 0$.

De overeenkomstige functionaalvergelijkingen voor de onbekende waarden in de opening worden nu

$$\int \frac{\partial \varphi_2(y',0)}{\partial z'} H_0^{(1)}(k|y-y'|) dy' = 2iu_0(y,0) \quad (10)$$

$$\left(k^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \int \varphi_1(y',0) H_0^{(1)}(k|y-y'|) dy' = -2i \frac{\partial u_0}{\partial z}(y,0) \quad (11)$$

waarbij $(y,0)$ in de genoemde doorsnijding ligt.

Er zijn nog diverse andere types van integraalvergelijkingen. Als we (1) toepassen op φ_1 , en (2) op φ_2 en natuurlijk gebruik maken van (iv) en (iv)', krijgen we in het eerste geval een zuivere integraalvergelijking, in het tweede geval een differentiaal-integraalvergelijking. Neem bv. het geval φ_1 . Er geldt dan

$$\int_S G(x,y;x',y') \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'}(x',y',0) dx'dy' = - \int_A G(x,y;x',y') \frac{\partial u_0}{\partial z'}(x',y',0) dx'dy'$$

waar onbekend is de functie $\partial \varphi_1 / \partial z$ op S , terwijl het rechterlid bekend is. Equivalent, maar wat eenvoudiger is het volgende. De functie u_{a_1} is overal gegeven door

$$u_{a_1} = u_0 - \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

Het is dus voldoende om de waarden $h(x,y)$ van $(\partial/\partial n)(\varphi_1 - u_0)$ op S te kennen. Omdat u_{a_1} nul is op S vinden we voor deze onbekende functie de integraalvergelijking

$$\int_S G(x,y, x',y') h(x',y') dx'dy' = 2\pi u_0(x,y,0) \quad (12)$$

met $(x,y,0)$ op S .

Sommerfeld's half-vlak probleem opgelost met de methode der Fouriertransformatie (techniek van Wiener-Hopf).

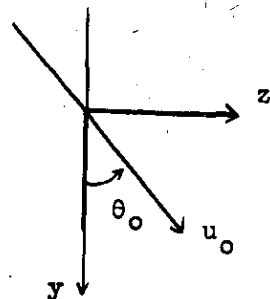
Gedurende de oorlog werd op drie verschillende plaatsen in de wereld een methode ontwikkeld om buigingsproblemen via integraalvergelijkingen op te lossen en daarbij toe te passen de Fouriertransformatie. In Amerika geschiedde dit door Schwinger en medewerkers, in Engeland door Copson, en in Rusland door Vainštein. Het eenvoudigste probleem dat op deze manier kan worden opgelost is de buiging van een vlakke golf aan een half-vlak, een probleem dat reeds door Sommerfeld lang geleden expliciet was opgelost.

Beschouw een vlakke golf

$$u_0 = e^{ik(y \cos \theta_0 + z \sin \theta_0)}$$

die invalt op het scherm

$$S: y > 0, z = 0,$$



waarbij θ_0 de hoek is tussen positieve y -as en de voortplantingsrichting der invallende golf; $0 < \theta_0 < \pi$.

Is $f(y)$ de waarde van $(\partial/\partial z)(u_0 - \varphi_1)$ op de achterkant van het scherm ($z = +0$), dan volgt uit vgl. (12) voor f de integraalvergelijking:

$$\int_0^{\infty} f(y') H_0^{(1)}(k|y-y'|) dy' = 2i e^{iky} \cos \theta_0 \quad (y \geq 0) \quad (13)$$

Precies dezelfde integraalvgl. wordt verkregen voor het tweede randwaardeprobleem (normaal afgeleide nul op het scherm) als we $f(y)$ identificeren met de functie $\partial\varphi_2/\partial z$ op de opening; zie vgl. (10).

Omdat het Sommerfeld half-vlak zelf-complementair is, is het voldoende één der vgl. (10) en (11) op te lossen.

We gaan nu vgl (13) oplossen. Karakteristieke eigenschappen van deze integraalvergelijking zijn de volgende:

- (a) De waarden van $f(y)$ voor $y < 0$ spelen geen rol.
- (b) Het linkerlid van (13) is onbekend voor $y < 0$.
- (c) De kern is singulier. En het is een verschil-kern; alleen een functie van $y-y'$.
- (d) De kern is van het exponentiële type; d.w.z. hij holt experimenteel naar nul voor $|y-y'| \rightarrow \infty$, als we tenminste onderstellen dat $\text{Im } k > 0$.

We definiëren:

$$f(y) \equiv 0 \quad \text{voor } y < 0,$$

$$g(y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{voor } y < 0 \\ 2i e^{iky} \cos \theta_0 & \text{voor } y \geq 0 \end{cases}$$

$$h(y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{voor } y \geq 0 \\ \int_0^{\infty} f(y') H_0^{(1)}(k|y-y'|) dy' & \text{voor } y < 0. \end{cases}$$

Dan kunnen we de vgl.(13) uitbreiden tot

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y') H_0^{(1)}(k|y-y'|) dy' = g(y) + h(y), \quad -\infty < y < \infty. \quad (14)$$

Op deze vergelijking laten we de complexe Fouriertransformatie los. We stellen

$$k = p + iq \quad \text{met } q > 0 \quad (0 < \arg k < \pi/4)$$

en

$$w = u + iv.$$

Stel

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iwy} dy$$

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iwy} dy$$

$$H(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{-iwy} dy$$

$$L(w) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k|y|) e^{-iwy} dy$$

Twee van deze Fouriergetransformeerden kunnen we direct berekenen, nl.:

$$G(w) = \int_0^{\infty} 2i e^{iky \cos \theta_0} e^{-iwy} dy = \frac{2}{w - k \cos \theta_0} \quad (15)$$

en wel voor $v < q \cos \theta_0$.

$$L(w) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k|y|) e^{-iwy} dy = \frac{2}{\sqrt{k^2 - w^2}}, \quad (16)$$

en wel voor $-q < v < q$. Hierbij is $\sqrt{k^2 - w^2}$ de hoofdwaaarde (= k voor $w = 0$); $L(w)$ is holomorf in de strook $-q < v < q$.

Voor $y > 0$ geldt $f(y) = ik \sin \theta_0 e^{iky \cos \theta_0} + f_1(y)$ waarin

$f_1(y) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ achter het scherm. Op grond van de uitstralingsvoorwaarde mogen we onderstellen dat $f_1(y)$ begrensd is voor $y \geq \epsilon > 0$.

Verder onderstellen we dat $|f_1(y)|$ integreerbaar is voor $0 \leq y \leq \epsilon$.

Dan volgen enige regulariteitseigenschappen van de Fouriergetransformeerde van f_1 , nl.:

$$F_1(w) = \int_0^{\infty} f_1(y) e^{-iwy} dy = \int_0^{\epsilon} f_1(y) e^{-iwy} dy + \int_{\epsilon}^{\infty} f_1(y) e^{-iwy} dy,$$

dus

$$|F_1(w)| \leq \int_0^{\epsilon} |f_1(y)| e^{vy} dy + \int_{\epsilon}^{\infty} |f_1(y)| e^{vy} dy.$$

Neem $v < 0$, dan

$$|F_1(w)| < \int_0^{\epsilon} |f_1(y)| dy + \frac{\text{Const}}{|v|}.$$

Dus $F_1(w)$ is holomorf voor $v < 0$. Aangezien verder geldt:

$$F(w) = F_1(w) + \frac{k \sin \theta_0}{w - k \cos \theta_0}$$

volgt dat $F(w)$ regulier is voor $v < 0$, met eventuele uitzondering van een enkelvoudige pool bij $w = k \cos \theta_0$ (deze kan in $v < 0$ liggen, als nl. $\theta_0 > \pi/2$ is). In elk geval geldt:

$F(w)$ is holomorf voor $v < a = \min(0, q \cos \theta_0)$.

Bovendien: $F(w)$ is begrensd voor $|w| \rightarrow \infty$ in $v \leq \epsilon$.

Op dezelfde manier onderzoeken we $H(w)$ op regulariteit.
 Voor $y < 0$ geldt allereerst

$$h(y) = \int_0^{\infty} f(y') H_0^{(1)}(k|y-y'|) dy'.$$

Nu is op grond van bekende asymptotiek van Hankelfuncties

$$H_0^{(1)}(k|y-y'|) = \mathcal{O}\{|y-y'|^{-\frac{1}{2}} e^{-q|y-y'|}\} \quad (|y-y'| \rightarrow \infty)$$

$$f(y') = ik \sin \theta_0 e^{ik y' \cos \theta_0} + f_1(y')$$

$$|f(y')| = \mathcal{O}\{|k| e^{-q y' \cos \theta_0} + |f_1|\} \quad (y' \rightarrow \infty)$$

Dus

$$\begin{aligned} h(y) &= \mathcal{O}\left\{\int_0^{\infty} \{|k| e^{-q y' \cos \theta_0} + |f_1|\} e^{-q|y-y'|} dy'\right\} \\ &= \mathcal{O}\{e^{-q|y|}\} = \mathcal{O}(e^{qy}) \quad (y \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

$h(y) = 0$ voor $y \geq 0$; dus

$$|h(y)| < \text{Const } e^{qy} \quad (-\infty < y \leq -\epsilon).$$

Neem verder aan dat $|h(y)|$ integreerbaar is voor $-\epsilon \leq y \leq 0$.

Dan volgt

$$H(w) = \int_{-\infty}^0 h(y) e^{-iwy} dy = \int_0^{\infty} h(-t) e^{iwt} dt$$

$$|H(w)| \leq \int_0^{\infty} |h(-t)| e^{-vt} dt$$

$$\leq \int_0^{\epsilon} |h(-t)| e^{-vt} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} |h(-t)| e^{-vt} dt$$

$$\leq \int_0^{\epsilon} |h(-t)| e^{-vt} dt + \text{Const} \int_0^{\infty} e^{-(q+v)t} dt$$

$$\leq \frac{c}{q+v} + \int_0^{\epsilon} |h(-t)| e^{-vt} dt$$

mits $v > -q$.

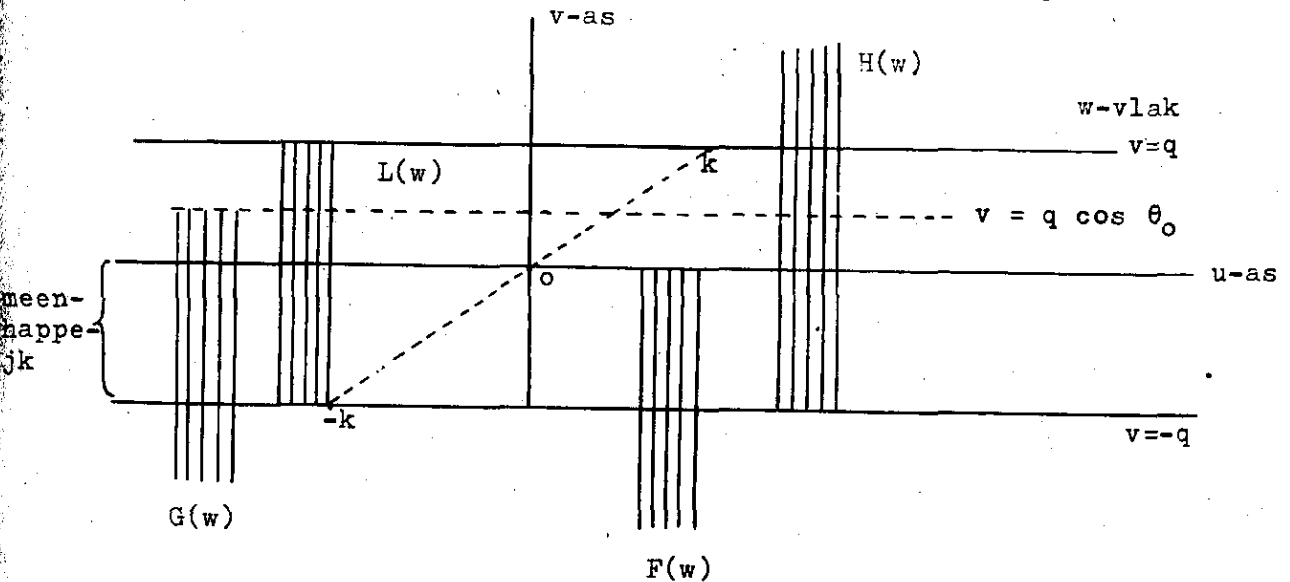
$$\text{Verder } \int_0^{\epsilon} |h(-t)| e^{-vt} dt \leq \max(1, e^{-\epsilon v}) \int_0^{\epsilon} |h(-t)| dt.$$

Dus

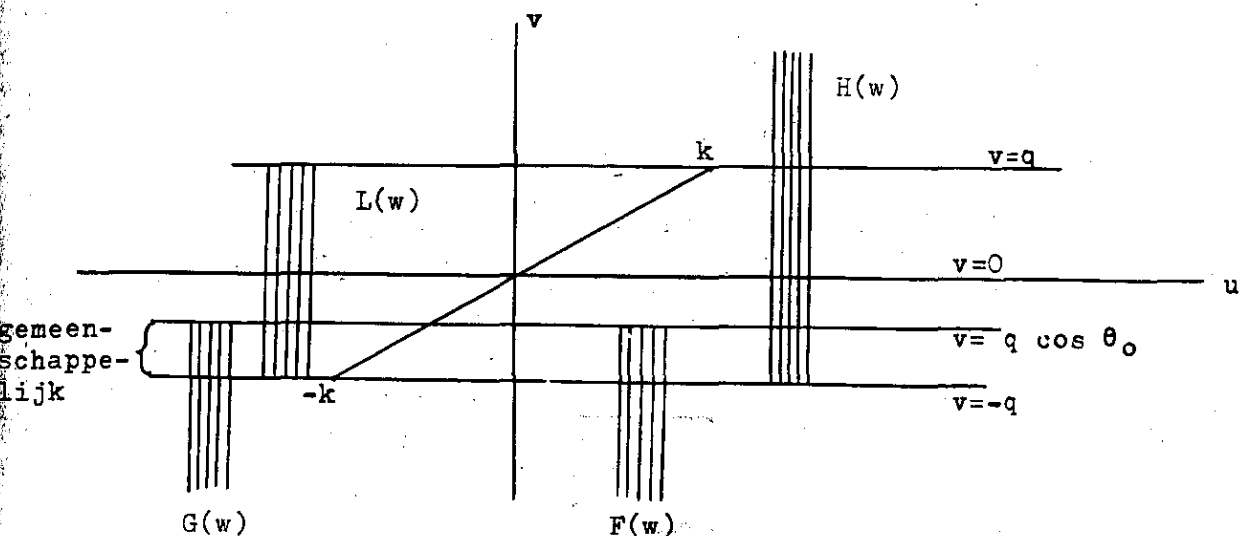
$$|H(w)| \leq \frac{A}{q+v} + B + C e^{-\epsilon v} \quad \text{voor } v > -q.$$

Derhalve is de functie $H(w)$ holomorf voor $v > -q$ en begrensd voor $v \geq -q + \epsilon$.

In een plaatje kunnen we de diverse regulariteitsgebieden door arcering aangeven. Twee gevallen, $\cos \theta_0 > 0$, of $\cos \theta_0 < 0$



Geval $\cos \theta_0 > 0$. Zie het gemeenschappelijk regulariteitsgebied:
 $-q < v < 0$.



Geval $\cos \theta_0 < 0$; zie het gemeenschappelijk regulariteitsgebied:
 $-q < v < q \cos \theta_0$.

De Fouriergetransformeerde van de integraalvgl. (14) volgt met behulp van het Faltung-theorema (convolutieproduct):

$$F(w) L(w) = G(w) + H(w) \quad (17)$$

vgl. (17) geldt in het gemeenschappelijk regulariteitsgebied der vier functies F, L, G en H; dus (17) geldt in de strook

$$- \operatorname{Im} k < \operatorname{Im} w < \min(0, \operatorname{Im}(k \cos \theta_0)).$$

De twee onbekende functies F en H kunnen natuurlijk niet ondubbelzinnig uit de ene vgl. (17) worden gevonden. Op dit ogenblik gaan functie theoretische eigenschappen een rol spelen, en wel die van L(w). En wel in het bijzonder, de verdeling der singulariteiten en der nulpunten en zijn asymptotische eigenschappen in het oneindige van het complexe w-vlak.

Vgl.(17) wordt, voor zover we de bekende termen invullen, en na deling door 2:

$$\frac{F(w)}{\sqrt{k^2 - w^2}} - \frac{1}{w - k \cos \theta_0} - \frac{1}{2} H(w) = 0.$$

Na vermenigvuldiging met $\sqrt{k+w}$ komt er

$$\frac{F(w)}{\sqrt{k-w}} - \frac{\sqrt{k+w}}{w - k \cos \theta_0} - \frac{1}{2} \sqrt{k+w} H(w) = 0,$$

hetgeen equivalent is met

$$\frac{F(w)}{\sqrt{k-w}} - \frac{\sqrt{k + k \cos \theta_0}}{w - k \cos \theta_0} = \frac{1}{2} \sqrt{k+w} H(w) + \frac{\sqrt{k+w} - \sqrt{k + k \cos \theta_0}}{w - k \cos \theta_0}.$$

Nu is F(w) regulier voor $\operatorname{Im} w < \min(0, q \cos \theta_0)$.

De functie $\frac{1}{\sqrt{k-w}}$ (hoofdwaarde) is regulier voor $\operatorname{Im} w < q$.

Het linkerlid is dus reguliere functie van w in de strook

$$\operatorname{Im} w < a = \min(0, q \cos \theta_0).$$

Evenzo is het rechterlid regulier voor $\operatorname{Im} w > -q$. Deze twee halfvlakken hebben een gemeenschappelijk gebied $-q < v < a$. Dus is het rechterlid de analytische voortzetting van het linkerlid, en omgekeerd. Ze definiëren eenzelfde gehele functie P(w):

$$\frac{F(w)}{\sqrt{k-w}} - \frac{\sqrt{k + k \cos \theta_0}}{w - k \cos \theta_0} = P(w) = \frac{1}{2} \sqrt{k+w} H(w) + \frac{\sqrt{k+w} - \sqrt{k + k \cos \theta_0}}{w - k \cos \theta_0}.$$

Het linkerlid is $O(|w|^{-\frac{1}{2}})$ ($|w| \rightarrow \infty$, $\text{Im } w < a$)

Het rechterlid is $O(|w|^{\frac{1}{2}})$ ($|w| \rightarrow \infty$, $\text{Im } w > -q$).

Dus $P(w) = O(|w|^{\frac{1}{2}})$ ($|w| \rightarrow \infty$).

$P(w)$ is dus een polynoom van de graad $\leq \frac{1}{2}$, dus een constante. Deze constante is nul, omdat 't linkerlid naar nul gaat voor $|w| \rightarrow \infty$, $\text{Im } w < a$.

Dus is gevonden:

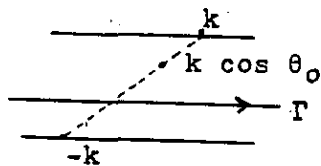
$$F(w) = \frac{\sqrt{k-w} \sqrt{k + k \cos \theta_0}}{w - k \cos \theta_0}$$

$$H(w) = \frac{2}{\sqrt{k+w}} \frac{\sqrt{k + k \cos \theta_0} - \sqrt{k+w}}{w - k \cos \theta_0}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{k+w}} \frac{1}{\sqrt{k+w} + \sqrt{k + k \cos \theta_0}}$$

Uit de nu bekende $F(w)$ vinden we door middel van de omkeerformule als oplossing van de integraalvlg. (14)

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{k-w} \sqrt{k + k \cos \theta_0}}{w - k \cos \theta_0} e^{iyw} dw$$



met Γ parallel aan de reële as, beneden de pool $w = k \cos \theta_0$ van de integrand.

De integraal is automatisch nul voor $y < 0$, want dan kunnen we Γ omvormen in $\dots k \cos \theta_0$

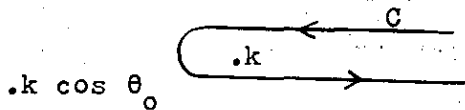


en dan samenknijpen, zonder dat we singulariteiten van de integrand passeren.

Door verandering van contour en met behulp van residu-stelling vinden we, voor $y > 0$,

$$f(y) = ik \sin \theta_0 e^{ik y \cos \theta_0} + \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\sqrt{k-w} \sqrt{k + k \cos \theta_0}}{w - k \cos \theta_0} e^{iyw} dw$$

met C gegeven door:



De eerste term is de bijdrage van de pool $k \cos \theta_0$ als Γ wordt verschoven tot C.

De overblijvende contour-integraal kan worden uitgedrukt in Fresnel-integralen. Men vindt na enige manipulaties:

$$f(y) = 2 ik \sin \theta_0 e^{ik y \cos \theta_0} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2ky} \sin(\frac{1}{2} \theta_0)} \exp(i\tau^2) d\tau$$

$$- \left(\frac{2k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_0}{2} e^{-i\pi/4} \frac{e^{iky}}{\sqrt{y}} \quad (y > 0)$$

Hiermee is de integraalvgl. opgelost, en kan men in principe het totale veld voor en achter het scherm bepalen. Dat de uitkomst in het geval van het halfvlak ook nog betrekkelijk elementair is, doet hier niet ter zake. Volledigheidshalve geven we hier de totale expliciete oplossing:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{array} \right\} = e^{ik \rho \cos(\theta - \theta_0)} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{s_1} e^{i\tau^2} d\tau$$

$$+ e^{ik \rho \cos(\theta + \theta_0)} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{s_2} e^{i\tau^2} d\tau$$

met $s_1 = \sqrt{2k \rho} \sin \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)$, $s_2 = -\sqrt{2k \rho} \sin \frac{1}{2}(\theta + \theta_0)$,
 $y = \rho \cos \theta$, $z = \rho \sin \theta$.

Natuurlijk kan deze oplossing veel gemakkelijker op een andere manier worden gevonden.

§.7 Golfvoortplanting tussen twee halfvlakken.

door J.Koekoek

Zie: A.E.Heins: The radiation and transmission properties of a pair of semi-infinite parallel plates I.
Quart. of Appl. Math. 6, 157-166 (1948).

Een vlakke golf valt in op twee oneindig goed geleidende metalen platen waarvan de dikte kan worden verwaarloosd. In een rechts cartesisch coördinatenstelsel zijn de vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array} \right\} -\infty < y < \infty, \quad z \geq 0.$$

De invallende golf zal alleen een y-component van de elektrische vector bezitten, terwijl de invalshoek (met de positieve z-as) θ is. Dan is

$$E_y = e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)} \quad (1)$$

waarbij de tijdfactor $e^{-i\omega t}$, ook in 't vervolg, is weggelaten. Deze golf induceert in de platen stromen in de y-richting, die onafhankelijk zijn van y en dus slechts functies zijn van z: $I_0(z)$ in de plaat $x = 0$ en $I_1(z)$ in de plaat $x = a$.

Uit de stromen berekent men de vectorpotentiaal als volgt: de bijdrage van twee stroken: $t < z < t + dt$, $-\infty < y < \infty$ is:

$$\begin{aligned} dA_y &= \frac{1}{c} I_0(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+(y-\eta)^2+(z-t)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-\eta)^2+(z-t)^2}} d\eta + \\ &+ \frac{1}{c} I_1(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{(x-a)^2+(\eta-y)^2+(z-t)^2}}}{\sqrt{(x-a)^2+(\eta-y)^2+(z-t)^2}} d\eta = \\ &= \frac{\pi i}{c} I_0(t) dt H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+(z-t)^2}) + \frac{\pi i}{c} I_1(t) dt H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-a)^2+(z-t)^2}). \end{aligned}$$

$(H_0^{(1)}(x))$ is de Hankelfunctie van de eerste soort en orde nul).

Dus:

$$A_y = \frac{\pi i}{c} \int_0^{\infty} I_0(t) H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+(z-t)^2}) dt + \frac{\pi i}{c} \int_0^{\infty} I_1(t) H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-a)^2+(z-t)^2}) dt.$$

Het veld wordt dan gegeven door de formules (45) en (46) op pag. 18;

in dit geval:

$$H_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad H_y = 0, \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

$$E_x = 0, \quad E_y = ikA_y, \quad E_z = 0$$

Het totale E-veld is dus:

$$E_y = e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)} - \frac{\pi k}{c} \left[\int_0^\infty I_0(t) H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+(z-t)^2}) dt + \int_0^\infty I_1(t) H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-a)^2+(z-t)^2}) dt \right] \quad (2)$$

Het gedrag van $I_0(z)$ en $I_1(z)$ voor grote waarden van z wordt bepaald door het E-veld tussen de platen op grote afstand van de opening $z=0$. De tangentiële component van \vec{E} is nul op de platen (d.w.z. $E_y = 0$) en E_y voldoet aan de golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0.$$

Door deze vergelijking te separeren vindt men dat voor $0 \leq x \leq a$ en grote z (zodanig dat men bij benadering het effect van de invallende golf mag verwaarlozen) golven van het volgende type kunnen worden aangetroffen:

$$E_y = \sin \frac{\ell \pi x}{a} (\mu e^{rz} + \nu e^{-rz}) \text{ met } r^2 = \frac{\ell^2 \pi^2}{a^2} - k^2.$$

Is $r^2 > 0$, dan wordt de golf exponentieel gedempt ($\mu = 0$ op fysische gronden).

Is $r^2 < 0$, dus $r = is$ ($s > 0$), dan is $\mu \neq 0$ en $\nu = 0$, omdat er alleen golven in de positieve z -richting verwacht mogen worden. Deze worden dus doorgelaten.

Stel nu dat alleen de eerste "mode" ($\ell=1$) niet wordt uitgedempt:

$$\frac{\pi^2}{a^2} - k^2 < 0 \quad \frac{4\pi^2}{a^2} - k^2 > 0.$$

Met $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ geeft dit de voorwaarde:

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{\lambda} < 1.$$

Dan is $E_y \sim \mu e^{ikz} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (z \rightarrow +\infty)$

met $0 < \kappa = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$.

Vaak zal in 't volgende k complex worden verondersteld:

$$k = k_1 + ik_2 \quad \text{met } k_2 > 0.$$

Dan wordt κ vastgelegd door de voorwaarde:

$$\text{Im } \kappa > 0.$$

$I_0(z)$ en $I_1(z)$ hebben hetzelfde asymptotische gedrag als E_y (beschouwd als functie van z alleen).

Dus

$$\left. \begin{array}{l} I_0(z) \\ I_1(z) \end{array} \right\} = O(e^{-z \text{ Im } \kappa}) \quad (z \rightarrow \infty) \quad (3)$$

Deze informatie over de onbekende functies I zal in een later stadium worden gebruikt.

Op de platen is $E_y = 0$. Dus volgt uit (2):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= e^{ikz \cos \theta} - \frac{\pi k}{c} \left[\int_0^\infty I_0(t) H_0^{(1)}(k|z-t|) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty I_1(t) H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2+(z-t)^2}) dt \right] \\ 0 &= e^{ik(a \sin \theta + z \cos \theta)} - \frac{\pi k}{c} \left[\int_0^\infty I_0(t) H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2+(z-t)^2}) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty I_1(t) H_0^{(1)}(k|z-t|) dt \right] \end{aligned} \right\} z > 0$$

$$\text{Stel: } -\frac{\pi k}{c} (I_0 + I_1) = \frac{i}{4} J_0 \quad \text{en} \quad -\frac{\pi k}{c} (I_0 - I_1) = \frac{i}{4} J_1. \quad (4)$$

Dan geldt voor $z > 0$:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= e^{ikz \cos \theta} (1 + e^{ika \sin \theta}) + \frac{i}{4} \int_0^\infty J_0(t) \left[H_0^{(1)}(k|z-t|) + \right. \\ &\quad \left. + H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2+(z-t)^2}) \right] dt \\ 0 &= e^{ikz \cos \theta} (1 - e^{ika \sin \theta}) + \frac{i}{4} \int_0^\infty J_1(t) \left[H_0^{(1)}(k|z-t|) + \right. \\ &\quad \left. - H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2+(z-t)^2}) \right] dt \end{aligned} \right\} (5)$$

Door de definities:

$$J_0(z) = J_1(z) = 0 \quad z < 0$$

$$F_0(z) = \begin{cases} e^{ikz \cos \theta} (1 + e^{ika \sin \theta}) & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$F_1(z) = \begin{cases} e^{ikz \cos \theta} (1 - e^{ika \sin \theta}) & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_0(z) = \begin{cases} 0 & z > 0 \\ \frac{i}{4} \int_0^{\infty} J_0(t) [H_0^{(1)}(k|z-t|) + H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2 + (z-t)^2})] dt & z < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} 0 & z > 0 \\ \frac{i}{4} \int_0^{\infty} J_1(t) [H_0^{(1)}(k|z-t|) - H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2 + (z-t)^2})] dt & z < 0 \end{cases}$$

gaan de vergelijkingen (5) over in:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(z) &= F_0(z) + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(t) [H_0^{(1)}(k|z-t|) + H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2 + (z-t)^2})] dt \\ \varphi_1(z) &= F_1(z) + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} J_1(t) [H_0^{(1)}(k|z-t|) - H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2 + (z-t)^2})] dt \end{aligned} \right\} (6)$$

geldig voor alle z .

Het stelsel integraalvergelijkingen (6) zal worden opgelost met behulp van Fouriertransformatie.

$$\text{Stel } H_0(w) = \int_0^{\infty} J_0(t) e^{-iwt} dt$$

$$\Phi_0(w) = \int_{-\infty}^0 \varphi_0(t) e^{-iwt} dt$$

$$H_1(w) = \int_0^{\infty} J_1(t) e^{-iwt} dt$$

$$\Phi_1(w) = \int_{-\infty}^0 \varphi_1(t) e^{-iwt} dt$$

De convergentiegebieden van deze integralen kunnen worden bepaald uit eigenschappen van de functies $J(z)$ en $\varphi(z)$.

Neem aan dat $\int_0^{\epsilon} |J_i(t)| dt$ bestaat voor zekere positieve ϵ , evenals

$\int_{-\epsilon}^0 |\varphi_i(t)| dt$ ($i = 0, 1$) en dat $J_0(z)$ en $J_1(z)$ begrensd zijn voor $z \geq \epsilon$.

Van de Hankelfunctie $H_0^{(1)}$ is verder bekend:

$$H_0^{(1)}(k|z-t|) = O(|z-t|^{-\frac{1}{2}} e^{-\text{Im } k|z-t|}) \quad (|z-t| \rightarrow \infty).$$

Voor $z \rightarrow -\infty$ volgt dan:

$$\begin{aligned} \varphi_i(z) &= O\left[\int_0^\infty |J_i(t)| |z-t|^{-\frac{1}{2}} e^{-|z-t|\text{Im } k} dt\right] = \\ &= O\left[\int_0^\infty |J_i(t)| (t-z)^{-\frac{1}{2}} e^{-(t-z)\text{Im } k} dt\right] = \\ &= O\left[\frac{e^{z \text{Im } k}}{\sqrt{-z}} \left\{ \int_0^\epsilon |J_i(t)| dt + \int_\epsilon^\infty |J_i(t)| e^{-t \text{Im } k} dt \right\}\right] = \\ &= O\left[\frac{e^{z \text{Im } k}}{\sqrt{-z}} \left\{ A(\epsilon) + B \cdot \frac{1}{\text{Im } k} \right\}\right] = O\left\{\frac{e^{z \text{Im } k}}{\sqrt{-z}}\right\} = O(e^{z \text{Im } k}) \\ &(i = 0, 1; \text{Im } k > 0). \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \Phi_i(w) &= \int_{-\infty}^0 \varphi_i(t) e^{-iwt} dt = O\left[\int_{-\infty}^0 |\varphi_i(t)| e^{t \text{Im } w} dt\right] = \\ &= O\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{t(\text{Im } k + \text{Im } w)} dt + \int_{-\epsilon}^0 |\varphi_i(t)| e^{t \text{Im } w} dt\right] = \\ &= O\left[\left\{\int_{-\epsilon}^0 |\varphi_i(t)| dt\right\} \max(1, e^{-\epsilon \text{Im } w}) + \frac{1}{\text{Im } w + \text{Im } k}\right] = \\ &= O\left[\max(1, e^{-\epsilon \text{Im } w}) + \frac{1}{\text{Im } w + \text{Im } k}\right] \text{ mits } \text{Im } w > -\text{Im } k. \end{aligned}$$

Bovendien volgt: $\Phi_i(w)$ regulier voor $\text{Im } w > -\text{Im } k$, en begrensd in elk halfvlak $\text{Im } w \geq -\text{Im } k + \epsilon$. ($\epsilon > 0$).

Analoog voor $H_0(w)$ en $H_1(w)$:

$$\begin{aligned} H_i(w) &= \int_0^\infty J_i(t) e^{-iwt} dt = O\left[\int_0^\infty |J_i(t)| e^{t \text{Im } w} dt\right] = \\ &= O\left[\max(1, e^{\epsilon \text{Im } w}) + \int_\epsilon^\infty |J_i(t)| e^{t \text{Im } w} dt\right]. \end{aligned}$$

Op grond van (3) en (4):

$$H_1(w) = O \left[\max(1, e^{\epsilon \operatorname{Im} w}) + \frac{1}{\operatorname{Im} \kappa - \operatorname{Im} w} \right] \text{ mits } \operatorname{Im} w < \operatorname{Im} \kappa.$$

Dus: $H_1(w)$ is regulier voor $\operatorname{Im} w < \operatorname{Im} \kappa$ en begrensd in elk halfvlak $\operatorname{Im} w \leq \operatorname{Im} \kappa - \epsilon$ ($\epsilon > 0$).

Verder geldt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(t) e^{-iwt} dt &= (1 + e^{ika \sin \theta}) \int_0^{\infty} e^{it(k \cos \theta - w)} dt = \\ &= \frac{i(1 + e^{ika \sin \theta})}{k \cos \theta - w} \end{aligned}$$

is regulier voor $\operatorname{Im} w < \operatorname{Im} k \cos \theta$, evenals

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(t) e^{-iwt} dt = \frac{i(1 - e^{ika \sin \theta})}{k \cos \theta - w}$$

$$\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k\sqrt{a^2+t^2}) e^{-iwt} dt = \frac{i}{2\sqrt{k^2-w^2}} e^{i|a|\sqrt{k^2-w^2}}$$

$$(\sqrt{k^2-w^2} = k \text{ voor } w = 0)$$

is regulier in de strook

$$- \operatorname{Im} k < \operatorname{Im} w < \operatorname{Im} k.$$

Fouriertransformatie toegepast op de vergelijkingen (6) leidt nu tot:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(w) &= \frac{1 + e^{ika \sin \theta}}{i(w - k \cos \theta)} + \frac{i}{2} \frac{1 + e^{ia\sqrt{k^2-w^2}}}{\sqrt{k^2-w^2}} H_0(w) \\ \Phi_1(w) &= \frac{1 - e^{ika \sin \theta}}{i(w - k \cos \theta)} + \frac{i}{2} \frac{1 - e^{ia\sqrt{k^2-w^2}}}{\sqrt{k^2-w^2}} H_1(w) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

geldig voor $-\operatorname{Im} k < \operatorname{Im} w < \min(\operatorname{Im} \kappa, \operatorname{Im} k \cos \theta)$.

Stel nu dat men kan schrijven:

$$\frac{1 + e^{ia\sqrt{k^2-w^2}}}{\sqrt{k^2-w^2}} = \frac{K_-(w)}{K_+(w)} \text{ en } \frac{1 - e^{ia\sqrt{k^2-w^2}}}{\sqrt{k^2-w^2}} = \frac{L_-(w)}{L_+(w)},$$

waarbij $K_-(w)$ en $L_-(w)$ regulier en ongelijk nul zijn in een benedenhalfvlak, $K_+(w)$ en $L_+(w)$ regulier en ongelijk nul in een bovenhalfvlak met een overlapping in de strook

$$- \operatorname{Im} k < \operatorname{Im} w < \min (\operatorname{Im} \kappa, \operatorname{Im} k \cos \theta).$$

Dan volgt uit (7) als eerste vergelijking:

$$\begin{aligned} \Phi_0(w) K_+(w) - \frac{(1 + e^{ika \sin \theta}) \{K_+(w) - K_+(k \cos \theta)\}}{i(w - k \cos \theta)} &= \\ &= \frac{1 + e^{ika \sin \theta}}{i(w - k \cos \theta)} K_+(k \cos \theta) + \frac{i}{2} K_-(w) H_0(w), \end{aligned}$$

geldig in een strook.

Het linkerlid is een reguliere functie in het bijbehorende boven-halvlak en het rechterlid is regulier in het bijbehorende beneden-halvlak. Beide leden zijn dus representaties voor een gehele functie $\epsilon_0(w)$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(w) K_+(w) - \frac{(1 + e^{ika \sin \theta}) \{K_+(w) - K_+(k \cos \theta)\}}{i(w - k \cos \theta)} &= \epsilon_0(w) \\ \frac{1 + e^{ika \sin \theta}}{i(w - k \cos \theta)} K_+(k \cos \theta) + \frac{i}{2} K_-(w) H_0(w) &= \epsilon_0(w) \end{aligned} \right\} (8)$$

Analoog:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(w) L_+(w) - \frac{(1 - e^{ika \sin \theta}) \{L_+(w) - L_+(k \cos \theta)\}}{i(w - k \cos \theta)} &= \epsilon_1(w) \\ \frac{1 - e^{ika \sin \theta}}{i(w - k \cos \theta)} L_+(k \cos \theta) + \frac{i}{2} L_-(w) H_1(w) &= \epsilon_1(w) \end{aligned} \right\} (9)$$

De functies $\epsilon_0(w)$ en $\epsilon_1(w)$ kan men bepalen uit het gedrag van $K_+(w)$, $K_-(w)$, $L_+(w)$, $L_-(w)$ voor $|w| \rightarrow \infty$ en de gegevens omtrent $\Phi_0(w)$, $\Phi_1(w)$, $H_0(w)$, $H_1(w)$ die reeds eerder zijn afgeleid; namelijk met behulp van de stelling van Liouville.

Nu de splitsing van de functie:

$$\frac{1 + e^{ia\sqrt{k^2-w^2}}}{\sqrt{k^2-w^2}} = \frac{2 e^{\frac{1}{2}ia\sqrt{k^2-w^2}}}{\sqrt{k^2-w^2}} \cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{k^2-w^2}\right).$$

Daarbij worden de volgende formules gebruikt:

$$\cos z = \prod_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \right\}$$

en $\frac{\pi}{2} = \arctan \sqrt{\frac{k-w}{k+w}} + \arctan \sqrt{\frac{k+w}{k-w}}$ voor de hoofdwwaarden van de functie $\arctan z$.

Dus

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{2} a\sqrt{k^2-w^2}\right) &= \prod_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{a^2(k^2-w^2)}{(2n+1)^2 \pi^2} \right\} = \prod_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{a^2 w^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \right\} = \\ &= \left(1 - \frac{a^2 k^2}{\pi^2} + \frac{a^2 w^2}{\pi^2} \right) \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} + \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{\frac{-iaw}{(2n+1)\pi}} \times \\ &\times \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} - \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{\frac{iaw}{(2n+1)\pi}} = \frac{a^2}{\pi^2} (w-\kappa)(w+\kappa) \times \\ &\times \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} + \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{\frac{-iaw}{(2n+1)\pi}} \times \\ &\times \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} - \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{\frac{iaw}{(2n+1)\pi}} \end{aligned}$$

en

$$e^{\frac{1}{2} ia\sqrt{k^2-w^2}} = e^{\frac{ia}{\pi} \sqrt{k^2-w^2} (\arctan \sqrt{\frac{k-w}{k+w}} + \arctan \sqrt{\frac{k+w}{k-w}})}$$

Stel nu:

$$\begin{aligned} K_-(w) &= \frac{a^2}{\pi^2} \frac{w-\kappa}{\sqrt{k-w}} e^{\chi_0(w) + \frac{ia}{\pi} \sqrt{k^2-w^2} \arctan \sqrt{\frac{k+w}{k-w}}} \times \\ &\times \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} + \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{\frac{-iaw}{(2n+1)\pi}} \\ \frac{1}{K_+(w)} &= \frac{2(w+\kappa)}{\sqrt{k+w}} e^{-\chi_0(w) + \frac{ia}{\pi} \sqrt{k^2-w^2} \arctan \sqrt{\frac{k-w}{k+w}}} \times \\ &\times \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} - \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{\frac{iaw}{(2n+1)\pi}} \end{aligned}$$

$\chi_0(w)$ is hierbij een reguliere funktie die zo zal worden gekozen dat $K_-(w)$ en $K_+(w)$ zich voor $|w| \rightarrow \infty$ gedragen als $|w|^\alpha$ (α constant).

$K_-(w)$ is regulier voor $\text{Im } w < \text{Im } k$ en bovendien ongelijk aan nul voor $\text{Im } w < \text{Im } \kappa$.

$\frac{1}{K_+(w)}$ is regulier voor $\text{Im } w > -\text{Im } k$ en ongelijk aan nul voor $\text{Im } w > -\text{Im } \kappa$.

Voor grote $|w|$ vindt men voor de exponent van de e-macht in de formule voor $K_-(w)$:

$$\begin{aligned} & \frac{ia}{\pi} \sqrt{k^2 - w^2} \arctan \sqrt{\frac{k+w}{k-w}} = \frac{ia}{\pi} i \sqrt{w^2 - k^2} \arctan \frac{\sqrt{w+k}}{i\sqrt{w-k}} = \\ & = -\frac{a}{\pi} w \sqrt{1 - \frac{k^2}{w^2}} \arctan \left[-i \sqrt{\frac{1 + \frac{k}{w}}{1 - \frac{k}{w}}} \right] = \\ & = -\frac{a}{\pi} w \sqrt{1 - \frac{k^2}{w^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left\{ i \sqrt{\frac{1 - \frac{k}{w}}{1 + \frac{k}{w}}} \right\} \right] = \\ & = -\frac{a}{\pi} w \sqrt{1 - \frac{k^2}{w^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\sqrt{\frac{1 - \frac{k}{w}}{1 + \frac{k}{w}}}} \frac{dt}{1+t^2} \right] = \\ & = -\frac{aw}{\pi} \sqrt{1 - \frac{k^2}{w^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{k}{w}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{k}{w}}} \right] = \\ & = -\frac{aw}{\pi} \sqrt{1 - \frac{k^2}{w^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \log \left\{ \frac{w}{k} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{k^2}{w^2}} \right) \right\} \right] = \\ & = -\frac{aw}{\pi} \sqrt{1 - \frac{k^2}{w^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \log \frac{2w}{k} - \frac{i}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{k^2}{w^2}}}{2} \right] = \\ & = -\frac{aw}{\pi} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{w^2} + \dots \right] \left[\frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \log \frac{2w}{k} + \frac{ik^2}{8w^2} + \dots \right] = \\ & = -\frac{aw}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \log \frac{2w}{k} + o\left(\frac{\log w}{w^2}\right) \right] = \\ & = \frac{iaw}{2\pi} \left[\log \frac{2w}{k} + i\pi \right] + o\left(\frac{\log w}{w}\right) \quad (\text{Im } w < \text{Im } \kappa). \end{aligned}$$

Met $\log z$ wordt steeds de hoofdwaaarde bedoeld.
Eveneens voor grote $|w|$:

$$\prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} + \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{-\frac{iaw}{(2n+1)\pi}} \sim \prod_1^{\infty} \left\{ 1 + \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{-\frac{iaw}{(2n+1)\pi}}$$

Met behulp van de formules:

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{ze^{\gamma z} \Gamma(z)} \quad (\gamma : \text{constante van Euler})$$

en

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

leidt men hieruit af:

$$\begin{aligned} & \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} + \frac{iaw}{(2n+1)\pi} \right\} e^{-\frac{iaw}{(2n+1)\pi}} \sim \\ & \sim \frac{\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{iaw}{n\pi} \right) e^{-\frac{iaw}{n\pi}}}{\left(1 + \frac{iaw}{\pi} \right) e^{-\frac{iaw}{\pi}} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{iaw}{2n\pi} \right) e^{-\frac{iaw}{2n\pi}}} = \\ & = \frac{1}{\frac{iaw}{\pi} e^{\frac{iaw}{\pi}} \Gamma\left(\frac{iaw}{\pi}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{iaw}{\pi} \right) e^{-\frac{iaw}{\pi}}} \cdot \frac{iaw}{2\pi} e^{\frac{iaw}{2\pi}} \Gamma\left(\frac{iaw}{2\pi}\right) = \\ & = \frac{1}{2} e^{\frac{iaw}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right)} \frac{1}{1 + \frac{iaw}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{iaw}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{iaw}{\pi}\right)} \sim \\ & \sim \frac{e^{\frac{iaw}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right)}}{2 \frac{iaw}{\pi}} e^{\frac{iaw}{2\pi} - \frac{iaw}{2\pi} \log \frac{iaw}{\pi} - \frac{iaw}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{2} \log 2} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2} \frac{iaw}{\pi}} e^{\frac{iaw}{2\pi} \left(3 - \gamma - \log 2 - \log \frac{iaw}{\pi} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{iaw}{\pi} e^{\frac{iaw}{2\pi} (3 - \gamma - \log 2 - \log \frac{iak}{2\pi} \cdot \frac{2w}{k})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{iaw}{\pi} e^{\frac{iaw}{2\pi} (3 - \gamma - \log \frac{ak}{\pi} - \frac{i\pi}{2} - \log \frac{2w}{k})}$$

Tenslotte vindt men dus:

$$K_-(w) \sim - \frac{a}{\pi \sqrt{2w}} e^{\chi_0(w) + \frac{iaw}{2\pi} (3 - \gamma - \log \frac{ak}{\pi} + \frac{i\pi}{2})}$$

Stel nu $\chi_0(w) = \frac{iaw}{2\pi} (\gamma + \log \frac{ak}{\pi} - \frac{i\pi}{2} - 3)$, dan is

$$K_-(w) = O(|w|^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{voor } |w| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } w < \text{Im } \kappa.$$

$$\text{Bovendien } K_+(w) = O(|w|^{\frac{1}{2}}) \quad \text{voor } |w| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } w > -\text{Im } \kappa.$$

De splitsing van de functie $\frac{1 - e^{ia\sqrt{k^2-w^2}}}{\sqrt{k^2-w^2}}$ verloopt als volgt:

$$\frac{L_-(w)}{L_+(w)} = \frac{1 - e^{ia\sqrt{k^2-w^2}}}{\sqrt{k^2-w^2}} = -ia e^{\frac{1}{2}ia\sqrt{k^2-w^2}} \frac{\sin(\frac{a}{2}\sqrt{k^2-w^2})}{\frac{a}{2}\sqrt{k^2-w^2}} =$$

$$= -ia e^{\frac{1}{2}ia\sqrt{k^2-w^2}} \prod_1^{\infty} \left\{ 1 - \frac{a^2(k^2-w^2)}{4n^2\pi^2} \right\} = -ia e^{\frac{1}{2}ia\sqrt{k^2-w^2}} \times$$

$$\times \prod_1^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a^2k^2}{4n^2\pi^2} \right) + \frac{a^2w^2}{4n^2\pi^2} \right\} = -ia e^{\frac{ia}{\pi}\sqrt{k^2-w^2} (\arctan \sqrt{\frac{k+w}{k-w}} + \arctan \sqrt{\frac{k-w}{k+w}})} \times$$

$$\times \prod_1^{\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2k^2}{4n^2\pi^2}} + \frac{iaw}{2n\pi} \right) e^{\frac{-iaw}{2n\pi}} \prod_1^{\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2k^2}{4n^2\pi^2}} - \frac{iaw}{2n\pi} \right) e^{\frac{iaw}{2n\pi}}$$

$$L_-(w) = -ia e^{\chi_1(w) + \frac{ia}{\pi}\sqrt{k^2-w^2} \arctan \sqrt{\frac{k+w}{k-w}}} \times$$

$$\times \prod_1^{\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{4n^2 \pi^2}} + \frac{iaw}{2n\pi} \right) e^{-\frac{iaw}{2n\pi}}$$

$$\frac{1}{L_+(w)} = e^{-\chi_1(w) + \frac{ia}{\pi} \sqrt{k^2 - w^2} \arctan \sqrt{\frac{k-w}{k+w}}} \times$$

$$\times \prod_1^{\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{4n^2 \pi^2}} - \frac{iaw}{2n\pi} \right) e^{\frac{iaw}{2n\pi}}$$

$$\frac{ia}{\pi} \sqrt{k^2 - w^2} \arctan \sqrt{\frac{k+w}{k-w}} = \frac{iaw}{2\pi} \left[\log \frac{2w}{k} + i\pi \right] + o\left(\frac{\log w}{w}\right)$$

($|w| \rightarrow \infty$ $\text{Im } w < \text{Im } k$).

$$\prod_1^{\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{4n^2 \pi^2}} + \frac{iaw}{2n\pi} \right) e^{-\frac{iaw}{2n\pi}} \sim \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{iaw}{2n\pi} \right) e^{-\frac{iaw}{2n\pi}} = \frac{1}{\frac{iaw}{2\pi} e^{\frac{iaw}{2\pi}} \Gamma\left(\frac{iaw}{2\pi}\right)} \sim$$

$$\sim \frac{2\pi}{iaw} e^{-\frac{iaw}{2\pi}} - \left(\frac{iaw}{2\pi} - \frac{1}{2}\right) \log \frac{iaw}{2\pi} + \frac{iaw}{2\pi} - \frac{1}{2} \log 2\pi =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{iaw} e^{\frac{iaw}{2\pi}} (1 - \gamma) + \frac{1}{2} \log \frac{iaw}{2\pi} - \frac{iaw}{2\pi} \log \frac{iaw}{2\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{iaw} e^{\frac{iaw}{2\pi}} \left(1 - \gamma - \log \frac{2w}{k} - \log \frac{ak}{4\pi} - i \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{iaw}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (iaw)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{iaw}{2\pi}} \left(1 - \gamma - \log \frac{2w}{k} - \log \frac{ak}{4\pi} - i \frac{\pi}{2} \right)$$

Dus

$$L_-(w) \sim \frac{-ia}{(iaw)^{\frac{1}{2}}} e^{\chi_1(w) + \frac{iaw}{2\pi} \left(1 - \gamma - \log \frac{ak}{4\pi} + i \frac{\pi}{2} \right)}$$

($|w| \rightarrow \infty$, $\text{Im } w < \text{Im } k$).

Stel

$$\chi_1(w) = \frac{iaw}{2\pi} \left(\gamma + \log \frac{ak}{4\pi} - 1 - i \frac{\pi}{2} \right), \text{ dan is}$$

$$L_-(w) = O(|w|^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{voor } |w| \rightarrow \infty, \text{ Im } w < \text{Im } k.$$

Bovendien blijkt dan: $L_+(w) = O(|w|^{\frac{1}{2}})$ voor $|w| \rightarrow \infty$, $\text{Im } w > -\text{Im } k$.

Met de tot nu toe verkregen gegevens leidt men uit (8) en (9) gemakkelijk af:

$$\varepsilon_0(w) \equiv 0, \quad \varepsilon_1(w) \equiv 0.$$

Dus

$$\left. \begin{aligned} H_0(w) &= \frac{2(1 + e^{ika \sin \theta})K_+(k \cos \theta)}{(w - k \cos \theta)K_-(w)} \\ H_1(w) &= \frac{2(1 - e^{ika \sin \theta})L_+(k \cos \theta)}{(w - k \cos \theta)L_-(w)} \end{aligned} \right\} \text{Im } w < \min(\text{Im } \kappa, \text{Im } k \cos \theta).$$

Dan is volgens het omkeertheorema van de Fouriertransformatie:

$$J_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} H_i(w) e^{iwt} dw \quad (-\text{Im } k < b < \min(\text{Im } \kappa, \text{Im } k \cos \theta), \quad i = 0, 1).$$

Uit (4) en (2) tenslotte:

$$\begin{aligned} E_y &= e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)} + \frac{i}{8} \left[\int_0^{\infty} \{J_0(t) + J_1(t)\} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (z-t)^2}) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \{J_0(t) - J_1(t)\} H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-a)^2 + (z-t)^2}) dt \right] = \\ &= e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)} + \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \{ (H_0(w) + H_1(w)) e^{i|x|\sqrt{k^2-w^2}} + \\ &\quad + (H_0(w) - H_1(w)) e^{i|x-a|\sqrt{k^2-w^2}} \} \frac{e^{iwz}}{\sqrt{k^2-w^2}} dw. \end{aligned}$$

De integratieweg kan men nog vervormen tot een contour in het bovenvlak ($z > 0$) of tot een contour in het benedenvlak ($z < 0$) mits daarbij geen polen worden gepasseerd en de vertakkingsneden niet worden gesneden.

Er zijn twee polen in het bovenvlak $w = k \cos \theta$ en $w = \kappa$.

Voor het veld op grote afstand leveren deze polen de hoofdbijdragen tot de integraal.

Beschouw nu verder het gebied tussen de platen:

$$z \gg 0, \quad 0 \leq x \leq a.$$

De bijdrage van de pool $w = k \cos \theta$ is:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \left[e^{ixk \sin \theta} \left\{ (1 + e^{ika \sin \theta}) \frac{K_+(k \cos \theta)}{K_-(k \cos \theta)} + (1 - e^{ika \sin \theta}) \frac{L_+(k \cos \theta)}{L_-(k \cos \theta)} \right\} \right. \\
 & + e^{i(a-x)k \sin \theta} \left\{ (1 + e^{ika \sin \theta}) \frac{K_+(k \cos \theta)}{K_-(k \cos \theta)} + \right. \\
 & \left. \left. - (1 - e^{ika \sin \theta}) \frac{L_+(k \cos \theta)}{L_-(k \cos \theta)} \right\} \right] \frac{e^{izk \cos \theta}}{k \sin \theta} = \\
 & = - \frac{1}{2} [2e^{ikx \sin \theta} + ikz \cos \theta] = - e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}.
 \end{aligned}$$

Hierdoor wordt dus juist het invallende veld geneutraliseerd.
De bijdrage van de pool $w = \kappa$ is:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \left[e^{ix\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \left\{ (1 + e^{ika \sin \theta}) \frac{K_+(k \cos \theta)}{\kappa - k \cos \theta} \right\} + \right. \\
 & \left. + e^{i(a-x)\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \left\{ (1 + e^{ika \sin \theta}) \frac{K_+(k \cos \theta)}{\kappa - k \cos \theta} \right\} \right] \cdot \\
 & \cdot \left(\lim_{w \rightarrow \kappa} \frac{w - \kappa}{K_-(w)} \right) \frac{e^{i\kappa z}}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \\
 & = - \frac{1}{2} (1 + e^{iak \sin \theta}) \frac{K_+(k \cos \theta)}{\kappa - k \cos \theta} \frac{ae^{i\kappa z}}{\pi} \left(e^{\frac{i\pi x}{a}} + e^{i(a-x)\frac{\pi}{a}} \right) \lim_{w \rightarrow \kappa} \frac{w - \kappa}{K_-(w)} = \\
 & = - \frac{ia}{\pi} (e^{i\kappa z} \sin \frac{\pi x}{a}) (1 + e^{iak \sin \theta}) \frac{K_+(k \cos \theta)}{\kappa - k \cos \theta} \lim_{w \rightarrow \kappa} \frac{w - \kappa}{K_-(w)}.
 \end{aligned}$$

Vroeger is reeds aangetoond dat voor grote z en $0 \leq x \leq a$:

$$E_y \sim \mu e^{i\kappa z} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

De amplitudo μ van de doorgelaten golf blijkt dus te zijn:

$$\mu = - \frac{ia}{\pi} (1 + e^{iak \sin \theta}) \frac{K_+(k \cos \theta)}{\kappa - k \cos \theta} \lim_{w \rightarrow \kappa} \frac{w - \kappa}{K_-(w)}.$$

Voor reële k :

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow k} \frac{w - k}{K_-(w)} &= \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{k-k} e^{-\chi_0(k) - \frac{ia}{\pi} \sqrt{k^2 - k^2} \arctan \sqrt{\frac{k+k}{k-k}}} \times \\ &\times \frac{1}{\prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} + \frac{ia\kappa}{(2n+1)\pi} \right\} e^{-\frac{ia\kappa}{(2n+1)\pi}}} = \\ &= \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{k-k} e^{-\chi_0(k) - i \arctan \sqrt{\frac{k+k}{k-k}}} \times \\ &\times e^{-\log \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} + \frac{ia\kappa}{(2n+1)\pi} \right\} e^{-\frac{ia\kappa}{(2n+1)\pi}}} \end{aligned}$$

$$\text{Stel } \log \prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} + \frac{ia\kappa}{(2n+1)\pi} \right\} e^{-\frac{ia\kappa}{(2n+1)\pi}} = \log r + i\theta, \quad (r > 0).$$

Dan is

$$\begin{aligned} r^2 &= \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{a^2 \kappa^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \right) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{a^2 (k^2 - \kappa^2)}{(2n+1)^2 \pi^2} \right) = \\ &= \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{1 - \frac{4z^2}{\pi^2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\arctan \frac{\frac{a\kappa}{(2n+1)\pi}}{\sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}}} - \frac{a\kappa}{(2n+1)\pi} \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\arcsin \frac{a\kappa}{\pi \sqrt{(2n+1)^2 - 1}} - \frac{a\kappa}{(2n+1)\pi} \right]. \end{aligned}$$

Dus

$$\lim_{w \rightarrow k} \frac{w - k}{K_-(w)} = 2 \frac{\pi^{3/2}}{a^2} \sqrt{k-k} e^{-(\chi_0(k) + i \arctan \sqrt{\frac{k+k}{k-k}} + i\theta_1)}$$

Nu $K_+(k \cos \theta)$:

$$K_+(k \cos \theta) = \frac{\sqrt{k + k \cos \theta}}{2(\kappa + k \cos \theta)} e^{\chi_0(k \cos \theta) - \frac{iak}{\pi} \sin \theta \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_1^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}} - \frac{iak \cos \theta}{(2n+1) \pi} \right\}} e^{\frac{iak \cos \theta}{(2n+1) \pi}} =$$

$$= \frac{\sqrt{k + k \cos \theta}}{2(\kappa + k \cos \theta)} e^{\chi_0(k \cos \theta) - \frac{iak}{2\pi} \theta \sin \theta - \log s - i\theta_2}$$

met:

$$s^2 = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{a^2 k^2 \cos^2 \theta}{(2n+1)^2 \pi^2} \right) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{a^2 k^2 \sin^2 \theta}{(2n+1)^2 \pi^2} \right) =$$

$$= \frac{\cos(\frac{1}{2} ak \sin \theta)}{1 - \frac{a^2 k^2}{\pi^2} \sin^2 \theta} = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\cos(\frac{1}{2} ak \sin \theta)}{\pi^2 - k^2 \sin^2 \theta} = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\cos(\frac{1}{2} ak \sin \theta)}{k^2 \cos^2 \theta - \kappa^2}$$

$$\theta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\arctan \frac{-\frac{ak \cos \theta}{(2n+1) \pi}}{\sqrt{1 - \frac{a^2 k^2}{(2n+1)^2 \pi^2}}} + \frac{ak \cos \theta}{(2n+1) \pi} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\arcsin \frac{ak \cos \theta}{\sqrt{(2n+1)^2 \pi^2 - a^2 k^2 \sin^2 \theta}} + \frac{ak \cos \theta}{(2n+1) \pi} \right]$$

Dus:

$$K_+(k \cos \theta) = \frac{a}{2\pi} \frac{\sqrt{k^2 \cos^2 \theta - \kappa^2}}{\sqrt{\cos(\frac{1}{2} ak \sin \theta)}} \frac{\sqrt{k(1 + \cos \theta)}}{\kappa + k \cos \theta} e^{-(\frac{iak}{2\pi} \theta \sin \theta + i\theta_2 - \chi_0(k \cos \theta))}$$

Substitutie in de formule voor μ geeft tenslotte:

$$\mu = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + e^{iak \sin \theta}}{\kappa^2 - k^2 \cos^2 \theta} \frac{\sqrt{k^2 \cos^2 \theta - \kappa^2}}{\sqrt{\cos(\frac{1}{2} ak \sin \theta)}} \sqrt{k(1 + \cos \theta)(k - \kappa)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times e^{-(\chi_0(\kappa) + i \arctan \sqrt{\frac{\kappa+\kappa}{\kappa-\kappa}} + i\theta_1 + i\theta_2 - \chi_0(k \cos \theta) + \frac{iak}{2\pi} \theta \sin \theta)} = \\ & = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{k \cos(\frac{1}{2} ak \sin \theta)(k - \kappa)(1 + \cos \theta)}}{\sqrt{k^2 \cos^2 \theta - \kappa^2}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times e^{-(\chi_0(\kappa) - \chi_0(k \cos \theta) + i \arctan \sqrt{\frac{\kappa+\kappa}{\kappa-\kappa}} + i\theta_1 + i\theta_2 + \frac{iak}{2\pi} (\theta \sin \theta - \pi \sin \theta))} = \\ & = 2 \sqrt{\frac{k\pi(1 + \cos \theta) \cos(\frac{1}{2} ak \sin \theta)}{a^2(k^2 \cos^2 \theta - \kappa^2)(k + \kappa)}} e^{\frac{a}{4} (k \cos \theta - \kappa) + i\phi} \quad \text{met:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi & = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{4i} (k \cos \theta - \kappa) + i(\chi_0(\kappa) - \chi_0(k \cos \theta) + i \arctan \sqrt{\frac{\kappa+\kappa}{\kappa-\kappa}} + i\theta_1 + i\theta_2 + \\ & \quad + \frac{iak}{2\pi} (\theta \sin \theta - \pi \sin \theta)) = \\ & = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{4} i(k \cos \theta - \kappa) + i \left(\frac{ia\gamma\kappa}{2\pi} + \frac{iak}{2\pi} \log \frac{ak}{\pi} + \frac{a\kappa}{4} - 3 \frac{iak}{2\pi} + \right. \\ & \quad \left. - \frac{ia\gamma k \cos \theta}{2\pi} - \frac{iak \cos \theta}{2\pi} \log \frac{ak}{\pi} - \frac{ak \cos \theta}{4} + 3 \frac{iak \cos \theta}{2\pi} + \right. \\ & \quad \left. + i \arctan \sqrt{\frac{\kappa+\kappa}{\kappa-\kappa}} + i\theta_1 + i\theta_2 + \frac{iak}{2\pi} (\theta \sin \theta - \pi \sin \theta) \right) = \\ & = -\theta_1 - \theta_2 + \arctan \sqrt{\frac{\kappa-\kappa}{\kappa+\kappa}} + \frac{a}{2\pi} (k \cos \theta - \kappa) (\gamma + \log \frac{ak}{\pi} - 3) + \\ & \quad + \frac{ak}{2\pi} (\pi - \theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

Hiermee is het veld tussen de platen, op grote afstand van de opening, bepaald.