TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

TOEGEPASTE ANALYSE I

Syllabus van het College van

Prof. Dr. C.J. Bouwkamp

Gegeven in het Najaarssemester 1976

Bouwkamp

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Toegepaste analyse I

Syllabus naar het college van prof. dr. C.J. Bouwkamp

Dictaatnr. 2.208 Prijs *f* 8,00

ENKELE NOTITIES

bij

Toegepaste Analyse I

Dit collegedictaat is, op wat kleine uitbreidingen na, gelijk aan de gelijknamige versie gedateerd najaarssemester 1968. Die versie staat op naam van Prof. Dr. J. Boersma. Het college als zodanig werd overigens vóór 1967, al voor de komst van Boersma, in vrijwel dezelfde vorm gegeven door Prof. Dr. C.J. Bouwkamp. Laatstgenoemde is de samensteller van het college geweest.

JdG, 30 Mei 2005.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

T O E G E P A S T E   A N A L Y S E   I

Syllabus naar het college van

Prof.dr. C.J. Bouwkamp

Najaarssemester 1976

Inhoud

Hoofdstuk I. Oplossing van differentiaalvergelijkingen door machtreekstechnieken

1.1. Lineaire DV van de tweede orde

De standaardvorm van de lineaire differentiaalvergelijking (in het vervolg aan te duiden met DV) van de tweede orde luidt

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0 .$$

Hierin is y een complexe functie van de complexe variabele z. De functies $p(z)$ en $q(z)$ zijn analytische functies van z in een gebied G in het complexe z-vlak. Binnen G mogen $p(z)$, $q(z)$ eventueel een eindig aantal polen bezitten.

Definitie. Een punt $z_0 \in G$ heet een gewoon punt van de DV als $p(z)$ en $q(z)$ analytisch zijn in $z = z_0$.
Een punt $z_0 \in G$ heet een singulier punt van de DV als $p(z)$ en/of $q(z)$ een pool bezit in $z = z_0$.

1.2. Oplossing van de lineaire DV in de omgeving van een gewoon punt

Laat $z = z_0$ een gewoon punt zijn van de DV, dan laat zich een cirkel $|z - z_0| = R$ aangeven, waarbinnen de functies $p(z)$ en $q(z)$ analytisch zijn.

Stelling. Zijn de functies $p(z)$ en $q(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < R$ en zijn a_0, a_1 willekeurige complexe getallen, dan bestaat er één en slechts één functie $y = y(z)$ zodanig dat:

1) $y(z)$ voldoet aan de DV,
2) $y(z)$ voldoet aan de beginvoorwaarden $y(z_0) = a_0$, $y'(z_0) = a_1$,
3) $y(z)$ is analytisch voor $|z - z_0| < R$.

Bewijs. Onderstel dat $z_0 = 0$. (Dit is altijd te verwezenlijken door de transformatie $\xi = z - z_0$, $\xi_0 = 0$.) Dus $p(z)$ en $q(z)$ zijn analytisch voor $|z| < R$.
We maken nu gebruik van een machtreekstechniek. Daartoe ontwikkelen we $p(z)$, $q(z)$ in machtreeksen,

$$(1.2.1) \qquad p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n , \qquad q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n .$$

Deze machtreeksen (in het vervolg aan te duiden met MR) zijn absoluut convergent voor $|z| < R$ omdat $p(z)$ en $q(z)$ analytisch zijn voor $|z| < R$.
Probeer nu voor $y(z)$,

$$(1.2.2) \qquad y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots .$$

Hierin zijn a_0 en a_1 gelijk aan de onder punt 2) van de stelling ingevoerde beginwaarden. De coëfficiënten $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ zijn nog te bepalen.
We gaan voorlopig formeel te werk: Neem aan dat de MR voor $y(z)$ convergent is en termsgewijs gedifferentieerd mag worden. Na substitutie van $y(z)$ in de DV worden de coëfficiënten $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ zodanig bepaald dat $y(z)$ (formeel) aan de DV voldoet. Achteraf moet dan nog geverifieerd worden, dat de gevonden MR-oplossing inderdaad convergeert en termsgewijs gedifferentieerd mag worden.
De DV luidt

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0 .$$

Substitueer hierin de machtreeksen (1.2.1), (1.2.2), dan volgt,

$$(1.2.3) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 .$$

Voer de vermenigvuldiging der MR in (1.2.3) uit en stel de coëfficiënten van de opvolgende machten van z gelijk aan nul:

Coëff. van z^0 : $2a_2 + p_0 a_1 + q_0 a_0 = 0$,

Coëff. van z : $6a_3 + 2p_0 a_2 + p_1 a_1 + q_0 a_1 + q_1 a_0 = 0$,

Coëff. van z^{n-2}: $n(n-1)a_n + \{p_0(n-1)a_{n-1} + p_1(n-2)a_{n-2} + \ldots + p_{n-2}a_1\} +$
$+ \{q_0 a_{n-2} + q_1 a_{n-3} + \ldots + q_{n-2}a_0\} = 0$,

$$\text{of: } n(n-1)a_n + \sum_{j=0}^{n-2} (n-j-1)p_j a_{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-2} q_j a_{n-j-2} = 0 .$$

Uit de laatste vergelijking volgt,

$$(1.2.4)\qquad n(n-1)a_n = -\sum_{j=0}^{n-2}(n-j-1)p_j a_{n-j-1} - \sum_{j=1}^{n-1} q_{j-1}a_{n-j-1}\ .$$

De betrekking (1.2.4) welke geldt voor $n = 2,3,4,\ldots$, heet een recurrente betrekking voor de coëfficiënt a_n. Nadat de coëfficiënten $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ bepaald zijn laat zich a_n berekenen met behulp van (1.2.4). Bedenk dat a_0, a_1 gegeven zijn, dan zijn op deze wijze successievelijk de coëfficiënten $a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ te berekenen. De MR $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ voldoet dan formeel aan de DV.

We zullen nu bewijzen dat de MR $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absoluut convergent is voor $|z| < R$. Daartoe maken we gebruik van de majorantenmethode van Cauchy: probeer een rij van coëfficiënten $b_0,b_1,\ldots,b_n,\ldots$ te vinden, zodanig dat $|a_n| \le b_n$.

Als nu de MR $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absoluut convergent is, dan is ook de MR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absoluut convergent. De MR $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ heet dan een majorant van de gegeven MR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Verder maken we gebruik van de ongelijkheid van Cauchy (Ackermans-Van Lint [1.1]*), p.438). Zij $0 < r < R$, en zij

$$M := \max|p(z)|\ ,\quad N := \max|q(z)|\quad \text{op de cirkel } |z| = r\ ,$$

dan geldt $|p_n| \le \dfrac{M}{r^n}$, $|q_n| \le \dfrac{N}{r^n}$.

Stel nu $K := \max(M,rN)$, dan is

$$|p_n| \le \frac{K}{r^n}\ ,\quad |q_n| \le \frac{K}{r^{n+1}}\ .$$

Uitgaande van (1.2.4) laat zich nu de volgende ongelijkheid afleiden,

$$n(n-1)|a_n| \le \sum_{j=0}^{n-2}(n-j-1)|p_j||a_{n-j-1}| + \sum_{j=1}^{n-1}|q_{j-1}||a_{n-j-1}| \le$$

---

*) Cijfers tussen [ ] verwijzen naar de literatuurlijst op pag. 145-146.

$$\leq \sum_{j=0}^{n-2} (n-j-1)\frac{K}{r^j}|a_{n-j-1}| + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{K}{r^j}|a_{n-j-1}| \leq$$

$$\leq K\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{r^j}|a_{n-j-1}| = K\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell|a_{\ell-1}|}{r^{n-\ell}},$$

waarbij in de laatste som de nieuwe sommatievariabele $\ell = n-j$ is ingevoerd. Voer nu in de rij van coëfficiënten $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ gedefinieerd door

$$b_0 = |a_0|, \quad b_1 = |a_1|,$$

$$\text{(1.2.5)} \qquad n(n-1)b_n = K\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell b_{\ell-1}}{r^{n-\ell}}, \qquad n = 2,3,4,\ldots .$$

Uit de laatste betrekking zijn $b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ successievelijk te berekenen. Met volledige inductie is gemakkelijk te bewijzen dat $|a_n| \leq b_n$ is voor $n = 0,1,2,\ldots$.

We onderzoeken nu de convergentie van de MR $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Ga daartoe uit van de recurrente betrekking (1.2.5) voor b_n en voor b_{n+1},

$$n(n-1)b_n = K\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell b_{\ell-1}}{r^{n-\ell}},$$

$$(n+1)n\, b_{n+1} = K\sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{\ell b_{\ell-1}}{r^{n-\ell+1}}.$$

Combinatie van deze betrekkingen geeft,

$$(n+1)n\, b_{n+1} = K\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell b_{\ell-1}}{r^{n-\ell+1}} + K(n+1)b_n = \frac{n(n-1)b_n}{r} + K(n+1)b_n .$$

Daaruit volgt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{r}\frac{n-1}{n+1} + \frac{K}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{r}.$$

Volgens het criterium van d'Alembert heeft dan de MR $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ een convergentiestraal r, genoemde machtreeks is dus absoluut convergent voor $|z| < r$.

Ook de MR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is dan absoluut convergent voor $|z| < r$. Nu was r willekeurig met $0 < r < R$. De MR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is daarom ook absoluut convergent voor $|z| < R$. De functie $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is dan zeker analytisch voor $|z| < R$. Voor $|z| < R$ mag de MR voorts termsgewijs gedifferentieerd worden. Aan de eerder gemaakte veronderstellingen is dus inderdaad voldaan. Dit betekent dat de gevonden functie $y(z)$ inderdaad voldoet aan de DV. Het is verder triviaal dat $y(z)$ voldoet aan de beginvoorwaarden $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$.

We moeten tenslotte nog aantonen dat de verkregen oplossing <u>éénduidig</u> is. Stel daartoe dat er een tweede functie $y^*(z)$ bestaat welke voldoet aan DV en beginvoorwaarden en analytisch is voor $|z| < R$. De functie $y^*(z)$ is dan te ontwikkelen in een machtreeks

$$y^*(z) = a_0 + a_1 z + a_2^* z^2 + \ldots + a_n^* z^n + \ldots .$$

Substitutie van $y^*(z)$ in de DV leidt tot een zelfde recurrente betrekking voor a_n^* als (1.2.4). Daaruit volgt $a_2^* = a_2$, $a_3^* = a_3$, ..., $a_n^* = a_n$ en $y^*(z) = y(z)$. Er is dus één en slechts één functie $y(z)$ die aan de gestelde eisen voldoet.

Hiermede is het bewijs voltooid. □

<u>Opmerking</u>. In vele gevallen is het gebied G, waarin $p(z)$, $q(z)$ (afgezien van polen) analytisch zijn, het hele complexe vlak. Is z_0 nu een gewoon punt van de DV, dan zijn $p(z)$ en $q(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < R$, waarbij voor R de afstand van z_0 tot de dichtsbijliggende pool van $p(z)$ en/of $q(z)$ te nemen is.

<u>Voorbeeld</u>. De <u>DV</u> van <u>Legendre</u>

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{2z}{1-z^2}\frac{dy}{dz} + \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2}\, y = 0$$

heeft twee singuliere punten, $z = \pm 1$. Alle overige punten zijn gewone punten.

We zoeken een oplossing in de omgeving van het gewone punt $z = 0$. Daartoe schrijven we de DV als volgt,

$$(1 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + \nu(\nu+1)y = 0$$

en substitueren daarin de MR

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k .$$

Deze substitutie leidt tot

$$(1 - z^2) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-2} - 2z \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} + \nu(\nu+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 0 ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k z^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^k + \nu(\nu+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 0 ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} (k-\nu)(k+\nu+1)a_k z^k = 0 .$$

De coëfficiënt van z^{k-2} $(k \geq 2)$ gelijk aan nul gesteld voert tot de vergelijking,

$$k(k-1)a_k - (k-\nu-2)(k+\nu-1)a_{k-2} = 0 ,$$

(1.2.6) $$a_k = \frac{(k-\nu-2)(k+\nu-1)}{k(k-1)} a_{k-2} , \quad k \geq 2 .$$

Door de recurrente betrekking (1.2.6) is a_k uitgedrukt in a_{k-2}; analoog is a_{k-2} uit te drukken in a_{k-4} enz.
Herhaalde toepassing van (1.2.6) leidt tot

$$a_k \rightarrow a_{k-2} \rightarrow a_{k-4} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{matrix} a_0 \ (k \text{ even}) \\ a_1 \ (k \text{ oneven}) \end{matrix} .$$

Onderscheid nu de gevallen, k even resp. k oneven.

a) k even. Dan is a_k uit te drukken in a_0 volgens

$$a_k = \frac{(k-\nu-2)(k-\nu-4)\dots(-\nu)(k+\nu-1)(k+\nu-3)\dots(\nu+1)}{k(k-1)(k-2)(k-3)\dots 2.1} a_0 .$$

Merk op dat de noemer gelijk is aan k!. Stel nu k = 2j, dan is

$$a_{2j} = \frac{(2j-\nu-2)(2j-\nu-4)\dots(-\nu)(2j+\nu-1)(2j+\nu-3)\dots(\nu+1)}{(2j)!} a_0 =$$

$$= \frac{(j-\frac{1}{2}\nu-1)(j-\frac{1}{2}\nu-2)\dots(-\frac{1}{2}\nu)(j+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})}{(2j)!} 2^{2j} a_0 .$$

We voeren in <u>Pochhammer's symbool</u> $(b)_j$, b complex, j geheel ≥ 0, gedefinieerd door

$$(b)_0 := 1 \ , \quad (b)_j := b(b+1)\ldots(b+j-1) \quad \text{voor } j = 1,2,3,\ldots$$

of ook, met behulp van de Γ-functie (zie hoofdstuk II),

$$(b)_j = \frac{\Gamma(b+j)}{\Gamma(b)} \ .$$

Met deze notatie is a_{2j} als volgt te schrijven,

$$a_{2j} = \frac{(-\tfrac{1}{2}\nu)_j(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})_j}{(2j)!}\, 2^{2j} a_0 \ .$$

b) k <u>oneven</u>. We stellen $k = 2j+1$, dan is analoog als boven af te leiden,

$$a_{2j+1} = \frac{(-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})_j(\tfrac{1}{2}\nu+1)_j}{(2j+1)!}\, 2^{2j} a_1 \ .$$

Voor de oplossing $y(z)$ vinden we op deze wijze

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} z^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} z^{2j+1} =$$

$$= a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\tfrac{1}{2}\nu)_j(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})_j}{(2j)!}\, 2^{2j} z^{2j} + a_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})_j(\tfrac{1}{2}\nu+1)_j}{(2j+1)!}\, 2^{2j} z^{2j+1}$$

oftewel, in korte notatie,

(1.2.7) $\quad y(z) = a_0 y_1(z) + a_1 y_2(z)$,

waarin a_0 en a_1 nog willekeurige constanten zijn die bepaald worden door de beginvoorwaarden. De functies $y_1(z)$ en $y_2(z)$ zijn ook oplossingen van de DV. De algemene oplossing (1.2.7) is een lineaire combinatie van de functies $y_1(z)$, $y_2(z)$. Men kan eenvoudig inzien dat de functies $y_1(z)$, $y_2(z)$ lineair onafhankelijk zijn; de oplossingen $y_1(z)$, $y_2(z)$ vormen dan een zgn. <u>fundamentaalsysteem</u> van <u>oplossingen</u>.
Met behulp van het criterium van d'Alembert is af te leiden dat de convergentiestraal van de MR voor $y_1(z)$, $y_2(z)$ gelijk 1 is. De reeksen zijn dus absoluut convergent voor $|z| < 1$ en de functies $y_1(z)$, $y_2(z)$ zijn analytisch voor $|z| < 1$. Dit laatste is in overeenstemming met de stelling: voor de DV van Legendre zijn de coëfficiënten $p(z)$, $q(z)$ analytisch voor $|z| < 1$.

Men kan voorts bewijzen dat in het algemeen de MR voor $y_1(z)$, $y_2(z)$ divergent zijn voor $z = \pm 1$. De functies $y_1(z)$, $y_2(z)$ zijn dus in het algemeen singulier in $z = \pm 1$.

Een uitzondering op dit algemene resultaat treedt op indien ν geheel, ≥ 0 is. We moeten dan onderscheid maken tussen de gevallen ν even resp. ν oneven.

a) ν even. Stel $\nu = 2n$, dan volgt voor $y_1(z)$,

$$y_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-n)_j (n+\frac{1}{2})_j}{(2j)!} (2z)^{2j} .$$

Nu is

$$(-n)_j = -n(-n+1) \dots (-n+j-1) = 0 \quad \text{als } j \geq n+1 .$$

Alle termen met $j \geq n+1$ zijn dus nul en er volgt,

$$y_1(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j (n+\frac{1}{2})_j}{(2j)!} (2z)^{2j} .$$

$y_1(z)$ is nu een polynoom in z van de graad 2n; uiteraard is dit polynoom analytisch in het gehele complexe z-vlak. We zullen later zien (hoofdstuk IV) dat $y_1(z) = \text{const.} P_{2n}(z)$ waarin $P_{2n}(z)$ het polynoom van Legendre van de graad 2n is. De functie $y_2(z)$ is voor ν even slechts analytisch voor $|z| < 1$.

b) ν oneven. Stel $\nu = 2n+1$, dan breekt de MR voor $y_2(z)$ af tot

$$y_2(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j (n+\frac{3}{2})_j}{(2j+1)!} 2^{2j} z^{2j+1} .$$

$y_2(z)$ is nu een polynoom in z van de graad $2n+1$. Voor dit polynoom geldt $y_2(z) = \text{const.} P_{2n+1}(z)$, waarin $P_{2n+1}(z)$ het polynoom van Legendre van de graad $(2n+1)$ is. Uiteraard is de functie $y_2(z)$ analytisch voor elke z, terwijl $y_1(z)$ analytisch is voor $|z| < 1$.

Conclusie. De DV van Legendre heeft twee oplossingen $y_1(z)$ en $y_2(z)$, welke in het algemeen analytisch zijn voor $|z| < 1$. In geval $\nu = n$, geheel, ≥ 0, zal één van deze oplossingen een polynoom zijn van de graad n, nl. het polynoom van Legendre $P_n(z)$. Uiteraard is dit polynoom analytisch voor elke z. We zullen deze conclusie nog gebruiken in § 5.3.

Opgave 1.2.1. Toon aan dat in geval ν niet geheel is, de MR voor $y_1(z)$, $y_2(z)$ divergent zijn in $z = \pm 1$.

Opgave 1.2.2. De DV van Hermite wordt gegeven door

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + 2\nu y = 0 .$$

Bepaal twee lineair onafhankelijke oplossingen van deze DV.
Laat zien dat in geval $\nu = n$, geheel, ≥ 0, één van deze oplossingen een polynoom is van de graad n. Noteer dit polynoom als $H_n(z)$, d.i. het n-de Hermite polynoom. Normeer $H_n(z)$ zodanig dat de coëfficiënt van z^n gelijk is aan 2^n.

1.3. Oplossing van de algemene DV van eerste orde door een machtreekstechniek

De algemene gedaante van een DV van de eerste orde is

$$(1.3.1) \qquad \frac{dy}{dz} = f(y,z)$$

waarin de variabelen y en z complex zijn.

Stelling. Zij de functie $f(y,z)$ een analytische functie van y en z voor $|y - y_0| < R$, $|z - z_0| < R$. Dan bestaat er één en slechts één functie $y = y(z)$ welke

1) voldoet aan de DV,
2) voldoet aan de beginvoorwaarde $y(z_0) = y_0$,
3) analytisch is in een omgeving van z_0.

Opmerking. De conditie 3) is zwakker gesteld dan in de overeenkomstige stelling uit § 1.2. Het zal blijken dat de functie $y = y(z)$ analytisch is voor $|z - z_0| < R_1$, waarbij in het algemeen $R_1 < R$ is.

Bewijs. Door transformatie kunnen we ervoor zorgen dat $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ is. Ontwikkel nu de functie $f(y,z)$ in een MR naar machten van y en z,

$$(1.3.2) \qquad f(y,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} y^j z^k .$$

Deze MR is absoluut convergent voor $|y| < R$, $|z| < R$. Voor de coëfficiënten c_{jk} geldt een generalisering van de ongelijkheid van Cauchy:
Zij $0 < r < R$, dan bestaat er een constante $M = M(r)$, zo dat

(1.3.3) $$|c_{jk}| \le \frac{M}{r^{j+k}} .$$

We proberen nu als oplossing de MR,

(1.3.4) $$y = y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n .$$

N.B. De term met n = 0 ontbreekt in deze MR vanwege de (getransformeerde) beginvoorwaarde y(0) = 0.
Formele substitutie van de MR (1.3.2), (1.3.4) in de DV (1.3.1) leidt tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}\left\{\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell z^\ell\right\}^j z^k =$$

$$= c_{00} + \{c_{10} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell z^\ell + c_{01} z\} +$$

$$+ \{c_{20}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell z^\ell\right)^2 + c_{11} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell z^\ell z + c_{02} z^2\} +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \{c_{n-1,0}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell z^\ell\right)^{n-1} + c_{n-2,1}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell z^\ell\right)^{n-2} z + \ldots +$$

$$+ c_{0,n-1} z^{n-1}\} + \ldots .$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van z^n $(n = 0,1,2,\ldots)$ leidt tot het volgende stelsel vergelijkingen voor de coëfficiënten a_n:

Coëff. van z^0 : $a_1 = c_{00}$,

Coëff. van z^1 : $2a_2 = c_{10}a_1 + c_{01}$,

Coëff. van z^2 : $3a_3 = c_{20}a_1^2 + c_{11}a_1 + c_{02} + c_{10}a_2$,

. . . .

Coëff. van z^{n-1} : $na_n = c_{n-1,0}a_1^{n-1} + c_{n-2,1}a_1^{n-2} + \ldots + c_{0,n-1} + \ldots +$

$$+ c_{10}a_{n-1} =: p_n(c_{jk},a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}) .$$

Hierin is $p_n(c_{jk},a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ een polynoom in c_{jk} $(j+k \le n-1)$, $a_1,a_2,\ldots,$ a_{n-1}.

Essentieel is dat in dit polynoom alleen maar plustekens voorkomen; het polynoom p_n is de som van een aantal termen.
Uit bovenstaande vergelijkingen zijn de coëfficiënten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ successievelijk te bepalen. De MR $y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ voldoet dan formeel aan de DV.

Te bewijzen is nu nog dat de genoemde MR absoluut convergent is in een omgeving van $z = 0$. Daartoe zullen we met behulp van de ongelijkheid van Cauchy (1.3.3) de coëfficiënten a_n als volgt afschatten,

$$|a_1| = |c_{00}| \le M ,$$

$$2|a_2| \le |c_{10}||a_1| + |c_{01}| \le \frac{M}{r}|a_1| + \frac{M}{r} ,$$

$$3|a_3| \le |c_{20}||a_1|^2 + |c_{11}||a_1| + |c_{02}| + |c_{10}||a_2| \le$$

$$\le \frac{M}{r^2}|a_1|^2 + \frac{M}{r^2}|a_1| + \frac{M}{r^2} + \frac{M}{r}|a_2| ,$$

. . . .

$$n|a_n| = |p_n(c_{jk}, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})| \le$$

$$\le p_n(|c_{jk}|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|) \le$$

$$\le p_n\left(\frac{M}{r^{j+k}}, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|\right) .$$

Bij de afleiding van de laatste ongelijkheid speelt de eigenschap, dat p_n de som is van een aantal termen, een wezenlijke rol.
We maken nu weer gebruik van de majorantenmethode. We voeren in een rij van coëfficiënten $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, als volgt gedefinieerd,

$$b_1 = M ,$$

$$2b_2 = \frac{M}{r} b_1 + \frac{M}{r} ,$$

(1.3.5) $$3b_3 = \frac{M}{r^2} b_1^2 + \frac{M}{r^2} b_1 + \frac{M}{r^2} + \frac{M}{r} b_2 ,$$

. . . .

$$nb_n = p_n\left(\frac{M}{r^{j+k}}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\right) .$$

Deze coëfficiënten zijn weer successievelijk te berekenen. Met volledige inductie laat zich aantonen dat $|a_n| \le b_n$ is (ga dit na!). De MR $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ is dus een majorant van de MR $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

We zullen nu de convergentie van de MR $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ onderzoeken. We merken daartoe op dat het stelsel vergelijkingen (1.3.5) voor de coëfficiënten b_n van dezelfde vorm is als dat voor de coëfficiënten a_n met vervanging van c_{jk} door $\frac{M}{r^{j+k}}$. De coëfficiënten c_{jk} komen voort uit de MR (1.3.2) voor $f(y,z)$. Vorm nu analoog een MR met coëfficiënten $\frac{M}{r^{j+k}}$ i.e.

$$g(y,z) := \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{r^{j+k}} y^j z^k = \frac{M}{(1-\frac{y}{r})(1-\frac{z}{r})}\ , \qquad |y| < r,\ |z| < r\ ,$$

en beschouw de DV

$$(1.3.6) \qquad \frac{dy}{dz} = g(y,z) = \frac{M}{(1-\frac{y}{r})(1-\frac{z}{r})}\ .$$

Indien we in (1.3.6) substitueren $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ dan vinden we voor de coëfficiënten b_n juist het stelsel vergelijkingen (1.3.5).

De MR $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ is dus een formele oplossing van de DV (1.3.6). Anderzijds is deze DV ook rechtstreeks op te lossen. Schrijf daartoe (1.3.6) als volgt,

$$(1-\frac{y}{r})dy = \frac{Mdz}{1-\frac{z}{r}}$$

dan is na integratie

$$y - \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{r} = -\ rM \log(1-\frac{z}{r}) + C\ .$$

Uit de beginvoorwaarde $y(0) = 0$ volgt voor de integratieconstante C, $C = 0$, zodat

$$y^2 - 2ry - 2r^2M \log(1-\frac{z}{r}) = 0\ ,$$

$$y = r[1 \pm \{1 + 2M \log(1-\frac{z}{r})\}^{\frac{1}{2}}]\ .$$

De voorwaarde $y(0) = 0$ vereist het minteken, zodat de oplossing luidt,

$$y = y^*(z) = r[1 - \{1 + 2M \log(1 - \tfrac{z}{r})\}^{\frac{1}{2}}] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \ .$$

De functie $y^*(z)$ is analytisch in de omgeving van $z = 0$. Deze omgeving strekt zich uit tot het dichtstbijliggende singuliere punt van $y^*(z)$. Dit laatste is het vertakkingspunt van de wortelvorm, waar geldt

$$1 + 2M \log(1 - \tfrac{z}{r}) = 0 \ , \quad z = r[1 - \exp(-\tfrac{1}{2M})] \ .$$

De MR $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ is dan absoluut convergent voor $|z| < r[1 - \exp(-\frac{1}{2M})]$. Ook de MR $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ zal dus absoluut convergent zijn voor $|z| < r[1 - \exp(-\frac{1}{2M})]$.
Nu was $0 < r < R$ en $M = M(r)$. Definieer nu $R_1 := \sup_{0<r<R} r[1 - \exp(-\frac{1}{2M(r)})]$, dan zal de MR $y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absoluut convergent zijn voor $|z| < R_1$. De functie $y(z)$ is dan analytisch voor $|z| < R_1$. Voorts mag de MR $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ binnen de cirkel $|z| < R_1$ termsgewijs worden gedifferentieerd. Dit betekent dat de functie $y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ niet alleen formele oplossing van de DV is, maar echt aan de DV voldoet.
Het bewijs van de eenduidigheid van de oplossing $y = y(z)$ laat zich op analoge wijze geven als bij de stelling uit § 1.2. □

Opmerking. Uit de definitie van R_1 volgt dat in het algemeen $R_1 < R$ is. De oplossing zal dus analytisch zijn binnen een cirkel met straal kleiner dan die van de cirkels waarbinnen $f(y,z)$ analytisch is. Dit wordt nog geïllustreerd door het volgende voorbeeld.

Voorbeeld. Zij gegeven de DV

$$\frac{dy}{dz} = 1 + y^2 \ , \qquad y(0) = 0 \ .$$

De oplossing van deze DV wordt gegeven door $y = \tan z$. Anderzijds is de DV op te lossen door een MR substitutie $y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Dan vinden we,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)^2 \ ,$$

$$a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + \ldots = 1 + a_1^2z^2 + 2a_1a_2z^3 + \ldots +$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van gelijke machten van z geeft,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \,, && \\
2a_2 &= 0 \,, && a_2 = 0 \\
3a_3 &= a_1^2 = 1 \,, && a_3 = \tfrac{1}{3} \,, \\
4a_4 &= 2a_1a_2 = 0 \,, && a_4 = 0 \,, \text{ enz.}
\end{aligned}$$

waarna volgt

$$y(z) = \tan z = z + \frac{1}{3} z^3 + \ldots \,.$$

De convergentiestraal van de MR is $\frac{\pi}{2}$ omdat tan z singulier is in $z = \pm \frac{\pi}{2}$. De oplossing $y(z)$ is dus analytisch voor $|z| < \frac{\pi}{2}$. Anderzijds is het rechterlid van de DV, i.e. $1 + y^2$, analytisch is het hele complexe y- en z-vlak.

Opmerking. De voorgaande stelling laat zich gemakkelijk uitbreiden tot het geval van een stelsel van n DV's van 1e orde:

$$\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dz} = f_1(y_1,y_2,\ldots,y_n,z) \,, \\
\dfrac{dy_2}{dz} = f_2(y_1,y_2,\ldots,y_n,z) \,, \\
\vdots \\
\dfrac{dy_n}{dz} = f_n(y_1,y_2,\ldots,y_n,z) \,,
\end{cases}$$

of in vectornotatie

$$\frac{d\underline{y}}{dz} = \underline{f}(\underline{y},z)$$

waarin $\underline{y}$, $\underline{f}$ vectorfuncties zijn met componenten y_i, f_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Als nu $f_1,f_2,\ldots,f_n$ analytisch zijn in de omgeving van een zeker beginpunt, dan is ook de oplossing $y_1(z),y_2(z),\ldots,y_n(z)$ analytisch in een omgeving van dat beginpunt. Voor de details zie Ince [2.1], chapter 12. Bedenken we dat een DV van de n-de orde te herleiden is tot een stelsel van n DV's van de 1e orde, dan is ook hier de uitgebreide stelling van toepassing: Indien bv. van een lineaire DV van n-de orde de coëfficiënten analytisch zijn, dan is ook de oplossing analytisch.

Voorbeeld. De lineaire DV van tweede orde

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\,\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0$$

is equivalent met het stelsel DV's

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dz} = y_2 \,, \\ \dfrac{dy_2}{dz} = -\,q(z)y_1 - p(z)y_2 \,. \end{cases}$$

Met behulp van de uitgebreide stelling volgt dan nog eens weer dat de oplossing van de lineaire DV van tweede orde analytisch is in de omgeving van een zeker punt, indien $p(z)$, $q(z)$ daar analytisch zijn.

Ook voor een stelsel partiële DV's van eerste of van hogere orde laat zich met behulp van machtreekstechnieken en majorantenmethode een analoge stelling als boven bewijzen. De stelling staat bekend onder de naam stelling van Cauchy-Kowalewski; voor formulering en bewijs zie Courant-Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Interscience, 1962, p.39-56.

1.4. Oplossing van de lineaire DV van tweede orde in de omgeving van een singulier punt

We beschouwen weer de lineaire DV,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\,\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0 \,. \tag{1.4.1}$$

Overeenkomstig de definitie uit § 1.1 is $z = z_0$ een singulier punt van de DV als $p(z)$ en/of $q(z)$ een pool heeft in $z = z_0$.
We maken nu onderscheid tussen reguliere singuliere punten en niet-reguliere singuliere punten.

Definitie. Het punt $z = z_0$ heet een regulier singulier punt van de DV, indien in $z = z_0$ de functie $p(z)$ een pool van hoogstens orde 1 en de functie $q(z)$ een pool van hoogstens orde 2 heeft, m.a.w. indien $(z - z_0)p(z)$ en $(z - z_0)^2q(z)$ analytisch zijn in $z = z_0$. Alle overige singuliere punten van de DV heten niet-reguliere singuliere punten.

We onderzoeken nu de oplossing van de DV in de omgeving van een regulier singulier punt $z = z_0$. Onderstel dat $z_0 = 0$ (door transformatie is dit steeds te realiseren), waarna we de DV als volgt schrijven,

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z^2 p(z) \frac{dy}{dz} + z^2 q(z) y = 0 \ . \tag{1.4.2}$$

Op grond van de definitie van regulier punt zijn nu $zp(z)$ en $z^2q(z)$ analytisch in $z = 0$, dus deze functies zijn in (convergente) MR te ontwikkelen:

$$zp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \ , \qquad z^2 q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \ . \tag{1.4.3}$$

Laten deze machtreeksen absoluut convergent zijn voor $|z| < R$.
Probeer nu als oplossing van de DV

$$y = y(z) = z^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda+n} \ , \tag{1.4.4}$$

waarbij de exponent λ en de coëfficiënten $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ te bepalen zijn. Zonder bezwaar kunnen we onderstellen, $a_0 \neq 0$. We gaan weer formeel te werk, d.w.z. we nemen aan dat de MR (1.4.4) absoluut convergent is en termsgewijs gedifferentieerd mag worden.
Substitutie van de MR (1.4.3), (1.4.4) in de DV (1.4.2) geeft,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) a_n z^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) a_n z^{\lambda+n} + {}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda+n} = 0 \ .$$

Aan bovenstaande vergelijking wordt voldaan door de coëfficiënten van opvolgende machten van z gelijk nul te stellen. Dit leidt tot het volgende stelsel vergelijkingen voor de coëfficiënten a_n:

Coëff. z^{λ} : $\lambda(\lambda - 1) a_0 + \lambda p_0 a_0 + q_0 a_0 = 0$,

Coëff. $z^{\lambda+1}$: $(\lambda + 1)\lambda a_1 + \{(\lambda + 1) p_0 a_1 + \lambda p_1 a_0\} + \{q_0 a_1 + q_1 a_0\} = 0$,

Coëff. $z^{\lambda+2}$: $(\lambda + 2)(\lambda + 1) a_2 + \{(\lambda + 2) p_0 a_2 + (\lambda + 1) p_1 a_1 + \lambda p_2 a_0\} +$
$+ \{q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0\} = 0$,

. . . .

Coëff. $z^{\lambda+n}$: $(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n + \{(\lambda+n)p_0a_n + (\lambda+n-1)p_1a_{n-1} + \ldots + \lambda p_na_0\} +$
$+ \{q_0a_n + q_1a_{n-1} + \ldots + q_na_0\} = 0$,

of $\quad [(\lambda+n)(\lambda+n-1) + (\lambda+n)p_0 + q_0]a_n + \sum_{j=1}^{n}(\lambda+n-j)p_ja_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} q_ja_{n-j} = 0$.

Deze vergelijkingen zijn ook als volgt te schrijven,

$$\{\lambda^2 + (p_0-1)\lambda + q_0\}a_0 = 0 ,$$

$$\{(\lambda+1)^2 + (p_0-1)(\lambda+1) + q_0\}a_1 + \{\lambda p_1 + q_1\}a_0 = 0 ,$$

$$\{(\lambda+2)^2 + (p_0-1)(\lambda+2) + q_0\}a_2 + \{(\lambda+1)p_1 + q_1\}a_1 + \{\lambda p_2 + q_2\}a_0 = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\{(\lambda+n)^2 + (p_0-1)(\lambda+n) + q_0\}a_n + \sum_{j=1}^{n}\{(\lambda+n-j)p_j + q_j\}a_{n-j} = 0 .$$

Voer nu in de functie $F(\lambda) := \{\lambda^2 + (p_0-1)\lambda + q_0\}$ dan gaan de vergelijkingen over in

$$(1.4.5)\quad \begin{cases} F(\lambda)a_0 = 0 , \\ F(\lambda+1)a_1 + \{\lambda p_1 + q_1\}a_0 = 0 , \\ F(\lambda+2)a_2 + \{(\lambda+1)p_1 + q_1\}a_1 + \{\lambda p_2 + q_2\}a_0 = 0 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(\lambda+n)a_n + \sum_{j=1}^{n}\{(\lambda+n-j)p_j + q_j\}a_{n-j} = 0 . \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking van het stelsel (1.4.5) volgt wegens $a_0 \neq 0$,

$$F(\lambda) = \lambda^2 + (p_0-1)\lambda + q_0 = 0 .$$

Deze kwadratische vergelijking noemt men de <u>indiciaalvergelijking</u>.
De wortels van deze vergelijking zijn λ_1, λ_2, waarbij we afspreken Re $\lambda_1 \geq$ Re λ_2. We hebben op deze wijze twee mogelijke waarden voor λ gevonden, nl. $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$. De coëfficiënt a_0 mag willekeurig worden gekozen; neem voorlopig $a_0 = 1$. Substitutie van $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1,2)$ in (1.4.5) leidt tot de verdere vergelijkingen

$$\begin{cases} F(\lambda_i + 1)a_1 + (\lambda_i p_1 + q_1)a_0 = 0 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(\lambda_i + n)a_n + \sum_{j=1}^{n} \{(\lambda_i + n - j)p_j + q_j\}a_{n-j} = 0 \ . \end{cases}$$

Uit de 1e vergelijking is a_1 op te lossen mits $F(\lambda_i + 1) \neq 0$ is, uit de n-de vergelijking is a_n op te lossen mits $F(\lambda_i + n) \neq 0$ is.
Uitgaande van $a_0 = 1$ zijn de coëfficiënten $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ dan successievelijk te bepalen. We vinden op deze wijze twee series coëfficiënten behorend bij λ_1 en λ_2:

(1.4.6)
$$\lambda = \lambda_1 \Rightarrow a_0 = 1, a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{opl.} \quad y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_1 + n}$$
$$\lambda = \lambda_2 \Rightarrow a_0^* = 1, a_1^*, a_2^*, a_3^*, \dots \quad \text{opl.} \quad y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* z^{\lambda_2 + n} \ .$$

N.B. De keuze $a_0 = 1$ is geen beperking. Kiezen we $a_0 = K$, dan worden alle coëfficiënten en dus ook $y_1(z)$, $y_2(z)$ met de factor K vermenigvuldigd.

We onderzoeken nu de voorwaarde $F(\lambda_i + n) \neq 0$ voor $i = 1,2$, $n = 1,2,3,\dots$.
Voer daartoe in de notatie $s = \lambda_1 - \lambda_2$, dan is Re $s \geq 0$.
We schrijven nu $F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ (λ_1 en λ_2 waren de wortels van $F(\lambda) = 0$) dan volgt

(1.4.7)
$$F(\lambda_1 + n) = n(n + \lambda_1 - \lambda_2) = n(n+s) \ ,$$
$$F(\lambda_2 + n) = n(n - \lambda_1 + \lambda_2) = n(n-s) \ .$$

Het is duidelijk dat $F(\lambda_1 + n) \neq 0$ is voor $n = 1,2,3,\dots$, zodat de constructie van de MR $y_1(z)$ steeds gelukt. $F(\lambda_2 + n)$ wordt nul als $s = N$ met N geheel, > 0. In dat geval kunnen er moeilijkheden optreden bij de constructie van de MR $y_2(z)$. Als $s = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, dan zijn de twee MR $y_1(z)$ en $y_2(z)$ identiek.

Conclusie.

1) Als $s = \lambda_1 - \lambda_2$ niet geheel is, dan bezit de DV twee formele oplossingen, $y = y_1(z)$, $y = y_2(z)$.
2) Als $s = \lambda_1 - \lambda_2$ geheel, ≥ 0 is, dan bezit de DV in elk geval één formele oplossing $y = y_1(z)$ behorend bij $\lambda = \lambda_1$. De berekening van de oplossing

$y = y_2(z)$ kan mislukken indien $s > 0$ is; indien $s = 0$ zijn de oplossingen $y = y_1(z)$, $y = y_2(z)$ identiek.

We beperken ons voorlopig tot het geval dat s niet geheel is. We zullen dan bewijzen dat de MR (1.4.6) voor $y_1(z)$, $y_2(z)$ absoluut convergent zijn voor $|z| < R$. Het is voldoende het bewijs te geven voor de MR voor $y_1(z)$,

$$y_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Overeenkomstig (1.4.5), (1.4.7) wordt de coëfficiënt a_n gegeven door de recurrente betrekking,

$$(1.4.8) \qquad n(n+s)a_n = -\sum_{j=1}^{n} \{(\lambda_1 + n - j)p_j + q_j\}a_{n-j} .$$

Zij nu m het kleinste gehele getal $> |s|$, dan is

$$|n(n+s)| \geq n(n - |s|) > 0 \qquad \text{voor } n \geq m .$$

Uit (1.4.8) volgt nu voor $n \geq m$,

$$(1.4.9) \qquad n(n-|s|)|a_n| \leq \left|\sum_{j=1}^{n} \{(\lambda_1 + n - j)p_j + q_j\}a_{n-j}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \{(|\lambda_1| + n - j)|p_j| + |q_j|\}|a_{n-j}| .$$

We passen nu de ongelijkheid van Cauchy toe: Zij $0 < r < R$ dan bestaat er een constante K, zo dat

$$|p_j| \leq \frac{K}{r^j}, \qquad |q_j| \leq \frac{K}{r^j} .$$

Substitueer dit in (1.4.9), dan is

$$n(n-|s|)|a_n| \leq K \sum_{j=1}^{n} (|\lambda_1| + n - j + 1) \frac{|a_{n-j}|}{r^j}, \qquad n \geq m .$$

We maken nu weer gebruik van de majorantenmethode. Construeer de rij van coefficiënten $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ volgens het voorschrift,

$$(1.4.10) \begin{cases} b_0 = |a_0|,\ b_1 = |a_1|,\ \ldots,\ b_{m-1} = |a_{m-1}| , \\ n(n-|s|)b_n = K \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (|\lambda_1| + n - j + 1) \frac{b_{n-j}}{r^j}, \qquad n \geq m . \end{cases}$$

Met volledige inductie laat zich dan bewijzen dat $|a_n| \le b_n$ is; de MR $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ is dus een majorant van de te onderzoeken MR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

We onderzoeken nu de convergentie van de MR $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Ga daartoe uit van de recurrente betrekking (1.4.10) voor b_n die we als volgt schrijven,

$$n(n-|s|)b_n = K \sum_{\ell=0}^{n-1} (|\lambda_1| + \ell + 1) \frac{b_\ell}{r^{n-\ell}} .$$

Vervang hierin n door n + 1,

$$(n+1)(n+1-|s|)b_{n+1} = K \sum_{\ell=0}^{n} (|\lambda_1| + \ell + 1) \frac{b_\ell}{r^{n+1-\ell}} =$$

$$= K \sum_{\ell=0}^{n-1} (|\lambda_1| + \ell + 1) \frac{b_\ell}{r^{n+1-\ell}} + K(|\lambda_1| + n + 1) \frac{b_n}{r} =$$

$$= n(n-|s|) \frac{b_n}{r} + K(|\lambda_1| + n + 1) \frac{b_n}{r} .$$

Daaruit volgt,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n-|s|)}{(n+1)(n+1-|s|)} \frac{1}{r} + \frac{K(|\lambda_1| + n + 1)}{(n+1)(n+1-|s|)r} ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{r} .$$

De MR $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ heeft volgens het criterium van d'Alembert een convergentiestraal r en is dus absoluut convergent voor $|z| < r$. Ook de MR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is dan absoluut convergent voor $|z| < r$ (voor elke r met $0 < r < R$) en daarmee absoluut convergent voor $|z| < R$. *De som van de MR is een analytische functie voor* $|z| < R$; voorts mag de MR voor $|z| < R$ termsgewijs gedifferentieerd worden. Dit betekent dat de functie $y_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ voor $|z| < R$ inderdaad een oplossing is van de DV. Op analoge wijze kan aangetoond worden dat ook de functie $y_2(z) = z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* z^n$ voor $|z| < R$ een oplossing is van de DV.

Beide oplossingen $y_1(z)$, $y_2(z)$ zullen in het algemeen meerwaardige functies van z zijn binnen de cirkel $|z| < R$. Het punt $z = 0$ is het eventuele vertakkingspunt van de functies.

Men kan eenvoudig aantonen dat de oplossingen $y_1(z)$, $y_2(z)$ lineair onafhankelijk zijn. De functies $y_1(z)$, $y_2(z)$ vormen dan een fundamentaalsysteem van oplossingen; de algemene oplossing van de DV is te schrijven als een lineaire combinatie van $y_1(z)$, $y_2(z)$.

Opgave 1.4.1. Bepaal twee lineair onafhankelijke oplossingen van de DV

$$z(z-1)\frac{d^2y}{dz^2} + 3z\frac{dy}{dz} + y = 0$$

in de omgeving van $z = 1$. Sommeer de gevonden MR (naar machten van $z - 1$). Bepaal evenzo twee lineair onafhankelijke oplossingen van de DV in de omgeving van $z = 0$; maak zonodig gebruik van de theorie uit § 1.5. Vergelijk deze oplossingen met die in de omgeving van $z = 1$.

Opgave 1.4.2. De DV van Laguerre wordt gegeven door

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (1-z)\frac{dy}{dz} + ny = 0 ,$$

waarbij n geheel, ≥ 0 is.

Toon aan dat deze DV een polynoom-oplossing bezit. Noteer dit polynoom als $L_n(z)$, d.i. het n-de Laguerre polynoom. Normeer $L_n(z)$ zodanig dat $L_n(0) = 1$.

1.5. Verschil s van de wortels der indiciaalvergelijking is geheel, ≥ 0

We beschouwen nu het geval dat $s = \lambda_1 - \lambda_2$ geheel, ≥ 0 is. De constructie van de oplossing $y_1(z) = z^{\lambda_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ behorend bij $\lambda = \lambda_1$, gaat ongewijzigd door (zie § 1.4). Vervolgens wordt een tweede oplossing van de DV gezocht van de gedaante

$$y(z) = y_1(z)w(z) .$$

Substitutie van $y(z)$ in de DV geeft,

$$\left\{\frac{d^2y_1}{dz^2}w + 2\frac{dy_1}{dz}\frac{dw}{dz} + y_1\frac{d^2w}{dz^2}\right\} + p(z)\left\{\frac{dy_1}{dz}w + y_1\frac{dw}{dz}\right\} + q(z)y_1w = 0 . \tag{1.5.1}$$

Bedenk dat $y_1(z)$ oplossing is van de DV dan is (1.5.1) te vereenvoudigen tot

$$y_1 \frac{d^2w}{dz^2} + \left\{2 \frac{dy_1}{dz} + p(z)y_1\right\} \frac{dw}{dz} = 0 ,$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} \Big/ \frac{dw}{dz} = - \frac{2}{y_1} \frac{dy_1}{dz} - p(z) .$$

Integratie van de laatste vergelijking geeft

$$\log \frac{dw}{dz} = - 2 \log y_1 - \int p(z)dz + \log B ,$$

$$\frac{dw}{dz} = B \frac{\exp[-\int p(z)dz]}{y_1^2} ,$$

$$w = B \int \frac{\exp[-\int p(z)dz]}{y_1^2} dz + A ,$$

waarin A en B willekeurige constanten zijn.
Voor de oplossing van de DV vinden we uiteindelijk

(1.5.2) $$y(z) = Ay_1(z) + By_1(z) \int \frac{\exp[-\int p(z)dz]}{y_1^2} dz .$$

De betrekking (1.5.2) is te beschouwen als de algemene oplossing van de DV; ze bevat twee willekeurige constanten, A, B.
Schrijf deze algemene oplossing als $y(z) = Ay_1(z) + By_2(z)$, dan wordt de tweede oplossing $y_2(z)$ gegeven door

(1.5.3) $$y_2(z) := y_1(z) \int \frac{\exp[-\int p(z)dz]}{y_1^2(z)} dz .$$

We willen deze oplossing nader onderzoeken en ontwikkelen daartoe $y_2(z)$ in een MR naar machten van z. Nu gelden voor $|z| < R$ de volgende MR-ontwikkelingen,

$$p(z) = \frac{p_0}{z} + p_1 + p_2 z + p_3 z^2 + \dots , \qquad \text{(zie (1.4.3))}$$

$$\int p(z)dz = p_0 \log z + p_1 z + \frac{p_2}{2} z^2 + \frac{p_3}{3} z^3 + \dots ,$$

$$\exp[-\int p(z)dz] = \exp[-\{p_0 \log z + p_1 z + \frac{p_2}{2} z^2 + \ldots\}] =$$

$$= z^{-p_0} \exp[-p_1 z - \frac{p_2}{2} z^2 - \ldots] ,$$

$$y_1^2(z) = z^{2\lambda_1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right\}^2 , \quad \text{(zie (1.4.6)).}$$

Met behulp van deze ontwikkelingen vinden we,

$$\frac{\exp[-\int p(z)dz]}{y_1^2(z)} = z^{-p_0-2\lambda_1} g(z) ,$$

waarin $g(z)$ een korte schrijfwijze is voor

$$g(z) := \frac{\exp[-p_1 z - \frac{p_2}{2} z^2 - \ldots]}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2} .$$

Merk op dat $g(z)$ analytisch is in een omgeving van $z = 0$, zodat $g(z)$ te ontwikkelen is in een MR,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n ,$$

welke absoluut convergent is in een omgeving van $z = 0$. De coëfficiënten van deze MR zijn in principe uit te drukken in de coëfficiënten p_n, a_n; zo is bv. $g_0 = 1/a_0^2 \neq 0$.

Uit de indiciaalvergelijking volgt nog dat

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -p_0 + 1 , \quad -p_0 - 2\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 - 1 = -s - 1 .$$

De tweede oplossing $y_2(z)$ laat zich dan als volgt voorstellen,

$$(1.5.4) \quad y_2(z) = y_1(z)\int z^{-s-1} g(z)dz .$$

We onderscheiden nu twee gevallen:

1) $\underline{s = 0}$, $\underline{\lambda_1 = \lambda_2}$. Dan volgt uit (1.5.4),

$$y_2(z) = y_1(z)\int z^{-1}g(z)dz$$

$$= y_1(z)\int z^{-1}\left\{g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n\right\}dz$$

$$= g_0 y_1(z)\log z + y_1(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n}z^n$$

$$= g_0 y_1(z)\log z + z^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n}z^n$$

oftewel

$$y_2(z) = g_0 y_1(z)\log z + z^{\lambda_1+1}\sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}z^n \tag{1.5.5}$$

waarin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n}z^n = \sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n = z\sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}z^n$$

gesteld is. De laatste MR zal absoluut convergent zijn in een omgeving van $z = 0$.

Aangezien $g_0 \neq 0$ is zal $y_2(z)$ een logarithmische singulariteit bezitten in $z = 0$.

2) s geheel, > 0. Dan volgt uit (1.5.4),

$$y_2(z) = y_1(z)\int z^{-s-1}\left\{g_s z^s + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq s}}^{\infty} g_n z^n\right\}dz$$

$$= y_1(z)\int\left\{g_s z^{-1} + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq s}}^{\infty} g_n z^{n-s-1}\right\}dz$$

$$= y_1(z)\left\{g_s\log z + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq s}}^{\infty}\frac{g_n}{n-s}z^{n-s}\right\}.$$

Deze uitkomst is nog te herleiden tot

$$y_2(z) = g_s y_1(z)\log z + z^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{\substack{n=0\\ n\neq s}}^{\infty}\frac{g_n}{n-s}z^{n-s} =$$

$$= g_s y_1(z) \log z + z^{\lambda_1 - s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{g_n}{n-s} z^n$$

oftewel, wegens $\lambda_1 - s = \lambda_2$,

$$(1.5.6) \qquad y_2(z) = g_s y_1(z) \log z + z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} k_n^* z^n$$

waarin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{g_n}{n-s} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^* z^n$$

gesteld is. De laatste MR is absoluut convergent in een omgeving van $z = 0$. Indien nu $g_s \neq 0$ is dan bezit de oplossing $y_2(z)$ een <u>logarithmische singulariteit in $z = 0$.</u> Is toevallig <u>$g_s = 0$</u> dan vervalt de logarithmische term en blijft alleen een MR-ontwikkeling over welke absoluut convergent is in een omgeving van $z = 0$. De oplossing $y_2(z)$ is dan van dezelfde gedaante als de tweede oplossing $y_2(z)$ afgeleid in (1.4.6) voor het geval s niet geheel.

Bij concrete voorbeelden kunnen we, in het geval dat s geheel, ≥ 0 is, eventueel uitgaan van de voorstelling (1.5.5) of (1.5.6) voor de tweede oplossing $y_2(z)$. Substitutie in de DV leidt dan tot een recurrente betrekking voor de coëfficiënten k_n resp. k_n^*, waaruit deze successievelijk zijn te bepalen.

<u>Opgave 1.5.1.</u> Onderzoek de tweede oplossing van de DV van Laguerre ingevoerd in opgave 1.4.2.

1.6. <u>Het punt $z = \infty$</u>

In de functietheorie wordt het complexe z-vlak aangevuld met één punt $z = \infty$ (Ackermans-Van Lint [1.1], p.251,449). We zullen nu de definities van gewoon punt en (regulier) singulier punt van de lineaire DV van tweede orde,

$$(1.6.1) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0 \ ,$$

uitbreiden tot het punt $z = \infty$.
Stel daartoe $z = 1/\zeta$, dan gaat de DV (1.6.1) na enig rekenwerk over in

$$(1.6.2) \qquad \frac{d^2y}{d\zeta^2} + \left\{\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}\,p(\tfrac{1}{\zeta})\right\}\frac{dy}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta^4}\,q(\tfrac{1}{\zeta})y = 0 \ .$$

Definitie. Het punt $z = \infty$ heet een gewoon punt resp. (regulier) singulier punt van de DV (1.6.1), indien het punt $\zeta = 0$ een gewoon punt resp. (regulier) singulier punt van de DV (1.6.2) is.

We kunnen deze definitie nog als volgt uitwerken:

1) Het punt $z = \infty$ zal een gewoon punt zijn van de DV (1.6.1) indien de functies $\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}\,p(\frac{1}{\zeta})$ en $\frac{1}{\zeta^4}\,q(\frac{1}{\zeta})$ analytisch zijn in $\zeta = 0$, oftewel, indien de functies $2z - z^2p(z)$ en $z^4q(z)$ analytisch zijn in $z = \infty$.
   In alle overige gevallen is het punt $z = \infty$ een singulier punt van de DV.
2) Het punt $z = \infty$ zal een regulier singulier punt zijn van de DV (1.6.1) indien de functie $\left[\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}\,p(\frac{1}{\zeta})\right]$ een pool van hoogstens orde 1 en de functie $\frac{1}{\zeta^4}\,q(\frac{1}{\zeta})$ een pool van hoogstens orde 2 heeft in $\zeta = 0$, oftwel, indien de functies $\zeta\left[\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}\,p(\frac{1}{\zeta})\right]$ en $\zeta^2\,\frac{1}{\zeta^4}\,q(\frac{1}{\zeta})$ analytisch zijn in $\zeta = 0$. De laatste voorwaarde is ook gelijkwaardig met de eis dat de functies $zp(z)$ en $z^2q(z)$ analytisch zijn in $z = \infty$.

Opgave 1.6.1. Voor de DV van Legendre

$$(1.6.3) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{2z}{1-z^2}\frac{dy}{dz} + \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2}\,y = 0$$

is het punt $z = \infty$ een regulier singulier punt; verifieer dit.

Voor de DV (1.6.1) kunnen we vervolgens met de machtreekstechniek een oplossing bepalen in een omgeving van het punt $z = \infty$, d.i. in een gebied $|z| > R$. Deze oplossing kan in eerste instantie worden verkregen door de DV (1.6.2) op te lossen in een omgeving van $\zeta = 0$ via de MR-substitutie

$$(1.6.4) \qquad y(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n \quad \text{resp.} \quad y(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^{\lambda+n}$$

corresponderend met het geval dat $\zeta = 0$ een gewoon punt resp. regulier singulier punt van de DV (1.6.2) is. In de aldus verkregen oplossing (1.6.4) moet dan $\zeta = \frac{1}{z}$ gesteld worden. Een snellere manier is om direct in de DV (1.6.1) een MR van de gedaante

$$(1.6.5)\qquad y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \text{resp.} \quad y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-\lambda-n}$$

te substitueren en vervolgens de coëfficiënten a_n en de exponent λ op de bekende wijze te bepalen.

1.7. Slotopmerkingen

1. Zij het punt $z = z_0$ een niet-regulier singulier punt van de lineaire DV

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0 .$$

Los deze DV op met de machtreekstechniek en substitueer

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{\lambda+n} .$$

Men kan dan bewijzen dat de indiciaalvergelijking voor de exponent λ hoogstens van de graad 1 is. De DV bezit dan ook hoogstens één analytische oplossing in de omgeving van $z = z_0$. Voor een algemeen onderzoek van dergelijke oplossingen zie bv. Ince [2.1], chapter 17. Men kan nu de reguliere singuliere punten karakteriseren als die singuliere punten waarvoor de bijbehorende indiciaalvergelijking van de graad 2 is.

2. De voorgaande theorie voor de lineaire DV van tweede orde laat zich uitbreiden tot het geval van de lineaire DV van n-de orde,

$$(1.7.1)\qquad \frac{d^ny}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(z)\frac{dy}{dz} + p_n(z)y = 0 .$$

Het punt $z = z_0$ heet een gewoon punt van (1.7.1) indien $p_k(z)$ $(k = 1,2,\dots,n)$ analytisch is in $z = z_0$. Het punt $z = z_0$ heet een regulier singulier punt van de DV (1.7.1) indien $p_k(z)$ $(k = 1,2,\dots,n)$ in $z = z_0$ een pool heeft van hoogstens de orde k, oftewel, indien $(z - z_0)^k p_k(z)$ analytisch is in $z = z_0$. Oplossingen in de omgeving van een gewoon punt resp. een regulier punt zijn weer af te leiden met de machtreekstechniek. In het geval van een regulier singulier punt vinden we dan weer een bijbehorende indiciaalvergelijking, welke nu van de graad n is. Met de n wortels van deze vergelijking corresponderen dan in het algemeen n lineair onafhankelijke oplossingen van de DV (1.7.1). Speciale aandacht moet weer besteed worden aan het geval dat één of meerdere paren wortels der indiciaalvergelijking een geheel verschil bezitten. Voor de details, zie Ince [2.1], chapters 15 and 16.

Hoofdstuk II. Gamma functie en verwante functies

Ten behoeve van later gebruik wordt in dit hoofdstuk een samenvatting gegeven van de belangrijkste eigenschappen van de Γ-functie, B-functie en ψ-functie. Voor een uitvoeriger behandeling zij verwezen naar Voortgezette Functietheorie [1.2], Sectie 6.6, Rainville [1.9], chapter 2, Whittaker-Watson [1.3], chapter 12.

We definiëren de Γ-functie door de Eulerse integraal van de tweede soort (1729),

$$(2.1) \qquad \Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \,.$$

Deze integraal is convergent voor Re $z > 0$; $\Gamma(z)$ is daarmee een analytische functie van z voor Re $z > 0$.
Met behulp van partiële integratie is eenvoudig af te leiden:

Eigenschap 1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, Re $z > 0$.

Herhaalde toepassing van deze eigenschap voert tot

Eigenschap 2. $\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\ldots z\Gamma(z) = (z)_n\Gamma(z)$,
voor Re $z > 0$, n geheel, ≥ 0.

Uitgaande van $\Gamma(1) = 1$ volgt dan

Eigenschap 3. $\Gamma(n+1) = n!$, n geheel, ≥ 0.

De functie $\Gamma(z)$ laat zich analytisch voortzetten in het linkerhalfvlak Re $z \leq 0$ als volgt. Zij $-n <$ Re $z \leq -n+1$, $z \neq -n+1$, met n geheel positief, dan definiëren we

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \,.$$

Aldus voortgezet is $\Gamma(z)$ een analytische functie van z in het gehele complexe z-vlak met uitzondering van de polen van eerste orde

$$z = 0,-1,-2,\ldots,-n,\ldots \,.$$

Het residu van $\Gamma(z)$ in de pool $z = -n$ wordt gegeven door

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} .$$

We vermelden voorts nog:

Eigenschap 4. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$.

Gevolg. (i) $\Gamma(z)$ heeft geen nulpunten.
(ii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Eigenschap 5 (verdubbelingsformule van Legendre).

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) .$$

Voor het bewijs van deze eigenschap zij verwezen naar de geciteerde literatuur.

Opgave 2.1. Druk de volgende integralen uit in termen van de Γ-functie:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-at^p)t^{z-1}dt$, $a > 0$, $p > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_1^\infty (\log x)^p x^{-q} dx$, $p > -1$, $q > 1$;

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$, $0 < p < 2$; $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx$, $0 < p < 1$.

De B-functie wordt gedefinieerd door de Eulerse integraal van de eerste soort (1772),

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx , \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0 .$$

Het verband tussen B- en Γ-functie wordt uitgedrukt door

Eigenschap 6. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Opgave 2.2. Schrijf de B-functie als een convolutie,

$$B(p,q)t^{p+q-1} = \int_0^t \tau^{p-1}(t-\tau)^{q-1}d\tau = t^{p-1} * t^{q-1} .$$

Leid vervolgens eigenschap 6 af met behulp van Laplace transformatie.

Opgave 2.3. Druk de volgende integralen uit in termen van de B-functie:

(i) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx$, $\mathrm{Re}\ p > 0$, $\mathrm{Re}\ q > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^p(\cos\varphi)^q d\varphi$, $p > -1$, $q > -1$;

(iii) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha(1-x^\beta)^\gamma dx$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $\gamma > -1$;

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy$, $\mathrm{Re}\ p > 0$, $\mathrm{Re}\ q > 0$.

Opgave 2.4. Toon aan dat

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y}\,dy = B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) , \quad 0 < p < 1 .$$

Bereken vervolgens de integraal met contour-integratie en leid aldus eigenschap 4 af.

Opgave 2.5. Druk de integraal

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{p-1}dx , \quad \mathrm{Re}\ p > 0 ,$$

op twee manieren uit in termen van B-functies en leid aldus eigenschap 5 af.

De functie $\psi(z)$ is de logarithmische afgeleide van de Γ-functie, i.e.

$$\psi(z) := \frac{d}{dz}[\log\Gamma(z)] = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} .$$

Men kan bewijzen (zie geciteerde literatuur) dat

$$\psi(1) = -\gamma$$

waarin γ de constante van Euler is, gedefinieerd door

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n] = 0.577215\ldots .$$

Uitgaande van de eigenschappen 1-5 voor de Γ-functie volgt voor $\psi(z)$:

Eigenschap 7. (i) $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$;

(ii) $\psi(z+n) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{1}{z+n-1}$, n geheel, ≥ 0;

(iii) $\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, n geheel, ≥ 0;

(iv) $\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \cot \pi z$;

(v) $\psi(2z) = \frac{1}{2}\psi(z) + \frac{1}{2}\psi(z+\frac{1}{2}) + \log 2$ (verdubbelingsformule).

Opgave 2.6. Verifieer de eigenschappen 7.

Opgave 2.7. Toon aan dat $\psi(z)$ analytisch is in het gehele complexe z-vlak met uitzondering van de enkelvoudige polen $z = 0,-1,-2,\ldots,-n,\ldots$. Bepaal het residu van $\psi(z)$ in de pool $z = -n$.

Opgave 2.8. Druk de integraal

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \log t \, dt$$

uit in termen van de ψ-functie en werk de uitkomst nader uit.

Het gedrag van $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ voor grote waarden van $|z|$ wordt beschreven door de zgn. asymptotische ontwikkeling van deze functies:

Eigenschap 8.

$$\log \Gamma(z) \sim (z-\tfrac{1}{2}) \log z - z + \tfrac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} +$$

$$+ \frac{1}{1260z^5} - \ldots \quad \text{(reeks van Stirling)},$$

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} [1 + O(\tfrac{1}{z})] \quad \text{(formule van Stirling)},$$

$$n! = e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\, [1 + O(\tfrac{1}{n})] ,$$

$$\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + O(\frac{1}{z^2}) ,$$

geldig voor $|z| \to \infty$, $|\arg z| \le \pi - \delta$, $\delta > 0$ resp. $n \to \infty$, n geheel.

Voor het bewijs van deze resultaten wordt verwezen naar de geciteerde literatuur. De asymptotische ontwikkelingen uit eigenschap 8 zijn tevens te gebruiken als benaderingsformules ten behoeve van de numerieke berekening van $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ voor grote waarden van $|z|$.

Opgave 2.9. Leid af de asymptotische formule

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}[1 + O(\tfrac{1}{z})] , \qquad |z| \to \infty, \ |\arg z| \le \pi - \delta, \ \delta > 0 .$$

Opgave 2.10. Toon aan dat

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) .$$

Opgave 2.11. Druk de som van de volgende reeksen uit in termen van de ψ-functie:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} , \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} .$$

Opgave 2.12. Toon aan dat

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} .$$

Hoofdstuk III. Besselfuncties

3.1. Besselfuncties van de eerste soort

De Besselfuncties vormen een belangrijke klasse van speciale functies met vele toepassingen in de mathematische fysica. We zullen hier de Besselfuncties invoeren als oplossingen van de DV van Bessel welke als volgt luidt,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0 \ . \tag{3.1.1}$$

Het punt $z = 0$ is een regulier singulier punt van de DV; alle overige punten van het complexe z-vlak zijn gewone punten.
We onderzoeken nu de (twee) oplossingen van de DV in de omgeving van $z = 0$. Schrijf daartoe de DV als volgt,

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2)y = 0$$

en substitueer hierin de MR,

$$y = y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda+n} \ .$$

Dan volgt,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n z^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)a_n z^{\lambda+n} + (z^2-\nu^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda+n} = 0 \ ,$$

oftewel

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(\lambda+n)^2 - \nu^2]a_n z^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda+n+2} = 0 \ .$$

We stellen de coëfficiënten van opvolgende machten van z gelijk nul, dan ontstaat er het stelsel vergelijkingen:

$$
(3.1.2)\quad
\begin{aligned}
&\text{Coëff. van } z^{\lambda} &&: (\lambda^2-\nu^2)a_0 = 0\ ,\\
&\text{Coëff. van } z^{\lambda+1} &&: [(\lambda+1)^2-\nu^2]a_1 = 0\ ,\\
&\text{Coëff. van } z^{\lambda+2} &&: [(\lambda+2)^2-\nu^2]a_2 + a_0 = 0\ ,\\
&\text{Coëff. van } z^{\lambda+3} &&: [(\lambda+3)^2-\nu^2]a_3 + a_1 = 0\ ,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\text{Coëff. van } z^{\lambda+n} &&: [(\lambda+n)^2-\nu^2]a_n + a_{n-2} = 0\ .
\end{aligned}
$$

De eerste vergelijking voert tot de <u>indiciaalvergelijking</u>

$$\lambda^2 - \nu^2 = 0\ ,$$

met als wortels

$$\lambda_1 = \nu\ ,\quad \lambda_2 = -\nu\ ,$$

aangenomen dat Re $\nu \geq 0$ is.
Het <u>verschil</u> s van de beide wortels is dan

$$s = \lambda_1 - \lambda_2 = 2\nu\ .$$

We nemen voorlopig aan dat $s = 2\nu$ <u>niet geheel</u> is.
Uit de tweede der vergelijkingen (3.1.2) volgt dat $a_1 = 0$, omdat $(\lambda+1)^2 - \nu^2 \neq 0$ is voor $\lambda = \pm\nu$.
Evenzo volgt uit de derde en vierde der vergelijkingen (3.1.2),

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\lambda+2+\nu)(\lambda+2-\nu)}\ ,\quad a_3 = -\frac{a_1}{(\lambda+3)^2-\nu^2} = 0\ ,$$

en uit de $(n+1)$-de vergelijking

$$(3.1.3)\qquad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(\lambda+n+\nu)(\lambda+n-\nu)}\ ,\qquad n \geq 2\ .$$

Met behulp van (3.1.3) is a_n uit te drukken in a_{n-2}, a_{n-2} in a_{n-4} enz.
Voor n <u>oneven</u> is a_n uiteindelijk uit te drukken in a_1. Wegens $a_1 = 0$ zal daarom $a_n = 0$ zijn voor elke oneven n.
Voor n <u>even</u>, zeg $n = 2m$, is a_{2m} uit te drukken in a_0,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(\lambda+2m+\nu)(\lambda+2m-\nu)} =$$

$$= (-1)^m \frac{a_0}{(\lambda+2m+\nu)(\lambda+2m-2+\nu)\dots(\lambda+2+\nu)(\lambda+2m-\nu)(\lambda+2m-2-\nu)\dots(\lambda+2-\nu)}\ .$$

Substitueer nu $\lambda = \pm\nu$:

1°. $\lambda = +\nu$. Dan volgt,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+2\nu)(2m+2\nu-2)\ \dots\ (2\nu+2)(2m)(2m-2)\ \dots\ 2} =$$

$$= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+\nu)(m+\nu-1)\ \dots\ (\nu+1)m(m-1)\ \dots\ 1} =$$

$$= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(\nu+1)_m\ m!} .$$

De oplossing van de DV van Bessel wordt in dit geval,

$$y_1(z) = z^\nu \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} z^{2m} = a_0 z^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(\nu+1)_m\ m!} (\tfrac{z}{2})^{2m} .$$

De constante a_0 is nog willekeurig. We nemen hiervoor

$$a_0 = (\tfrac{1}{2})^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} .$$

Hiermee wordt de oplossing

$$y_1(z) = (\tfrac{z}{2})^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+1)(\nu+1)_m\ m!} (\tfrac{z}{2})^{2m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+m+1)m!} (\tfrac{z}{2})^{\nu+2m} .$$

We definiëren nu de <u>Besselfunctie</u> van de <u>eerste</u> <u>soort</u> van <u>orde</u> ν, $J_\nu(z)$, als volgt:

$$J_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)} (\tfrac{z}{2})^{\nu+2m} . \tag{3.1.4}$$

2°. $\lambda = -\nu$. Dan volgt analoog

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0^*}{2^{2m}\ m!(-\nu+1)_m} .$$

Voor de tweede oplossing van de DV van Bessel vinden we dan

$$y_2(z) = z^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} z^{2m} = a_0^* z^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(-\nu+1)_m} (\tfrac{z}{2})^{2m} .$$

Voor de constante a_0^* nemen we

$$a_0^* = (\tfrac{1}{2})^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} ,$$

dan volgt analoog

$$y_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-\nu+m+1)} (\tfrac{z}{2})^{-\nu+2m} = J_{-\nu}(z) .$$

We hebben hiermee voor het geval 2ν niet geheel, twee oplossingen van de DV van Bessel afgeleid, namelijk $J_\nu(z)$ en $J_{-\nu}(z)$. In § 3.2 wordt bewezen dat voor ν niet geheel, $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ lineair onafhankelijk zijn en dus een fundamentaalsysteem van oplossingen vormen. De algemene oplossing van de DV van Bessel wordt dan gegeven door

$$y = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z)$$

waarin A, B willekeurige constanten zijn.

We zullen nu terugkomen op het geval 2ν geheel, ≥ 0. Er doen zich dan twee mogelijkheden voor, nl. $\nu = n$ (n geheel, ≥ 0) of $\nu = \ell + \frac{1}{2}$ (ℓ geheel, ≥ 0).

1°. $\nu = n$. De oplossing $J_n(z)$ behorende bij de wortel $\lambda_1 = n$ van de indiciaalvergelijking blijft van kracht. Voor gehele n is $J_n(z)$ als volgt te schrijven,

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!} (\tfrac{z}{2})^{n+2m} .$$

De constructie van de tweede oplossing behorend bij de wortel $\lambda_2 = -n$ van de indiciaalvergelijking mislukt in dit geval. Ga daartoe uit van het stelsel vergelijkingen (3.1.2) als volgt geschreven,

$$\begin{cases} (\lambda+\nu)(\lambda-\nu)a_0 = 0 , \\ (\lambda+\nu+1)(\lambda-\nu+1)a_1 = 0 , \\ (\lambda+\nu+p)(\lambda-\nu+p)a_p + a_{p-2} = 0 , \quad p \geq 2 . \end{cases}$$

Substitueer hierin $\nu = n$, $\lambda = \lambda_2 = -n$, dan is aan de eerste vergelijking identiek voldaan en a_0 is willekeurig te kiezen, neem $a_0 \neq 0$.
De overige vergelijkingen gaan over in

$$\begin{cases} (-2n+1)a_1 = 0 \ , \\ p(-2n+p)a_p + a_{p-2} = 0 \ , \quad p \geq 2 \ . \end{cases}$$

Schrijf de laatste vergelijking uit voor even p dan zijn de coëfficiënten $a_2, a_4, \ldots, a_{2n-2}$ successievelijk te bepalen, uitgedrukt in a_0. De genoemde coëfficiënten zijn ongelijk nul. Evenwel de vergelijking met $p = 2n$, i.e.

$$2n \cdot 0 \cdot a_{2n} + a_{2n-2} = 0$$

is dan strijdig waarna de verdere constructie mislukt.
We onderzoeken nog de Besselfunctie $J_{-n}(z)$ gegeven door

$$J_{-n}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} .$$

De factor $\Gamma(-n+m+1)$ heeft een pool in $m = 0,1,\ldots,n-1$. Daaruit volgt

$$\frac{1}{\Gamma(-n+m+1)} = \begin{cases} 0 & , \quad m = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ \dfrac{1}{(m-n)!} & , \quad m = n,n+1,\ldots \ , \end{cases}$$

zodat

$$J_{-n}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} .$$

Vervang nu m door $m+n$, dan is

$$(3.1.5) \qquad J_{-n}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} = (-1)^n \, J_n(z) \ .$$

Voor n geheel zijn dus beide functies $J_n(z)$ en $J_{-n}(z)$ oplossingen van de DV van Bessel, maar deze oplossingen zijn <u>lineair</u> <u>afhankelijk</u>. In § 3.4 zullen we langs een andere weg een tweede oplossing van de DV van Bessel afleiden, welke lineair onafhankelijk is van $J_n(z)$.

2°. <u>$\nu = \ell + \frac{1}{2}$</u>. De constructie van de oplossing $J_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$ behorend bij de wortel $\lambda_1 = \ell + \frac{1}{2}$ van de indiciaalvergelijking blijft gewoon doorgaan, d.i. laat zich uitvoeren op de hiervoor aangegeven wijze. We onderzoeken nu de tweede oplossing behorend bij de wortel $\lambda_2 = -\ell - \frac{1}{2}$ van de indiciaalvergelijking. Het zal blijken dat voor dit speciale geval de constructie van de tweede oplossing via de machtreekstechniek <u>wel</u> gelukt, ondanks het feit dat $s = 2\nu$ geheel, ≥ 0 is.

Ga daartoe uit van de vergelijkingen (3.1.2) die we als volgt schrijven,

$$\begin{cases}(\lambda+\nu)(\lambda-\nu)a_0 = 0\ , \\ (\lambda+\nu+1)(\lambda-\nu+1)a_1 = 0\ , \\ (\lambda+\nu+n)(\lambda-\nu+n)a_n + a_{n-2} = 0\ , \qquad n \geq 2\ .\end{cases}$$

Substitueer hierin $\nu = \ell + \frac{1}{2}$, $\lambda = \lambda_2 = -\ell - \frac{1}{2}$, dan is aan de eerste vergelijking identiek voldaan. De coëfficiënt a_0 is willekeurig te kiezen. De overige vergelijkingen gaan over in,

$$(3.1.6)\quad \begin{cases}(-2\ell)a_1 = 0\ , \\ n(n-2\ell-1)a_n + a_{n-2} = 0\ , \qquad n \geq 2\ .\end{cases}$$

Beschouw nu eerst de vergelijkingen (3.1.6) met index n <u>oneven</u>,

$$\begin{cases} n = 1 & : (-2\ell)a_1 = 0\ , \\ n = 3 & : 3(2-2\ell)a_3 + a_1 = 0\ , \\ \ldots\ldots & \\ n = 2\ell-1 & : (2\ell-1)(-2)a_{2\ell-1} + a_{2\ell-3} = 0\ , \\ n = 2\ell+1 & : 0\cdot a_{2\ell+1} + a_{2\ell-1} = 0\ , \\ \ldots\ldots & \\ n = 2m+1 & : (2m+1)(2m-2\ell)a_{2m+1} + a_{2m-1} = 0\ , \qquad m \geq \ell\ . \end{cases}$$

Uit deze vergelijkingen lezen we af:

$$(3.1.7)\quad a_1 = a_3 = \ldots = a_{2\ell-1} = 0\ , \quad a_{2\ell+1} \text{ is willekeurig,}$$

terwijl voor $m > \ell$, a_{2m+1} is uit te drukken in $a_{2\ell+1}$ volgens

$$(3.1.8)\quad a_{2m+1} = -\frac{a_{2m-1}}{(2m+1)(2m-2\ell)} =$$

$$= (-1)^{m-\ell}\frac{a_{2\ell+1}}{(2m+1)(2m-1)\ldots(2\ell+3)(2m-2\ell)(2m-2\ell-2)\ldots 2} =$$

$$= (-1)^{m-\ell}\frac{a_{2\ell+1}}{2^{2m-2\ell}(m-\ell)!\,(\ell+\frac{3}{2})_{m-\ell}}\ .$$

De uitkomst (3.1.8) is ook geldig voor $m = \ell$.

Beschouw vervolgens de vergelijkingen (3.1.6) met index n <u>even</u>. Schrijf $n = 2m$, dan volgt

$$(3.1.9) \qquad 2m(2m-2\ell-1)a_{2m} + a_{2m-2} = 0 \,, \qquad m \geq 1 \,.$$

Merk op dat de coëfficiënt van a_{2m} ongelijk nul is. Met behulp van (3.1.9) is a_{2m} uit te drukken in a_0 als volgt (ga dit na),

$$(3.1.10) \qquad a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}\, m!\,(-\ell+\frac{1}{2})_m} \,.$$

Met behulp van (3.1.7), (3.1.8), (3.1.10) volgt nu voor de tweede oplossing,

$$y_2(z) = z^{-\ell-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} z^{2m} + z^{-\ell-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} z^{2m+1} =$$

$$= a_0 z^{-\ell-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(-\ell+\frac{1}{2})_m} (\tfrac{z}{2})^{2m} + a_{2\ell+1} z^{-\ell-\frac{1}{2}} \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{(-1)^{m-\ell}}{(m-\ell)!\,(\ell+\frac{3}{2})_{m-\ell}} \frac{z^{2m+1}}{2^{2m-2\ell}} =$$

$$= 2^{-\ell-\frac{1}{2}}\,\Gamma(-\ell+\tfrac{1}{2})a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\;\Gamma(-\ell+m+\frac{1}{2})} (\tfrac{z}{2})^{-\ell-\frac{1}{2}+2m} +$$

$$+ 2^{\ell+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\ell+\tfrac{3}{2})a_{2\ell+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\;\Gamma(\ell+m+\frac{3}{2})} (\tfrac{z}{2})^{\ell+\frac{1}{2}+2m} =$$

$$= AJ_{-\ell-\frac{1}{2}}(z) + BJ_{\ell+\frac{1}{2}}(z) \,,$$

waarin A, B willekeurige constanten zijn. In geval $\nu = \ell + \frac{1}{2}$ zijn beide Besselfuncties $J_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$ en $J_{-\ell-\frac{1}{2}}(z)$ dus oplossing van de DV van Bessel. In § 3.2 zullen we aantonen dat deze oplossingen lineair onafhankelijk zijn.

3.2. Lineaire onafhankelijkheid van de Besselfuncties $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ (ν niet geheel)

Laat de lineaire DV van tweede orde

$$(3.2.1) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0$$

de oplossingen $y = y_1(z)$, $y = y_2(z)$ bezitten. Een eenvoudig criterium voor de lineaire onafhankelijkheid van $y_1(z)$, $y_2(z)$ laat zich formuleren met behulp van de zgn. <u>determinant</u> van <u>Wronski</u> (Wronskiaan) $W(y_1,y_2)$ gedefinieerd door

$$(3.2.2)\qquad W(y_1,y_2) := \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{vmatrix} = y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z) \ .$$

<u>Stelling</u> (criterium voor lineaire onafhankelijkheid). De oplossingen $y_1(z)$, $y_2(z)$ van de DV (3.2.1) zijn dan en slechts dan lineair onafhankelijk als $W(y_1,y_2) \neq 0$ is.
Voor het bewijs zie Burkill [2.2], p.14-15, Ince [2.1], p.116-119.

<u>Opmerking</u>. Voor een lineaire DV van n-de orde (zie (1.7.1)) met oplossingen $y = y_k(z)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ wordt de determinant van Wronski gedefinieerd door

$$W(y_1,y_2,\ldots,y_n) := \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) & \ldots & y_n(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) & \ldots & y_n'(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(z) & y_2^{(n-1)}(z) & \ldots & y_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix} .$$

Ook dan geldt het criterium: Indien $W(y_1,y_2,\ldots,y_n) \neq 0$ is, dan zijn de oplossingen $y_k(z)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ lineair onafhankelijk en omgekeerd.

Voor de Wronskiaan $W(y_1,y_2)$ als ingevoerd in (3.2.2) laat zich de volgende betrekking afleiden.

<u>Identiteit van Abel</u> (1827).

$$(3.2.3)\qquad W(y_1,y_2) = C\ \exp[-\int p(z)dz]$$

waarin C een constante is welke afhangt van de oplossingen $y_1(z)$, $y_2(z)$.

<u>Afleiding</u>. Bepaal de afgeleide

$$\frac{dW}{dz} = y_1(z)y_2''(z) - y_1''(z)y_2(z) \ .$$

Elimineer $y_1''(z)$, $y_2''(z)$ met behulp van de DV (3.2.1) dan volgt

$$\frac{dW}{dz} = - y_1(z)[p(z)y_2'(z) + q(z)y_2(z)] + y_2(z)[p(z)y_1'(z) + q(z)y_1(z)] = - p(z)W \ .$$

De oplossing van deze vergelijking luidt

$$W = W(y_1,y_2) = C\ \exp[-\int p(z)dz] \ . \qquad \square$$

Voor de DV van Bessel is nu,

$$p(z) = \frac{1}{z}, \quad \exp[-\int p(z)dz] = \exp[-\log z] = \frac{1}{z}.$$

Voor de Wronskiaan van de oplossingen $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ volgt dan,

$$(3.2.4) \qquad W(J_\nu, J_{-\nu}) = \frac{C}{z},$$

waarin de constante C nog bepaald moet worden. Daartoe onderzoeken we het gedrag van $W(J_\nu, J_{-\nu})$ in de omgeving van $z = 0$. Uit de definitie van $J_\nu(z)$ leiden we af dat

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu [1 + O(z^2)].$$

Analoog vinden we dat

$$J_{-\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} [1 + O(z^2)],$$

terwijl differentiatie van deze uitkomsten leidt tot

$$J'_\nu(z) = \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} [1 + O(z^2)],$$

$$J'_{-\nu}(z) = \frac{-\nu}{2\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu-1} [1 + O(z^2)].$$

Substitueer dit in de Wronski determinant $W(J_\nu, J_{-\nu})$,

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J'_\nu(z)J_{-\nu}(z) =$$

$$= - \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-1} [1 + O(z^2)].$$

Nu is met behulp van de eigenschappen van de Γ-functie (zie hoofdstuk II) in te zien dat

$$\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{2\nu}{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi},$$

zodat

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -2 \frac{\sin \nu\pi}{\pi z} + O(z).$$

Vergelijk dit met de exacte uitkomst (3.2.4) dan volgt $C = -2(\sin \nu\pi)/\pi$ en daarmee

(3.2.5) $\quad W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\dfrac{2 \sin \nu\pi}{\pi z}$.

Voor ν niet geheel, is $W(J_\nu, J_{-\nu}) \neq 0$; $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ zijn dan lineair onafhankelijk. Is $\nu = n$ geheel, dan volgt uit (3.2.5) $W(J_n, J_{-n}) = 0$; $J_n(z)$, $J_{-n}(z)$ zijn dan lineair afhankelijk, zoals ook reeds bleek uit (3.1.5).

3.3. Analyticiteitseigenschappen van $J_\nu(z)$

De Besselfunctie $J_\nu(z)$ is in § 3.1 gedefinieerd door

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} .$$

Deel door z^ν dan volgt

$$\frac{J_\nu(z)}{z^\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^\nu\, m!\ \Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} .$$

Stelling. De functie $J_\nu(z)/z^\nu$ is een gehele functie van z en van ν.

Bewijs. We schrijven

$$\frac{J_\nu(z)}{z^\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\nu, z) ,$$

waarin

$$u_m(\nu, z) = \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(\nu+m+1) 2^\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} .$$

Beschouw nu de gebieden

$$G_z = \{z \mid |z| \leq A\} , \quad G_\nu = \{\nu \mid |\nu| \leq B\} ,$$

in het complexe z-vlak, resp. ν-vlak.
Voor elke m is de functie $u_m(\nu,z)$ een analytische functie van z voor $z \in G_z$ en een analytische functie van ν voor $\nu \in G_\nu$.
We bewijzen nu dat de reeks $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(\nu,z)$ absoluut en uniform convergent is voor $z \in G_\nu$, $\nu \in G_\nu$. Maak daartoe gebruik van het criterium van d'Alembert en beschouw het quotiënt,

$$\frac{u_{m+1}(\nu,z)}{u_m(\nu,z)} = \frac{(-1)^{m+1}\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)}{(-1)^m (m+1)!\, \Gamma(\nu+m+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \frac{-(z/2)^2}{(m+1)(\nu+m+1)} ,$$

$$\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| \le \frac{|z|^2/4}{(m+1)\,|\nu+m+1|} \le \frac{A^2/4}{(m+1)\,|\nu+m+1|} .$$

Kies nu $m \ge B$, dan is,

$$|\nu+m+1| \ge m+1-|\nu| \ge m+1-B > 0 ,$$

$$\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| \le \frac{A^2/4}{(m+1)(m+1-B)} .$$

Het rechterlid van de laatste ongelijkheid nadert tot nul indien $m \to \infty$. Er zal dan zeker een getal $M \ge B$ bestaan zodat voor $m \ge M$ geldt

$$\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| \le \tfrac{1}{2} .$$

Deze ongelijkheid geldt voor elke $z \in G_z$ en voor elke $\nu \in G_\nu$.
Volgens het criterium van d'Alembert is nu de reeks $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(\nu,z)$ absoluut convergent. Omdat M onafhankelijk is van z en ν is de reeks $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(\nu,z)$ tevens <u>uniform convergent</u> voor $z \in G_z$, $\nu \in G_\nu$.
De termen van de reeks zijn analytische functies van z en van ν in de gebieden G_z resp. G_ν. Volgens een <u>stelling</u> van <u>Weierstrass</u> (Ackermans-Van Lint [I.1], p.439) is dan ook de som van de reeks een analytische functie van z en van ν in de gebieden G_z, G_ν, i.e. voor $|z| \le A$, $|\nu| \le B$. A en B zijn willekeurig groot te kiezen. Daaruit volgt $J_\nu(z)/z^\nu$ is een analytische functie van z en van ν in het gehele complexe z-vlak, resp. het gehele complexe ν-vlak. De functie $J_\nu(z)/z^\nu$ is daarmee een <u>gehele</u> functie van z en van ν. □

<u>Opmerking</u>. Volgens de stelling is

$$J_\nu(z) = z^\nu g(\nu,z) ,$$

waarin $g(\nu,z)$ een gehele functie van z en van ν is. In het algemeen is de functie $J_\nu(z)$ zelf <u>niet</u> een gehele functie van z: vanwege de factor z^ν zal $J_\nu(z)$ in $z = 0$ een <u>vertakkingspunt</u> bezitten. De functie $J_\nu(z)$ wordt daardoor een <u>meerwaardige</u> functie van z. Teneinde de functie $J_\nu(z)$ <u>éénwaardig</u> te maken wordt in het z-vlak een <u>snede</u> òf <u>coupure</u> aangebracht. Het is gebruikelijk deze snede te leggen langs de negatieve reële as, waarna we in het opengesneden z-vlak definiëren,

$$-\pi < \arg z \le \pi \ ,$$

$$z^\nu = \exp[\nu \log z] = \exp[\nu(\log|z| + i \arg z)] = |z|^\nu \exp[i\nu \arg z] \ .$$

In het opengesneden z-vlak is dan $J_\nu(z)$ een éénwaardige analytische functie van z.

3.4. Besselfuncties van de tweede soort

In het geval $\nu = n$, geheel, zijn de oplossingen $J_n(z)$, $J_{-n}(z)$ van de DV van Bessel lineair afhankelijk (zie § 3.1). We zullen in deze paragraaf een tweede oplossing van de DV van Bessel met $\nu = n$ afleiden welke lineair onafhankelijk is van $J_n(z)$. We zullen daarbij een andere methode volgen dan de algemene methode, aangegeven in § 1.5.
Onderstel voorlopig dat ν niet geheel is, dan bezit de DV van Bessel

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0$$

de twee lineair onafhankelijke oplossingen $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$. De algemene oplossing van de DV luidt dan

$$y = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z) \ ,$$

waarin A, B willekeurige constanten zijn die eventueel van ν mogen afhangen. We voeren nu in de Besselfunctie van de tweede soort en van orde ν, $Y_\nu(z)$, gedefinieerd door (Weber, 1873),

$$Y_\nu(z) := \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \ . \tag{3.4.1}$$

Voor ν niet geheel is $\sin\nu\pi \neq 0$, zodat deze definitie zinvol is. Het is duidelijk dat $Y_\nu(z)$ een oplossing is van de DV van Bessel.

Stelling I. De functies $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ zijn lineair onafhankelijk (ν niet geheel).

Bewijs. We bepalen de determinant van Wronski

$$W(J_\nu, Y_\nu) = \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi} W(J_\nu, J_\nu) - \frac{1}{\sin\nu\pi} W(J_\nu, J_{-\nu}) =$$

$$= - \frac{1}{\sin \nu\pi} \left(- \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z} \right) = \frac{2}{\pi z} .$$

Deze determinant is $\neq 0$ zodat volgens de stelling uit § 3.2 de functies $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ lineair onafhankelijk zijn. □

<u>Gevolg</u>. De algemene oplossing van de DV van Bessel is ook voor te stellen door

$$y = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z) .$$

We zullen nu $Y_\nu(z)$ definiëren voor <u>$\nu = n$</u>, <u>geheel</u>. Daartoe onderzoeken we de volgende limiet,

$$\text{(3.4.2)} \qquad \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} .$$

Noem de teller van de laatste breuk $T(\nu)$ en de noemer $N(\nu)$, dan geldt voor $\nu \to n$,

$$T(\nu) \to T(n) = J_n(z) \cos n\pi - J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) - J_{-n}(z) = 0 ,$$

$$N(\nu) \to N(n) = \sin n\pi = 0 .$$

Voor $\nu \to n$ wordt de breuk van de vorm 0/0, d.i. onbepaald. De functies $T(\nu)$ en $N(\nu)$ zijn evenwel <u>analytische</u> functies van ν (zie § 3.3) zodat we de limiet (3.4.2) met behulp van reeksontwikkeling kunnen bepalen,

$$\lim_{\nu\to n} \frac{T(\nu)}{N(\nu)} = \lim_{\nu\to n} \frac{T(n) + (\nu - n)\left(\frac{dT}{d\nu}\right)_{\nu=n} + O[(\nu-n)^2]}{N(n) + (\nu - n)\left(\frac{dN}{d\nu}\right)_{\nu=n} + O[(\nu-n)^2]} = \left(\frac{\frac{dT}{d\nu}}{\frac{dN}{d\nu}} \right)_{\nu=n} .$$

De afgeleiden $\frac{dT}{d\nu}$ en $\frac{dN}{d\nu}$ zijn als volgt uit te werken,

$$\left(\frac{dT}{d\nu}\right)_{\nu=n} = \left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} \cos \nu\pi - \pi J_\nu(z) \sin \nu\pi - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu} \right]_{\nu=n}$$

$$= \left[(-1)^n \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu} \right]_{\nu=n} ,$$

$$\left(\frac{dN}{d\nu}\right)_{\nu=n} = [\pi \cos \nu\pi]_{\nu=n} = \pi \cos n\pi = \pi(-1)^n .$$

Daaruit volgt

$$\lim_{\nu\to n} Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} .$$

We definiëren nu de <u>functie</u> $Y_n(z)$ voor n <u>geheel</u> als volgt,

$$(3.4.2a)\quad Y_n(z) := \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} .$$

We bewijzen nu de volgende stellingen voor de functie $Y_n(z)$ (n geheel):

<u>Stelling II</u>. $Y_n(z)$ voldoet aan de DV van Bessel,

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2-n^2)y = 0 .$$

<u>Bewijs</u>. De functies $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ voldoen aan de DV,

$$z^2J''_{\pm\nu}(z) + zJ'_{\pm\nu}(z) + (z^2-\nu^2)J_{\pm\nu}(z) = 0 ,$$

waarbij een accent differentiatie naar z aangeeft. Differentieer deze vergelijkingen naar ν,

$$z^2\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right)' + (z^2-\nu^2)\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} = 2\nu J_\nu(z) ,$$

$$z^2\left(\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right)' + (z^2-\nu^2)\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu} = 2\nu J_{-\nu}(z) .$$

Vermenigvuldig de laatste vergelijking met $(-1)^n$ en trek ze af van de eerste vergelijking,

$$z^2\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]'' + z\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]' +$$

$$+ (z^2-\nu^2)\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right] = 2\nu[J_\nu(z) - (-1)^n J_{-\nu}(z)] .$$

Stel $\nu = n$, dan volgt (zie (3.4.2a)),

$$\pi[z^2Y''_n(z) + zY'_n(z) + (z^2-n^2)Y_n(z)] = 2n[J_n(z) - (-1)^n J_{-n}(z)] = 0 .$$

De functie $Y_n(z)$ is inderdaad oplossing van de DV van Bessel. □

<u>Stelling III</u>. De functies $J_n(z)$, $Y_n(z)$ zijn <u>lineair</u> <u>onafhankelijk</u>.

<u>Bewijs</u>. Met behulp van de reeds gevonden uitdrukking voor de Wronskiaan van $J_\nu(z)$ en $Y_\nu(z)$ volgt,

$$W(J_n,Y_n) = \lim_{\nu\to n} W(J_\nu,Y_\nu) = \lim_{\nu\to n} \frac{2}{\pi z} = \frac{2}{\pi z} \neq 0 \ . \qquad \square$$

<u>Conclusie</u>. Voor <u>elke</u> ν vormen de functies $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ twee lineair onafhankelijke oplossingen oftewel een fundamentaalsysteem van oplossingen van de DV van Bessel.

<u>Stelling IV</u>. $Y_{-n}(z) = (-1)^n\, Y_n(z)$.

Het bewijs wordt als opgave aan de lezer overgelaten.

We zullen nu, uitgaande van de definitie (3.4.2a), een <u>machtreeksontwikkeling</u> afleiden voor de functie $Y_n(z)$ (n geheel, ≥ 0).
Beschouw allereerst het geval <u>$n = 0$</u>, dan is

$$Y_0(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=0} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=0} .$$

Uitgaande van de definitie van $J_\nu(z)$,

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} ,$$

vinden we na differentiatie naar ν,

$$\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\left[\frac{\log(z/2)}{\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} - \frac{\Gamma'(\nu+m+1)}{\Gamma^2(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\left[\log\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(\nu+m+1)\right] .$$

Voor de definitie van de ψ-functie zie hoofdstuk II. Stel nu $\nu = 0$ dan volgt voor $Y_0(z)$,

$$(3.4.3) \qquad Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\left[\log\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(m+1)\right] .$$

Met behulp van de bekende waarden (zie hoofdstuk II),

$$(3.4.4)\qquad \psi(1) = -\gamma\,,\quad \psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} \qquad (m \geq 1)\,,$$

is de uitkomst (3.4.3) nog te herleiden tot,

$$(3.4.5)\qquad Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\{\log(\tfrac{z}{2}) + \gamma\}J_0(z) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\,(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m})(\tfrac{z}{2})^{2m}\,.$$

Merk op dat de laatste uitkomst van dezelfde gedaante is als de in § 1.5 afgeleide MR-ontwikkeling (1.5.5) voor de tweede oplossing $y_2(z)$ van een lineaire DV.

De functie $Y_0(z)$ bezit in $z = 0$ een <u>logarithmische</u> <u>singulariteit</u>; in de omgeving van $z = 0$ zal gelden

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}[\log(\tfrac{z}{2}) + \gamma] + O(z^2 \log z)\,.$$

In het geval n <u>geheel</u>, <u>> 0</u>, laat zich voor $Y_n(z)$ de volgende <u>machtreeksontwikkeling</u> afleiden,

$$(3.4.6)\qquad Y_n(z) = \frac{2}{\pi}J_n(z)\log(\tfrac{z}{2}) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}(\tfrac{z}{2})^{-n+2m} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}[\psi(m+1) + \psi(n+m+1)](\tfrac{z}{2})^{n+2m}\,.$$

<u>Opgave 3.4.1</u>. Geef een afleiding van de laatste reeksontwikkeling.

De gedaante van de ontwikkeling (3.4.6) is weer in overeenstemming met het algemene resultaat (1.5.6) voor de tweede oplossing van een lineaire DV. Eventueel is de uitkomst (3.4.6) nog verder te vereenvoudigen met behulp van de bekende waarden (3.4.4) voor de ψ-functie.
De functie $Y_n(z)$ zal <u>singulier</u> zijn in $z = 0$; uit (3.4.6) volgt, dat in de omgeving van $z = 0$ geldt,

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi}(n-1)!\,(\tfrac{z}{2})^{-n} + \begin{cases} O(z \log z)\,, & n = 1\,,\\ O(z^{-n+2})\,, & n \geq 2\,.\end{cases}$$

3.5. Hankelfuncties van de eerste en tweede soort

Naast de Besselfuncties van eerste en tweede soort treden in vele toepassingen op de Hankelfuncties of Besselfuncties van de derde soort, gedefinieerd door

$$H_\nu^{(1)}(z) := J_\nu(z) + iY_\nu(z) \;,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) := J_\nu(z) - iY_\nu(z) \;.$$

$H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ heten de Hankelfuncties van de eerste, resp. tweede soort van orde ν.
De Hankelfuncties $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ zijn oplossingen van de DV van Bessel. De functies zijn tevens lineair onafhankelijk zoals onmiddellijk volgt na berekening van de determinant van Wronski,

$$W(H_\nu^{(1)},H_\nu^{(2)}) = -\frac{4i}{\pi z} \neq 0 \;.$$

Opgave 3.5.1. Verifieer de laatste uitkomst.

3.6. Genererende functie en integraalvoorstellingen voor Besselfuncties

De Besselfuncties $J_n(z)$ van gehele orde n worden ook wel Besselcoëfficiënten genoemd. Door Schlömilch (1857) zijn de functies $J_n(z)$ nl. ingevoerd als coefficiënten in een Laurent-ontwikkeling. Beschouw daartoe de functie

$$F(z,t) = \exp[\tfrac{1}{2}z(t-\tfrac{1}{t})] \;,$$

welke analytisch is in t voor $t \neq 0$. Voor $0 < |t| < \infty$ is deze functie te ontwikkelen in een Laurentreeks (Ackermans-Van Lint [1.1], p.445-447). We bewijzen nu de volgende stelling:

Stelling.

$$F(z,t) = \exp[\tfrac{1}{2}z(t-\tfrac{1}{t})] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n \;, \qquad 0 < |t| < \infty \;. \tag{3.6.1}$$

Bewijs. We schrijven,

$$F(z,t) = e^{\frac{1}{2}zt}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{z}{t}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\tfrac{z}{2})^j\, t^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\tfrac{z}{2})^k\, t^k =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{j!\,k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{j+k} t^{j-k} .$$

Stel nu $n = j-k$, dan loopt n van $-\infty$ naar $+\infty$,

$$F(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n \sum_{\substack{j,k=0\\ j-k=n}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{j!\,k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{j+k} =: \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(z) t^n ,$$

waarin $f_n(z)$ een korte notatie is voor de coëfficiënt van t^n.
In geval $n \geq 0$, stellen we $j = k+n$ en er volgt,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} = J_n(z) .$$

In geval $n < 0$, stellen we $n = -m$ $(m > 0)$ en vervolgens $k = j+m$, dan volgt

$$f_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+m}}{j!\,(j+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2j} = (-1)^m J_m(z) = J_{-m}(z) = J_n(z) .$$

Daarmee is bewezen dat de Laurentreeks van $F(z,t)$ gegeven wordt door

$$F(z,t) = \exp[\tfrac{1}{2}z(t - \tfrac{1}{t})] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n . \qquad \square$$

Opmerking. De functie $F(z,t)$ heet de voortbrengende of genererende functie van de Besselcoëfficiënten $J_n(z)$.

Opgave 3.6.1. Leid met behulp van de genererende functie de volgende recurrente betrekkingen af voor de Besselcoëfficiënten,

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) ,$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z) .$$

Opgave 3.6.2. Toon aan dat

$$\text{(3.6.2)} \qquad \exp[ix \cos \theta] = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x) \cos n\theta .$$

Bereken de integraal

$$\int_0^{2\pi} \exp[ix \cos \theta - iy \cos(\theta - \alpha)] d\theta$$

op twee manieren en leid aldus af het <u>additietheorema</u> van <u>Neumann</u> (1867),

$$J_0(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)J_n(y)\cos n\alpha .$$

<u>Opgave 3.6.3</u>. Ontwikkel linkerlid en rechterlid van (3.6.2) naar machten van $\cos\theta$ en leid aldus af,

$$(\tfrac{1}{2}z)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+2k)(m+k-1)!}{k!} J_{m+2k}(z) , \quad m \text{ geheel}, \geq 0 .$$

<u>Opgave 3.6.4</u>. Ga uit van de relatie $F(y+z,t) = F(y,t)\cdot F(z,t)$ en leid af de <u>additieformule</u> (Neumann, 1867),

$$J_n(y+z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(y)J_{n-m}(z) .$$

Leid hieruit af de ontwikkeling (Hansen, 1843),

$$1 = J_0^2(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(z) ,$$

waaruit o.m. volgt: $|J_0(x)| \leq 1$, $|J_n(x)| \leq \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ voor x reëel, n geheel positief.

Uit de Laurentontwikkeling (3.6.1) leiden we de volgende integraalvoorstelling af voor de Besselfuncties $J_n(z)$ van <u>gehele</u> <u>orde</u>. Overeenkomstig Ackermans-Van Lint [1.1], p.445-447, worden de coëfficiënten $J_n(z)$ van de Laurentreeks (3.6.1) ook gegeven door de volgende integraal,

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\exp[\tfrac{1}{2}z(t-\tfrac{1}{t})]}{t^{n+1}}\,dt ,$$

waarbij C een willekeurige gesloten Jordankromme is, die in positieve zin doorlopen wordt en het punt $t = 0$ omsluit. Neem voor C de eenheidscirkel en stel $t = e^{i\theta}$, dan volgt

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\exp[\tfrac{1}{2}z(e^{i\theta}-e^{-i\theta})]}{e^{i(n+1)\theta}}\, ie^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp[iz\sin\theta - in\theta]d\theta .$$

De integrand in de laatste integraal is periodiek met periode 2π. We kunnen daarom het integratie interval verschuiven naar $[-\pi,\pi]$, waarna

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(z\sin\theta - n\theta)d\theta \;.$$

De laatste integraal is nul, want de integrand is een oneven functie van θ. De integrand van de eerste integraal is even in θ. Er resulteert nu de <u>integraalvoorstelling</u> van <u>Bessel</u> (1824),

$$(3.6.3) \qquad J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)d\theta \;,$$

geldig voor n geheel.

<u>Opgave 3.6.5</u>. Toon aan dat de integraalvoorstelling van Bessel verder te reduceren is tot,

$$J_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos n\theta\,\cos(z\sin\theta)d\theta \;, \qquad (n \text{ even}),$$

$$J_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin n\theta\,\sin(z\sin\theta)d\theta \;, \qquad (n \text{ oneven}).$$

We bespreken vervolgens de <u>integraalvoorstelling</u> van <u>Poisson</u> (1823) voor de Besselfunctie $J_\nu(z)$,

$$(3.6.4) \qquad J_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(zt)dt \;, \qquad \mathrm{Re}\,\nu > -\tfrac{1}{2} \;.$$

<u>Afleiding</u>. Ontwikkel de functie $\cos(zt)$ in een MR en integreer termsgewijs, dan volgt voor het rechterlid (RL) van (3.6.4),

$$\mathrm{RL} = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(zt)dt =$$

$$= \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}\int_0^1 t^{2m}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt \;.$$

Stel in de laatste integraal $t^2 = u$, dan is,

$$\int_0^1 t^{2m}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du = \tfrac{1}{2}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+m+1)} .$$

Vervang voorts $(2m)!$ door

$$(2m)! = \Gamma(2m+1) = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(m+\tfrac{1}{2})\Gamma(m+1) = \frac{2^{2m}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,\Gamma(m+\tfrac{1}{2})m! .$$

Substitueer deze uitkomsten in de reeks boven, dan volgt,

$$RL = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\;\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} = J_\nu(z) . \qquad \square$$

Opgave 3.6.6. Leid af de eerste eindige integraal van Sonine (1880),

$$J_{\mu+\nu+1}(z) = \frac{z^{\nu+1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int_0^1 J_\mu(zt)t^{\mu+1}(1-t^2)^\nu\,dt , \quad \mathrm{Re}\,\mu > -1,\ \mathrm{Re}\,\nu > -1 .$$

Integraalvoorstellingen van het Poisson-type voor Besselfuncties zijn systematisch af te leiden met de methode van Laplace transformatie. Probeer als oplossing van de DV van Bessel de contourintegraal

$$y = y(z) = z^\nu \int_a^b e^{izt}\,Y(t)dt ,$$

waarbij de functie $Y(t)$ en de integratieweg van a naar b in het complexe t-vlak nader te bepalen zijn. Substitueer deze integraal in de DV van Bessel (3.1.1), dan ontstaat er

$$\nu(\nu-1)z^{\nu-2}\int_a^b e^{izt}\,Y(t)dt + 2i\nu z^{\nu-1}\int_a^b e^{izt}\,tY(t)dt - z^\nu\int_a^b e^{izt}\,t^2Y(t)dt +$$

$$+ \nu z^{\nu-2}\int_a^b e^{izt}\,Y(t)dt + iz^{\nu-1}\int_a^b e^{izt}\,tY(t)dt +$$

$$+ z^\nu\int_a^b e^{izt}\,Y(t)dt - \nu^2 z^{\nu-2}\int_a^b e^{izt}\,Y(t)dt = 0 ,$$

$$z^{\nu} \int_a^b e^{izt}(1-t^2)Y(t)dt + (2\nu+1)iz^{\nu-1} \int_a^b e^{izt}\, tY(t)dt = 0 ,$$

of na partiële integratie in de eerste integraal,

$$iz^{\nu-1}\left\{- e^{izt}(1-t^2)Y(t)\Big|_a^b + \int_a^b e^{izt}\Big[\frac{d}{dt}\{(1-t^2)Y(t)\} + (2\nu+1)tY(t)\Big]dt\right\} = 0 .$$

Aan de laatste betrekking is voldaan indien

$$\frac{d}{dt}\{(1-t^2)Y(t)\} + (2\nu+1)tY(t) = 0 , \tag{3.6.5}$$

$$e^{izt}(1-t^2)Y(t)\Big|_a^b = 0 . \tag{3.6.6}$$

De DV (3.6.5) heet de <u>Laplace transform</u> van de DV van Bessel; de algemene oplossing van deze DV luidt

$$Y(t) = C(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} ,$$

waarbij C een willekeurige constante is. Aan de voorwaarde (3.6.6) wordt dan voldaan door bv. de keuze $a = -1$, $b = 1$ of $a = \pm 1$, $b = \pm 1 + i\infty$, aangenomen dat $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} z > 0$. Met deze keuze komen we tot de volgende drie oplossingen van de DV van Bessel,

$$y_1(z) = C_1 z^{\nu} \int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt , \quad \operatorname{Re} \nu > -\tfrac{1}{2} ,$$

$$y_2(z) = C_2 z^{\nu} \int_{1}^{1+i\infty} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt , \quad \operatorname{Re} \nu > -\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re} z > 0 ,$$

$$y_3(z) = C_3 z^{\nu} \int_{-1}^{-1+i\infty} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt , \quad \operatorname{Re} \nu > -\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re} z > 0 ,$$

waarin C_1, C_2, C_3 nog vrije constanten zijn.
Merk op dat voor $C_1 = [2^{\nu}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})]^{-1}$ de eerste integraal juist overeenstemt met de <u>integraalvoorstelling</u> van <u>Poisson</u> voor $J_{\nu}(z)$.
De tweede en derde integraal vormen bij passende keuze van C_2, C_3 <u>integraalvoorstellingen</u> voor de <u>Hankelfuncties</u> $H_{\nu}^{(1)}(z)$, $H_{\nu}^{(2)}(z)$, i.e.

$$(3.6.7) \quad H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{2ie^{-\nu\pi i}(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_1^{1+i\infty} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt\,, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -\tfrac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,z > 0\,,$$

$$(3.6.8) \quad H_\nu^{(2)}(z) = \frac{2ie^{-\nu\pi i}(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{-1+i\infty} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt\,, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -\tfrac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,z > 0\,;$$

voor het bewijs zij verwezen naar Watson [3.1], chapter 6.
Door middel van de substituties $t := \pm 1 + is$, $s := t/z$, zijn de integraalvoorstellingen (3.6.7), (3.6.8) verder te herleiden tot

$$(3.6.9) \quad H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{\exp[i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)]}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\,,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi\,;$$

$$(3.6.10) \quad H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{\exp[-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)]}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\,,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > -\tfrac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\pi < \arg z < \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Hierin is voor de factor $(1 \pm it/2z)^{\nu-\frac{1}{2}}$ de hoofdwaarde te nemen. Het grotere geldigheidsgebied van (3.6.9), (3.6.10) is gebaseerd op analytische voortzetting.

Opmerking. De hier toegepaste methode van Laplace transformatie vormt een generalisering van de "gewone" Laplace transformatie. Contourintegraal-oplossingen van lineaire DV's worden uitvoeriger besproken in Burkill [2.2], chapter 6, Ince [2.1], chapters 8, 18.

3.7. Asymptotische ontwikkelingen der Besselfuncties

De in het voorafgaande afgeleide reeksontwikkelingen voor $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ zijn convergent voor elke z. Met behulp van deze reeksen zijn dus $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ in principe te berekenen voor elke waarde van z. Evenwel, de MR-ontwikkelingen bieden geen enkel inzicht in het gedrag van $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ voor grote waarden van $|z|$. Voorts is de numerieke berekening van $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ alleen praktisch uitvoerbaar voor "niet te grote" waarden van $|z|$ omdat anders een zeer groot aantal termen van de reeksen in aanmerking moet worden genomen.

We zullen nu zgn. asymptotische ontwikkelingen voor de Besselfuncties afleiden. Deze asymptotische ontwikkelingen beschrijven het gedrag van de Besselfuncties voor grote waarden van $|z|$. Tevens zijn ze te gebruiken voor de numerieke berekening van bv. $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ voor grote waarden van $|z|$.
We zullen eerst het begrip asymptotische ontwikkeling algemeen definiëren. Laat de functie $f(z)$ gedefinieerd zijn voor $|z| > R$. Zij voorts gegeven de formele reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z^k} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \dots .$$

We voeren in de partiële som $S_n(z)$,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{z^k}$$

en de restterm $R_n(z)$,

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) .$$

Definitie. De reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z^k}$ heet de asymptotische ontwikkeling van $f(z)$ voor grote waarden van $|z|$, indien voor $n = 0,1,2,\dots$ geldt

$$\lim_{|z|\to\infty} z^n R_n(z) = 0 . \tag{3.7.1}$$

We noteren dit als volgt,

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z^k} , \qquad (|z| \to \infty) .$$

Uit (3.7.1) volgt, dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een getal R_1 bestaat zodat voor $|z| > R_1$ geldt,

$$|z^n R_n(z)| < \varepsilon ,$$

oftewel

$$|R_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{|z|^n} .$$

Het verschil $|f(z) - S_n(z)|$ is dus willekeurig klein te maken door $|z|$ voldoende groot te kiezen. We kunnen nu de partiële som $S_n(z)$ opvatten als een

benadering voor $f(z)$, een benadering die des te beter wordt naarmate $|z|$ groter is.
In sommige gevallen is het mogelijk een afschatting te geven voor de restterm $R_n(z)$, bv.

$$(3.7.2) \qquad |R_n(z)| \le \frac{|A_{n+1}|}{|z|^{n+1}} .$$

De absolute waarde van de fout, $|f(z) - S_n(z)|$, is dan hoogstens gelijk aan de absolute waarde van de $(n+1)$-de term van de asymptotische ontwikkeling d.i. de eerste term die niet meer meedoet aan de som $S_n(z)$. Stel dat we nu de functie $f(z)$ wensen te berekenen voor een zekere waarde van z, met een fout $\le \delta$. Vorm dan de partiële som $S_n(z)$, waarbij n zodanig gekozen is dat

$$\left|\frac{A_{n+1}}{z^{n+1}}\right| < \delta$$

is. De som $S_n(z)$ zal dan minder dan δ verschillen van de gevraagde functiewaarde $f(z)$.

Opmerking. Een asymptotische ontwikkeling $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z^k}$ behoeft niet convergent te zijn; in vele praktische gevallen is de asymptotische ontwikkeling divergent. We illustreren dit door met elkaar te vergelijken de definitie van asymptotische ontwikkeling, i.e.

$$\lim_{|z|\to\infty} z^n R_n(z) = 0 , \qquad (n \text{ vast})$$

en de definitie van convergentie van een reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z^k}$ met som $f(z)$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0 , \qquad (z \text{ vast}).$$

Het is duidelijk dat het in de twee definities om totaal verschillende limieten gaat.

Opgave 3.7.1. De exponentiële integraal $E_1(x)$ wordt gedefinieerd door

$$E_1(x) := \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt , \qquad x > 0 .$$

Leid af met behulp van partiële integratie,

$$e^x E_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n!\, e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\, dt \,.$$

Toon aan dat $E_1(x)$ de volgende asymptotische ontwikkeling bezit,

$$E_1(x) \sim e^{-x} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \,, \qquad (x \to \infty) \,.$$

Bereken $e^x E_1(x)$ voor $x = 10$ in 3 decimalen. Hoe groot is de minimale fout bij berekening van de genoemde functiewaarde met behulp van de asymptotische ontwikkeling?

Opgave 3.7.2. De Fresnel integralen worden gedefinieerd door

$$C(x) + iS(x) = \int_0^x [\cos(\tfrac{1}{2}\pi t^2) + i \sin(\tfrac{1}{2}\pi t^2)]dt = \int_0^x \exp(\tfrac{1}{2}\pi i t^2)dt \,.$$

Leid af de asymptotische ontwikkeling

$$C(x) + iS(x) \sim \frac{1+i}{2} + \exp(\tfrac{1}{2}\pi i x^2) \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n (\frac{1}{2})_n}{(\pi i)^{n+1}\, x^{2n+1}} \,, \qquad (x \to \infty) \,.$$

We onderzoeken nu de asymptotiek van de Hankelfuncties $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ voor grote waarden van $|z|$. Ga daartoe uit van de integraalvoorstellingen (3.6.9), (3.6.10). Ontwikkel de factor $(1 + it/2z)^{\nu-\frac{1}{2}}$ in een Taylorreeks

$$(1 + \frac{it}{2z})^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n \binom{\nu-\frac{1}{2}}{k} (\frac{it}{2z})^k + R_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{1}{2}-\nu)_k}{k!} \frac{t^k}{(2iz)^k} + R_n^*(t,z) \,,$$

waarbij $R_n^*(t,z)$ de restterm voorstelt. Substitutie van deze ontwikkeling in (3.6.9) voert tot

(3.7.2a)

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp[i(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi)] \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{1}{2}-\nu)_k\, \Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{k!\, \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2iz)^k} + R_n(z) \right\} ,$$

waarin $R_n(z)$ gegeven wordt door

$$R_n(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\nu-\frac{1}{2}}\, R_n^*(t,z)dt \;.$$

Voor de restterm $R_n(z)$ wordt in Watson [3.1], Section 7.2, de volgende afschatting afgeleid,

$$|R_n(z)| \le C_n |z|^{-n-1}$$

waarbij C_n een constante is.
Het is duidelijk dat $R_n(z)$ voldoet aan (3.7.1). De ontwikkeling (3.7.2a) is daarom asymptotische ontwikkeling van $H_\nu^{(1)}(z)$. De asymptotische ontwikkeling van $H_\nu^{(2)}(z)$ is op analoge wijze af te leiden uit de integraalvoorstelling (3.6.10).

Conclusie. De asymptotische ontwikkelingen van de Hankelfuncties $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ worden gegeven door (Hankel, 1868),

$$\text{(3.7.3)}\quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, \exp[i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)] \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-\nu)_k(\frac{1}{2}+\nu)_k}{k!} \frac{1}{(2iz)^k}\,, \\ \qquad (|z| \to \infty,\ -\pi < \arg z < 2\pi)\;; \\ H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, \exp[-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)] \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-\nu)_k(\frac{1}{2}+\nu)_k}{k!} \frac{1}{(-2iz)^k}\,, \\ \qquad (|z| \to \infty,\ -2\pi < \arg z < \pi)\,. \end{cases}$$

Men kan gemakkelijk verifiëren dat de reeksen (3.7.3) divergent zijn voor elke z behalve in het geval $\nu = \ell + \frac{1}{2}$, ℓ geheel. Aan het einde van deze paragraaf komen we op dit geval terug.
Voor het onderzoek van de restterm $R_n(z)$ van de asymptotische ontwikkkelingen (3.7.3) zij verwezen naar Watson [3.1], Section 7.3. Het blijkt dat inderdaad, onder zekere voorwaarden, voor $R_n(z)$ een afschatting van de gedaante (3.7.2) geldt.
We zullen de begintermen van de asymptotische ontwikkelingen (3.7.3) nog uitschrijven

$$\text{(3.7.4)}\quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, \exp[i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)]\left[1 - \dfrac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2iz} + O(\dfrac{1}{z^2})\right]\,, \\ H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, \exp[-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)]\left[1 + \dfrac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2iz} + O(\dfrac{1}{z^2})\right]\,. \end{cases}$$

De asymptotische ontwikkelingen van de Besselfuncties $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ zijn uit (3.7.3), (3.7.4) af te leiden via de relaties,

$$J_\nu(z) = \tfrac{1}{2}\{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\} , \quad Y_\nu(z) = \frac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\} .$$

Voor de begintermen van de asymptotische ontwikkelingen van $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ vinden we dan met behulp van (3.7.4),

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,[\cos(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi)\{1 + O(\frac{1}{z^2})\} -$$

$$- \sin(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi)\{\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2z} + O(\frac{1}{z^3})\}] ,$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,[\sin(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi)\{1 + O(\frac{1}{z^2})\} +$$

$$+ \cos(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi)\{\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2z} + O(\frac{1}{z^3})\}] ,$$

geldig voor $|z| \to \infty$, $-\pi < \arg z < \pi$.
Nemen we $z = x$, reëel en positief, dan geldt voor grote waarden van x,

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi) ,$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi) .$$

De Besselfuncties hebben dan een oscillerend karakter, waarbij de amplitude van de oscillatie, d.i. $\sqrt{2/(\pi x)}$, monotoon tot nul nadert voor $x \to \infty$.

In het geval dat ν <u>halftallig</u> is, i.e. $\nu = \ell + \frac{1}{2}$ met ℓ geheel, ≥ 0, zal gelden

$$(\tfrac{1}{2} - \nu)_k = (-\ell)_k = 0$$

zodra $k \geq \ell+1$ is. De reeksen (3.7.3) breken dan af na de term met $k = \ell$. Uit de afleiding van (3.7.3) is duidelijk dat de overblijvende eindige sommen exact gelijk zijn aan $H^{(1)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$, $H^{(2)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$, dus

$$\text{(3.7.5)} \qquad H^{(1)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp[i(z - \tfrac{1}{2}\ell\pi - \tfrac{1}{2}\pi)] \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(-\ell)_k(\ell+1)_k}{k!}\frac{1}{(2iz)^k} ,$$

terwijl een analoge formule geldt voor $H^{(2)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$.

Speciaal in de gevallen $\ell = 0,1$ vinden we dan

(3.7.6) $$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz} \;, \quad H^{(1)}_{3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz}\{1 - \frac{1}{iz}\} \;.$$

3.8. Integralen van Besselfuncties

In deze paragraaf bespreken we enige methoden ter berekening van integralen van Besselfuncties.

1°. Onbepaalde integralen. Als voorbeeld beschouwen we de onbepaalde integraal

(3.8.1) $$I(k,\ell) = \int zA_\nu(kz)B_\nu(\ell z)dz \;,$$

waarin $A_\nu(kz)$ en $B_\nu(\ell z)$ Besselfuncties zijn van willekeurige soort en orde ν. A_ν, B_ν kan betekenen J_ν, Y_ν, $H^{(1)}_\nu$, $H^{(2)}_\nu$ of een lineaire combinatie van deze functies. A_ν en B_ν behoeven niet van dezelfde soort te zijn.
We gaan uit van de DV van Bessel voor $A_\nu(z)$,

$$[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + (z^2 - \nu^2)]A_\nu(z) = 0 \;.$$

Vervang z door kz dan volgt,

(3.8.2) $$[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + (k^2z^2 - \nu^2)]A_\nu(kz) = 0 \;.$$

Evenzo geldt,

(3.8.3) $$[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + (\ell^2z^2 - \nu^2)]B_\nu(\ell z) = 0 \;.$$

Vermenigvuldig nu (3.8.2) met $B_\nu(\ell z)/z$, (3.8.3) met $A_\nu(kz)/z$ en vorm het verschil,

$$z\left[\frac{d^2}{dz^2}\{A_\nu(kz)\}B_\nu(\ell z) - A_\nu(kz)\frac{d^2}{dz^2}\{B_\nu(\ell z)\}\right] +$$

$$+ \left[\frac{d}{dz}\{A_\nu(kz)\}B_\nu(\ell z) - A_\nu(kz)\frac{d}{dz}\{B_\nu(\ell z)\}\right] + (k^2 - \ell^2)zA_\nu(kz)B_\nu(\ell z) = 0 \;.$$

De eerste twee termen zijn te schrijven als de afgeleide van een product, waarna volgt,

$$\frac{d}{dz}\left\{z[\frac{d}{dz}\{A_\nu(kz)\}B_\nu(\ell z) - A_\nu(kz)\frac{d}{dz}\{B_\nu(\ell z)\}]\right\} + (k^2-\ell^2)zA_\nu(kz)B_\nu(\ell z) = 0$$

oftewel

$$(k^2-\ell^2)zA_\nu(kz)B_\nu(\ell z) = \frac{d}{dz}[z\{\ell A_\nu(kz)B'_\nu(\ell z) - kA'_\nu(kz)B_\nu(\ell z)\}] ,$$

waarbij het accent differentiatie naar het argument aangeeft.
Integreer de laatste betrekking naar z dan volgt,

$$\text{(3.8.4)}\qquad I(k,\ell) = \int zA_\nu(kz)B_\nu(\ell z)dz = \frac{z[\ell A_\nu(kz)B'_\nu(\ell z) - kA'_\nu(kz)B_\nu(\ell z)]}{k^2-\ell^2} + C ,$$

mits $\underline{k \neq \pm \ell}$ is. C is een willekeurige integratieconstante.
We berekenen nu de integraal $I(k,\ell)$ in geval $k = \ell$ (het geval $k = -\ell$ laat zich analoog behandelen). Daartoe bepalen we de limiet,

$$\lim_{\ell\to k} I(k,\ell) = I(k,k) .$$

Ontwikkel $B_\nu(\ell z)$ in een Taylorreeks om het punt kz,

$$B_\nu(\ell z) = B_\nu(kz) + (\ell-k)zB'_\nu(kz) + O((\ell-k)^2) .$$

Differentieer deze reeks naar z, dan volgt,

$$\ell B'_\nu(\ell z) = kB'_\nu(kz) + (\ell-k)[B'_\nu(kz) + kzB''_\nu(kz)] + O((\ell-k)^2) .$$

Substitueer deze Taylorreeksen in de uitkomst (3.8.4) voor $I(k,\ell)$, dan volgt na enig rekenen

$$\text{(3.8.5)}\qquad I(k,\ell) = \frac{kz}{k^2-\ell^2}[A_\nu(kz)B'_\nu(kz) - A'_\nu(kz)B_\nu(kz)] +$$

$$+ \frac{z}{k+\ell}[kzA'_\nu(kz)B'_\nu(kz) - A_\nu(kz)\{B'_\nu(kz) + kzB''_\nu(kz)\}] + C + O(\ell-k) .$$

Deze uitkomst is verder te vereenvoudigen. Overeenkomstig § 3.2 is

$$A_\nu(kz)B'_\nu(kz) - A'_\nu(kz)B_\nu(kz) = W(A_\nu,B_\nu) = \frac{D}{kz} ,$$

waarin D een constante is. Substitueer dit in (3.8.5) en combineer de constante $D/(k^2-\ell^2)$ met C tot de nieuwe (willekeurige) constante C^*. Voorts laat de tweede afgeleide $B''_\nu(kz)$ zich elimineren met behulp van de DV van Bessel,

$$k^2z^2B_\nu''(kz) + kzB_\nu'(kz) + (k^2z^2 - \nu^2)B_\nu(kz) = 0 \ .$$

De uitkomst (3.8.5) voor $I(k,\ell)$ gaat dan over in,

$$I(k,\ell) = \frac{(k^2z^2 - \nu^2)A_\nu(kz)B_\nu(kz) + k^2z^2A_\nu'(kz)B_\nu'(kz)}{k(k+\ell)} + C^* + O(\ell - k) \ .$$

Neem nu de limiet voor $\ell \to k$, dan volgt

(3.8.6) $$I(k,k) = \int zA_\nu(kz)B_\nu(kz)dz =$$

$$= \frac{(k^2z^2 - \nu^2)A_\nu(kz)B_\nu(kz) + k^2z^2A_\nu'(kz)B_\nu'(kz)}{2k^2} + C^* \ .$$

<u>Opgave 3.8.1</u>. Bereken de onbepaalde integraal

$$\int A_\mu(z)B_\nu(z)\,\frac{dz}{z} \ ,$$

waarin $A_\mu(z)$, $B_\nu(z)$ Besselfuncties van willekeurige soort en orde μ, resp. ν zijn.

<u>Opgave 3.8.2</u>. Onderzoek de convergentie van de integraal

$$\int_0^\infty J_\mu(x)J_\nu(x)\,\frac{dx}{x} \ .$$

Bereken deze integraal.

2°. <u>Oneindige integralen</u>. Als voorbeeld beschouwen we de <u>Laplace transform</u> van $x^\nu J_\nu(x)$,

(3.8.7) $$\mathcal{L}[x^\nu J_\nu(x)] = \int_0^\infty e^{-px}\,x^\nu\,J_\nu(x)dx \ , \qquad \nu \text{ reëel.}$$

De integraal (3.8.7) is (absoluut) <u>convergent</u> mits $\nu > -\frac{1}{2}$, Re $p > 0$. Tevens is de integraal <u>uniform convergent</u> op elk begrensd gesloten deelgebied van het halfvlak Re $p > 0$. Volgens een stelling uit de functietheorie (zie bv. Copson [1.7], p.110-111) is dan de Laplace transform (3.8.7) een <u>analytische functie</u> van p voor Re $p > 0$.

We zullen nu deze Laplace transform berekenen. Neem voorlopig aan dat p reeel, positief is. Ontwikkel $x^\nu J_\nu(x)$ in een machtreeks,

$$x^{\nu}J_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\;\Gamma(\nu+m+1)} (\tfrac{1}{2})^{\nu+2m}\, x^{2\nu+2m} .$$

Substitueer deze ontwikkeling in de integraal (3.8.7) en integreer termsgewijs,

$$(3.8.8) \qquad \int_0^{\infty} e^{-px} x^{\nu} J_{\nu}(x)\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\;\Gamma(\nu+m+1)} (\tfrac{1}{2})^{\nu+2m} \int_0^{\infty} e^{-px} x^{2\nu+2m}\,dx .$$

De laatste integraal is te berekenen via de substitutie $px = t$,

$$\int_0^{\infty} e^{-px} x^{2\nu+2m}\,dx = \frac{1}{p^{2\nu+2m+1}} \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{2\nu+2m}\,dt = \frac{\Gamma(2\nu+2m+1)}{p^{2\nu+2m+1}} .$$

Met behulp van de verdubbelingsformule voor de Γ-functie is te schrijven,

$$\Gamma(2\nu+2m+1) = \frac{2^{2\nu+2m}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(\nu+m+\tfrac{1}{2})\Gamma(\nu+m+1) .$$

Substitueer deze resultaten in (3.8.8) dan volgt na enig rekenen,

$$(3.8.9) \qquad \int_0^{\infty} e^{-px} x^{\nu} J_{\nu}(x)\,dx = \frac{2^{\nu}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})}{p^{2\nu+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(\nu+\tfrac{1}{2})_m}{m!} \frac{1}{p^{2m}} .$$

De laatste reeks stemt juist overeen met de binomiaalreeks (Ackermans-Van Lint [1.1], p.314),

$$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\nu-\tfrac{1}{2})(-\nu-\tfrac{3}{2})\ldots(-\nu-\tfrac{1}{2}-m+1)}{m!} \frac{1}{p^{2m}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(\nu+\tfrac{1}{2})_m}{m!} \frac{1}{p^{2m}} .$$

Deze binomiaalreeks is <u>absoluut</u> <u>convergent</u> voor $|1/p^2| < 1$, d.i. voor $p > 1$. We komen dus tot de volgende uitkomst

$$(3.8.10) \qquad \mathcal{L}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = \frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} (p^2+1)^{-\nu-\frac{1}{2}} ,$$

voorlopig geldig voor $\nu > -\frac{1}{2}$, $p > 1$.

Opmerking. De in (3.8.8) toegepaste termsgewijze integratie is geoorloofd omdat de resulterende binomiaalreeks absoluut convergent is; zie T.J.I'a. Bromwich, Theory of infinite series, MacMillan, New York, 1959, p.500.

Men kan vervolgens inzien dat het resultaat (3.8.10) ook geldig is voor $\mathrm{Re}\ p > 0$. Immers het linkerlid was een analytische functie van p voor $\mathrm{Re}\ p > 0$. Het rechterlid van (3.8.10) is een meerwaardige functie van p met vertakkingspunten $p = \pm i$. We dienen nu die tak van de functie te beschouwen welke reëel en positief is voor p reëel. Daartoe brengen we in het complexe p-vlak snedes aan langs de intervallen $[i, i\infty)$ en $(-i\infty, -i]$ van de imaginaire as. Definieer in het opengesneden p-vlak,

$$(p^2+1)^{-\nu-\frac{1}{2}} = |p^2+1|^{-\nu-\frac{1}{2}} \exp[-i(\nu+\tfrac{1}{2})\{\arg(p+i) + \arg(p-i)\}] ,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(p+i) \le \frac{3\pi}{2} , \quad -\frac{3\pi}{2} < \arg(p-i) \le \frac{\pi}{2} .$$

De functie $(p^2+1)^{-\nu-\frac{1}{2}}$ is dan analytisch in het opengesneden p-vlak en reeelwaardig voor p reëel. In het bijzonder is dus $(p^2+1)^{-\nu-\frac{1}{2}}$ analytisch voor $\mathrm{Re}\ p > 0$.
Rechterlid en linkerlid van (3.8.10) zijn nu beide analytisch voor $\mathrm{Re}\ p > 0$ en stemmen overeen voor $p > 1$. Volgens de identiteitsstelling (Ackermans-Van Lint [1.1], p.443) stemmen dan rechterlid en linkerlid van (3.8.10) overeen in het gehele halfvlak $\mathrm{Re}\ p > 0$, i.e. (3.8.10) geldt voor $\nu > -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}\ p > 0$.

In het speciale geval $\nu = 0$ gaat (3.8.10) over in,

$$(3.8.11) \quad \mathcal{L}[J_0(x)] = \int_0^\infty e^{-px} J_0(x)dx = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} , \qquad \mathrm{Re}\ p > 0 .$$

Opgave 3.8.3. De functie $y = J_0(x)$ voldoet aan de DV

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 .$$

Leid (3.8.11) af door Laplace transformatie van deze DV.

Opgave 3.8.4. Men kan aantonen dat de integraal (3.8.11) ook nog convergent is voor $\mathrm{Re}\ p = 0$, $p \neq \pm i$. Leid af via een limietovergang $p \to ia$ in (3.8.11), de discontinue integralen van Weber (1873),

$$\int_0^\infty J_0(x)\cos(ax)dx = \begin{cases} (1-a^2)^{-\frac{1}{2}}, & 0 \le a < 1, \\ 0, & a > 1, \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_0(x)\sin(ax)dx = \begin{cases} 0, & 0 \le a < 1, \\ (a^2-1)^{-\frac{1}{2}}, & a > 1. \end{cases}$$

Opgave 3.8.5. Toon aan dat

$$\int_0^\infty \exp(-p^2t^2)\, t^{\nu+1} J_\nu(at)dt = \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right),$$

$$\nu > -1,\ -\tfrac{1}{4}\pi < \arg p < \tfrac{1}{4}\pi .$$

3.9. Recurrente betrekkingen voor Besselfuncties

We poneren de volgende twee betrekkingen,

$$(3.9.1) \qquad \frac{d}{dz}\{z^\nu J_\nu(z)\} = z^\nu J_{\nu-1}(z) ,$$

$$(3.9.2) \qquad \frac{d}{dz}\{z^{-\nu} J_\nu(z)\} = -\, z^{-\nu} J_{\nu+1}(z) .$$

Afleiding. Ga uit van de machtreeksontwikkeling voor $J_\nu(z)$ en differentieer termsgewijs,

$$\frac{d}{dz}\{z^\nu J_\nu(z)\} = \frac{d}{dz}\left[\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} (\tfrac{1}{2})^{\nu+2m} z^{2\nu+2m}\right]$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} (\tfrac{1}{2})^{\nu+2m}\, 2(\nu+m) z^{2\nu+2m-1}$$

$$= z^\nu \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m)} (\tfrac{z}{2})^{\nu-1+2m} = z^\nu J_{\nu-1}(z) .$$

Op analoge wijze is de betrekking (3.9.2) af te leiden. □

We schrijven de betrekking (3.9.1) uit,

$$\nu z^{\nu-1} J_\nu(z) + z^\nu J_\nu'(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z)$$

oftewel

$$(3.9.3) \qquad zJ_\nu'(z) + \nu J_\nu(z) = zJ_{\nu-1}(z) .$$

Evenzo volgt uit (3.9.2),

(3.9.4) $\quad zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = - zJ_{\nu+1}(z)$.

Vorm het verschil en de som van (3.9.3) en (3.9.4), dan is

(3.9.5) $\quad J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z)$,

(3.9.6) $\quad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z)$.

De betrekkingen (3.9.3)-(3.9.6) worden <u>recurrente betrekkingen</u> voor de Besselfunctie $J_\nu(z)$ genoemd; zie ook opgave 3.6.1 waar (3.9.5), (3.9.6) zijn afgeleid voor orde ν geheel.

Dezelfde recurrente betrekkingen gelden ook voor de Besselfunctie $Y_\nu(z)$ en voor de Hankelfuncties $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Daartoe is het voldoende te bewijzen dat

(3.9.7) $\quad \frac{d}{dz} \{z^\nu Y_\nu(z)\} = z^\nu Y_{\nu-1}(z)$,

(3.9.8) $\quad \frac{d}{dz} \{z^{-\nu} Y_\nu(z)\} = - z^{-\nu} Y_{\nu+1}(z)$.

<u>Afleiding</u>. We geven hier alleen de afleiding van (3.9.7) en wel voor het geval ν niet geheel. De Besselfunctie $Y_\nu(z)$ wordt dan gegeven door (3.4.1) en er volgt,

$$\frac{d}{dz} \{z^\nu Y_\nu(z)\} = \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} \frac{d}{dz} \{z^\nu J_\nu(z)\} - \frac{1}{\sin \nu\pi} \frac{d}{dz} \{z^\nu J_{-\nu}(z)\}$$

$$= \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} z^\nu J_{\nu-1}(z) - \frac{1}{\sin \nu\pi} \{- z^\nu J_{-\nu+1}(z)\}$$

$$= z^\nu \frac{J_{\nu-1}(z) \cos(\nu - 1)\pi - J_{-\nu+1}(z)}{\sin(\nu - 1)\pi} = z^\nu Y_{\nu-1}(z) ,$$

waarbij gebruik gemaakt is van de relaties (3.9.1), (3.9.2) voor $J_\nu(z)$. □

<u>Conclusie</u>. Zij $A_\nu(z)$ een Besselfunctie van willekeurige soort en orde ν, dan gelden de betrekkingen,

$$\frac{d}{dz} \{z^\nu A_\nu(z)\} = z^\nu A_{\nu-1}(z) , \quad \frac{d}{dz} \{z^{-\nu} A_\nu(z)\} = - z^{-\nu} A_{\nu+1}(z) ,$$

oftewel

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)\{z^{\nu}A_{\nu}(z)\} = z^{\nu-1}A_{\nu-1}(z) \ , \quad \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)\{z^{-\nu}A_{\nu}(z)\} = -\ z^{-\nu-1}A_{\nu+1}(z) \ .$$

Passen we de operator $(z^{-1}\ d/dz)$ n keer toe (n geheel, ≥ 0) dan volgt eenvoudig

$$(3.9.9) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\{z^{\nu}A_{\nu}(z)\} = z^{\nu-n}A_{\nu-n}(z) \ , \\ \\ \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\{z^{-\nu}A_{\nu}(z)\} = (-1)^{n}\, z^{-\nu-n}\, A_{\nu+n}(z) \ . \end{cases}$$

<u>Opgave 3.9.1.</u> Leid af de <u>reeksontwikkeling</u> van <u>Lommel</u> (1868),

$$(z+h)^{-\frac{1}{2}\nu}\ J_{\nu}(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}h)^{m}}{m!}\ z^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}m}\ J_{\nu+m}(\sqrt{z}) \ .$$

3.10. Besselfuncties van orde $\ell + \frac{1}{2}$

In deze paragraaf beschouwen we de zgn. "halftallige" Besselfuncties, dat zijn Besselfuncties van orde $(\ell + \frac{1}{2})$, ℓ geheel. Het blijkt dat de halftallige Besselfuncties kunnen worden uitgedrukt in de elementaire functies sin z en cos z. We merken eerst op dat uit de definitie (3.4.1) van $Y_{\nu}(z)$ volgt,

$$(3.10.1) \quad Y_{\ell+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{\ell+1}\ J_{-\ell-\frac{1}{2}}(z) \ .$$

We kunnen ons daarom beperken tot het onderzoek van de Besselfunctie $J_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$. Beschouw eerst

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m!\ \Gamma(m+\frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}} \ .$$

Met behulp van de verdubbelingsformule voor de Γ-functie is te schrijven

$$m!\ \Gamma(m+\tfrac{3}{2}) = \Gamma(m+1)\Gamma(m+\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma(2m+2)\sqrt{\pi}}{2^{2m+1}} = \frac{(2m+1)!\ \sqrt{\pi}}{2^{2m+1}} \ ,$$

waarna volgt

$$(3.10.2) \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{(2m+1)!}\ z^{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ \sin z \ .$$

Analoog laat zich afleiden,

$$(3.10.3) \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ \cos z \ ,$$

waaruit met (3.10.1) volgt,

$$(3.10.4) \quad Y_{\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \; .$$

Met behulp van (3.10.2), (3.10.4) kunnen we nu de Hankelfuncties van orde $\frac{1}{2}$ samenstellen,

$$(3.10.5) \quad \begin{cases} H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z) = J_{\frac{1}{2}}(z) + iY_{\frac{1}{2}}(z) = -\,i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz} \; , \\ \\ H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z) = J_{\frac{1}{2}}(z) - iY_{\frac{1}{2}}(z) = +\,i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-iz} \; . \end{cases}$$

Merk op dat deze uitkomst in overeenstemming is met (3.7.6).
De Besselfunctie $J_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$ laat zich afleiden uit $J_{\pm\frac{1}{2}}(z)$ met behulp van de betrekkingen (3.9.9). We vinden dan

$$(\frac{1}{z}\frac{d}{dz})^{\ell}\{z^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(z)\} = (-1)^{\ell}\, z^{-\ell-\frac{1}{2}}\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(z) \; ,$$

oftewel met (3.10.2),

$$(3.10.6) \quad J_{\ell+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{\ell}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{\ell+\frac{1}{2}}(\frac{1}{z}\frac{d}{dz})^{\ell}\{\frac{\sin z}{z}\} \; , \qquad \ell \text{ geheel}, \geq 0 \; .$$

Evenzo laat zich afleiden,

$$(3.10.7) \quad J_{-\ell-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{\ell+\frac{1}{2}}(\frac{1}{z}\frac{d}{dz})^{\ell}\{\frac{\cos z}{z}\} \; , \qquad \ell \text{ geheel}, \geq 0 \; .$$

Met behulp van (3.10.6), (3.10.7) is onmiddellijk in te zien dat $J_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$, $J_{-\ell-\frac{1}{2}}(z)$ zijn uit te drukken in elementaire functies,

$$\left.\begin{matrix} J_{\ell+\frac{1}{2}}(z) \\ \\ J_{-\ell-\frac{1}{2}}(z) \end{matrix}\right\} = \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,(\text{polynoom in } \frac{1}{z}) + \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\,(\text{polynoom in } \frac{1}{z}) \; .$$

Ook de Hankelfuncties $H^{(1)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$, $H^{(2)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$ zijn met behulp van (3.9.9) uit te drukken in $H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z)$, $H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z)$. Analoog als boven vinden we,

$$(3.10.8) \quad H^{(1)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{\ell+1}\, i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{\ell+\frac{1}{2}}(\frac{1}{z}\frac{d}{dz})^{\ell}\left\{\frac{e^{iz}}{z}\right\} \; , \qquad \ell \text{ geheel}, \geq 0$$

en een soortgelijke formule voor $H^{(2)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$. De Hankelfunctie $H^{(1)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$ is volgens (3.10.8) te schrijven als een product van $e^{iz}/\sqrt{z}$ en een polynoom in $1/z$.

Opgave 3.10.1. Bewijs (door volledige inductie) dat de voorstelling (3.10.8) voor $H^{(1)}_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$ overeenstemt met de uitkomst (3.7.5) verkregen bij de asymptotische ontwikkeling van de Hankelfunctie.

3.11. Nulpunten van Besselfuncties

Onder de nulpunten van de Besselfunctie $J_\nu(z)$ verstaan we die waarden van z waarvoor $J_\nu(z) = 0$ is. In deze paragraaf onderstellen we dat de orde ν reëel is. We bewijzen de volgende stellingen:

Stelling I. Alle nulpunten van $J_\nu(z)$ (eventueel met uitzondering van $z = 0$) zijn enkelvoudig.

Bewijs. Stel $z = z_0 \neq 0$ zou een meervoudig nulpunt van $J_\nu(z)$ zijn, dan was minstens $J_\nu(z_0) = J'_\nu(z_0) = 0$. De functie $y = J_\nu(z)$ was dan oplossing van de DV van Bessel

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0 ,$$

en voldeed aan de beginvoorwaarden $y(z_0) = y'(z_0) = 0$. Anderzijds voldoet ook $y(z) \equiv 0$ aan de DV en beginvoorwaarden. Daar $z_0 \neq 0$ is, is z_0 een gewoon punt van de DV van Bessel. Volgens de stelling uit § 1.2 is dan de oplossing van DV plus beginvoorwaarden eenduidig, zodat $J_\nu(z) \equiv 0$ zou zijn. We komen tot een tegenspraak. De nulpunten van $J_\nu(z)$ zijn enkelvoudig, behalve eventueel $z = 0$. □

Opmerking. Dezelfde stelling geldt voor de nulpunten van de Besselfuncties $Y_\nu(z)$, $H^{(1)}_\nu(z)$ en $H^{(2)}_\nu(z)$.

Stelling II (Lommel, 1868). Zij $\nu > -1$, dan zijn alle nulpunten van $J_\nu(z)$ reëel.

Bewijs. We tonen eerst aan dat $J_\nu(z)$ geen zuiver imaginaire nulpunten heeft. Stel daartoe $z = iy$, y reëel, dan is

$$J_\nu(iy) = \left(\frac{iy}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2m} .$$

Voor $\nu > -1$ zijn de termen van de machtreeks alle positief; het is duidelijk dat $J_\nu(iy) \neq 0$ is voor $y \neq 0$. De functie $J_\nu(z)$ heeft geen zuiver imaginaire nulpunten.

Stel nu dat $J_\nu(z)$ een complex (niet zuiver imaginair en niet reëel) nulpunt $z = \alpha$ heeft, dan is $J_\nu(\alpha) = 0$. Wegens $J_\nu(\bar{\alpha}) = \overline{J_\nu(\alpha)} = 0$ is dan ook $z = \bar{\alpha}$ nulpunt van $J_\nu(z)$. Voorts geldt $\alpha^2 - \bar{\alpha}^2 \neq 0$.
Met de methode van § 3.8 (zie (3.8.4)) berekenen we nu de volgende integraal

$$\int_0^1 tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\bar{\alpha}t)dt = \left.\frac{t[\bar{\alpha}J_\nu(\alpha t)J_\nu'(\bar{\alpha}t) - \alpha J_\nu'(\alpha t)J_\nu(\bar{\alpha}t)]}{\alpha^2 - \bar{\alpha}^2}\right|_0^1 = 0$$

wegens $J_\nu(\alpha) = J_\nu(\bar{\alpha}) = 0$. Voor de convergentie van de integraal is nog nodig, $\nu > -1$.
Anderzijds is echter

$$\int_0^1 tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\bar{\alpha}t)dt = \int_0^1 t|J_\nu(\alpha t)|^2 dt = 0 ,$$

waaruit zou volgen $J_\nu(\alpha t) \equiv 0$ voor $0 \le t \le 1$, hetgeen onjuist is. Voor $\nu > -1$ heeft $J_\nu(z)$ dus enkel reële nulpunten. □

Opmerking. De voorwaarde $\nu > -1$ is essentieel. Men kan bewijzen dat voor $\nu < -1$, $J_\nu(z)$ een eindig aantal complexe nulpunten heeft; zie bv. Watson [3.1], Section 15.27.

Op grond van stelling II kunnen we, in geval $\nu > -1$, ons beperken tot het onderzoek van de nulpunten van $J_\nu(x)$ met x reëel.
Wegens $J_\nu(x) = O(x^\nu)$ voor $x \to 0$, zal voor $\nu > 0$ $x = 0$ een nulpunt zijn van $J_\nu(x)$. We zullen verder alleen de positieve nulpunten van $J_\nu(x)$ beschouwen.
Uit de voorstelling

$$J_\nu(x) = (\tfrac{x}{2})^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} (\tfrac{x}{2})^{2m}$$

volgt immers direct dat als $x = x_0 > 0$ een nulpunt is, ook $x = -x_0$ een nulpunt van $J_\nu(x)$ is.

Ter voorbereiding van stelling III bewijzen we eerst de volgende hulpstelling.

Vergelijkingsstelling van Sturm (1836). Zij op het interval (a,b) $\varphi(x)$ een reële oplossing van de DV

(3.11.1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + g_1(x)y = 0$,

en $\psi(x)$ een reële oplossing van de DV

(3.11.2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + g_2(x)y = 0$,

waarbij $g_1(x)$, $g_2(x)$ continu zijn op (a,b). Zij $g_1(x) < g_2(x)$ op (a,b). Tussen twee opeenvolgende nulpunten van $\varphi(x)$ in (a,b) ligt dan minstens één nulpunt van $\psi(x)$.

Bewijs. Laat $\varphi(x)$ opeenvolgende nulpunten x_1, x_2 in (a,b) bezitten. Zonder verlies aan algemeenheid mogen we dan aannemen $\varphi(x) > 0$ op (x_1,x_2), waaruit volgt $\varphi'(x_1) > 0$, $\varphi'(x_2) < 0$.
Onderstel nu dat $\psi(x)$ geen nulpunt bezit in (x_1,x_2) dan mogen we aannemen dat bv. $\psi(x) > 0$ is op (x_1,x_2). We zullen aantonen dat deze onderstelling tot een tegenspraak voert.
Ga daartoe uit van de DV's voor $\varphi(x)$, $\psi(x)$,

$$\varphi''(x) + g_1(x)\varphi(x) = 0 \ , \quad \psi''(x) + g_2(x)\psi(x) = 0 \ .$$

Vermenigvuldig de eerste DV met $\psi(x)$, de tweede DV met $\varphi(x)$ en vorm het verschil,

$$\varphi''(x)\psi(x) - \psi''(x)\varphi(x) = [g_2(x) - g_1(x)]\varphi(x)\psi(x) \ .$$

Integreer over het interval $[x_1,x_2]$ dan volgt

$$\int_{x_1}^{x_2} [g_2(x) - g_1(x)]\varphi(x)\psi(x)dx = \varphi'(x_2)\psi(x_2) - \varphi'(x_1)\psi(x_1) \ .$$

Het linkerlid van deze betrekking is positief wegens $g_1(x) < g_2(x)$, $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$ op (x_1,x_2); het rechterlid is niet-positief wegens $\varphi'(x_1) > 0$, $\varphi'(x_2) < 0$, $\psi(x_1) \geq 0$, $\psi(x_2) \geq 0$. We komen dus tot een tegenspraak. De functie $\psi(x)$ bezit minstens één nulpunt in (x_1,x_2). □

Stelling III. $J_\nu(x)$ bezit aftelbaar veel positieve nulpunten. De afstand tussen twee opeenvolgende nulpunten van $J_\nu(x)$ is $\lesseqgtr \pi$ indien $|\nu| \lesseqgtr \frac{1}{2}$ resp.

Bewijs. Uitgaande van de DV van Bessel is eenvoudig af te leiden dat de functie $w = x^{\frac{1}{2}}J_\nu(x)$ reële oplossing is van de DV

(3.11.3) $$\frac{d^2w}{dx^2} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)w = 0 .$$

Onderscheid nu drie gevallen:

(i) $|\nu| < \frac{1}{2}$. Dan is $1 - (\nu^2 - \frac{1}{4})/x^2 > 1$ en we vergelijken (3.11.3) met de DV

(3.11.4) $$\frac{d^2w}{dx^2} + w = 0 .$$

De algemene oplossing van deze DV i.e.

(3.11.5) $$w = A \cos x + B \sin x ,$$

heeft aftelbaar veel nulpunten op onderlinge afstand π. Tussen elk tweetal opeenvolgende nulpunten ligt volgens de stelling van Sturm minstens één nulpunt van $J_\nu(x)$. Bedenk voorts dat in een begrensd interval $J_\nu(x)$ slechts eindig veel nulpunten kan bezitten op grond van een bekende eigenschap van analytische functies (zie Ackermans-Van Lint [1.1], p.442). $J_\nu(x)$ heeft daarom aftelbaar veel positieve nulpunten.
Onderstel dat $J_\nu(x)$ opeenvolgende nulpunten α, β bezit met afstand $\beta - \alpha \geq \pi$. Men kan dan een oplossing van (3.11.4) construeren die twee (of meer) nulpunten bezit in het interval $[\alpha,\beta]$. Op grond van de stelling van Sturm ligt tussen deze nulpunten minstens één nulpunt van $J_\nu(x)$. Dit is echter in tegenspraak met de veronderstelling dat α, β opeenvolgende nulpunten van $J_\nu(x)$ zijn. De afstand tussen twee opeenvolgende nulpunten van $J_\nu(x)$ is dus $< \pi$.

(ii) $|\nu| > \frac{1}{2}$. Voor $x > |\nu|$ geldt dan $1 - (\nu^2 - \frac{1}{4})/x^2 > 1/4\nu^2$. We vergelijken (3.11.3) nu met de DV

(3.11.6) $$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{4\nu^2} w = 0 .$$

De algemene oplossing van deze DV heeft aftelbaar veel nulpunten. Volgens de stelling van Sturm bezit dan ook $J_\nu(x)$ aftelbaar veel positieve nulpunten. Anderzijds geldt $1 - (\nu^2 - \frac{1}{4})/x^2 < 1$. Vergelijk nu de DV's (3.11.3) en (3.11.4) en pas de stelling van Sturm toe: Tussen twee opeenvolgende nulpunten van $J_\nu(x)$ ligt minstens één nulpunt van de functie (3.11.5). Omdat de nulpunten van (3.11.5) onderlinge afstand π hebben moet de afstand tussen twee opeenvolgende nulpunten van $J_\nu(x)$, $> \pi$ zijn.

(iii) $|\nu| = \frac{1}{2}$. Voor $\nu = \pm \frac{1}{2}$ is afgeleid (zie (3.10.2), (3.10.3)),

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \;, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \;.$$

De nulpunten van deze functies zijn $x = (n+1)\pi$, resp. $x = (n+\frac{1}{2})\pi$ met n geheel, ≥ 0. □

De nulpunten van $J_\nu(x)$ zijn te rangschikken in een rij

(3.11.7) $$0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \ldots < j_{\nu,n} < \ldots \;, \quad \lim_{n\to\infty} j_{\nu,n} = \infty \;,$$

waarbij $j_{\nu,n}$ het n-de positieve nulpunt van $J_\nu(x)$ is.

Opgave 3.11.1. Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} (j_{\nu,n+1} - j_{\nu,n}) = \pi \;.$$

Ter voorbereiding van stelling IV formuleren we nu de volgende hulpstelling:

Stelling van Rolle. Zij de functie $f(x)$ differentieerbaar op $[a,b]$ en zij $f(a) = f(b) = 0$, dan bestaat er een punt c met $a < c < b$, zodanig dat $f'(c) = 0$.

Voor het bewijs, zie Ackermans-Van Lint [1.1], p.291. De stelling van Rolle drukt uit dat tussen elke twee nulpunten van $f(x)$ minstens één nulpunt van $f'(x)$ ligt.

Stelling IV. Tussen elke twee opeenvolgende positieve nulpunten van $J_\nu(x)$ ligt precies één nulpunt van $J_{\nu+1}(x)$, en omgekeerd, tussen elke twee opeenvolgende positieve nulpunten van $J_{\nu+1}(x)$ ligt precies één nulpunt van $J_\nu(x)$.

Bewijs. We maken gebruik van de relaties (3.9.1), (3.9.2),

(3.11.8) $$\frac{d}{dx}\{x^{-\nu}J_\nu(x)\} = -\,x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \;,$$

(3.11.9) $$\frac{d}{dx}\{x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)\} = x^{\nu+1}J_\nu(x) \;.$$

Ga uit van twee opeenvolgende positieve nulpunten $j_{\nu,n}$, $j_{\nu,n+1}$ van $J_\nu(x)$ dan zijn $j_{\nu,n}$, $j_{\nu,n+1}$ tevens nulpunt van $x^{-\nu}J_\nu(x)$. Volgens de stelling van Rolle ligt er dan tussen $j_{\nu,n}$ en $j_{\nu,n+1}$ minstens één nulpunt van de afgeleide, d.w.z. van $J_{\nu+1}(x)$ (zie (3.11.8)). Stel nu dat $J_{\nu+1}(x)$ twee nulpunten λ_1, λ_2 zou bezitten met $j_{\nu,n} < \lambda_1 < \lambda_2 < j_{\nu,n+1}$. Dan zijn λ_1, λ_2 ook nulpunt van $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$. Met behulp van (3.11.9) en de stelling van Rolle volgt dat tussen λ_1 en λ_2 minstens één nulpunt van $J_\nu(x)$ zou liggen. Dit is in strijd met het gegeven dat $j_{\nu,n}$ en $j_{\nu,n+1}$ opeenvolgende nulpunten van $J_\nu(x)$ zijn. Tussen $j_{\nu,n}$ en $j_{\nu,n+1}$ ligt dus <u>precies</u> één nulpunt van $J_{\nu+1}(x)$. Het bewijs van het omgekeerde gaat analoog. □

Voor <u>$\nu > -1$</u> zijn de nulpunten van $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ te rangschikken volgens

(3.11.10) $0 < j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < \dots < j_{\nu,n} < j_{\nu+1,n} < \dots$.

N.B. Verifieer dat inderdaad $j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1}$ is voor $\nu > -1$.

De nulpunten van de Besselfuncties $J_\nu(x)$ zijn uitvoerig getabelleerd; zo is bv.

$$j_{0,1} \doteq 2.4048,\ j_{0,2} \doteq 5.5201,\ j_{0,3} \doteq 8.6537,\ j_{0,4} \doteq 11.7915,$$
$$j_{1,1} \doteq 3.8317,\ j_{1,2} \doteq 7.0156,\ j_{1,3} \doteq 10.1735,\ j_{1,4} \doteq 13.3237.$$

<u>Opgave 3.11.2</u>. Toon aan dat tussen elke twee opeenvolgende positieve nulpunten van $J_\nu(x)$ precies één nulpunt van $Y_\nu(x)$ ligt, en omgekeerd.
Aanwijzing: Maak gebruik van de Wronski-relatie, $W(J_\nu, Y_\nu) = 2/\pi x$ (zie § 3.4); schets tevens de grafiek van de functie $J_\nu(x)/Y_\nu(x)$ voor $x > 0$.

<u>Opgave 3.11.3</u>. Geef een asymptotische ontwikkeling voor $j_{\nu,n}$ geldig voor grote waarden van n. Onderzoek de nauwkeurigheid van deze ontwikkeling in geval $\nu = 0,1$ door vergelijken met de exacte waarden van $j_{0,n}$, $j_{1,n}$ als hiervoor vermeld.

<u>Opgave 3.11.4</u>. Voor $\nu > 0$ geldt $j_{\nu,1} > j'_{\nu,1} > \nu$ waarbij $j'_{\nu,1}$ het kleinste positieve nulpunt van $J'_\nu(x)$ is; toon dit aan.

<u>Opgave 3.11.5</u>. Toon aan dat voor $\nu \geq 0$ alle nulpunten van $J'_\nu(z)$ <u>reëel</u> zijn.
Onderzoek tevens de nulpunten van $J'_\nu(z)$ in geval $-1 < \nu < 0$.
Toon aan dat tussen elke twee opeenvolgende positieve nulpunten van $J_\nu(x)$ precies één nulpunt van $J'_\nu(x)$ ligt, en omgekeerd.

<u>Opgave 3.11.6</u>. Voer in de functie

$$G(z) := AJ_\nu(z) + zJ'_\nu(z) ,$$

waarin $\nu > -1$ en A een reële constante is. Bewijs dat alle nulpunten van $G(z)$ reëel en enkelvoudig (behalve eventueel $z = 0$) zijn, indien $A + \nu \geq 0$ is. Toon aan dat tussen elke twee opeenvolgende positieve nulpunten van $G(z)$ precies één nulpunt van $J_\nu(z)$ ligt, en omgekeerd.
Literatuur: Watson [3.1], Sections 15.23, 15.25.

3.12. Orthogonaliteitsbetrekkingen, Fourier-Bessel reeksen

In stelling III van de vorige paragraaf is bewezen dat voor ν reëel de Besselfunctie $J_\nu(x)$ aftelbaar veel positieve nulpunten bezit, te rangschikken volgens

$$0 < j_1 < j_2 < \dots < j_n < \dots , \quad J_\nu(j_n) = 0 .$$

Stelling. Zij $\nu > -1$, dan vormen de Besselfuncties

$$J_\nu(j_1 x),\ J_\nu(j_2 x),\ \dots,\ J_\nu(j_n x),\ \dots$$

op het interval $[0,1]$ een orthogonaal stelsel met gewichtsfunctie x, d.w.z.

$$\int_0^1 x J_\nu(j_m x) J_\nu(j_n x)\,dx = \tfrac{1}{2} J_{\nu+1}^2(j_m)\delta_{mn} . \tag{3.12.1}$$

Hierin is δ_{mn} het Kroneckersymbool: $\delta_{mn} = 0$ voor $m \neq n$, $\delta_{mm} = 1$.

Bewijs. 1°. $m \neq n$. Met behulp van (3.8.4) vinden we dan,

$$\int_0^1 x J_\nu(j_m x) J_\nu(j_n x)\,dx = \left. \frac{x[j_n J_\nu(j_m x) J_\nu'(j_n x) - j_m J_\nu'(j_m x) J_\nu(j_n x)]}{j_m^2 - j_n^2} \right|_0^1 .$$

Pas vervolgens de recurrente betrekking (3.9.4) toe, i.e.

$$\lambda x J_\nu'(\lambda x) = \nu J_\nu(\lambda x) - \lambda x J_{\nu+1}(\lambda x) , \tag{3.12.2}$$

dan volgt

$$\int_0^1 x J_\nu(j_m x) J_\nu(j_n x)\,dx = \left. \frac{x[j_m J_{\nu+1}(j_m x) J_\nu(j_n x) - j_n J_\nu(j_m x) J_{\nu+1}(j_n x)]}{j_m^2 - j_n^2} \right|_0^1 . \tag{3.12.3}$$

Voor $x \to 0$ is het rechterlid van (3.12.3) $O(x^{2\nu+2})$; wegens $\nu > -1$ is daarom de bijdrage van de ondergrens $x = 0$ gelijk nul. Ook de bijdrage van de bovengrens $x = 1$ is nul, wegens $J_\nu(j_m) = J_\nu(j_n) = 0$. We vinden dus,

$$(3.12.4)\qquad \int_0^1 xJ_\nu(j_m x)J_\nu(j_n x)dx = 0\ , \qquad m \neq n\ .$$

2°. m = n. Met behulp van (3.8.6) vinden we dan

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(j_m x)dx = \left.\frac{(j_m^2x^2-\nu^2)J_\nu^2(j_m x) + j_m^2x^2\{J_\nu'(j_m x)\}^2}{2j_m^2}\right|_0^1 =$$

$$= \left.\frac{j_m^2x^2\{J_\nu^2(j_m x) + J_{\nu+1}^2(j_m x)\} - 2\nu j_m x\, J_\nu(j_m x)J_{\nu+1}(j_m x)}{2j_m^2}\right|_0^1 ,$$

waarbij de afgeleide $J_\nu'(j_m x)$ geëlimineerd is met behulp van (3.12.2). Substitutie van onder- en bovengrens leidt dan tot

$$(3.12.5)\qquad \int_0^1 xJ_\nu^2(j_m x)dx = \tfrac{1}{2}J_{\nu+1}^2(j_m)\ . \qquad \square$$

Analoog aan de theorie der Fourierreeksen kunnen we nu <u>reeksen</u> beschouwen naar de <u>Besselfuncties</u> $J_\nu(j_m x)$ $(m = 1,2,3,\ldots)$, bv.

$$(3.12.6)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(j_m x) = S(x)\ .$$

Onderstel dat de reeks (3.12.6) uniform convergent is op [0,1], dan is de coëfficiënt a_n uit te drukken in de som S(x). Vermenigvuldig daartoe (3.12.6) met $xJ_\nu(j_n x)$ en integreer over [0,1], dan is

$$\int_0^1 xS(x)J_\nu(j_n x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^1 xJ_\nu(j_m x)J_\nu(j_n x)dx = \tfrac{1}{2}a_n J_{\nu+1}^2(j_n)\ ,$$

op grond van de orthogonaliteit der Besselfuncties $J_\nu(j_m x)$.
We kunnen nu a_n oplossen,

$$(3.12.7)\qquad a_n = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(j_n)} \int_0^1 xS(x)J_\nu(j_n x)dx\ .$$

Deze formule is het analogon van de formules voor de coëfficiënten van een Fourierreeks. De reeks (3.12.6) heet een <u>Fourier-Bessel reeks</u>. Voor $\nu = \pm\frac{1}{2}$ gaat deze reeks over in een Fourier-sinusreeks resp. Fourier-cosinusreeks.

We kunnen vervolgens het omgekeerde probleem beschouwen. We gaan uit van een functie f(x), gedefinieerd op het interval [0,1]. Bereken dan de bijbehorende Fourier-Bessel coëfficiënten a_n volgens

$$(3.12.8)\quad a_n = \frac{2}{J^2_{\nu+1}(j_n)} \int_0^1 x f(x) J_\nu(j_n x)\,dx ,$$

en vorm de Fourier-Bessel reeks

$$(3.12.9)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(j_n x) .$$

Men kan nu bewijzen dat onder zekere voorwaarden voor de functie f(x), de Fourier-Bessel reeks (3.12.9) convergent is met som f(x), i.e.

$$(3.12.10)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(j_n x) .$$

We vermelden nog de volgende stelling hierover (vergelijk deze stelling met de hoofdstelling uit de theorie der Fourierreeksen, Ackermans-Van Lint [1.1], p.390):

Stelling. Zij de functie f(x) gedefinieerd op [0,1] en zij $\int_0^1 x^{\frac12} f(x)\,dx$ absoluut convergent. Laat f(x) in het punt $x = \xi$, $0 < \xi < 1$, voldoen aan de Dirichlet condities (Ackermans-Van Lint [1.1], p.390), dan is de Fourier-Bessel reeks van f(x) convergent in $x = \xi$ met som $\frac12[f(\xi+0) + f(\xi-0)]$.

Voor het bewijs wordt verwezen naar Watson [3.1], chapter 18, speciaal Section 18.24.

Opgave 3.12.1. Leid af de Fourier-Bessel reeks

$$x^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{j_n J_{\nu+1}(j_n)} J_\nu(j_n x) , \qquad 0 \le x < 1 .$$

Opgave 3.12.2. Ontwikkel de functie log x in een Fourier-Bessel reeks naar Besselfuncties $J_0(j_n x)$.

Opgave 3.12.3. Voor $\nu \ge 0$ bezit $J'_\nu(x)$ aftelbaar veel positieve nulpunten, te rangschikken volgens

$$0 < j'_1 < j'_2 < \dots < j'_n < \dots , \quad J'_\nu(j'_n) = 0 ,$$

zie opgave 3.11.5.
Toon aan dat de Besselfuncties $J_\nu(j'_m x)$, $m = 1,2,3,\dots$, op $[0,1]$ een orthogonaal stelsel met gewichtsfunctie x vormen.
Laat zien dat in geval $\nu = 0$ de constante functie aan dit stelsel kan worden toegevoegd.

Opgave 3.12.4. Voor $\nu > -1$, $A + \nu \geq 0$ bezit de functie $G(x) = AJ_\nu(x) + xJ'_\nu(x)$ aftelbaar veel positieve nulpunten, te rangschikken volgens

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots , \quad G(\lambda_n) = 0 ,$$

zie opgave 3.11.6.
Toon aan dat de Besselfuncties $J_\nu(\lambda_m x)$, $m = 1,2,3,\dots$, op $[0,1]$ een orthogonaal stelsel met gewichtsfunctie x vormen.

3.13. Gemodificeerde Besselfuncties

In een aantal mathematisch fysische problemen doet zich voor de gemodificeerde DV van Bessel,

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2)y = 0 , \tag{3.13.1}$$

die verwant is met de DV van Bessel. Stel namelijk $\zeta = iz$, dan gaat (3.13.1) over in

$$\zeta^2 \frac{d^2y}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dy}{d\zeta} + (\zeta^2 - \nu^2)y = 0$$

d.i. de DV van Bessel met oplossingen $J_\nu(\zeta)$, $J_{-\nu}(\zeta)$. De oorspronkelijke DV (3.13.1) heeft dus oplossingen $J_\nu(iz)$, $J_{-\nu}(iz)$.

Definitie. De gemodificeerde Besselfunctie van de eerste soort en orde ν, $I_\nu(z)$, wordt gegeven door

$$I_\nu(z) := \exp(-\tfrac{1}{2}\nu\pi i)J_\nu(iz) . \tag{3.13.2}$$

Uitgaande van deze definitie laat zich voor $I_\nu(z)$ de volgende MR-ontwikkeling afleiden,

$$(3.13.3)\quad I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} .$$

De functie $I_\nu(z)$ is weer een analytische functie van z (in het opengesneden z-vlak) en een gehele functie van ν.
De gemodificeerde DV van Bessel (3.13.1) heeft nu tot oplossingen $I_\nu(z)$, $I_{-\nu}(z)$. De bijbehorende Wronski determinant laat zich berekenen,

$$W(I_\nu, I_{-\nu}) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z} .$$

De oplossingen $I_\nu(z)$, $I_{-\nu}(z)$ zijn dus lineair onafhankelijk indien ν niet geheel is, lineair afhankelijk als ν geheel is. Dit laatste volgt ook uit,

$$I_n(z) = I_{-n}(z) ,$$

geldig voor n geheel.

Definitie. De gemodificeerde Besselfunctie van de tweede soort en orde ν, $K_\nu(z)$, wordt gegeven door,

$$(3.13.4)\quad K_\nu(z) := \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi} , \qquad \nu \text{ niet geheel,}$$

$$(3.13.5)\quad K_n(z) := \lim_{\nu\to n} K_\nu(z) = \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial\nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} , \qquad n \text{ geheel.}$$

De Wronski determinant van $I_\nu(z)$ en $K_\nu(z)$ wordt gegeven door,

$$W(I_\nu, K_\nu) = -\frac{1}{z} \neq 0 ,$$

zodat de oplossingen $I_\nu(z)$ en $K_\nu(z)$ lineair onafhankelijk zijn voor elke ν.
Uit de definitie van $K_\nu(z)$ is eenvoudig af te leiden de volgende betrekking tussen $K_\nu(z)$ en de Hankelfunctie,

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} \exp(\tfrac{1}{2}\nu\pi i) H_\nu^{(1)}(iz) .$$

Uit de in (3.7.3) gegeven asymptotische ontwikkeling voor de Hankelfunctie laat zich dan voor $K_\nu(z)$ afleiden,

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-\nu)_k(\frac{1}{2}+\nu)_k}{k!} \frac{(-1)^k}{(2z)^k} , \quad (|z| \to \infty,\ -\tfrac{3}{2}\pi < \arg z < \tfrac{3}{2}\pi) .$$

De beginterm van deze asymptotische ontwikkeling luidt,

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}[1 + O(\frac{1}{z})] \ , \quad |z| \to \infty, \ -\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi \ ,$$

terwijl voor de functie $I_\nu(z)$ kan worden afgeleid,

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\,[1 + O(\frac{1}{z})] \ , \quad |z| \to \infty, \ -\tfrac{1}{2}\pi < \arg z < \tfrac{1}{2}\pi \ .$$

Stellen we $z = x$, reëel en positief, dan geldt voor grote waarden van x,

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \ , \quad K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \ .$$

De functie $I_\nu(x)$ is dus exponentieel toenemend, de functie $K_\nu(x)$ nadert exponentieel afnemend naar 0 indien $x \to \infty$.

<u>Opgave 3.13.1</u>. Verifieer de in deze paragraaf opgesomde eigenschappen van de gemodificeerde Besselfuncties.
Leid een machtreeksontwikkeling af voor de functies $K_0(z)$, $K_n(z)$ met n geheel (vergelijk (3.4.3, (3.4.6)). De functie $K_0(z)$ heeft een logarithmische singulariteit in $z = 0$.
Bepaal de genererende functie van de Besselfuncties $I_n(z)$ en leid integraalvoorstellingen af voor $I_n(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, analoog aan de integraalvoorstellingen van Bessel en Poisson uit § 3.6.
Bereken de integraal

$$\int z A_\nu(kz) B_\nu(\ell z)\, dz \ ,$$

waarbij $A_\nu(kz)$, $B_\nu(\ell z)$ gemodificeerde Besselfuncties zijn van de orde ν.
Leid recurrente betrekkingen af voor de Besselfuncties $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, zulks naar analogie van § 3.9. Het zal blijken dat de recurrente betrekkingen voor $I_\nu(z)$ en $K_\nu(z)$ verschillend zijn.
Toon aan dat de functies $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ in geval ν halftallig is, $\nu = \ell + \frac{1}{2}$, zijn uit te drukken in elementaire functies.

Hoofdstuk IV. Functies van Legendre

4.1. Definitie van de Legendre polynomen met behulp van de genererende functie

We beschouwen de functie

$$(4.1.1) \qquad F(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}, \qquad F(z,0) = 1 .$$

Deze functie is analytisch in t binnen een zekere cirkel C om $t = 0$. De functie $F(z,t)$ is singulier in de vertakkingspunten van de wortelvorm $\sqrt{1-2zt+t^2}$, d.i. in $t = z \pm \sqrt{z^2-1}$. De straal van C zal daarom gelijk zijn aan

$$\min\{|z+\sqrt{z^2-1}|, |z-\sqrt{z^2-1}|\} .$$

Binnen de cirkel C is $F(z,t)$ te ontwikkelen in een MR naar machten van t. Noem de coëfficiënt van t^n $P_n(z)$, dan is

$$(4.1.2) \qquad F(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n .$$

We zullen aanstonds bewijzen dat de coëfficiënt $P_n(z)$ een polynoom in z van de graad n is. We noemen $P_n(z)$ het n-de polynoom van Legendre of het Legendre polynoom van de graad n. De Legendre polynomen zijn aldus door (4.1.2) gedefinieerd (Legendre, 1784). De functie $F(z,t)$ heet de genererende functie van de Legendre polynomen.

We zullen nu (4.1.2) verder uitwerken en een expliciete voorstelling afleiden voor $P_n(z)$. Ontwikkel daartoe de wortelvorm in een binomiaalreeks,

$$F(z,t) = (1-2zt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{1}{2}-r+1)}{r!} (-1)^r (2zt-t^2)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_r}{r!} (2zt-t^2)^r$$

geldig voor $|2zt-t^2| < 1$.

Ontwikkel $(2zt-t^2)^r$ met het binomium van Newton, dan is

$$(4.1.3) \qquad F(z,t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_r}{r!} \sum_{k=0}^{r} \frac{r!}{k!(r-k)!} (2zt)^{r-k}(-1)^k(t^2)^k =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} \frac{(\frac{1}{2})_r}{k!(r-k)!} (-1)^k (2z)^{r-k} t^{r+k} .$$

Stel nu $r+k = n$ en voer als nieuwe sommatievariabelen in, n en k. Dan loopt n van 0 tot ∞; k varieert van 0 tot $\frac{1}{2}n$ (n even) of $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ (n oneven). De bovengrens voor k noteren we als $[\frac{1}{2}n]$, spreek uit: entier van $\frac{1}{2}n$, d.i. het grootste gehele getal $\leq \frac{1}{2}n$. De dubbelsom (4.1.3) gaat dan over in,

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}n]} \frac{(\frac{1}{2})_{n-k}}{k!(n-2k)!} (-1)^k (2z)^{n-2k} .$$

Vergelijk dit resultaat met (4.1.2) dan volgt

$$(4.1.4) \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}n]} \frac{(\frac{1}{2})_{n-k}}{k!(n-2k)!} (-1)^k (2z)^{n-2k} .$$

Met behulp van de verdubbelingsformule voor de Γ-functie is af te leiden de relatie

$$(4.1.5) \qquad (\tfrac{1}{2})_p = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2p+1)}{2^{2p}\Gamma(p+1)} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} ,$$

waarna (4.1.4) nog te vereenvoudigen is tot

$$(4.1.6) \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}n]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} z^{n-2k} , \qquad n = 0,1,2,\dots .$$

We constateren dat $P_n(z)$ inderdaad een <u>polynoom</u> in z van de <u>graad</u> n is. De eerste term van de som (4.1.6) is van de graad n; de laatste term is van de graad $n - 2[\frac{1}{2}n]$, d.i. 1 (n oneven) of 0 (n even).
Indien n even resp. oneven is, bevat $P_n(z)$ enkel even resp. oneven machten van z. $P_n(z)$ is dan een <u>even</u> resp. <u>oneven</u> functie van z.
We zullen de eerste zes Legendre polynomen nog uitschrijven,

$$(4.1.6a) \qquad \begin{aligned} P_0(z) &= 1 , \\ P_1(z) &= z , \\ P_2(z) &= \tfrac{1}{2}(3z^2 - 1) , \\ P_3(z) &= \tfrac{1}{2}(5z^3 - 3z) , \\ P_4(z) &= \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3) , \\ P_5(z) &= \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z) . \end{aligned}$$

In (4.1.6) is $P_n(z)$ gerangschikt naar <u>afdalende</u> machten van z. We herleiden nu (4.1.6) tot een voorstelling waarin gerangschikt is naar <u>opklimmende</u> machten van z.

In geval n <u>even</u>, n = 2m, zal gelden,

$$P_{2m}(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{(4m-2k)!}{2^{2m}k!(2m-k)!(2m-2k)!} z^{2m-2k} .$$

Stel j = m - k dan volgt

$$(4.1.7) \quad P_{2m}(z) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \frac{(2m+2j)!}{2^{2m}(m-j)!(m+j)!(2j)!} z^{2j} .$$

Evenzo geldt voor n <u>oneven</u>, n = 2m + 1,

$$(4.1.8) \quad P_{2m+1}(z) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \frac{(2m+2j+2)!}{2^{2m+1}(m-j)!(m+j+1)!(2j+1)!} z^{2j+1} .$$

Men kan gemakkelijk verifiëren dat (4.1.7), (4.1.8) overeenstemmen met de in het voorbeeld uit § 1.2 gevonden polynoom-oplossingen van de DV van Legendre.

We berekenen vervolgens $P_n(\pm 1)$, $P_n(0)$ met behulp van de genererende functie (4.1.2). Substitueer z = 1 in (4.1.2), dan volgt

$$F(1,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n .$$

Anderzijds is

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n , \quad |t| < 1 ,$$

zodat we vinden

$$(4.1.9) \quad P_n(1) = 1 .$$

Evenzo is af te leiden

$$(4.1.10) \quad P_n(-1) = (-1)^n .$$

Substitueer vervolgens z = 0 in de genererende functie (4.1.2),

$$F(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n ,$$

terwijl anderzijds geldt,

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} t^{2n} \ , \quad |t| < 1 \ .$$

Vergelijk deze twee ontwikkelingen, dan volgt met (4.1.5),

$$P_{2n+1}(0) = 0 \ , \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \ .$$

<u>Opgave 4.1.1.</u> Bereken $P_n'(\pm 1)$, $P_n'(0)$ met behulp van de genererende functie.

Tenslotte zullen we met behulp van de genererende functie, de functie $P_n(\cos\theta)$ ontwikkelen in een <u>Fourierreeks</u>. Ga daartoe uit van (4.1.2) en substitueer $z = \cos\theta$,

$$\begin{aligned} F(\cos\theta,t) &= (1-2t\cos\theta+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-te^{i\theta}-te^{-i\theta}+t^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (1-te^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-te^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)t^n \ . \end{aligned}$$

Anderzijds zijn de factoren $(1-te^{\pm i\theta})^{-\frac{1}{2}}$ te ontwikkelen in binomiaalreeksen,

$$(1-te^{i\theta})^{-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_j}{j!} e^{ij\theta} t^j \ , \quad |t| < 1 \ ,$$

$$(1-te^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!} e^{-ik\theta} t^k \ , \quad |t| < 1 \ .$$

Vermenigvuldig deze reeksen, dan volgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)t^n &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_j(\frac{1}{2})_k}{j!k!} e^{i(j-k)\theta} t^{j+k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2})_k(\frac{1}{2})_{n-k}}{k!(n-k)!} e^{i(n-2k)\theta} \ , \end{aligned}$$

waarin een nieuwe sommatievariabele $n = j+k$ ingevoerd is.
Hieruit is onmiddellijk af te lezen,

$$(4.1.11) \quad P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2})_k(\frac{1}{2})_{n-k}}{k!(n-k)!} e^{i(n-2k)\theta} \ .$$

Deze uitkomst is nog te vereenvoudigen met behulp van (4.1.5). Voorts is $P_n(\cos\theta)$ reëel: we kunnen daarom in het rechterlid van (4.1.11) volstaan met het reële deel van de som. Er volgt dan

$$(4.1.12)\quad P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{2^{2n}(k!)^2[(n-k)!]^2}\cos(n-2k)\theta\ ,$$

d.i. de (eindige) <u>Fourierreeks</u> van $P_n(\cos\theta)$.
Eventueel is (4.1.12) nog verder te vereenvoudigen. De eerste term ($k = 0$) en de laatste term ($k = n$) bevatten beide een factor $\cos n\theta$. Evenzo zijn alle andere termen - behalve eventueel de middelste - paarsgewijs te combineren.
We zullen de Fourierreeks (4.1.12) nog uitwerken voor $n = 0,1,2,3$,

$$P_0(\cos\theta) = 1\ ,$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta\ ,$$

$$P_2(\cos\theta) = \tfrac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)\ ,$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta)\ .$$

Uit de Fourierreeks (4.1.12) laat zich de volgende <u>ongelijkheid</u> voor het Legendre polynoom $P_n(x)$ afleiden,

$$|P_n(\cos\theta)| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{2^{2n}(k!)^2[(n-k)!]^2}\,|\cos(n-2k)\theta|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{2^{2n}(k!)^2[(n-k)!]^2} = P_n(\cos 0) = P_n(1) = 1\ ,$$

oftewel

$$(4.1.13)\quad |P_n(x)| \le 1\ ,\qquad -1 \le x \le 1\ .$$

<u>Opgave 4.1.2</u>. De <u>Hermite polynomen</u> $H_n(z)$ worden gedefinieerd door middel van de genererende functie

$$\exp(2zt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!}\,t^n\ .$$

Leid een expliciete voorstelling af voor $H_n(z)$. Laat zien dat $H_n(z)$ overeenstemt met het polynoom ingevoerd in opgave 1.2.2.

Opgave 4.1.3. De Laguerre polynomen $L_n(z)$ worden gedefinieerd door middel van de genererende functie

$$(1-t)^{-1}\exp\left(-\frac{zt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(z)t^n .$$

Leid een expliciete voorstelling af voor $L_n(z)$. Laat zien dat $L_n(z)$ overeenstemt met het polynoom ingevoerd in opgave 1.4.2.

4.2. Recurrente betrekkingen voor de Legendre polynomen $P_n(z)$

Voor de Legendre polynomen gelden de volgende recurrente betrekkingen,

(I) $$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0 ,$$

(II) $$zP_n'(z) - P_{n-1}'(z) = nP_n(z) ,$$

(III) $$P_{n+1}'(z) - zP_n'(z) = (n+1)P_n(z) ,$$

(IV) $$P_{n+1}'(z) - P_{n-1}'(z) = (2n+1)P_n(z) ,$$

(V) $$(z^2-1)P_n'(z) = nzP_n(z) - nP_{n-1}(z) .$$

Deze betrekkingen gelden voor $n = 0,1,2,\ldots$; daarbij is per definitie, $P_{-1}(z) \equiv 0$.

Afleiding. (I). Differentieer de genererende functie

$$F(z,t) = (1-2zt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n$$

naar t,

(4.2.1) $$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)t^{n-1} ,$$

oftewel

$$\frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-2zt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)t^{n-1} ,$$

$$(z-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n = (1-2zt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)t^{n-1} .$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van t^n links en rechts geeft,

$$zP_n(z) - P_{n-1}(z) = (n+1)P_{n+1}(z) - 2nzP_n(z) + (n-1)P_{n-1}(z) \ ,$$

oftewel

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0 \ .$$

(II). Differentieer de genererende functie naar z,

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = \frac{t}{(1-2zt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(z)t^n \ .$$

Combineer deze betrekking met (4.2.1) dan is

$$(z-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(z)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)t^n \ .$$

Stel de coëfficiënten van t^n links en rechts aan elkaar gelijk, dan volgt,

$$zP_n'(z) - P_{n-1}'(z) = nP_n(z) \ .$$

(III). Differentieer (I) naar z,

$$(n+1)P_{n+1}'(z) - (2n+1)P_n(z) - (2n+1)zP_n'(z) + nP_{n-1}'(z) = 0 \ .$$

Vermenigvuldig (II) met n,

$$nzP_n'(z) - nP_{n-1}'(z) = n^2P_n(z) \ .$$

Tel deze betrekkingen op en deel door $(n+1)$ dan volgt,

$$P_{n+1}'(z) - zP_n'(z) = (n+1)P_n(z) \ .$$

(IV). Tel de betrekkingen (II) en (III) op, dan ontstaat er juist de relatie (IV). De betrekking (IV) wordt ook wel geschreven als

$$\int P_n(z)dz = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(z) - P_{n-1}(z)\right] + C \ .$$

(V). Vermenigvuldig (II) met z en vervang in (III) n door $(n-1)$, dan ontstaat er,

$$z^2P_n'(z) - zP_{n-1}'(z) = nzP_n(z) \ ,$$

$$P_n'(z) - zP_{n-1}'(z) = nP_{n-1}(z) \ .$$

Vorm nu het verschil van deze relaties,

$$(z^2-1)P_n'(z) = nzP_n(z) - nP_{n-1}(z) \ . \qquad \square$$

Uitgaande van (V) zullen we aantonen dat het Legendre polynoom $P_n(z)$ voldoet aan de DV van Legendre. Differentieer daartoe (V) naar z en maak gebruik van (II),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}[(z^2-1)P_n'(z)] &= nP_n(z) + nzP_n'(z) - nP_{n-1}'(z)\\ &= nP_n(z) + nzP_n'(z) - n\{zP_n'(z) - nP_n(z)\}\\ &= n(n+1)P_n(z) \ .\end{aligned}$$

De functie $y = P_n(z)$ voldoet dus aan de DV,

$$\frac{d}{dz}[(z^2-1)\frac{dy}{dz}] - n(n+1)y = 0$$

oftewel

$$(4.2.2) \qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0 \ ,$$

d.i. de DV van Legendre.

Opgave 4.2.1. Leid recurrente betrekkingen af voor de Hermite polynomen $H_n(z)$ gedefinieerd in opgave 4.1.2. Toon aan dat $H_n(z)$ voldoet aan de DV van Hermite als gegeven in opgave 1.2.2.

Opgave 4.2.2. Leid recurrente betrekkingen af voor de Laguerre polynomen $L_n(z)$ gedefinieerd in opgave 4.1.3. Toon aan dat $L_n(z)$ voldoet aan de DV van Laguerre als gegeven in opgave 1.4.2.

4.3. Formule van Rodrigues, integraalvoorstellingen van Schläfli en van Laplace

De formule van Rodrigues (1816) luidt

$$(4.3.1) \qquad P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n] \ , \qquad n = 0,1,2,\ldots \ .$$

Afleiding. In § 4.1 is het polynoom $P_n(z)$ ingevoerd als de coëfficiënt van t^n in de Taylorreeks (4.1.2). Volgens een bekend resultaat uit de functietheorie (Ackermans-Van Lint [1.1], p.436,441) is dan $P_n(z)$ voor te stellen door de volgende contourintegraal,

$$(4.3.2) \quad P_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} [(1 - 2zt + t^2)^{-\frac{1}{2}}]_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1 - 2zt + t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t^{n+1}} \, dt \, .$$

Hierin is C een willekeurige Jordankromme die in positieve zin doorlopen wordt en het punt $t = 0$ omsluit. Neem voor C een cirkel met middelpunt $z = 0$ en straal kleiner dan $\min\{|z + \sqrt{z^2 - 1}|, |z - \sqrt{z^2 - 1}|\}$. Herleid nu de integrand in (4.3.2) tot een rationale functie door de transformatie

$$(4.3.3) \quad (1 - 2zt + t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - wt \, ,$$

waarbij w de nieuwe integratievariabele zal zijn. Uit (4.3.3) volgt,

$$(4.3.4) \quad t = \frac{2(z - w)}{1 - w^2} \, , \quad (1 - 2zt + t^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1 - 2zw + w^2}{1 - w^2} \, , \quad \frac{dt}{dw} = - \frac{2(1 - 2zw + w^2)}{(1 - w^2)^2} \, ,$$

terwijl het punt $t = 0$ overgaat in $w = z$. Men kan nu bewijzen dat de transformatie (4.3.3) de cirkel C doet overgaan in een Jordankromme C^* in het w-vlak, die in positieve zin doorlopen wordt en het punt $w = z$ omsluit. De integraal (4.3.2) gaat na de transformatie over in

$$(4.3.5) \quad P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{(w^2 - 1)^n}{2^n (w - z)^{n+1}} \, dw \, ,$$

d.i. de <u>integraalvoorstelling</u> van <u>Schläfli</u> (1881).
Met behulp van een bekende stelling uit de functietheorie (Ackermans-Van Lint [1.1], p.436) volgt uit (4.3.5),

$$(4.3.6) \quad P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n] \, . \qquad \square$$

<u>Opgave 4.3.1</u>. Leid de formule van Rodrigues ook af door directe berekening. Ontwikkel daartoe $(z^2 - 1)^n$ met behulp van het binomium van Newton, voer de differentiatie uit in (4.3.1) en verifieer dat de uitkomst overeenstemt met (4.1.6).

<u>Opgave 4.3.2</u>. Neem in (4.3.5) voor C^* de cirkel met middelpunt z en straal $|z^2 - 1|^{\frac{1}{2}}$ en leid aldus af de <u>integraalvoorstelling</u> van <u>Laplace</u> (1825),

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi]^n \, d\varphi \, .$$

Opgave 4.3.3. Leid een formule van Rodrigues' type af voor het Hermite polynoom $H_n(z)$ en voor het Laguerre polynoom $L_n(z)$ als gedefinieerd in de opgaven 4.1.2, 4.1.3.

4.4. Nulpunten van Legendre polynomen

Het Legendre polynoom $P_n(z)$ is een polynoom van de graad n. Volgens de hoofdstelling van de algebra (Ackermans-Van Lint [1.1], p.450) heeft $P_n(z)$ dan precies n nulpunten. We bewijzen nu de volgende stelling:

Stelling. Het Legendre polynoom $P_n(z)$ heeft n enkelvoudige nulpunten. Deze nulpunten liggen in het interval $-1 < z < 1$.

Bewijs. a) We tonen eerst aan dat de nulpunten enkelvoudig zijn. Merk daartoe op dat de punten $z = \pm 1$ zeker geen nulpunten zijn van $P_n(z)$, immers $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, zie (4.1.9), (4.1.10). Stel nu dat $z = \alpha$ ($\alpha \neq \pm 1$) een meervoudig nulpunt van $P_n(z)$ zou zijn, dan was minstens $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. De functie $y = P_n(z)$ voldoet dan aan de DV van Legendre,

$$(4.4.1) \qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0$$

en aan de beginvoorwaarden

$$(4.4.2) \qquad y(\alpha) = 0 \ , \quad y'(\alpha) = 0 \ .$$

Anderzijds voldoet ook de functie $y \equiv 0$ aan DV en beginvoorwaarden. Omdat het punt $z = \alpha$ ($\alpha \neq \pm 1$) een gewoon punt is van de DV, volgt met de stelling uit § 1.2 dat de oplossing van (4.4.1), (4.4.2) eenduidig is. Er zou dus moeten gelden, $P_n(z) \equiv 0$. Uit deze tegenspraak volgt dat de nulpunten van $P_n(z)$ enkelvoudig zijn.

b) De nulpunten liggen in het interval $-1 < z < 1$.
We maken gebruik van de formule van Rodrigues (4.3.1) en de stelling van Rolle (zie § 3.11). We gaan uit van het polynoom $P(x)$,

$$P(x) = (x^2-1)^n \ .$$

$P(x)$ heeft nulpunten $x = \pm 1$; beide nulpunten zijn n-voudig. Vorm nu de afgeleide $P'(x)$,

$$P'(x) = \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)^n\right] \ .$$

Volgens de stelling van Rolle heeft $P'(x)$ minstens één nulpunt $x = \alpha$ met $-1 < \alpha < 1$. Voorts heeft $P'(x)$ de $(n-1)$-voudige nulpunten $x = \pm 1$. Omdat $P'(x)$ een polynoom van de graad $2n-1$ is, zijn er in totaal $(2n-1)$ nulpunten. Daaruit volgt dat $P'(x)$ precies één nulpunt $x = \alpha$ heeft met $-1 < \alpha < 1$. De tweede afgeleide $P''(x)$,

$$P''(x) = \frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^n]$$

heeft twee $(n-2)$-voudige nulpunten $x = \pm 1$, minstens één nulpunt $x = \beta_1$ met $-1 < \beta_1 < \alpha$ en minstens één nulpunt $x = \beta_2$ met $\alpha < \beta_2 < 1$ (stelling van Rolle). Het totale aantal nulpunten is $(2n-2)$, zodat $P''(x)$ precies één nulpunt $\beta_1 \in (-1,\alpha)$ en precies één nulpunt $\beta_2 \in (\alpha,1)$ zal bezitten.
Op deze wijze gaan we door. Het is duidelijk dat na elke differentiatie het aantal nulpunten van de afgeleide in het interval $(-1,1)$ met 1 toeneemt. Na n differentiaties vinden we dat het Legendre polynoom $P_n(x)$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

precies n nulpunten bezit in het interval $-1 < x < 1$. □

Opgave 4.4.1. Toon aan dat de nulpunten van $P_n(x)$ en $P_{n+1}(x)$ om en om liggen d.w.z. tussen twee opeenvolgende nulpunten van $P_{n+1}(x)$ ligt precies één nulpunt van $P_n(x)$.
Aanwijzing: Maak gebruik van de recurrente betrekking (I) uit § 4.2.

4.5. Orthogonaliteit der Legendre polynomen

Stelling. De Legendre polynomen $P_n(x)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ vormen op het interval $[-1,1]$ een orthogonaal stelsel met gewichtsfunctie 1,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2m+1}\,\delta_{mn}\,. \tag{4.5.1}$$

Bewijs. a) $m \neq n$. De polynomen $P_m(x)$, $P_n(x)$ voldoen aan de DV van Legendre,

$$(1-x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0\,,$$

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0\,.$$

Vermenigvuldig de eerste DV met $P_n(x)$, de tweede DV met $P_m(x)$ en vorm het verschil,

$$(1-x^2)\{P_n(x)P_m''(x) - P_m(x)P_n''(x)\} - 2x\{P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)\} +$$
$$+ \{m(m+1) - n(n+1)\}P_m(x)P_n(x) = 0 ,$$

oftewel

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\{P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)\}] + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x) = 0 .$$

Integreer nu over het interval [-1,1], dan is

$$(m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = -(1-x^2)\{P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)\}\Big|_{-1}^{+1} = 0 .$$

Wegens $m \neq n$ volgt dan

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 . \tag{4.5.2}$$

b) $m = n$. Maak gebruik van de formule van Rodrigues (4.3.1), dan is

$$\int_{-1}^{1} P_m^2(x)dx = \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}\int_{-1}^{1} D^m[(x^2-1)^m]D^m[(x^2-1)^m]dx ,$$

waarin $D = d/dx$.
Pas nu m keer partiële integratie toe, dan zullen alle stoktermen wegvallen (ga dit na) en er resulteert,

$$\int_{-1}^{1} P_m^2(x)dx = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^m\, D^{2m}[(x^2-1)^m]dx .$$

Bereken vervolgens de afgeleide

$$D^{2m}[(x^2-1)^m] = D^{2m}[x^{2m} - \binom{m}{1}x^{2m-2} + \ldots + (-1)^m] = (2m)! ,$$

waarna

$$\int_{-1}^{1} P_m^2(x)dx = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^m\, dx .$$

De resterende integraal is te berekenen via de substitutie $1+x = 2t$,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \, dx = 2^{2m+1} \int_{0}^{1} t^m (1-t)^m \, dt = \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!} .$$

We vinden dan uiteindelijk

$$(4.5.3) \qquad \int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,dx = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \, \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!} = \frac{2}{2m+1} . \qquad \square$$

Opgave 4.5.1. Bereken de integralen

$$\int_{0}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx , \qquad \int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)\,dx .$$

Opgave 4.5.2. Leid een orthogonaliteitsbetrekking af voor de Hermite polynomen $H_n(z)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ en voor de Laguerre polynomen $L_n(z)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. Deze polynomen zijn gedefinieerd in de opgaven 4.1.2, 4.1.3.

4.6. Reeksen naar Legendre polynomen

Naar analogie met de theorie der Fourierreeksen en der Fourier-Bessel reeksen (zie § 3.12) kunnen we reeksen naar Legendre polynomen beschouwen van het volgende type,

$$(4.6.1) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(x) = S(x) , \qquad -1 \le x \le 1 .$$

Onderstel dat de reeks (4.6.1) uniform convergent is op $[-1,1]$, dan is de coëfficiënt a_n uit te drukken in de som $S(x)$. Vermenigvuldig daartoe (4.6.1) met $P_n(x)$ en integreer over $[-1,1]$, dan is

$$\int_{-1}^{1} S(x)P_n(x)\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\, a_n ,$$

op grond van de orthogonaliteit der Legendre polynomen.
Hieruit is a_n op te lossen,

$$a_n = (n+\tfrac{1}{2}) \int_{-1}^{1} S(x)P_n(x)dx \; .$$

De laatste formule is weer te beschouwen als het analogon van de formules voor de coëfficiënten van een Fourierreeks.

We beschouwen vervolgens het omgekeerde probleem. Zij gegeven een functie $f(x)$, gedefinieerd op het interval $[-1,1]$. Bereken dan de coëfficiënten a_n volgens

$$(4.6.2) \qquad a_n = (n+\tfrac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx \; ,$$

en vorm met deze coëfficiënten de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_nP_n(x)$.
Men kan nu bewijzen dat onder zekere voorwaarden voor de functie $f(x)$, deze reeks convergent is met som $f(x)$, i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nP_n(x) = f(x) \; , \qquad -1 \le x \le 1 \; .$$

We vermelden nog de volgende stelling hierover (vergelijk deze stelling met de hoofdstelling uit de theorie der Fourierreeksen, Ackermans-Van Lint [1.1], p.390):

<u>Stelling</u>. Zij de functie $f(x)$ gedefinieerd op $[-1,1]$ en zij $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$ convergent. Laat $f(x)$ in het punt $x = \xi$, $-1 < \xi < 1$ voldoen aan de Dirichlet condities (Ackermans-Van Lint [1.1], p.390), dan is de reeks naar Legendre polynomen van $f(x)$ convergent in $x = \xi$ met som $\tfrac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)]$.

Voor het bewijs wordt verwezen naar Rainville [1.9], p.176-179.
Voor een uitvoeriger onderzoek van de convergentie van reeksen naar Legendre polynomen zie Robin [4.2], tome II, p.279-317, Hobson [4.3], p.318-342.

<u>Opgave 4.6.1</u>. Leid af de <u>somformule</u> van <u>Christoffel-Darboux</u> (1856),

$$\sum_{m=0}^{n} (m+\tfrac{1}{2})P_m(x)P_m(\xi) = \frac{n+1}{2} \, \frac{P_{n+1}(x)P_n(\xi) - P_n(x)P_{n+1}(\xi)}{x-\xi} \; .$$

Deze formule speelt een belangrijke rol bij het bewijs van de hiervoor genoemde stelling.
Aanwijzing: Maak gebruik van de recurrente betrekking (I) uit § 4.2.

Indien de functie f(x) willekeurig vaak differentieerbaar is op [-1,1], laat de formule (4.6.2) voor de coëfficiënt a_n zich als volgt vereenvoudigen. Maak gebruik van de formule van Rodrigues (4.3.1) dan is

$$a_n = \frac{n+\frac{1}{2}}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f(x) \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] dx .$$

Pas nu n keer partiële integratie toe, dan zullen alle stoktermen wegvallen en er volgt

$$(4.6.3) \qquad a_n = \frac{n+\frac{1}{2}}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(1-x^2)^n \, dx .$$

We zullen enige voorbeelden geven van reeksontwikkelingen naar Legendre polynomen:

Voorbeeld I. Beschouw de functie $f(x) = x^m$ met m geheel, ≥ 0. We berekenen de coëfficiënt a_n met behulp van formule (4.6.3). Bepaal daartoe de n-de afgeleide van f(x),

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^m) = \begin{cases} 0 \, , & n > m \, , \\ \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \, , & n \leq m \, . \end{cases}$$

Het is duidelijk dat $a_n = 0$ voor $n > m$. De reeksontwikkeling zal daarom afbreken na de term met $n = m$. Voor $n \leq m$ geldt,

$$(4.6.4) \qquad a_n = \frac{n+\frac{1}{2}}{2^n} \frac{m!}{n!(m-n)!} \int_{-1}^{1} x^{m-n}(1-x^2)^n \, dx .$$

De laatste integraal is nul, indien $m-n$ oneven ia (integrand is oneven functie van x). Daaruit volgt: $a_n = 0$ voor $n \leq m$, $m-n$ oneven.
Indien $m-n$ even is, stellen we $m-n = 2k$, $n = m-2k$. De integraal (4.6.4) laat zich dan berekenen via de substitutie $x^2 = t$,

$$(4.6.5) \qquad a_{m-2k} = \frac{m-2k+\frac{1}{2}}{2^{m-2k}} \frac{m!}{(m-2k)!(2k)!} \, 2 \int_{0}^{1} x^{2k}(1-x^2)^{m-2k} \, dx =$$

$$= \frac{m-2k+\frac{1}{2}}{2^{m-2k}} \frac{m!}{(m-2k)!(2k)!} \int_{0}^{1} t^{k-\frac{1}{2}}(1-t)^{m-2k} \, dt =$$

$$= \frac{m-2k+\frac{1}{2}}{2^{m-2k}} \frac{m!}{(m-2k)!(2k)!} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(m-2k+1)}{\Gamma(m-k+\frac{3}{2})} =$$

$$= \frac{m!\sqrt{\pi}}{2^m} \frac{m-2k+\frac{1}{2}}{k!\ \Gamma(m-k+\frac{3}{2})} ,$$

waarbij nog gebruik gemaakt is van formule (4.1.5).
Voor de functie $f(x)$ vinden we nu de volgende (eindige) reeks naar Legendre polynomen (Legendre, 1785),

$$(4.6.6) \qquad f(x) = x^m = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]} a_{m-2k} P_{m-2k}(x) = \frac{m!\sqrt{\pi}}{2^m} \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]} \frac{m-2k+\frac{1}{2}}{k!\ \Gamma(m-k+\frac{3}{2})} P_{m-2k}(x) .$$

Omdat rechterlid en linkerlid van (4.6.6) polynomen zijn, zal de reeksontwikkeling (4.6.6) niet alleen gelden op $[-1,1]$, maar voor elke (complexe) x. Merk op dat in de reeksontwikkeling van x^m slechts voorkomen de Legendre polynomen $P_m(x), P_{m-2}(x), \ldots, P_1(x)$ (m oneven) of $P_0(x)$ (m even).
Met behulp van (4.6.6) kan elk polynoom worden ontwikkeld naar Legendre polynomen.

Voorbeeld II. We zullen nu de functie $f(x) = e^{izx}$, $-1 \le x \le 1$, z willekeurig complex, ontwikkelem in een reeks naar Legendre polynomen.
De n-de afgeleide van $f(x)$ wordt gegeven door

$$f^{(n)}(x) = (iz)^n e^{izx} ,$$

zodat met (4.6.3) voor de coëfficiënten a_n volgt

$$a_n = \frac{n+\frac{1}{2}}{2^n n!} (iz)^n \int_{-1}^{1} e^{izx}(1-x^2)^n dx .$$

De laatste integraal is als volgt te herleiden,

$$\int_{-1}^{1} e^{izx}(1-x^2)^n dx = \int_{0}^{1} (e^{izx}+e^{-izx})(1-x^2)^n dx =$$

$$= 2\int_{0}^{1} \cos(zx)(1-x^2)^n dx = \Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(n+1) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(z)}{(z/2)^{n+\frac{1}{2}}} ,$$

op grond van de integraalvoorstelling van Poisson (zie (3.6.4)).
Voor de coëfficiënt a_n vinden we dan

$$a_n = \frac{n+\frac{1}{2}}{2^n n!}(iz)^n\,\Gamma(\tfrac{1}{2})n!\,\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(z)}{(z/2)^{n+\frac{1}{2}}} = (2n+1)i^n\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z)\ .$$

Tenslotte resulteert de volgende reeksontwikkeling voor e^{izx},

$$(4.6.6a)\qquad e^{izx} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n\,J_{n+\frac{1}{2}}(z)P_n(x)\ .$$

Deze reeksontwikkeling is afkomstig van Bauer (1859).

Opgave 4.6.2. Ontwikkel de functie

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0\ , \\ 1, & 0 < x \le 1\ , \end{cases}$$

in een reeks naar Legendre polynomen. Bepaal de som van deze reeks voor $x = 0$.

Opgave 4.6.3. Ontwikkel de volgende functies in reeksen naar Legendre polynomen: (i) $(1-x)^{\frac{1}{2}}$; (ii) $\log(1-x)$.
Onderzoek de convergentie van deze reeksen in $x = \pm 1$.

Opgave 4.6.4. Toon aan dat

$$P_n'(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}(n-1)]}(2n-4k-1)P_{n-2k-1}(x)\ .$$

Leid hieruit af de ongelijkheid

$$|P_n'(x)| \le P_n'(1) = \tfrac{1}{2}n(n+1)\ ,\qquad -1 \le x \le 1\ .$$

Als toepassing van reeksontwikkelingen naar Legendre polynomen bespreken we nog het volgende benaderingsprobleem. Zij gegeven een functie $f(x)$, welke kwadratisch integreerbaar is over het interval $[-1,1]$. We wensen nu op het interval $[-1,1]$ de functie $f(x)$ te benaderen door een polynoom $P(x)$ van hoogstens de graad n, zodanig dat

$$(4.6.7)\qquad \int_{-1}^{1}[f(x) - P(x)]^2dx \ \text{ minimaal is.}$$

Onder alle polynomen van hoogstens de graad n is $P(x)$ dan de beste benadering in het kwadraat-gemiddelde, of ook wel, beste benadering in de zin der kleinste kwadraten, van de functie $f(x)$.

Ter oplossing van dit benaderingsprobleem schrijven we

$$(4.6.8)\qquad P(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m P_m(x) \ ,$$

waarin de coëfficiënten a_m nog bepaald moeten worden. Substitueer (4.6.8) in (4.6.7) dan volgt

$$(4.6.9)\qquad \int_{-1}^{1} [f(x) - P(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx - 2\sum_{m=0}^{n} a_m \int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx + $$

$$+ \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} a_k a_m \int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} f^2(x)dx - 2\sum_{m=0}^{n} a_m \int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx + \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m^2}{m+\frac{1}{2}} \ ,$$

op grond van de orthogonaliteit der Legendre polynomen.
Voer nu in de coëfficiënt c_m gegeven door

$$(4.6.10)\qquad c_m = (m+\tfrac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx \ .$$

Dan is (4.6.9) te herleiden tot

$$(4.6.11)\qquad \int_{-1}^{1} [f(x) - P(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx - 2\sum_{m=0}^{n} \frac{a_m c_m}{m+\frac{1}{2}} + \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m^2}{m+\frac{1}{2}} =$$

$$= \int_{-1}^{1} f^2(x)dx - \sum_{m=0}^{n} \frac{c_m^2}{m+\frac{1}{2}} + \sum_{m=0}^{n} \frac{(a_m - c_m)^2}{m+\frac{1}{2}} \ .$$

De laatste uitdrukking is <u>minimaal</u> indien $a_m = c_m$. We vinden dus voor de beste benadering $P(x)$,

$$(4.6.12)\qquad P(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m P_m(x)$$

waarin c_m gegeven wordt door (4.6.10). Merk op dat het polynoom $P(x)$ juist de som is van de eerste n termen van de reeksontwikkeling naar Legendre polynomen van de functie $f(x)$.

Opmerking. Als nevenresultaat volgt uit (4.6.11) de ongelijkheid van Bessel

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m^2}{m+\frac{1}{2}} \leq \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$$

voor de coëfficiënten c_m van de reeksontwikkeling naar Legendre polynomen van de functie f(x). Vergelijk dit resultaat met de gelijknamige ongelijkheid uit de lineaire algebra en uit de theorie der Fourierreeksen, zie Ackermans-Van Lint [1.1], p.194,388.

Opgave 4.6.5. Zij K de klasse van alle polynomen P(x) van de graad n, met coëfficiënt van x^n gelijk aan 1. Toon aan dat

$$\int_{-1}^{1} P^2(x)dx \ , \qquad P(x) \in K \ ,$$

minimaal is voor

$$P(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} P_n(x) \ .$$

4.7. Legendre functies van de tweede soort

Van de DV van Legendre

$$(4.7.1) \qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0$$

hebben we tot dusver één oplossing gevonden, nl. $y = P_n(z)$, het n-de Legendre polynoom. $P_n(z)$ wordt ook wel genoemd de Legendre functie van de eerste soort van de graad n. We zullen nu een tweede oplossing van de DV (4.7.1) afleiden. Deze oplossing wordt genoteerd als $Q_n(z)$ en heet de Legendre functie van de tweede soort van de graad n (het woord graad is hier enigszins misleidend; $Q_n(z)$ is namelijk niet een polynoom).
Voor de afleiding van $Q_n(z)$ maken we gebruik van de methode uit § 1.5. Substitueer in de DV (4.7.1) $y = P_n(z)w(z)$, dan volgt

$$(1-z^2)\{P_n''(z)w + 2P_n'(z)w' + P_n(z)w''\} - 2z\{P_n'(z)w + P_n(z)w'\} + n(n+1)P_n(z)w = 0 \ .$$

Omdat $P_n(z)$ oplossing is van de DV van Legendre zullen een drietal termen wegvallen en er resulteert,

$$(1-z^2)P_n(z)w'' + \{2(1-z^2)P_n'(z) - 2zP_n(z)\}w' = 0 \ .$$

De laatste vergelijking is van te scheiden variabelen,

$$\frac{w''}{w'} = -\frac{2P_n'(z)}{P_n(z)} - \frac{2z}{z^2-1} \ ,$$

waaruit na integratie volgt

$$\log w' = -2\log P_n(z) - \log(z^2-1) + \log B \ ,$$

$$w' = \frac{B}{P_n^2(z)(z^2-1)} \ .$$

Integreer de laatste uitkomst nogmaals, dan is

$$w = A + B\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)P_n^2(\zeta)} \ ,$$

waarin A en B willekeurige integratieconstanten zijn. Ook z_0 is nog vrij te kiezen.

Voor de oplossing van de DV van Legendre vinden we uiteindelijk

$$y(z) = AP_n(z) + BP_n(z)\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)P_n^2(\zeta)} \ .$$

We definiëren nu de Legendre functie van de tweede soort van de graad n als volgt,

$$(4.7.2) \qquad Q_n(z) := P_n(z)\int_{z}^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)P_n^2(\zeta)} \ .$$

We zullen nu eerst onderzoeken of de definitie (4.7.2) betekenis heeft en voorts, of de functie $Q_n(z)$ eenwaardig is. Bij dit onderzoek moeten we letten op a) de convergentie van de integraal (4.7.2), b) de singuliere punten van de integrand. Het zal blijken dat we een zekere beperking moeten opleggen aan de integratieweg opdat de functie $Q_n(z)$ inderdaad eenwaardig is.

a) Convergentie van de integraal (4.7.2). Voor $|\zeta| \to \infty$ geldt

$$(4.7.3) \qquad P_n(\zeta) = O(\zeta^n) \ , \quad \frac{1}{(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)} = O(\zeta^{-2n-2}) \ .$$

Daar de integraal $\int_z^\infty \zeta^{-2n-2} d\zeta$ convergent is voor $n = 0,1,2,\ldots$, is ook de integraal (4.7.2) convergent.
De integrand $[(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)]^{-1}$ is een analytische functie van ζ buiten het interval $-1 \le \zeta \le 1$, zie punt b). Daaruit volgt dat de integraal (4.7.2) en de functie $Q_n(z)$ analytische functies van z zijn in het z-vlak verminderd met het interval $-1 \le z \le 1$ langs de reële as. Deze analytische functies zijn in het algemeen meerwaardig.

b) Singuliere punten van de integrand (4.7.2). De integrand in (4.7.2) heeft twee enkelvoudige polen in de punten $\zeta = \pm 1$ en n dubbele polen in de nulpunten $\zeta = \alpha_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ van het Legendre polynoom $P_n(\zeta)$. Volgens de stelling uit § 4.4 liggen deze nulpunten in het interval $-1 < \zeta < 1$. We berekenen nu de residuen van de integrand in $\zeta = \pm 1$,

$$(4.7.4) \qquad \operatorname*{Res}_{\zeta=1} \left[\frac{1}{(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)}\right] = \lim_{\zeta \to 1} \frac{\zeta - 1}{(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)} = \tfrac{1}{2} \ ,$$

$$(4.7.5) \qquad \operatorname*{Res}_{\zeta=-1} \left[\frac{1}{(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)}\right] = \lim_{\zeta \to -1} \frac{\zeta + 1}{(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)} = -\tfrac{1}{2} \ .$$

Op soortgelijke wijze laat zich berekenen

$$(4.7.6) \qquad \operatorname*{Res}_{\zeta=\alpha_j} \left[\frac{1}{(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)}\right] = 0 \ , \qquad j = 1,2,\ldots,n \ .$$

Opgave 4.7.1. Verifieer de laatste uitkomst.

Door het optreden van de singuliere punten $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \alpha_j$ zal in het algemeen de functie $Q_n(z)$ meerwaardig zijn. Immers, laat C_1 een willekeurige integratieweg zijn van z naar ∞. Beschouw dan daarnaast een tweede integratieweg C_2 bestaande uit C_1 plus een "lus" C beginnend en eindigend in z, die in positieve zin om het singuliere punt $\zeta = \beta$ ($\beta = \pm 1$ of $\beta = \alpha_j$) loopt. We vinden dan met (4.7.2) twee waarden voor $Q_n(z)$, aan te geven door $Q_n(z)|_{C_1}$ en $Q_n(z)|_{C_2}$, en er geldt

$$Q_n(z)|_{C_2} - Q_n(z)|_{C_1} = P_n(z) \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)} =$$

$$= 2\pi i\, P_n(z) \operatorname*{Res}_{\zeta=\beta} \left[\frac{1}{(\zeta^2 - 1)P_n^2(\zeta)}\right] = \begin{cases} 0\,, & \beta = \alpha_j\,, \\ \pi i\, P_n(z)\,, & \beta = 1\,, \\ -\pi i\, P_n(z)\,, & \beta = -1\,. \end{cases}$$

Alleen een lus om $\zeta = +1$ of om $\zeta = -1$ blijkt aanleiding te geven tot meerwaardigheid van $Q_n(z)$. We merken nog op dat indien de lus C zowel het punt $\zeta = +1$ als het punt $\zeta = -1$ omsluit, de integraal langs C gelijk aan nul wordt.

Het is nu gebruikelijk om de meerwaardigheid van $Q_n(z)$ als volgt op te heffen. In het z-vlak brengen we een <u>coupure</u> of <u>snede</u> aan langs het interval $-1 \le z \le 1$. Zij nu z een punt buiten de snede dan wordt $Q_n(z)$ gedefinieerd door (4.7.2), waarbij we afspreken dat de integratieweg de coupure <u>niet</u> zal snijden. De integratieweg is verder willekeurig. Het is duidelijk dat $Q_n(z)$ dan een <u>éénwaardige</u> <u>analytische</u> functie van z zal zijn in het z-vlak buiten de snede $-1 \le z \le 1$.

<u>Opgave 4.7.2</u>. Zij x een punt op de snede met $-1 < x < 1$, definieer dan

$$Q_n(x + i0) = \lim_{y\to+0} Q_n(x + iy)\;, \quad Q_n(x - i0) = \lim_{y\to-0} Q_n(x + iy)\;.$$

Toon aan dat

(4.7.6) $\quad Q_n(x + i0) - Q_n(x - i0) = -\pi i\, P_n(x)\;.$

We onderzoeken vervolgens het <u>gedrag</u> van $Q_n(z)$ voor <u>grote</u> <u>waarden</u> van $|z|$, ($|z| \to \infty$). Ga daartoe uit van de definitie (4.7.2) en leg de integratieweg langs de voerstraal door z naar ∞. Indien $|z|$ "groot" is, zal langs de gehele integratieweg $|\zeta|$ "groot" zijn. We onderzoeken nu het gedrag van de integrand in (4.7.2) voor $|\zeta| \to \infty$. Uit formule (4.1.6) voor $P_n(z)$ lezen we af,

(4.7.7) $\quad P_n(z) = Az^n + O(z^{n-2})\;, \qquad |z| \to \infty\;,$

waarin

$$(4.7.8) \qquad A = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} .$$

Daaruit volgt voor de integrand (4.7.2),

$$(4.7.9) \qquad \frac{1}{(\zeta^2-1)P_n^2(\zeta)} = \frac{1}{(\zeta^2-1)[A^2\zeta^{2n} + O(\zeta^{2n-2})]} = \frac{1}{A^2\zeta^{2n+2} + O(\zeta^{2n})}$$

$$= \frac{1}{A^2\zeta^{2n+2}[1 + O(\zeta^{-2})]} = \frac{1}{A^2}\zeta^{-2n-2} + O(\zeta^{-2n-4}) , \qquad |\zeta| \to \infty .$$

Substitueer (4.7.7), (4.7.9) in de integraal (4.7.2), dan vinden we voor $Q_n(z)$,

$$(4.7.10) \qquad Q_n(z) = [Az^n + O(z^{n-2})] \int_z^\infty \left[\frac{1}{A^2}\zeta^{-2n-2} + O(\zeta^{-2n-4})\right] d\zeta =$$

$$= [Az^n + O(z^{n-2})]\left[\frac{1}{A^2}\frac{z^{-2n-1}}{2n+1} + O(z^{-2n-3})\right] =$$

$$= \frac{1}{A}\frac{z^{-n-1}}{2n+1} + O(z^{-n-3}) , \qquad |z| \to \infty .$$

Conclusie. Voor grote waarden van $|z|$ geldt,

$$(4.7.11) \qquad P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} z^n + O(z^{n-2}) , \qquad |z| \to \infty ,$$

$$(4.7.12) \qquad Q_n(z) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!} z^{-n-1} + O(z^{-n-3}) , \qquad |z| \to \infty .$$

We zien hieruit dat voor $|z| \to \infty$ $P_n(z)$ niet begrensd is (behalve voor $n = 0$), terwijl $Q_n(z) \to 0$.

We berekenen tenslotte nog de determinant van Wronski $W(P_n, Q_n)$ van de oplossingen $P_n(z)$, $Q_n(z)$ van de DV van Legendre. Maak daartoe gebruik van de identiteit van Abel (3.2.3),

$$W(P_n, Q_n) = C \exp[-\int p(z)dz] ,$$

waarin C een constante is, terwijl voor de DV van Legendre (4.7.1) $p(z)$ gegeven wordt door

$$p(z) = -\frac{2z}{1-z^2}.$$

Uit het laatste volgt,

$$\int p(z)dz = \log(1-z^2) \quad , \quad \exp[-\int p(z)dz] = \frac{1}{1-z^2} \, ,$$

zodat

$$(4.7.13) \quad W(P_n,Q_n) = \frac{C}{1-z^2} \, .$$

Voor de bepaling van C onderzoeken we het gedrag van $W(P_n,Q_n)$ voor $|z| \to \infty$. Met behulp van (4.7.7), (4.7.10) laat zich afleiden

$$W(P_n,Q_n) = P_n(z)Q_n'(z) - P_n'(z)Q_n(z) =$$

$$= [Az^n + O(z^{n-2})][-\frac{1}{A}\frac{n+1}{2n+1} z^{-n-2} + O(z^{-n-4})] -$$

$$- [nAz^{n-1} + O(z^{n-3})][\frac{1}{A}\frac{z^{-n-1}}{2n+1} + O(z^{-n-3})] =$$

$$= -z^{-2} + O(z^{-4}) \quad , \qquad |z| \to \infty \, .$$

Vergelijk dit met de exacte uitkomst (4.7.13) dan volgt $C = 1$ en

$$(4.7.14) \quad W(P_n,Q_n) = \frac{1}{1-z^2} \, .$$

De determinant van Wronski is $\neq 0$; $P_n(z)$, $Q_n(z)$ zijn dus lineair onafhankelijk.

4.8. Integraal van Neumann voor $Q_n(z)$

De integraal van Neumann voor $Q_n(z)$ (1848) luidt,

$$(4.8.1) \qquad Q_n(z) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{z-t}\, dt \, .$$

De integraal heeft betekenis voor elke z buiten het integratie-interval [-1,1]. Breng nu in het z-vlak weer de snede $-1 \leq z \leq 1$ aan, dan is de integraal (4.8.1) buiten de snede een analytische functie van z (Ackermans-Van Lint [1.1], p.435).

Met behulp van de formule van Rodrigues (4.3.1) is de integraal (4.8.1) ook als volgt te schrijven,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2-1)^n] \frac{dt}{z-t} .$$

Integreer nu n keer partieel, dan zullen alle stoktermen wegvallen en er resulteert,

$$(4.8.2) \qquad Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}} dt .$$

Deze integraalvoorstelling is equivalent met de integraal van Neumann.

Afleiding van (4.8.2). We maken gebruik van de methode van Euler transformatie (zie Ince [2.1], chapter 8, Burkill [2.2], chapter 6). Probeer als oplossing van de DV van Legendre, de contourintegraal

$$y = y(z) = \int_a^b \frac{Y(t)}{(z-t)^{n+1}} dt ,$$

waarbij de functie Y(t) en de integratieweg van a naar b in het complexe t-vlak nader te bepalen zijn. Substitueer deze integraal in de DV van Legendre (4.7.1) dan ontstaat er

$$(1-z^2)y'' - 2zy' + n(n+1)y =$$

$$= \int_a^b \left[(n+1)(n+2)\frac{1-z^2}{(z-t)^{n+3}} + (n+1)\frac{2z}{(z-t)^{n+2}} + \frac{n(n+1)}{(z-t)^{n+1}}\right] Y(t)dt =$$

$$= (n+1) \int_a^b [(n+2) - 2(n+1)zt + nt^2] \frac{Y(t)}{(z-t)^{n+3}} dt = 0 .$$

Vervang in de laatste integraal z door (z - t) + t dan volgt

$$\int_a^b \left[(n+2)\frac{(1-t^2)Y(t)}{(z-t)^{n+3}} - 2(n+1)\frac{tY(t)}{(z-t)^{n+2}}\right] dt = 0 .$$

Na partiële integratie van de eerste term van deze integraal komen we tot

$$\left.\frac{(1-t^2)Y(t)}{(z-t)^{n+2}}\right|_a^b - \int_a^b \left[\frac{d}{dt}\{(1-t^2)Y(t)\} + 2(n+1)tY(t)\right] \frac{dt}{(z-t)^{n+2}} = 0 .$$

Aan de laatste betrekking is voldaan indien

(4.8.3) $\frac{d}{dt}\{(1-t^2)Y(t)\} + 2(n+1)tY(t) = 0$,

(4.8.4) $\left.\frac{(1-t^2)Y(t)}{(z-t)^{n+2}}\right|_a^b = 0$.

De DV (4.8.3) heet de Euler transform van de DV van Legendre; de algemene oplossing van deze DV luidt

$$Y(t) = A(1-t^2)^n ,$$

waarbij A een willekeurige constante voorstelt. Aan de voorwaarde (4.8.4) wordt dan voldaan door bv. de keuze $a = b$, i.e. de integratieweg is een (gesloten) Jordankromme C die het punt z omsluit, of $a = -1$, $b = 1$. Met deze keuze komen we tot de volgende twee oplossingen van de DV van Legendre,

$$y_1(z) = A_1 \int_C \frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}}\, dt ,$$

$$y_2(z) = A_2 \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}}\, dt ,$$

waarin A_1, A_2 nog vrije constanten zijn.
Merk op dat voor $A_1 = -(2\pi i)^{-1}2^{-n}$ de eerste integraal juist overeenstemt met de integraalvoorstelling van Schläfli (4.3.5) voor $P_n(z)$.
Conform (4.8.2) stellen we in de tweede integraal $A_2 = 2^{-n-1}$. De resulterende functie

(4.8.5) $\Phi(z) := \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}}\, dt$

is dus oplossing van de DV van Legendre. Dit betekent dat $\Phi(z)$ te schrijven is als een lineaire combinatie van $P_n(z)$ en $Q_n(z)$,

(4.8.6) $\Phi(z) = CP_n(z) + DQ_n(z)$.

We zullen nu de constanten C, D bepalen door onderzoek van het gedrag van $\Phi(z)$ voor $|z| \to \infty$.
Ontwikkel daartoe $(z-t)^{-n-1}$ in een MR naar machten van $1/z$,

$$(4.8.7) \qquad (z-t)^{-n-1} = z^{-n-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-n-1} = z^{-n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n+1)_m}{m!}\left(\frac{t}{z}\right)^m ,$$

geldig voor $-1 \le t \le 1$, $|z| > 1$. Substitueer (4.8.7) in (4.8.5) en integreer termsgewijs, dan volgt

$$(4.8.8) \qquad \Phi(z) = \frac{z^{-n-1}}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n+1)_m}{m!}\frac{1}{z^m}\int_{-1}^{1} t^m(1-t^2)^n\,dt , \qquad |z| > 1 .$$

De laatste integraal is nul voor m oneven. Voor m even, m = 2k, is de integraal te herleiden tot een B-integraal,

$$\int_{-1}^{1} t^{2k}(1-t^2)^n\,dt = \int_{0}^{1} u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^n\,du = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})n!}{\Gamma(n+k+\frac{3}{2})} .$$

Substitueer deze uitkomst in (4.8.8) dan volgt

$$(4.8.9) \qquad \Phi(z) = \frac{z^{-n-1}}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})n!(n+1)_{2k}}{(2k)!\,\Gamma(n+k+\frac{3}{2})}\frac{1}{z^{2k}} =$$

$$= 2^n z^{-n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!(n+2k)!}{k!(2n+2k+1)!}\frac{1}{z^{2k}} , \qquad |z| > 1 ,$$

waarbij nog gebruik gemaakt is van de verdubbelingsformule voor de Γ-functie.
De MR-ontwikkeling (4.8.9) is absoluut convergent voor $|z| > 1$.
Uit (4.8.9) is onmiddellijk af te lezen,

$$(4.8.10) \qquad \Phi(z) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}z^{-n-1} + O(z^{-n-3}) , \qquad |z| \to \infty .$$

Vergelijk deze uitkomst met (4.7.11), (4.7.12) dan volgt C = 0, D = 1 in (4.8.6) en dus $\Phi(z) = Q_n(z)$. □

Opmerking. Als nevenresultaat van de afleiding vinden we nog de volgende MR-ontwikkeling voor $Q_n(z)$ (zie (4.8.9)),

$$(4.8.11)\quad Q_n(z) = 2^n z^{-n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!\,(n+2k)!}{k!\,(2n+2k+1)!}\,\frac{1}{z^{2k}}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Opgave 4.8.1. Bepaal twee lineair onafhankelijke oplossingen van de DV van Legendre

$$(1-z^2)\,\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\,\frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0$$

in de omgeving van het punt $z = \infty$ (zie § 1.6). Verifieer dat deze oplossingen overeenstemmen met de machtreeksen (4.1.6), (4.8.11) voor $P_n(z)$, $Q_n(z)$.

Opgave 4.8.2. Volgens de integraalformule van Cauchy (Ackermans-Van Lint [1.1], p.434) is $Q_n(z)$ voor te stellen door

$$(4.8.12)\quad Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{Q_n(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{Q_n(t)}{t-z}\,dt\,.$$

Hierin zijn C_1, C_2 willekeurige Jordankrommen; C_2 omsluit het interval $-1 \le t \le 1$ en ligt binnen C_1 terwijl het punt z tussen C_1 en C_2 ligt. Leid de integraal van Neumann af uit (4.8.12) door een passende keuze van C_1, C_2.

Met behulp van de integraal van Neumann onderzoeken we vervolgens het gedrag van $Q_n(z)$ in de omgeving van de punten $z = \pm 1$. Schrijf daartoe (4.8.1) als volgt,

$$(4.8.13)\quad Q_n(z) = \tfrac12 \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{z-t}\,dt = \tfrac12 P_n(z)\int_{-1}^{1}\frac{dt}{z-t} - \tfrac12\int_{-1}^{1}\frac{P_n(z)-P_n(t)}{z-t}\,dt =$$

$$= \tfrac12 P_n(z)\,\log\frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z)\,.$$

Hierbij moet voor $\log(z\pm1)$ de hoofdwaarde worden genomen, zodat

$$\log\frac{z+1}{z-1} = \log\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + i\,\arg(z+1) - i\,\arg(z-1)\,,$$

waarbij met $\arg(z\pm1)$ de hoofdwaarde van het argument bedoeld is, $-\pi < \arg(z\pm1) \le \pi$. De functie $W_{n-1}(z)$ is per definitie gegeven door

$$(4.8.14)\quad W_{n-1}(z) := \tfrac12\int_{-1}^{1} \frac{P_n(z)-P_n(t)}{z-t}\,dt\,.$$

Nu is P_n een polynoom van de graad n. Het verschil $[P_n(z) - P_n(t)]$ zal zeker deelbaar zijn door $(z-t)$, waarbij het quotiënt een polynoom in z en t is van de graad $n-1$. Integratie naar t voert tot de functie $W_{n-1}(z)$, die eveneens een polynoom in z is van de graad $n-1$.
Uit de betrekking

$$(4.8.15)\quad Q_n(z) = \tfrac{1}{2}P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z)$$

is af te lezen dat $Q_n(z)$ een logarithmische singulariteit heeft in de punten $z = \pm 1$.
Voor $n = 0,1,2,3$ geven we nog de volgende expliciete uitdrukkingen voor $Q_n(z)$, afgeleid uit (4.1.6a), (4.8.13),

$$Q_0(z) = \tfrac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1},$$

$$Q_1(z) = \tfrac{1}{2}z\log\frac{z+1}{z-1} - 1,$$

$$Q_2(z) = \tfrac{1}{2}P_2(z)\log\frac{z+1}{z-1} - \frac{3}{2}z,$$

$$Q_3(z) = \tfrac{1}{2}P_3(z)\log\frac{z+1}{z-1} - \frac{5}{2}z^2 + \frac{2}{3}.$$

Opgave 4.8.3. Leid de voorstelling (4.8.15) ook af uit de definitie (4.7.2) van $Q_n(z)$. Splits daartoe de integrand in (4.7.2) in partieelbreuken.

Opgave 4.8.4. Ontwikkel $W_{n-1}(z)$ naar Legendre polynomen.
Toon aan dat

$$W_{n-1}(1) = \psi(n+1) - \psi(1).$$

Aanwijzing: Leid eerst af dat $W_{n-1}(z)$ voldoet aan een inhomogene DV van Legendre.

Opgave 4.8.5. Onderzoek de convergentie van de integralen

$$\text{(i)}\ \int_1^\infty P_m(z)Q_n(z)\,dz\ ;\qquad \text{(ii)}\ \int_1^\infty Q_m(z)Q_n(z)\,dz\ ,\qquad (m \neq n)\ .$$

Bereken deze integralen.

Opgave 4.8.6. Bewijs dat voor $m \le n$ geldt,

$$P_m(z)Q_n(z) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)P_n(t)}{z-t}\,dt \,.$$

De Legendre functie $Q_n(z)$ is tot dusver gedefinieerd in het z-vlak met snede $-1 \le z \le 1$. We zullen deze definitie nog als volgt aanvullen. Zij x een punt op de snede met $-1 < x < 1$, dan definiëren we

(4.8.16) $$Q_n(x) := \tfrac{1}{2}[Q_n(x+i0) + Q_n(x-i0)]$$

waarin

(4.8.17) $$Q_n(x+i0) = \lim_{y\to+0} Q_n(x+iy) \,, \quad Q_n(x-i0) = \lim_{y\to-0} Q_n(x+iy) \,.$$

Opgave 4.8.7. Leid uit (4.8.15) en (4.8.16) af,

$$Q_n(x) = \tfrac{1}{2}P_n(x)\,\log\frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x) \,, \qquad -1 < x < 1 \,.$$

Opgave 4.8.8. Bereken de integraal

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)Q_n(x)\,dx \,.$$

4.9. Recurrente betrekkingen voor de Legendre functies $Q_n(z)$

Voor de Legendre functies $Q_n(z)$ gelden dezelfde recurrente betrekkingen als voor de Legendre polynomen $P_n(z)$ (zie § 4.2):

(I) $$(n+1)Q_{n+1}(z) - (2n+1)zQ_n(z) + nQ_{n-1}(z) = 0 \,,$$

(II) $$zQ_n'(z) - Q_{n-1}'(z) = nQ_n(z) \,,$$

(III) $$Q_{n+1}'(z) - zQ_n'(z) = (n+1)Q_n(z) \,,$$

(IV) $$Q_{n+1}'(z) - Q_{n-1}'(z) = (2n+1)Q_n(z) \,,$$

(V) $$(z^2-1)Q_n'(z) = nzQ_n(z) - nQ_{n-1}(z) \,.$$

Deze betrekkingen gelden voor $n = 1,2,3,\ldots$, (niet voor $n = 0$).

Afleiding. Bij de afleiding maken we gebruik van de integraal van Neumann (4.8.1) en van de recurrente betrekkingen voor $P_n(z)$.

(I). Met de integraal van Neumann volgt,

$$(n+1)Q_{n+1}(z) - (2n+1)zQ_n(z) + nQ_{n-1}(z) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)zP_n(t) + nP_{n-1}(t)}{z-t}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t)}{z-t}\,dt -$$

$$- (n+\tfrac{1}{2})\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = -(n+\tfrac{1}{2})\int_{-1}^{1} P_n(t)dt \,,$$

op grond van de recurrente betrekking (I) voor $P_n(z)$.
Voor $n = 1,2,3,\ldots$ is verder

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \int_{-1}^{1} P_n(t)P_0(t)dt = 0 \,,$$

op grond van de orthogonaliteit der Legendre polynomen.

(II). Gebruik weer de integraal van Neumann,

$$zQ_n'(z) - Q_{n-1}'(z) = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{zP_n(t)}{(z-t)^2}\,dt + \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(t)}{(z-t)^2}\,dt$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(z-t)P_n(t)}{(z-t)^2}\,dt - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{tP_n(t) - P_{n-1}(t)}{(z-t)^2}\,dt$$

$$= -Q_n(z) - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{tP_n(t) - P_{n-1}(t)}{(z-t)^2}\,dt \,.$$

Pas in de laatste integraal partiële integratie toe, dan volgt

$$zQ_n'(z) - Q_{n-1}'(z) = -Q_n(z) - \tfrac{1}{2}\left.\frac{tP_n(t) - P_{n-1}(t)}{z-t}\right|_{-1}^{+1} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{tP_n'(t) + P_n(t) - P_{n-1}'(t)}{z - t} \, dt =$$

$$= - Q_n(z) + \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(n+1)P_n(t)}{z - t} \, dt = nQ_n(z) ,$$

waarbij de stokterm wegvalt en gebruik gemaakt is van de recurrente betrekking (II) voor $P_n(z)$.

(III)-(V). De recurrente betrekkingen (III)-(V) volgen uit (I), (II) op dezelfde wijze als de overeenkomstige betrekkingen voor de Legendre polynomen $P_n(z)$ (zie § 4.2).

4.10. Geassocieerde Legendre functies

Naast de DV van Legendre treedt bij vele praktische toepassingen op, de geassocieerde DV van Legendre

$$(4.10.1) \quad (1 - z^2) \frac{d^2y}{dz^2} - 2z \frac{dy}{dz} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2}\right\}y = 0 ,$$

waarin n, m geheel, ≥ 0 zijn met $m \leq n$. In geval $m = 0$ gaat (4.10.1) over in de DV van Legendre.
Tussen de geassocieerde DV van Legendre en de DV van Legendre bestaat het volgende verband. Substitueer in (4.10.1),

$$(4.10.2) \quad y = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \, w(z) ,$$

dan gaat (4.10.1) (na enig rekenwerk) over in de volgende DV voor w,

$$(4.10.3) \quad (1 - z^2) \frac{d^2w}{dz^2} - 2(m+1)z \frac{dw}{dz} + (n-m)(n+m+1)w = 0 .$$

Beschouw nu de DV van Legendre,

$$(4.10.4) \quad (1 - z^2) \frac{d^2y}{dz^2} - 2z \frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0 .$$

Differentieer deze m keer naar z en stel $d^my/dz^m = v$. Met de regel van Leibniz (Ackermans-Van Lint [1.1], p.290) is af te leiden,

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}\right] = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{d^{m-k}}{dz^{m-k}}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) \frac{d^k}{dz^k}(1-z^2) =$$

$$= (1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2} - 2mz\frac{dv}{dz} - m(m-1)v \ ,$$

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(2z\frac{dy}{dz}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{d^{m-k}}{dz^{m-k}}\left(\frac{dy}{dz}\right) \frac{d^k}{dz^k}(2z) = 2z\frac{dv}{dz} + 2mv \ .$$

Na m-voudige differentiatie van (4.10.4) vinden we dus de DV,

$$(4.10.5) \quad (1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2} - 2(m+1)z\frac{dv}{dz} + (n-m)(n+m+1)v = 0 \ .$$

Deze DV is dezelfde als de DV (4.10.3) voor de functie $w(z)$. We kunnen de oplossingen van (4.10.3) nu onmiddellijk aangeven,

$$w_1(z) = \frac{d^m P_n(z)}{dz^m} \ , \quad w_2(z) = \frac{d^m Q_n(z)}{dz^m} \ .$$

Met (4.10.2) volgen hieruit een tweetal oplossingen van (4.10.1).
We definiëren nu de <u>geassocieerde</u> <u>Legendre</u> <u>functies</u> van <u>eerste</u> en <u>tweede</u> <u>soort</u>, $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$, als volgt,

$$(4.10.6) \quad P_n^m(z) := (z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_n(z)}{dz^m} \ , \quad Q_n^m(z) := (z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m Q_n(z)}{dz^m} \ .$$

De functies $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$ zijn oplossingen van de geassocieerde DV van Legendre (4.10.1). Vanwege onder meer de factor $(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}$ dienen we in het z-vlak een <u>snede</u> $-1 \le z \le 1$ aan te brengen. De functies $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$ zijn dan <u>eenwaardige</u> <u>analytische</u> functies van z in het z-vlak met snede $-1 \le z \le 1$.
Uit de <u>formule</u> van <u>Rodrigues</u> (4.3.1) volgt voor $P_n^m(z)$,

$$(4.10.7) \quad P_n^m(z) = \frac{1}{2^n n!}(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}[(z^2-1)^n] \ .$$

Analoog als in § 4.3 laat zich dan de volgende generalisering van de <u>integraalvoorstelling</u> van <u>Schläfli</u> afleiden,

$$(4.10.8) \quad P_n^m(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{(n+m)!}{2^n n!}(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+m+1}}\,dt \ ,$$

waarin C een Jordankromme is, welke in positieve zin doorlopen wordt en het punt $t = z$ omsluit.

Opgave 4.10.1. Leid uit (4.10.8) af de integraalvoorstelling van Laplace voor $P_n^m(z)$,

$$(4.10.9)\quad P_n^m(z) = \frac{1}{\pi}\frac{(n+m)!}{n!}\int_0^\pi \{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}^n \cos m\varphi \, d\varphi \,.$$

Evenzo volgt uit (4.8.2) de volgende integraalvoorstelling voor $Q_n^m(z)$,

$$(4.10.10)\quad Q_n^m(z) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{2^{n+1}\, n!}(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+m+1}}\,dt \,.$$

Tot dusver zijn de geassocieerde Legendre functies gedefinieerd in het z-vlak met snede $-1 \le z \le 1$. Het is gebruikelijk deze definities als volgt uit te breiden tot de punten van de snede. Zij x een punt op de snede met $-1 < x < 1$, dan definiëren we

$$(4.10.11)\quad \begin{cases} P_n^m(x) = \frac{1}{2}[\exp(\frac{1}{2}m\pi i)P_n^m(x+i0) + \exp(-\frac{1}{2}m\pi i)P_n^m(x-i0)] \,, \\ Q_n^m(x) = \frac{1}{2}(-1)^m[\exp(-\frac{1}{2}m\pi i)Q_n^m(x+i0) + \exp(\frac{1}{2}m\pi i)Q_n^m(x-i0)] \,. \end{cases}$$

Voor de betekenis van $P_n^m(x \pm i0)$, $Q_n^m(x \pm i0)$, vergelijk (4.8.17).
Men kan gemakkelijk verifiëren dat $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ ook gegeven worden door

$$(4.10.12)\quad P_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\,,\quad Q_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}\,,$$
$$-1 < x < 1 \,.$$

De functies $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ voldoen aan de geassocieerde DV van Legendre (4.10.1) (met z vervangen door x).

Opgave 4.10.2. Toon aan dat de geassocieerde Legendre functies $P_n^m(x)$ met m vast, $n = m, m+1, m+2, \ldots$ een orthogonaal stelsel met gewichtsfunctie 1 vormen op het interval $[-1,1]$, en dat geldt

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_r^m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\delta_{nr} \,. \tag{4.10.13}$$

<u>Opgave 4.10.3</u>. Toon aan dat

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_n^k(x)\,\frac{dx}{1-x^2} = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}\,\delta_{mk} \,,$$

waarbij $n \geq m$, $n \geq k$, $(m,k) \neq (0,0)$.

Hoofdstuk V. Methode van separatie van variabelen

Aan de hand van een aantal voorbeelden van randwaardeproblemen uit de mathematische fysica zal in dit hoofdstuk de methode van separatie van variabelen besproken worden.

5.1. Trillende snaar van eindige lengte

We onderzoeken de beweging van een trillende snaar van lengte 1. De uitwijking van de snaar ter plaatse x ($0 \le x \le 1$) en ten tijde t wordt aangegeven door $u(x,t)$. De uiteinden $x = 0$, $x = 1$ van de snaar zullen "vast" zijn. Voorts zijn de beginuitwijking en de beginsnelheid van de snaar op het tijdstip $t = 0$ gegeven. Voor de functie $u(x,t)$ laat zich dan het volgende randwaardeprobleem formuleren:

(5.1.1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \,, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \,,$$

(5.1.2) $$u(0,t) = 0 \,, \quad u(1,t) = 0 \,, \quad t \ge 0 \,, \ \text{(randvoorwaarden)}$$

(5.1.3) $$u(x,0) = \Phi(x) \,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x) \,, \quad 0 \le x \le 1 \,, \ \text{(beginvoorwaarden).}$$

We merken op dat de DV (5.1.1) en de randvoorwaarden (5.1.2) homogeen lineair zijn, d.w.z. indien de functies $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ voldoen aan (5.1.1), (5.1.2) dan voldoet ook elke lineaire combinatie $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ daaraan. De beginvoorwaarden (5.1.3) bezitten deze eigenschap niet; deze voorwaarden zijn niet-homogeen-lineair. Bij de verdere oplossing spelen de homogeen lineaire voorwaarden en de overige voorwaarden een essentieel verschillende rol.
We construeren nu een voorraad functies die voldoen aan de DV (5.1.1) en aan de homogeen lineaire voorwaarden (5.1.2). De overige voorwaarden (5.1.3) worden voorlopig buiten beschouwing gelaten. Bij de constructie van de voorraad maken we gebruik van de methode van separatie van variabelen. De methode van separatie bestaat hierin dat we oplossingen zoeken van de vorm

(5.1.4) $$u(x,t) = F(x)G(t) \,.$$

Substitutie van (5.1.4) in (5.1.1) leidt tot

$$F''(x)G(t) - F(x)G''(t) = 0 \,,$$

$$(5.1.5) \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} .$$

We hebben hiermee de DV gesepareerd: het linkerlid van (5.1.5) is een functie van x, het rechterlid van (5.1.5) is een functie van t. Rechterlid en linkerlid kunnen alleen dan aan elkaar gelijk zijn, indien beide constant zijn. Noem deze zgn. separatieconstante λ (λ is in het algemeen complex), dan volgt uit (5.1.5),

$$(5.1.6) \quad F''(x) - \lambda F(x) = 0 \; , \quad G''(t) - \lambda G(t) = 0 \; .$$

Substitueer vervolgens (5.1.4) in de randvoorwaarden (5.1.2), dan volgt

$$(5.1.7) \quad F(0) = 0 \; , \quad F(1) = 0 \; .$$

We komen zo tot het volgende probleem voor $F(x)$:

$$(5.1.8) \quad \begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \; , & 0 < x < 1 \; , \\ F(0) = 0 \; , \quad F(1) = 0 \; . \end{cases}$$

Het probleem (5.1.8) heeft uiteraard de triviale oplossing $F(x) \equiv 0$. We zullen nu in het volgende afleiden dat het probleem (5.1.8) voor bepaalde waarden van λ een oplossing $F(x) \not\equiv 0$ heeft. Deze waarden van λ worden eigenwaarden genoemd en de bijbehorende oplossingen $F(x)$ heten eigenfuncties. Het probleem (5.1.8) is dus een eigenwaardeprobleem. We zullen nu de eigenwaarden en eigenfuncties van (5.1.8) bepalen. Onderscheid daartoe twee gevallen:

a) $\lambda = 0$. De oplossing van de DV (5.1.8) luidt dan

$$F(x) = Ax + B \; .$$

Uit de voorwaarden $F(0) = F(1) = 0$ volgt $A = B = 0$, zodat $F(x) \equiv 0$ is; $\lambda = 0$ is dus geen eigenwaarde.

b) $\lambda \neq 0$, λ complex. Stel dan $\lambda = -p^2$ $(p \neq 0)$ waarna de oplossing van de DV (5.1.8) luidt,

$$F(x) = A \sin px + B \cos px \; .$$

Uit de voorwaarden $F(0) = F(1) = 0$ volgt,

$$B = 0 \; , \quad A \sin p = 0 \; .$$

We vinden nu een niet-triviale oplossing indien

$$\sin p = 0 \; , \quad p = n\pi \quad (n = 1,2,3,\ldots) \; .$$

De eigenwaarden en eigenfuncties van (5.1.8) worden dus gegeven door

(5.1.9) $\lambda = -n^2\pi^2$, $F(x) = \sin n\pi x$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Voor $\lambda = -n^2\pi^2$ heeft de DV (5.1.6) voor G(t) tot oplossing,

$$G(t) = C \cos n\pi t + D \sin n\pi t \ .$$

De eerder genoemde voorraad wordt dus gevormd door de functies

(5.1.10) $u(x,t) = \sin n\pi x \cos n\pi t$, $u(x,t) = \sin n\pi x \sin n\pi t$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Deze functies voldoen aan de DV (5.1.1) en aan de randvoorwaarden (5.1.2). Vorm nu de volgende lineaire combinatie van functies uit de voorraad (5.1.10),

(5.1.11) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \,(C_n \cos n\pi t + D_n \sin n\pi t) \ ,$$

waarin C_n, D_n nog te bepalen constante coëfficiënten zijn die van n mogen afhangen.

Onderstel dat de reeks (5.1.11) convergent is en termsgewijs gedifferentieerd mag worden naar x en naar t, dan voldoet (5.1.11) aan de DV (5.1.1) en aan de randvoorwaarden (5.1.2).

De coëfficiënten C_n, D_n worden zodanig bepaald dat (5.1.11) ook nog voldoet aan de (niet-homogeen-lineaire) beginvoorwaarden (5.1.3), i.e.

(5.1.12) $$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x = \Phi(x) \ , \quad 0 \le x \le 1 \ ,$$

(5.1.13) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi D_n \sin n\pi x = \Psi(x) \ , \quad 0 \le x \le 1 \ .$$

De reeksen (5.1.12), (5.1.13) zijn dus de Fourier-sinusreeksen van $\Phi(x)$, $\Psi(x)$. De coëfficiënten C_n, D_n worden dan gegeven door de bekende formules,

(5.1.14) $$\begin{cases} C_n = 2 \displaystyle\int_0^1 \Phi(x) \sin n\pi x \, dx \ , \\[2ex] D_n = \dfrac{2}{n\pi} \displaystyle\int_0^1 \Psi(x) \sin n\pi x \, dx \ . \end{cases}$$

De oplossing u(x,t) van het randwaardeprobleem (5.1.1)-(5.1.3) wordt nu gegeven door de reeks (5.1.11) met coëfficiënten C_n, D_n gegeven door (5.1.14). Achteraf dient nog geverifieerd te worden dat de gevonden reeks inderdaad convergent is en termsgewijs gedifferentieerd mag worden naar x en naar t. Tevens moet gecontroleerd worden dat de functies $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ gelijk zijn aan de som van hun Fourierreeksen (5.1.12), (5.1.13).

Opgave 5.1.1. Bepaal de oplossing van het randwaardeprobleem voor de functie $u(x,t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \,, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \,,$$

$$u(0,t) = 0 \,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

$$u(x,0) = \Phi(x) \,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x) \,, \qquad 0 \leq x \leq 1 \,.$$

Opgave 5.1.2. Bepaal de oplossing van het volgende warmtegeleidingsprobleem:

$$k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \,, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \,,$$

$$u(0,t) = 0 \,, \quad u(1,t) = 0 \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

$$u(x,0) = \Phi(x) \,, \qquad 0 \leq x \leq 1 \,.$$

Opgave 5.1.3. Bepaal de oplossing van het volgende randwaardeprobleem voor een trillende snaar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \,, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \,,$$

$$u(0,t) = 0 \,, \quad u(1,t) = \sin \omega t \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

$$u(x,0) = 0 \,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \,, \qquad 0 \leq x \leq 1 \,,$$

waarbij $\omega \neq m\pi$, $m = 1,2,3,\dots$.
Aanwijzing: Maak eerst de randvoorwaarden homogeen lineair door aftrekken van een geschikte particuliere oplossing; pas daarna de methode van separatie toe.

Opgave 5.1.4. Bepaal de uitwijking van een rechthoekig membraan met zijden a en b, dat langs de rand is ingeklemd en belast is door een gelijkmatig verdeelde belasting q.

Beschrijf het membraan door $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Laat $u(x,y)$ de uitwijking ter plaatse (x,y) zijn. Voor de functie $u(x,y)$ laat zich dan het volgende randwaardeprobleem formuleren:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{q}{T}, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a,$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b.$$

Hierin is T de spanning in het membraam.
Aanwijzing: Maak eerst de DV homogeen lineair door aftrekken van een geschikte particuliere oplossing; pas daarna de methode van separatie toe.

5.2. Warmtegeleiding in een cylinder

Voer in cylindercoördinaten (r,φ,z) en beschouw de cylinder gegeven door $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Laat $u(r,\varphi,z,t)$ de temperatuur zijn ter plaatse (r,φ,z) in de cylinder en ten tijde t, dan voldoet $u(r,\varphi,z,t)$ aan de warmtegeleidingsvergelijking

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{5.2.1}$$

Het oppervlak van de cylinder wordt op de temperatuur $u = 0$ gehouden. Voorts is de begintemperatuur van de cylinder gegeven, $u(r,\varphi,z,0) = \Psi(r)$. Uit symmetrie-overwegingen is duidelijk dat $u(r,\varphi,z,t)$ niet zal afhangen van φ en z. We schrijven daarom $u(r,\varphi,z,t) = u(r,t)$ en komen tot het volgende randwaardeprobleem voor $u(r,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \le r < 1,\ t > 0, \tag{5.2.2}$$

$$u(1,t) = 0, \quad t \ge 0, \quad \text{(randvoorwaarde)} \tag{5.2.3}$$

$$u(r,0) = \Psi(r), \quad 0 \le r \le 1, \quad \text{(beginvoorwaarde).} \tag{5.2.4}$$

We merken op dat de DV (5.2.2) en de randvoorwaarde (5.2.3) homogeen lineair zijn; de beginvoorwaarde (5.2.4) is niet-homogeen-lineair.
We construeren nu een voorraad functies van de vorm

$$u(r,t) = F(r)G(t)$$

die voldoen aan de DV (5.2.2) en aan de homogeen lineaire voorwaarde (5.2.3). De laatste voorwaarde (5.2.4) wordt voorlopig buiten beschouwing gelaten. Na substitutie van de functie u(r,t) als boven in de DV (5.2.2) en na separatie volgt

$$(5.2.5)\qquad \frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r}\frac{F'(r)}{F(r)} = \frac{G'(t)}{G(t)} = \lambda ,$$

waarin λ weer de separatieconstante is.
Uitgaande van (5.2.3), (5.2.5) komen we nu tot het volgende eigenwaardeprobleem voor F(r):

$$(5.2.6)\qquad \begin{cases} F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) - \lambda F(r) = 0 , & 0 < r < 1 , \\ F(1) = 0 , \quad F(0) \text{ is eindig.} & \end{cases}$$

Het punt $r = 0$ is een singulier punt van de DV (5.2.6); deze singulariteit is een gevolg van de transformatie naar cylindercoördinaten. We moeten daarom expliciet eisen dat F(0) eindig is.
We onderzoeken als mogelijke eigenwaarden:

a) $\lambda = 0$. De DV (5.2.6) heeft dan tot oplossing,

$$F(r) = A + B \log r .$$

Uit de voorwaarden $F(1) = 0$, F(0) is eindig, volgt evenwel $A = B = 0$, zodat $F(r) \equiv 0$ is; $\lambda = 0$ is dus geen eigenwaarde.

b) $\lambda \neq 0$, λ complex. Stel dan $\lambda = -p^2$ en substitueer in de DV (5.2.6) $z = pr$, dan gaat deze over in,

$$\frac{d^2F}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dF}{dz} + F = 0 ,$$

d.i. de DV van Bessel. De algemene oplossing van de DV (5.2.6) luidt dus

$$F(r) = AJ_0(pr) + BY_0(pr) .$$

Uit de voorwaarde, F(0) is eindig, volgt $B = 0$. De voorwaarde $F(1) = 0$ leidt tot $J_0(p) = 0$, $p = j_n$ $(n = 1,2,3,\dots)$, waarin j_n het n-de (positieve) nulpunt is van $J_0(x)$.
De eigenwaarden en eigenfuncties van (5.2.6) worden dus gegeven door

$$(5.2.7)\qquad \lambda = -j_n^2 ,\quad F(r) = J_0(j_n r) ,\quad n = 1,2,3,\dots .$$

Voor $\lambda = -j_n^2$ heeft de DV (5.2.5) voor G(t) tot oplossing, (5.2.8) $G(t) = C \exp[-j_n^2 t]$.

De gezochte voorraad wordt dus gevormd door de functies

$$u(r,t) = J_0(j_n r) \exp[-j_n^2 t] , \quad n = 1,2,3,\ldots .$$

Vorm nu een lineaire combinatie van functies uit deze voorraad,

(5.2.9) $$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(j_n r) \exp[-j_n^2 t] ,$$

waarin de coëfficiënten C_n nog te bepalen zijn.
De reeks (5.2.9) voldoet dan formeel aan de DV (5.2.2) en aan de randvoorwaarde (5.2.3). Vervolgens worden de coëfficiënten C_n zodanig bepaald dat (5.2.9) ook voldoet aan de (niet-homogeen-lineaire) beginvoorwaarde (5.2.4), i.e.

(5.2.10) $$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(j_n r) = \psi(r) , \quad 0 \le r \le 1 .$$

De reeks (5.2.10) is dus de Fourier-Bessel reeks van de functie $\psi(r)$. Met behulp van (3.12.8) volgt dan voor de coëfficiënt C_n,

(5.2.11) $$C_n = \frac{2}{J_1^2(j_n)} \int_0^1 r\Psi(r) J_0(j_n r)dr .$$

De oplossing $u(r,t)$ van het randwaardeprobleem (5.2.2)-(5.2.4) wordt nu gegeven door de reeks (5.2.9) met coëfficiënten C_n gegeven door (5.2.11). Achteraf dient nog geverifieerd te worden dat (i) de gevonden reeks inderdaad convergent is en termsgewijs gedifferentieerd mag worden naar r en naar t, (ii) de functie $\Psi(r)$ gelijk is aan de som van haar Fourier-Bessel reeks (5.2.10).

Opgave 5.2.1. Bepaal de oplossing van het randwaardeprobleem voor de functie $u(r,\varphi)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 , \quad 0 < r < 1, \ 0 < \varphi < \alpha ,$$

$$u(r,0) = 0 , \quad u(r,\alpha) = 0 , \quad 0 \le r \le 1 ,$$

$$u(1,\varphi) = f(\varphi) , \quad 0 \le \varphi \le \alpha .$$

Opgave 5.2.2. Bepaal de oplossing van het randwaardeprobleem (5.2.2)-(5.2.4) indien de randvoorwaarde $u(1,t) = 0$ wordt vervangen door de zgn. stralings-randvoorwaarde

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,t) = -hu(1,t), \quad t \geq 0,$$

waarin h een positieve constante is.
Aanwijzing: Maak gebruik van het resultaat vermeld in opgave 3.11.6.

Opgave 5.2.3. Bepaal de oplossing van het randwaardeprobleem voor de functie $u(r,z)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq r < 1, \ 0 < z < 1,$$

$$u(1,z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,1) = \Psi(r), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Bepaal de oplossing van hetzelfde randwaardeprobleem, indien de randvoorwaarden worden vervangen door

$$u(1,z) = \Phi(z), \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,1) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Opgave 5.2.4. Door een cylindrische geleider, beschreven door $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-h \leq z \leq h$ (r, φ, z zijn cylindercoördinaten) vloeit een gelijkstroom ter sterkte J. Het soortelijk geleidingsvermogen van de cylinder is σ. De stroom treedt de cylinder binnen via een schijfvormige electrode gegeven door $0 \leq r \leq a < 1$, $z = h$, en verlaat de cylinder via de tegenoverliggende electrode $0 \leq r \leq a$, $z = -h$. Ondersteld wordt dat de stroom gelijkmatig verdeeld is over de electrodes. Bepaal de stroomdichtheid $\underline{j}$ in de cylinder. Deze stroomdichtheid is af te leiden uit de electrostatische potentiaal u volgens $\underline{j} = \sigma$ grad u. Voor de functie $u = u(r,z)$ laat zich dan het volgende randwaardeprobleem formuleren:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq r < 1, \ -h < z < h,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r,\pm h) = \begin{cases} \dfrac{J}{\pi a^2 \sigma}, & 0 \leq r < a, \\ 0, & a < r \leq 1, \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial r}(1,z) = 0, \quad -h \leq z \leq h.$$

5.3. Verstrooiing van een vlakke golf aan een bol

Voer in bolcoördinaten (r,θ,φ) en beschouw het boloppervlak B gegeven door $r = 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Deze bol wordt getroffen door een vlakke scalaire golf

(5.3.1) $$u_0 = e^{ikz-i\omega t} = \exp[ikr\cos\theta]e^{-i\omega t} ,$$

die zich voortplant in de richting van de positieve z-as. In (5.3.1) is $k = \omega/c$, waarbij ω en c de frequentie en de voortplantingssnelheid van de golf voorstellen. De invallende golf (5.3.1) wordt verstrooid aan de bol. Noem de verstrooide golf $u = v(r,\theta)\exp[-i\omega t]$; uit symmetrie-overwegingen is nl. duidelijk dat u niet afhangt van φ. Voor de functie $v(r,\theta)$ laat zich nu het volgende randwaardeprobleem formuleren:

(5.3.2) $$\Delta v + k^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \theta} + k^2 v = 0 ,$$
$$r > 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi ,$$

(5.3.3) $$v(1,\theta) = -\exp[ik\cos\theta] , \quad 0 \leq \theta \leq \pi ,$$

(5.3.4) $$v(r,\theta) \approx A(\theta)\frac{\exp[ikr]}{r} , \quad r \to \infty,\ 0 \leq \theta \leq \pi .$$

Toelichting: De verstrooide golf u voldoet aan de golfvergelijking; substitutie van $u = v\exp[-i\omega t]$ leidt tot de Helmholtz vergelijking (5.3.2) voor v. De voorwaarde (5.3.3) drukt uit dat op het boloppervlak B de totale golf $u_0 + u = 0$ is. De voorwaarde (5.3.4) heet de uitstralingsvoorwaarde van Sommerfeld; ze drukt uit dat voor grote waarden van r de verstrooide golf zich gedraagt als een van B uitgaande bolgolf.
We zullen het randwaardeprobleem (5.3.2)-(5.3.4) oplossen met de methode van separatie van variabelen. Construeer daartoe een voorraad functies van de vorm

(5.3.5) $$v(r,\theta) = F(r)G(\theta) ,$$

die voldoen aan de DV (5.3.2) en aan de (homogeen lineaire) voorwaarde (5.3.4). Substitueer (5.3.5) in de DV (5.3.2), dan is deze DV als volgt te separeren,

$$(5.3.6)\qquad r^2\,\frac{F''(r)}{F(r)} + 2r\,\frac{F'(r)}{F(r)} + k^2r^2 = -\,\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{G'(\theta)}{G(\theta)} = \lambda\ ,$$

waarin λ de separatieconstante is.
Uit (5.3.6) volgt een gewone DV voor $G(\theta)$, geldig voor $0 < \theta < \pi$. De punten $\theta = 0$, $\theta = \pi$ zijn singuliere punten van deze DV; deze singulariteiten zijn een gevolg van de transformatie naar bolcoördinaten. We moeten daarom expliciet eisen, dat $G(\theta)$ eindig is voor $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Op deze wijze komen we tot het eigenwaardeprobleem:

$$(5.3.7)\qquad \begin{cases} G''(\theta) + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\,G'(\theta) + \lambda G(\theta) = 0\ , & 0 < \theta < \pi\ , \\ G(0),\ G(\pi)\ \text{zijn eindig.} \end{cases}$$

We stellen nu $\cos\theta = t$ en voeren t in als nieuwe onafhankelijke variabele. Voor de functie $G^*(t) = G(\theta)$ ontstaat er dan het eigenwaardeprobleem,

$$(5.3.7a)\qquad \begin{cases} (1-t^2)\,\dfrac{d^2G^*(t)}{dt^2} - 2t\,\dfrac{dG^*(t)}{dt} + \lambda G^*(t) = 0\ , & -1 < t < 1\ , \\ G^*(-1),\ G^*(1)\ \text{zijn eindig.} \end{cases}$$

Stellen we $\lambda = \nu(\nu+1)$ dan is de DV (5.3.7a) juist de DV van Legendre. Volgens het voorbeeld uit § 1.2 heeft deze DV in de omgeving van $t = 0$ twee oplossingen, die in het algemeen singulier zijn in $t = \pm 1$. Slechts indien $\nu = n$ (n geheel, ≥ 0), $\lambda = n(n+1)$, zal één der oplossingen een polynoom zijn nl. het Legendre polynoom $P_n(t)$, en eindig zijn in $t = \pm 1$.
We komen dus tot de volgende eigenwaarden en eigenfuncties van (5.3.7),

$$(5.3.8)\qquad \lambda = n(n+1)\ ,\quad G(\theta) = P_n(t) = P_n(\cos\theta)\ ,\quad n = 0,1,2,\dots\ .$$

Substitueer nu $\lambda = n(n+1)$ in de DV (5.3.6) voor $F(r)$,

$$(5.3.9)\qquad F''(r) + \frac{2}{r}\,F'(r) + \left\{k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right\}F(r) = 0\ ,\quad r > 1\ .$$

Deze DV is te herleiden tot de DV van Bessel. Stel daartoe,

$$F(r) = r^{-\frac{1}{2}}H(r)\ ,$$

dan gaat (5.3.9) over in de volgende DV voor $H(r)$,

$$H''(r) + \frac{1}{r}\,H'(r) + \left\{k^2 - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right\}H(r) = 0\ .$$

Stel vervolgens kr = z dan ontstaat er precies de DV van Bessel,

$$\frac{d^2H}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dH}{dz} + \left\{1 - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{z^2}\right\}H = 0 .$$

De oplossing van de oorspronkelijke vergelijking (5.3.9) is dus uit te drukken in Besselfuncties van orde $(n+\frac{1}{2})$. Het blijkt voordelig om daarvoor in dit geval de Hankelfuncties te kiezen, i.e.

$$(5.3.10) \quad F(r) = Ar^{-\frac{1}{2}}\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) + Br^{-\frac{1}{2}}\, H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) .$$

We eisen nu dat $F(r)G(\theta)$ voldoet aan de uitstralingsvoorwaarde (5.3.4). Uit de asymptotische ontwikkelingen van de Hankelfuncties volgt (zie (3.7.4)),

$$(5.3.11) \quad r^{-\frac{1}{2}}\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, \frac{\exp[i(kr - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2}\pi)]}{r} , \qquad r \to \infty ,$$

$$(5.3.12) \quad r^{-\frac{1}{2}}\, H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, \frac{\exp[-i(kr - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2}\pi)]}{r} , \qquad r \to \infty .$$

Het is duidelijk dat de functie (5.3.11) wel voldoet aan de uitstralingsvoorwaarde, maar de functie (5.3.12) niet (met (5.3.12) correspondeert een naar binnen lopende bolgolf). We moeten daarom in (5.3.10) $B = 0$ stellen, waarna volgt,

$$(5.3.13) \quad F(r) = Ar^{-\frac{1}{2}}\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) .$$

Combineer nu de producten $F(r)G(\theta)$ tot de volgende reeks,

$$(5.3.14) \quad v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, r^{-\frac{1}{2}}\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos\theta) .$$

Deze reeks voldoet formeel aan de DV (5.3.2) en aan de uitstralingsvoorwaarde (5.3.4). De coëfficiënten A_n worden zodanig bepaald dat (5.3.14) ook nog voldoet aan de randvoorwaarde (5.3.3) op het boloppervlak $r = 1$, i.e.

$$(5.3.15) \quad v(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(k) P_n(\cos\theta) = -\exp[ik\cos\theta] , \qquad 0 \le \theta \le \pi .$$

Anderzijds volgt uit de reeksontwikkeling (4.6.6a) van Bauer,

$$(5.3.16) \quad \exp[ik\cos\theta] = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n\, J_{n+\frac{1}{2}}(k) P_n(\cos\theta) , \qquad 0 \le \theta \le \pi .$$

Uit (5.3.15), (5.3.16) lezen we onmiddellijk af,

$$(5.3.17)\quad A_n = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\,(2n+1)i^n\,\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(k)}\ .$$

De verstrooide golf $v(r,\theta)$ wordt nu gegeven door de reeks (5.3.14) met coëfficiënten A_n gegeven door (5.3.17). Men kan achteraf verifiëren dat de gevonden reeks inderdaad voldoet aan de voorwaarden (5.3.2)-(5.3.4).

Opgave 5.3.1. Geef de oplossing van het voorgaande verstrooiingsprobleem indien de randvoorwaarde op het boloppervlak $r = 1$ luidt,

$$\frac{\partial}{\partial r}(u_0 + u) = 0\ .$$

Opgave 5.3.2. Voer in cylindercoördinaten (r,φ,z) en beschouw het cylinderoppervlak $r = 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Deze cylinder wordt getroffen door een vlakke scalaire golf

$$u_0 = e^{ikx-i\omega t} = \exp[ikr\cos\varphi]e^{-i\omega t}\ .$$

Noem de verstrooide golf $u = v(r,\varphi)\exp[-i\omega t]$. Voor de functie $v(r,\varphi)$ laat zich het volgende randwaardeprobleem formuleren:

$$\Delta v + k^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0\ ,\qquad r > 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi\ ,$$

$$v(1,\varphi) = -\exp[ik\cos\varphi]\ ,\qquad 0 \le \varphi < 2\pi\ ,$$

$$v(r,\varphi) \approx A(\varphi)\,\frac{\exp[ikr]}{\sqrt{r}}\ ,\qquad r \to \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi\ .$$

Geef de oplossing van dit randwaardeprobleem.

Opgave 5.3.3. Bepaal de oplossing van het randwaardeprobleem voor de functie $u(r,\theta)$,

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0\ ,\qquad 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta \le \pi\ ,$$

$$u(1,\theta) = \begin{cases} 1\ , & 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}\ ,\\ 0\ , & \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi\ .\end{cases}$$

De functie $u(r,\theta)$ is te interpreteren als de stationaire temperatuursverdeling in een massieve bol, indien de bovenhelft van het uitwendige oppervlak $r = 1$ op de temperatuur $u = 1$ en de onderhelft op de temperatuur $u = 0$ wordt gehouden.

Opgave 5.3.4. Bepaal de electrostatische potentiaal veroorzaakt door een eenheidslading die zich bevindt in een punt P (met bolcoördinaten $r = a$, $\theta = 0$) binnen het geaarde boloppervlak $r = 1$.

Opgave 5.3.5. Een cirkelvormige schijf met straal 1 wordt beschreven door $x^2+y^2 \le 1$, $z = 0$. De schijf is electrisch geleidend en op de potentiaal $V = 1$ gebracht. De potentiaal V is dan oplossing van het volgende randwaardeprobleem:

$$\Delta V = 0 \text{ buiten de schijf,}$$

$$V = 1 \quad \text{op de schijf,}$$

$$V(x,y,z) \to 0 \;, \quad x^2+y^2+z^2 \to \infty \;.$$

Bepaal V en de ladingsdichtheid op de schijf.
Aanwijzing: Maak gebruik van zgn. oblate sferoïdale coördinaten ξ, η, φ, die als volgt met x, y, z samenhangen,

$$x = \sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\,\cos\varphi \;, \quad y = \sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\,\sin\varphi \;, \quad z = \xi\eta \;,$$

met $\xi \ge 0$, $-1 \le \eta \le 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$.
Onderzoek de coördinaatvlakken ξ = const., η = const., φ = const. Druk de Laplace operator Δ uit in termen van ξ, η, φ.
Beschrijf het potentiaalprobleem nu in de coördinaten ξ, η, φ en bepaal de oplossing met de methode van separatie van variabelen.

5.4. Dirichlet probleem voor het binnengebied van een bol

Voer in bolcoördinaten (r,θ,φ). Laat G het binnengebied zijn van de bol B met straal 1, i.e. $G = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$. We stellen nu het zgn. Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking in het gebied G. Gevraagd wordt de functie $u = u(r,\theta,\varphi)$ te bepalen welke voldoet aan de volgende voorwaarden:

$$(5.4.1)\qquad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0\ ,\qquad (r,\theta,\varphi)\in G\ .$$

$$(5.4.2)\qquad u(1,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)\ ,\qquad 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi\ .$$

De functie $f(\theta,\varphi)$ zal een gegeven functie zijn.
We construeren weer een voorraad functies van de vorm

$$(5.4.3)\qquad u(r,\theta,\varphi) = F(r)G(\theta)H(\varphi)\ ,$$

die voldoen aan de DV (5.4.1). Substitueer deze functie in (5.4.1) en deel door $F(r)G(\theta)H(\varphi)$, dan volgt

$$\frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{2}{r}\frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{G'(\theta)}{G(\theta)} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{H''(\varphi)}{H(\varphi)} = 0\ .$$

Vermenigvuldig deze vergelijking met $r^2\sin^2\theta$ en separeer,

$$(5.4.4)\qquad \sin^2\theta\left[r^2\frac{F''(r)}{F(r)} + 2r\frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}\right] = -\frac{H''(\varphi)}{H(\varphi)} = \lambda\ ,$$

waarin λ een separatieconstante is. Uit (5.4.4) volgt,

$$(5.4.5)\qquad H''(\varphi) + \lambda H(\varphi) = 0\ ,$$

$$(5.4.6)\qquad r^2\frac{F''(r)}{F(r)} + 2r\frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{G'(\theta)}{G(\theta)} = \frac{\lambda}{\sin^2\theta}\ .$$

De laatste vergelijking is opnieuw te separeren,

$$(5.4.7)\qquad r^2\frac{F''(r)}{F(r)} + 2r\frac{F'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{G'(\theta)}{G(\theta)} + \frac{\lambda}{\sin^2\theta} = \mu\ ,$$

waarin μ een tweede separatieconstante is. De constanten λ en μ zullen volgen uit een tweetal eigenwaardeproblemen.
We bepalen eerst de functie $H(\varphi)$. Deze volgt uit het eigenwaardeprobleem,

$$(5.4.8)\qquad \begin{cases} H''(\varphi) + \lambda H(\varphi) = 0\ , & 0 < \varphi < 2\pi\ ,\\ H(0) = H(2\pi)\ , & H'(0) = H'(2\pi)\ . \end{cases}$$

De laatste voorwaarde drukt uit dat de waarden van $H(\varphi)$, $H'(\varphi)$ voor $\varphi = 2\pi$ continu aansluiten bij de waarden voor $\varphi = 0$.
We onderzoeken als mogelijke eigenwaarden:

a) $\underline{\lambda = 0}$. De DV (5.4.8) heeft dan tot oplossing

$$(5.4.9)\qquad H(\varphi) = A + B\varphi\ .$$

Uit de aansluitvoorwaarden (5.4.8) volgt $B = 0$, terwijl A willekeurig mag zijn. We vinden dus de volgende eigenwaarde en eigenfunctie van (5.4.8),

$$(5.4.10) \quad \lambda = 0 \ , \quad H(\varphi) = 1 \ .$$

b) $\underline{\lambda \neq 0}$, $\underline{\lambda \text{ complex}}$. Stel dan $\lambda = p^2$ $(p \neq 0)$ waarna de oplossing van de DV (5.4.8) luidt,

$$(5.4.11) \quad H(\varphi) = A \cos p\varphi + B \sin p\varphi \ .$$

Substitutie van deze oplossing in de voorwaarden (5.4.8) leidt tot de vergelijkingen,

$$\begin{cases} A(1 - \cos 2p\pi) - B \sin 2p\pi = 0 \ , \\ A \sin 2p\pi + B(1 - \cos 2p\pi) = 0 \ . \end{cases}$$

Deze vergelijkingen zullen een niet-triviale oplossing bezitten indien

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos 2p\pi & -\sin 2p\pi \\ \sin 2p\pi & 1 - \cos 2p\pi \end{vmatrix} = 2(1 - \cos 2p\pi) = 4 \sin^2 p\pi = 0 \ ,$$

i.e. indien $p = m$, geheel is. De oplossing (5.4.11) zal dan voor elke A en B voldoen aan de aansluitvoorwaarden (5.4.8).

Samengevat komen we tot de volgende eigenwaarden en eigenfuncties van (5.4.8),

$$(5.4.12) \quad \lambda = m^2 \ , \quad H(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \ , & m = 0,1,2,\dots \ , \\ \sin m\varphi \ , & m = 1,2,3,\dots \ . \end{cases}$$

We bepalen vervolgens de functie $G(\theta)$. Substitueer in de DV (5.4.7) voor $G(\theta)$ $\lambda = m^2$, dan komen we tot het volgende <u>eigenwaardeprobleem</u> voor $G(\theta)$:

$$(5.4.13) \begin{cases} G''(\theta) + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} G'(\theta) + \left(\mu - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right) G(\theta) = 0 \ , \quad 0 < \theta < \pi \ , \\ G(0),\ G(\pi) \text{ zijn eindig.} \end{cases}$$

We stellen nu $\cos\theta = t$ dan ontstaat er voor de functie $G^*(t) = G(\theta)$ het eigenwaardeprobleem,

$$(5.4.14) \begin{cases} (1 - t^2) \dfrac{d^2G^*(t)}{dt^2} - 2t \dfrac{dG^*(t)}{dt} + \left(\mu - \dfrac{m^2}{1 - t^2}\right) G^*(t) = 0 \ , \quad -1 < t < 1 \ , \\ G^*(-1),\ G^*(1) \text{ zijn eindig.} \end{cases}$$

De DV (5.4.14) stemt overeen met de <u>geassocieerde DV</u> van <u>Legendre</u> (4.10.1). Analoog als in § 5.3 gedaan is voor de DV van Legendre, kan men aantonen dat de DV (5.4.14) slechts dan een oplossing bezit die eindig is in $t = \pm 1$, indien $\mu = n(n+1)$, n geheel, $n \geq m$. Deze oplossing wordt gegeven door $G^*(t) = P_n^m(t)$, waarin $P_n^m(t)$ de geassocieerde Legendre functie van de eerste soort is (zie § 4.10).

De eigenwaarden en eigenfuncties van (5.4.13) worden dus gegeven door

$$(5.4.15) \quad \mu = n(n+1) \ , \quad G(\theta) = P_n^m(\cos\theta) \ , \quad n = m, m+1, m+2, \ldots \ .$$

Substitueer nu $\mu = n(n+1)$ in de DV (5.4.7) voor $F(r)$,

$$(5.4.16) \quad r^2F''(r) + 2rF'(r) - n(n+1)F(r) = 0 \ , \qquad 0 < r < 1 \ .$$

De DV (5.4.16) is van het <u>type Euler</u>. De algemene oplossing luidt,

$$F(r) = Cr^n + Dr^{-n-1} \ .$$

Daar de functie $F(r)$ eindig moet zijn voor $r = 0$, stellen we $D = 0$, waarna volgt

$$(5.4.17) \quad F(r) = Cr^n \ .$$

De gezochte <u>voorraad</u> wordt dus gevormd door de functies

$$u(r,\theta,\varphi) = r^nP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \ , \quad u(r,\theta,\varphi) = r^nP_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \ ,$$

waarin $m = 0,1,2,\ldots$; $n = m, m+1, m+2, \ldots$. Deze functies voldoen aan de DV (5.4.1).

Combineer nu de functies uit de voorraad tot de volgende dubbelreeks,

$$(5.4.18) \quad u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^nP_n^m(\cos\theta)(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi) \ .$$

De reeks (5.4.18) voldoet dan formeel aan de Laplace vergelijking (5.4.1). De coëfficiënten A_{mn}, B_{mn} worden zodanig bepaald dat (5.4.18) tevens voldoet aan de randvoorwaarde (5.4.2), i.e.

$$(5.4.19) \quad u(1,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi) = f(\theta,\varphi) \ ,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \ 0 \leq \varphi < 2\pi \ .$$

De functies $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$, $P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$, $(n=0,1,2,\ldots;\ m=0,1,\ldots,n)$ vormen nu op het boloppervlak $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$ een orthogonaal stelsel. Met behulp van het resultaat van opgave 4.10.2 zijn de volgende orthogonaliteitsbetrekkingen af te leiden,

$$(5.4.20)\quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\cos m\varphi\cos m'\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \eta_m \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{mm'}\delta_{nn'} ,$$

$$(5.4.21)\quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\sin m\varphi\sin m'\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{mm'}\delta_{nn'} , \qquad (m \ge 1,\ m' \ge 1) ,$$

$$(5.4.22)\quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\cos m\varphi\sin m'\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0 .$$

Hierin is $\eta_0 = 2$, $\eta_m = 1$ voor $m \ge 1$, terwijl $\delta_{mm'}$, $\delta_{nn'}$ weer het Kronecker symbool voorstelt; $\delta_{mm'} = 1$ voor $m = m'$, $\delta_{mm'} = 0$ voor $m \neq m'$.
Met behulp van deze orthogonaliteitsbetrekkingen zijn de coëfficiënten A_{mn}, B_{mn} te berekenen uit (5.4.19),

$$(5.4.23)\quad A_{mn} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\eta_m\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi ,$$

$$(5.4.24)\quad B_{mn} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi ,$$

beide voor $n = 0,1,2,\ldots;\ m = 0,1,2,\ldots,n$.

Opgave 5.4.1. Bepaal de oplossing van het Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking in een gebied begrensd door twee concentrische boloppervlakken, i.e. bepaal de functie $u = u(r,\theta,\varphi)$ welke voldoet aan de volgende voorwaarden,

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 ,$$

$$a < r < b,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi ,$$

$$u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \;,\quad u(b,\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi) \;,\quad 0 \le \theta \le \pi,\; 0 \le \varphi < 2\pi \;.$$

Opgave 5.4.2. In het punt P (met bolcoördinaten $r = a < 1$, $\theta = 0$) bevindt zich een electrische dipool met dipoolmoment 1 gericht evenwijdig aan de positieve x-as. De dipool bevindt zich binnen het geaarde boloppervlak B met straal 1. Bereken de potentiaal $V(r,\theta,\varphi)$ van het electrische veld binnen B. Aanwijzing: De potentiaal van het veld ten gevolge van de dipool wordt gegeven door

$$V_d(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}}\right] ,$$

waarin R de afstand van het punt (r,θ,φ) tot P is. Toon aan dat op het boloppervlak B geldt,

$$V_d(1,\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a^n P^1_{n+1}(\cos\theta)\cos\varphi \;.$$

De gevraagde potentiaal $V(r,\theta,\varphi)$ is nu te schrijven als

$$V(r,\theta,\varphi) = V_d(r,\theta,\varphi) + u(r,\theta,\varphi) \;,$$

waarbij de functie $u(r,\theta,\varphi)$ oplossing zal zijn van het randwaardeprobleem,

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \;,$$

$$0 < r < 1,\; 0 \le \theta \le \pi,\; 0 \le \varphi < 2\pi \;,$$

$$u(1,\theta,\varphi) = -V_d(1,\theta,\varphi) \;,\quad 0 \le \theta \le \pi,\; 0 \le \varphi < 2\pi \;.$$

5.5. Eigentrillingen van een cirkelvormig membraan

Een cirkelvormig membraan wordt in poolcoördinaten (r,φ) beschreven door $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Het membraan kan transversale trillingen uitvoeren; de uitwijking van het membraan ter plaatse (r,φ) en ten tijde t wordt aangegeven door $u(r,\varphi,t)$. De functie $u(r,\varphi,t)$ voldoet aan de tweedimensionale golfvergelijking,

$$(5.5.1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \;,\quad 0 \le r < 1,\; 0 \le \varphi < 2\pi,\; t > 0 \;,$$

waarin c de voortplantingssnelheid voorstelt. De rand $r = 1$ van het membraan is vast, i.e.

(5.5.2) $\quad u(1,\varphi,t) = 0 \ , \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \ t \ge 0 \ .$

Gevraagd wordt de eigentrillingen van het membraan te bepalen. Deze eigentrillingen zijn oplossingen van (5.5.1), (5.5.2) van de volgende gedaante,

(5.5.3) $\quad u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi)e^{-i\omega t} \ .$

ω is de frequentie van de eigentrilling.
Substitutie van (5.5.3) in (5.5.1), (5.5.2) leidt tot het vòlgende probleem voor $v(r,\varphi)$:

(5.5.4)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0 \ , & 0 \le r < 1, \ 0 \le \varphi < 2\pi \ , \\ v(1,\varphi) = 0 \ , \quad 0 \le \varphi < 2\pi \ , \end{cases}$$

waarin $\omega/c = k$ gesteld is.
Het probleem (5.5.4) heeft uiteraard de triviale oplossing $v(r,\varphi) \equiv 0$. We zullen in het volgende afleiden dat voor bepaalde waarden van k, het probleem (5.5.4) een oplossing $v(r,\varphi) \not\equiv 0$ bezit. Deze waarden van k heten eigenwaarden en de bijbehorende oplossingen $v(r,\varphi)$ heten eigenfuncties. Het probleem (5.5.4) is dus een eigenwaardeprobleem.
We zullen dit eigenwaardeprobleem oplossen met de methode van separatie van variabelen. Zoek daartoe oplossingen van (5.5.4) van de vorm

(5.5.5) $\quad v(r,\varphi) = F(r)G(\varphi) \ .$

Substitueer deze functie in de DV (5.5.4) en separeer,

(5.5.6) $$r^2\,\frac{F''(r)}{F(r)} + r\,\frac{F'(r)}{F(r)} + k^2r^2 = -\,\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)} = \lambda \ ,$$

waarin λ de separatieconstante is.
Uit (5.5.6) volgt een gewone DV voor $G(\varphi)$. De constante λ moet zo bepaald worden dat de waarden van $G(\varphi)$, $G'(\varphi)$ voor $\varphi = 2\pi$ continu aansluiten bij de waarden voor $\varphi = 0$. Dit leidt tot het volgende eigenwaardeprobleem voor $G(\varphi)$:

(5.5.7)
$$\begin{cases} G''(\varphi) + \lambda G(\varphi) = 0 \ , & 0 < \varphi < 2\pi \ , \\ G(0) = G(2\pi) \ , \quad G'(0) = G'(2\pi) \ . \end{cases}$$

Het eigenwaardeprobleem (5.5.7) is reeds onderzocht in § 5.4 (zie (5.4.8)). Overeenkomstig (5.4.12) vinden we de volgende eigenwaarden en eigenfuncties,

$$(5.5.8) \qquad \lambda = m^2 , \quad G(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi , & m = 0,1,2,\ldots , \\ \sin m\varphi , & m = 1,2,3,\ldots . \end{cases}$$

Substitueer vervolgens in de DV (5.5.6) voor F(r), $\lambda = m^2$. Uit de randvoorwaarde (5.5.4) volgt dat $F(1) = 0$ moet zijn. We komen op deze wijze tot het volgende eigenwaardeprobleem voor F(r):

$$(5.5.9) \qquad \begin{cases} F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) F(r) = 0 , & 0 < r < 1 , \\ F(1) = 0 , \quad F(0) \text{ is eindig.} \end{cases}$$

We onderzoeken als mogelijke eigenwaarden:

a) $k = 0$. De DV (5.5.9) is dan van het type Euler met algemene oplossing

$$(5.5.10) \qquad F(r) = \begin{cases} C + D \log r , & m = 0 , \\ Cr^m + Dr^{-m} , & m \geq 1 . \end{cases}$$

Uit de voorwaarden $F(1) = 0$, $F(0)$ is eindig, volgt evenwel $C = D = 0$ zodat $F(r) \equiv 0$ is; $k = 0$ is dus geen eigenwaarde.

b) $k \neq 0$. De DV (5.5.9) gaat dan door de substitutie $z = kr$ over in de DV van Bessel.
De algemene oplossing van de DV (5.5.9) luidt daarom,

$$(5.5.11) \qquad F(r) = CJ_m(kr) + DY_m(kr) .$$

Uit de voorwaarde F(0) is eindig, volgt $D = 0$. De voorwaarde $F(1) = 0$ leidt tot

$$(5.5.12) \qquad J_m(k) = 0 , \quad k = j_{m,n} , \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

waarin $j_{m,n}$ het n-de (positieve) nulpunt is van $J_m(x)$.
De eigenwaarden en eigenfuncties van (5.5.9) worden dus gegeven door

$$(5.5.13) \qquad k = j_{m,n} , \quad F(r) = J_m(j_{m,n} r) , \quad n = 1,2,3,\ldots .$$

Combineer nu de resultaten (5.5.8), (5.5.13), De eigenwaarden en eigenfuncties van het probleem (5.5.4) worden gegeven door

$$(5.5.14) \qquad k = j_{m,n} , \quad \begin{cases} v(r,\varphi) = vc_{mn}(r,\varphi) := J_m(j_{m,n} r) \cos m\varphi , & m = 0,1,2,\ldots ; \\ v(r,\varphi) = vs_{mn}(r,\varphi) := J_m(j_{m,n} r) \sin m\varphi , & n = 1,2,3,\ldots . \end{cases}$$

Het cirkelvormige membraan heeft dus de volgende eigentrillingen,

$$(5.5.15)\quad \begin{cases} u(r,\varphi,t) = vc_{mn}(r,\varphi)\ \exp[-i\omega_{mn}t]\ , \\ u(r,\varphi,t) = vs_{mn}(r,\varphi)\ \exp[-i\omega_{mn}t]\ , \end{cases} \qquad m = 0,1,2,\ldots;\ n = 1,2,3,\ldots\ ,$$

waarin de eigenfrequenties ω_{mn} gegeven worden door

$$(5.5.16)\quad \omega_{mn} = kc = j_{m,n}c\ .$$

Opmerkingen. 1) Verifieer dat de laagste der eigenfrequenties (5.5.16) gegeven wordt door

$$(5.5.17)\quad \omega_{01} = j_{0,1}c$$

waarin $j_{0,1}$ het eerste nulpunt van $J_0(x)$ is. Deze laagste eigenfrequentie correspondeert met de grondtoon van het membraan.

2) De eigenfuncties $vc_{mn}(r,\varphi)$, $vs_{mn}(r,\varphi)$ vormen een orthogonaal stelsel over het cirkelvormige gebied $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Met behulp van (3.12.1) zijn de volgende orthogonaliteitsbetrekkingen af te leiden,

$$(5.5.18)\quad \int_0^1\int_0^{2\pi} vc_{mn}(r,\varphi)vc_{m'n'}(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\eta_m\pi\ J^2_{m+1}(j_{m,n})\delta_{mm'}\ \delta_{nn'}\ ,$$

$$(5.5.19)\quad \int_0^1\int_0^{2\pi} vs_{mn}(r,\varphi)vs_{m'n'}(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\ J^2_{m+1}(j_{m,n})\delta_{mm'}\ \delta_{nn'}\ ,$$

$$(5.5.20)\quad \int_0^1\int_0^{2\pi} vc_{mn}(r,\varphi)vs_{m'n'}(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi = 0\ .$$

Hierin is weer $\eta_0 = 2$, $\eta_m = 1$ voor $m \ge 1$.
Men kan bewijzen dat ook voor een membraan van willekeurige vorm de eigentrillingen een orthogonaal stelsel vormen.

Opgave 5.5.1. Bepaal de eigentrillingen en eigenfrequenties van een cirkelvormig membraan met straal 1 waarvan de rand $r = 1$ en de voerstraal $0 \le r \le 1$, $\varphi = 0$ vast zijn. Vergelijk de frequentie van de grondtoon met (5.5.17).

Opgave 5.5.2. Bepaal de eigentrillingen en eigenfrequenties van een bolvormige akoestische resonator met straal 1.
Deze eigentrillingen zijn te beschrijven door

$$u(r,\theta,\varphi,t) = v(r,\theta,\varphi)e^{-i\omega t} ,$$

waarbij $v(r,\theta,\varphi)$ oplossing is van het volgende eigenwaardeprobleem:

$$\Delta v + k^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0 ,$$

$$0 \le r < 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(1,\theta,\varphi) = 0 , \quad 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi .$$

5.6. Warmtegeleiding in een staaf van eindige lengte met stralingsrandvoorwaarde

In een staaf van lengte 1 wordt de temperatuur ter plaatse x $(0 \le x \le 1)$ en ten tijde t aangegeven door $u(x,t)$. De functie $u(x,t)$ zal voldoen aan de warmtegeleidingsvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} . \tag{5.6.1}$$

Het uiteinde $x = 0$ van de staaf wordt op de temperatuur $u = 0$ gehouden. In het uiteinde $x = 1$ geldt de stralingsrandvoorwaarde $\partial u/\partial x = -hu$, waarin h een positieve constante is. Deze randvoorwaarde drukt uit dat de warmtestroom $\partial u/\partial x$, die bij het uiteinde $x = 1$ naar buiten treedt, evenredig is met de temperatuur in dat uiteinde. Voorts is de begintemperatuur van de staaf op het tijdstip $t = 0$ gegeven.
Voor de functie $u(x,t)$ laat zich aldus het volgende randwaardeprobleem formuleren:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} , \quad 0 < x < 1,\ t > 0 , \tag{5.6.2}$$

$$u(0,t) = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = -hu(1,t) , \quad t \ge 0 , \tag{5.6.3}$$

$$u(x,0) = \Phi(x) , \quad 0 \le x \le 1 . \tag{5.6.4}$$

We construeren weer een voorraad functies van de vorm

$$u(x,t) = F(x)G(t) ,$$

die voldoen aan de DV (5.6.2) en aan de homogeen lineaire voorwaarden (5.6.3). De laatste voorwaarde (5.6.4) wordt voorlopig buiten beschouwing gelaten.

Substitueer de functie u(x,t) als boven in (5.6.2) dan volgt na separatie

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} = \lambda \,, \tag{5.6.5}$$

waarin λ de separatieconstante is.

Uitgaande van (5.6.3), (5.6.5) komen we nu tot het volgende eigenwaardeprobleem voor F(x):

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \,, \\ F(0) = 0 \,, \quad F'(1) = -\,hF(1) \,. \end{cases} \tag{5.6.6}$$

Als mogelijke eigenwaarden onderzoeken we:

a) $\lambda = 0$. De DV (5.6.6) heeft dan tot oplossing

$$F(x) = A + Bx \,.$$

Uit de randvoorwaarden (5.6.6) volgt dat $A = B = 0$ moet zijn, zodat $F(x) \equiv 0$ is; $\lambda = 0$ is dus geen eigenwaarde.

b) $\lambda \neq 0$, λ complex. Stel $\lambda = -p^2$ $(p \neq 0)$, dan luidt de oplossing van de DV (5.6.6),

$$F(x) = A \cos px + B \sin px \,.$$

Uit de voorwaarde $F(0) = 0$ volgt dat $A = 0$ moet zijn. De voorwaarde $F'(1) =$ $= -\,hF(1)$ leidt tot de transcendente vergelijking

$$p \cos p = -\,h \sin p \,, \quad \cot p = -\,\frac{h}{p} \,. \tag{5.6.7}$$

We bewijzen nu het volgende lemma:

Lemma. De wortels van de vergelijking (5.6.7) zijn alle reëel.

Bewijs. We tonen eerst aan dat de vergelijking (5.6.7) geen zuiver imaginaire wortels heeft. Stel daartoe in (5.6.7) $p = iq$, dan ontstaat de vergelijking

$$\coth q = -\,\frac{h}{q} \,. \tag{5.6.8}$$

De laatste vergelijking heeft geen reële wortels, omdat linkerlid en rechterlid van (5.6.8) van tegengesteld teken zijn voor reële q.

Stel nu dat de vergelijking (5.6.7) een complexe wortel $p = \alpha$ bezit, die niet reëel en niet zuiver imaginair is. Dan is ook $p = \bar{\alpha}$ wortel van de vergelijking (5.6.7) en er geldt $\alpha^2 \neq \bar{\alpha}^2$. Voer nu in de functies

(5.6.9) $\quad y_1(x) = \sin \alpha x \;, \quad y_2(x) = \sin \bar{\alpha} x \;.$

Deze functies zullen voldoen aan de DV's,

(5.6.10) $\quad y_1'' + \alpha^2 y_1 = 0 \;, \quad y_2'' + \bar{\alpha}^2 y_2 = 0 \;,$

en aan de randvoorwaarden

(5.6.11) $\quad y_1(0) = 0 \;, \quad y_1'(1) = -\,h y_1(1) \;, \quad y_2(0) = 0 \;, \quad y_2'(1) = -\,h y_2(1) \;;$

vergelijk met (5.6.6).
Vermenigvuldig nu de DV's (5.6.10) met $y_2(x)$, resp. $y_1(x)$ en vorm het verschil,

(5.6.12) $\quad (y_1'' y_2 - y_1 y_2'') + (\alpha^2 - \bar{\alpha}^2) y_1 y_2 = 0 \;.$

Integreer (5.6.12) over het interval [0,1], dan volgt met de randvoorwaarden (5.6.11),

(5.6.13) $$(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2) \int_0^1 y_1(x) y_2(x)\,dx = -\,[y_1'(x) y_2(x) - y_1(x) y_2'(x)]\Big|_0^1 =$$

$$= -\,[y_1'(1) y_2(1) - y_1(1) y_2'(1)] = h[y_1(1) y_2(1) - y_1(1) y_2(1)] = 0 \;.$$

Daar $\alpha^2 \neq \bar{\alpha}^2$ is, zijn de functies $y_1(x)$, $y_2(x)$ orthogonaal op het interval [0,1]. Anderzijds is echter (zie (5.6.9)),

$$\int_0^1 y_1(x) y_2(x)\,dx = \int_0^1 |\sin \alpha x|^2 dx = 0 \;,$$

waaruit zou volgen $\sin \alpha x \equiv 0$ voor $0 \leq x \leq 1$, hetgeen onjuist is. De wortels van de vergelijking (5.6.7) zijn dus alle reëel. □

We onderzoeken vervolgens de <u>reële</u> wortels van de vergelijking (5.6.7). Teken daartoe de grafiek van de functies $\cot p$ en $-h/p$ voor $p > 0$. Men kan onmiddellijk aflezen dat de twee grafieken oneindig veel snijpunten bezitten. De vergelijking (5.6.7) bezit daarom aftelbaar veel positieve wortels die we aangeven door

(5.6.14) $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$.

De wortel p_n ligt in het interval $((n-\frac{1}{2})\pi, n\pi)$; voor grote waarden van n geldt $p_n \approx (n-\frac{1}{2})\pi$. We vinden dus uiteindelijk de volgende eigenwaarden en eigenfuncties van (5.6.6),

(5.6.15) $\lambda = -p_n^2$, $F(x) = \sin p_n x$, $n = 1,2,3,\dots$.

Opmerking. Ook de waarden $p = -p_n$ $(n = 1,2,3,\dots)$ zijn wortels van de transcendente vergelijking (5.6.7). Evenwel de bijbehorende eigenwaarden en eigenfuncties zijn dezelfde als in (5.6.15).

We bewijzen nog de volgende stelling over de eigenfuncties (5.6.15):

Stelling. De functies $\sin p_n x$ $(n = 1,2,3,\dots)$ vormen op het interval $[0,1]$ een orthogonaal stelsel met gewichtsfunctie 1, d.w.z.

(5.6.16) $$\int_0^1 \sin p_m x \sin p_n x \, dx = \frac{h^2 + h + p_m^2}{2(h^2 + p_m^2)} \delta_{mn} .$$

Bewijs. 1°. $m \neq n$. We stellen

$$y_1(x) = \sin p_m x , \quad y_2(x) = \sin p_n x ,$$

dan laat zich analoog als in het bewijs van het lemma afleiden dat

(5.6.17) $$(p_m^2 - p_n^2) \int_0^1 y_1(x) y_2(x) dx = 0 .$$

Daar $p_m \neq p_n$ is, volgt hieruit de orthogonaliteit van de functies $\sin p_m x$, $\sin p_n x$ op het interval $[0,1]$.

2°. $m = n$. We berekenen de volgende integraal,

(5.6.18) $$\int_0^1 \sin^2 p_m x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2p_m x) dx = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sin 2p_m}{2p_m}\right] .$$

De laatste uitkomst is nog verder te vereenvoudigen,

$$\sin 2p_m = 2 \tan p_m \cos^2 p_m = \frac{2 \tan p_m}{1 + \tan^2 p_m} = -\frac{2(p_m/h)}{1 + (p_m/h)^2} = -\frac{2p_m h}{h^2 + p_m^2} ,$$

waarbij gebruik gemaakt is van het gegeven dat p_m wortel is van de vergelijking (5.6.7). Voor de integraal (5.6.18) vinden we dan tenslotte,

(5.6.19) $$\int_0^1 \sin^2 p_m x \, dx = \frac{h^2 + h + p_m^2}{2(h^2 + p_m^2)} \, .$$ □

We keren nu terug tot het randwaardeprobleem (5.6.2)-(5.6.4). Voor $\lambda = -p_n^2$ heeft de DV (5.6.5) voor G(t) tot oplossing,

(5.6.20) $$G(t) = C \exp[-p_n^2 t] \, .$$

De gezochte <u>voorraad</u> wordt dus gevormd door de functies

$$u(x,t) = \sin p_n x \exp[-p_n^2 t] \, , \qquad n = 1,2,3,\ldots \, .$$

Vorm nu een lineaire combinatie van functies uit deze voorraad,

(5.6.21) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin p_n x \exp[-p_n^2 t] \, .$$

De reeks (5.6.21) voldoet dan formeel aan de DV (5.6.2) en aan de randvoorwaarden (5.6.3). De coëfficiënten C_n worden zodanig bepaald dat (5.6.21) tevens voldoet aan de beginvoorwaarde (5.6.4), i.e.

(5.6.22) $$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin p_n x = \Phi(x) \, , \qquad 0 \le x \le 1 \, .$$

De coëfficiënten C_n komen dus voort uit de reeksontwikkeling van $\Phi(x)$ naar het orthogonale stelsel der functies $\sin p_n x$. Vermenigvuldig nu (5.6.22) met $\sin p_m x$ en integreer termsgewijs over [0,1], dan volgt met de orthogonaliteitsbetrekkingen (5.6.16),

(5.6.23) $$C_m = \frac{2(h^2 + p_m^2)}{h^2 + h + p_m^2} \int_0^1 \Phi(x) \sin p_m x \, dx \, , \qquad m = 1,2,3,\ldots \, .$$

Tenslotte dient nog geverifieerd te worden dat de reeks (5.6.21) met coëfficiënten C_n gegeven door (5.6.23), niet alleen formele oplossing maar tevens echte oplossing van het randwaardeprobleem is. Daartoe moet aangetoond worden dat (i) de reeks (5.6.21) inderdaad convergent is en termsgewijs gedifferentieerd mag worden naar x en naar t, (ii) de functie $\Phi(x)$ gelijk is aan de som van haar sinusreeks (5.6.22).

Opgave 5.6.1. Bepaal de oplossing van het volgende warmtegeleidingsprobleem:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}\,, \qquad 0 \le r < 1,\ t > 0\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,t) = -\,u(1,t)\,, \qquad t \ge 0\,,$$

$$u(r,0) = T_0\,, \qquad 0 \le r \le 1\,.$$

De functie $u(r,t)$ beschrijft de temperatuurverdeling in een massieve bol met straal 1. Het oppervlak van de bol straalt warmte uit overeenkomstig de stralingsrandvoorwaarde (vergelijk (5.6.3)). Op het tijdstip $t = 0$ heeft de bol de constante temperatuur T_0.

Opgave 5.6.2. De transversale trillingen van een balk met lengte 1 worden beschreven door een DV van de vorm

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0\,.$$

Hierin is $u = u(x,t)$ de uitwijking van een punt x $(0 \le x \le 1)$ van de centrale lijn op de tijd t. Het uiteinde $x = 0$ van de balk is ingeklemd, terwijl het uiteinde $x = 1$ vrij zal zijn. De beginuitwijking van de balk op het tijdstip $t = 0$ is gegeven, terwijl de beginsnelheid gelijk aan nul zal zijn. Bepaal de oplossing van het corresponderende randwaardeprobleem voor de functie $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0\,,$$

$$u(0,t) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \qquad t \ge 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t) = 0\,, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(1,t) = 0\,, \qquad t \ge 0\,,$$

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1\,.$$

Opgave 5.6.3. De transversale radiële trillingen van een cirkelvormige plaat met straal 1 en ingeklemde rand worden beschreven door

$$\Delta^2 u + \frac{1}{b^4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \frac{1}{b^4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \,, \qquad 0 \le r < 1,\ t > 0 \,,$$

$$u(1,t) = \frac{\partial u}{\partial r}(1,t) = 0 \,, \qquad t \ge 0 \,.$$

Hierin is $u = u(r,t)$ de uitwijking van de plaat; $b^4 = D/\rho h$ met D is de buigstijfheid, ρ is de dichtheid en h is de dikte van de plaat.
Leid af dat de eigentrillingen van de plaat worden gegeven door

$$u(r,t) = [J_0(p)I_0(pr) - I_0(p)J_0(pr)]\,\exp[ib^2p^2t] \,,$$

waarin p wortel is van de transcendente vergelijking

$$J_0(p)I_1(p) + I_0(p)J_1(p) = 0 \,.$$

Onderzoek de wortels van deze vergelijking.

Literatuur

(De vermelde letter-cijfer combinatie is die van de catalogus van de wiskunde-bibliotheek van de T.H.E.)

1. Algemeen

[1.1] S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint - Algebra en Analyse, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970 (BA 7017).

[1.2] G.W. Veltkamp - Collegedictaat voortgezette functietheorie, 1973.

[1.3] E.T. Whittaker and G.N. Watson - A course of modern analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1963 (BI 6305).

[1.4] A. Erdélyi (ed.) - Higher transcendental functions, Vol. I, II, III, McGraw-Hill, New York, 1953 (BI 5301).

[1.5] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.) - Handbook of mathematical functions, Dover Publ., New York, 1965 (BN 6406).

[1.6] I.N. Sneddon - Special functions of mathematical physics and chemistry, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956 (BI 5601).

[1.7] E.T. Copson - An introduction to the theory of functions of a complex variable, Clarendon Press, Oxford, 1960 (BG 3501).

[1.8] N.N. Lebedev - Special functions and their applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965 (BI 6501).

[1.9] E.D. Rainville - Special functions, MacMillan, New York, 1960 (BI 6002).

2. Differentiaalvergelijkingen

[2.1] E.L. Ince - Ordinary differential equations, Dover Publ., New York, 1956 (BH 5621).

[2.2] J.C. Burkill - The theory of ordinary differential equations, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956 (BH 5618).

3. Besselfuncties

[3.1] G.N. Watson - A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966 (BI 6602).

[3.2] G. Petiau - La théorie des fonctions de Bessel, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1955 (BI 5501).

[3.3] N.W. McLachlan - Bessel functions for engineers, Clarendon Press, Oxford, 1955 (BI 5503).

4. Legendre functies

[4.1] J. Lense - Kugelfunktionen, Geest und Portig, Leipzig, 1954 (BI 5403).

[4.2] L. Robin - Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, Tome I, II, III, Gauthier-Villars, Paris, 1958 (BI 5806).

[4.3] E.W. Hobson - The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge University Press, Cambridge, 1955 (BI 5502).

5. Vraagstukken

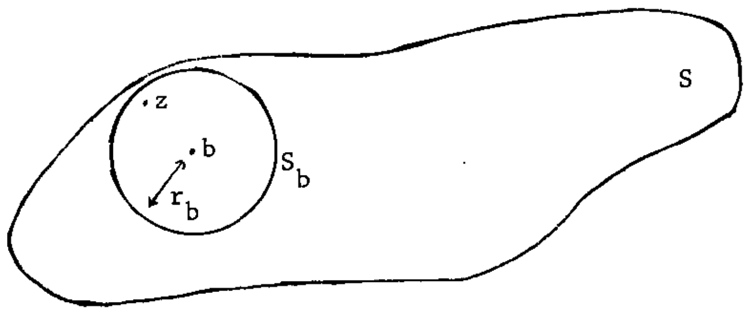
[5.1] O.J. Farrell and B. Ross - Solved problems: Gamma and Beta functions, Legendre polynomials, Bessel functions, MacMillan, New York, 1963 (BI 6303).

[5.2] N.N. Lebedev, I.P. Skalskaya and Y.S. Uflyand - Problems of mathematical physics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965 (BF 6507).

[5.3] B.M. Budak, A.A. Samarskii and A.N. Tikhonov - A collection of problems on mathematical physics, Pergamon Press, Oxford, 1964 (BH 6429).

Oplossing van de lineaire DV in de omgeving van een gewoon punt

Stel b gewoon punt; S_b gesloten cirkelgebied (dus rand inbegrepen), middelpunt b, straal r_b, zodanig dat ieder punt van S_b gewoon punt der DV is (het definitiegebied der DV is S).



Zij z een variabel punt uit S_b. Voer nieuwe afhankelijke variabele in door de substitutie

$$y(z) = v(z)\exp\left[-\tfrac{1}{2}\int_b^z p(\xi)d\xi\right] .$$

Hierbij loopt integratieweg van b naar z geheel binnen S_b.
Daar p(z) analytisch op S_b is, hangt de integraal niet van de keuze der integratieweg af.
De DV wordt getransformeerd in

$$\frac{d^2v}{dz^2} + J(z)v = 0$$

met

$$J(z) := q(z) - \tfrac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz} - \tfrac{1}{4}\{p(z)\}^2 \qquad (*)$$

(verifieer dit!).
De functie J(z) is van dezelfde soort als p(z) en q(z):
analytisch binnen S met eventuele uitzondering van een eindig aantal polen.
Een gewoon punt van de oorspronkelijke DV is een gewoon punt van de nieuwe DV.

(Het omgekeerde geldt niet: neem $p = 1/z$, $q = -1/4z^2 \to J(z) = 0$.)
We weten dus: $J(z)$ is eenwaardig analytisch op het *gesloten* cirkelgebied S_b.

Idee: We gaan construeren een oplossing der DV (*) door middel van een machtreeksontwikkeling om het punt b, geldig binnen S_b, die voorgeschreven functiewaarde en afgeleide waarde aanneemt in punt b. Dit is het *existentie-gedeelte*. Vervolgens laten we zien dat bij voorgeschreven $v(b)$ en $v'(b)$ slechts één oplossing bestaat. Dat is *eenduidigheidsbewijs*.

Methode der successieve approximatie.
Beschouw een rij functies $\{v_n(z)\}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, gedefinieerd door

$$v_0(z) := a_0 + a_1(z-b) ,$$

$$v_1(z) := \int_b^z (\xi - z)J(\xi)v_0(\xi)d\xi ,$$

$$\vdots$$

$$v_n(z) := \int_b^z (\xi - z)J(\xi)v_{n-1}(\xi)d\xi , \quad (n \geq 2) .$$

Hierbij zijn a_0 en a_1 willekeurige complexe constanten.
De integratie-weg kunnen we rechtlijnig nemen. In principe kunnen we de rij $v_0, v_1, v_2, \ldots$ expliciet construeren daar J gegeven is. De functies $v_n(z)$ zijn kennelijk eenwaardig-analytisch op S_b.

We gaan een ruwe schatting van de functies v_n maken.
We weten: S_b is gesloten. Laat dan M en μ zijn, respectievelijk, de maximum-waarden van $|J(z)|$ en $|v_0(z)|$ op S_b. (We kunnen ook bovengrenzen (of bovenste grenzen) nemen.) Dan bewijzen we eerst:

$$|v_n(z)| \leq \mu M^n |z-b|^{2n}/n! \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

voor elke z uit S_b, dus $|z-b| \leq r_b$.

Bewijs met volledige inductie.
Ongelijkheid geldt voor $n = 0$ (duidelijk).
Stel ongelijkheid geldt voor $n = 0,1,\ldots,m-1$ $(m \geq 1)$.
Neem integratieweg rechtlijnig:

$$|v_m(z)| = \left| \int_b^z (\xi - z) J(\xi) v_{m-1}(\xi) d\xi \right|$$

$$\leq \int_b^z |\xi - z| \cdot |J(\xi)| \cdot \frac{\mu M^{m-1}}{(m-1)!} |\xi - b|^{2m-2} \cdot |d\xi|$$

$$\leq \frac{\mu M^m}{(m-1)!} \int_b^z |\xi - z| \, |\xi - b|^{2m-2} \cdot |d\xi|$$

$$\leq \frac{\mu M^m}{(m-1)!} |z - b| \int_0^{|z-b|} t^{2m-2} \, dt$$

$$\leq \frac{\mu M^m |z - b|^{2m}}{(m-1)!(2m-1)} \qquad (2m-1 \geq m \text{ als } m \geq 1)$$

$$\leq \frac{\mu M^m |z - b|^{2m}}{m!} .$$

Dus bewijs klaar.

Bovendien kunnen we direct een *uniforme* schatting van $v_n(z)$ geven.
Omdat $|z - b| \leq r_b$ geldt

$$|v_n(z)| \leq \frac{\mu M^n (r_b)^{2n}}{n!} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

voor elke z uit gesloten gebied S_b.

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \mu M^n \frac{r_b^{2n}}{n!}$ is convergent (en heeft tot som $\mu \exp(Mr_b^2)$).

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$ heeft dus een majorante onafhankelijk van z, en is dus zelf een convergente reeks als $z \in S_b$.

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$ convergeert uniform in z op S_b.
Verder is $v_n(z)$ analytisch op S_b. Volgens een bekende stelling is $\sum_0^{\infty} v_n(z)$ zelf een analytische functie van z voor elke z *binnen* het gebied (S_b zonder rand). Deze functie noemen we V(z):

$$V(z) := \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z) \; .$$

V(z) is eenwaardig-analytisch binnen S_b. De successieve afgeleiden kunnen we vinden door termsgewijze differentiatie. Alle zo verkregen reeksen zijn uniform convergent. De hierna volgende bewerkingen zijn legitiem:

$$\frac{dV}{dz} = \sum_0^{\infty} \frac{dv_n(z)}{dz} \; ,$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \sum_0^{\infty} \frac{d^2v_n(z)}{dz^2} \; .$$

Uit de definitie van $v_n(z)$ halen we

$$\frac{dv_0}{dz} = a_1 \; , \; \frac{d^2v_0}{dz^2} = 0 \; ,$$

$$\frac{dv_1}{dz} = -\int_b^z J(\xi)v_0(\xi)d\xi \; ,$$

$$\frac{d^2v_1}{dz^2} = -J(z)v_0(z) \; ;$$

algemeen:

$$\frac{dv_n}{dz} = -\int_b^z J(\xi)v_{n-1}(\xi)d\xi \; ,$$

$$\frac{d^2v_n}{dz^2} = -J(z)v_{n-1}(z) \; , \qquad (n \geq 1) \; .$$

Derhalve geldt:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d^2v_0}{dz^2} + \sum_1^\infty \frac{d^2v_n}{dz^2} = 0 - J(z) \sum_1^\infty v_{n-1}(z)$$

$$= -J(z) \sum_0^\infty v_n(z) = -J(z)V .$$

Dus:
$V(z)$ is een functie van z die eenwaardig-analytisch is binnen S_b en die oplossing is van de DV

$$\frac{d^2v}{dz^2} + J(z)v(z) = 0 .$$

Er geldt bovendien:

$$V(b) = v_0(b) + v_1(b) + v_2(b) + \ldots = v_0(b) = a_0 ,$$

$$\frac{dV}{dz}(b) = v_0'(b) + v_1'(b) + v_2'(b) + \ldots = v_0'(b) = a_1 .$$

De genoemde oplossing heeft dus ook de gewenste beginvoorwaarden:

$$V(b) = a_0,\ V'(b) = a_1 .$$

Daarmee is existentiebewijs klaar. Dat wil zeggen:
Keer terug naar oorspronkelijke DV (*). Daarvoor hebben we oplossing gevonden in de vorm

$$Y(z) := \exp\left[-\tfrac{1}{2} \int_b^z p(\xi)d\xi\right] \cdot V(z) .$$

Deze functie is eenwaardig-analytisch binnen S_b en voldoet aldaar aan

$$Y(b) = V(b) = a_0$$

$$Y'(b) = V'(b) - \tfrac{1}{2}p(b)V(b) = a_1 - \tfrac{1}{2}p(b)a_0 .$$

We kunnen dan ook, bij voorgeschreven $Y(b) = A_0$ en $Y'(b) = A_1$, a_0 en a_1 geschikt kiezen $a_0 = A_0$, $a_1 = A_1 + \tfrac{1}{2}p(b)A_0$, en zodoende vinden:

Tenminste één oplossing van de DV (*) in omgeving van gewoon punt bij voorgeschreven waarden van y en y' in dit punt, die eenwaardig-analytisch is binnen een cirkel om b als middelpunt en zo grote straal dat elk punt van de cirkel nog een gewoon punt is; m.a.w. die cirkel kunnen we laten opzwellen tot er een singulier punt van de DV op de rand komt.

Eenduidigheidsprobleem

Uit theorie van reële functies en differentiaalvergelijkingen is bekend dat een homogene lineaire DV van de tweede orde precies twee "lineair-onafhankelijke" oplossingen heeft. In onze oplossing staan 2 willekeurige constanten. We vermoeden dus dat de oplossing eenduidig is bij voorgeschreven functie- en afgeleide- waarden in $z = b$. Dit vermoeden is juist.

Bewijs. Stel er waren twee oplossingen van het beschouwde type, $V_1(z)$ en $V_2(z)$. Dan is $W(z) := V_1(z) - V_2(z)$ ook een oplossing, en daarvoor geldt $W(b) = W'(b) = 0$. Uit de vergelijking $W'' + J(z)W = 0$ volgt dan $W''(b) = 0$. Door één keer te differentiëren:

$$W''' + J'(z)W + J(z)W' = 0$$

en $z = b$ stellen, komt er $W'''(b) = 0$.
Met volledige inductie, ook door n maal differentiëren met regel van Leibnitz volgt dat alle afgeleiden van W in het punt b gelijk nul zijn. Dan is $W \equiv 0$. Dus $V_1(z) \equiv V_2(z)$ voor z in S_b.

Gaan we terug op onze DV (*), dan vonden we

$$Y(z) = V(z) \exp\left[-\tfrac{1}{2} \int_b^z p(\xi)d\xi\right]$$

met $a_0 = A_0$, $a_1 = \frac{1}{2}p(b)A_0 + A_1$ is rond $z = b$ de enige analytische oplossing van DV (*) zodanig dat $y(b) = A_0$, $y'(b) = A_1$ waarin A_0 en A_1 willekeurig.

Het existentiebewijs van Y(z) is in zekere zin constructief, maar voor de expliciete berekening van Y(z) kunnen we handiger te werk gaan. We doen het niet via de rij functies $\{v_n(z)\}$ en de reeks $\sum_0^\infty v_n(z)$. Nu we eenmaal weten dat er een oplossing is die analytisch is binnen S_b, en die we dus in een machtreeks van z-b kunnen ontwikkelen, $Y(z) = \sum_0^\infty A_n(z-b)^n$, gaan we zo'n machtreeks formeel in DV (*) substitueren en trachten $A_2, A_3, \ldots$ uit te drukken in termen van A_0 en A_1 door alle machten van z-b nul te stellen. Dat draait altijd uit op een recurrente betrekking, die soms eenvoudig, maar meestal ingewikkeld is.

Dit proces -machtreeksen-methode- gaat altijd op, voor welk gewoon punt dan ook. We krijgen door het punt b "alle" punten van S te laten doorlopen overal in S een oplossing der DV. Gaan we uit van een vast punt b, dan krijgen we automatisch analytische *voortzetting* van Y(z) als we nieuwe punten b',b",... kiezen en de beginvoorwaarden daar geschikt kiezen. Men moet niet denken dat we dan een oplossing in S krijgen die *in geheel* S *eenwaardig* analytisch is. De functie Y(z) kan bij het "draaien" om een singulier punt der DV tot andere waarden komen. Wel is het zo dat singulariteiten van Y(z) (en zijn analytische voortzettingen) slechts kunnen (maar niet behoeven) optreden in de singuliere punten van de DV (d.w.z. in de polen van p en/of q, of de rand van S).

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Aanvulling
Toegepaste Analyse I

Syllabus naar het college
van prof.dr. C.J. Bouwkamp

Aanvulling bij diktaatnr. 2.208 Prijs f 1.-

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

AANVULLING TOEGEPASTE ANALYSE I

Syllabus naar het college van

Prof. dr. C.J. Bouwkamp

Najaarssemester 1976

Hoofdstuk I. Oplossen van differentiaalvergelijkingen door machtreekstechniek

1.1. Lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde

De standaardvorm van de (homogene) lineaire DV van de tweede orde is

$$y'' + py' + qy = 0 ,$$

of, uitvoeriger,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0 . \qquad (*)$$

Hierbij zijn p en q (gegeven) functies van z, gedefinieerd in een gebied G van het complexe vlak en aldaar (eenwaardig-)analytisch, met eventuele uitzondering van polen.

Het oplossen van de DV bestaat uit het zoeken naar, en aanwijzen van, een functie $y = f(z)$ ($\not\equiv 0$) die in G (of tenminste een deel daarvan) voldoet aan $f'' + pf' + qf = 0$.
Belangrijke vragen zijn:

(1) bestaat zo'n oplossing f;
(2) waar is f analytisch;
(3) wanneer is f uniek ?

Definitie. Een punt z_0 ($\neq \infty$) $\in$ G heet gewoon punt van de DV als p en q analytisch zijn in z_0.
Een punt z_0 ($\neq \infty$) $\in$ G heet singulier punt van de DV als p en/of q een pool heeft in z_0.

Het zal blijken dat de oplossingen rond een gewoon punt nogal verschillen van die rond een singulier punt.
Vandaar dit onderscheid in gewone en singuliere punten van de DV.

1.2. Oplossing van de DV rond een gewoon punt

We gaan bewijzen:

(1) Iedere oplossing $y = f(z)$ van de DV rond een gewoon punt is aldaar een (eenwaardig-) analytische functie.

(2) Voorgeschreven (eindige) waarden van functie en afgeleide in het gewone punt karakteriseren een oplossing ondubbelzinnig.

Laat z_0 een gewoon punt van de DV zijn. Dan kan men een getal R aangeven, met $0 < R \leq \infty$, zodanig dat in de cirkelschijf $|z - z_0| < R$ de functies p en q analytisch zijn. Elk punt van deze schijf is gewoon punt van de DV.

Kies r met $0 < r < R$, en zij S de gesloten cirkelschijf gedefinieerd door $|z - z_0| \leq r$. Voer een nieuwe afhankelijke variabele in door de substitutie

$$y(z) = v(z) \exp[- \tfrac{1}{2} \int_{z_0}^{z} p(\xi)d\xi] .$$

Daar p analytisch op S is, hangt de waarde van de integraal niet af van de keuze van de integratieweg, zolang de laatste maar binnen S loopt.

De DV wordt getransformeerd in

$$\frac{d^2v}{dz^2} + J(z)v = 0 \qquad (**)$$

met

$$J(z) := q(z) - \tfrac{1}{2} \frac{dp(z)}{dz} - \tfrac{1}{4} \{p(z)\}^2$$

(verifieer dit!) .
De functie J(z) is van dezelfde soort als p en q: gedefinieerd in G en aldaar analytisch met eventuele uitzondering van polen. Een gewoon punt van de oorspronkelijke DV is een gewoon punt van de getransformeerde. Het omgekeerd geldt niet (voorbeeld: $p := 1/z$, $q := - 1/4z^2$; $J(z) \equiv 0$). We gaan uit van de getransformeerde DV (**), en construeren een oplossing met behulp van successieve approximatie. Allereerst een toelichting hoe

men daaraan komt.

Stel we hebben een analytische functie v die in S aan (**) voldoet. Dan volgt uit $v'' = -Jv$ bij integratie:

$$v'(z) = v'(z_0) - \int_{z_0}^{z} J(\xi)v(\xi)d\xi \; .$$

Nogmaals integreren geeft

$$v(z) = v(z_0) + v'(z_0)(z - z_0) - \int_{z_0}^{z} d\zeta \int_{z_0}^{\zeta} J(\xi)v(\xi)d\xi \; .$$

De herhaalde integraal wordt tot een enkele omgevormd door partiële integratie:

$$\int_{z_0}^{z} d\zeta \int_{z_0}^{\zeta} J(\xi)v(\xi)d\xi \quad \left(= \int_{z_0}^{z} d\zeta F(\zeta)\right)$$

$$= (\zeta - z)F(\zeta)\Big|_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} (\zeta - z)F'(\zeta)d\zeta$$

$$= \quad 0 \quad - \int_{z_0}^{z} (\zeta - z)J(\zeta)v(\zeta)d\zeta \; .$$

Daarmee vinden we

$$v(z) = v(z_0) + v'(z_0)(z - z_0) + \int_{z_0}^{z} (\zeta - z)J(\zeta)v(\zeta)d\zeta \; ,$$

een identiteit geldig voor elke analytische oplossing v(z) van (**). De identiteit kan worden opgevat als "integraalvergelijking" voor v, en deze integraalvergelijking zou door successieve approximatie kunnen worden opgelost, als volgt:

Met $v(z_0) = b_0$, $v'(z_0) = b_1$, definieer

$$v_0(z) := b_0 + b_1(z - z_0) ,$$

$$v_{n+1}(z) := \int_{z_0}^{z} (\zeta - z)J(\zeta)v_n(\zeta)d\zeta \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

Dan voldoet (verifieer dit!)

$$v(z) := \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$$

formeel aan de genoemde integraalvergelijking. Tot zover de toelichting.

Beschouw een rij functies $\{v_n(z)\}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, gedefinieerd door

$$v_0(z) := b_0 + b_1(z - z_0) ,$$

$$v_{n+1}(z) := \int_{z_0}^{z} (\zeta - z)J(\zeta)v_n(\zeta)d\zeta \qquad (n \geq 0) .$$

Hierbij zijn b_0 en b_1 willekeurige, maar eindige, complexe constanten. De integratieweg kunnen we rechtlijnig nemen. In principe kunnen we de rij $v_0, v_1, v_2, \ldots$ expliciet construeren daar J bekend is. De functies $v_n(z)$ zijn kennelijk eenwaardig-analytisch op S.

We gaan een (ruwe) schatting voor de functies v_n afleiden. S is gesloten; laten dan M en μ zijn, respectievelijk, de maximale waarden van $|J(z)|$ en $|v_0(z)|$ op S. Dan bewijzen we de schatting

$$|v_n(z)| \leq \mu M^n |z - z_0|^{2n}/n! \qquad (n = 0,1,2,\ldots) ,$$

voor $z \in S$ $(|z - z_0| \leq r)$.

Het bewijs gaat met volledige inductie. De ongelijkheid geldt voor n = 0 (duidelijk). Stel de ongelijkheid geldt voor n = m - 1 (m ≥ 1).
Neem integratieweg rechtlijnig:

$$|v_m(z)| = \left|\int_{z_0}^{z} (\zeta - z)J(\zeta)v_{m-1}(\zeta)d\zeta\right|$$

$$\leq \int_{z_0}^{z} |\zeta - z| \cdot |J(\zeta)| \cdot \frac{\mu M^{m-1}}{(m-1)!}|\zeta - z_0|^{2m-2} \cdot |d\zeta|$$

$$\leq \frac{\mu M^m}{(m-1)!} \int_{z_0}^{z} |\zeta - z||\zeta - z_0|^{2m-2} |d\zeta|$$

$$\leq \frac{\mu M^m}{(m-1)!}|z - z_0| \int_0^{|z-z_0|} t^{2m-2}dt$$

$$\leq \frac{\mu M^m}{(m-1)!} \frac{|z - z_0|^{2m}}{(2m-1)}$$

$$\leq \frac{\mu M^m |z - z_0|^{2m}}{m!} \qquad (2m - 1 \geq m \text{ als } m \geq 1.)$$

De schatting geldt dus voor n = m, en derhalve voor elke $n \geq 0$.

Bovendien kunnen we direct een <u>uniforme</u> schatting geven. Omdat $|z - z_0| \leq r$, geldt

$$|v_n(z)| \leq \mu M^n r^{2n}/n! \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

voor elke z uit S.

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \mu M^n r^{2n}/n!$ is convergent (en heeft tot som $\mu \exp(Mr^2)$).

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$ heeft dus een convergente majorante, onafhankelijk van z, en is dus niet alleen zelf een convergente reeks als $z \in S$ maar is ook <u>uniform</u> convergent op S. Verder is $v_n(z)$ analytisch op S. Volgens een bekende stelling is, onder deze omstandigheden, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$ een analytische functie van z voor elke z <u>binnen</u> het gebied (S zonder rand). Deze functie noemen we V(z):

$$V(z) := \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z) \ .$$

Deze functie V(z) is eenwaardig-analytisch voor $|z - z_0| < r$.
Weer volgens een bekende stelling, kunnen we de afgeleiden vinden door termsgewijze differentiatie. Alle zo verkregen reeksen zijn uniform convergent.
De hierna volgende bewerkingen zijn legitiem:

$$\frac{dV(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dv_n(z)}{dz} \ ,$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2v_n(z)}{dz^2} \ .$$

Uit de definitie van $v_n(z)$ halen we

$$\frac{dv_0(z)}{dz} = b_1 \ , \ \frac{d^2v_0(z)}{dz^2} = 0 \ ,$$

$$\frac{dv_1(z)}{dz} = - \int_{z_0}^{z} J(\zeta)v_0(\zeta)d\zeta$$

$$\frac{d^2v_1(z)}{dz^2} = - J(z)v_0(z) \ ;$$

algemeen:

$$\frac{dv_n(z)}{dz} = - \int_{z_0}^{z} J(\zeta)v_{n-1}(\zeta)d\zeta$$

$$\frac{d^2v_n(z)}{dz^2} = - J(z)v_{n-1}(z) , \qquad (n \geq 1) .$$

Derhalve geldt:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \frac{d^2v_0(z)}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2v_n(z)}{dz^2}$$

$$= 0 - J(z) \sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1}(z)$$

$$= - J(z) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z) = - J(z)V(z) .$$

Dus: $V(z)$ is een functie van z die eenwaardig-analytisch is binnen S en die oplossing is van de DV

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} + J(z)v(z) = 0 .$$

Er geldt bovendien:

$$V(z_0) = v_0(z_0) + v_1(z_0) + \ldots = v_0(z_0) = b_0 ,$$

$$\frac{dV(z_0)}{dz} = v_0'(z_0) + v_1'(z_0) + \ldots = v_0'(z_0) = b_1 .$$

De genoemde oplossing voldoet dus aan de "beginvoorwaarden"

$$V(z_0) = b_0 , \quad V'(z_0) = b_1 .$$

Keer terug naar de oorspronkelijke DV(*). Daarvoor hebben we een oplossing gevonden in de vorm

$$Y(z) := \exp[- \tfrac{1}{2} \int_{z_0}^{z} p(\zeta)d\zeta] . V(z)$$

Deze functie is (eenwaardig-) analytisch binnen S en heeft beginwaarden

$$Y(z_0) = V(z_0) = b_0 ,$$

$$Y'(z_0) = V'(z_0) - \tfrac{1}{2}p(z_0)V(z_0) = b_1 - \tfrac{1}{2}p(z_0)b_0 .$$

Hebben we voorgeschreven waarden a_0 en a_1 van functie en afgeleide, dan kiezen we b_0 en b_1 door

$$b_0 := a_0 , \; b_1 := a_1 + \tfrac{1}{2}p(z_0)a_0 .$$

Hiermee is punt (2) bijna afgehandeld. Het resultaat is de volgende

Hulpstelling.

Zijn a_0 en a_1 willekeurig gekozen, maar eindige complexe getallen, dan heeft de DV (*) tenminste één oplossing $y = f(z)$ die eenwaardig-analytisch is voor $|z - z_0| < R$ en voldoet aan $f(z_0) = a_0$, $f'(z_0) = a_1$.

Punt (2) is bijna afgehandeld. Om punt (2) helemaal af te handelen moeten we "tenminste één oplossing" in bovenstaande stelling zien te vervangen door "één en slechts één oplossing".

Als we aannemen dat punt (1) bewezen is, is de éénduidigheid bij punt (2) gemakkelijk te bewijzen.
Stel dat $y = f_1(z)$ en $y = f_2(z)$ beide analytische oplossingen zijn met de voorgeschreven beginwaarden a_0 en a_1. Dan is $f := f_1(z) - f_2(z)$ een analytische oplossing met beginwaarden 0. Voor f geldt dus

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad f'' + pf' + qf = 0 .$$

Uit de laatste betrekking (geldig in de omgeving van z_0) volgt $f''(z_0) = 0$.
Door de laatste betrekking één keer te differentiëren (dat mag!) vindt men bij substitutie $z = z_0$ ook $f'''(z_0) = 0$.
Herhaling van dit proces geeft

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots) .$$

Volgens de identiteitsstelling der complexe-functietheorie is dan f identiek nul, en dus $f_1(z) \equiv f_2(z)$, en dus f ondubbelzinnig bepaald door de beginwaarden van functie en afgeleide.

Rest ons nog het bewijs van punt (1). Dat is niet al te moeilijk, omdat, net als bij de reële analyse, de algemene oplossing van een homogene lineaire DV van de tweede orde kan worden aangegeven zodra één speciale oplossing bekend is.

Stel $y = f(z)$ is een analytische oplossing van (*), met $f(z_0) = 1$, $f'(z_0) = a_1$. Die bestaat volgens de hulpstelling.
Om de algemene oplossing te vinden, stellen we

$$y = f \cdot Y$$

en vinden voor Y de DV

$$Y'' + (p + 2\frac{f'}{f})Y' = 0$$

of wel

$$\frac{d}{dz}\left[\log\{f^2(z)\,\frac{dY(z)}{dz}\}\right] = -\,p(z)\ .$$

Integratie geeft

$$\log[f^2Y'] = -\int_{z_0}^{z} p(\xi)d\xi + \text{constante},$$

$$f^2Y' = C_2\,\exp[-\int_{z_0}^{z} p(\xi)d\xi]\ .$$

Nogmaals integreren geeft

$$Y(z) = \int_{z_0}^{z} d\zeta\,\frac{C_2}{f^2(\zeta)}\,\exp[-\int_{z_0}^{\zeta} p(\xi)d\xi] + C_1\ ,$$

waarbij C_1 en C_2 integratie-constanten zijn.

De algemene oplossing van (*) wordt daarmee

$$y = C_1 f(z) + C_2 f(z) \int_{z_0}^{z} d\zeta f^{-2}(\zeta) \exp[- \int_{z_0}^{\zeta} p(\xi) d\xi] .$$

Deze oplossing is in de omgeving van z_0 inderdaad eenwaardig-analytisch, omdat $f(z_0) \neq 0$. Verwachte moeilijkheden bij integratie door eventuele nulpunten van f kunnen ook worden weggepraat. Het residu van de integrand moet nul zijn voor een nulpunt van f(z) binnen S, want bovenstaande algemene oplossing is analytisch in geheel S, niet alleen in de omgeving van z_0. Immers, deze y heeft bepaalde, eindige waarden $y(z_0)$ en $y'(z_0)$, en met deze beginwaarden kan men volgens de hulpstelling tenminste één analytische oplossing construeren, geldig voor S. Identiteit van functies in de omgeving van z_0 impliceert dan identiteit in geheel S.
De punten (1) en (2) gaan we als stelling formuleren:

<u>Stelling</u>. Zijn de functies p(z) en q(z) (eenwaardig-) analytisch voor $|z - z_0| < R$ en zijn a_0 en a_1 willekeurige (eindige) complexe getallen, dan bestaat er één en slechts één functie $y = y(z)$ zodanig dat

(1) y(z) voldoet aan (*) ,
(2) y(z) voldoet aan de beginvoorwaarden $y(z_0) = a_0$, $y'(z_0) = a_1$,
(3) y(z) is (eenwaardig-) analytisch voor $|z - z_0| < R$.

Bovendien gelden de volgende uitspraken:

(4) iedere oplossing van (*) is (eenwaardig-) analytisch voor $|z - z_0| < R$,
(5) de oplossingsruimte is twee-dimensionaal: de algemene oplossing bevat twee integratieconstanten.

<u>Opmerking</u>. We kunnen R maximaal denken; de cirkelschijf $|z - z_0| < R$ zo lang laten zwellen dat hij tegen de rand van G en/of een pool van p en/of q aanstuit (waarom kunnen we schijf met straal R nemen, in plaats van S met straal $r < R$?).

Het existentiebewijs bij de hulpstelling is in zekere zin constructief, maar voor de expliciete berekening van de oplossing kunnen we handiger te werk gaan. We doen het niet via de rij functies $\{v_n(z)\}$ en de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$. Nu we eenmaal weten dat elke oplossing in $|z - z_0| < R$ (eenwaardig-) analytische functie van z is, die dus in een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ontwikkelbaar is, gaan we deze machtreeks formeel substitueren in de DV (*) en zo trachten $a_2, a_3, \ldots$ uit te drukken in termen van a_0 en a_1 door gelijke machten van $z - z_0$ bij elkaar te vegen en de coëfficiënten nul te stellen. Dat draait altijd uit op een recurrente betrekking, die soms eenvoudig maar meestal ingewikkeld is.

Dit proces - methode der machtreeksen - gaat altijd op, voor welk gewoon punt dan ook. We krijgen door het punt z_0 "alle" punten van G te laten doorlopen overal in G een oplossing der DV. Gaan we uit van een vast punt z_0, dan krijgen we automatisch analytische voortzetting van de oplossing y(z) als we een ketting van nieuwe punten $z_0', z_0'', \ldots$ kiezen en de beginvoorwaarden geschikt aanpassen. Echter, men moet niet denken dat we dan een oplossing in G krijgen die in geheel G eenwaardig-analytisch is. De functie y(z) kan bij het "draaien" om een singulier punt der DV tot andere waarden komen. Wel is het zo dat singulariteiten van y(z) (en zijn analytische voortzettingen) slechts kunnen optreden (maar niet behoeven op te treden) in de punten van de rand van G en/of in de polen van p en/of q.

Na deze stof wordt eerst hoofdstuk II over de gamma-functie behandeld. Daarbij is het volgende "trucje" van belang.

Als we tegenkomen

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{n+\gamma} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

dan direct

$$u_n = \text{const.} * \frac{\Gamma(n+\alpha)(n+\beta)}{\Gamma(n+\gamma)},$$

met

$$\text{const.} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u_0 .$$

Bewijs is triviaal.

Toepassing techniek der machtreeksen

Voorbeeld. De DV van Legendre (pag 5)

$$y'' + py' + qy = 0 ,$$

met

$$p = -\frac{2z}{1-z^2}, \quad q = \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2} ;$$

p en q hebben polen in $z = \pm 1$, welke punten dus singuliere punten van de DV zijn. Elk ander punt in het eindige z-vlak is gewoon punt der DV.

Opmerking. ν is complexe parameter; $\nu(\nu + 1)$ is invariant bij substitutie $\nu \to -\nu - 1$.

Ergo: hebben we een oplossing $y = f_\nu(z)$ dan is ook $y = f_{-\nu-1}(z)$ oplossing.
In het bijzonder is $z = 0$ een gewoon punt.
Teken de eenheidscirkel rond de oorsprong.Daarin alleen gewone punten.
Twee singuliere punten op de rand.
De R uit de algemene theorie is maximaal en = 1.
In de eenheidscirkel rond de oorsprong is elke oplossing een eenwaardig-analytische functie van z.
Als $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$, dan oplossing ééNduidig bepaald:

$$y = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n ,$$

met nog onbekende a_n $(n \geq 2)$, die in a_0 en a_1 uit te drukken zijn.
Convergentiestraal is tenminste 1.

Hint: *Steeds noemers verdrijven:*
DV schrijven als

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + \nu(\nu + 1)y = 0 ,$$

of

$$\frac{d}{dz}[(1-z^2)y'] + \nu(\nu+1)y = 0 \quad (\text{"zelf-geadjungeerd"}) .$$

Formele substitutie (met kracht van bewijs) voor $|z| < 1$):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ,$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} ,$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} .$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$$

$$+ \nu(\nu+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 ,$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}}_{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \underbrace{\{-n(n-1) - 2n + \nu(\nu+1)\}}_{\substack{\nu(\nu+1)-n(n+1)\\ (\nu-n)(\nu+n+1)}} = 0.$$

Coefficienten nul-stellen geeft

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n-\nu)(n+\nu+1)a_n , \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{(n+1)(n+2)} .$$

Valt uiteen in twee deelrijen, <u>even</u> en <u>oneven</u> index n

$\boxed{\text{n even}}$ $(n \to 2n)$:

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{(2n-\nu)(2n+\nu+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{(n-\frac{\nu}{2})(n+\frac{\nu+1}{2})}{(n+\frac{1}{2})(n+1)} .$$

Met "trucje"

$$a_{2n} = \text{const.}\ \frac{\Gamma(n-\frac{\nu}{2})\Gamma(n+\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})n!} ,$$

$$\text{const} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}\, a_0 \,,$$

$$a_{2n} = a_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \frac{\Gamma(n-\frac{\nu}{2})\Gamma(n+\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})n!} \,,$$

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n} =$$

$$= a_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\frac{\nu}{2})\Gamma(n+\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})n!} z^{2n}$$

$$y(z) = a_0 F(-\frac{\nu}{2}\,,\ \frac{\nu+1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\,;\ z^2)\ .$$

$\boxed{\text{n oneven}}$ $(n \to 2n+1)$:

$$\frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}} = \frac{(2n+1-\nu)(2n+\nu+2)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{(n+\frac{1-\nu}{2})(n+\frac{\nu}{2}+1)}{(n+\frac{3}{2})(n+1)} \,,$$

$$a_{2n+1} = a_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)} \frac{\Gamma(n+\frac{1-\nu}{2})\Gamma(n+\frac{\nu}{2}+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})n!} \,,$$

$$y(z) = a_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1-\nu}{2})\Gamma(n+\frac{\nu}{2}+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})n!} z^{2n+1}$$

$$= a_1 z F(\frac{1-\nu}{2}\,,\ \frac{\nu}{2}+1;\ \frac{3}{2};\ z^2)\ .$$

Algemene oplossing in de omgeving van $z = 0$ is

$$y(z) = a_0 y_1(z) + a_1 y_2(z)$$

met

$$y_1(z) = F(-\frac{\nu}{2},\ \frac{\nu+1}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2)$$

(beide invariant voor $\nu \to -\nu - 1$)

$$y_2(z) = zF(\frac{1-\nu}{2},\ \frac{\nu}{2}+1;\ \frac{3}{2};\ z^2)$$

y_1 is even in z, y_2 is oneven in z;

hier is F de hypergeometrische functie van Gauss, in eerste instantie gedefinieerd door een machtreeks

$$F(a,b;c;z) := 1 + \frac{a \cdot b}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

convergent voor $|z| < 1$.

De machtreeksen van y_1 en y_2 zijn tenminste convergent voor $|z| < 1$. Buiten de eenheidscirkel zijn ze divergent, behalve in de uitzonderingsgevallen ν = geheel getal ≥ 0.
Voor $\nu = 2n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ breekt y_1 af, en dit polynoom is evenredig met $P_{2n}(z)$.
Voor $\nu = 2n+1$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ breekt y_2 af, en dit polynoom is evenredig met $P_{2n+1}(z)$.

1.4. Oplossing in omgeving van singulier punt.

Algemene opmerking.

Bij gewone punten louter (locaal) eenwaardig-analytische oplossingen van de DV

$$y'' + py' + qy = 0 ,$$

en elke term links heeft zin voor elke oplossing.
De som is dan "toevallig" nul.

Bij singulier punt heel anders.

Illustratie:

$$y'' + \frac{1}{z}y' - \frac{y}{z^2} = 0 .$$

Oplossing hiervan is

$$y = Az + \frac{B}{z} ,$$

zoals iedereen kan verifiëren.
Het is een kwestie van smaak of die oplossing ook geldt voor $z = 0$.
Hier geldt: elk der termen in het linkerlid is singulier voor $z = 0$, maar hun som heeft een ophefbare singulariteit, en die som is dan weer nul.
Wanneer sprake is van een oplossing rond een singulier punt, dan moeten we bedenken dat eigenlijk sprake is van een gepuncteerde omgeving.
Em dat ook alleen maar als de oplossingen polen of andere singulariteiten hebben die de eenwaardigheid aanhouden.
Het kan nog erger zijn. De singulariteiten in de DV kunnen oplossingen met algebraische of logarithmische vertakkingspunten geven. En dan is in de omgeving de oplossing zelfs niet meer eenwaardig.