

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

CAPITA SELECTA

uit de

TOEGEPASTE WISKUNDE

Werkcollege van

Prof. Dr. C.J. Bouwkamp

Voorjaarssemester 1967



Onderafdeling der Wiskunde

Capita Selecta
uit de toegepaste wiskunde

Werkcollege van
prof. dr. C. J. Bouwkamp

Inhoudsbeschrijving

Capita Selecta uit de Toegepaste Wiskunde

1967

I.	Een potentiaalprobleem	1
II.	Een vervolgingsprobleem	14
III.	Bepaling van een electronenbaan in een vlakke condensator	16
IV.	Beeldkracht van een electron t.o.v. een halfruimte met een diëlectrische laag	21
V.	Berekening van een magneetveld in een bewegende geleider	23
VI.	Probleem VI: Een somformule met binomiaalcoëfficiënten	34
VII.	Oplossing van een potentiaakprobleem met behulp van conforme afbeeldingen	34
VIII.	Hoogfrequent-verwarming	39
IX.	Probleem IX: Limiet van een gegeneraliseerde Fibonacci-rij	48
X.	Een integraalvergelijking	51
XI.	Probleem afkomstig uit gasontladingen	53
XII.	Nulpunten van een functie	62
XIII.	Een volume-integraal	65
XIV.	Over de berekening van het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring	67
XV.	Voortplanting van golven in golfpijpen	80

Capita Selecta der Toegepaste Wiskunde

Werkcollege in het voorjaarssemester 1967 gehouden onder leiding van

Prof.dr. C.J. Bouwkamp.

I. Een potentiaalprobleem

Twee vlakke metalen platen, oneindig in afmetingen, zijn evenwijdig aan elkaar en geaard (potentiaal $V = 0$). De afstand der platen is $2b$. Midden tussen deze twee platen en evenwijdig er aan wordt een vlakke geleider geplaatst, met breedte $2a$ en oneindige lengte, waarvan de potentiaal op $V = 1$ wordt gehouden.

Door een geschikte keuze van ons coördinatenstelsel kunnen we zorgen dat het potentiaalprobleem onafhankelijk is van de coördinaat loodrecht op het vlak van tekening. Zie figuur 1.

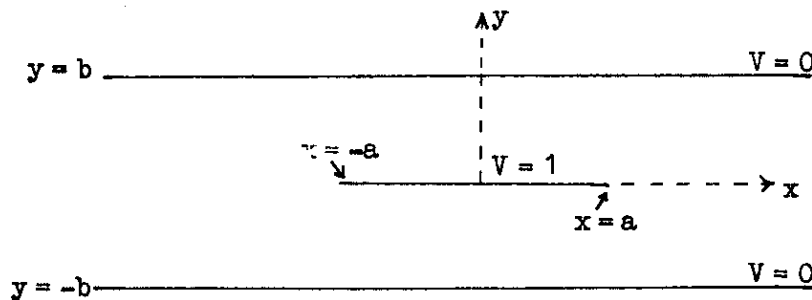


fig. 1

De potentiaalvergelijking luidt (in de open ruimte tussen platen en geleider)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Deze vergelijking moet worden opgelost onder de randvoorwaarden

$$V = 0 \text{ als } -\infty < x < \infty, y = \pm b,$$

$$V = 1 \text{ als } -a \leq x \leq a, y = 0,$$

$$V \rightarrow 0 \text{ (} |x| \rightarrow \infty, |y| \leq b \text{)}.$$

Deze voorwaarden zijn niet voldoende om de éénduidigheid van de oplossing te garanderen (als V een oplossing is dan is ook $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ een oplossing).

Het blijkt dat de scherpe rand van de geleider hierbij een rol speelt. Daar de totale energieinhoud van de ruimte eindig is, volgt de extra eis:

$|\text{grad } V|$ is twee-dimensionaal kwadratisch integreerbaar, en in het bijzonder aan de randen van de geleider. (4)

Door (1), (2), (3) en (4) ligt $V(x,y)$ éénduidig vast.

Het is o.a. de bedoeling de totale ladingsdichtheid langs de geleider te berekenen. Deze is (in Gauss éenheden)

$$\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right| \quad \text{voor } -a < x < a, \quad y = 0.$$

Merk op dat de overeenkomstige totale lading aan beide kanten van de geleider zit. Het zal blijken dat in de uiteinden van de geleider de ladingsdichtheid oneindig groot is.

De Greense functie

We beschouwen eerst de Greense functie van de vrije ruimte. Een ladingslijn loodrecht op het vlak van tekening door de oorsprong (met dichtheid $\frac{1}{2}$ per cm.) veroorzaakt een electrostatisch veld met potentiaal

$$G_0(x,y) = \log \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2). \quad (5)$$

Door de aanwezigheid van de twee evenwijdige platen (bij $y = b$ en $y = -b$) wordt het electrostatisch veld van de bron in de oorsprong gestoord. De potentiaal die deze situatie beschijft wordt aangegeven met $G(x,y)$. Duidelijk moet $G(x,y)$ aan de vergelijking (1) voldoen onder de voorwaarde (2). Bovendien moet $G(x,y)$ in de buurt van de oorsprong (de bron) zich gedragen als $G_0(x,y)$ d.w.z. $G(x,y) - G_0(x,y)$ is regulier in een omgeving van $(0,0)$.

De Greense functie $G(x,y)$ kan op de volgende manier worden geconstrueerd. Door separatie vinden we als oplossingen van (1) de functies $e^{-\lambda x} \cos \lambda y$ voor willekeurige waarden van λ . Door sommatie en integratie over λ , eventueel voorzien van bepaalde gewichtsfactoren, zijn nieuwe oplossingen te creëren.

We moeten deze oplossingen natuurlijk nog aanpassen aan de voorwaarde (2). Daar $G(x,y)$ een even functie is in zowel x als y , verwachten we de volgende representatie van de Greense functie

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x/b} \cos\{(n+\frac{1}{2})\pi y/b\} \quad (x > 0). \quad (6)$$

Om de coëfficiënten a_n te berekenen gaan we als volgt te werk.

Uit symmetrieoverwegingen volgt dat $\frac{\partial}{\partial x}(G - G_0)$ nul is op de y -as. Dus

$$0 = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} (G - G_0) = \lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \downarrow 0} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\pi}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x/b} \cos\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi y/b\right\} \right].$$

De δ -functie van Cauchy is gedefinieerd door

$$\delta(y) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\pi(x^2 + y^2)}.$$

Dit betekent dat de coëfficiënten a_n kunnen worden berekend uit de betrekking

$$b\delta(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n \cos\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi y/b\right\}.$$

Met de formules van Euler voor de berekening van de Fouriercoëfficiënten vinden we $\left(n + \frac{1}{2}\right) a_n = 1$ voor $n \geq 0$.

Dus

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x/b} \cos\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi y/b\right\} \quad (x > 0) \quad (7)$$

Orthodox in de leer opgevoede mathematici zullen waarschijnlijk bezwaren hebben tegen deze heuristische afleiding. Tot hun geruststelling zij opgemerkt dat formule (7) op een eenvoudige wijze kan worden geverifieerd. We zullen dit nu doen.

Greense functie in gesloten vorm

Zij $z = x + iy$ ($x > 0$). Dan is $G(x, y)$ het reële deel van de functie $H(z)$ gedefinieerd door

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} e^{-(n+\frac{1}{2})\pi z/b}.$$

Deze reeks is convergent voor $\text{Re } z > 0$ en definieert een analytische functie in dit half-vlak.

Differentiatie geeft

$$\frac{dH(z)}{dz} = -\frac{\pi}{b} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\pi z/b} = -\frac{\pi}{b} \cdot \frac{e^{-\pi z/2b}}{1 - e^{-\pi z/b}} = -\frac{\pi}{2b} \cdot \frac{1}{\sinh(\pi z/2b)}.$$

Na integratie ($H(\infty) = 0$) vinden we

$$H(z) = -\log \tanh(\pi z/4b),$$

en dus met $G(y, x) = \text{Re } H(z)$,

$$G(y,x) = -\frac{1}{2} \log \frac{\cosh(\pi x/2b) - \cos(\pi y/2b)}{\cosh(\pi x/2b) + \cos(\pi y/2b)} . \quad (8)$$

Nu kan eenvoudig worden geverifieerd dat dit de gezochte Greense functie is:

- 1e G is even in zowel x als y .
- 2e $G = 0$ in $y = \pm b$.
- 3e G voldoet aan (1) omdat hij het reële deel van een analytische functie is.
- 4e Het argument van de log in de betrekking (8) is positief voor $x^2 + y^2 > 0$.
Door ontwikkeling naar machten van x en y vinden we dat $G = \log \frac{1}{r}$, te samen met al zijn afgeleiden, eindig is in de oorsprong.

Merk op dat $G(x,y) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$, $|y| \leq b$).

Integraalvergelijking voor de ladingsdichtheid van de geleider

In ons potentiaal probleem is op de binnenste plaat een zekere lading geïnduceerd. Zij $\frac{1}{2}f(x)$ de totale ladingsdichtheid ($-a \leq x \leq a$, $y = 0$).

Door superpositie vinden we voor de potentiaal tussen de twee oneindig grote platen

$$V(x,y) = \int_{-a}^a f(u)G(x-u,y)du \quad (-\infty < x < \infty ; -b \leq y \leq b) .$$

We weten dat $V(x,y) = 1$ voor $-a \leq x \leq a$, $y = 0$, zodat f bepaald moet worden uit de integraalvergelijking

$$1 = \int_{-a}^a f(u)G(x-u,0)du \quad (-a \leq x \leq a) . \quad (9)$$

Met (8) vinden we

$$\int_{-a}^a f(u) \log \tanh\left\{\frac{\pi}{4b} |x-u|\right\} du = -1 \quad (-a \leq x \leq a) . \quad (10)$$

De kern van deze integraalvergelijking is singulier in $x=u$, maar deze singulariteit is van het logaritmische type.

De vergelijking krijgt een iets eenvoudiger gedaante door de substituties

$$\begin{aligned} \sin \theta &= x/a , \quad \sin \theta' = u/a , \\ p &= \frac{\pi a}{8b} , \quad F(\theta) = -a \cos \theta f(a \sin \theta) . \end{aligned} \quad (11)$$

We krijgen dan

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\theta') \log \tanh\{2p|\sin \theta - \sin \theta'|\} d\theta' = 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) . \quad (12)$$

In deze vergelijking treedt p op als parameter.

Oplossing van (12) voor kleine waarden van p

De volgende integraalvergelijking treedt op bij de buiging van een vlakke golf die loodrecht invalt op een spleet in een scherm:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Psi(\theta') H_0^{(1)}\{2p|\sin \theta - \sin \theta'|\} d\theta' = 1 ; \quad (13)$$

p is evenredig met het golfgetal k . De Hankel-functie kern heeft dezelfde logaritmische singulariteit als de $\log \tanh$ kern in vergelijking (12).

De oplossingen van beide integraal vergelijkingen kunnen, voor kleine waarden van p , worden benaderd door gebruik te maken van een derde integraal vergelijking

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta') \log\{2p|\sin \theta - \sin \theta'|\} d\theta' = \lambda f(\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) ,$$

waarvan het compleet stelsel eigenfuncties en eigenwaarden bekend is. Deze eigenfuncties zijn

$$f_{2n}(\theta) = \cos 2n\theta , \text{ met eigenwaarden } \lambda_{2n} = -\pi/2n \quad (n > 0), \lambda_0 = \pi \log p ,$$

en

$$f_{2n+1}(\theta) = \sin(2n+1)\theta , \text{ met eigenwaarden } \lambda_{2n+1} = -\pi/(2n+1) \quad (n \geq 0) .$$

We ontwikkelen nu de kern van (12) in machten van p . De functie $\log \tanh x$ heeft een machtreeksontwikkeling waarvan de coëfficiënten de getallen van Bernoulli bevatten. We vinden

$$\log \tanh\{2p|\sin \theta - \sin \theta'|\} = K_0 + K_1 p^2 + K_2 p^4 + \dots$$

met

$$K_0 = \log\{2p|\sin \theta - \sin \theta'|\} , K_1 = -\frac{4}{3}(\sin \theta - \sin \theta')^2 ,$$

$$K_2 = \frac{56}{45}(\sin \theta - \sin \theta')^4 .$$

We ontwikkelen nu zuiver formeel $F(\theta)$ naar machten van p .

$$F(\theta) = F_0(\theta) + F_1(\theta)p^2 + F_2(\theta)p^4 + \dots$$

We substitueren dit alles in (12) en stellen de coëfficiënten van gelijke machten van p in linker- en rechterlid aan elkaar gelijk. De vergelijking (12) valt dan uiteen in het stelsel

$$\int F_0 K_0 d\theta' = 1, \quad (14)$$

$$\int F_1 K_0 d\theta' = -\int F_0 K_1 d\theta', \quad (15)$$

$$\int F_2 K_0 d\theta' = -\int F_0 K_2 d\theta' - \int F_1 K_1 d\theta', \dots, \quad (16)$$

waaruit we achtereenvolgens kunnen oplossen F_0, F_1, F_2, \dots . Vergelijking (14) geeft onmiddellijk

$$F_0 = \frac{1}{\pi \log p}. \quad (17)$$

Na substitutie in (15) vinden we voor F_1 de integraal vergelijking

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F_1(\theta') \log\{2p|\sin \theta' - \sin \theta|\} d\theta' = \frac{4}{3 \log p} (1 - \frac{1}{2} \cos 2\theta),$$

waarvan de oplossing is

$$F_1 = \frac{4}{3\pi \log p} \left[\frac{1}{\log p} + \cos 2\theta \right]. \quad (18)$$

De functie F_2 kan op dezelfde manier worden bepaald. Het uiteindelijk resultaat wordt

$$F(\theta) = \frac{1}{\pi \log p} \left[1 + \frac{4}{3} p^2 \left\{ \frac{1}{\log p} + \cos 2\theta \right\} + \right. \\ \left. + \frac{16}{9} p^4 \left\{ \frac{1}{\log^2 p} - \frac{73}{40} \frac{1}{\log p} + \left(\frac{1}{\log p} - \frac{14}{5} \right) \cos 2\theta + \frac{7}{20} \cos 4\theta \right\} + O(p^6) \right]. \quad (19)$$

Wanneer we teruggaan naar de oorspronkelijke variabelen vinden we voor de ladingsdichtheid op de geleider

$$\frac{1}{2} f(x) = \frac{1/2\pi}{\log(8b/\pi a)} \cdot \frac{A + B(x/a)^2 + C(x/a)^4 + \dots}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (20)$$

waarin

$$A = 1 + \frac{4}{3} p^2 \left(1 + \frac{1}{\log p} \right) - \frac{196}{45} p^4 \left(1 + \frac{33}{98} \frac{1}{\log p} - \frac{20}{49} \frac{1}{\log^2 p} \right),$$

$$B = -\frac{8}{3} p^2 \left\{ 1 - \frac{28}{15} p^2 \left(1 - \frac{5}{7} \frac{1}{\log p} \right) \right\},$$

$$C = \frac{224}{45} p^4.$$

Enkele opmerkingen

Uit (20) volgt dat $f(x)$ singulier is in $x = \pm a$. De ladingsdichtheid gaat naar oneindig als 1 gedeeld door de wortel uit de afstand tot de scherpe rand.

In de ontwikkeling van $f(x)$ hangen de coëfficiënten af van $\log p$. Dit is duidelijk het gevolg van de logaritmische singulariteit van de kern van de integraalvergelijking (10).

Bij de afleiding van de ontwikkeling van $F(\theta)$ zijn we zuiver formeel te werk gegaan. Het is niet direct duidelijk dat de reeksontwikkeling een positieve convergentiestraal heeft. Het blijkt echter mogelijk te zijn dit te bewijzen door gebruik te maken van het feit dat ons potentiaalprobleem kan worden opgelost in een gesloten vorm (zie onder).

In het buigingsprobleem (zie (13)) krijgen we eenzelfde type ontwikkeling voor $\Psi(\theta)$. Tot nu toe is nog niet aangetoond dat we daar te doen hebben met een convergente reeks of slechts met een asymptotische reeksontwikkeling. Gezien de analogie tussen de twee gevallen vermoeden we dat we ook in het buigingsprobleem te maken hebben met een convergente reeks.

Een tweede oplossingsmethode

We leiden nu een oplossing van ons potentiaalprobleem af in een gesloten vorm en gaan hiervoor uit van het spiegelingprincipe.

We beschouwen de oneindige verzameling van spiegelbeelden van de geleider in de twee vlakke platen en brengen de spiegelbeelden afwisselend op potentiaal -1 en $+1$ (zie figuur 2).

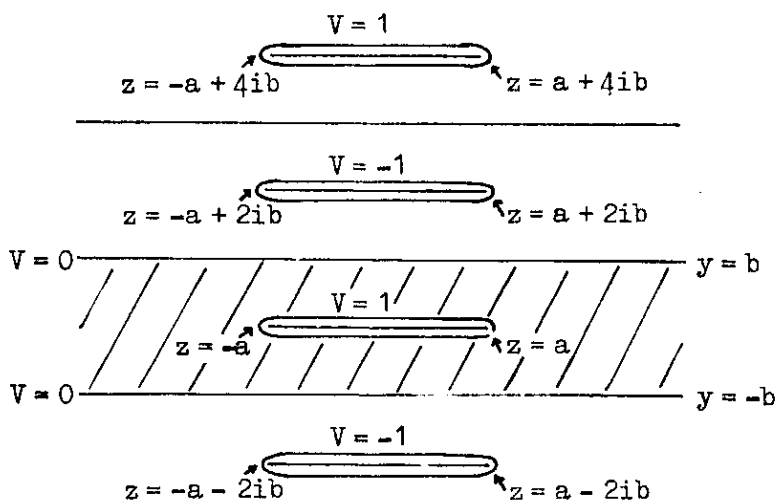


fig. 2

Het opgesneden z -vlak.

Uit symmetrieoverwegingen volgt dat de potentiaal in de vlakken $y = b$ en $y = -b$ vanzelf nul is.

Het gearceerde gedeelte van de figuur geeft het oorspronkelijke gebied aan waarin de partiële differentiaalvergelijking (1) moet worden opgelost.

We construeren een functie van de complexe variabele $z = x + iy$ die enkelvoudige nulpunten heeft in de randpunten $z = \pm a \pm 2nbi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Een functie met deze eigenschap is

$$2 \sinh \frac{\pi(z-a)}{2b} \sinh \frac{\pi(z+a)}{2b} = \cosh \frac{\pi z}{b} - \cosh \frac{\pi a}{b} .$$

Onder $W(z)$ verstaan we de functie gedefinieerd door

$$W(z) = \sqrt{\cosh(\pi z/b) - \cosh(\pi a/b)} . \quad (21)$$

Om van $W(z)$ een éénwaardige functie te maken brengen we in het z -vlak sneden aan langs de segmenten, die de geleider en zijn spiegelbeelden aanduiden, en definiëren $W(z)$ gelijk aan de gewone positieve wortel langs het deel van de reële as waar $x > a$.

In het opengesneden vlak is $W(z)$ éénwaardig en periodiek met periode $4bi$, d.w.z. $W(z+4bi) = W(z)$; (let op: $W(z+2bi) = -W(z)$).

Het is belangrijk $W(z)$ te kennen langs enkele lijnen in het z -vlak. Langs de reële as heeft men

$$\begin{aligned} W &= - \sqrt{\cosh(\pi x/b) - \cosh(\pi a/b)} && \text{voor } -\infty < x \leq -a , \\ W &= + \sqrt{\cosh(\pi x/b) - \cosh(\pi a/b)} && \text{voor } a \leq x < \infty , \\ W &= +i \sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi x/b)} && \text{voor } y = +0 , -a \leq x \leq a , \\ W &= -i \sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi x/b)} && \text{voor } y = -0 , -a \leq x \leq a , \end{aligned}$$

waarin sprake is van de gewone positieve wortel. Dezelfde waarden worden door $W(z)$ aangenomen langs de lijnen $z = x + 4nbi$ (n geheel), de tegengestelde waarden langs de lijnen $z = x + (4n+2)bi$. Daar tussenin heeft men

$$\begin{aligned} W &= +i \sqrt{\cosh(\pi x/b) + \cosh(\pi a/b)} && \text{voor } z = x + (4n+1)bi , \\ W &= -i \sqrt{\cosh(\pi x/b) + \cosh(\pi a/b)} && \text{voor } z = x + (4n+3)bi . \end{aligned}$$

Tenslotte geldt langs de imaginaire as

$$W = i(-1)^n \sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cos(\pi y/b)} \text{ voor } 2nb < y < (2n+2)b .$$

We zien dus dat $W(z)$ zuiver imaginair is op de sneden. Dit betekent dat de integraal van $1/W(z)$ langs een willekeurig gedeelte van de onderkant of bovenkant van de snede zuiver imaginair is.

We voeren nu de volgende functie in:

$$U(z) = \int_z^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi t/b) - \cosh(\pi a/b)}} \quad , \quad (22)$$

waarbij de integratieweg geheel in het opengesneden vlak ligt en het punt z met het punt in oneindig wordt verbonden op een overigens willekeurige wijze. Deze functie is meerwaardig aangezien de integratieweg een willekeurig aantal keren om een snede heen kan lopen zowel in positieve als in negatieve richting. De bijdrage van zo'n lus om een snede heen is gelijk aan

$$\pm 4i \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi t/b)}} \quad ,$$

en dus is zo'n bijdrage zuiver imaginair. Dit betekent dat het reële deel van $U(z)$ een éénwaardige functie is in het opengesneden z -vlak. Op iedere snede is het reële deel van $U(z)$ constant met dezelfde waarde aan de bovenkant en de onderkant. We beweren nu dat $\text{Re}(U(z))$ de oplossing van ons potentiaal probleem is afgezien van een zekere multiplicatieve constante.

Het is voldoende $U(z)$ te onderzoeken in het gebied $x \geq 0$, $0 \leq y \leq b$. De rand van dit gebied bestaat uit:

de reële as van oneindig tot $z = a$; de bovenkant van de geleider van $z = a$ tot $z = 0$; de imaginaire as van $z = 0$ tot $z = ib$ en tenslotte de onderkant van de plaat van $z = ib$ tot $z = ib + \infty$.

We splitsen U in zijn reëel en zijn imaginair deel,

$$U(z) = v(x,y) + iu(x,y) \quad .$$

Dan geldt

$$\left. \begin{aligned} v(x,0) &= \int_x^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi t/b) - \cosh(\pi a/b)}} \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned} \right\} (x \geq a) \quad . \quad (23)$$

Langs de bovenkant van de geleider geldt $U(x+i0) = U(a) + \int_x^a W^{-1}(t)dt$, zodat

$$\left. \begin{aligned} v(x,+0) &= U(a) = \int_a^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi t/b) - \cosh(\pi a/b)}} \\ u(x,+0) &= \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi t/b)}} \end{aligned} \right\} (0 \leq x \leq a) \quad . \quad (24)$$

Langs de imaginaire as geldt

$$U(iy) = U(0+iy) + \int_{iy}^0 W^{-1}(t) dt \quad (0 \leq y \leq b),$$

en langs de onderkant van de bovenste plaat heeft men

$$U(ib+x) = U(ib) + \int_{ib+x}^{ib} W^{-1}(t) dt \quad (x \geq 0).$$

Men ziet eenvoudig in dat $U(ib+x)$ nadert tot nul als x naar oneindig gaat. Hieruit zijn enige identiteiten af te leiden, nl.

$$\int_a^\infty \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi t/b) - \cosh(\pi a/b)}} = \int_0^b \frac{ds}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cos(\pi s/b)}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) + \cosh(\pi t/b)}} = \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi t/b)}}.$$

Met behulp van deze identiteiten vinden we eenvoudig dat

$$\left. \begin{aligned} v(0,y) &= \int_y^b \frac{ds}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cos(\pi s/b)}} \\ u(0,y) &= - \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi t/b)}} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq y \leq b), \quad (25)$$

en

$$\left. \begin{aligned} v(x,b) &= 0 \\ u(x,b) &= - \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) + \cosh(\pi t/b)}} \end{aligned} \right\} \quad (x \geq 0). \quad (26)$$

Het is duidelijk dat $v(x,y)$ een oplossing is van vergelijking (1), aangezien v het reële deel van $U(z)$ is. Ook geldt dat $v = 0$ op de rechterhelft van de bovenste plaat (zie (26)), terwijl $v = U(a)$ een reële constante is op de geleider (zie (24)).

Uit de vergelijkingen (23) en (25) en de betrekkingen van Cauchy-Riemann ($\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$, $\partial u/\partial x = -\partial v/\partial y$), volgt dat de normale afgeleide van v gelijk is aan nul voor $y = 0$, $x > a$ en voor $z = iy$ ($0 < y < b$). Dit is in overeenstemming met de symmetrie in x en y van ons potentiaalprobleem. Tenslotte

merken we op dat $|\text{grad } v|$ kwadratisch integreerbaar is. Dus $v(x,y)$ is identiek met de gezochte oplossing $V(x,y)$ afgezien van een constante multiplicatieve factor. Deze factor is $1/U(a)$, zodat

$$V(x,y) = \text{Re} \left[\frac{1}{U(a)} \int_z^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi t/b) - \cosh(\pi a/b)}} \right] \quad (27)$$

de oplossing is van ons randwaardeprobleem onder de voorwaarden (1) tot en met (4).

Vergelijking met de eerste oplossing

De ladingsdichtheid langs de geleider is

$$\frac{1}{2}f(x) = -(2\pi)^{-1}(\partial V/\partial y)_{y=0} = \frac{U^{-1}(a)}{2\pi} (\partial u/\partial x) \quad (-a < x < a),$$

zodat

$$\frac{1}{2}f(x) = \frac{1/2\pi U(a)}{\sqrt{\cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi x/b)}} \quad (28)$$

De constante $U(a)$ kan worden uitgedrukt in de volledige elliptische integraal van de eerste soort. Met de substituties $x = \sqrt{\cosh(\pi t/b) - \cosh(\pi a/b)}$, $r = \sqrt{2} \sinh(\pi a/2b)$, $s = \sqrt{2} \cosh(\pi a/2b)$ vinden we dat

$$\begin{aligned} U(a) &= \int_a^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\cosh(\pi t/b) - \cosh(\pi a/b)}} = \frac{2b}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + r^2)(x^2 + s^2)}} \\ &= (2b/\pi s)K(k') = \frac{2b}{\pi s} \cdot \frac{2}{1+k} K\left(\frac{1-k}{1+k}\right), \end{aligned}$$

waarin $k = r/s$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, en

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad .$$

Het uiteindelijke resultaat wordt

$$U(a) = \frac{2\sqrt{2}b}{\pi} e^{-\pi a/2b} K(e^{-\pi a/b}) \quad (29)$$

Voor de ladingsdichtheid langs de geleider krijgen we dan

$$\frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{8b} \frac{e^{\pi a/2b}}{K(e^{-\pi a/b})} \left[\frac{1}{2} \{ \cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi x/b) \} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (30)$$

Hiermee is de integraalvergelijking (10) opgelost in een gesloten vorm. We gaan nu de rechterkant van (30) ontwikkelen in machten van p . Voor de ontwikkeling van de K functie vinden we

$$K(e^{-\pi a/b}) = \frac{1}{2} \log p \left[1 + 4p + 4p^2 - \frac{16}{3} p^3 + O(p^4) \right] + \\ + \frac{2}{3} p^2 [1 + 4p + O(p^2)] ,$$

waarin de termen binnen de vierkante haken machtreeksontwikkelingen zijn, convergent voor $|p| < \pi/8$.

Buiten deze cirkel is minstens één van deze twee reeksen divergent wegens de singulariteit van $\log(1 - e^{-16p})$ in $p = \pm \frac{\pi i}{8}$ (dit is de singulariteit die het dichtst bij de oorsprong ligt). Daarom is de ontwikkeling in (20) zeker divergent als $a > b$. Het is moeilijk het convergentiegebied van de ontwikkeling van (30) te bepalen daar we te maken hebben met de inverse van de K functie. Deze is van de gedaante

$$\frac{1}{K(e^{-\pi a/b})} = \frac{-2A(p)}{\log p} \left[1 - \frac{4p^2/3}{\log p} B(p) \right]^{-1} ,$$

waarin $A(p)$ en $B(p)$ analytisch zijn in een omgeving van $p=0$ en beide de waarde 1 aannemen in $p=0$. Het is duidelijk dat de bovenstaande functie, voor voldoende kleine waarden van $p > 0$, kan worden ontwikkeld in machten van p , waarbij de coëfficiënten polynomen zijn in $(1/\log p)$. Deze ontwikkeling convergeert absoluut en uniform binnen een zeker interval $0 < p \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Zo vinden we

$$\frac{e^{\pi a/2b}}{K(e^{-\pi a/b})} = - \frac{2}{\log p} \left[1 + 4p^2 + \frac{4}{3} \frac{p^2}{\log p} + \dots \right] .$$

De tweede factor in het rechterlid van (30) kan als volgt worden ontwikkeld:

$$\left[\frac{1}{2} \{ \cosh(\pi a/b) - \cosh(\pi x/b) \} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\pi/b)^{2n} \cdot (a^{2n} - x^{2n})/n! \right]^{-\frac{1}{2}} \\ = \frac{b}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[1 - \frac{8}{3} p^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right) + \dots \right] .$$

Ingevuld in (30) vinden we uiteindelijk

$$\frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{-2\pi \log p} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[1 + \frac{4}{3} p^2 + \frac{4}{3} \frac{p^2}{\log p} - \frac{8}{3} p^2 \frac{x^2}{a^2} + \dots \right] ,$$

en dit resultaat is volledig in overeenstemming met formule (20).

Opmerkingen

(i) In formule (30) staat expliciet de oplossing van de integraal vergelijking (10). Hieruit kan men enige identiteiten afleiden:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\log \tanh \left| \frac{1}{2}(\lambda - \beta) \right|}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\alpha - \cosh 2\lambda)}} d\lambda = -e^{-\alpha} K(e^{-2\alpha}) \quad (-\alpha \leq \beta \leq \alpha), \quad (31)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\log \left| \frac{\cosh \lambda - \cosh \beta}{\cosh \lambda + \cosh \beta} \right|}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\alpha - \cosh 2\lambda)}} d\lambda = -e^{-\alpha} K(e^{-2\alpha}) \quad (0 \leq \beta \leq \alpha), \quad (32)$$

en

$$K(k) = \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{\log \left| \frac{x+c}{x-c} \right|}{\sqrt{(1-k^2 \frac{x^2}{c^2})(x^2-1)}} dx \quad (1 \leq c \leq 1/k) \quad (33)$$

(ii) In ieder punt van de ruimte tussen de twee platen kennen we de potentiaal. Deze kan worden uitgedrukt in onvolledige elliptische integralen van de eerste soort.

(iii) In het vlak van de geleider is, voor $x > a$, $\partial V / \partial n$ gelijk aan nul en dus $E_y = 0$. Bovendien geldt dat E_x evenredig is met $[\cosh(\pi x/b) - \cosh(\pi a/b)]^{-\frac{1}{2}}$.

(iv) Langs de normaal op de geleider, $x=0$, $0 \leq y \leq b$, geldt $E_x = 0$ en $E_y = \text{const.} [\cosh(\pi a/b) - \cos(\pi y/b)]^{-\frac{1}{2}}$.

(v) Voor de electrostatische capaciteit van het systeem, die gelijk is aan de ladingsdichtheid gefintegreerd over de platen, vindt men

$$\frac{1}{2\pi} \frac{K(k')}{K(k)} \quad \text{met } k = e^{-\pi a/b} \quad \text{en } k' = \sqrt{1-k^2}.$$

(vi) Voor $x > a$ kan de potentiaal $V(x,y)$ in eigenfuncties worden ontwikkeld:

$$V(x,y) = \frac{b\sqrt{2}}{\pi U(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} P_n \left(\cosh \frac{\pi a}{b} \right) e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x/b} \cos \left\{ (n+\frac{1}{2})\pi y/b \right\},$$

waarin P_n het n -de Legendre polynoom is.

(vii) Op de platen $y = \pm b$ is de ladingsdichtheid evenredig met $[\cosh(\pi a/b) + \cosh(\pi x/b)]^{-\frac{1}{2}}$.

Referentie:

C.J. Bouwkamp: A potential-theoretic analog of a diffraction problem. Univ.

II. Een vervolgingsprobleem

Een boer start op tijd $t = 0$ in de oorsprong en loopt langs de y -as naar boven met een constante snelheid v . Een hond bevindt zich op $t = 0$ in het punt $x = a$, $y = b$ en loopt naar de boer toe met snelheid αv (α constant) en wel zó dat op elk ogenblik de beweging precies naar de boer gericht is. Gevraagd wordt de baan van de hond, de tijd en de plaats van ontmoeting van boer en hond.

We maken eerst enkele opmerkingen.

Als $a = 0$, $b > 0$, dan loopt de hond de boer tegemoet en vindt er altijd een ontmoeting plaats en wel voor

$$y = \frac{b}{1+\alpha} \quad , \quad t = \frac{b}{v(1+\alpha)} \quad .$$

Als $a = 0$, $b < 0$, dan ontmoet de hond de boer alleen als $\alpha > 1$, en dit gebeurt voor

$$y = \frac{-b}{\alpha-1} \quad , \quad t = \frac{-b}{v(\alpha-1)} \quad .$$

Zij $x(t)$, $y(t)$ de plaatscoördinaten van de hond. Men ziet direct in dat $x(t)$ een monotoon dalende functie van t is. Dit suggereert dat y expliciet kan worden gevonden als functie van x .

In het vervolg onderstellen we dat $a > 0$.

Voor de baan van de hond vinden we eenvoudig uit fig. 1 het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

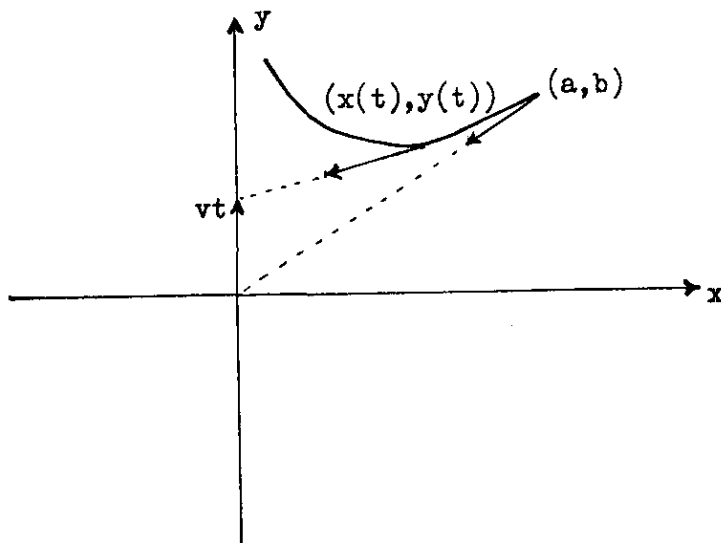


fig. 1.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha v x}{\sqrt{x^2 + (y - vt)^2}} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\alpha v (y - vt)}{\sqrt{x^2 + (y - vt)^2}} \quad . \quad (1)$$

Dit stelsel moet opgelost worden onder de beginvoorwaarden

$$x(0) = a, \quad y(0) = b. \quad (2)$$

In plaats van $y(t)$ voeren we een nieuwe variabele $z(t)$ in door $y - vt = xz$.
Dan volgt

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha v}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{v}{x}, \quad (3)$$

onder de beginvoorwaarde $x(0) = a, z(0) = b/a$.

Voor z als functie van x vinden we hieruit de differentiaalvergelijking $\alpha x z' = \sqrt{1+z^2}$, die kan worden opgelost door scheiding van variabelen. We vinden

$$z + \sqrt{1+z^2} = C_1 x^{1/\alpha} \quad \text{met} \quad C_1 = a^{-1-1/\alpha} (b + \sqrt{a^2 + b^2}). \quad (4)$$

Uit (4) is z op te lossen als functie van x :

$$z = \frac{1}{2} \{ C_1 x^{1/\alpha} - C_1^{-1} x^{-1/\alpha} \}.$$

Gebruik makend van dit resultaat krijgen we

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y-vt}{x} = z = \frac{1}{2} \{ C_1 x^{1/\alpha} - C_1^{-1} x^{-1/\alpha} \}.$$

Integratie van deze differentiaalvergelijking geeft

$$y(x) = \frac{\alpha}{2} \left\{ \frac{C_1}{\alpha+1} x^{1+1/\alpha} - \frac{x^{1-1/\alpha}}{C_1(\alpha-1)} \right\} + C_2 \quad (\alpha \neq 1). \quad (5)$$

Voor de integratie constante C_2 vinden we met behulp van de beginvoorwaarde $y(a) = b$

$$C_2 = \frac{\alpha \sqrt{a^2 + b^2} - b}{\alpha^2 - 1} \quad (\alpha \neq 1). \quad (6)$$

In het geval $\alpha = 1$ krijgen we

$$y = \frac{C_1}{4} x^2 - \frac{\log x}{2C_1} + \frac{1}{4} (3b - \sqrt{a^2 + b^2}) + \frac{\log a}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - b). \quad (7)$$

Uit (5) en (7) zien we direct dat $\lim_{x \downarrow 0} y(x)$ niet bestaat als $\alpha \leq 1$. In dit

geval zal de hond de boer nooit inhalen en de positieve y -as zal asymptotisch raken aan de baan van de hond.

Voor $\alpha > 1$ volgt uit (5): $\lim_{x \downarrow 0} y(x) = C_2$.

De hond zal de boer inhalen in het punt $x = 0, y = C_2$. Dit gebeurt op het ogenblik

$$t = \frac{C_2}{v} = \frac{\alpha \sqrt{a^2 + b^2} - b}{v(\alpha^2 - 1)} \quad (\alpha > 1) . \quad (8)$$

We merken op dat ook hier geldt $y'(x) \rightarrow -\infty$ ($x \downarrow 0$). De baan van de hond raakt dus in het ontmoetingspunt aan de y-as.

Men kan eenvoudig verifiëren dat formule (8) ook geldt als de hond start op de y-as ($b = 0$).

Opmerking

Men kan het gevraagde resultaat ook vinden door gebruik te maken van poolcoördinaten.

De baanvergelijking kan op een zeer simpele manier worden verkregen door gebruik te maken van de booglengte integraal.

Als de x-coördinaat van de hond langs de baan afneemt van a tot x is de door

hem afgelegde afstand $\int_x^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$, en dit moet gelijk zijn aan α maal

de afstand afgelegd door de boer.

Uit fig. 1 lezen we af

$$\int_x^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du = \alpha(y - xy') ,$$

waaruit volgt

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \alpha x \frac{d^2y}{dx^2} . \quad (9)$$

Deze vergelijking is van een bekend type en eenvoudig op te lossen.

III. Bepaling van een elektronenbaan in een vlakke condensator

We beschouwen een vlakke, oneindig uitgestrekte, condensator waarvan de platen een afstand d tot elkaar hebben, en loodrecht staan op het vlak van tekening. De bovenste plaat heeft potentiaal $V = 0$ en de onderste plaat heeft potentiaal $V = V_0$ (> 0). Tussen de platen is ruimtelading aanwezig en we nemen aan dat de potentiaal varieert met de vier-derde macht van de afstand tot de plaat met $V = 0$. Een electron wordt ingeschoten met snelheid v_0 onder een hoek θ met de gemeenschappelijke loodlijn der platen. Zie fig. 1.

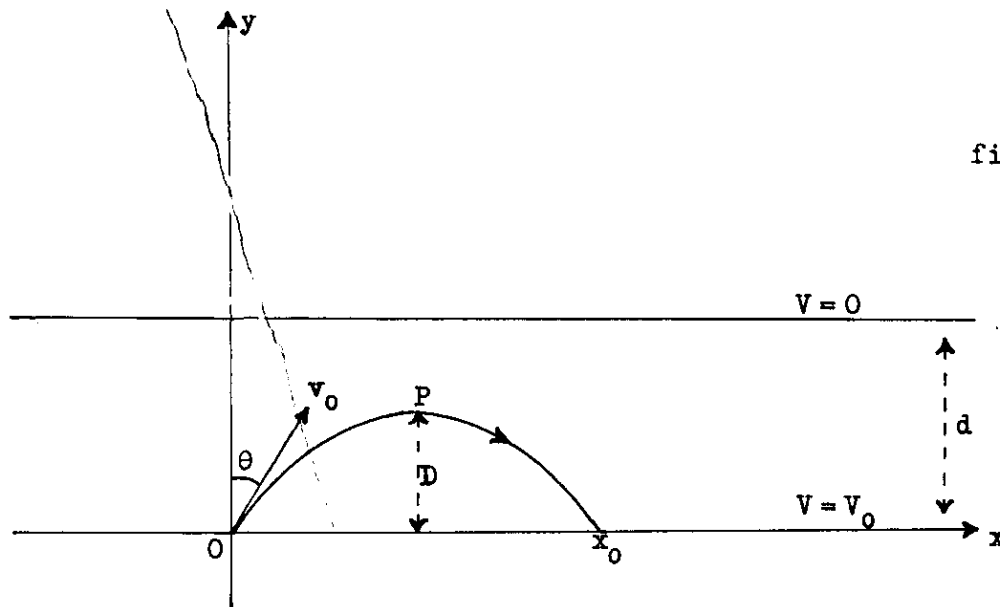


fig. 1.

Gevraagd wordt te berekenen de zijdelingse afwijking - x_0 - van het electron als dit, na terugkeer, de plaat $V = V_0$ passeert.

Oplossing

De snelheid van het electron in de x-richting is constant:

$$v_x = v_0 \sin \theta .$$

Laat T de tijd zijn die het electron nodig heeft om van $y = 0$ tot $y = D$ (top van de baan) te komen. Dan is

$$x_0 = 2Tv_x = 2v_0 T \sin \theta . \quad (1)$$

Het probleem komt dus neer op de berekening van T.

Zij m de massa, -e de lading van het electron. De potentiaal is gegeven door

$$V = V(y) = V_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{4/3} . \quad (2)$$

Op het electron werkt een kracht e grad V in de y-richting. Met de vergelijking van Newton vinden we dat de y-coördinaat van het electron als functie van de tijd voldoet aan

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{4eV_0}{3dm} \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{1/3} , \quad y(0) = 0 \quad \text{en} \quad \dot{y}(0) = v_0 \cos \theta . \quad (3)$$

Vermenigvuldig beide kanten van de vergelijking met \dot{y} en integreer, dan vinden we

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2eV_0}{m} \left\{ \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{4/3} - 1 \right\} + v_0^2 \cos^2 \theta . \quad (4)$$

We merken op dat het electron juist de plaat $V = 0$ bereikt als $\frac{dy}{dt} = 0$ voor $y = d$, dus als $a = 1$ met

$$a = \frac{\frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \theta}{e V_0} \quad (5)$$

Voor $a < 1$ zal het electron terugkeren op de onderste plaat. We zien dat a de verhouding is van twee energieën: de kinetische energie van het electron in de y -richting op het oogenblik van inschieten gedeeld door de kinetische energie die het electron verliest over het potentiaalverschil der platen.

We veronderstellen verder dat $a < 1$.

In de top P geldt $\dot{y} = 0$ zodat we voor de topafstand D vinden

$$D = d \{1 - (1 - a)^{3/4}\} \quad (6)$$

Uit (4) volgt

$$t = \sqrt{\frac{m}{2eV_0}} \int_0^{y(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - \frac{u}{d})^{4/3} - 1 + a}} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (7)$$

Het rechterlid is een elliptische integraal. Voor $t = T$ (het electron is in de top aangenomen) krijgen we

$$T = \sqrt{\frac{m}{2eV_0}} \int_0^D \frac{du}{\sqrt{(1 - \frac{u}{d})^{4/3} - 1 + a}} \quad (8)$$

We voeren in (8) een nieuwe integratie variabele z in:

$$az = 1 - (1 - \frac{u}{d})^{4/3} \quad .$$

Dan is $z = 0$ voor $u = 0$, en $z = 1$ voor $u = D$ (zie (6)). Verder is

$$\frac{du}{dz} = \frac{3ad}{4} (1 - az)^{-1/4} \quad . \text{ Dus}$$

$$T = \frac{3ad}{4v_0 \cos \theta} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z} \sqrt[4]{1-az}} \quad (9)$$

We beschouwen nu de functie $f(a)$ gedefinieerd door

$$f(a) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z} \sqrt[4]{1-az}} \quad .$$

Hiermee vinden we gemakkelijk

$$\frac{x_0}{d} = \frac{3}{2} \sin 2\theta \cdot \frac{\frac{1}{2} m v_0^2}{e V_0} f(a) \quad , \quad (10)$$

$$T = \frac{3ad}{2v_0 \cos \theta} f(a) \quad . \quad (11)$$

Berekening van de functie $f(a)$ voor $0 \leq a \leq 1$

De integraal is elementair voor $a = 0$ en $a = 1$:

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(1) = 2 \quad .$$

Men kan $f(a)$ uitdrukken als een hypergeometrische functie. Met behulp van een bekende formule uit de theorie van de hypergeometrische functies (zie Whittaker/Watson pagina 293) vinden we

$$f(a) = F(1/4, 1; 3/2; a) \text{ en uitgeschreven}$$

$$f(a) = 1 + \frac{a}{6} + \frac{a^2}{12} + \frac{3a^3}{56} + \frac{13a^4}{336} + \dots \quad . \quad (12)$$

Voor $0 \leq a \leq 0.5$ kan men hiermee gemakkelijk $f(a)$ numeriek berekenen.

We kunnen echter ook $f(a)$ in elliptische integralen van de eerste en tweede soort uitdrukken. Daarvoor voeren we een nieuwe integratievariabele in:

$$u = \sqrt[4]{1-az} \quad .$$

Dan wordt na elementaire bewerkingen

$$f(a) = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{\sqrt[4]{1-a}}^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{u^4 - (1-a)}} \quad .$$

Nogmaals een nieuwe variabele invoerend door

$$u = \frac{\sqrt[4]{1-a}}{\cos \varphi} \quad ,$$

verkrijgen we

$$f(a) = \sqrt[4]{1-a} \cdot \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad ,$$

waarin

$$\varphi_0 = \arccos(\sqrt[4]{1-a}) \quad (13)$$

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \sin 45^\circ \quad .$$

Laten $F(k, \varphi_0)$ en $E(k, \varphi_0)$ de normaalvormen der elliptische integralen zijn, dus

$$F(k, \varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad , \quad (14)$$

$$E(k, \varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad . \quad (15)$$

Dan controleert men gemakkelijk (differentieer beide leden naar φ_0) dat

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi_0) + \frac{\tan \varphi_0 \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0} - E(k, \varphi_0)}{1 - k^2} \quad .$$

Verder is

$$\tan \varphi_0 \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0} = \sqrt{\frac{a'}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - a}} \quad .$$

Daarna vinden we ($k^2 = \frac{1}{2}$)

$$f(a) = 2 - \sqrt{1 - a} \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot [2E(k, \varphi_0) - F(k, \varphi_0)] \quad . \quad (16)$$

De functies E en F staan getabelleerd in Jahnke-Emde. We vinden:

a	f(a)
0.0	1.000
0.1	1.018
0.2	1.037
0.3	1.059
0.4	1.085
0.5	1.115
0.6	1.151
0.7	1.197
0.8	1.260
0.9	1.362
1.0	2.000

De eerste vijf waarden zijn gecontroleerd met de machtreeksontwikkeling. Men ziet dat $f(a)$ tussen 1 en 2 ligt, en dat $f(a)$ snel stijgt in de buurt van $a = 1$. Daarvóór is de kromme van $f(a)$ zwak oplopend.

Opmerking

Heeft het electron zo'n grote energie dat het precies de plaat $V = 0$ bereikt, dan is $f(a)$ maximaal, en wel gelijk aan 2. De zijdelingse afwijking is dus

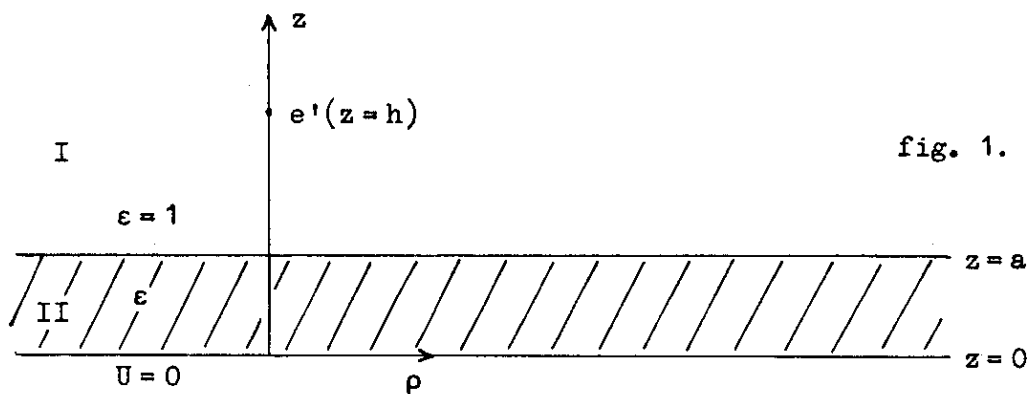
in elk geval kleiner dan een bovenste grens:

$$\frac{x_0}{d} \leq (3/2) \sin 2\theta \frac{U}{V_0}$$

waarin U de beginenergie van het electron is, uitgedrukt in electronvolts;
 V_0 = spanning tussen condensator in volts.*)

IV. Beeldkracht van een electron t.o.v. een halfruimte met een dielectrische laag

Een metalen plaat van oneindige afmetingen en oneindig goed geleidend is aan een zijde voorzien van een dunne dielectrische laag met dielectriciteitsconstante ϵ . De dikte van het dielectricum is a . Boven de plaat, aan de zijde waar de dielectrische laag zich bevindt, plaatst men een electron met lading e' op een afstand h ($h > a$) van de plaat. De potentiaal U op de plaat is gelijk aan nul. De onderstaande figuur geeft een loodrechte doorsnede van de situatie.



Gevraagd wordt de bindingsenergie van het electron aan de plaat.

Oplossing

Ons probleem is duidelijk rotatie symmetrisch. Dit betekent dat de potentiaal U een functie is van ρ en z alleen. De potentiaalvergelijking in cylindercoördinaten luidt

*) Referentie:

C.J. Bouwkamp: Berekening van electronenbaan in vlakke condensator onder aanwezigheid van ruimtelading, naar aanleiding van een vraag gesteld door Dr.ir. Jonker. Nat. Lab. 3.4.48 TV.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad (1)$$

Deze vergelijking moet in de gebieden I en II opgelost worden onder de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \text{ op de plaat ,} \\ U \text{ en } \epsilon \frac{\partial U}{\partial z} &\text{ zijn continu aan de bovenkant van het dielectricum .} \end{aligned} \right\} (2)$$

Met separatie van variabelen vinden we dat de functie $e^{-z\lambda} J_0(\lambda\rho)$ een oplossing van (1) is. Voor $\lambda > 0$ sterft deze oplossing exponentieel uit als $z \rightarrow \infty$. De oplossing $\sinh \lambda z J_0(\lambda\rho)$ is nul aan de plaat. We proberen nu door het zoeken van geschikte gewichtsfactoren en integratie onze oplossing aan te passen aan de voorwaarde (2).

De potentiaal van een éénheidslading in de vrije ruimte in het punt $z=h$, $\rho=0$ is

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}} = \int_0^{\infty} e^{-|z-h|t} J_0(\rho t) dt \quad , \quad (3)$$

(voor deze gelijkheid zie Watson: Besselfunctions).

We proberen nu functies $A(t)$ en $B(t)$ zó te bepalen dat de oplossing van ons probleem wordt gegeven door

$$\left. \begin{aligned} \text{in I : } U_I &= \frac{e'}{r} + \int_0^{\infty} A(t) e^{-zt} J_0(\rho t) dt \quad , \\ \text{in II : } U_{II} &= \int_0^{\infty} 2B(t) \sinh(zt) J_0(\rho t) dt \quad . \end{aligned} \right\} (4)$$

De continuïteit van U en $\epsilon \frac{\partial U}{\partial z}$ voor $z = a$ geeft ons de vergelijkingen

$$2B(t) \sinh(at) = e' e^{-(h-a)t} + A(t) e^{-at} \quad ,$$

$$2\epsilon B(t) \cosh(at) = e' e^{-(h-a)t} - A(t) e^{-at} \quad ,$$

waaruit volgt

$$B(t) = \frac{2e' e^{(a-h)t}}{(\epsilon + 1)e^{at} + (\epsilon - 1)e^{-at}} \quad , \quad (5)$$

en

$$A(t) = -e' e^{(2a-h)t} \cdot \frac{(\epsilon + 1)e^{-at} + (\epsilon - 1)e^{at}}{(\epsilon + 1)e^{at} + (\epsilon - 1)e^{-at}} \quad . \quad (6)$$

Het secundaire veld op de plaats van de bron e' is ($\rho = 0, z = h$)

$$\int_0^{\infty} A(t) e^{-zt} J_0(\rho t) dt = -e' \int_0^{\infty} e^{-2ht} \frac{1 + \beta e^{2at}}{1 + \beta e^{-2at}} dt ,$$

waarin $\beta = (\epsilon - 1)/(\epsilon + 1)$.

We voeren een nieuwe integratievariabele in: $t = \frac{\alpha s}{2a}$ met $\alpha = \frac{a}{h}$. Dan wordt de secundaire potentiaal op de plaats van de bron

$$\left(U_I - \frac{e'}{r} \right)_{\rho=0, z=h} = -\frac{e'}{2h} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{1 + \beta e^{\alpha s}}{1 + \beta e^{-\alpha s}} ds . \quad (7)$$

We schrijven nu

$$\frac{1 + \beta e^{\alpha s}}{1 + \beta e^{-\alpha s}} = \beta e^{\alpha s} + \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta e^{-\alpha s}} .$$

We ontwikkelen daarna naar machten van β en integreren termgewijze. Dit is geoorloofd voor $\beta < 1$ (in de praktijk is β veel kleiner dan 1, bijv. $\epsilon = 1.4$ dan $\beta = \frac{1}{6}$). Voor de secundaire potentiaal op de plaats van de bron vinden we dan

$$\left(U_I - \frac{e'}{r} \right)_{\rho=0, z=h} = -\frac{e'}{2h} \left\{ \frac{\beta}{1 - \alpha} + (1 - \beta^2) \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{1 + n\alpha} \right\} . \quad (8)$$

De bindingsenergie van het electron aan de plaat is

$$\frac{e'^2}{4h} \left\{ \frac{\beta}{1 - \alpha} + (1 - \beta^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{1 + n\alpha} \right\} .$$

V. Berekening van een magneetveld in een bewegende geleider

1. Probleem

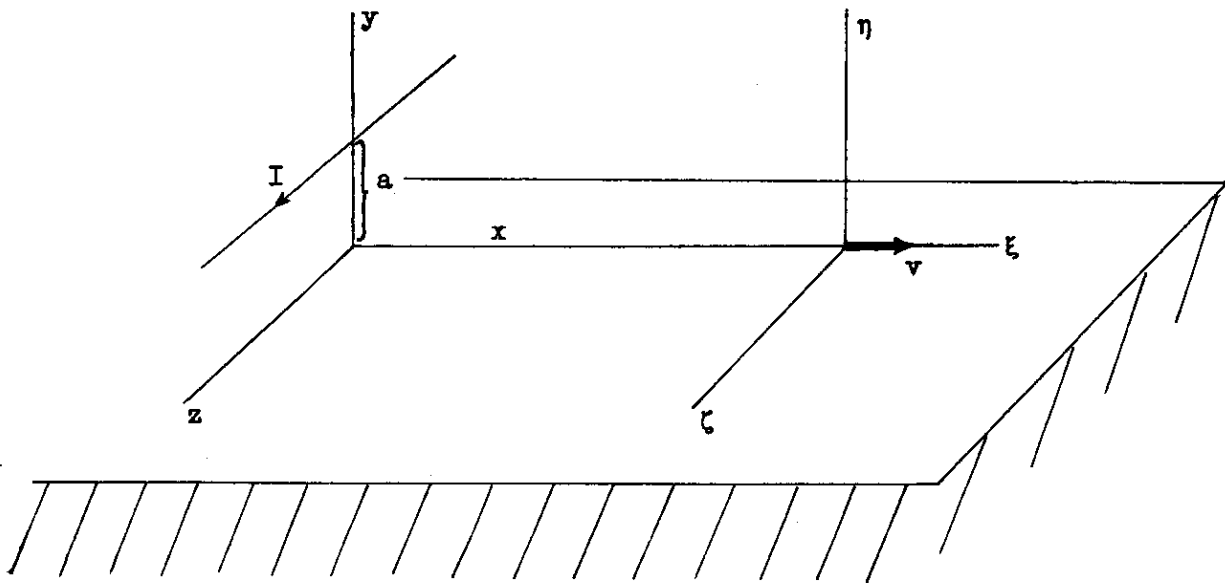
Een homogene, isotrope geleider (in de vorm van een halfruimte) beweegt zich eenparig en rechtlijnig evenwijdig aan het grensvlak. Gevraagd wordt het magneetveld te berekenen binnen de halfruimte opgewekt door een gelijkstroom in een draad evenwijdig aan het grensvlak van de halfruimte en loodrecht op de bewegingsrichting ervan.

2. Notaties

Materiaalconstanten van de geleider: ϵ, μ, σ .

In vacuum: ϵ_0, μ_0 .

Coördinatensysteem: x, y, z, t (zit vast aan de draad).
 Coördinatensysteem: ξ, η, ζ, τ (zit vast aan de geleider).
 Stroomsterkte in de draad: I (in de z -richting).
 Snelheid van de geleider: v (in de x -richting).
 Afstand stroomdraad tot grensvlak: a .
 Situatie als in figuur:



3. Methode van oplossing

Het probleem is kennelijk twee-dimensionaal: $\partial/\partial z = 0$. We zien af van aanloopverschijnselen, en zoeken dus de stationaire oplossing: $\partial/\partial t = 0$. We behandelen het probleem relativistisch. We bepalen eerst het veld van de stroom I in de vrije ruimte als de geleider afwezig is. Dan transformeren we dit veld met de Lorentztransformatie op het systeem ξ, η, ζ, τ . Dit veld wordt vervolgens spectraal ontleed. De afzonderlijke componenten (vlakke golven) kunnen we aan de geleider laten reflecteren. Het totale elektromagnetisch veld buiten en binnen de geleider vindt men dan door spectraalsynthese (integratie). Tenslotte wordt met de inverse Lorentz-transformatie het magnetisch veld in het x, y, z, t systeem verkregen.

4. Het veld van de stroomdraad in vacuüm

In het systeem x, y, z, t kan men het veld van de stroom I afleiden uit een vectorpotentialiaal $\vec{A} = (0, 0, A_z)$, volgens de formule $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, met

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{\{x^2 + (y-a)^2\}}} .$$

Het gevraagde veld is $\vec{E} = (0,0,0)$ en $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$ met

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{y-a}{x^2 + (y-a)^2},$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + (y-a)^2}.$$

5. Lorentz-transformatie

De coördinaten in de twee systemen hangen samen als

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z, \quad \tau = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

waarin $\beta = \frac{v}{c}$, en c de lichtsnelheid.

Volgens de speciale relativiteitstheorie is de corresponderende transformatie van het veld (\vec{E}, \vec{B}) de volgende:

$$\begin{aligned} E_\xi &= E_x, & B_\xi &= B_x, \\ E_\eta &= \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B_\eta &= \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E_\zeta &= \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B_\zeta &= \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

De betreffende inversieformules verkrijgt men door verwisseling van ξ en x , η en y , ζ en z , en vervanging van v door $-v$.

6. Veld van stroomdraad in systeem ξ, η, ζ, τ .

Het is een koud kunstje om het veld van de stroomdraad uit te drukken in het systeem dat met de geleider meebeweegt. Er komt nu een component van het elektrische veld in de ζ -richting.

We hebben $\vec{E} = (0, 0, E_\zeta)$, $\vec{B} = (B_\xi, B_\eta, 0)$, met

$$E_\zeta = vB_\eta,$$

$$B_\xi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{(1 - \beta^2)(\eta - a)}{(\xi + v\tau)^2 + (1 - \beta^2)(\eta - a)^2},$$

$$B_\eta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\xi + v\tau}{(\xi + v\tau)^2 + (1 - \beta^2)(\eta - a)^2}.$$

7. Spectrale ontleding van het primaire veld

Het electromagnetische veld uit de vorige paragraaf gaan we spectraal ontleden. We stellen

$$(\vec{E}, \vec{B}) = \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega\tau(\vec{e}, \vec{b})d\omega \quad ,$$

en dus

$$(\vec{e}, \vec{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}(\vec{E}, \vec{B})d\tau \quad .$$

Men heeft de volgende componenten:

$$\vec{e} = (0, 0, vb_{\eta}) \quad , \quad \vec{b} = (b_{\xi}, b_{\eta}, 0)$$

met

$$b_{\xi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} (1 - \beta^2)(\eta - a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\tau}{(\xi + v\tau)^2 + (1 - \beta^2)(\eta - a)^2} \quad ,$$

$$b_{\eta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}(\xi + v\tau)d\tau}{(\xi + v\tau)^2 + (1 - \beta^2)(\eta - a)^2} \quad .$$

In beide integralen stellen we $s = \xi + v\tau$, en vinden zo

$$b_{\xi} = \frac{\mu_0 I(1 - \beta^2)(a - \eta)}{4\pi^2 v} e^{-i\omega\xi/v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s/v} ds}{s^2 + (1 - \beta^2)(\eta - a)^2} \quad ,$$

$$b_{\eta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 v} e^{-i\omega\xi/v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s/v} s ds}{s^2 + (1 - \beta^2)(\eta - a)^2} \quad .$$

De resterende integralen kunnen we met behulp van de residuenstelling gemakkelijk berekenen. Men vindt:

$$b_{\xi} = \frac{\mu_0 I\sqrt{1 - \beta^2}}{4\pi v} \operatorname{sgn}(a - \eta) \exp\left[-i \frac{\xi}{v} \omega - \frac{1}{v} \sqrt{1 - \beta^2} |\eta - a| |\omega|\right] \quad ,$$

$$b_{\eta} = \frac{\mu_0 I i}{4\pi v} \operatorname{sgn}(\omega) \exp\left[-i \frac{\xi}{v} \omega - \frac{1}{v} \sqrt{1 - \beta^2} |\eta - a| |\omega|\right] \quad .$$

8. Maxwell-vergelijkingen

Bij afwezigheid van ladingen en stromen gelden in de geleider de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau} , & \operatorname{div} \vec{E} &= 0 , \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu \sigma \vec{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} , & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 . \end{aligned}$$

In de ruimte buiten de geleider gelden dezelfde formules met $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$. Het primaire veld heeft van-nul-verschillende componenten E_ζ , B_ξ , B_η , en $\partial/\partial\zeta = 0$. Dezelfde eigenschap geldt voor het secundaire veld, zowel binnen als buiten de geleider. Onder deze omstandigheden reduceren zich Maxwell's vergelijkingen tot:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\zeta}{\partial \eta} &= - \frac{\partial B_\xi}{\partial \tau} , & \frac{\partial E_\zeta}{\partial \xi} &= \frac{\partial B_\eta}{\partial \tau} , \\ \frac{\partial B_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial B_\xi}{\partial \eta} &= \mu \sigma E_\zeta + \varepsilon \mu \frac{\partial E_\zeta}{\partial \tau} , & \frac{\partial B_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial B_\eta}{\partial \eta} &= 0 . \end{aligned}$$

Veranderen de componenten met de tijd volgens de factor $e^{-i\omega\tau}$, dus $E_\zeta = e_\zeta e^{-i\omega\tau}$, etc., dan vindt men voor de spectrale componenten de vergelijking

$$\begin{aligned} b_\xi &= \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{\partial e_\zeta}{\partial \eta} , & b_\eta &= - \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{\partial e_\zeta}{\partial \xi} , \\ \frac{\partial^2 e_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 e_\zeta}{\partial \eta^2} + (\varepsilon \mu \omega^2 + i \mu \sigma \omega) e_\zeta &= 0 . \end{aligned}$$

Als contrôle op onze transformaties verifieert men gemakkelijk dat ons primair veld uit § 7 aan deze laatste relaties voldoet. De functie e_ζ speelt de rol van een vectorpotentiaal, gericht volgens de ζ -as, en voldoet aan de golfvergelijking in twee dimensies.

9. Vlakke-golfoplossing van de Maxwell-vergelijkingen

We passen nu ons gevraagde secundaire veld bij het gegeven primaire veld aan door separatie van variabelen:

$$e_\zeta = e^{-i \frac{\xi}{v} \omega} g(\eta)$$

en vinden zo voor $g(\eta)$ de differentiaalvergelijking

$$g''(\eta) + \left\{ \omega^2 \left(\epsilon \mu - \frac{1}{v^2} \right) + i \mu \sigma \omega \right\} g(\eta) = 0 ,$$

met oplossingen

$$\exp \left[\pm \eta \sqrt{\left(\frac{1}{v^2} - \epsilon \mu \right) \omega^2 - i \mu \sigma \omega} \right] .$$

We voeren een paar afkortingen in, namelijk:

$$\lambda(\omega) = \sqrt{\left(\frac{1}{v^2} - \epsilon \mu \right) \omega^2 - i \mu \sigma \omega} ,$$

$$\lambda_0(\omega) = \sqrt{\left(\frac{1}{v^2} - \epsilon_0 \mu_0 \right) \omega^2} = \frac{1}{v} \sqrt{1 - \beta^2} |\omega| ,$$

met de afspraak dat we die waarde van de wortel nemen waarvoor het reële deel niet-negatief is.

Ook hangen we even een index (0) aan de uitdrukkingen voor het primaire veld, te weten

$$e_{\zeta}^{(0)} = \frac{\mu_0 I i}{4\pi} \operatorname{sgn}(\omega) \exp \left[-i \frac{\xi}{v} \omega - |\eta - a| \lambda_0(\omega) \right] ,$$

$$b_{\xi}^{(0)} = \frac{\mu_0 I \sqrt{1 - \beta^2}}{4\pi v} \operatorname{sgn}(a - \eta) \exp \left[-i \frac{\xi}{v} \omega - |\eta - a| \lambda_0(\omega) \right] ,$$

$$b_{\eta}^{(0)} = \frac{\mu_0 I i}{4\pi v} \operatorname{sgn}(\omega) \exp \left[-i \frac{\xi}{v} \omega - |\eta - a| \lambda_0(\omega) \right] .$$

We moeten straks aansluiting hebben bij $\eta = 0$. Daarvoor hebben we nodig de uitdrukking voor $e_{\zeta}^{(0)}$ in het gebied $0 \leq \eta \leq a$. Deze uitdrukking is

$$e_{\zeta}^{(0)} = \frac{\mu_0 I i}{4\pi} \operatorname{sgn}(\omega) e^{-a \lambda_0(\omega)} \exp \left[-i \frac{\xi}{v} \omega + \eta \lambda_0(\omega) \right] \quad (0 \leq \eta \leq a) .$$

Dienovereenkomstig stellen we voor het secundaire veld buiten de geleider

$$e_{\zeta}^{(1)} = \frac{\mu_0 I i}{4\pi} \operatorname{sgn}(\omega) e^{-a \lambda_0(\omega)} \{ P \exp \left[-i \frac{\xi}{v} \omega - \eta \lambda_0(\omega) \right] \} , \quad (\eta \geq 0)$$

en idem binnen de geleider

$$e_{\zeta}^{(2)} = \frac{\mu_0 I i}{4\pi} \operatorname{sgn}(\omega) e^{-a \lambda_0(\omega)} \{ Q \exp \left[-i \frac{\xi}{v} \omega + \eta \lambda_0(\omega) \right] \} . \quad (\eta \leq 0)$$

De coëfficiënten P en Q moeten dan uit aansluitingsvoorwaarden bij $\eta = 0$ worden gevonden. Het tangentiële elektrische veld moet continu zijn. Dit vereist $e_{\zeta}^{(0)} + e_{\zeta}^{(1)} = e_{\zeta}^{(2)}$ voor $\eta = 0$, en geeft:

$$1 + P = Q ,$$

een relatie die automatisch zorgt voor een continue normaal-component van de \vec{b} . Verder moet het tangentiële magnetische veld continu zijn, dus $\frac{1}{\mu} B_{\xi}$, ofwel $\frac{1}{\mu} b_{\xi}$, moet continu zijn. Dit is, in vergelijking

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial \eta} \{e_{\xi}^{(0)} + e_{\xi}^{(1)}\} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \eta} \{e_{\xi}^{(2)}\} \quad \text{voor } \eta = 0 .$$

Dit geeft

$$\mu \lambda_0(\omega)(1 - P) = \mu_0 \lambda(\omega) Q .$$

Oplossing van deze twee vergelijkingen in P en Q geeft dan

$$P = \frac{\mu \lambda_0(\omega) - \mu_0 \lambda(\omega)}{\mu \lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} , \quad Q = \frac{2\mu \lambda_0(\omega)}{\mu \lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} .$$

Deze formules geven expliciete uitdrukkingen voor de reflectiecoëfficiënt (P) en de refractiecoëfficiënt (Q) voor onze vlakke golf $e_{\xi}^{(0)}$.

10. Veld binnen de geleider

Met de gevonden uitdrukking voor Q, namelijk

$$Q = \frac{2\mu \frac{1}{v} \sqrt{1 - \beta^2} |\omega|}{\mu \lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} ,$$

vinden we voor de spectrale componenten van het in de geleider gerefracteerde veld:

$$b_{\xi} = \frac{\mu \mu_0 I \sqrt{1 - \beta^2}}{2\pi v} \cdot \frac{\lambda(\omega)}{\mu \lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} e^{-a\lambda_0 - i \frac{\xi}{v} \omega + \eta \lambda} ,$$

$$b_{\eta} = \frac{\mu \mu_0 I \sqrt{1 - \beta^2}}{2\pi v} \cdot \frac{i\omega/v}{\mu \lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} e^{-a\lambda_0 - i \frac{\xi}{v} \omega + \eta \lambda} ,$$

$$e_{\xi} = v b_{\eta} .$$

Het electromagnetische veld zelf is dus

$$B_{\xi} = \frac{\mu \mu_0 I \sqrt{1 - \beta^2}}{2\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{v}(\xi + v\tau) i} \frac{\lambda(\omega)}{\mu \lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} e^{-a\lambda_0(\omega) + \eta \lambda(\omega)} d\omega ,$$

$$B_{\eta} = \frac{\mu \mu_0 I \sqrt{1 - \beta^2}}{2\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{v}(\xi + v\tau) i} \frac{i\omega/v}{\mu \lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} e^{-a\lambda_0(\omega) + \eta \lambda(\omega)} d\omega ,$$

$$E_{\zeta} = vB_{\eta} \quad .$$

We passen nu de inverse Lorentz-transformatie toe, om het veld in het x, y, z, t systeem te berekenen. Er komt $E_z = 0$ en

$$B_x = \frac{\mu\mu_0 I \sqrt{1-\beta^2}}{2\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} xi} \frac{\lambda(\omega)}{\mu\lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} e^{-a\lambda_0(\omega) + y\lambda(\omega)} d\omega \quad ,$$

$$B_y = \frac{\mu\mu_0 I (1-\beta^2)}{2\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} xi} \frac{i\omega/v}{\mu\lambda_0(\omega) + \mu_0 \lambda(\omega)} e^{-a\lambda_0(\omega) + y\lambda(\omega)} d\omega \quad ,$$

Voer nu een nieuwe integratievariabele in door

$$\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} = s \quad .$$

Dan wordt $\lambda_0(\omega) = |s|$,

en

$$\lambda(\omega) = \sqrt{\frac{1-\epsilon\mu v^2}{1-\beta^2} s^2 - i \frac{\mu\sigma v}{\sqrt{1-\beta^2}} s} \equiv \phi(s) \quad ,$$

zodat

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\phi(s)}{\mu_0\phi(s) + \mu|s|} e^{-a|s| - ixs + y\phi(s)} ds \quad ,$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\mu s}{\mu_0\phi(s) + \mu|s|} e^{-a|s| - ixs + y\phi(s)} ds$$

expliciete uitdrukkingen geven voor het magneetveld in de geleider voor de waarnemer die in rust is ten opzichte van de (stilstaande) stroomdraad. Als contrôle kunnen we $v = 0$ nemen. De integralen zijn dan elementair:

$$B_y(v=0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{2\mu}{\mu + \mu_0} \cdot \frac{x}{x^2 + (y-a)^2} \quad ,$$

$$B_x(v=0) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{2\mu}{\mu + \mu_0} \cdot \frac{y-a}{x^2 + (y-a)^2} \quad .$$

Als bovendien nog $\mu = \mu_0$ geldt, vinden we juist het primaire veld terug. De integraaluitdrukkingen voor B_x en B_y zijn vrij gecompliceerd. Om ze te vereenvoudigen, verdrijven we eerst de modulustekens, door de integratie over s van 0 tot ∞ te reduceren, en te bedenken dat $\phi(-s) = \phi^*(s)$, waarbij het sterretje het complexgeconjugeerde aanduidt. Men vindt zo

$$B_x = \frac{\mu I}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \frac{\psi(s)}{\psi(s) + \frac{\mu}{\mu_0} s} e^{-as - ixs + y\psi(s)} ds \right] ,$$

$$B_y = - \frac{\mu I}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_0^{\infty} \frac{s}{\psi(s) + \frac{\mu}{\mu_0} s} e^{-as - ixs + y\psi(s)} ds \right] .$$

We merken op dat dit veld uit een vectorpotentiaal kan worden afgeleid:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{\pi} \operatorname{rot} \vec{F} \quad , \quad \vec{F} = (0, 0, F) \quad ,$$

met de z-component

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{\psi(s) + \frac{\mu}{\mu_0} s} e^{-as - ixs + y\psi(s)} ds \right] .$$

Het is namelijk eenvoudig te verifiëren dat bovenstaande integraaluitdrukkingen voor B_x en B_y equivalent zijn met

$$B_x = \frac{\mu I}{\pi} \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad B_y = - \frac{\mu I}{\pi} \frac{\partial F}{\partial x} .$$

Men zou F langs machinale weg kunnen berekenen als functie van x en y . Om dan echter het veld te vinden, moeten we nog naar x en y differentiëren.

Een tweede weg voor de veldberekening is de volgende. We voeren drie reële functies in: G_0 , G_1 en G_2 , waarbij de laatste twee reëel en imaginair deel zijn van een complexe functie

$$G_0(x, y) = \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{-as - ixs + y\psi(s)} ds \right] ,$$

$$G_1(x, y) + iG_2(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{s}{\psi(s) + \frac{\mu}{\mu_0} s} e^{-as - ixs + y\psi(s)} ds .$$

Dan geldt voor bovenstaand veld ook:

$$B_x = \frac{\mu I}{\pi} \left\{ G_0 - \frac{\mu}{\mu_0} G_1 \right\} \quad , \quad B_y = - \frac{\mu I}{\pi} G_2 .$$

11. Secundair veld buiten geleider

Met analoge manipulaties als in de vorige paragraaf vindt men voor het secundaire veld in vacuo

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 \phi(s) - \mu |s|}{\mu_0 \phi(s) + \mu |s|} e^{-ixs - (a+y)|s|} ds, \quad ,$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(s) \frac{\mu_0 \phi(s) - \mu |s|}{\mu_0 \phi(s) + \mu |s|} e^{-ixs - (a+y)|s|} ds .$$

Ook hier kan men de integratie reduceren over $0 \leq s < \infty$:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \text{Re} \left[\int_0^{\infty} \frac{\mu_0 \phi(s) - \mu s}{\mu_0 \phi(s) + \mu s} e^{-ixs - (a+y)s} ds \right], \quad ,$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \text{Im} \left[\int_0^{\infty} \frac{\mu_0 \phi(s) - \mu s}{\mu_0 \phi(s) + \mu s} e^{-ixs - (a+y)s} ds \right] .$$

De zaak in vacuo is veel eenvoudiger dan in de geleider. We zien dat nu B_x en B_y reëel en imaginair deel zijn van een en dezelfde complexe functie, en wel

$$B_x + iB_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mu_0 \phi(s) - \mu s}{\mu_0 \phi(s) + \mu s} e^{-as - is(x-iy)} ds .$$

De laatste integraal is een eenwaardige analytische functie van de complexe variabele $x-iy$. Dit is in overeenstemming met het feit dat B_x en B_y oplossingen van de twee-dimensionale potentiaalvergelijking zijn.

12. Enkele vereenvoudigingen

In de praktijk spelen voor het trommelgeheugen relativistische termen niet mee. We kunnen daarom termen kwadratisch in v verwaarlozen ($1 - \beta^2 \approx 1$). In de functie $\phi(s)$ komt dan als coëfficiënt van s^2 de factor $1 - \epsilon\mu v^2$. Ook al kent men geleiders met hoge $\epsilon\mu$ -waarden, men kan ook deze factor gevoegelijk door 1 vervangen. (Theoretisch mogelijk, niet in strijd met relativiteitstheorie, is het geval $1 - \epsilon\mu v^2 \ll 0$. De consequenties hiervan hebben we niet bekeken.) In deze benadering wordt

$$\phi(s) \approx \sqrt{s^2 - i\mu\sigma v s} .$$

Als tweede vereenvoudiging stellen we $\mu = \mu_0$. Onder deze omstandigheden wordt het veld binnen de geleider

$$B_x = \frac{\mu I}{\pi} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\mu I}{\pi} \frac{\partial F}{\partial x},$$

met

$$F = \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-as-ixs+iy\sqrt{s^2-i\mu_0 v s}}}{s + \sqrt{s^2 - i\mu_0 v s}} ds \right],$$

of ook

$$B_x = \frac{\mu I}{\pi} \{G_0 - G_1\}, \quad B_y = -\frac{\mu I}{\pi} G_2,$$

met

$$G_0 = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-as-ixs+iy\sqrt{s^2-i\mu_0 v s}} ds,$$

$$G_1 + iG_2 = \int_0^{\infty} \frac{s}{s + \sqrt{s^2 - i\mu_0 v s}} e^{-as-ixs+iy\sqrt{s^2-i\mu_0 v s}} ds.$$

Het veld buiten de geleider kan onder deze omstandigheden in een Hankelfunctie worden uitgedrukt. We stellen even

$$p = a + y + ix, \quad \alpha = \frac{1}{2} \mu_0 v.$$

Dan heeft men voor het secundaire veld buiten de geleider

$$\begin{aligned} H_x + iH_y &= \frac{I}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ps} \frac{\sqrt{s^2 - 2i\alpha s} - s}{\sqrt{s^2 - 2i\alpha s} + s} ds \\ &= \frac{Ii}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ps} \{s - i\alpha - \sqrt{s^2 - 2i\alpha s}\} ds \\ &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{p} + \frac{i}{\alpha p^2} - \frac{i}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-ps} \sqrt{s^2 - 2i\alpha s} ds \right]. \end{aligned}$$

De resterende integraal kunnen we in Hankelfuncties uitdrukken, als we gebruik maken van formule (16) op pagina 138 van deel I van Erdélyi's *Tables of Integral Transforms*. Men vindt zo voor het secundaire veld buiten de geleider

$$H_x + iH_y = \frac{I}{2\pi p} \left\{ 1 + \frac{i}{\alpha p} + \frac{\pi}{2} e^{-i\alpha p} H_1^{(1)}(\alpha p) \right\},$$

waarin dus $p = a + y + ix$ en $\alpha p = \frac{1}{2} \mu_0 v (a + y + ix)$ is.

Referentie

C.J. Bouwkamp: Berekening van magneetveld in bewegende geleider, Nat. Lab. Rapport nr. 14/57.

Probleem VI

Bewijs dat

$$\sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^{n-q} \binom{2p}{p} \binom{2q}{q} \binom{2n-2p-2q}{n-p-q} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \quad (1)$$

Kort het linkerlid van (1) af met S_n . Daar steeds geldt dat $p+q+(n-p-q) = n$, kunnen we schrijven

$$S_n = \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \sum_{r \geq 0} \binom{2p}{p} \binom{2q}{q} \binom{2r}{r} \quad (2)$$

$p+q+r=n$

Door uitwerken zien we eenvoudig in dat $\binom{2p}{p} = (-4)^p \binom{-\frac{1}{2}}{p}$.

We werken nu met genererende functies. De genererende functie van de coëfficiënten $\binom{2p}{p}$ is:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{2p}{p} x^p = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{p} (-4x)^p = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} \quad .$$

Dus

$$(1-4x)^{-3/2} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \binom{2p}{p} x^p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} \binom{2q}{q} x^q \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \quad (3)$$

Eveneens geldt

$$(1-4x)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3/2}{n} (-4x)^n \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt met de betrekking $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha}{\alpha-n} \binom{\alpha-1}{n}$

$$S_n = \binom{-3/2}{n} (-4)^n = (2n+1)(-4)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = (2n+1) \binom{2n}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \quad (5)$$

VII. Oplossing van een potentiaal probleem met behulp van conforme afbeeldingen

We zullen hier het potentiaal probleem dat besproken werd op pagina 1 e.v. van onze syllabus oplossen met behulp van conforme afbeeldingen.

Zij G de halfstrip $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$. We zoeken een functie $V(x,y)$ die binnen G voldoet aan de potentiaalvergelijking onder de randvoorwaarden (zie figuur 1)

$$\left. \begin{aligned} V &= 0 \quad \text{voor} \quad 0 \leq x < \infty, \quad y = b \\ V &= 1 \quad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq a, \quad y = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= 0 \quad \text{voor} \quad a < x < \infty, \quad y = 0 \quad \text{en voor} \quad 0 \leq y \leq b, \quad x = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

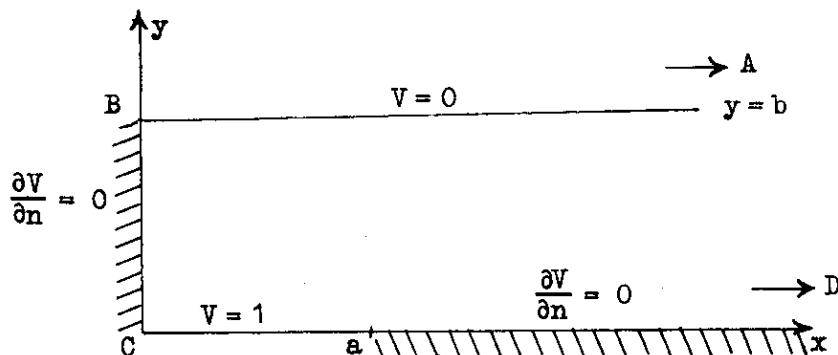


fig. 1
z-vlak
 $z = x + iy$

We zullen nu het gebied G in het complexe z -vlak conform afbeelden op het binnengebied van een rechthoek. Daartoe beelden we eerst G af op het bovenhalfvlak.

Het is bekend dat door de functie $z' = \sin z$ de strook $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ uit het z -vlak conform wordt afgebeeld op het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} z' \geq 0$ (zie Nehari: Introduction to complex analysis, pag. 184). Hieruit volgt dat de functie

$$z' = \sin i\left(\frac{\pi}{b} z - \frac{\pi}{2} i\right) = \cosh \frac{\pi z}{b} \quad (2)$$

het gebied G conform afbeeldt op het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} z' \geq 0$. Bij deze afbeelding gaat de rand van G over in de reële as in het z' -vlak. De beelden van de punten A , B , C en D op de rand van G zijn eveneens met A , B , C en D aangegeven (zie figuur 2).

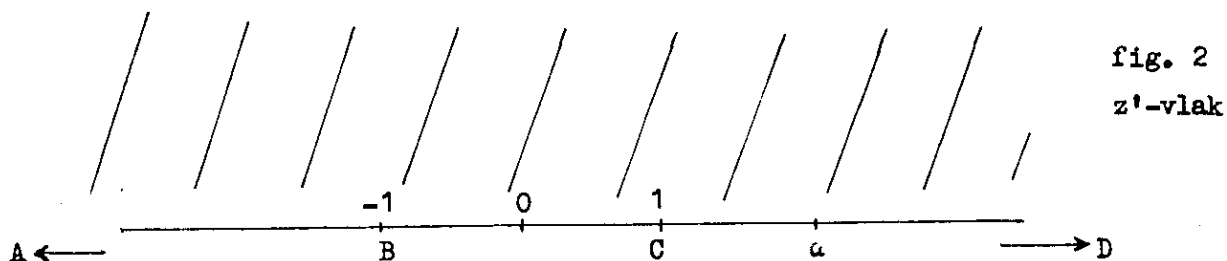


fig. 2
 z' -vlak

Het punt α is het beeld van $z = a$, dus $\alpha = \cosh \frac{\pi a}{b}$.

Hierna beelden we met behulp van de formule van Schwarz-Christoffel (zie Nehari, pag. 173 e.v.) het bovenhalfvlak uit figuur 2 af op het binnengebied van een rechthoek in het w -vlak.

We definiëren

$$w(z') = i \int_1^{z'} (t+1)^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} (t-\alpha)^{-\frac{1}{2}} dt . \quad (3)$$

De integratieweg in bovenstaande formule ligt geheel in het bovenhalfvlak, terwijl de functies uit de integrand gedefinieerd zijn door hun hoofdwaarden (langs de sneden is dus het argument van $t+1$, $t-1$ en $t-\alpha$ gelijk aan π). Zoals bekend is uit de theorie van de conforme afbeeldingen, geeft $w(z')$ een conforme afbeelding van het bovenhalfvlak $\text{Im } z' \geq 0$ op een zeker gebied in het w -vlak. Om dit gebied te bepalen lopen we langs de reële as in het z' -vlak van $-\infty$ (A) naar ∞ (D) en gaan we na wat w doet. De beelden van A, B, C en D worden weer met dezelfde letters aangegeven.

Nu geldt

$$w(z') = \int_1^{z'} |t^2 - 1|^{-\frac{1}{2}} |t - \alpha|^{-\frac{1}{2}} dt \quad \text{voor } 1 \leq z' \leq \alpha . \quad (4)$$

Als z' dus loopt van 1 naar α dan loopt w langs de reële as van $w = 0$ naar $w = \alpha'$ met

$$\alpha' = \int_1^{\alpha} |t^2 - 1|^{-\frac{1}{2}} |t - \alpha|^{-\frac{1}{2}} dt . \quad (5)$$

Verder geldt

$$w(z') = \alpha' + i \int_{\alpha}^{z'} |t^2 - 1|^{-\frac{1}{2}} |t - \alpha|^{-\frac{1}{2}} dt \quad \text{voor } \alpha \leq z' < \infty . \quad (6)$$

Dus als z' loopt van α naar ∞ dan loopt w langs de verticaal door α' omhoog tot $w = \alpha' + i\beta'$ met

$$\beta' = \int_{\alpha}^{\infty} |t^2 - 1|^{-\frac{1}{2}} |t - \alpha|^{-\frac{1}{2}} dt . \quad (7)$$

Voor $-\infty < z' \leq -1$ schrijven we $\int_1^{z'} = \int_1^{\infty} + \int_{\infty}^{-\infty} + \int_{-\infty}^{z'}$.

Men ziet eenvoudig in dat de integraal

$$\int_{+\infty}^{-\infty} (t+1)^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} (t-\alpha)^{-\frac{1}{2}} dt$$

gelijk is aan 0 (integreer langs een halve cirkel $t = Re^{i\varphi}$ en laat R naar ∞ gaan). Dus

$$w(z') = \alpha' + i\beta' - \int_{-\infty}^{z'} |t^2 - 1|^{-\frac{1}{2}} |t - \alpha|^{-\frac{1}{2}} dt \quad \text{voor } -\infty < z' \leq -1. \quad (8)$$

Als z' dus loopt van $-\infty$ naar -1 dan loopt w van $w = \alpha' + i\beta'$ langs een horizontale rechte naar $w = i\beta'$. Dat het eindpunt inderdaad op de imaginaire as ligt volgt uit het feit dat we uit de theorie van de conforme afbeeldingen weten dat het beeld van de reële z' -as een rechthoek moet zijn met rechte hoeken in de beelden van -1 , 1 , α en ∞ .

Tenslotte

$$w(z') = i \int_{z'}^1 |t^2 - 1|^{-\frac{1}{2}} |t - \alpha|^{-\frac{1}{2}} dt \quad \text{voor } -1 \leq z' \leq 1. \quad (9)$$

Als z' loopt van -1 naar $+1$ dan loopt w langs de imaginaire as van $w = i\beta'$ naar $w = 0$.

Zie onderstaande figuur

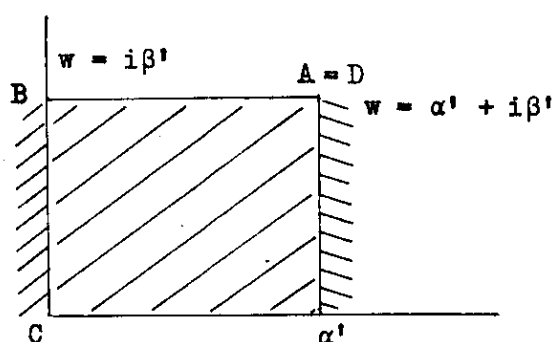


fig. 3
w-vlak

Hiermee is aangetoond dat door

$$w = i \int_1^{\cosh \frac{\pi z}{b}} (t+1)^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} (t-\alpha)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (10)$$

het gebied G uit het z -vlak conform wordt afgebeeld op het binnengebied plus rand van de rechthoek uit figuur 3.

Beschouw nu de functie $g(w) = i \frac{w}{\beta'} + 1$. Deze functie heeft de eigenschap dat $\operatorname{Re} g(w) = 0$ op het lijnstuk AB , en $\operatorname{Re} g(w) = 1$ op $C\alpha'$, terwijl de normale afgeleide van $\operatorname{Re} g(w)$ verdwijnt op de verticale lijnstukken CB en $\alpha'D$. Dit betekent dat de functie $V(x,y)$ gedefinieerd door

$$V(x,y) = \operatorname{Re} \left[1 - \frac{1}{\beta'} \int_1^{\cosh \frac{\pi z}{b}} (t+1)^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} (t-\alpha)^{-\frac{1}{2}} dt \right] \quad (11)$$

de oplossing is van ons potentiaal probleem.

We werken dit resultaat om tot de gedaante gegeven in formule (27) op pagina 11.

Met de substitutie $t = \cosh \frac{\pi s}{b}$ in (7) volgt

$$\beta' = \frac{\pi}{b} \int_a^{\infty} (\cosh \frac{\pi s}{b} - \cosh \frac{\pi a}{b})^{-\frac{1}{2}} ds, \quad (12)$$

(zie ook formule (24) op pagina 9).

We schrijven nu

$$\int_1^{\cosh \frac{\pi z}{b}} = \int_1^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\infty} + \int_{\infty}^{\cosh \frac{\pi z}{b}} \quad \text{met } \alpha = \cosh \frac{\pi a}{b}.$$

De eerste integraal is zuiver imaginair; de tweede integraal is gelijk aan β' . Dus

$$V(x,y) = \operatorname{Re} \left[+ \frac{1}{\beta'} \int_{\cosh \frac{\pi z}{b}}^{\infty} (t+1)^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} (t-\alpha)^{-\frac{1}{2}} dt \right]. \quad (13)$$

Met de substitutie $t = \cosh \frac{\pi s}{b}$ volgt tenslotte

$$V(x,y) = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi/b}{\beta'} \int_z^{\infty} (\cosh \frac{\pi s}{b} - \cosh \frac{\pi a}{b})^{-\frac{1}{2}} ds \right], \quad (14)$$

welk resultaat volledig in overeenstemming is met formule (27) op pagina 11.

VIII. Hoogfrequent-verwarming

In een homogeen periodiek in de tijd wisselend magneetveld wordt een metalen lichaam geplaatst. De geïnduceerde wervelstromen maken dat het lichaam gemakkelijk op hoge temperatuur is te brengen. In enkele symmetrische gevallen zullen we de ontwikkelde warmte berekenen.

Neem het veld $H_0 e^{j\omega t}$ in de z-richting.

Stel dat het lichaam omwentelingssymmetrisch is rondom de veldrichting. De stromen lopen dan in cirkels rondom de z-as. In het lichaam met materiaalconstanten $\epsilon = 1$, μ , σ gelden de quasistationaire veldvergelijkingen in gewone Gauss-eenheden

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{H} &= \frac{4\pi}{c} \underline{I} \quad , \\ \text{rot } \underline{I} &= - \frac{j\omega\sigma}{c} \underline{H} \quad , \end{aligned} \tag{1}$$

waarin \underline{H} de magnetische veldsterkte en \underline{I} de stroomdichtheid is. Binnen in het lichaam bevinden zich geen ladingen, zodat dan geldt

$$\text{div } \underline{H} = 0 \quad , \quad \text{div } \underline{I} = 0 \quad . \tag{2}$$

Buiten het metaal is $\sigma = 0$, $\underline{I} = 0$. In vacuum geldt dan

$$\text{div } \underline{H} = 0 \quad , \quad \text{rot } \underline{H} = \underline{0} \quad . \tag{3}$$

Bij deze typisch quasistationaire opvatting bekommeren we ons helemaal niet om het elektrische veld buiten het lichaam.

De differentiaalvergelijkingen moeten zodanig worden geïntegreerd dat aan de rand van het lichaam de tangentiële component van \underline{H} en de normale component van $\mu\underline{H}$ continu doorgaan.

Het homogene magneetveld $H_0 e^{j\omega t}$ waarvan in ons probleem sprake is wordt opgewekt door een wisselstroom een dunne spoel te laten doorlopen. We nemen aan dat de spoel zo groot is dat we van een verandering van de stroomverdeling in de spoel, veroorzaakt door de aanwezigheid van het metalen lichaam, kunnen afzien.

Allereerst iets over energiebeschouwingen.

Vermenigvuldig de eerste veldvergelijking scalair met \underline{I}^* (de complex geconjugeerde van \underline{I}), de tweede met \underline{H}^* . Aftrekken geeft dan (binnen het metaal)

$$\underline{I}^* \cdot \text{rot } \underline{H} - \underline{H}^* \cdot \text{rot } \underline{I} = - \text{div}[\underline{I}, \underline{H}^*] = \frac{4\pi}{c} \underline{I} \cdot \underline{I}^* + j\omega \frac{\mu\sigma}{c} \underline{H} \cdot \underline{H}^* \quad .$$

Integratie over een gesloten oppervlak, dat geheel binnen het lichaam ligt, geeft:

$$\frac{c}{4\pi\sigma} \iint [\underline{I}, \underline{H}^*]_n dS = \iiint \frac{|\underline{I}|^2}{\sigma} d\tau + j\omega \iiint \frac{\mu |\underline{H}|^2}{4\pi} d\tau . \quad (4)$$

Hierin betekent n de naar binnen gerichte eenheidsnormaal op het oppervlak. De relatie is niets anders dan de Pointing-stelling dat de naar binnen stromende energie gedeeltelijk irreversibel in Joule warmte wordt omgezet, gedeeltelijk de veldenergie binnen in het metaal vergroot.

Laten $A = ae^{j\omega t}$, $B = be^{j\omega t}$ twee complexe grootheden zijn.

Dan is

$$\operatorname{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad , \quad \operatorname{Re}(B) = \frac{1}{2}(B + B^*) \quad ,$$

$$\operatorname{Re}(A)\operatorname{Re}(B) = \frac{1}{4} \{AB + A^*B^* + AB^* + BA^*\} .$$

Voor de tijdgemiddelden vinden we

$$\overline{AB} = \overline{A^*B^*} = 0 \quad , \quad \overline{AB^*} = \overline{BA^*} = ab^* = (ba^*)^* .$$

Dus

$$\overline{\operatorname{Re}(A)\operatorname{Re}(B)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(ab^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(AB^*) .$$

Waaruit volgt

$$\overline{\{\operatorname{Re}(\underline{I})\}^2} = \frac{1}{2} |\underline{I}|^2 \quad , \quad \overline{\{\operatorname{Re}(\underline{H})\}^2} = \frac{1}{2} |\underline{H}|^2 .$$

De totale Joule-warmte per seconde in het lichaam ontwikkeld is dus

$$\frac{1}{2} \iiint \frac{|\underline{I}|^2}{\sigma} d\tau \quad (5)$$

geïntegreerd over het hele volume van het lichaam.

Integreren we dus in de oppervlakte integraal juist aan de binnenkant van de rand van het lichaam, dan krijgen we de totaal ontwikkelde Joule warmte en de totale equivalente zelfinductie: we schrijven voor de complexe power P

$$P = \frac{c}{4\pi\sigma} \iint [\underline{I}, \underline{H}^*]_n dS = (R + j\omega L) I_0^2 \quad , \quad (6)$$

waarin geïntegreerd is over het oppervlak van het lichaam. I_0 is de reële amplitudo van de primaire stroom in de spoel. L is een vermeerdering van de zelfinductie-coëfficiënt van de spoel door de aanwezigheid van het lichaam. We zullen nu de in het lichaam ontwikkelde Joule-warmte, die gegeven wordt door de integraal (5), voor twee gevallen berekenen.

A. Het lichaam is een bol met middelpunt in de oorsprong van straal a .

We gebruiken bolcoördinaten r , θ , φ .

Uit symmetrieoverwegingen volgt dat van de stroomdichtheid \underline{I} in het metaal

alleen de component I_φ van nul verschillend is.

Uit de veldvergelijkingen volgt

$$\left. \begin{aligned} (\text{rot } \underline{I})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta I_\varphi) = -\frac{j\omega\mu\sigma}{c} H_r, \\ (\text{rot } \underline{I})_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r I_\varphi) = -\frac{j\omega\mu\sigma}{c} H_\theta, \\ (\text{rot } \underline{I})_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Bovendien geldt

$$\text{rot rot } \underline{I} = -\frac{j\omega\mu\sigma}{c} \text{rot } \underline{H} = k^2 \underline{I}, \quad (8)$$

met

$$k = \sqrt{\frac{4\pi\omega\mu\sigma}{c^2}} e^{-j\pi/4}. \quad (9)$$

De vergelijking (8) uitgeschreven luidt

$$(\text{rot rot } \underline{I})_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} (r I_\varphi) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta I_\varphi) \right] \right\} = k^2 I_\varphi.$$

Deze vergelijking lossen we op door separatie van variabelen.

Stel $r I_\varphi = R(r)\theta(\theta)$, dan vinden we

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \theta) \right\} + \alpha \theta = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2} \right) R = 0. \quad (11)$$

De separatieconstante heeft de waarde $\alpha = n(n+1)$, n geheel en niet negatief.

Aan de eerste vergelijking voldoen Legendre-functies:

$$\theta(\theta) = -\frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) = P_n^1(\cos \theta). \quad (12)$$

Met $R = \sqrt{kr} y(kr)$ gaat de andere vergelijking over in

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\xi} + \left(1 - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{\xi^2} \right) y = 0. \quad (13)$$

Dit is de vergelijking van Bessel voor Besselfuncties van de orde $n + \frac{1}{2}$. De algemene stroomfunctie I_φ die aan de fysische voorwaarden voldoet is dus een lineaire combinatie van de gedaante

$$I_\varphi = \sum a_n \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} P_n^1(\cos \theta). \quad (14)$$

Omdat de bol in een homogeen veld staat, hebben we alleen de term met $n = 1$

nodig. We stellen dus

$$I_{\varphi} = A \frac{j\omega\mu\sigma}{c} \sin \theta \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} \quad . \quad (15)$$

We voeren de functie in:

$$F(\xi) = \sqrt{\xi} J_{3/2}(\xi) \quad . \quad (16)$$

Daarmee wordt het magneetveld binnen de bol:

$$H_r = - \frac{2A \cos \theta}{r} \frac{F(kr)}{kr} \quad , \quad (17)$$

$$H_{\theta} = \frac{A \sin \theta}{r} F'(kr) \quad . \quad (18)$$

Bovendien wordt

$$I_{\varphi} = \frac{j\omega\mu\sigma}{c} A \sin \theta \frac{F(kr)}{kr} \quad . \quad (19)$$

We merken op dat met het accent differentiatie bedoeld wordt naar het argument kr .

Buiten de bol is het magneetveld uit een potentiaal af te leiden. We vinden op de gewone wijze

$$H_r = (H_0 + \frac{2B}{r^3}) \cos \theta \quad , \quad (20)$$

$$H_{\theta} = (-H_0 + \frac{B}{r^3}) \sin \theta \quad . \quad (21)$$

A en B kunnen worden berekend uit de eis dat de waarden van μH_r en H_{θ} binnen de bol continu overgaan in de waarden buiten de bol. We vinden voor A

$$A = - \frac{3}{2} a H_0 \frac{1}{F'(ka) + \mu \frac{F(ka)}{ka}} \quad . \quad (22)$$

De complexe power wordt

$$P = \frac{c}{4\pi\sigma} \iint I_{\varphi}(r=a) H_{\theta}^*(r=a) dS = \frac{c}{4\pi\sigma} \left\{ \frac{j\omega\mu\sigma}{c} A \frac{F(ka)}{ka} \right\} \left\{ \frac{A^*}{a} F'(k^*a) \right\} \iint \sin^2 \theta dS \quad .$$

Met $\iint \sin^2 \theta dS = 8\pi a^2/3$ volgt dan

$$P = \frac{2a j\omega\mu}{3} |A|^2 \frac{F(ka)}{ka} F'(k^*a) = \frac{3}{2} a^3 H_0^2 j\omega\mu \frac{F(ka)}{ka} F'(k^*a) \frac{1}{\left| F'(ka) + \mu \frac{F(ka)}{ka} \right|^2} \quad . \quad (23)$$

We interesseren ons alleen voor het reële deel van P. Per seconde is de ontwikkelde warmte

$$W = \frac{3}{4} a^3 \omega \mu H_0^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{j \frac{F(ka)}{ka} F'(k^*a)}{\left| F'(ka) + \mu \frac{F(ka)}{ka} \right|^2} \right\} . \quad (24)$$

F is een elementaire functie

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi \right\} .$$

De evenredigheidsfactor $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ heeft in (24) geen invloed, en dus kunnen we in de uitdrukking voor W volstaan met te stellen

$$F(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi . \quad (25)$$

Nu geldt

$$F'(\xi) = \sin \xi - \frac{F(\xi)}{\xi} ,$$

en dus

$$\begin{aligned} j \frac{F(\xi)}{\xi} F'(\xi^*) &= j \frac{F(\xi)}{\xi} \left\{ \sin \xi^* - \frac{F(\xi^*)}{\xi^*} \right\} \\ &= j \frac{F(\xi)}{\xi} \sin \xi^* - j \left| \frac{F(\xi)}{\xi} \right|^2 . \end{aligned}$$

Het reële deel interesseert ons alleen:

$$\operatorname{Re} \left\{ j \frac{F(\xi)}{\xi} F'(\xi^*) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ j \frac{F(\xi)}{\xi} \sin \xi^* \right\} .$$

Voor de noemer in formule (24) vinden we

$$\left| F'(\xi) + \mu \frac{F(\xi)}{\xi} \right|^2 = \frac{|\xi \sin \xi + (\mu - 1)F(\xi)|^2}{|\xi|^2} .$$

Combinatie van deze resultaten geeft

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{j \frac{F(\xi)}{\xi} F'(\xi^*)}{\left| F'(\xi) + \mu \frac{F(\xi)}{\xi} \right|^2} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{j \frac{F(\xi)}{\xi} \sin \xi}{\left| 1 + (\mu - 1) \frac{F(\xi)}{\xi \sin \xi} \right|^2} \right\} . \quad (26)$$

Stel nu

$$G(\xi) = \frac{F(\xi)}{\xi \sin \xi} = \frac{1}{\xi} \left\{ \frac{1}{\xi} - \cotg \xi \right\} . \quad (27)$$

Daarmee wordt

$$W = \frac{3}{4} a^3 \omega \mu H_0^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{jG(\xi)}{\left| 1 + (\mu - 1)G(\xi) \right|^2} \right\} , \quad \xi = ka . \quad (28)$$

We stellen

$$y = \frac{a}{c} \sqrt{2\pi\omega\mu} , \quad (29)$$

dan wordt

$$\xi = ka = a \sqrt{\frac{4\pi\omega\sigma\mu}{c^2}} e^{-j\pi/4} = y(i-j) \quad (30)$$

Na enig rekenwerk vinden we

$$G(\xi) = \frac{1}{2y} \frac{\sinh 2y - \sin 2y}{\cosh 2y - \cos 2y} + \frac{j}{2y} \left\{ \frac{1}{y} - \frac{\sinh 2y + \sin 2y}{\cosh 2y - \cos 2y} \right\} \quad (31)$$

$$= F_1(y) - jF_2(y) \quad .$$

Daarmee wordt

$$W = \frac{3}{4} a^3 \omega \mu H_0^2 \frac{F_2(y)}{1 + 2(\mu - 1)F_1(y) + (\mu - 1)^2(F_1^2(y) + F_2^2(y))} \quad (32)$$

Eenheden

a = straal van de bol in cm.

ω = hoekfrequentie in radialen per seconde.

H_0 = magneetveld amplitudo in Gauss eenheden.

μ = permeabiliteit van de bol in c.g.s. eenheden.

σ = specifieke geleiding van de bol in c.g.s. eenheden.

c = lichtsnelheid in cm /sec.

y is een dimensieloos getal.

W = warmteontwikkeling in ergs per seconde.

We geven nog enige asymptotische betrekkingen voor grote en kleine waarden van het argument y :

$$F_1(y) \sim \frac{1}{3} - \frac{8}{945} y^4 \quad (y \downarrow 0) \quad ,$$

$$F_2(y) \sim \frac{2}{45} y^2 - \frac{8}{4725} y^6 \quad (y \downarrow 0) \quad .$$

Dus

$$W \sim \frac{\pi a^5}{15} \sigma \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{3\mu H_0}{\mu + 2} \right)^2 \quad (y \downarrow 0) \quad . \quad (33)$$

Verder geldt

$$F_1(y) \sim \frac{1}{2y} \quad , \quad F_2(y) \sim \frac{1}{2y} \quad (y \rightarrow \infty) \quad ,$$

waaruit volgt

$$W \sim \frac{3}{8} ca^2 H_0^2 \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\pi\sigma}} \quad (\mu \text{ constant, } \omega\sigma \rightarrow \infty) \quad , \quad (34)$$

$$W \sim \frac{3}{4} a^4 \frac{\omega}{c} H_0^2 \sqrt{\frac{2\pi\omega\sigma}{\mu}} \quad (\omega, \sigma \text{ constant, } \mu \rightarrow \infty) \quad . \quad (35)$$

B. Het lichaam is een cirkel-cilinder met straal a

We beschouwen nu het geval dat het metalen lichaam een cirkel-cilinder is, waarvan de as langs de z-as valt. Zij a de straal van de cilinder, en zij h de hoogte. We nemen de hoogte h groot t.o.v. de diameter en h klein t.o.v. de hoogte van de spoel. De ontwikkelde warmte zal in eerste benadering evenredig met h zijn. We kunnen het probleem waarschijnlijk goed benaderen door de primaire spoel en de cilinder oneindig lang te nemen. Randcorrecties worden dus verwaarloosd. Alle grootheden zijn onafhankelijk van z.

We voeren cilindercoördinaten (ρ, φ, z) in. In het lichaam heeft de stroomdichtheid \underline{I} alleen een φ -component, en het magneetveld \underline{H} alleen een z-component.

De beide Maxwell-vergelijkingen (in het metaal) luiden nu

$$I_{\varphi} = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \quad , \quad (36)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho I_{\varphi}) = -\frac{j\omega\sigma\mu}{c} H_z \quad . \quad (37)$$

We differentiëren de tweede vergelijking naar ρ en substitueren het gevonden resultaat in de eerste vergelijking. Dan krijgen we voor I_{φ} de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 I_{\varphi}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dI_{\varphi}}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) I_{\varphi} = 0 \quad , \quad (38)$$

met

$$k = \sqrt{\frac{4\pi\omega\sigma\mu}{c^2}} e^{-j\pi/4} \quad . \quad (39)$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor de Besselfunctie van de eerste orde met argument $k\rho$. Daar de totale warmteontwikkeling eindig moet blijven, kan alleen $J_1(k\rho)$ gebruikt worden.

We stellen dus

$$I_{\varphi} = \alpha J_1(k\rho) \quad . \quad (40)$$

Daar

$$J_1(k\rho) = -\frac{1}{k} \frac{d}{d\rho} J_0(k\rho) \quad ,$$

volgt uit (36)

$$H_z = \frac{4\pi\alpha}{ck} J_0(k\rho) + \text{constante} \quad , \quad (41)$$

Dat de constante gelijk is aan nul is eenvoudig te zien met behulp van vergelijking (37).

Buiten het cilindervormige lichaam is H_z constant en gelijk aan H_0 . De evenredigheidsconstante α is te bepalen uit de voorwaarde dat H_z continu door gaat bij overgang van het lichaam naar vacuum. Dus (in het lichaam)

$$H_z = H_0 \frac{J_0(k\rho)}{J_0(ka)} \quad , \quad (42)$$

$$I_\varphi = \frac{cH_0}{4\pi} \frac{kJ_1(k\rho)}{J_0(ka)} = - \frac{c}{4\pi} \frac{dH_z}{d\rho} \quad . \quad (43)$$

We schrijven nu

$$k = \beta e^{-j\pi/4} \quad \text{met} \quad \beta = \sqrt{\frac{4\pi\omega\sigma\mu}{c^2}} \quad . \quad (44)$$

Nu is, in een bekende notatie,

$$J_0(ze^{-j\pi/4}) = \text{ber}(z) + j \text{bei}(z) = J_0(ze^{\frac{3}{4}\pi j}) \quad . \quad (45)$$

Daarmee vinden we in het metaal:

$$H_z = H_0 \frac{\text{ber}(\beta\rho) + j \text{bei}(\beta\rho)}{\text{ber}(\beta a) + j \text{bei}(\beta a)} \quad , \quad (46)$$

$$I_\varphi = - \frac{c}{4\pi} H_0 \beta \frac{\text{ber}'(\beta\rho) + j \text{bei}'(\beta\rho)}{\text{ber}(\beta a) + j \text{bei}(\beta a)} \quad . \quad (47)$$

We merken op dat met het accent differentiatie bedoeld wordt naar het argument $\beta\rho$.

De complexe power P wordt in dit geval (per cm hoogte)

$$\begin{aligned} P &= - \frac{c}{4\pi\sigma} \iint [I, H^*]_\rho dS = - \frac{c}{4\pi\sigma} I_\varphi(\rho=a) \cdot H_z(\rho=a) \cdot 2\pi a = \\ &= \frac{c^2 H_0^2}{8\pi\sigma} \beta a \frac{\text{ber}'(\beta a) + j \text{bei}'(\beta a)}{\text{ber}(\beta a) + j \text{bei}(\beta a)} \quad . \quad (48) \end{aligned}$$

We voeren nu de volgende afkortingen in:

$$\begin{aligned} x &= \beta a \quad , \\ f_1(x) &= x \frac{\text{ber}(x)\text{ber}'(x) + \text{bei}(x)\text{bei}'(x)}{\text{ber}^2(x) + \text{bei}^2(x)} \quad , \\ f_2(x) &= x \frac{\text{ber}(x)\text{bei}'(x) - \text{bei}(x)\text{ber}'(x)}{\text{ber}^2(x) + \text{bei}^2(x)} \quad . \end{aligned} \quad (49)$$

Dan is

$$P = \frac{c^2 H_0^2}{8\pi\sigma} \{f_1(x) + jf_2(x)\} \quad . \quad (50)$$

Per seconde is de ontwikkelde warmte in het cilindervormige lichaam ter lengte h

$$W = \frac{h}{2} \operatorname{Re} P = \frac{hc^2 H_0^2}{16\pi\sigma} f_1(x) \text{ ergs/sec.} \quad (51)$$

We kunnen deze uitkomst ook gemakkelijk in technische eenheden omwerken. Stel de spoel die het veld H_0 opwekt heeft w windingen per cm hoogte. Zij I_0 de stroomamplitudo per winding, dan is

$$H_0 = \frac{4\pi}{c} w I_0 ,$$

en dus

$$W = \frac{\pi h w^2 I_0^2}{\sigma} f_1(x) = \frac{1}{2} R I_0^2 . \quad (52)$$

De extra weerstand (corresponderende met het warmteverlies veroorzaakt door de wervelstromen in het lichaam) die de primaire spoel erbij schijnt te krijgen is

$$R = \frac{2\pi w^2 h}{\sigma} f_1(x) . \quad (53)$$

Nu is h/σ gelijk aan de gelijkstroom weerstand R_0 per cm^2 draaddikte van het materiaal waarvan het lichaam gemaakt is. Daarin uitgedrukt is

$$R = 2\pi w^2 R_0 f_1(x) , \quad (54)$$

en

$$W = \pi f_1(x) w^2 R_0 I_0^2 = \pi f_1(x) R_0 I^2 , \quad (55)$$

waarin I de stroomsterkte per cm hoogte van de spoel is.

Voor $\mu \rightarrow \infty$ is de warmteontwikkeling evenredig met $\sqrt{\mu}$; dit in tegenstelling met het geval A waarbij de warmteontwikkeling evenredig bleek te zijn met $\mu^{-\frac{1}{2}}$. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat we in onze aanpak de cilinder oneindig lang namen, zodat we konden afzien van randcorrecties.

Hetzelfde probleem is behandeld door M. Divilkovsky in een artikel verschenen in de Journal of Physics (Moskou) 1939, Vol I, 5-6, pag 471.

Probleem IX

Gegeven zijn k getallen a_1, a_2, \dots, a_k ($k \geq 1$). We continueren de rij door te stellen dat ieder volgend element het rekenkundige gemiddelde is van de k voorafgaande elementen:

$$ka_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-k} \quad (n > k) \quad . \quad (1)$$

Gevraagd wordt te berekenen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Eerste oplossing

De vergelijking (1) is een homogene lineaire differentievergelijking van de orde k . Om deze vergelijking op te lossen bepalen we eerst de karakteristieke vergelijking. Substitueer daartoe in (1) $a_n = \lambda^n$. Dan vinden we

$$k\lambda^k = \lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \dots + \lambda + 1 \quad . \quad (2)$$

Duidelijk is $\lambda = 1$ een wortel van (2). Het is niet moeilijk aan te tonen dat de overige wortels binnen de eenheidscirkel liggen. We vervangen λ door $1/x$ en onderzoeken de ligging van de nulpunten van het polynoom

$$P(x) \equiv x^k + x^{k-1} + \dots + x^2 + x - k \quad . \quad (3)$$

Stel $|x| \leq 1$, $x \neq 1$. Dan zijn x, x^2, \dots, x^k vectoren met lengte ≤ 1 . De lengte van de somvector is dus kleiner dan k (als $|x| = 1$ dan vallen de vectoren x, x^2, \dots niet in elkaars verlengde). Dit betekent dat, uitgezonderd $x = 1$, de nulpunten van $P(x)$ buiten de eenheidscirkel liggen.

We tonen nu aan dat (2) geen meervoudige wortels heeft, of - wat hetzelfde is - dat $P(x)$ geen meervoudige nulpunten heeft. Differentiatie van $P(x)$ geeft

$$P'(x) = kx^{k-1} + (k-1)x^{k-2} + \dots + 2x + 1 \quad .$$

Dus

$$(x-1)P'(x) = kx^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x^2 - x - 1 \quad .$$

Met (3) volgt dan

$$(x^2 - x)P'(x) + P(x) = k(x^{k+1} - 1) \quad . \quad (4)$$

Als x een dubbel nulpunt is van $P(x)$ dan geldt $P(x) = P'(x) = 0$, en dus $x^{k+1} = 1$. Nu is $x = 1$ het enige nulpunt van $P(x)$ op de eenheidscirkel en $P'(1) \neq 0$.

Hiermee is aangetoond dat de vergelijking (2) enkelvoudige wortels heeft die, uitgezonderd $\lambda = 1$, binnen de eenheidscirkel liggen. Laten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ deze wortels zijn.

Dan is de algemene oplossing van de differentievergelijking

$$a_n = \alpha + \beta_1 \lambda_1^n + \beta_2 \lambda_2^n + \dots + \beta_{k-1} \lambda_{k-1}^n \quad (n \geq 1) \quad (5)$$

De k constanten die in deze oplossing voorkomen kunnen worden bepaald uit de waarden van a_1, a_2, \dots, a_k .

Alleen de α is van belang aangezien uit $|\lambda_i| < 1$ volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (6)$$

Om α te bepalen gaan we als volgt te werk. We zoeken eerst de vergelijking (van de graad $k-1$) waarvan de wortels zijn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$. Hiertoe delen we $P(x)$ door $(x-1)$ en vervangen daarna x door $1/\lambda$. We vinden zo de vergelijking

$$1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \dots + (k-1)\lambda^{k-2} + k\lambda^{k-1} = 0 \quad (7)$$

Met (5) en (7) volgt dan

$$\sum_{n=1}^k n a_n = \alpha \sum_{n=1}^k n + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \sum_{n=1}^k n \lambda_i^n = \frac{\alpha}{2} k(k+1) \quad .$$

Dus

$$\alpha = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + ka_k}{\frac{1}{2}k(k+1)} \quad (8)$$

Tweede oplossing

Stel

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (9)$$

Uit de begrensdsheid van de rij (a_n) volgt dat de reeks convergeert voor $|x| < 1$.

We geven de partiële sommen van de reeks aan met $F_\ell(x)$:

$$F_\ell(x) = \sum_{n=1}^{\ell} a_n x^n \quad (\ell \geq 1) \quad .$$

We drukken nu $F(x)$ uit in $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$ met behulp van de relatie (1).

$$\begin{aligned} kF(x) &= kF_k(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} ka_n x^n = kF_k(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-k}) x^n = \\ &= kF_k(x) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell \sum_{n=k+1-\ell}^{\infty} a_n x^n = kF_k(x) + \left(\sum_{\ell=1}^k x^\ell \right) F(x) - \sum_{\ell=1}^{k-1} x^\ell F_{k-\ell}(x) \quad . \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$F(x) = \frac{\sum_{\ell=1}^{k-1} x^{\ell} F_{k-\ell}(x) - kF_k(x)}{x + x^2 + \dots + x^k - k} \quad (10)$$

De functie $F(x)$, die analytisch is voor $|x| < 1$, kan dus analytisch worden voortgezet in het gehele x -vlak en heeft daar enkelvoudige polen in de nulpunten x_1, x_2, \dots, x_k van het polynoom $P(x)$ (zie (3)). Zij $-\alpha$ het residu van $F(x)$ in $x = 1$. Dan is de functie $F(x) + \alpha/(x-1)$ analytisch binnen een zekere cirkel om $x = 0$ met straal r groter dan 1. Voor $|x| < r$ bezit $F(x) + \alpha/(x-1)$ een reeksontwikkeling

$$F(x) + \frac{\alpha}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (|x| < r) \quad (11)$$

Ontwikkel nu $(x-1)^{-1}$ naar opklimmende machten van x , $|x| < 1$, dan volgt uit (9) en (11) dat

$$b_n = a_n - \alpha \quad (n \geq 1), \quad b_0 = -\alpha.$$

Dus

$$F(x) + \frac{\alpha}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha)x^n - \alpha \quad (|x| < r) \quad (12)$$

Daar de bovenstaande reeks convergeert voor $x = 1$ moet blijkbaar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

Het residu $-\alpha$ van $F(x)$ in $x = 1$ vinden we door de noemer van de rechterkant van (10) naar x te differentiëren en daarna in de breuk $x = 1$ in te vullen

$$-\alpha = \frac{\sum_{\ell=1}^{k-1} F_{k-\ell}(1) - kF_k(1)}{1 + 2 + 3 + \dots + k} \quad (13)$$

Nu geldt

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{k-1} F_{k-\ell}(1) - kF_k(1) &= \sum_{\ell=1}^{k-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-\ell}) - k(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = \\ &= -(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + ka_k) \end{aligned}$$

Dus

$$\alpha = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k}{\frac{1}{2}k(k+1)} \quad (14)$$

X. Een integraalvergelijking

Gegeven is de integraalvergelijking

$$g(a) = \frac{8}{\pi a^2} \int_0^{2a} \rho r(\rho) d\rho \int_0^{\arccos(\rho/2a)} \sin^2 \theta d\theta \quad . \quad (1)$$

Hierin is $a \geq 0$ en $g(a)$ een bekende functie, gedefinieerd voor $a \geq 0$. De functie $r(\rho)$ is onbekend en moet uit (1) worden opgelost voor $\rho \geq 0$.

Deze integraalvergelijking werd bestudeerd door A. Marriage and E. Pitts (Res. Lab. Kodak, England) in een artikel verschenen in J.O.S.A. 46 (1956) 1019 - 1027. In dit optisch probleem is g de granularity (korreligheid) en r de autocorrelation. In hun artikel kwamen ze tot de uitspraak "A solution of the integral equation in closed form cannot easily be found".

Hieronder zal (1) worden opgelost in "closed form".

Oplossing

We gaan eerst de kern van de integraalvergelijking vereenvoudigen.

Stel $x = \cos \theta$ dan gaat (1) over in

$$\frac{\pi a^2}{8} g(a) = \int_0^{2a} \rho r(\rho) d\rho \int_{\rho/2a}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad . \quad (2)$$

Verwisseling van de integratievolgorde geeft

$$\frac{\pi a^2}{8} g(a) = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{2ax} \rho r(\rho) d\rho \quad . \quad (3)$$

We voeren nu een nieuwe onbekende functie $f(s)$ in:

$$f(s) = \int_0^s \rho r(\rho) d\rho \quad . \quad (4)$$

Als f bekend is, dan is r eenvoudig door differentiatie te vinden. Onze integraalvergelijking krijgt zo de eenvoudige gedaante

$$\frac{\pi a^2}{8} g(a) = \int_0^1 f(2ax) \sqrt{1-x^2} dx \quad . \quad (5)$$

Dit lijkt veel op een integraalvergelijking van Abel (waar de $\sqrt{\quad}$ echter in de noemer voorkomt).

We voeren een nieuwe integratievariabele y in door te stellen $y = bx$ met $b = 2a$. Dan krijgen we

$$\frac{\pi a^2}{8} g(a) = \frac{1}{b^2} \int_0^b f(y) \sqrt{b^2 - y^2} dy \quad (6)$$

We voeren een nieuwe, bekende, functie $h(b)$ in

$$h(b) = b^2 \frac{\pi (b/2)^2}{8} g\left(\frac{b}{2}\right), \quad b = 2a \quad (7)$$

Dan wordt (6)

$$h(b) = \int_0^b f(y) \sqrt{b^2 - y^2} dy \quad .$$

Differentiatie naar b geeft

$$\frac{h'(b)}{b} = \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b^2 - y^2}} dy \quad (8)$$

Dit is een integraalvergelijking van Abel (zie b.v. Sneddon: Mixed boundary value problems in potential theory (1966) pag. 41), waarvan de oplossing is

$$f(s) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{ds} \left[\int_0^s \frac{h'(b) db}{\sqrt{s^2 - b^2}} \right] \quad (9)$$

Met (4) volgt dan

$$f'(s) = sr(s) = \frac{2}{\pi} \frac{d^2}{ds^2} \left[\int_0^s \frac{h'(b)}{\sqrt{s^2 - b^2}} db \right] \quad (10)$$

Hiermee is r in een gesloten vorm opgelost. Bij de afleiding van (10) is verondersteld dat de functie g voldoende glad is.

Het is duidelijk dat formule (10) niet erg geschikt is voor het numeriek bepalen van de "correlation curve" $r(\rho)$. We proberen nu een numeriek aantrekkelijke formule af te leiden met behulp van reeksontwikkelingen. We veronderstellen eerst dat de functie $g(a)$ ontwikkeld kan worden in een machtreeks:

$$g(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n \quad (11)$$

Dan volgt met formule (7)

$$h(b) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \alpha_{n-4} \left(\frac{b}{2}\right)^n,$$

en

$$h'(b) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=3}^{\infty} (n+1) \alpha_{n-3} \left(\frac{b}{2}\right)^n.$$

Ingevuld in formule (10) krijgen we

$$r(\rho) = \frac{2}{\pi \rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left[\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\pi}{4} \frac{(n+1) \alpha_{n-3}}{2^n} \int_0^{\rho} \frac{b^n}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} db \right]. \quad (12)$$

De integraal in het rechterlid van (12) kan worden uitgedrukt in gamma functies door te substitueren $b = \rho \sin \varphi$ (zie Whittaker-Watson pag. 256):

$$\int_0^{\rho} \frac{b^n}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} db = \rho^n \int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi = \frac{\rho^n}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

We merken op dat dit resultaat ook geldt als n niet geheel is, mits $n > -1$.

Ingevuld in (12) vinden we na enige herleiding

$$r(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{2^{n+3}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(3 + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{n}{2})} \alpha_n \rho^n. \quad (13)$$

Men ziet eenvoudig in dat de convergentiestraal van deze reeksontwikkeling voor $r(\rho)$ een factor twee groter is dan die van de ontwikkeling van $g(a)$.

Uit het voorafgaande volgt eveneens dat voor willekeurige $n > -1$ geldt:

$$g(a) = a^n \Leftrightarrow r(\rho) = \frac{n+2}{2^{n+3}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(3 + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{n}{2})} \rho^n. \quad (14)$$

Vanwege de continuïteit beperken we ons tot $n \geq 0$.

We hebben dus aangetoond dat de lineaire integraalvergelijking (1) eigenfuncties a^n heeft met bijbehorende eigenwaarden

$$\lambda_n = \frac{n+2}{2^{n+3}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(3 + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{n}{2})} \quad (n \text{ reëel, } n \geq 0).$$

Met de functie $g(a) = \sum_n g_n a^n$ correspondeert dus éénéénduidig de functie

$$r(\rho) = \sum_n \lambda_n g_n \rho^n.$$

Indien bijv. de g -kromme goed benaderd kan worden met een of ander polynoom, dan is de r -kromme eenvoudig numeriek te bepalen.

XI. Probleem afkomstig uit gasontladingen

Probleem. De functie $\varphi(x,y)$ voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\Delta\varphi + k^2 f(\varphi) = 0$$

en voldoet verder aan de volgende voorwaarden

- : binnen de eenheidscirkel is φ glad,
- : φ is rotatie-symmetrisch,
- : in het middelpunt van de eenheidscirkel is φ gelijk aan a ($0 < a < 1$),
- : op de rand van de eenheidscirkel is φ gelijk aan 0.

De volgende drie functies $f(\varphi)$ zullen worden onderzocht

$$f_1(\varphi) = \varphi(1-\varphi)$$

$$f_2(\varphi) = \frac{\varphi^2(1-\varphi)}{\varphi(1-\varphi) + \delta} \quad 0 \leq \delta \leq 3$$

$$f_3(\varphi) = \varphi(1-\varphi) \frac{(\varphi + \frac{\gamma}{\beta})}{(\varphi + \gamma)} \quad \begin{array}{l} 4.5 < \beta < 8 \\ 0 < \gamma < 10 \end{array}$$

Gevraagd: 1) De kleinste positieve k .

2) $E = \iint \varphi dw$, waar dw het oppervlakte-element is en de integratie over de eenheidscirkel plaats vindt.

Analyse. Invoeren van poolcoördinaten geeft ($\varphi = \varphi(r)$, $0 \leq r \leq 1$)

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{r} \dot{\varphi} + k^2 f(\varphi) = 0$$

$$\varphi(0) = a, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0.$$

Door de substitutie $x = kr$ wordt het eigenwaardeprobleem omgezet in een beginvoorwaardeprobleem ($\varphi(r) \Rightarrow u(x)$), nl.

$$I \quad \ddot{u} + \frac{1}{x} \dot{u} + f(u) = 0$$

$$u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Gevraagd wordt het kleinste positieve nulpunt van $u(x)$, dit is dan tevens de gevraagde k ($u(k) = 0$).

De oplossing $u(x)$ is een even functie in x , derhalve voeren wij in

$$t = \frac{x^2}{4} \quad (u(x) \rightarrow y(t), \quad T = \frac{k^2}{4})$$

Dit geeft

$$\text{II} \quad \begin{aligned} t\ddot{y} + \dot{y} + f(y) &= 0 \\ y(0) &= a, \quad \dot{y}(0) = -f(a). \end{aligned}$$

Gevraagd de T waarvoor $y(T) = 0$.

Enig inzicht in het gedrag van $y(t)$ voor de drie functies $f(y)$ kan verkregen worden door II éénmaal te integreren. Dit geeft

$$\text{III} \quad \dot{y} = -\frac{1}{t} \int_0^t f(y(\tau)) d\tau \quad y(0) = a.$$

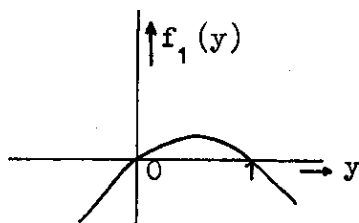
Uit de gestelde beginvoorwaarde $0 < y(0) < 1$ volgt uit III voor alle drie gevallen dat $y(t)$ monotoon dalend is tot het kleinste positieve nulpunt, immers voor $0 < y < 1$ is voor alle drie gevallen $f(y) > 0$. Tevens wordt dit kleinste positieve nulpunt bereikt voor eindige t . Dit kan ingezien worden door de substitutie $t = e^x$. De differentiaalvergelijking II gaat dan over in

$$y_{xx} e^{-x} + f(y) = 0.$$

Omdat voor $0 < y < 1$: $y_t < 0$ en ook $y_{xx} < 0$ treedt het kleinste positieve nulpunt op voor eindige t .

Opmerking. In het gestelde probleem is $0 < y(0) < 1$ en wordt alleen $y(t)$ tot het kleinste positieve nulpunt gevraagd. Omdat beginvoorwaarden buiten dit gebied en het gedrag van $y(t)$ na het kleinste positieve nulpunt interessant is gaan wij dit in het kort na voor de drie functies $f(y)$.

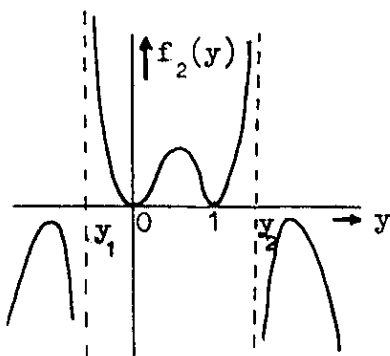
Geval I.



Er bestaat een $a_1 < 0$ zodanig dat voor

- : $a_1 < y(0) < 1$ de functie $y(t)$ slingert om $y = 0$,
- : $y(0) < a_1$ en $y(0) > 1$ de functie $y(t)$ monotoon toeneemt voor $t > 0$.
- : $y(0) = a_1$ $y(t)$ asymptotisch nadert tot $y = 1$.

Geval II.

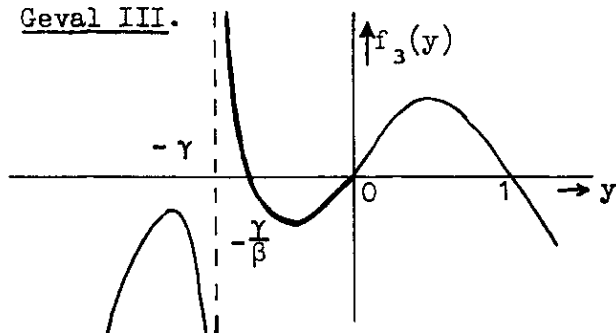


$$y_{1,2} = +\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\delta}.$$

Voor $y(0) < y_2$ slingert de functie $y(t)$ om $y = y_1$ mits de integraal in III voor $y \rightarrow y_2$ naar oneindig gaat. Indien de functie $y(t)$ uitdempt dan

zijn er een eindig aantal eigenwaarden. Voor $y(0) > y_2$ is $y(t)$ monotoon toenemend voor $t > 0$.

Geval III.



Er bestaat een $a_1 < -\gamma$ zodanig dat voor

: $a_1 < y(0) < 1$ $y(t)$ slingert om $y = 0$ of om $y = -\gamma$.

: $y(0) < a_1$ en $y(0) > 1$ de functie monotoon toeneemt voor $t > 0$.

Het gedrag voor $a \rightarrow 0$ en $a \rightarrow 1$.

Geval I. Voor $f_1(u)$ is

$$\frac{df_1}{du}(u=0) = 1 \quad .$$

Derhalve wordt voor $a \rightarrow 0$ de benadering $f_1(u) = u$ ingevoerd. De differentiaalvergelijking I wordt dan

$$\ddot{u} + \frac{1}{x} \dot{u} + u = 0 \quad u(0) = a \quad .$$

Dit is de nulde orde Bessel differentiaalvergelijking, waarvoor het kleinste positieve nulpunt is $k_0 = 2,408\dots$. Verder is

$$\frac{df_1}{du}(u=1) = -1 \quad .$$

De functie $f_1(u)$ wordt daarom voor $a \uparrow 1$ gelineariseerd door $f_1(u) = -(u-1)$. Dit geeft de differentiaalvergelijking

$$\ddot{u} + \frac{1}{x} \dot{u} - u + 1 = 0 \quad u(0) = 0$$

waarvan de oplossing is

$$u(x) = 1 - (1-a)I_0(x) \quad .$$

Voor grote waarden van x vervangen wij de gemodificeerde Besselfunctie $I_0(x)$ door zijn asymptotische hoofdterm, dit is e^x , en vinden

$$k(a) \sim -\log(1-a) \quad (a \uparrow 1)$$

Het zal blijken dat de benadering

$$k_{app} = k_0 - \log(1-a) \quad 0 \leq a < 1$$

een goede benadering is van k .

Geval II. Hier is

$$\frac{df_2}{du}(u=0) = 0 \quad .$$

Voeren wij voor $a \rightarrow 0$ de benadering $f_2(u) = \varepsilon u$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) in, dan wordt de differentiaalvergelijking

$$\ddot{u} + \frac{1}{x} \dot{u} + \varepsilon u = 0 \quad .$$

Dit wordt na de transformatie $x = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} p$

$$u_{pp} + \frac{u_p}{p} + u = 0$$

met als eerste nulpunt $p = 2.408\dots$. Dus voor $\varepsilon \rightarrow 0$ gaat het eerste nulpunt van $u(x)$ naar oneindig.

Voor $a \uparrow 1$ vinden wij overeenkomstig geval I dat het nulpunt van $u(x)$ naar ∞ gaat.

Geval III. $\frac{df_3}{du}(u=0) = \frac{1}{\beta}$. Daarom wordt voor $a \rightarrow 0$ $f_3(u)$ gelineariseerd door $\frac{1}{\beta} u$. Op dezelfde wijze als in geval I en II vinden wij dat het kleinste positieve nulpunt voor $a \rightarrow 0$ nadert tot $k = 2.408 \sqrt{\beta}$.

Voor $a \uparrow 1$ vinden wij weer dat het eerste positieve nulpunt nadert tot oneindig.

De numerieke benadering.

Door de transformatie $y(t) = av(t)$ wordt de differentiaalvergelijking II

$$tv_{tt} + v_t + g(v) = 0$$

IV

$$v(0) = 1, \quad v_t(0) = -g(1)$$

waarin $g(v)$ resp.

$$g_1(v) = v(1 - av)$$

$$g_2(v) = \frac{v^2(1 - av)^2}{v(1 - av) + \delta/a}$$

$$g_3(v) = v(1 - av) \frac{(av + \gamma/\beta)}{(av + \gamma)} \quad .$$

Terwille van de numerieke behandeling (i.v.m. interpolatie-moeilijkheden) worden de onafhankelijke variabele en de afhankelijke variabele geïnverteerd. De differentiaalvergelijking II wordt daardoor (in de notatie wordt t door y vervangen en v door x)

$$y_{xx} - \frac{1}{y} (y_x)^2 \{1 + g(x)y_x\} = 0$$

$$y(1) = 0, \quad y_x(1) = -\frac{1}{g(1)} .$$

De gevraagde grootte E is na al deze transformaties geworden

$$E = -\frac{\pi a}{T} \int_1^0 y(x) dx .$$

Voeren wij in

$$y_3(x) = \int_1^x y(\zeta) d\zeta$$

dan is

$$\frac{dy_3}{dx} = y(x) \quad \text{en} \quad E = -\frac{\pi a}{T} y_3(0) \quad \text{als} \quad y_3(1) = 0 .$$

Tenslotte wordt het volgende stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen gevonden

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 & y_1(1) &= 0 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \begin{cases} \frac{(y_2)^2}{y_1} \{1 + g(x)y_2\} & \text{als } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} \frac{g_x(1)}{g^2(1)} & \text{als } x = 1 \end{cases} & y_2(1) &= -\frac{1}{g(1)} \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 & y_3(1) &= 0 \end{aligned}$$

Dit stelsel is met een Runge-Kutta methode numeriek geïntegreerd, waarbij bepaald zijn de gevraagde grootheden (in 5 decimalen nauwkeurig)

$$k = 2 \sqrt{g_1(0)}$$

$$E = -\frac{\pi a}{T} y_3(0) .$$

Thans zal nog onderzocht worden of er een tweede mogelijkheid bestaat voor het bepalen van de kleinste positieve eigenwaarde k en de energie E van het gestelde probleem. Alleen voor de functie $f_1(\varphi) = \varphi(1-\varphi)$ zal dit worden nagegaan.

Na het invoeren van poolcoördinaten en vervolgens de transformatie $x = kr$ werd de probleemstelling: bepaal het kleinste positieve reële nulpunt van de functie $u(x)$ welke functie voldoet aan

$$u'' + \frac{1}{x} u' + u(1-u) = 0$$

met de beginwaarde

$$u(0) = a, \quad u'(0) = 0 \quad 0 < a < 1.$$

Getracht zal worden of wij voor de functie $u(x)$ in de omgeving van $x = 0$ de convergente machtreeks, zo deze bestaat, kunnen bepalen.

Hiertoe voeren wij eerst nog de volgende transformaties uit

$$t = \frac{1}{4} x^2 \quad (\text{immers } u(x) \text{ is een even functie})$$

en

$$u(x) = \frac{1}{2} + y(t).$$

Dit geeft

$$ty'' + y' + \frac{1}{4} = y^2$$

$$y(0) = a - \frac{1}{2}, \quad y'(0) = a(a-1).$$

Laten wij aannemen dat y in de omgeving van $t = 0$ ontwikkeld kan worden in de convergente machtreeks

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(a) t^n.$$

Dit in de differentiaalvergelijking gesubstitueerd geeft de volgende recurrente betrekkingen

$$a_0 = a - \frac{1}{2}, \quad a_1 = a(a-1), \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=0}^n a_m a_{n-m} \quad (n > 0).$$

De coëfficiënten a_n zijn dus polynomen in a van de graad $n+1$. Dit betekent dat het convergentiegebied van de machtreeks afhankelijk is van de beginwaarden, en dat derhalve de plaats van de singulariteiten in het complexe x -vlak ook afhankelijk is van de beginwaarde, dit zijn de zg. moving singularities. Voor lineaire differentiaalvergelijkingen weten wij dat het

convergentiegebied van de machtreeks ontwikkeling van de oplossing voor een bepaald punt onafhankelijk is van de beginwaarden en dat ook de plaats van de singulariteiten onafhankelijk van de beginwaarden is.

Ondanks de afhankelijkheid van de beginwaarden in dit geval kunnen wij gemakkelijk aantonen dat voor $0 < a < 1$ de machtreeks convergent is voor $|t| < 2$, dus dat in dit gebied geen moving singularities kunnen optreden indien $0 < a < 1$. Immers met inductie kan aangetoond worden dat

$$|a_n| \leq 2^{-n-1} \quad \text{voor } 0 < a < 1$$

en dat de machtreeks derhalve convergeert voor $|t| < 2$, oftewel dat de functie $u(x)$ holomorfe is voor $|x| < 2\sqrt{2}$. Dus het bepalen van het kleinste positieve reële nulpunt van $u(x)$ met behulp van de gevonden machtreeks ontwikkeling is in ieder geval correct als wij vinden dat dit nulpunt kleiner is dan $2\sqrt{2}$.

De coëfficiënten a_n worden nader beschouwd. Zoals te verwachten was is $a_n(0) = a_n(1) = 0$ ($n > 0$). Immers voor $a = 0$ en $a = 1$ zijn de oplossingen respectievelijk $u = 0$ en $u = 1$. Verder blijkt de volgende betrekking te bestaan

$$a_n(1-a) = (-1)^{n+1} a_n(a)$$

hetgeen betekent dat er een zekere symmetrie bestaat tussen de eigenfuncties met de complementaire beginwaarden a en $1-a$. Deze betrekking kan met behulp van de gevonden uitdrukkingen voor de coëfficiënten bewezen worden, het volgt echter ook direct uit de probleemstelling. Immers de oplossing $y(t)$ is door de beginwaarde $y(0) = a - \frac{1}{2}$ éénduidig bepaald, verder zien wij dat als $y(t)$ een oplossing is, dat dan ook $-y(-t)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking kan zijn, dit betekent dat als de beginwaarde $y(0) = -(a - \frac{1}{2}) = (1-a) - \frac{1}{2}$ is, dat dan vanwege de eenduidigheid, de oplossing $-y(-t)$ moet zijn. Dus

$$y_{(1-a)-\frac{1}{2}}(t) = -y_{a-\frac{1}{2}}(-t) \quad (\text{de indices betreffen de beginwaarden})$$

of

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-a)(t)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(a)(-1)^{n+1} t^n,$$

dus

$$a_n(1-a) = (-1)^{n+1} a_n(a).$$

De oplossing $u_{1-a}(x)$ kan dus worden uitgedrukt met de coëfficiënten van de machtreeks ontwikkeling van $u_a(x)$

$$u_a(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(a) \left(\frac{1}{4}x^2\right)^n$$

$$u_{1-a}(x) = 1 - a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n(a) \left(\frac{1}{4}x^2\right)^n .$$

Oftewel tussen de analytische voortzettingen van de twee eigenfuncties bestaat de relatie

$$u_{1-a}(x) = 1 - u_a(ix)$$

waar x complex en i de imaginaire eenheid is. Dus de machtreeks ontwikkelingen van $u_a(x)$ en $u_{1-a}(x)$ hebben dezelfde convergentiestraal maar ook kunnen de singulariteiten van de ene verkregen worden uit de andere door een draaiing over negentig graden in het complexe vlak.

Wij beschouwen verder alleen het speciale geval $a = \frac{1}{2}$. De oplossing $y(t)$ is dan een oneven functie van t ,

$$a_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (n \geq 0) .$$

Wij noemen

$$b_n = (-1)^n a_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (n > 0) .$$

De recurrente betrekkingen worden dan

$$b_1 = \frac{1}{4}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{m=1}^n b_m b_{n-m+1} \quad (n > 0)$$

zodat $b_n > 0$ ($n \geq 1$). Een klassiek resultaat van Vivanti en Pringsheim zegt dat de functie

$$f(s) = iy_{\frac{1}{2}}(is) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^{2n-1}$$

singuliere punten heeft in $s = \pm \sigma$, waar σ de (eindige) convergentiestraal van deze reeks is. Het is moeilijk om σ te bepalen zonder gebruik te maken van numerieke technieken. Bijvoorbeeld de functie $f(s)$ is de oplossing van het beginwaardenprobleem

$$sf'' + f' = \frac{1}{4} + f^2, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{1}{4} .$$

Het is gebleken dat in de loop van de numerieke integratie voor $s \geq 0$ de oplossing zeer snel toenam bij ongeveer $s = 8.86$, hetgeen er op duidt dat σ iets kleiner dan 9 zal zijn. Wij zullen aantonen dat

$$6 \leq \sigma \leq \sqrt{96} .$$

De aangegeven ondergrens is correct indien wij aantonen dat

$$b_n \leq \frac{9}{(36)^n} .$$

Voor $n = 1, 2$ geldt het gelijkteken. Neem aan dat voor $n = 1, 2, \dots, m$ deze relatie juist is, dan volgt uit de gegeven recurrente betrekkingen voor b_n dat

$$b_{m+1} \leq \frac{9^m}{(2m+1)^2} \cdot \frac{9}{36^{m+1}} .$$

Omdat de eerste factor niet groter is dan 1 voor $m \geq 1$, is dus met inductie bewezen dat

$$b_n \leq \frac{9}{(36)^n} .$$

Voor de bovengrens is het voldoende dat wij bewijzen dat

$$b_n \geq \frac{24n}{(96)^n} .$$

Voor $n = 1$ geldt het gelijkteken. Als de ongelijkheid juist is voor alle gehele getallen tot en met n , dan is

$$\begin{aligned} b_{n+1} &\geq \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{m=1}^n \frac{24m}{(96)^m} \cdot \frac{24(n-m+1)}{(96)^{n-m+1}} = \\ &= \frac{24(n+1)}{(96)^{n+1}} \left[\frac{24}{(n+1)(2n+1)^2} \sum_{m=1}^n m(n-m+1) \right] . \end{aligned}$$

De som in de uitdrukking tussen haken is gelijk aan $n(n+1)(n+2)/6$, dus deze uitdrukking wordt $4n(n+2)(2n+1)^{-2}$, hetgeen groter is dan 1 voor iedere n , waarmee is aangetoond dat de bovengrens juist is.

De twee singulariteiten van $f(s)$ in $s = \pm \sigma$ corresponderen met vier singulariteiten van $u_{\frac{1}{2}}(x)$, nl. $x = \pm \sqrt{2\sigma}(1 \pm i)$; $u_{\frac{1}{2}}(x)$ is dus holomorf binnen de cirkel met straal $2\sqrt{\sigma}$ (≈ 5.95) en middelpunt in de oorsprong. Berekend is met zowel de numerieke integratiemethode als met de reeksontwikkeling dat voor $a = \frac{1}{2}$ de eigenwaarde $k(\frac{1}{2}) = 3.038\dots$, zodat het corresponderende nulpunt van $u_{\frac{1}{2}}(x)$ binnen de convergentiecirkel ligt van de machtreeks ontwikkeling.

XII. Nulpunten van een functie

Een functie $f(t)$ is gedefinieerd voor $0 < t < 1$ en is eigenlijk of oneigenlijk Riemann integreerbaar over dit interval. Verder is gegeven dat

$$\left. \begin{array}{l} f(t) > 0 \\ f'(t) \text{ bestaat en } \geq 0 \\ f'(t) \text{ is monotoon niet-dalend} \end{array} \right\} 0 < t < 1 .$$

Dan heeft de functie $F(x)$, gedefinieerd door

$$F(x) = \int_0^1 f(t) \cos xt \, dt , \quad (1)$$

tenminste één nulpunt in elk der intervallen

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right], \dots .$$

Bewijs

$F(x)$ is gedefinieerd voor elke x ; $F(0) > 0$, $F(x) = F(-x)$. Voor $x > 0$ voeren we in (1) een nieuwe integratievariabele u in door $xt = \frac{1}{2} \pi u$:

$$F(x) = \frac{\pi}{2x} \int_0^{\frac{2x}{\pi}} f\left(\frac{\pi u}{2x}\right) \cos \frac{1}{2} \pi u \, du . \quad (2)$$

Stel $x = (m + \frac{1}{2} \theta) \pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $0 < \theta \leq 1$).

Dan geldt

$$\operatorname{sgn} F(m\pi + \frac{1}{2} \theta \pi) = \operatorname{sgn} \int_0^{2m+\theta} f\left(\frac{u}{2m+\theta}\right) \cos \frac{1}{2} \pi u \, du ; \quad (3)$$

(met $\operatorname{sgn} a$ is bedoeld het teken van het getal a).

Het integratievak $[0, 2m + \theta]$ splitsen we in $m + 1$ intervalletjes

$$\int_0^{2m+\theta} = \int_0^2 + \int_2^4 + \dots + \int_{2m-2}^{2m} + \int_{2m}^{2m+\theta} .$$

Met de substitutie $u = 2r - 1 + s$ krijgen we

$$\int_{2r-2}^{2r} f\left(\frac{u}{2m+\theta}\right) \cos \frac{1}{2} \pi u \, du = (-1)^r \int_{-1}^1 f\left(\frac{2r-1+s}{2m+\theta}\right) \sin \frac{1}{2} \pi s \, ds = (-1)^r v_r ,$$

met

$$v_r = \int_{-1}^1 f\left(\frac{2r-1+s}{2m+\theta}\right) \sin \frac{1}{2} \pi s \, ds = \int_0^1 \left\{ f\left(\frac{2r-1+s}{2m+\theta}\right) - f\left(\frac{2r-1-s}{2m+\theta}\right) \right\} \sin \frac{1}{2} \pi s \, ds .$$

Met de substitutie $u = 2m + s$ vinden we

$$\int_{2m}^{2m+\theta} f\left(\frac{u}{2m+\theta}\right) \cos \frac{1}{2} \pi u \, du = (-1)^m \int_0^\theta f\left(\frac{2m+s}{2m+\theta}\right) \cos \frac{1}{2} \pi s \, ds = (-1)^m w_m . \quad (5)$$

Dus

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} F(m\pi + \frac{1}{2} \theta \pi) &= \operatorname{sgn} \left\{ (-1)^m w_m + \sum_{r=1}^m (-1)^r v_r \right\} \\ &= \operatorname{sgn} [(-1)^m \{ w_m + (v_m - v_{m-1}) + \dots \}] . \end{aligned} \quad (6)$$

De laatste term tussen $\{ \}$ is $(v_2 - v_1)$ of v_1 . Als $m=0$ dan is de som

$\sum_{r=1}^m (-1)^r v_r$ leeg en staat tussen de $\{ \}$ in formule (6) alleen de term w_0 .

Nu geldt $w_m > 0$. We tonen nu aan dat $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \dots \leq v_m$ ($m \geq 1$).

$$v_r = \int_0^1 \left\{ f\left(\frac{2r-1+s}{2m+\theta}\right) - f\left(\frac{2r-1-s}{2m+\theta}\right) \right\} \sin \frac{1}{2} \pi s \, ds \quad (1 \leq r \leq m) .$$

Aangezien $f'(t) \geq 0$, is $f(t)$ een monotoon niet-dalende functie zodat de integrand in de bovenstaande integraal nergens negatief is. Hieruit volgt $v_r \geq 0$. Om de monotonie aan te tonen gaan we als volgt te werk. Uit de gegevens volgt dat $f(t)$ en $f'(t)$ een limiet hebben voor $t \downarrow 0$. We mogen dus aannemen - zonder de algemeenheid van onze probleemstelling geweld aan te doen - dat $f(t)$ in $t = 0$ rechts-continu en rechts-differentieerbaar is. Beschouw nu v_r als functie van een continue variabele r . Omdat $\theta > 0$ mogen we onder het integraalteken differentiëren en vinden

$$\frac{dv_r}{dr} = \int_0^1 \left\{ f'\left(\frac{2r-1+s}{2m+\theta}\right) - f'\left(\frac{2r-1-s}{2m+\theta}\right) \right\} \frac{2}{2m+\theta} \sin \frac{1}{2} \pi s \, ds \quad (1 \leq r \leq m) .$$

Aangezien $f'(t)$ monotoon niet-dalend is volgt $\frac{dv_r}{dr} \geq 0$, dus $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_m$. Hiermee is bewezen dat

$$\operatorname{sgn} F(m\pi + \frac{1}{2} \theta \pi) = \operatorname{sgn} [(-1)^m] \quad \text{voor } m = 0, 1, \dots \text{ en } 0 < \theta \leq 1 .$$

Conclusie

$F(x) > 0$ in de intervallen $(0, \frac{\pi}{2}]$, $(2\pi, \frac{5}{2}\pi]$, $(4\pi, \frac{9}{2}\pi]$, ...

$F(x) < 0$ in de intervallen $(\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $(3\pi, \frac{7}{2}\pi]$, $(5\pi, \frac{11}{2}\pi]$, ...

Aangezien $F(x)$ continu is, heeft $F(x)$ dus tenminste één nulpunt in elk van de intervallen $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$,

Voorbeeld

$$f(t) = 1$$

Dan $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ met nulpunten in $x = n\pi$.

$$f(t) = t$$

$$\text{Dan } F(x) = \frac{1}{x} \left[\sin x - \frac{1 - \cos x}{x} \right] = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x}{x} \left[\cos \frac{x}{2} - \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right].$$

Hier heeft $F(x)$ nulpunten in $x = 2n\pi$ en nulpunten in die waarden van x waarvoor $x \cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$.

Toepassing op de Besselfunctie $J_\nu(x)$

$$J_\nu(x) = \frac{2(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xt dt \quad (\text{Re } \nu > -\frac{1}{2}).$$

Voor $-\frac{1}{2} < \nu \leq \frac{1}{2}$ voldoet $f(t) = (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ aan de gegevens van onze probleemstelling. Dus geldt:

$J_\nu(x)$ heeft voor elke vaste waarde van ν uit $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tenminste één nulpunt in elk der intervallen $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$, ...

Het bewijs dat in het boek van Watson gegeven wordt op pag. 478-479 is niet geheel correct. De bewering van Watson is dat de nulpunten van $J_\nu(x)$ voor ν in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ liggen in de open intervallen

$$(\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{3}{2}\pi, 2\pi), \dots .$$

Voor $\nu = \frac{1}{2}$ is dit duidelijk fout ($f(t) = 1$).

Wel geldt dat voor ν vast in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de nulpunten van $J_\nu(x)$ liggen in de open intervallen $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$,

XIII. Een volume-integraal

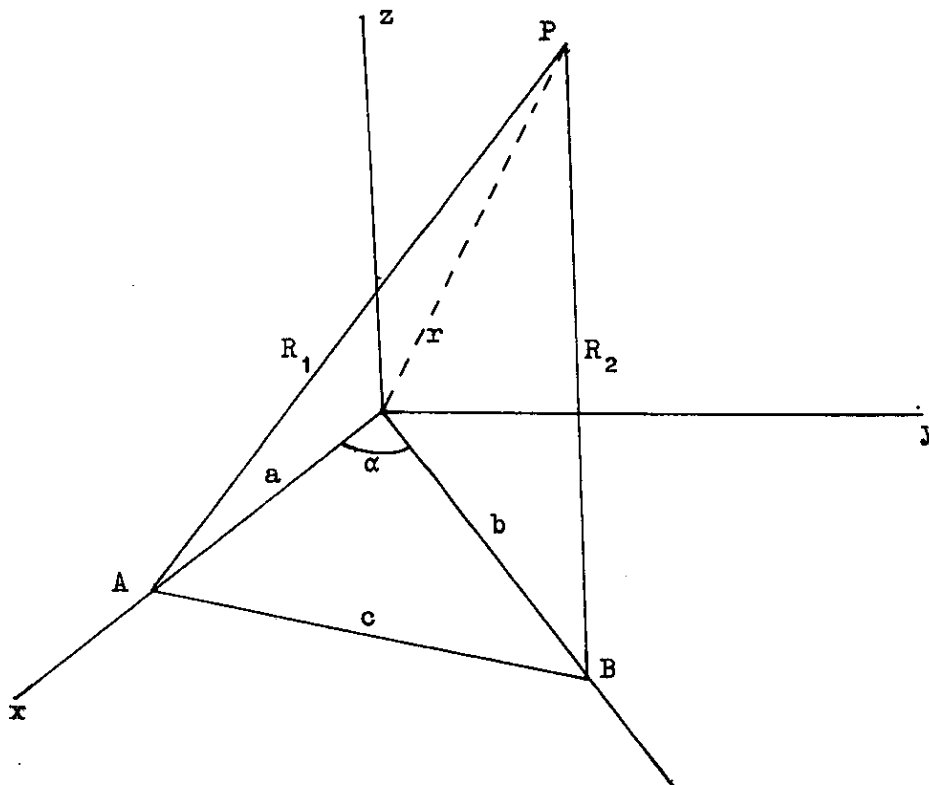
De bedoeling is een zekere volume-integraal met een gecompliceerde integrand om te werken tot een dubbelintegraal met in de integrand elementaire functies.

Zij $I(a,b,\alpha)$ de functie van a , b en α gedefinieerd door

$$I(a,b,\alpha) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} \frac{\operatorname{erf}(R_1)}{R_1} \frac{\operatorname{erf}(R_2)}{R_2} dx dy dz, \quad (1)$$

waarin geïntegreerd wordt over de gehele ruimte.

R_1 is de afstand van het punt $A(a,0,0)$ tot het punt $P(x,y,z)$; R_2 is de afstand van het punt $B(b \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$ tot het punt P . Zie onderstaande figuur.



In

$$\operatorname{erf}(R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^R e^{-t^2} dt$$

substitueren we $t = Ru$. Dan krijgen we

$$\frac{\operatorname{erf}(R)}{R} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-R^2 u^2} du. \quad (2)$$

Ingevuld in (1) vinden we

$$I(a,b,\alpha) = \frac{4}{\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} \left[\int_0^1 e^{-R_1^2 u^2} du \int_0^1 e^{-R_2^2 v^2} dv \right] dx dy dz .$$

Verwisseling van integratievolgorde geeft

$$I(a,b,\alpha) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \left[\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-(r^2 + R_1^2 u^2 + R_2^2 v^2)} dx dy dz \right] du dv . \quad (3)$$

Uit de figuur zien we dat

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 , \quad R_1^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 , \quad R_2^2 = (x-b \cos \alpha)^2 + (y-b \sin \alpha)^2 + z^2 .$$

Dus

$$r^2 + R_1^2 u^2 + R_2^2 v^2 = (1+u^2+v^2)(x^2+y^2+z^2) - 2(au^2 + b \cos \alpha v^2)x + - 2b \sin \alpha v^2 y + a^2 u^2 + b^2 v^2 .$$

Kwadraat afsplitsen geeft

$$r^2 + R_1^2 u^2 + R_2^2 v^2 = (1+u^2+v^2) \left\{ \left(x - \frac{au^2 + b \cos \alpha v^2}{1+u^2+v^2} \right)^2 + \left(y - \frac{b \sin \alpha v^2}{1+u^2+v^2} \right)^2 + z^2 \right\} + \{ a^2 u^2 + b^2 v^2 + (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) u^2 v^2 \} (1+u^2+v^2)^{-1} .$$

Met $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ volgt dan

$$I(a,b,\alpha) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 e^{-(a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 u^2 v^2)} (1+u^2+v^2)^{-1} f(u,v) du dv ,$$

met

$$f(u,v) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-(1+u^2+v^2) \left\{ \left(x - \frac{au^2 + b \cos \alpha v^2}{1+u^2+v^2} \right)^2 + \left(y - \frac{b \sin \alpha v^2}{1+u^2+v^2} \right)^2 + z^2 \right\} \right] dx dy dz$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -(1+u^2+v^2)t^2 \} dt \right]^3 = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} .$$

Dus

$$I(a,b,\alpha) = 4\sqrt{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-(a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 u^2 v^2)} (1+u^2+v^2)^{-1}}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} du dv . \quad (4)$$

Deze vorm is zeer geschikt voor numerieke berekeningen.

XIV. Over de berekening van het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring*)

1. Inleiding

We beginnen met het geven van resultaten van numerieke berekeningen voor het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring in de vrije ruimte.

In rechthoekige coördinaten (x,y,z) zij de cirkel (straal a) gegeven door de vergelijkingen

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

In deze cirkel vloeit een constante gelijkstroom ter grootte i , in de positieve zin. Het veld van deze stroom is kennelijk rotatiesymmetrisch om de z -as. In bijbehorende cylindercoördinaten (z,r,φ) , met $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, is het veld gekarakteriseerd door de componenten H_z en H_r , die alleen van z en r afhangen, terwijl $H_\varphi = 0$ is. Bekend is dat H_z en H_r elementaire functies zijn op de z -as; in de rest van de ruimte kan men H_z en H_r uitdrukken in elementaire functies en complete elliptische integralen van de eerste en tweede soort. Hoe men tot de expliciete uitdrukkingen voor H_z en H_r komt, wordt later in detail behandeld. Voor numerieke resultaten raadplege men tabellen I en II. Deze tabellen geven H_z en H_r als functies van z/a en r/a in dimensieloze eenheden.

Als eenheid van veldsterkte is daarbij aangenomen

$$H_0 = \frac{i}{2a},$$

zijnde de veldsterkte H_z in het middelpunt van de cirkel. Is i gemeten in ampères, a in meters, dan is H_0 uitgedrukt in ampères per meter. Er worden uitsluitend gerationaliseerde Giorgi-eenheden gebruikt.

*) C.J. Bouwkamp: Over de berekening van het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring (rapport T.H.E. 1957).

Numerieke waarden van H_z/H_0 als functie van z/a en r/a .
 Hierbij is H_0 het veld in het middelpunt van de cirkel:

$$H_0 = \frac{i}{2a} \text{ ampère/meter} = H_z(0,0).$$

(H_z is een even functie van z).

z/a r/a	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0
0.0	1.0000	0.9429	0.8004	0.6305	0.4761	0.3536	0.2624	0.1964	0.1489	0.1145	0.0894	0.0316
0.2	1.0312	0.9653	0.8065	0.6255	0.4676	0.3455	0.2561	0.1918	0.1456	0.1123	0.0878	0.0313
0.4	1.1412	1.0386	0.8187	0.6044	0.4391	0.3207	0.2373	0.1784	0.1362	0.1057	0.0832	0.0303
0.6	1.4106	1.1761	0.8068	0.5470	0.3837	0.2782	0.2070	0.1572	0.1216	0.0954	0.0760	0.0288
0.8	2.2570	1.2991	0.6731	0.4442	0.2972	0.2198	0.1676	0.1304	0.1031	0.0826	0.0669	0.0268
1.0	$\pm \infty$	0.4252	0.3100	0.2406	0.1911	0.1536	0.1243	0.1012	0.0829	0.0683	0.0567	0.0244
1.2	-1.0648	-0.3882	-0.0193	0.0742	0.0941	0.0921	0.0833	0.0730	0.0631	0.0541	0.0463	0.0218
1.4	-0.4021	-0.2822	-0.1118	-0.0151	0.0282	0.0452	0.0498	0.0487	0.0453	0.0409	0.0364	0.0192
1.6	-0.2119	-0.1764	-0.1054	-0.0448	-0.0063	0.0150	0.0255	0.0298	0.0306	0.0295	0.0276	0.0165
1.8	-0.1294	-0.1155	-0.0829	-0.0481	-0.0206	-0.0019	0.0096	0.0161	0.0192	0.0203	0.0202	0.0140
2.0	-0.0862	-0.0796	-0.0631	-0.0429	-0.0245	-0.0100	0.0002	0.0069	0.0110	0.0132	0.0142	0.0117
3.0	-0.0211	-0.0206	-0.0191	-0.0168	-0.0141	-0.0112	-0.0083	-0.0057	-0.0034	-0.0014	0.0001	0.0037

T A B E L II

Numerieke waarden van H_r/H_0 als functie van z/a en r/a .
 Hierbij is E_0 het veld in het middelpunt van de cirkel:

$$E_0 = \frac{i}{2a} \text{ ampère/meter} = H_z(0,0) \cdot$$

E_z is een oneven functie van z .

z/a	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.0000	0.0581	0.0865	0.0852	0.0699	0.0527	0.0383	0.0275	0.0198	0.0144	0.0106	0.0028
0.4	0.0000	0.1439	0.1971	0.1800	0.1404	0.1028	0.0736	0.0526	0.0379	0.0276	0.0204	0.0055
0.6	0.0000	0.3221	0.3619	0.2865	0.2067	0.1457	0.1027	0.0731	0.0527	0.0385	0.0286	0.0079
0.8	0.0000	0.8106	0.5860	0.3825	0.2548	0.1742	0.1218	0.0868	0.0630	0.0465	0.0348	0.0100
1.0	∞	1.5239	0.6945	0.4096	0.2662	0.1820	0.1284	0.0927	0.0682	0.0510	0.0387	0.0116
1.2	0.0000	0.6796	0.5049	0.3416	0.2369	0.1688	0.1230	0.0911	0.0685	0.0522	0.0403	0.0128
1.4	0.0000	0.2376	0.2806	0.2381	0.1860	0.1425	0.1090	0.0838	0.0649	0.0506	0.0398	0.0135
1.6	0.0000	0.1036	0.1524	0.1542	0.1356	0.1126	0.0913	0.0733	0.0587	0.0471	0.0379	0.0138
1.8	0.0000	0.0533	0.0875	0.0992	0.0960	0.0858	0.0736	0.0617	0.0512	0.0423	0.0349	0.0138
2.0	0.0000	0.0307	0.0534	0.0652	0.0677	0.0643	0.0581	0.0508	0.0437	0.0371	0.0314	0.0135
3.0	0.0000	0.0046	0.0087	0.0122	0.0148	0.0165	0.0173	0.0175	0.0171	0.0163	0.0153	0.0096

2. Berekening van het veld uit een vector-potentiaal

De differentiaalvergelijkingen voor het magneetveld \underline{H} , bij gegeven stroomdichtheid \underline{i} , zijn

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{i} \quad \text{div}(\mu \underline{H}) = 0 \quad ,$$

waarin μ de magnetische permeabiliteit van de ruimte is.

Probeer een hulpvector \underline{A} te vinden, zódanig dat $\mu \underline{H} = \text{rot } \underline{A}$. Als dat gelukt, dan is automatisch aan de tweede vergelijking voldaan. Substitutie in de eerste vergelijking (μ is constant) geeft dan

$$\text{rot rot } \underline{A} = \mu \underline{i} \quad .$$

Nu geldt, in rechthoekige componenten,

$$\text{rot rot } \underline{A} = \text{grad div } \underline{A} - \Delta \underline{A} \quad ,$$

waarin Δ de Laplace-operator is. We proberen nu \underline{A} nog te laten voldoen aan $\text{div } \underline{A} = 0$. Als dat kan, vinden we voor \underline{A} de Poisson-vergelijking

$$\Delta \underline{A} = - \mu \underline{i} \quad .$$

Een particuliere oplossing hiervan, die in het oneindige naar nul gaat, is gegeven door

$$\underline{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\underline{i}}{R} dV \quad ,$$

waarbij R de afstand is van het bronpunt tot het veldpunt.

Deze vector \underline{A} heet de vectorpotentiaal van de stroomdichtheid \underline{i} . Inderdaad controleert men gemakkelijk dat voor deze vector $\text{div } \underline{A} = 0$ is, omdat $\text{div } \underline{i} = 0$ is. Daarmee hebben we een formalisme om \underline{H} in zijn bronnen \underline{i} uit te drukken, te weten,

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \underline{A} \quad , \quad \underline{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\underline{i}}{R} dV \quad . \quad (1)$$

Deze formules gaan we nu toepassen op het geval van de cirkelvormige stroomkring. De functie \underline{i} is nu geconcentreerd in de cirkel. Een punt van de cirkel heeft tot coördinaten

$$z = 0 \quad , \quad r = a \quad , \quad \varphi = \alpha \quad .$$

De afstand van dit punt tot het veldpunt (z, r, φ) is

$$R = \sqrt{z^2 + a^2 - 2 a r \cos(\varphi - \alpha) + r^2} \quad .$$

Is $ds = a d\alpha$ het boogelement van de cirkel, dan is $\underline{i} dV = i \underline{s} ds$, waarbij \underline{s} de raaklijneenheidsvector aan de cirkel is. De componenten van \underline{s} zijn

$$s_x = -\sin \alpha, \quad s_y = \cos \alpha, \quad s_z = 0.$$

De vectorpotentialiaal van de cirkelvormige stroomkring is nu, volgens vergelijking (1),

$$\underline{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \int \frac{\underline{s}}{R} d\alpha,$$

waarbij de integratie over de hele cirkel moet worden genomen. Het is duidelijk dat $A_z = 0$ is. Uit symmetrie-overwegingen ziet men gemakkelijk dat ook $A_r = 0$ is, omdat de bijdragen van spiegelpunten ten opzichte van het vlak door veldpunt en z-as elkaar precies opheffen voor wat de component A_r aangaat. De vectorpotentialiaal heeft dus alleen een van-nul-verschillende φ -componente. Bovendien is A_φ onafhankelijk van φ . We kunnen dus volstaan met het berekenen van A_φ op de plaats $y = 0$ ($\varphi = 0$). Deze is precies gelijk aan A_φ . Dus

$$A_\varphi = \frac{\mu i a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha + r^2}}.$$

Deze en soortgelijke integralen kunnen we met de theorie van Besselfuncties berekenen.

Is $z > 0$, dan geldt

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} = \int_0^\infty e^{-zt} J_0(bt) dt. \quad (2)$$

Verder gebruiken we het additie-theorema dezer functies:

$$J_0(t\sqrt{a^2 - 2ar \cos \alpha + r^2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(at) J_m(rt) \cos(m\alpha), \quad (3)$$

waaruit volgt

$$\int_0^{2\pi} J_0(t\sqrt{a^2 - 2ar \cos \alpha + r^2}) \cos \alpha d\alpha = 2\pi J_1(at) J_1(rt).$$

Zo vinden we, voor $z > 0$,

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{\mu i a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^\infty e^{-zt} J_0(t\sqrt{a^2 - 2ar \cos \alpha + r^2}) dt \\ &= \frac{\mu i a}{4\pi} \int_0^\infty e^{-zt} dt \int_0^{2\pi} J_0(t\sqrt{a^2 - 2ar \cos \alpha + r^2}) \cos \alpha d\alpha \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \mu i a \int_0^{\infty} e^{-zt} J_1(at) J_1(rt) dt .$$

Kennelijk is A_{φ} een even functie van z . Dus geldt algemeen:

$$A_{\varphi} = \frac{1}{2} \mu i a \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_1(at) J_1(rt) dt . \quad (4)$$

De overblijvende integraal kan worden uitgedrukt in complete elliptische integralen van de eerste en de tweede soort:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} , \quad (5)$$

respectievelijk

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi . \quad (6)$$

Men vindt

$$\int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_1(at) J_1(rt) dt = \frac{1}{\pi \sqrt{ar}} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\} \quad (7)$$

met

$$k = \left\{ \frac{4ar}{z^2 + (a+r)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} . \quad (8)$$

Dan wordt de vectorpotentiaal

$$A_z = 0 , \quad A_r = 0 ,$$

$$\begin{aligned} A_{\varphi} &= \frac{\mu i}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\} \\ &= \frac{\mu i}{2\pi r} \sqrt{z^2 + (a+r)^2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K - E \right\} . \end{aligned} \quad (9)$$

Het bijbehorende magnetische veld vindt men uit

$$\mu H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) , \quad \mu H_r = - \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} , \quad H_{\varphi} = 0 .$$

Men vindt, na enige manipulaties,

$$H_z = \frac{1}{2} i a \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_1(at) J_0(rt) t dt , \quad (10)$$

$$H_r = \frac{1}{2} ia \operatorname{sgn} z \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_1(at) J_1(rt) t dt . \quad (11)$$

Ook deze integralen kunnen in de functies E en K worden uitgedrukt. Men heeft:

$$H_z = \frac{ik}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{ar}} \left\{ K - E + \frac{\frac{1}{2} k^2 E}{1 - k^2} \left(\frac{a}{r} - 1 \right) \right\} + \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a+r)^2}} \left\{ K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{z^2 + (a+r)^2} E \right\} , \quad (12)$$

$$H_r = \frac{ikza}{4\pi(ar)^{3/2}} \left\{ \frac{1 - \frac{1}{2} k^2}{1 - k^2} E - K \right\} = \frac{i}{2\pi r} \frac{z}{\sqrt{z^2 + (a+r)^2}} \left\{ \frac{z^2 + a^2 + r^2}{z^2 + (a-r)^2} E - K \right\} . \quad (13)$$

3. Berekening van het veld uit een scalaire potentiaal

De methode van berekening met behulp van de vectorpotentiaal uit het voorgaande is algemeen. Zijn de bronnen i echter geconcentreerd in een gesloten ruimte-kromme, dan bestaat er ook nog een andere methode, die samenhangt met de ruimtehoek waaronder men de ruimte-kromme vanuit het veldpunt ziet. Deze samenhang wordt nu beschouwd. Voor de transformatie hebben we een hulpstelling nodig.

Hulpstelling

Zij φ een scalaire functie gedefinieerd in de omgeving van F (tweezijdig oppervlak door de gesloten ruimte-kromme C) die daar tenminste eenmaal continue-differentieerbaar is. Dan geldt

$$\int \varphi \underline{s} ds = \int \underline{n} x \operatorname{grad} \varphi df .$$

Bewijs:

Zij a een constante vector. Dan is

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \int \varphi \underline{s} ds &= \int \varphi \underline{a} \cdot \underline{s} ds \\ &= \int \underline{n} \cdot \operatorname{rot}(\varphi \underline{a}) df , \end{aligned}$$

waarbij het laatste gelijkteken geldt op grond van de stelling van Stokes:

$$\int \underline{v} \cdot \underline{s} \, ds = \int \underline{n} \times \text{rot } \underline{v} \, df \quad (\text{met } \underline{v} = \varphi \underline{a}) .$$

Verder heeft men

$$\begin{aligned} \text{rot}(\varphi \underline{a}) &= \varphi \text{rot } \underline{a} + \text{grad } \varphi \times \underline{a} \\ &= \text{grad } \varphi \times \underline{a} \end{aligned}$$

(\underline{a} is constant, dus $\text{rot } \underline{a} = \underline{0}$).

Men vindt zo

$$\underline{a} \cdot \int \varphi \underline{s} \, ds = \int \underline{n} \cdot (\text{grad } \varphi \times \underline{a}) \, df .$$

De rechter integrand is het bekende triple- of volume-product. Daarvoor kunnen we door cyclische verwisseling ook schrijven:

$$\underline{n} \cdot (\text{grad } \varphi \times \underline{a}) = \underline{a} \cdot (\underline{n} \times \text{grad } \varphi) .$$

Derhalve geldt

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \int \varphi \underline{s} \, ds &= \int \underline{a} \cdot (\underline{n} \times \text{grad } \varphi) \, df \\ &= \underline{a} \cdot \int \underline{n} \times \text{grad } \varphi \, df \end{aligned}$$

(in de middelste integraal kunnen we de constante vector \underline{a} vóór het integraalteken brengen). Bovenstaande relatie geldt voor elke \underline{a} . Dan moet ook gelden

$$\int \varphi \underline{s} \, ds = \int \underline{n} \times \text{grad } \varphi \, df ,$$

hetgeen te bewijzen was.

Uit het voorafgaande weten we dat het magneetveld van de stroomkring C kan worden berekend met behulp van de formule

$$\underline{H} = \frac{i}{4\pi} \text{rot} \int \frac{\underline{s}}{R} \, ds .$$

Pas nu de hulpstelling toe voor $\varphi = 1/R$. Dan vindt men

$$\underline{H} = \frac{i}{4\pi} \text{rot} \int \underline{n} \times \text{grad}' \frac{1}{R} \, df .$$

Hierbij is met een accent aangegeven dat de gradiënt-operator werkt op de integratiecoördinaten; gradiënt zonder accent wil zeggen dat we naar de veldpuntcoördinaten moeten differentiëren.

Bekend is dat geldt

$$\text{grad}' \frac{1}{R} = - \text{grad} \frac{1}{R} .$$

Daarmee vindt men voor het magneetveld

$$\underline{H} = \frac{i}{4\pi} \text{rot} \int (\text{grad } \frac{1}{R}) \underline{x} \, df .$$

Verder gebruiken we weer

$$\text{rot}(\varphi \underline{n}) = \varphi \text{rot } \underline{n} + (\text{grad } \varphi) \underline{x} .$$

Bedenken we dat $\text{rot } \underline{n} = \underline{0}$ is (\underline{n} hangt niet van de veldpuntcoördinaten af, en naar deze coördinaten differentiëren we), en nemen we $\varphi = 1/R$, dan wordt

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{i}{4\pi} \text{rot} \text{rot} \int \frac{\underline{n}}{R} \, df \\ &= \frac{i}{4\pi} \{ \text{grad div} - \Delta \} \int \frac{\underline{n}}{R} \, df . \end{aligned}$$

Ligt het veldpunt niet op F, dan is

$$\Delta \int \frac{\underline{n}}{R} \, df = \int \underline{n} \Delta \left(\frac{1}{R} \right) df = \underline{0} ,$$

omdat $1/R$ aan de potentiaalvergelijking voldoet ($R \neq 0$).

Buiten F geldt dus de voorstelling

$$\underline{H} = \frac{i}{4\pi} \text{grad div} \int \frac{\underline{n}}{R} \, df . \quad (14)$$

Daarmee is aangetoond dat het magnetische veld van de gesloten stroomkring C kan worden berekend uit een scalaire potentiaal

$$\underline{H} = - \text{grad } \psi , \quad \psi = - \frac{i}{4\pi} \text{div} \int \frac{\underline{n}}{R} \, df . \quad (15)$$

Bij een bepaalde keuze van F is ψ eenduidig bepaald. De functie ψ is, anders dan de vectorpotentiaal \underline{A} , geen reguliere functie van de plaats. Alleen buiten F is het een reguliere functie; F is een oppervlak van discontinuïteit van ψ , een snede voor ψ . Daarentegen is $\text{grad } \psi$ wel weer regulier buiten C. De potentiaal ψ is meerduidig, zolang we het oppervlak F niet specificeren. Is de kromme C een vlakke kromme, dan ligt het voor de hand om voor F het inwendige van C te nemen. In het geval van de cirkel vindt men aldus de eenvoudige uitdrukking

$$\psi = - \frac{i}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{df}{R} ,$$

waarbij de integraal over de cirkelschijf wordt uitgestrekt. Deze integraal kunnen we weer transformeren met behulp van Besselfuncties. De afstand R van het veldpunt (z, r, φ) tot het integratiepunt $(0, \rho, \alpha)$ is

$$R = \sqrt{z^2 + r^2 - 2rp \cos(\varphi - \alpha) + \rho^2} ,$$

zodat

$$\frac{1}{R} = \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(t \sqrt{r^2 - 2rp \cos(\varphi - \alpha) + \rho^2}) dt .$$

Integreren we dit over φ dan is het resultaat

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) J_0(\rho t) dt ,$$

als we formule (3) gebruiken. Vervolgens

$$\begin{aligned} \int \frac{df}{R} &= \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) dt \int_0^a \rho J_0(\rho t) d\rho \\ &= 2\pi a \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) J_1(at) t^{-1} dt , \end{aligned} \tag{16}$$

als men gebruik maakt van $\frac{d}{dx} (xJ_1) = xJ_0(x)$,

$$\text{en dus} \quad \int_0^a \rho J_0(\rho t) d\rho = at^{-1} J_1(at) .$$

De scalaire potentiaal is dus tenslotte

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{2} ia \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) J_1(at) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} ia \operatorname{sgn} z \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) J_1(at) dt . \end{aligned} \tag{17}$$

Berekent men \underline{H} nu met $H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ en $H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, dan vindt men inderdaad de formules (10) en (11) terug.

We merken op dat ψ een oneven functie van z is.

4. Samenhang met de ruimtehoek

De scalaire potentiaal ψ uit formule (15) kunnen we én fysisch én meetkundig interpreteren.

Voor punten buiten F kunnen we de operator div onder het integraalteken brengen. Bedenkt men dat geldt

$$\begin{aligned}\text{div}\left(\frac{\underline{n}}{R}\right) &= \underline{n} \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R} \text{div } \underline{n} \\ &= \underline{n} \cdot \text{grad } \frac{1}{R} = - \underline{n} \cdot \text{grad}' \frac{1}{R} ,\end{aligned}$$

dan vindt men voor de scalaire potentiaal

$$\psi = \frac{i}{4\pi} \int \underline{n} \cdot \text{grad}' \frac{1}{R} df .$$

Nu is de scalaire potentiaal van een magnetische dipool met moment \underline{dm} gegeven door

$$d\chi = \frac{1}{4\pi} \underline{dm} \cdot \text{grad}' \frac{1}{R} .$$

Beleggen we het oppervlak F met een moment ter dichtheid

$$\underline{m} = i \underline{n} ,$$

dan is $\underline{dm} = i \underline{n} df$,

en dan wordt de potentiaal van de homogene dipool laag

$$\chi = \frac{i}{4\pi} \int \underline{n} \cdot \text{grad}' \frac{1}{R} df = \psi .$$

Het magnetische veld van de stroomkring is dus identiek met dat van een homogene dubbellaag over F met een oppervlaktedichtheid gelijk aan de stroomsterkte. Aangezien een magnetische dubbellaag fysisch niet realiseerbaar is, en men wel een elektrische dubbellaag kan maken, kan men ook zeggen:

het magnetische veld van de stroom i in de kromme C is identiek met het elektrische veld van een homogene dubbellaag, ter dichtheid i , die C tot rand heeft. Tot zover de fysische betekenis van ψ .

Nu de geometrische betekenis van ψ .

Laat \underline{R} zijn de vector van ds naar het veldpunt.

Dan is

$$\text{grad}' \frac{1}{R} = - \frac{1}{R^2} \text{grad}' R = \frac{\underline{R}}{R^3} .$$

Men heeft dus

$$\psi = \frac{i}{4\pi} \int \frac{\underline{n} \cdot \underline{R}}{R^3} df = \frac{i}{4\pi} \int \frac{\cos(\underline{n}, \underline{R})}{R^2} df .$$

Als $\cos(\underline{n}, \underline{R})$ positief is, ziet men gemakkelijk in dat $\int \frac{\cos(\underline{n}, \underline{R})}{R^2} df$ gelijk is aan de ruimtehoek Ω die door C wordt opgespannen vanuit het veldpunt.

Immers, $d\Omega = \frac{\cos(\underline{n}, \underline{R})}{R^2} df$ is juist de projectie van df op de eenheidsbol rondom het veldpunt. De integraal kan wel negatief zijn. Laat men ook negatieve ruimtehoeken toe, dan geldt dus

$$\psi = \frac{i}{4\pi} \Omega \quad . \quad (18)$$

De scalaire potentiaal is dus $i/4\pi$ maal de ruimtehoek of schijnbare grootte van de stroomkring.

Aan formule (18) is duidelijk te zien dat ψ discontinu is aan het oppervlak F . Immers, aan de positieve zijde van F (de kant waar \underline{n} heen wijst) is $\Omega = \Omega_+ = 2\pi$, aan de andere kant is $\Omega = \Omega_- = -2\pi$. Dus

$$\psi_+ = \frac{1}{2}i \quad , \quad \psi_- = -\frac{1}{2}i \quad , \quad \psi_+ - \psi_- = i \quad .$$

De sprong in ψ is precies gelijk aan de stroom in C .

5. Slotopmerkingen en bibliografie

De scalaire potentiaal van een homogeen-geladen cirkelvormige schijf, met ladingsdichtheid q , is volgens (16)

$$\frac{q}{4\pi} \int \frac{df}{R} = \frac{1}{2} qa \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) J_1(at) \frac{dt}{t} \quad .$$

In tegenstelling tot de integralen (7), (10) en (11), is deze integraal niet uitdrukbaar in de functies K en E . We hebben voor haar berekening ook nog nodig de complete elliptische integraal van de derde soort

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1-p \sin^2 \psi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} \quad ,$$

die van twee parameters, p en k , afhangt.

Ook voor de berekening van de ruimtehoek Ω of de daarmee evenredige scalaire potentiaal ψ (formules (17) en (18)) moet men beschikken over tabellen van deze elliptische integraal van de derde soort.

Zonder in details te willen treden, merken we nog op dat de lijnen

$$rA_{\phi} = \text{constant}$$

samenvallen met de krachtlijnen. Deze magnetische krachtlijnen zijn de orthogonale trajectoriën van de oppervlakken

$$\psi = \text{constant} .$$

LITERATUUR

G.N. Watson, Theory of Bessel functions.

Dit is het standaardwerk van Bessel functies, waarin men bijvoorbeeld formules (2) en (3) vindt bewezen.

C. Heuman, Tabels of complete elliptic integrals.

J. Math. Phys. 20, 127 - 206 (1941).

Uitgebreide tabellen van de functies K en E, alsmede van de complete elliptische integraal van de derde soort.

C.J. Bouwkamp, On the mutual inductance of two parallel coaxial circles of circular cross-section.

Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam 51, 1280 - 1290 (1948);

Ind. Math. 10, 424 - 434 (1948).

Hier kan men de berekening van de integralen (4), (10), (11) en vele andere in termen van elliptische integralen vinden.

E. Weber, Electromagnetic fields. Theory and applications. Vol. I. Mapping of fields.

John Wiley & Sons, Inc., New York (1950).

Op pag. 140 ff. vindt men de formules (9), (12) en (13). Verder een uitgebreide literatuuropgave.

J.P. Blewett. Magnetic field configurations due to air core coils.

J. Appl. Phys. 18, 968 - 976 (1947).

Tabellen voor H_z .

G. Eason, B. Noble, I.N. Sneddon. On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions.

Phil. Trans. Roy. Soc. London. Series A. No. 935. Vol 247,

pp. 529 - 551, 19 april 1955.

Tallose integralen van het type (10), (11) numeriek getabelleerd. Ook de integralen (16) en (17). Tabellen I en II zijn overgenomen uit dit artikel.

Voor $z > 0$ geldt

$$\frac{2a}{i} H_z = a^2 \int_0^{\infty} e^{-zt} J_0(rt) J_1(at) t dt ,$$

$$\frac{2a}{i} H_r = a^2 \int_0^{\infty} e^{-zt} J_1(rt) J_1(at) t dt .$$

XV. Voortplanting van golven in golfpijpen

1. Ontwikkeling in modes

We beschouwen een golfpijp met oneindig goed geleidende wanden (fig 1.) en laten van links een golf, die gepolariseerd is in een richting loodrecht op het vlak van tekening, invallen.

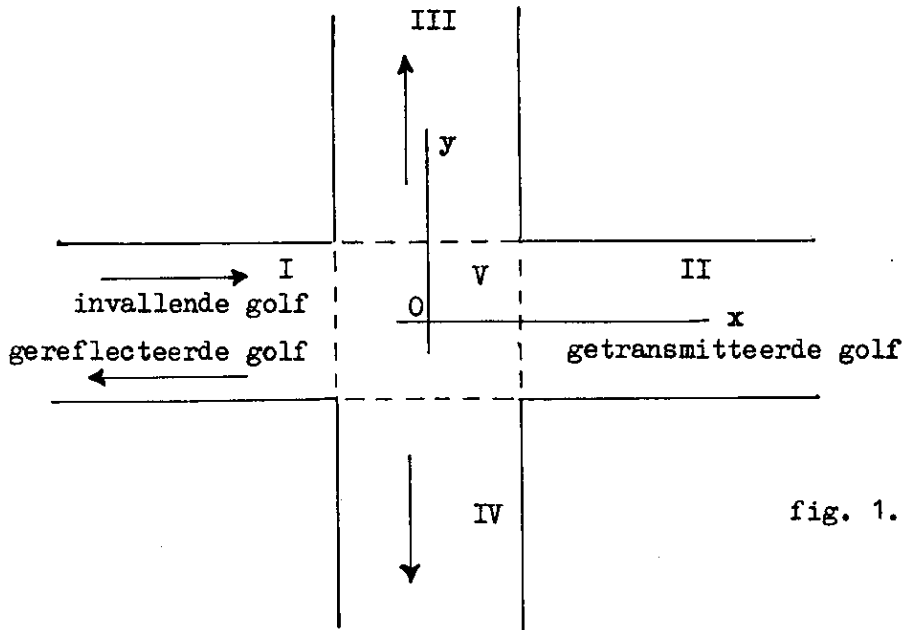


fig. 1.

Er ontstaan nu naast de invallende golf een aantal andere golven: nl. gereflecteerde golven, transmissiegolven en deflectiegolven. Het is de bedoeling om betrekkingen af te leiden tussen de reflectie-, transmissie- en deflectie-coëfficiënten, zodanig dat het probleem geschikt is voor numerieke berekening. Het veld is tijd-afhankelijk volgens $\exp(-i\omega t)$ met $k = \omega/c$; $c =$ lichtsnelheid.

Zij OXYZ een cartesisch coördinatenstelsel, met O in het centrum van het kruis; de Z-as is loodrecht op het vlak van tekening en wijst naar ons toe.

Daar de invallende golf gepolariseerd is zoals hiervoor aangegeven, worden de Maxwell-vergelijkingen

$$E_x = E_y = H_z = 0 \quad ,$$

$$ikH_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad ; \quad - ikH_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = ikE_z \quad .$$

Hieruit blijkt, dat ons probleem kan worden aangegeven als volgt: Bepaal de functie $\varphi = E_z$, die voldoet aan

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$$

en aan de door het probleem gestelde rand- en stralingsvoorwaarden.

Daar de wanden oneindig goed geleidend zijn ondersteld, moet $\varphi = 0$ zijn aan de randen.

We beschouwen nu de mogelijke modes in een oneindig lange pijp met breedte $a = \pi$ en kiezen een coördinatensysteem x', y' als aangegeven in fig. 2.

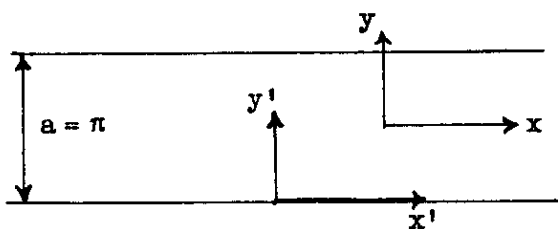


fig. 2.

Als n een positief geheel getal is, is de functie

$$\varphi_n \stackrel{\text{def}}{=} \sin ny' \exp[ix'\sqrt{k^2 - n^2}]$$

een oplossing van de golfvergelijking, die nul wordt voor $(y' = 0, \pi)$.

φ_n stelt een golf voor die zich in de x' -richting voortplant.

Als $k > n$ stelt φ_n een ongedempte golf voor, is $k < n$ een gedempte golf.

We zullen nu definiëren

$$\sqrt{k^2 - n^2} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (k^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} & \text{als } k > n \\ i(n^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} & \text{als } k < n \end{cases} .$$

Het + teken is in het laatste geval noodzakelijk, daar we in de positieve x' -richting een gedempte golf moeten hebben. Om resonantiemoeilijkheden te omzeilen zullen we aannemen, dat k geen positief geheel getal is. We stellen dan k complex met $\text{Im}k$ positief, maar klein. Dan is $\sqrt{k^2 - n^2}$ zo gedefinieerd dat

$$0 \leq \arg \sqrt{k^2 - n^2} \leq \frac{\pi}{2} .$$

Uit symmetrieoverwegingen verplaatsen we in het kruis het assenstelsel naar het midden en er volgt daar

$$x' = x + \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad y' = y + \frac{\pi}{2} :$$

$$\varphi_n = \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \exp\left[i\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{k^2 - n^2}\right] ,$$

of

$$\varphi_n = \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{2} \cos ny \exp[i(x + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - n^2}] & \text{voor } n \text{ oneven} \\ \cos \frac{n\pi}{2} \sin ny \exp[i(x + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - n^2}] & \text{voor } n \text{ even} \end{cases} .$$

De dominant mode wordt gevonden voor $n = 1$, dus

$$\varphi_1 = \cos y \exp[i(x + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - 1}] .$$

Daar deze dominant mode ongedempt is, is $k > 1$. Deze mode is verder een even functie van y . Dit houdt in dat de hele configuratie een even functie van y is.

In de gebieden I en II worden alleen modes met n oneven opgewekt.

In III en IV echter ontstaan de verstrooide modes. Deze worden verkregen door in I en II de coördinaten x en y te verwisselen, waarbij dan verder geldt dat hierbij een sommatie over alle natuurlijke getallen plaats vindt. We voeren nu een aantal coëfficiënten A_n , B_n , C_n en D_n in, om het totale veld over de gebieden I-IV vast te leggen. Er volgt dan:

Gebied I: $(-\infty < x \leq -\frac{\pi}{2}; |y| \leq \frac{\pi}{2})$

$$\varphi_I = \cos y \exp[i(x + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - 1}] + \sum_{n \text{ oneven} > 0} (B_n - D_n) \sin \frac{n\pi}{2} \cos ny \exp[-i(x + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - n^2}] .$$

Gebied II: $(\frac{\pi}{2} \leq x < \infty; |y| \leq \frac{\pi}{2})$

$$\varphi_{II} = \cos y \exp[i(x + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - 1}] + \sum_{n \text{ oneven} > 0} (B_n + D_n) \sin \frac{n\pi}{2} \cos ny \exp[i(x - \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - n^2}] .$$

Gebied III $(|x| \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq y < \infty)$

$$\begin{aligned} \varphi_{III} = & \sum_{n \text{ oneven} > 0} A_n \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx \exp[i(y - \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - n^2}] - \\ & - \sum_{n \text{ even} > 0} C_n \cos \frac{n\pi}{2} \sin nx \exp[i(y - \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - n^2}] . \end{aligned}$$

Gebied IV: $(|x| \leq \frac{\pi}{2}, -\infty < y \leq -\frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} \varphi_{IV} = & \sum_{n \text{ oneven} > 0} A_n \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx \exp[-i(y + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - n^2}] - \\ & - \sum_{n \text{ even} > 0} C_n \cos \frac{n\pi}{2} \sin nx \exp[-i(y + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - n^2}] . \end{aligned}$$

Als we deze ontwikkelingen nader bekijken, dan zien we dat φ_1 in de gebieden III en IV nul is en in I en II: $\cos y \exp[i(x + \frac{\pi}{2})\sqrt{k^2 - 1}]$.

Voor $x = -\frac{\pi}{2}$ is $\varphi_1 = \cos y$, d.w.z. de invallende golf heeft een amplitude 1, zodra hij gebied V binnenkomt.

De secundaire velden in de gebieden I/IV zijn ontwikkeld in oneindig voortlopende reeksen. Overal zijn de factoren die de phase vastleggen zodanig gekozen, dat ze 1 worden op de rand van V.

In bovenstaande formules zijn de coëfficiënten A_n , B_n , C_n en D_n nog onbekend. Het is duidelijk, dat in gebied I de reflectiecoëfficiënten R_n als volgt zijn vastgelegd:

$$R_n = 0 \quad (n \text{ even}) ; \quad R_n = B_n - D_n \quad (n \text{ oneven}) .$$

In gebied II zijn de transmissiecoëfficiënten T_n als volgt gedefinieerd:

$$T_n = 0 \quad (n \text{ even}) ; \quad T_n = B_n + D_n \quad (n \text{ oneven} \neq 1)$$

$$T_1 = B_1 + D_1 + \exp(i\pi\sqrt{k^2 - 1}) .$$

De deflectiecoëfficiënten van III en IV zijn:

$$S_n = A_n \quad (n \text{ oneven}) \quad \text{en} \quad S_n = -C_n \quad (n \text{ even}) .$$

2. Formulering van het probleem met behulp van een integraalvergelijking

Het probleem kan in twee onafhankelijke delen gesplitst worden.

Het ene deel is een even functie van x , het andere is oneven. Om dit in te zien, ontbinden we de primaire lopende golf in twee staande golven u_1 en u_2 waarbij

$$u_1 = \exp(\frac{\pi}{2} i\sqrt{k^2 - 1}) \cos y \cos(x\sqrt{k^2 - 1})$$

een even functie van u is en waarbij

$$u_2 = i \exp(\frac{\pi}{2} i\sqrt{k^2 - 1}) \cos y \sin(x\sqrt{k^2 - 1})$$

een oneven functie van u is.

u_1 zal in het kruis aanleiding geven tot een totaal veld dat even is in x ;

u_2 zal aanleiding geven tot een veld, dat oneven is in x .

Tellen we deze velden op, dan ontstaat er een lopende golf, gegeven door

$$u_1 + u_2 .$$

We beschouwen eerst het even probleem en lossen daartoe het volgende Dirichletprobleem op (zie fig. 3):

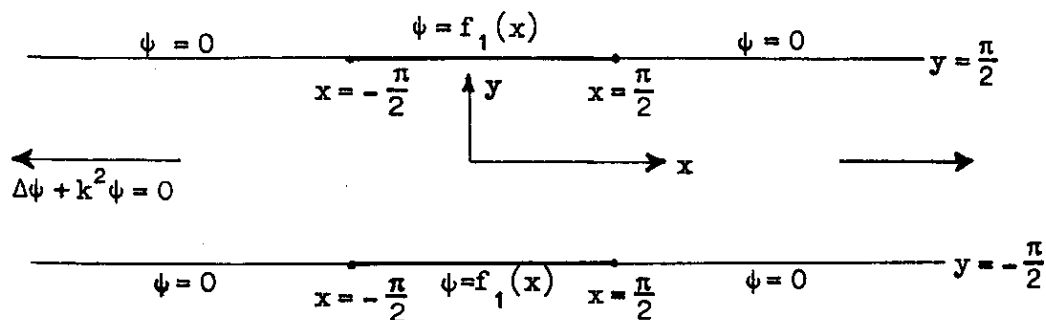


fig. 3.

Laat $f_1(x) = f_1(-x)$ een even functie zijn, gedefinieerd voor $|x| < \frac{\pi}{2}$.
 Zij verder $\psi_1(x,y)$ een oplossing van de golfvergelijking binnen het gebied $|y| \leq \frac{\pi}{2}$, zodanig dat $\psi_1 = 0$ voor $|y| = \frac{\pi}{2}$ als $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ en $\psi_1 = f_1(x)$ voor $|y| = \frac{\pi}{2}$ en $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Zij verder $\psi_1(x,y)$ zowel even in x als in y en stel dat ψ_1 voldoet aan de stralingsvoorwaarden voor $x = \pm \infty$.

Zo'n functie $\psi_1(x,y)$ bestaat en is eenduidig onder zekere gladheidseisen voor $f_1(x)$. Er blijkt

$$\psi_1(x,y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(t) dt \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(y\sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh(\frac{\pi}{2}\sqrt{s^2 - k^2})} \cos s(x-t) ds. \quad (1)$$

We tonen dit als volgt aan.

Allereerst merken we op, dat het rechterlid van (1) een even functie van y is.

Het is echter ook een even functie van x , omdat

$$\cos s(x-t) = \cos sx \cos st + \sin sx \sin st,$$

zodat in (1) alleen $\cos sx \cos st$ een rol speelt, daar $f_1(t)$ even is. Verder is voor $|y| = \frac{\pi}{2}$ en $|x| < \frac{\pi}{2}$: $\psi_1(x,y) = f_1(x)$ en buiten dit interval is

$\psi_1(x,y) = 0$, zoals direct blijkt uit het feit, dat voor $|y| = \frac{\pi}{2}$ de integraal niets anders voorstelt dan de fourierintegraal van $f_1(x)$. Zodoende voldoet $\psi_1(x,y)$ aan de randvoorwaarden. Binnen de strip (fig 3) is het rechterlid van (1) inderdaad een oplossing van de golfvergelijking, daar

$$\cosh(y\sqrt{s^2 - k^2}) \cos s(x-t),$$

dit is voor elke s en t .

Zoals bekend is blijft dit waar, als we naar s en t integreren, nadat we met gewichtsfactoren, die alleen van x en y afhangen, vermenigvuldigd hebben.

We moeten nu nog nagaan of ook aan de stralingsvoorwaarde is voldaan.

Beschouw daartoe

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(y\sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh(\frac{\pi}{2}\sqrt{s^2 - k^2})} \cos(st) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(y\sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh(\frac{\pi}{2}\sqrt{s^2 - k^2})} e^{is|t|} ds . \end{aligned}$$

De integrand heeft oneindig veel enkelvoudige polen in $s = \sqrt{k^2 - n^2}$ (n oneven > 0) in het vlak $\text{Im } s > 0$ met residuen

$$\frac{2}{\pi} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos ny e^{i|t|\sqrt{k^2 - n^2}} .$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(y\sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh(\frac{\pi}{2}\sqrt{s^2 - k^2})} \cos s(x-t) ds = \\ = \frac{2i}{\pi} \sum_{n \text{ oneven} > 0} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \frac{n\pi}{2} \cos ny e^{i|x-t|\sqrt{k^2 - n^2}} . \end{aligned}$$

Het linkerlid is een oplossing van de golfvergelijking; het rechterlid is de corresponderende ontwikkeling in modes, waarbij elke term aan de stralingsvoorwaarde in het oneindige voldoet.

Vermenigvuldigen met $f_1(t)$ en integratie over $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ doet deze eigenschappen voor $|x| > \frac{\pi}{2}$ niet verloren gaan.

Hieruit volgt dat het rechterlid van (1) inderdaad aan de stralingsconditie voldoet en zodoende is $\phi_1(x, y)$ de gevraagde oplossing.

Zij nu $\varphi_1(x, y)$ het totale veld van het even probleem, en stel dat $f_1(x)$ en $g_1(y)$ de waarden van $\varphi_1(x, y)$ voorstellen op de rand van gebied V (fig. 4), waarbij f_1 en g_1 even functies zijn van hun argumenten.

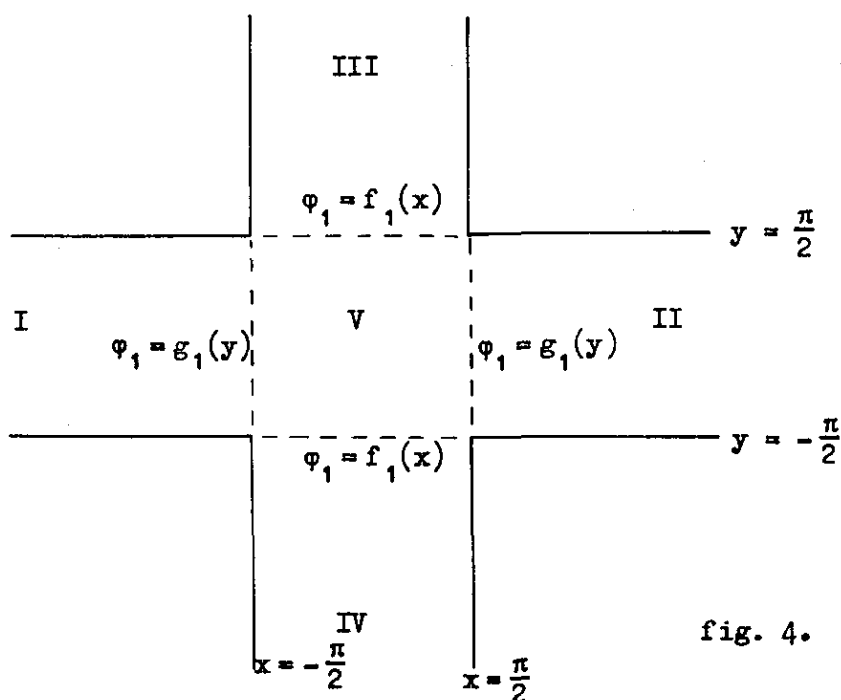


fig. 4.

In I, V en II hebben we:

$$\varphi_1(x, y) = \exp\left(\frac{\pi}{2} i\sqrt{k^2 - 1}\right) \cos y \cos(x\sqrt{k^2 - 1}) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(t) dt \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(y\sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{s^2 - k^2}\right)} \cos s(x-t) ds ,$$

in overeenstemming met (1).

Voorts geldt in III, V en IV:

$$\varphi_1(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g_1(t) dt \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(x\sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{s^2 - k^2}\right)} \cos s(y-t) ds ,$$

door (1) op de verticale zijden toe te passen en x en y te verwisselen.

De gebieden, waar deze twee vergelijkingen geldig zijn overlappen elkaar in V, inclusief de rand.

Substitutie van $x = \frac{\pi}{2}$ in de eerste vergelijking geeft:

$$g_1(y) = \frac{1}{2} \{ \exp(\pi i\sqrt{k^2 - 1}) + 1 \} \cos y + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(t) dt \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(y\sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{s^2 - k^2}\right)} \cos s\left(\frac{\pi}{2} - t\right) ds ; \quad (2)$$

Substitutie van $y = \frac{\pi}{2}$ in de tweede vergelijking geeft:

Hierbij is g_2 een even functie van y en f_2 een oneven functie van x .
In I, V en II volgt nu, op analoge wijze als hiervoor,

$$\varphi_2(x, y) = i \exp\left(\frac{\pi}{2} i \sqrt{k^2 - 1}\right) \cos y \sin x \sqrt{k^2 - 1} + \\ + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_2(t) dt \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(y \sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{s^2 - k^2}\right)} \cos s(x - t) ds ,$$

en in III, V en IV geldt

$$\varphi_2(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g_2(t) dt \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh(x \sqrt{s^2 - k^2})}{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{s^2 - k^2}\right)} \cos s(y - t) ds .$$

Ook deze voorstellingen overlappen elkaar in V en ook hier ontstaat een systeem van twee integraalvergelijkingen.

In dit geval hebben we echter twee kernen nodig, die we als volgt definiëren:

$$L(x, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(x \sqrt{s^2 - k^2})}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{s^2 - k^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \sin(st) ds \quad (6)$$

en

$$M(x, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh(x \sqrt{s^2 - k^2})}{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{s^2 - k^2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2} s\right) \cos(st) ds . \quad (7)$$

Hieruit volgt als resulterend systeem

$$\left\{ \begin{aligned} f_2(x) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} M(x, t) g_2(t) dt & (|x| < \frac{\pi}{2}) \\ g_2(y) &= \frac{1}{2} \{ \exp(i\pi \sqrt{k^2 - 1}) - 1 \} \cos y + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} L(y, t) f_2(t) dt & (|y| < \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

In het algemeen is het niet mogelijk de stelsels (5) en (8) op te lossen. Dit is echter ook niet van groot belang. Wat belangrijk is, is het vinden van de reflectie-, transmissie- en deflectiecoëfficiënten R_n , T_n en S_n , omdat deze een fysische betekenis hebben en experimenteel te bepalen zijn. Het blijkt nu dat deze coëfficiënten op eenvoudige wijze zijn te vinden uit de coëfficiënten van de fourierontwikkeling van de functies f en g .

Daartoe transformeren we (5) en (8) in een oneindig systeem van gekoppelde niet-homogene lineaire vergelijkingen met een oneindig aantal onbekenden

A_n , B_n , C_n , en D_n .

3. Fourierontwikkeling

In de eerste plaats kunnen $K(x,t)$, $L(x,t)$ en $M(x,t)$ ontwikkeld worden in fourierreeksen voor $|x| < \frac{\pi}{2}$ en $|t| < \frac{\pi}{2}$.

Dit is mogelijk door toepassing van contourintegratie. De resultaten die men verkrijgt zijn:

$$K(x,t) = \frac{2i}{\pi} \sum_{n \text{ oneven} > 0} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \exp\left(\frac{\pi}{2} i \sqrt{k^2 - n^2}\right) \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx \cos(t\sqrt{k^2 - n^2}) \quad (9)$$

$$L(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ oneven} > 0} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \exp\left(\frac{\pi}{2} i \sqrt{k^2 - n^2}\right) \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx \sin(t\sqrt{k^2 - n^2}) \quad (10)$$

$$M(x,t) = \frac{2}{\pi i} \sum_{n \text{ even} > 0} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \exp\left(\frac{\pi}{2} i \sqrt{k^2 - n^2}\right) \cos \frac{n\pi}{2} \sin nx \cos(t\sqrt{k^2 - n^2}) \quad (11)$$

We ontwikkelen verder de functies f_1 , g_1 , f_2 en g_2 als volgt in fourierreeksen:

$$f_1(x) = \sum_{n \text{ oneven} > 0} A_n \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx \quad (12)$$

$$g_1(y) = \frac{1}{2} \{ \exp(i\pi\sqrt{k^2 - 1}) + 1 \} \cos y + \sum_{n \text{ oneven} > 0} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(ny) \quad (13)$$

$$f_2(x) = - \sum_{n \text{ even} > 0} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx) \quad (14)$$

$$g_2(y) = \frac{1}{2} \{ \exp(i\pi\sqrt{k^2 - 1}) - 1 \} \cos y + \sum_{n \text{ oneven} > 0} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(ny) \quad (15)$$

Deze vergelijkingen zijn geldig voor $|x|$ en $|y| < \frac{\pi}{2}$.

We laten nog zien hoe (5) omgezet kan worden in vergelijkingen, uitgedrukt in A_n en B_n .

Uit (9) en (12) volgt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K(y,t) f_1(t) dt = \sum_{m \text{ oneven} > 0} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \times \\ \times \frac{2i}{\pi} \sum_{n \text{ oneven} > 0} \frac{n}{\sqrt{n^2 - k^2}} \exp\left(\frac{\pi}{2} i \sqrt{k^2 - 1}\right) \sin \frac{n\pi}{2} \cos ny \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos mt \cos(t\sqrt{k^2 - n^2}) dt.$$

Nu is

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos mt \cos(t\sqrt{k^2 - n^2}) dt = \frac{2m \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{k^2 - n^2}}{m^2 + n^2 - k^2} \quad (m \text{ oneven} > 0).$$

De coëfficiënt van $\sin \frac{n\pi}{2} \cos ny$ (n vast) wordt dan:

$$\frac{4i}{\pi} \frac{n}{\sqrt{n^2 - k^2}} \exp\left(\frac{\pi}{2} i \sqrt{k^2 - n^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{k^2 - n^2}\right) \sum_{m \text{ oneven} > 0} \frac{m}{m^2 + n^2 - k^2} A_m .$$

Uit (13) en de tweede vergelijking van (5) volgt dan dat deze coëfficiënt gelijk moet zijn aan B_n .

Op analoge wijze volgt de rest.

We vinden dan

$$B_n = \frac{2i}{\pi} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} (1 + \exp(i\pi\sqrt{k^2 - n^2})) \sum_{m \text{ oneven} > 0} \frac{m}{m^2 + n^2 - k^2} A_m \quad (n \text{ oneven} > 0) \quad (16)$$

$$A_n = \frac{2i}{\pi} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} (1 + \exp(i\pi\sqrt{k^2 - n^2})) \left[\frac{e^{i\pi\sqrt{k^2 - 1}} + 1}{2(n^2 + 1 - k^2)} + \sum_{m \text{ oneven} > 0} \frac{m}{m^2 + n^2 - k^2} B_m \right] \quad (17)$$

(n oneven > 0)

$$D_n = \frac{2i}{\pi} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} (1 - \exp(i\pi\sqrt{k^2 - n^2})) \sum_{m \text{ even} > 0} \frac{m}{m^2 + n^2 - k^2} C_m \quad (n \text{ oneven} > 0) \quad (18)$$

$$C_n = \frac{2i}{\pi} \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} (1 + \exp(i\pi\sqrt{k^2 - n^2})) \left[\frac{e^{i\pi\sqrt{k^2 - 1}} - 1}{2(n^2 + 1 - k^2)} + \sum_{m \text{ oneven} > 0} \frac{m}{m^2 + n^2 - k^2} D_m \right] \quad (19)$$

(n even > 0) .

De systemen (16,17) en (18,19) lijken erg op elkaar en numeriek gezien zijn ze identiek.

Om dit in te zien, voeren we een pariteitsindex j in, met $j=0$ voor het even probleem en $j=1$ voor het oneven probleem en we stellen voor $n=1, 2, 3, \dots$

$$A_{2n-1} = X(1,n) ; \quad B_{2n-1} = Y(1,n) ;$$

$$C_{2n} = X(2,n) ; \quad D_{2n-1} = Y(2,n) .$$

Direct is dan in te zien, dat de beide systemen tot één systeem worden en er geldt:

$$Y(j+1,n) = - \frac{2(2n-1)}{i\pi\sqrt{k^2 - (2n-1)^2}} [1 + (-1)^j \exp(i\pi\sqrt{k^2 - (2n-1)^2})] \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m-1+j}{(2m-1+j)^2 + (2n-1)^2 - k^2} X(j+1,m) \quad (20)$$

en

$$X(j+1, n) = - \frac{2(2n-1+j)}{i\pi\sqrt{k^2 - (2n-1+j)^2}} [1 + \exp(i\pi\sqrt{k^2 - (2n-1+j)^2})] \times$$

$$\times \left[\frac{\exp(i\pi\sqrt{k^2 - 1}) + (-1)^j}{2\{(2n-1+j)^2 + 1 - k^2\}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m-1}{(2m-1)^2 + (2n-1+j)^2 - k^2} Y(j+1, m) \right]. \quad (21)$$

Dit oneindige systeem van simultane lineaire vergelijkingen voor het oneindig aantal onbekenden X en Y kan omgezet worden in een systeem in de onbekenden X alleen door Y te elimineren.

Voor numerieke berekening is systeem (20) afgebroken bij $n = 30$ en het corresponderende eindige systeem van orde 30 is met behulp van een der bekende methoden opgelost. Kent men de eerste 30 componenten van X, dan berekenen we de eerste 30 componenten van Y met behulp van (20).

Het is duidelijk dat de gevonden waarden benaderingen van de werkelijke waarde zijn.

Tenslotte vinden we in tabel 1 de waarden van r, t en s die bij de aangegeven waarden van k zijn bepaald, uitgedrukt in procenten van de totaal binnenkomende energie.

r is de in I gereflecteerde energie;

t is de in II getransmitteerde energie;

s is de in III en IV verstrooide energie.

Het is duidelijk, dat $r + t + 2s = 100$.

Tabel 1.

k	r	t	s	k	r	t	s	k	r	t	s
1.1	37.93	46.60	7.73	5.1	1.30	93.74	2.48	9.1	0.59	96.86	1.27
1.2	16.00	61.69	11.16	5.2	0.93	94.44	2.31	9.2	0.41	97.32	1.14
1.3	7.28	67.02	12.85	5.3	0.76	94.97	2.14	9.3	0.33	97.65	1.01
1.4	3.86	68.90	13.62	5.4	0.68	95.41	1.95	9.4	0.30	97.91	0.90
1.5	2.77	69.68	13.78	5.5	0.67	95.79	1.77	9.5	0.30	98.12	0.79
1.6	2.78	70.35	13.44	5.6	0.71	96.08	1.61	9.6	0.32	98.28	0.70
1.7	3.31	71.38	12.66	5.7	0.80	96.28	1.46	9.7	0.38	98.37	0.63
1.8	4.18	72.92	11.45	5.8	0.96	96.39	1.33	9.8	0.47	98.40	0.56
1.9	5.64	74.70	9.83	5.9	1.26	96.32	1.21	9.9	0.65	98.31	0.52
2.1	6.51	54.24	19.62	6.1	1.08	93.71	2.61	10.1	0.49	97.15	1.18
2.2	4.97	55.63	19.70	6.2	0.84	94.16	2.50	10.2	0.37	97.42	1.10
2.3	4.15	58.84	18.50	6.3	0.75	94.70	2.28	10.3	0.33	97.69	0.99
2.4	3.70	62.57	16.87	6.4	0.73	95.20	2.04	10.4	0.32	97.94	0.87
2.5	3.52	66.68	14.90	6.5	0.74	95.62	1.82	10.5	0.34	98.13	0.76
2.6	3.56	71.56	12.44	6.6	0.79	95.96	1.62	10.6	0.38	98.27	0.68
2.7	3.81	77.49	9.35	6.7	0.89	96.24	1.43	10.7	0.44	98.34	0.61
2.8	4.35	83.63	6.01	6.8	1.07	96.44	1.24	10.8	0.53	98.35	0.56
2.9	6.12	85.87	4.01	6.9	1.42	96.38	1.10	10.9	0.68	98.24	0.54
3.1	3.94	76.78	9.64	7.1	0.88	94.95	2.09	11.1	0.44	97.65	0.96
3.2	2.33	82.66	7.51	7.2	0.61	95.45	1.97	11.2	0.32	97.84	0.92
3.3	1.62	86.32	6.03	7.3	0.49	95.92	1.79	11.3	0.27	98.03	0.85
3.4	1.24	89.01	4.87	7.4	0.43	96.38	1.59	11.4	0.24	98.20	0.78
3.5	1.03	91.04	3.96	7.5	0.40	96.83	1.38	11.5	0.24	98.37	0.70
3.6	0.96	92.52	3.26	7.6	0.40	97.25	1.18	11.6	0.24	98.52	0.62
3.7	1.04	93.47	2.74	7.7	0.43	97.60	0.99	11.7	0.26	98.66	0.54
3.8	1.35	93.80	2.42	7.8	0.51	97.82	0.83	11.8	0.31	98.76	0.46
3.9	2.24	92.99	2.38	7.9	0.72	97.80	0.74	11.9	0.41	98.79	0.40
4.1	2.02	84.46	6.76	8.1	0.73	95.13	2.07	12.1	0.40	97.63	0.99
4.2	1.33	87.65	5.51	8.2	0.54	95.62	1.92	12.2	0.30	97.78	0.96
4.3	1.04	90.35	4.31	8.3	0.45	96.23	1.66	12.3	0.26	97.99	0.87
4.4	0.91	92.43	3.33	8.4	0.40	96.85	1.37	12.4	0.24	98.22	0.77
4.5	0.91	93.92	2.58	8.5	0.39	97.40	1.10	12.5	0.24	98.45	0.66
4.6	1.07	94.85	2.04	8.6	0.41	97.83	0.88	12.6	0.25	98.66	0.54
4.7	1.51	95.05	1.72	8.7	0.49	98.08	0.72	12.7	0.28	98.83	0.45
4.8	2.57	93.75	1.84	8.8	0.68	98.04	0.64	12.8	0.34	98.91	0.37
4.9	4.06	90.31	2.81	8.9	1.14	97.39	0.74	12.9	0.50	98.79	0.36
k	r	t	s	k	r	t	s	k	r	t	s