

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

CAPITA SELECTA

Differentiaalvergelijkingen

met periodieke coëfficiënten

MATHIEU- EN SFEROIDFUNCTIES

Naar het college van

Prof. Dr. C.J. Bouwkamp

Voorjaarssemester 1968

Dictaat bewerkt door

drs. P.J. de Doelder

Bibl / Mag

Onderafdeling der Wiskunde

Capita Selecta

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN MET PERIODIEKE COEFFICIENTEN
MATHIEU- EN SFEROIDFUNCTIES

PROF. DR. C.J. BOUWKAMP

Dictaat bewerkt door drs. P.J. de Doelder

VOORJAARSSEMESTER 1968



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Inhoudsbeschrijving

Capita Selecta Mathieu- en Sferoidfuncties

1968

(De nummering van de paragrafen is niet consistent)

0.	Inleiding	1
1.	Periodieke functies	2
2.1	De Hill-vergelijking	9
2.2	Toepassingen	21
3.1	Mathieu-functies	32
3.2	Separatie van variabelen	33
3.3	Eigenschappen van de oplossingen van de Mathieu-vergelijking	35
3.4	Nader onderzoek van de oplossingen van de Mathieu-vergelijking	41
3.5	Betrekking tussen de coëfficiënten van de reeksontwikkeling voor $me_\nu(z)$	47
3.6	Ontwikkeling van de oplossingen van Mathieuvergelijkingen naar Besselfuncties	55
3.7	Integraalvergelijkingen die met Mathieufuncties verband houden	60
8.	Sferoïdale golffuncties	71

Onderafdeling der Wiskunde

Capita Selecta

Differentiaalvergelijkingen met periodieke coëfficiënten
Mathieu- en sferoïdfuncties

Prof.dr. C.J. Bouwkamp

Dictaat bewerkt door drs. P.J. de Doelder

Voorjaarssemester 1968

Technische Hogeschool Eindhoven

O. Inleiding

Zoals bekend spelen homogene lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde in allerlei praktische problemen een belangrijke rol.

In dit college zullen we bepaalde lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met periodieke coëfficiënten onderzoeken. We geven enkele voorbeelden van processen, waarbij deze vergelijkingen optreden.

A. Electrotechniek

1. Pupin-spoelen (kabels met periodieke structuur).
2. Modulatie van radio- en TV-golven (R. Carson; Proc. Inst. Radio Eng., 1922, p.62).
3. Superregeneratie (H. Armstrong; ibid., 1922, p.244).
4. Stroom- en spanningsmodellen door periodieke variatie van L, R en C (Rayleigh, Sci. Papers, vol. III, p.10).
5. Golfvoortplanting in gelaagde media en in ellipsvormige kokers.
6. Parametrische versterking (cyclotron; Courant).

B. Theoretische Physica

Electronen bewegend in een periodiek potentiaalveld. (Schrödingervergelijking: $\psi'' + (\lambda + u(x))\psi = 0$.)

C. Mechanische verschijnselen

1. Stabilisatie door kleine trillingen (v.d. Pol, Physica, 1925, p.157; Rayleigh, Theory of Sound, vol. I, 1926, p.82).
2. Planetenbeweging (Hill, Poincaré).

Verdere literatuur:

M.J. Strutt: Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Ergebnisse der Math. und ihre Grenzgebiete, dl. I (1932), p.199-213.

Meixner-Schäfke: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen (1954), Springer-Verlag.

1. Periodieke functies

1.1. Eenvoudige periodieke functies, waarmee we reeds veel eerder kennis hebben gemaakt, zijn bijvoorbeeld $\sin x$, $\cos x$, $\sin z$ (z complex).

Een periode van deze functies is $2\pi n$ (n geheel); er is ook een kleinste periode 2π , de zg. primitieve periode. Als we in het vervolg over periode praten, bedoelen we de primitieve periode.

Een constante zullen we niet als periodieke functie beschouwen, want deze heeft oneindig veel periodes.

Niet alle functies zijn periodieke functies, ook niet als ze zijn samengesteld uit functies, die zelf periodiek zijn. Men ziet dit direct aan de functie $e^z \cos z$, waarbij e^z periodiek is met periode $2\pi i$ en $\cos z$ met periode 2π . Ook behoeft een differentiaalvergelijking met periodieke coëfficiënten geen periodieke oplossing te hebben.

We illustreren dit aan een voorbeeld.

Zij gegeven $u = e^z p(z)$, waarbij $p(z)$ periodiek is met periode $a \neq 2\pi i$. Dan is

$$u' = e^z p'(z) + p(z) e^z = e^z p(z) \left(1 + \frac{p'(z)}{p(z)}\right),$$

dus u voldoet aan

$$y' - \left(1 + \frac{p'(z)}{p(z)}\right)y = 0,$$

d.w.z. $u = e^z \cos z$ is een oplossing van $y' - (1 - \tan z)y = 0$.

Ook het omgekeerde is het geval: de oplossing kan periodiek zijn, terwijl de differentiaalvergelijking geen echte periodieke coëfficiënten heeft:

$y'' + y = 0$ heeft $\cos z$ en $\sin z$ als oplossing.

Men kan ook coëfficiënten, die niet periodiek zijn, tot periodieke transformeren. Beschouw nl. $y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) + y(z) = 0$ met oplossing $J_0(z)$.

Substitueer $z = \cos t$, dan volgt na enig rekenwerk

$$y''(t) - (\tan t + \cot t)y'(t) + \sin^2 t y = 0,$$

waardoor de vergelijking coëfficiënten met periode π heeft gekregen. De oplossing hiervan is $J_0(\cos t)$ met periode π . Een andere oplossing is $Y_0(\cos t)$ met een logarithmische singulariteit in $z = 0$. $Y_0(z)$ heeft meestal een snede langs de negatief reële as. Zo'n transformatie levert niets op, daar we terecht komen in singulariteiten en meerwaardige functies.

1.2. Enige algemene stellingen

1.2.1. Zij gegeven de differentiaalvergelijking

$$(1) \quad y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0 ,$$

waarbij $P(z)$ en $Q(z)$ gehele transcendenten functies zijn met periode a , dus voor alle z geldt

$$P(z+a) = P(z); Q(z+a) = Q(z); a \neq 0, \text{ eventueel complex.}$$

Stelling: De differentiaalvergelijking (1) heeft tenminste één oplossing Y met de eigenschap

$$Y(z+a) = \sigma Y(z)$$

waarbij σ alleen afhangt van $P(z)$ en $Q(z)$. Zo'n oplossing heet quasi-periodiek met periode a .

Bewijs: Stel dat $y_1(z)$ en $y_2(z)$ onafhankelijke oplossingen, een zg. basis, zijn van (1), gedefinieerd in het hele z -vlak. De algemene oplossing van (1) is dan

$$y(z) = Ay_1(z) + By_2(z)$$

met A en B willekeurige constanten.

Als $y(z)$ een oplossing is, is $y(z+a)$ het ook, zoals door substitutie direct blijkt. Hieruit volgt, dat ook $y_1(z+a)$ en $y_2(z+a)$ oplossingen van (1) zijn. Wat we nog dienen te bewijzen is, dat $y_1(z+a)$ en $y_2(z+a)$ onafhankelijk zijn.

Daartoe gaan we na of de Wronski determinant $\neq 0$ is.

Daar $y_1(z+a)$ en $y_2(z+a)$ oplossingen zijn, is

$$y_1'' + P(z)y_1' + Q(z)y_1 = 0$$

en

$$y_2'' + P(z)y_2' + Q(z)y_2 = 0 .$$

Vermenigvuldigen van de eerste vergelijking met y_2 en van de tweede vergelijking met y_1 geeft na aftrekking

$$(2) \quad y_2 y_1'' - y_1 y_2'' + P(y_2 y_1' - y_1 y_2') = 0 .$$

De Wronski determinant $W(y_1, y_2)$ is gegeven door

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} .$$

Er blijkt nu

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' = - \frac{dW}{dz} ,$$

dus wegens (2)

$$\frac{dW}{dz} + PW = 0 \quad \text{of} \quad W = C e^{-\int_0^z P(t) dt} ,$$

met C een constante.

Bekijk nu

$$W_1 = W(y_1(z), y_2(z)) = C e^{-\int_0^z P(t) dt}$$

en

$$W_2 = W(y_1(z+a), y_2(z+a)) = C e^{-\int_0^{z+a} P(t) dt} ,$$

dan is

$$\frac{W_2}{W_1} = e^{-\int_z^{z+a} P(t) dt} = e^{-\int_0^a P(t) dt} \neq 0$$

en daar $W_1 \neq 0$ omdat $y_1(z)$ en $y_2(z)$ onafhankelijke oplossingen van (1) zijn, is ook $W_2 \neq 0$, dus $y_1(z+a)$ en $y_2(z+a)$ zijn onafhankelijke oplossingen.

We kunnen nu schrijven:

$$y_1(z+a) = \alpha_{11} y_1(z) + \alpha_{21} y_2(z)$$

$$y_2(z+a) = \alpha_{12} y_1(z) + \alpha_{22} y_2(z)$$

of

$$\underline{y}(z+a) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \underline{y}(z) \quad \text{als} \quad \underline{y}(z) = (y_1(z), y_2(z)) .$$

Definiëren we

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} ,$$

dan is

$$\underline{y}(z+a) = \alpha^T \underline{y}(z) .$$

Verder is $\underline{y}'(z+a) = \alpha^T \underline{y}'(z)$, dus

$$\begin{pmatrix} y_1(z+a) & y_1'(z+a) \\ y_2(z+a) & y_2'(z+a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(z) & y_1'(z) \\ y_2(z) & y_2'(z) \end{pmatrix} .$$

Gaan we over op determinanten, dan blijkt hieruit

$$W_2 = \det \alpha \cdot W_1 ,$$

dus

$$\det \alpha = \exp\left(-\int_0^a P(t)dt\right) \quad \text{of} \quad \det \alpha \neq 0 ,$$

dus α is niet-singulier.

Beschouw $Y(z) = Ay_1(z) + By_2(z)$, dan is

$$(3) \quad Y(z+a) = Ay_1(z+a) + By_2(z+a) = [A\alpha_{11} + B\alpha_{12}]y_1(z) + [A\alpha_{21} + B\alpha_{22}]y_2(z) .$$

Is er nu een σ te vinden, zodanig dat $Y(z+a) = \sigma Y(z)$?

We proberen zo'n σ te vinden door het rechterlid van (3) gelijk te stellen aan $\sigma(Ay_1(z) + By_2(z))$. Dit is mogelijk als we stellen

$$\begin{cases} A\alpha_{11} + B\alpha_{12} = \sigma A \\ A\alpha_{21} + B\alpha_{22} = \sigma B . \end{cases}$$

Dit stelsel vergelijkingen heeft een oplossing \neq nul-oplossing als

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \sigma & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0 ,$$

d.w.z. σ is eigenwaarde van α , waarbij $\sigma \neq 0$. Uit (4) volgt

$$\sigma^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\sigma + \det \alpha = 0 .$$

We onderscheiden twee gevallen:

- i) σ_1 en σ_2 zijn verschillend,
- ii) $\sigma_1 = \sigma_2$.

i) Er zijn twee functies Y_1 en Y_2 waarvoor geldt

$$Y_1(z+a) = \sigma_1 Y_1(z); \quad Y_2(z+a) = \sigma_2 Y_2(z) .$$

De functies $Y_1(z+a)$ en $Y_2(z+a)$ zijn lineair onafhankelijk, immers beschouw

$$\frac{Y_1(z+a)}{Y_2(z+a)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{Y_1(z)}{Y_2(z)} \neq 1 \cdot \frac{Y_1(z)}{Y_2(z)} .$$

Opmerking: Men noemt de functie $Y(z)$ waarvoor geldt $Y(z+a) = \sigma Y(z)$ quasi-periodiek met periode a .

ii) Daar $\sigma_1 = \sigma_2$ is er slechts één functie te vinden, te weten

$$Y_1(z+a) = \sigma_1 Y_1(z) .$$

Er is dus tenminste één oplossing.

Stelling: Het hierboven behandelde proces is onafhankelijk van de basiskeuze.

Bewijs: Zij

$$\underline{y}(z+a) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \underline{y}(z) ,$$

dan is $\underline{y}(z+a) = \alpha^T \underline{y}(z)$.

Neem als basis $\eta = (\eta_1(z), \eta_2(z))$ en druk η uit in de oude basis, bijv. als volgt:

$$\eta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \underline{y} = \beta \underline{y} \quad \text{met} \quad \det \beta \neq 0 .$$

Zij verder

$$\eta(z+a) = A^T \eta(z) ,$$

dan volgt er

$$A^T \eta(z) = \eta(z+a) = \beta \underline{y}(z+a) = \beta \alpha^T \underline{y}(z) = \beta \alpha^T \beta^{-1} \eta(z) ,$$

dus $A^T = \beta \alpha^T \beta^{-1}$,

waaruit $A = (\beta^T)^{-1} \alpha \beta^T$ of $A = \gamma^{-1} \alpha \gamma$,

als we stellen $\gamma = \beta^T$.

Zoals bekend is de karakteristieke vergelijking $|\alpha - \sigma I| = 0$ voor deze transformatie invariant.

1.2.2. Stelling van Floquet (Ann. de l'Ec. norm. sup. (2) XII (1883), p.47):

De vergelijking $y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0$ heeft tenminste één oplossing $Y(z) = e^{\mu z} p(z)$, waarbij $p(z+a) = p(z)$ en μ alleen afhankelijk van P en Q is.

Deze stelling is een andere formulering van stelling 1.2.1.

We kunnen (1.2.1) met (1.2.2) in overeenstemming brengen door te stellen $\sigma = e^{a\mu}$, waarbij μ op veelvoudigen van $\frac{2\pi i}{a}$ bepaald is.

Stellen we, na μ gekozen te hebben, $Y(z) = e^{\mu z} p(z)$, dan is $p(z) = e^{-\mu z} Y(z)$, dus

$$p(z+a) = e^{-\mu(z+a)} Y(z+a) = e^{-\mu a} e^{-\mu z} \sigma Y(z) = p(z),$$

dus $p(z)$ heeft periode a .

Opmerking: Bij sommige auteurs vindt men i.p.v. $e^{\mu z} p(z)$: $e^{i\nu z} p(z)$ (Meixner-Schäpfke).

Is $\sigma_1 \neq \sigma_2$, dan zijn er twee waarden van μ , waarbij $\mu_1 \not\equiv \mu_2 \pmod{\frac{2\pi i}{a}}$, de algemene oplossing is dan

$$e^{\mu_1 z} p_1(z) + e^{\mu_2 z} p_2(z) \quad \text{met} \quad p_i(z) = p_i(z+a) \quad (i = 1, 2).$$

Is er maar één $\mu \pmod{\frac{2\pi i}{a}}$, dan is er tenminste één oplossing te construeren, nl. $e^{\mu_1 z} p_1(z)$.

Literatuur:

Whittaker and Watson: A course of modern analysis, Ch. XIX;

Magnus-Winkler: Hill's equation.

We geven van het behandelde een eenvoudig voorbeeld.

De differentiaalvergelijking $y'' + y = 0$ heeft als oplossingen $\sin z$ en $\cos z$. Zij a een willekeurig getal, dat als periode dienst doet. Nu is

$$\sin(z+a) = \sin z \cos a + \cos z \sin a$$

en

$$\cos(z+a) = -\sin z \sin a + \cos z \cos a,$$

dus

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad |\alpha| = 1.$$

De eigenwaarden van α vinden we uit

$$\begin{vmatrix} \cos a - \sigma & -\sin a \\ \sin a & \cos a - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

dus

$$\sigma^2 - 2 \cos a \cdot \sigma + 1 = 0$$

met wortels

$$\sigma_1 = \cos a + i \sin a = e^{ia} \quad \text{en} \quad \sigma_2 = \cos a - i \sin a = e^{-ia} .$$

Er zijn nu twee gevallen:

i) $a \neq n\pi$. Daar we gesteld hebben $\sigma = e^{a\mu}$ volgt hieruit $\mu_1 = i$, $\mu_2 = -i$; neem $p_1(z) = A$ en $p_2(z) = B$. De algemene oplossing is

$$Y(z) = p_1(z)e^{iz} + p_2(z)e^{-iz} ,$$

met

$$Y_1(z) = e^{iz} \quad \text{en} \quad Y_2(z) = e^{-iz} .$$

ii) $a = n\pi$. In dit geval is $\sigma_1 = \sigma_2 = (-1)^n$, dus

$$\sin(z+a) = (-1)^n \sin z$$

$$\cos(z+a) = (-1)^n \cos z .$$

Er zijn nu blijkbaar dus toch twee periodieke onafhankelijke functies

$$Y_1(z) = \sin z \quad \text{en} \quad Y_2(z) = \cos z .$$

2.1. De Hill-vergelijking

2.1.1. Dit is een bijzonder geval van (1) in 1.2.1. De vergelijking treedt op bij de theorie van de maanbeweging. Hij wordt geschreven in de vorm

$$y'' + (\lambda + Q(x))y = 0 ,$$

waarbij $Q(x)$ een reële functie is, voldoende glad, zodanig dat $Q(x+a) = Q(x)$, $a > 0$, $-\infty < x < \infty$. Verder is a een primitieve periode en λ een reële constante. We zullen aannemen, dat $Q(x)$ tenminste sectiegewijs continu is.

Literatuur: Acta Mathematica 8 (1886).

Het probleem waarom het hier gaat is:

Bepaal de mogelijke waarden van λ en de oplossingen met periode a of met periode $2a$.

Oplossingen met periode a noemen we: heel-periodiek;
oplossingen met periode $2a$ noemen we: half-periodiek.

Gezien de periodiciteit bekijken we de differentiaalvergelijking alleen op $(0, a)$.

We trachten een oplossing te construeren, die in de randpunten van het interval $(0, a)$ vastligt, daar continu is en daar dezelfde linker- en rechterafgeleiden heeft.

Zij dus $Q(x)$ gedefinieerd op $0 \leq x \leq a$ en daar sectiegewijs continu. Construeer twee oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$, die lineair onafhankelijk zijn. De algemene oplossing is dan voor $0 \leq x \leq a$:

$$Ay_1(x) + By_2(x) .$$

Voor $a \leq x \leq 2a$ is dan de algemene oplossing

$$Ay_1(x-a) + By_2(x-a) ,$$

maar ook

$$\sigma[Ay_1(x-a) + By_2(x-a)] , \text{ enz.}$$

We zoeken nu een $\sigma \neq 0$ zodanig dat

$$Ay_1(x) + By_2(x) = \sigma(Ay_1(x-a) + By_2(x-a)) .$$

Aansluiting in $x = a$ levert op grond van de eisen, die we aan $y_1(x)$ en $y_2(x)$ stellen:

$$Ay_1(a) + By_2(a) = \sigma(Ay_1(0) + By_2(0))$$

en

$$Ay_1'(a) + By_2'(a) = \sigma(Ay_1'(0) + By_2'(0)) .$$

Dit stelsel is oplosbaar met $(A,B) \neq (0,0)$ als

$$(1) \quad \begin{vmatrix} y_1(a) - \sigma y_1(0) & y_2(a) - \sigma y_2(0) \\ y_1'(a) - \sigma y_1'(0) & y_2'(a) - \sigma y_2'(0) \end{vmatrix} = 0 .$$

Door invoering van een genormaliseerde basis $(y_1(x), y_2(x))$, d.w.z. een basis waarvoor geldt $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0; y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ wordt (1) vereenvoudigd tot

$$\begin{vmatrix} y_1(a) - \sigma & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

of

$$(2) \quad \sigma^2 - (y_1(a) + y_2'(a))\sigma + 1 = 0 ,$$

daar

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = 1 \quad (\text{zie 1.2.1}).$$

Vergelijking (2) is onafhankelijk van de basiskeuze. Ze wordt slechts bepaald door λ en $Q(x)$.

Het spoor Δ van de matrix

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix}$$

is reëel. Evenals y_1 en y_2 is Δ een functie van λ bij gegeven $Q(x)$, we kunnen dus schrijven

$$(3) \quad \Delta(\lambda) = y_1(\lambda, a) + y_2'(\lambda, a) .$$

Uit (2) volgt $\sigma = \frac{1}{2}(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4})$ met

$$D \equiv \Delta^2 - 4 = (\Delta - 2)(\Delta + 2) = F_1 \cdot F_2 ,$$

als we definiëren $F_1 = \Delta - 2, F_2 = \Delta + 2$. F_1 en F_2 hebben geen gemeenschappelijke nulpunten, beide functies hebben wel oneindig veel nulpunten.

Opmerking: Soms is $\Delta(\lambda)$ een gehele functie van λ .

Hoe ziet $\Delta(\lambda)$ er uit?

We beschouwen eerst $\lambda \rightarrow \infty$ en $\lambda \rightarrow -\infty$.

$\lambda \rightarrow \infty$. Als $Q(x)$ begrensd is kunnen we volstaan met het bekijken van $y'' + \lambda y = 0$ met oplossingen:

$$y_1 = \cos(x\sqrt{\lambda}) \quad \text{en} \quad y_2 = \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} .$$

y_1 en y_2 zijn hier gehele functies van λ .

Verder is

$$y_1(a) = \cos(a\sqrt{\lambda}) ; \quad y_2'(a) = \cos(a\sqrt{\lambda}) ,$$

dus

$$\underline{\Delta(\lambda) \sim 2 \cos(a\sqrt{\lambda})} .$$

$\lambda \rightarrow -\infty$. De differentiaalvergelijking is ook nu

$$y'' + \lambda y = 0 .$$

Er volgt

$$y_1(x) = \cosh x\sqrt{-\lambda} ; \quad y_2 = \frac{\sinh(x\sqrt{-\lambda})}{\sqrt{-\lambda}} ,$$

waaruit

$$\Delta(\lambda) \sim 2 \coth(a\sqrt{-\lambda}) .$$

De extrema van $\Delta(\lambda)$ worden direct uit het voorgaande gevonden:

$$\Delta_{\max} \geq 2 ; \quad \Delta_{\min} \leq -2 .$$

De 2-punten, dit zijn de punten waar $F_1(\lambda) = \Delta - 2 = 0$ is, (eigenwaarden van de eerste soort), t.w.

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (\lambda_n \rightarrow \infty)$$

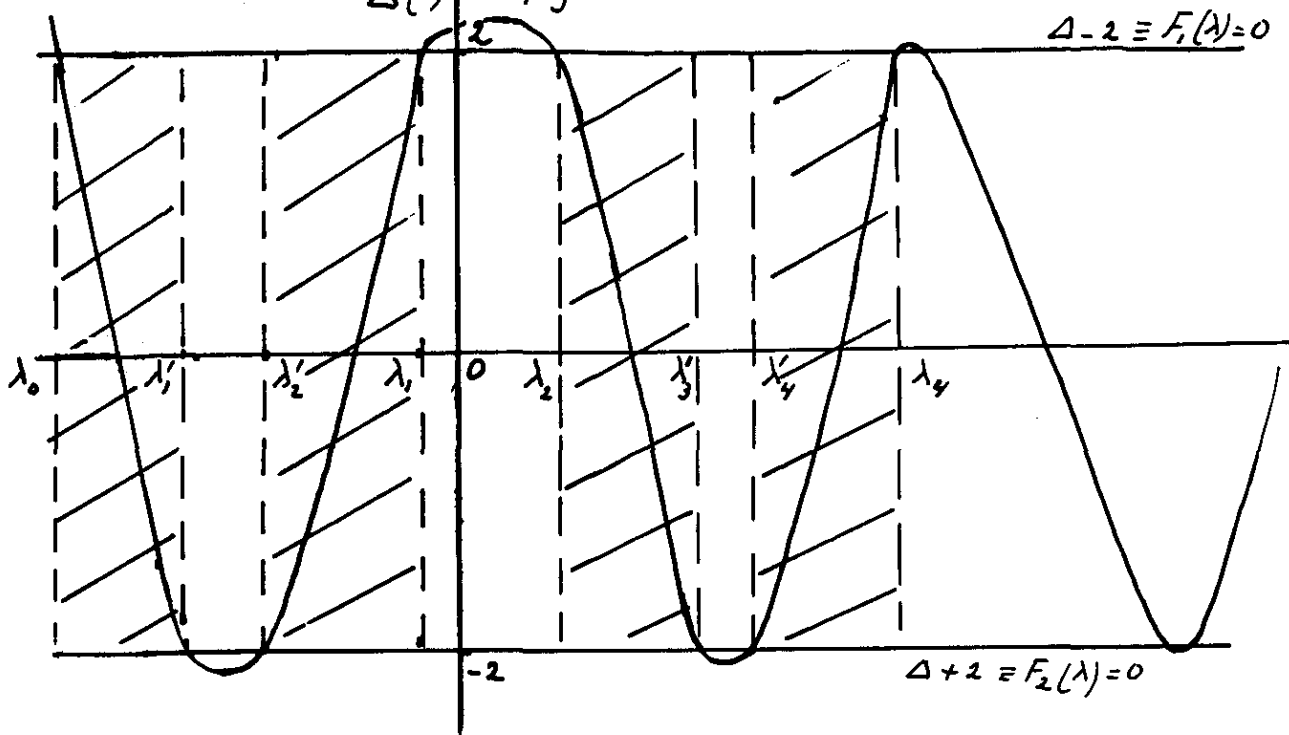
vormen een monotoon niet-dalende rij. Ze behoren bij de heel-periodieke oplossing.

De -2-punten, nl. de punten waar $F_2(\lambda) = \Delta + 2 = 0$ is, vormen ook zo'n rij, geordend als

$$\lambda_1' \leq \lambda_2' < \lambda_3' \leq \lambda_4' < \dots \quad (\lambda_n' \rightarrow \infty) .$$

De schakeling van deze twee systemen is als volgt:

$$\lambda_0 < \lambda_1' \leq \lambda_2' < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3' \leq \lambda_4' < \lambda_3 \dots \quad (\text{zie fig. 1}).$$



Literatuur:

- Liapounow (1907), Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse, vol. 9, p. 203 - 474;
 Hamel, Math. Annalen 73 (1913), p. 371 - 412;
 Haupt, Math. Annalen 76 (1915), p. 67 - 104;
 Haupt, Math. Annalen 79 (1919), p. 278 - 285;
 H.A. Kramers, Physica 1935, p. 483 - 490.

We onderscheiden blanke en gearceerde gebieden.

Het is mogelijk, dat vanaf zekere λ het gebied gearceerd is. Dit gebeurt alleen als $Q(x) \equiv 0$.

De gearceerde gebieden kunnen niet tot één lijn samentrekken; de blanke kunnen dit wel.

2.1.2. De wortels van de karakteristieke vergelijking

Wat gebeurt er nu met de wortels van

$$\sigma^2 - \Delta\sigma + 1 = 0 \quad ?$$

Als we de wortels σ_1 en σ_2 noemen is

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \Delta \quad \text{en} \quad \sigma_1 \sigma_2 = 1 .$$

We onderscheiden 5 gevallen.

2.1.21. $\Delta > 2$.

Er zijn 2 reële wortels, zodanig dat

$$0 < \sigma_1 = \frac{1}{2}(\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 4}) < 1$$

en

$$1 < \sigma_2 = \frac{1}{2}(\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 4}) < \infty .$$

Met deze σ_1 en σ_2 zijn twee onafhankelijke oplossingen te construeren, t.w.

$$Y_1(x+a) = \sigma_1 Y_1(x)$$

en

$$Y_2(x+a) = \sigma_2 Y_2(x)$$

zodanig dat $Y_1(x)$ begrensd is voor $x \rightarrow \infty$ en $Y_2(x)$ niet, terwijl verder $Y_2(x)$ begrensd is voor $x \rightarrow -\infty$ en $Y_1(x)$ niet.

Daar we een differentiaalvergelijking stabiel noemen als de algemene oplossing uniform begrensd is voor $x \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow -\infty$ is in het bovengenoemde geval de differentiaalvergelijking instabiel.

Voor $\lambda < \lambda_0$ zitten we in een instabiel, anders gezegd blank gebied.

2.1.22. $\Delta = 2$.

Nu is $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

Er is nu tenminste één Y met $Y(x+a) = \sigma_1 Y(x) = Y(x)$. Deze functie is uniform begrensd.

Er is nog een tweede oplossing, deze is onbegrensd.

Verdwijnt een blank gebied, dan blijkt de situatie stabiel te zijn.

Er is hier één heel-periodieke oplossing.

2.1.23. $-2 < \Delta < 2$.

In dit geval zijn σ_1 en σ_2 toegevoegd complex, immers

$$\sigma = \frac{1}{2}(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4}) = \frac{1}{2}(\Delta \pm i\sqrt{4 - \Delta^2}) .$$

Verder geldt

$$|\sigma_1| = |\sigma_2| = 1 .$$

Alle oplossingen zijn begrensd, dus de differentiaalvergelijking is stabiel.

2.1.24. $\Delta = -2$.

Nu is $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$, dus er is tenminste één oplossing $Y_1(x)$ met $Y_1(x+a) = -Y_1(x)$, een halfperiodieke oplossing.

2.1.25. $\Delta < -2$.

Nu is $-1 < \sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < -1$.

De intervallen $(-\infty, \lambda_0)$; (λ_1', λ_2') ... zijn instabiel.

De intervallen (λ_0, λ_1') ; (λ_2', λ_1) ... zijn stabiel.

2.1.3. De randpunten van de intervallen geven moeilijkheden. Een nodige en voldoende voorwaarde, dat er in λ_1 een stabiele oplossing is, is $\lambda_1 = \lambda_2$, d.w.z. in Fig. 1 raakt $\Delta(\lambda)$ aan $\Delta = 2$ in het punt $\lambda = \lambda_1$.

We gaan dit nu onderzoeken en passen daartoe de volgende (onjuiste) methode toe.

2.1.31. Zij $y(x)$ een oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking met $y(x+a) = \varepsilon y(x)$, $\varepsilon = \pm 1$. Noem de andere onafhankelijke oplossing $\eta(x)$. Nu is

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\eta}{y} \right) = \frac{y\eta' - \eta y'}{y^2} = \frac{C}{y^2},$$

immers

$$y\eta' - \eta y' = W(y, \eta) = C.$$

Een oplossing hiervan is

$$\frac{\eta}{y} = \int_b^x \frac{dt}{y^2(t)},$$

als we $C = 1$ nemen, dus

$$\eta(x) = y(x) \int_b^x \frac{dt}{y^2(t)},$$

waaruit

$$\begin{aligned} (1) \quad \eta(x+a) &= y(x+a) \int_b^{x+a} \frac{dt}{y^2(t)} = \varepsilon y(x) \left\{ \int_b^x \frac{dt}{y^2(t)} + \int_x^{x+a} \frac{dt}{y^2(t)} \right\} = \\ &= \varepsilon y(x) \int_b^x \frac{dt}{y^2(t)} + \varepsilon y(x) a \cdot \frac{1}{a} \int_x^{x+a} \frac{dt}{y^2(t)}. \end{aligned}$$

De laatste integraal is wegens de periodiciteit van $y(t)$ constant, dus er volgt tenslotte

$$\eta(x+a) = \varepsilon \eta(x) + \text{const. } y(x).$$

Deze methode is onjuist, omdat hier met de nulpunten van $y(x)$ geen rekening

is gehouden. Het bewijs is dus onjuist, hoewel de uitkomst goed is.

Opmerking: λ_0 is altijd een instabiel punt.

2.1.32. We zullen nu aantonen, aannemende dat formule (1) uit de vorige paragraaf

juist is en $K = \frac{1}{a} \int_a^{x+a} \frac{dt}{y^2(t)} \neq 0$, dat $\eta(x)$ onbegrensd is.

We definiëren $w(x) \equiv -Kxy(x) + \eta(x)$. Dan is

$$\begin{aligned} w(x+a) &= -K(x+a)y(x+a) + \eta(x+a) = \\ &= K\epsilon y(x) - K\epsilon y(x) + \epsilon\eta(x) + \epsilon K\epsilon y(x) = \\ &= \epsilon[\eta(x) - Kxy(x)] = \epsilon w(x), \end{aligned}$$

dus

$$\eta(x) = Kxy(x) + w(x) \quad \text{met} \quad w(x+a) = \epsilon w(x)$$

Vanwege de factor x neemt $\eta(x)$ dus onbeperkt toe.

Zij nu $y(x+a) = \sigma y(x)$, waarbij $y(x)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking is. Dan is $y(x)\eta'(x) - y'(x)\eta(x) = \text{constant} \neq 0$ voor alle x , dus ook

$$y(x+a)\eta'(x+a) - \eta(x+a)y'(x+a) = y(x)\eta'(x) - y'(x)\eta(x)$$

of

$$\sigma y(x)\eta'(x+a) - \eta(x+a)\sigma y'(x) = y(x)\eta'(x) - y'(x)\eta(x),$$

dus

$$y(x)\{\sigma\eta'(x+a) - \eta'(x)\} = y'(x)\{\sigma\eta(x+a) - \eta(x)\}.$$

Als we $\phi(x) \equiv \sigma\eta(x+a) - \eta(x)$ stellen, vinden we $y\phi' = y'\phi$, dus $\phi = C_1 y$, waaruit

$$\sigma\eta(x+a) - \eta(x) = C_1 y(x) \quad \text{of} \quad \eta(x+a) = \frac{1}{\sigma} \eta(x) + C_2 y(x).$$

Zij nu gegeven de oplossing $y(x+a) = \epsilon y(x)$. De tweede oplossing wordt gevonden uit

$$y_1(x+a) = \alpha_{11} y_1(x) + \alpha_{21} y_2(x)$$

$$y_1'(x+a) = \alpha_{11} y_1'(x) + \alpha_{21} y_2'(x).$$

Voor $x = 0$ was $y_1(a) = \alpha_{11}$ en $y_1'(a) = \alpha_{21}$, als we een genormaliseerde basis aanhouden, dus

$$y_1(x+a) = y_1(a)y_1(x) + y_1'(a)y_2(x)$$

en analoog

$$y_2(x+a) = y_2(a)y_1(x) + y_2'(a)y_2(x).$$

2.1.33. $y_2(a) \neq 0$.

We definiëren

$$Y_1(x) = y_2(a)y_1(x) + (\varepsilon - y_1(a))y_2(x)$$

$$Y_2(x) = y_2(x)$$

en tonen aan dat

$$Y_1(x+a) = \varepsilon Y_1(x) \quad \text{en} \quad Y_2(x+a) = \varepsilon Y_2(x) + Y_1(x) .$$

Het bewijs hiervan gaat als volgt:

$$\begin{aligned} Y_1(x+a) &= y_2(a)y_1(x+a) + (\varepsilon - y_2(x))y_2(x+a) = \\ &= y_2(a)\{y_1(a)y_1(x) + y_1'(a)y_2(x)\} + (\varepsilon - y_1(a))\{y_2(a)y_1(x) + y_2'(a)y_2(x)\} \\ &= \varepsilon y_2(a)y_1(x) + y_2(x)\{y_2(a)y_1'(a) + \varepsilon y_2'(a) - y_2'(a)y_1(a)\} = \\ &= \varepsilon y_2(a)y_1(x) + (\varepsilon y_2'(a) - 1)y_2(x) = \\ &= \varepsilon(y_2(a)y_1(x) + (y_2'(a) - \varepsilon)y_2(x)) , \end{aligned}$$

daar $y_2(a)y_1'(a) - y_1(a)y_2'(a) = -1$.

Uit 2.1.1, formule 2, weten we $y_1(a) + y_2'(a) = \sigma_1 + \sigma_2$, in ons geval is dat

$$y_1(a) + y_2'(a) = 2\varepsilon ,$$

dus $y_2'(a) - \varepsilon = \varepsilon - y_1(a)$.

Substitutie in het gevondene geeft

$$Y_1(x+a) = \varepsilon Y_1(x) .$$

Verder is

$$\begin{aligned} Y_2(x+a) &= y_2(x+a) = y_2(a)y_1(x) + y_2'(a)y_2(x) = \\ &= y_2(a)y_1(x) + (2\varepsilon - y_1(a))y_2(x) = \\ &= \varepsilon Y_2(x) + y_2(a)y_1(x) + (\varepsilon - y_1(a))y_2(x) = \varepsilon Y_2(x) + Y_1(x) , \end{aligned}$$

waarmee het gestelde is aangetoond.

2.1.34. $y_2(a) = 0$.

We definiëren

$$Y_1(x) \equiv y_2(x) \quad \text{en} \quad Y_2(x) \equiv y_1(x) .$$

Verder is

$$y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a) = 1 ,$$

dus

$$y_1(a)y_2'(a) = 1 ,$$

terwijl

$$y_1(a) + y_2'(a) = 2\varepsilon .$$

Hieruit volgt dat $y_1(a) = y_2'(a) = \varepsilon$. We zien nu dat

$$\begin{aligned} Y_2(x+a) &= y_1(x+a) = y_1(a)y_1(x) + y_1'(a)y_2(x) = \\ &= \varepsilon y_1(x) + y_1'(a)y_2(x) = \varepsilon Y_2(x) + y_1'(a)Y_1(x) \end{aligned}$$

en verder dat

$$Y_1(x+a) = y_2(x+a) = y_2'(a)y_2(x) = \varepsilon y_2(x) = \varepsilon Y_1(x) .$$

In het algemeen is dus

$$\begin{cases} Y_1(x+a) = \varepsilon Y_1(x) \\ Y_2(x+a) = \varepsilon Y_2(x) + CY_1(x) \end{cases} \quad \text{met} \quad C = \begin{cases} 1 & \text{als } y_2(a) \neq 0 \\ y_1'(a) & \text{als } y_2(a) = 0 . \end{cases}$$

Als we in de formule, die $w(x)$ definieert (2.1.32) $y(x)$ en $\eta(x)$ vervangen door $Y_1(x)$ resp. $Y_2(x)$ volgt er tenslotte

$$\begin{cases} w(x) = -\frac{\text{const}}{\varepsilon a} xY_1(x) + Y_2(x) \\ w(x+a) = w(x) , \end{cases}$$

dus

$$Y_2(x) = w(x) + \frac{\text{const}}{\varepsilon a} xY_1(x)$$

$$Y_1(x+a) = \varepsilon Y_1(x) ,$$

waarbij de constante nul is als $y_2(a) = 0$ en $y_1'(a) = 0$, terwijl verder $y_1(a) + y_2'(a) = 2\varepsilon$.

2.1.4. Enkele opmerkingen over eigenwaarden en eigenfuncties

2.1.41. Eigenwaarden zijn die waarden van λ , waarvoor de Hill-vergelijking

$y'' + (\lambda + Q(x))y = 0$ tenminste één periodieke oplossing heeft met periode a of $2a$.

De oplossing met periode a heet heel-periodiek. De eigenwaarden zijn $\lambda_0, \lambda_1, \dots$, die met periode $2a$ heet half-periodiek. De eigenwaarden zijn λ'_1, λ'_2 , enz.

De corresponderende oplossingen zijn de eigenfuncties.

Een eigenwaarde is enkelvoudig of tweevoudig. Een enkelvoudige eigenwaarde heeft slechts één periodieke oplossing. Is er nog een oplossing, dan is de eigenwaarde tweevoudig ontaard.

Eigenwaarden in ruimere zin zijn die waarden van λ waarvoor de oplossingen uniform begrensd zijn in $-\infty < x < \infty$. Ze zijn altijd tweevoudig ontaard en zijn inwendige punten van de stabiliteitsintervallen.

Het aantal eigenwaarden is oneindig groot.

Δ is een gehele functie van λ van orde $\frac{1}{2}$, d.w.z.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Delta e^{-c_1 \sqrt{|\lambda|}} = c_2, \text{ met } c_1 \text{ en } c_2 \text{ als constanten.}$$

Zo'n functie heeft oneindig veel nulpunten.

Het asymptotische gedrag van λ_n en λ'_n is bekend. Het blijkt dat

$$\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

en

$$\lambda'_{2n} - \lambda'_{2n-1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

De instabiliteitsintervallen worden dus steeds smaller en naderen tot nul.

Verder is

$$\lambda'_{2n-1} = \left\{ (2n-1) \frac{\pi}{a} \right\}^2 + \frac{K}{(4n \frac{\pi}{a})^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\lambda'_{2n} = \left\{ (2n-1) \frac{\pi}{a} \right\}^2 + \frac{K}{(4n \frac{\pi}{a})^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\lambda_{2n-1} = \left(2n \frac{\pi}{a} \right)^2 + \frac{K}{(4n \frac{\pi}{a})^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\lambda_{2n} = \left(2n \frac{\pi}{a}\right)^2 + \frac{K}{\left(4n \frac{\pi}{a}\right)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

waarbij

$$\int_0^a Q(x) dx = 0 \quad \text{en} \quad K = \frac{1}{a} \int_0^a Q^2(x) dx.$$

De eigenfuncties hebben nulpunten in $[0, a]$ en wel als volgt:
 eigenfuncties behorend bij λ_{2j-1} en λ_{2j} hebben $2j$ nulpunten,
 eigenfuncties behorend bij λ'_{2j-1} en λ'_{2j} hebben $2j - 1$ nulpunten.
 (Zie Haupt, Math. Annalen 1919, pag. 280.)

2.1.42. Orthogonaliteit van eigenfuncties

Twee heel-periodieke oplossingen (periode a) bij verschillende eigenwaarden zijn orthogonaal op $[0, a]$, d.w.z. als α_1 eigenwaarde is van y_1 en α_2 van y_2

$$\text{is} \quad \int_0^a y_1 y_2 dx = 0.$$

Twee half-periodieke oplossingen (periode $2a$) zijn bij verschillende eigenwaarden orthogonaal op $(0, 2a)$.

Elke combinatie van heel- en half-periodieke oplossingen is orthogonaal op $(0, 2a)$.

Het is mogelijk om $f(x)$, die periodiek is, te ontwikkelen in eigenfuncties

$$z(x), \text{ mits } \int_0^{2a} \{f''(x)\}^2 dx < \infty, \text{ dus}$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z_m(x).$$

Er zijn niet alleen oplossingen met periode a en $2a$, maar ook met periode $3a$, $4a$, $5a$ enz.

De karakteristieke vergelijking luidde

$$\sigma^2 - \Delta\sigma + 1 = 0.$$

Voer in $\sigma_1 = e^{a\mu}$, $\sigma_2 = e^{-a\mu}$ met $\mu \equiv \mu_1 \pmod{\frac{2\pi i}{a}}$. Dan is

$$\Delta = 2 \cosh a\mu.$$

We hadden vijf gevallen:

$$\left. \begin{array}{l}
 1) \quad 2 < \Delta < \infty \\
 2) \quad \Delta = 2 \\
 3) \quad -2 < \Delta < 2 \\
 4) \quad \Delta = -2 \\
 5) \quad -\infty < \Delta < -2
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \mu \equiv \pm \mu'_0 \\
 \mu \equiv 0 \\
 \mu \equiv \pm i\mu_0 \\
 \mu \equiv \pm \frac{\pi}{a} i \\
 \mu \equiv \pm \left(\mu''_0 + \frac{\pi i}{a} \right)
 \end{array} \pmod{\frac{2\pi i}{a}},$$

met $\mu_0, \mu'_0, \mu''_0 > 0$ en $\mu_0 \neq \frac{\pi}{a}$.

Hill-functies zijn functies, waarvoor $\mu = i\mu_0$ ($-\infty < \mu_0 < \infty$); het zijn de gevallen 2), 3) en 4).

Speciale waarden van μ_0 geven periodieke oplossingen. Er zijn vier gevallen:

- a) $\mu_0 = 2g \frac{\pi}{a}$, g geheel, $\sigma = 1$, tenminste één periodieke oplossing met periode a .
- b) $\mu_0 = (2g+1) \frac{\pi}{a}$, g geheel, $\sigma = -1$, tenminste één periodieke oplossing met periode $2a$.
- c) m, n geheel, $1 < m < n$, $(m, n) = 1$, $\mu_0 = (2g + \frac{m}{n}) \frac{\pi}{a}$, $\sigma = e^{\frac{m}{n} \pi i}$, $\sigma^n = (-1)^m$. Is m even, dan periode na , is n oneven, dan periode $2na$.
- d) m, n geheel, $1 < m < n$, $(m, n) = 1$, $\mu_0 = (2g+1 + \frac{m}{n}) \frac{\pi}{a}$, $\sigma = -e^{\frac{m}{n} \pi i}$, $\sigma^n = (-1)^{n+m}$. Is $m+n$ even, dan periode na , is $m+n$ oneven, dan periode $2na$.

Alle oplossingen zijn nu periodiek. In alle andere gevallen is er geen periodieke oplossing.

In de praktijk neemt men voor de periode π of 2π . Stelt men $a = 2\pi$, dan is

- 1) als $i\mu$ geheel is, bestaat er tenminste één periodieke oplossing met periode 2π ;
- 2) als $i\mu - \frac{1}{2}$ geheel is, bestaat er tenminste één periodieke oplossing met periode 4π ;
- 3) als $i\mu - \frac{m}{n}$ geheel is, bestaat er tenminste één periodieke oplossing met periode $2n\pi$.

In het laatste geval is $1 < m < n$ en $(m, n) = 1$.

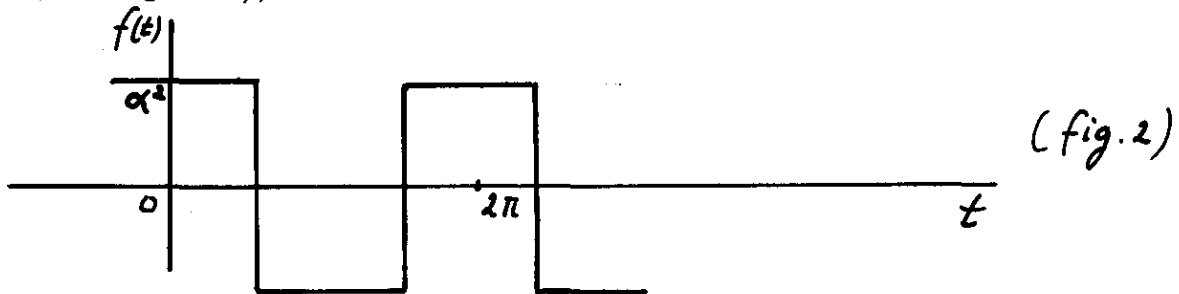
2.2. Toepassingen

2.2.1. We gaan uit van $\ddot{x} + F(t)x = 0$, waarbij

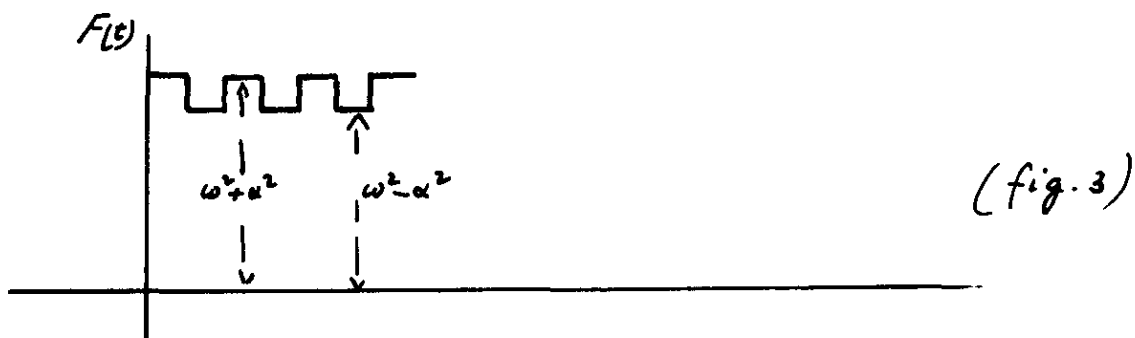
$$F(t) = \omega^2 + f(t).$$

Is $f(t) = 0$, dan is de oplossing $x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$.

$f(t)$ kan beschouwd worden als een modulatie van ω . Als dat in een rimpel gebeurt (zie figuur 2),



dan wordt $F(t)$ (zie figuur 3):



We kunnen $f(t)$ in een Fourierreeks ontwikkelen met periode 2π , er volgt

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \alpha^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \cos(2\nu+1)t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Verder is

$$\sigma = e^{\pm 2\pi i \mu}$$

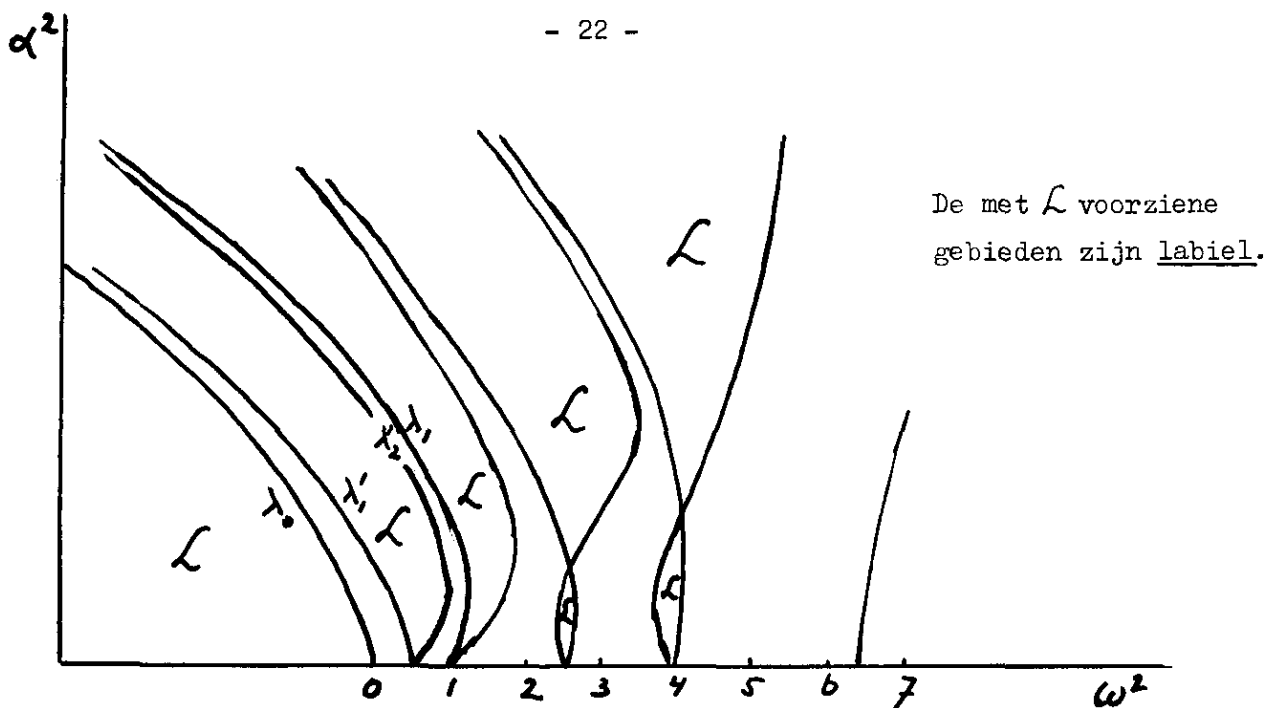
en

$$\cos 2\pi\mu = \cos(\mu\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}) \cos(\pi\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}) - \pi^2 \omega^2 \frac{\sin \pi\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\pi\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} \cdot \frac{\sin \pi\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{\pi\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \quad (\omega^2 > \alpha^2).$$

Het rechterlid is een gehele functie van alle parameters.

Is $\omega^2 < \alpha^2$ dan is

$$\cos 2\pi\mu = \cos \pi\sqrt{\omega^2 + \alpha^2} \cosh \pi\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} - \pi^2 \omega^2 \frac{\sin \pi\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\pi\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} \sinh \pi\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$



Voor α groot is het asymptotische gedrag moeilijk.

Voor een uitvoerige behandeling zie: B. v.d. Pol en M.J.O. Strutt: On the stability of solutions of Mathieu's equation (Philos. Mag. 5 (1928) p.18-38).

2.2.2. Golfvoortplanting van een electron in een periodiek potentiaalveld (ééndimensionaal).

Dit veld treedt op als een puls met periode 1.

Om dit te behandelen voeren we een deltafunctie in. k zij het golfgetal, U een maat voor de potentiële energie, U is constant. De vergelijking is

$$y'' + \left[k^2 - U \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \right] y = 0 .$$

Zonder storing is de oplossing $y = e^{ikx}$. We trachten $e^{i\mu x}$ te vinden. Nu is

$$y'' + k^2 y = U \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) y(x) = U \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \delta(x-n) .$$

Is $y(n)$ bekend voor $n = 1, 2, \dots$, dan kunnen we de vergelijking oplossen.

De algemene oplossing is:

$$y(x) = A \cos kx + B \sin kx + \frac{U}{k} \sum_{n=-\infty}^{[x]} y(n) \sin k(x-n) .$$

We gaan nog na, wanneer de reeks in het rechterlid convergent is en doen dit m.b.v. Floquet.

Zij $y(x) = e^{i\mu x} p(x)$ met $p(x+1) = p(x)$.

We beschouwen $\text{Im } \mu < 0$. Dit houdt in $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$. In dit geval is $A = B = 0$, dus

$$y(x) = \frac{U}{k} \sum_{-\infty}^{[x]} y(n) \sin k(x-n),$$

terwijl

$$y(n) = e^{i\mu n} p(n) = e^{i\mu n} p(0) = e^{i\mu n} y(0),$$

dus

$$\begin{aligned} \frac{y(x)}{y(0)} &= \frac{U}{k} \sum_{-\infty}^{[x]} e^{i\mu n} \sin k(x-n) = \\ &= \frac{U}{2ik} e^{i\mu[x]} \left\{ \frac{e^{ik(x-[x])}}{1 - e^{i(\mu-k)}} - \frac{e^{-ik(x-[x])}}{1 - e^{-i(\mu+k)}} \right\}. \end{aligned}$$

Definieer $Sa(x) \equiv [x] - x + \frac{1}{2}$, dan is

$$\frac{y(x)}{y(0)} = \frac{U}{4k} e^{i\mu([x] + \frac{1}{2})} \left\{ \frac{e^{ikSa(x)}}{\sin \frac{\mu+k}{2}} - \frac{e^{-ikSa(x)}}{\sin \frac{\mu-k}{2}} \right\}. \quad (1)$$

Daar $\lim_{x \downarrow 0} \frac{y(x)}{y(0)} = 1$, volgt er nog

$$\sin \frac{\mu+k}{2} \sin \frac{\mu-k}{2} = -\frac{U}{4} \frac{\sin k}{k}$$

of

$$\cos \mu = \cos k + \frac{U}{2} \frac{\sin k}{k}. \quad (2)$$

Daar we met analytische functies werken, moet dit voor alle μ en k gelden. Substitutie van (2) in (1) levert

$$\frac{y(x)}{y(0)} = \frac{e^{i\mu x}}{\sin k} \left\{ \sin \frac{\mu+k}{2} e^{i(\mu-k)Sa(x)} - \sin \frac{\mu-k}{2} e^{i(\mu+k)Sa(x)} \right\},$$

waarbij de vorm tussen accoladen een periodieke functie is met periode 1.

Nu is

$$\frac{e^{-\alpha Sa(x)}}{2 \sinh \frac{\alpha}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n + \alpha},$$

dus

$$\begin{aligned} \frac{y(x)}{y(0)} &= \frac{1}{\sin k} e^{i\mu x} \left\{ \sin \frac{\mu+k}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} -2 \sin \frac{\mu-k}{2} \frac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n - \mu + k} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\mu-k}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} -2 \sin \frac{\mu+k}{2} \frac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n - \mu - k} \right\} \end{aligned}$$

of

$$y(x) = y(0)U e^{i\mu x} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n x}}{k^2 - (2\pi n - \mu)^2} .$$

Opmerking. Men kan hetzelfde resultaat ook verkrijgen zonder δ -functies te gebruiken, maar door het invoeren van pulsen, gegeven als volgt

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\varepsilon} & |x| \leq \varepsilon ; \quad f(x+1) = f(x) \\ f(x) = 0 & \varepsilon < |x| < 1 - \varepsilon \\ & 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Als we stellen $s^2 = k^2 - \frac{U}{2\varepsilon}$ volgt er:

$$\cos \mu = \cos(2s\varepsilon)\cos k(1 - 2\varepsilon) - \frac{s^2 + k^2}{2sk} \sin(2s\varepsilon)\sin k(1 - 2\varepsilon) .$$

Voor $\varepsilon \downarrow 0$ wordt dit $\cos \mu = \cos k + \frac{U}{2} \frac{\sin k}{k}$.

Literatuur

Kronig-Penney: Proc. Roy. Soc. 130 (1931), 499.

Saxon-Hutner: Philips Res. Reps. 4 (1949), 81.

Luttinger: Philips Res. Reps. 6 (1951), 303.

Bottema: Nw. Arch. voor Wsk. 15 (1957), 157 (sol. 95).

In het voorgaande hebben we gezien dat er zowel stabiliteits- als instabiliteitsintervallen voorkomen bij het oplossen van de vergelijkingen

$$y'' + (\lambda + Q(x))y = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi) .$$

We noemen $(-\infty, \lambda_0)$ het 0^e instabiliteitsinterval,

$$(\lambda'_1, \lambda'_2) \quad " \quad 1^e \quad " \quad ,$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) \quad " \quad 2^e \quad " \quad .$$

Het blijkt (stelling van Borg), dat de oneven instabiliteitsintervallen verdwijnen als

$$Q(x + \frac{\pi}{2}) = Q(x) \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

en omgekeerd.

De primitieve periode van Q is dus $\frac{\pi}{2}$.

Alle instabiliteitsintervallen na $(-\infty, \lambda_0)$ verdwijnen als $Q(x) = \text{constant}$.

2.2.3. Zij $y'' + p(x)y = 0$ met $p(x)$ continu differentieerbaar, periode π en $p(x) = p(-x)$. We definiëren

$$p(x) = g(x) \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$p(x) = g(\pi - x) \quad (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi)$$

en nemen aan dat in $(0, \frac{\pi}{2})$ u_1 en u_2 genormaliseerde oplossingen zijn van de gegeven differentiaalvergelijking, dus

$$y_1(x) = u_1(x) \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) .$$

$$y_2(x) = u_2(x)$$

Dan is

$$y_1(x) = Pu_1(\pi - x) + Qu_2(\pi - x) \quad (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) .$$

$$y_2(x) = Ru_1(\pi - x) + Su_2(\pi - x)$$

In $x = \frac{\pi}{2}$ moeten de oplossingen aansluiten, dus

$$P = -S = (u_1 u_2' + u_2 u_1')_{x=\pi/2} ;$$

$$Q = -2(u_1 u_1')_{x=\pi/2} ; \quad R = 2(u_2 u_2')_{x=\pi/2} .$$

Verder is

$$2P = y_1(\pi) + y_2'(\pi) ,$$

terwijl $\sigma_1 = e^{i\nu\pi}$ en $\sigma_2 = e^{-i\nu\pi}$ waarbij σ_1 en σ_2 voldoen aan

$$\sigma^2 - 2P\sigma + 1 = 0 .$$

Hieruit blijkt dat

$$\cos \pi\nu = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = P = (u_1 u_2' + u_2 u_1')_{x=\pi/2} .$$

Daar $u_1 u_2' - u_2 u_1' = 1$ volgt er tenslotte

$$\cos^2 \frac{\pi\nu}{2} = u_1(\frac{\pi}{2})u_2'(\frac{\pi}{2}) . \tag{1}$$

Neem nu

$$Q(x) = 2\theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)2x}{(2n+1)^2} ,$$

dan is

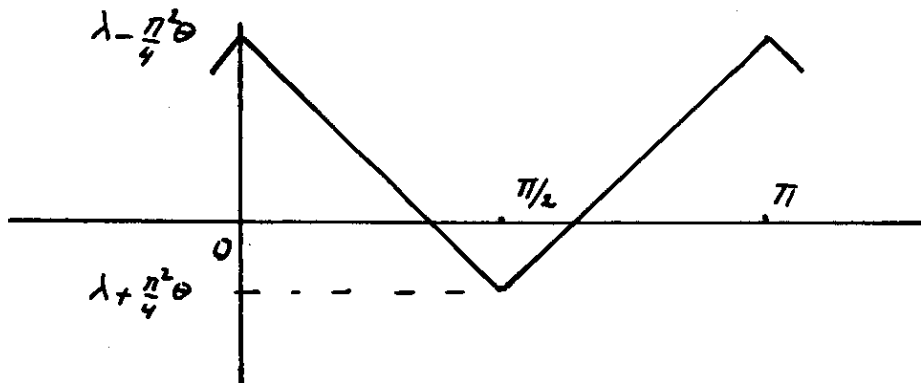
$$p(x) = \lambda - 2\theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)2x}{(2n+1)^2}$$

met $p(x)$ even in x , periode π en symmetrisch om $x = \frac{\pi}{2}$.

Uit de definitie van $g(x)$ volgt:

$$p(x) = g(x) = \lambda - \frac{\pi^2 \theta}{4} + \pi \theta x \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$p(x) = g(\pi - x) = \lambda + \frac{3\pi^2 \theta}{4} - \pi \theta x \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$



Voor $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ is de differentiaalvergelijking dus:

$$y'' + \left\{ \lambda - \frac{\pi^2 \theta}{4} + \pi \theta x \right\} y = 0.$$

We voeren als nieuwe veranderlijke in:

$$v = - \frac{1}{(\pi \theta)^{2/3}} \left(\lambda - \frac{\pi^2 \theta}{4} + \pi \theta x \right),$$

dan volgt er

$$\frac{d^2 y}{dv^2} = v y.$$

De oplossingen hiervan zijn de functies van Airy

$$Ai(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{t^3}{3} + vt \right) dt$$

en

$$Bi(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{t^3}{3} + vt} + \sin \left(\frac{t^3}{3} + vt \right) \right\} dt$$

met Wronski-determinant $= \frac{1}{\pi}$, dus

$$Ai(v)Bi'(v) - Ai'(v)Bi(v) = \frac{1}{\pi} .$$

Door de substitutie $\xi = \frac{2}{3} x^{2/3}$, $\xi > 0$, $x > 0$, volgt er

$$Ai(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} \{I_{-1/3}(\xi) - I_{1/3}(\xi)\}$$

en

$$Bi(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \{I_{-1/3}(\xi) + I_{1/3}(\xi)\}$$

waarbij $I_{-1/3}(\xi)$ en $I_{1/3}(\xi)$ Besselfuncties van de tweede soort zijn.

De functies $u_1(x)$ en $u_2(x)$ zijn lineaire combinaties van $Ai(v)$ en $Bi(v)$, stel nl.

$$v_0 = -\frac{\lambda - \frac{\pi^2 \theta}{4}}{(\pi \theta)^{2/3}} \quad \text{en} \quad v_1 = -\frac{\lambda + \frac{\pi^2 \theta}{4}}{(\pi \theta)^{2/3}} ,$$

dan is

$$u_1(x) = \pi [Bi'(v_0)Ai(v) - Ai'(v_0)Bi(v)]$$

en

$$u_2(x) = \frac{1}{\theta} (\pi \theta)^{2/3} [Bi(v_0)Ai(v) - Ai(v_0)Bi(v)] ,$$

dus

$$u_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi [Bi'(v_0)Ai(v_1) - Ai'(v_0)Bi(v_1)]$$

en

$$u_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi [Ai(v_0)Bi'(v_1) - Bi(v_0)Ai'(v_1)] .$$

Dit laatste volgt uit

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= \frac{1}{\theta} (\pi \theta)^{2/3} \left[-Bi(v_0)Ai'(v) \frac{\pi \theta}{(\pi \theta)^{2/3}} + Ai(v_0)Bi'(v) \frac{\pi \theta}{(\pi \theta)^{2/3}} \right] = \\ &= \pi [-Ai'(v)Bi(v_0) + Ai(v_0)Bi'(v)] , \end{aligned}$$

door substitutie van $x = \frac{\pi}{2}$, immers dan is $v = v_1$.

Er volgt tenslotte voor de karakteristieke vergelijking (1):

$$L \equiv u_1\left(\frac{\pi}{2}\right)u_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} Ai(v_0) & Bi(v_0) \\ Ai'(v_1) & Bi'(v_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Ai(v_1) & Bi(v_1) \\ Ai'(v_0) & Bi'(v_0) \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi^2} \cos \frac{\pi \mu}{2} .$$

2.2.31. λ en θ reëel

Als λ en θ reëel zijn, is L reëel.

Is L negatief of $> \frac{1}{\pi^2}$, dan is er geen reële oplossing μ .

Alle oplossingen van de vergelijking zijn in dit geval labiel.

We bekijken nu

$$0 \leq L \leq \frac{1}{\pi^2}.$$

Als $L = 0$, is $\mu = 1$, d.w.z. er is tenminste één periodieke oplossing met periode 2π .

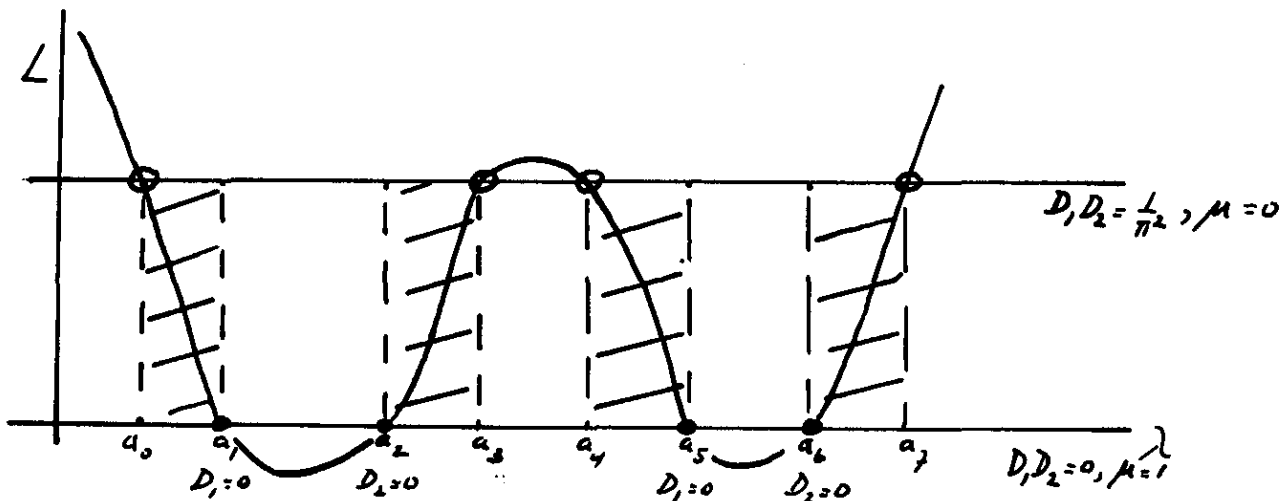
Als $L = \frac{1}{\pi^2}$ is $\mu = 0$, er is tenminste één periodieke oplossing met periode π .

Als $0 < L < \frac{1}{\pi^2}$ is $0 < \mu < 1$.

Alle oplossingen zijn nu begrensd. Is μ rationaal, dan zijn ze periodiek.

L is het product van twee determinanten D_1 en D_2 . Neem θ vast en

$-\infty < \lambda < \infty$. Er ontstaat nu de volgende grafiek:



- : periodieke oplossing met periode π ,
- : periodieke oplossing met periode 2π .

Enkele numerieke berekeningen (uitgevoerd zonder computer):

Neem $\theta = \frac{64}{\pi^4} = 0,657023$ en stel $\lambda = \frac{16b}{\pi^2} = 1,621139b$, dan is $v_0 = 1 - b$ en

$v_1 = -1 - b$. Verder is

$$D_1 = \begin{vmatrix} Ai(1-b) & Bi(1-b) \\ Ai'(-1-b) & Bi'(-1-b) \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad D_2 = \begin{vmatrix} Ai(-1-b) & Bi(-1-b) \\ Ai'(1-b) & Bi'(1-b) \end{vmatrix}.$$

De tabellen van Miller (1946) betreffende Airy-functies geven het volgende verband:

b	D_1	D_2	$D_1 D_2$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
- 1	0.86927	1.48850	1.2939
0	0.09241	0.51593	0.0477
0.18	0	> 0	0
0.2	- 0.00937	0.38118	- 0.000357
0.9	- 0.25759	0.03167	- 0.00816
0.98	< 0	0	0
1.0	- 0.28210	- 0.00477	0.0013
2.0	- 0.39455	- 0.22642	0.0893
2.3	- 0.39433	- 0.25239	0.09953
2.4	- 0.39159	- 0.25781	0.10095
2.5	- 0.38765	- 0.26175	0.10147 ($\pi^{-2} = 0.10132$)
2.6	- 0.38259	- 0.26429	0.10112
3.0	- 0.35257	- 0.26209	0.0924
4.0	- 0.22999	- 0.19345	0.0445
5.0	- 0.07857	- 0.07758	0.0061 etc.

Uit de tabellen (mits opgesteld met kleinere intervallen en voor nog grotere waarden van b berekend) blijkt:

$$\left. \begin{array}{l}
 D_1 D_2 > \frac{1}{\pi^2} \quad \text{als } b < -0.2 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2.45 < b < 2.57 \\
 \\
 D_1 D_2 < 0 \quad \text{als } 0.18 < b < 0.98 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 5.5 < b < 5.6
 \end{array} \right\} \text{ instabiel}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 0 \leq D_1 D_2 < \frac{1}{\pi^2} \quad \text{als } -0.2 < b < 0.18 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0.98 < b < 2.45 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2.57 < b < 5.5
 \end{array} \right\} \text{ stabiel .}$$

Verder blijkt:

$$a_0 = -0.32; a_1 = 0.29; a_2 = 1.60; a_3 = 3.97; a_4 = 4.16; a_5 = 8.91; a_6 = 9.07$$

enzovoorts.

Als $\theta \rightarrow 0$, dan volgt er:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} a_0 = 0; \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} a_1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} a_2 = 1; \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} a_3 = \lim_{\theta \rightarrow 0} a_4 = 2^2 = 4;$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} a_5 = \lim_{\theta \rightarrow 0} a_6 = 3^2 = 9.$$

2.2.4. De stelling van Borg

Beschouw $y'' + (\lambda + Q(x))y = 0$ voor $0 \leq x \leq \pi$ onder de bekende periodiciteitscondities. Het is nu mogelijk om de instabiliteitsintervallen, de eigenwaarden en de eigenfuncties te berekenen. De instabiliteitsintervallen zijn $(-\infty, \lambda_0)$; (λ'_1, λ'_2) ; (λ_1, λ_2) ; (λ'_3, λ'_4) , ..., die we in deze volgorde het 0^e , 1^e , 2^e , 3^e enz. instabiliteitsinterval zullen noemen. In bepaalde gevallen is het mogelijk om sommige of alle instabiliteitsintervallen te doen verdwijnen. We willen bekijken wanneer de oneven intervallen, dus het 1^e , 3^e , 5^e enz. verdwijnen. De voorwaarde waaronder dit geldt wordt uitgesproken in de stelling van Borg, die zegt dat een nodige en voldoende voorwaarde is, dat

$$Q(x + \frac{\pi}{2}) = Q(x) \quad \text{voor} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$$

We tonen alleen aan, dat de voorwaarde voldoende is.

Neem aan, dat $u_1(x)$ en $u_2(x)$ genormeerde oplossingen zijn in $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Dan is

$$\begin{aligned} y_1(x) &= u_1(x); \quad y_2(x) = u_2(x) \quad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ y_1(x) &= Pu_1(x - \frac{\pi}{2}) + Qu_2(x - \frac{\pi}{2}) \\ y_2(x) &= Ru_1(x - \frac{\pi}{2}) + Su_2(x - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad \text{voor} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

Aanpassen in $x = \frac{\pi}{2}$ geeft

$$\begin{aligned} u_1(\frac{\pi}{2}) &= Pu_1(0) + Qu_2(0) = P \\ u_1'(\frac{\pi}{2}) &= Pu_1'(0) + Qu_2'(0) = Q \\ u_2(\frac{\pi}{2}) &= Ru_1(0) + Su_2(0) = R \\ u_2'(\frac{\pi}{2}) &= Ru_1'(0) + Su_2'(0) = S, \end{aligned}$$

dus

$$y_1(x) = u_1(\frac{\pi}{2})u_1(x - \frac{\pi}{2}) + u_1'(\frac{\pi}{2})u_2(x - \frac{\pi}{2})$$

en

$$y_2(x) = u_2(\frac{\pi}{2})u_1(x - \frac{\pi}{2}) + u_2'(\frac{\pi}{2})u_2(x - \frac{\pi}{2}),$$

waaruit

$$y_1(\pi) = (u_1 u_1 + u_1' u_2)_{x=\pi/2} \quad \text{en} \quad y_2(\pi) = (u_2 u_1 + u_2' u_2)_{x=\pi/2},$$

dus

$$\begin{aligned}\Delta &= y_1(\pi) + y_2'(\pi) = u_1^2 + 2u_1'u_2 + (u_2')^2 = \\ &= (u_1 + u_2')^2 - 2(u_1u_2' - u_1'u_2) = (u_1 + u_2')^2 - 2 ,\end{aligned}$$

of

$$\Delta + 2 = [u_1(\frac{\pi}{2}) + u_2'(\frac{\pi}{2})]^2 \geq 0 ,$$

waarmee het gestelde is aangetoond.

Voorbeeld. $\cos 4x$ heeft een primitieve periode $\frac{\pi}{2}$; $\cos 2x$ heeft een primitieve periode π . $\cos 4x + \varepsilon \cos 2x$ heeft primitieve periode π als $\varepsilon \neq 0$ en primitieve periode $\frac{\pi}{2}$ als $\varepsilon = 0$. Als $\varepsilon \rightarrow 0$, dan blijkt $\lambda_1'(\varepsilon) \rightarrow \lambda_2'(\varepsilon)$ etc.

Het is ook mogelijk om ervoor te zorgen dat alle even intervallen verdwijnen, d.w.z. in dit geval is $\lambda_1 = \lambda_2$; $\lambda_3 = \lambda_4$ enz. Dit komt voor bij toepassingen op het gebied van frequentie-modulatie, waarbij als differentiaalvergelijking optreedt: $(1 + a \cos 2x)y'' + cy = 0$ met $|a| < 1$.

Literatuur

Cambi, Proc. I.R.E. 36 (1948), p. 42-49;

Proc. Roy. Soc. Edinb. 63 (1949), p. 27-51.

3.1. Mathieu-functies

De Mathieu-functies zijn tevoorschijn gekomen bij het onderzoek van trillingen aan een elliptisch membraan (1868).

De Mathieu-vergelijking is een bijzonder geval van de Hill-vergelijking en ontstaat door separatie in elliptische cylindercoördinaten van de golfvergelijking $\Delta\Phi + k^2\Phi = 0$.

Neem

$$x + iy = \cosh(\xi + i\eta) ,$$

dan is

$$x = \cosh \xi \cos \eta$$

$$y = \sinh \xi \sin \eta \quad \text{met } 0 \leq \xi \leq \infty ; -\pi < \eta \leq \pi .$$

Voor $\xi = \text{constant}$ volgt hieruit de ellips

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{\sinh^2 \xi} = 1 ,$$

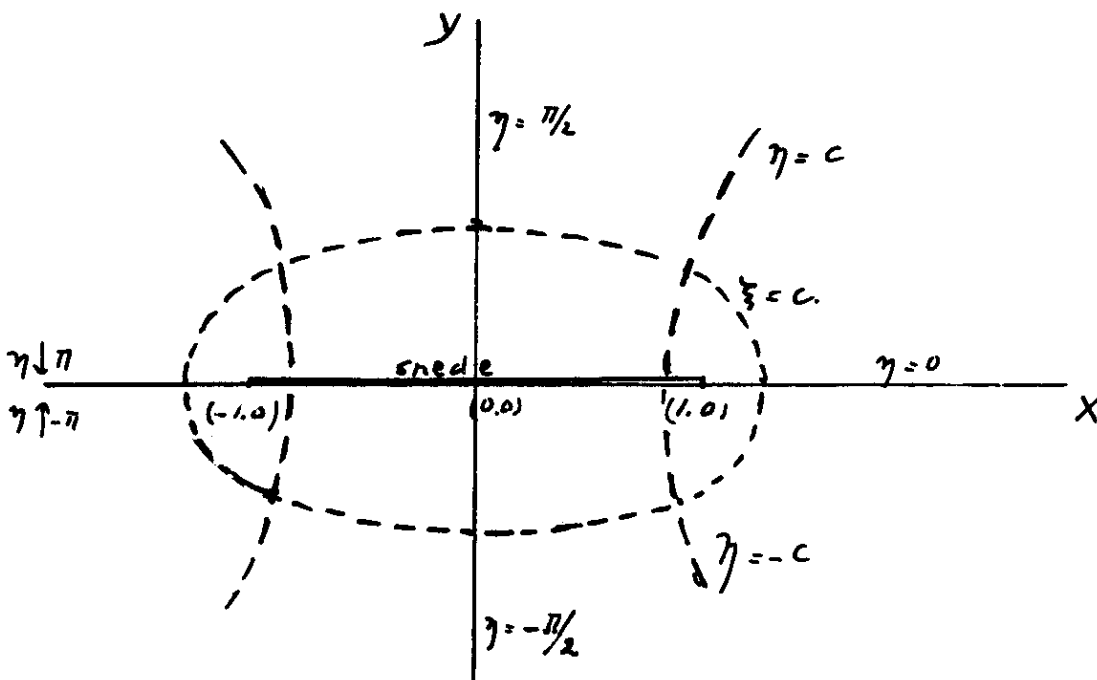
voor $\eta = \text{constant}$ de hyperbool

$$\frac{x^2}{\cos^2 \eta} - \frac{y^2}{\sin^2 \eta} = 1 .$$

De ellipsen en hyperbolen hebben als brandpunten

$$(-1,0) \quad \text{en} \quad (1,0)$$

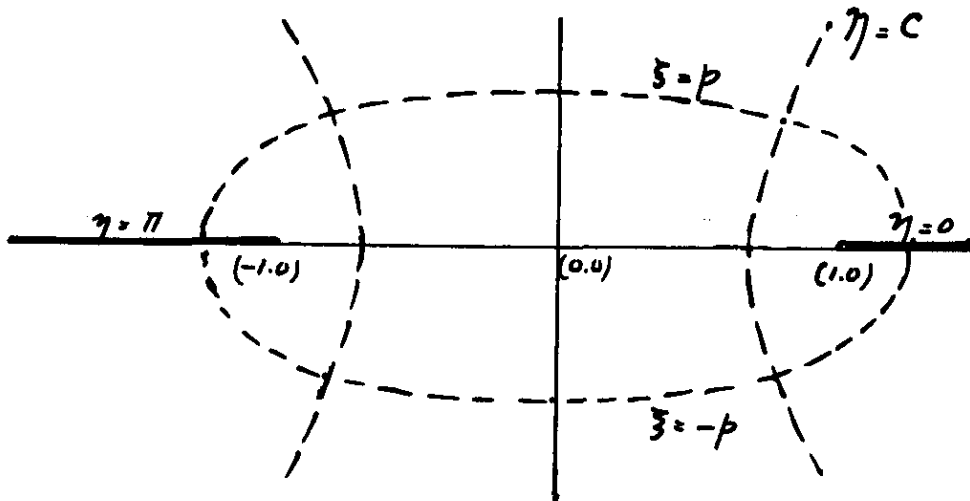
en vormen dus een stelsel confocale kegelsneden.



Het gebied buiten de snede kan omkeerbaar eenduidig analytisch worden afgebeeld op de cylinder $\begin{cases} 0 < \xi < \infty \\ -\pi < \eta \leq \pi \end{cases}$.

Opmerking. Men kan ook nog anders te werk gaan, nl. neem $\begin{cases} -\infty < \xi < \infty \\ 0 \leq \eta \leq \pi \end{cases}$.

De snede is hier $\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ y = 0 \end{cases}$.



Het gebied buiten de snede kan omkeerbaar eenduidig analytisch worden afgebeeld op $\begin{cases} -\infty < \xi < \infty \\ 0 \leq \eta \leq \pi \end{cases}$.

3.2. Separatie van variabelen

We substitueren de in 3.1 ingevoerde elliptische coördinaten in de groepsvergelijking en er volgt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + k^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) \Phi = 0.$$

Stel $\Phi = X(\xi)Y(\eta)$ dan volgt er door separatie:

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + (-\Lambda + k^2 \cosh^2 \xi)X = 0 \quad \xi \geq 0$$

en

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + (\Lambda - k^2 \cos^2 \eta)Y = 0 \quad -\pi < \eta \leq \pi.$$

De beide vergelijkingen gaan in elkaar over door de substitutie $\eta = i\xi$ ($i^2 = -1$). Het komt er op neer, dat we maar één vergelijking hebben te onderzoeken.

De differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\Lambda - k^2 \cos^2 z)y = 0$$

wordt de (angulaire) Mathieu-functie genoemd.

De coëfficiënt $\Lambda - k^2 \cos^2 z$ heeft periode π .

In de literatuur komen verschillende andere notaties voor:

Whittaker	$y'' + (a + 16q \cos 2z)y = 0$
Ince	idem
Goldstein	$y'' + (a - 16q \cos 2z)y = 0$
Strutt	$y'' + (\lambda - 2h^2 \cos 2z)y = 0$
Meixner-Schäpfke	idem.

Het verband tussen de diverse parameters is

$$\begin{cases} q = -\frac{1}{8} h^2 = -\frac{1}{32} k^2 \\ a = \lambda = \Lambda - \frac{1}{2} k^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2 = \frac{1}{4} k^2 = -8q \\ \lambda = \Lambda - \frac{1}{2} k^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2 = -32q = 4h^2 \quad (k = 2h) \\ \Lambda = a - 16q = \lambda + 2h^2 \end{cases}$$

De vergelijking is invariant voor de overgang: $z \rightarrow -z$. De Floquet-oplossingen zijn ($\mu \not\equiv 0 \pmod{i}$):

$$y(z) = Ae^{\mu z} \Phi(z) + Be^{-\mu z} \Phi(-z) .$$

Hierbij is $\Phi(z + \pi) = \Phi(z)$ een gehele transcendente functie met periode π .

Voor μ zijn er drie mogelijkheden:

- a) μ reëel,
- b) μ zuiver imaginair,
- c) μ complex met imaginair stuk i .

Als $\mu \equiv 0 \pmod{i}$ kan er bewezen worden, dat er maar één periodieke oplossing is, dus

$\mu \equiv 0 \pmod{2i}$ geeft één oplossing met periode π (heel-periodiek)

$\mu \equiv i \pmod{2i}$ geeft één oplossing met periode 2π (half-periodiek).

μ -waarden, die congruent $2i$ zijn, behoeven we niet als verschillend te beschouwen. Ook kunnen we dan van het \pm teken afzien.

Opmerking. In sommige literatuur wordt beweerd, dat men de karakteristieke exponent van de Mathieu-vergelijking reëel of zuiver imaginair kan stellen. Dat klopt niet met geval c) hierboven, immers stel $\mu = \mu_1 + i$ met μ_1 reëel, dan is

$$e^{\mu z} \Phi(z) = e^{\mu_1 z} e^{iz} \Phi(z) = e^{\mu_1 z} \Phi(z),$$

dus $\Psi(z) = e^{iz} \Phi(z)$ heeft periode 2π , daar

$$\Psi(z + 2\pi) = e^{i(z+2\pi)} \Phi(z + 2\pi) = e^{iz} \Phi(z) = \Psi(z).$$

Indien men dus zegt, dat de Mathieu-vergelijking een particuliere oplossing heeft van de vorm $e^{\mu z} \Phi(z)$, waarbij $\Phi(z)$ een periode 2π heeft, dan is het correct als de exponent μ òf reëel òf zuiver imaginair is bij reële λ en k^2 . In het laatste geval kunnen we zonder de algemeenheid te schaden $\text{Im } \mu$ tussen 0 en $\frac{1}{2}$ ingelegd denken (inclusief de grenzen). Het nadeel hiervan is echter dat 2π niet de primitieve periode van $\Phi(z)$ behoeft te zijn en oplossingen met primitieve periode $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ worden enigszins verdonkeremaand.

3.3. Eigenschappen van de oplossingen van de Mathieu-vergelijking

3.3.1. We gaan uit van de notatie van Meixner-Schäpfke

$$y''(z) = (\lambda - 2h^2 \cos 2z)y(z) = 0. \quad (1)$$

In de meeste toepassingen zijn λ en h^2 reëel, terwijl z reëel of zuiver imaginair is.

We zullen in het vervolg de voorkomende parameters en de onafhankelijke variabelen complex nemen. We verwijzen geregeld naar: J. Meixner-F.W. Schäpfke: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, 1954, Springer Verlag, Berlin. De verwijzing zal plaats vinden door de aanduiding: (M.-S., pag. ...).

1) Elke oplossing is een gehele functie van z , omdat (1) geen singulariteiten heeft in het eindige. Bovendien zijn ze transcendent, afgezien van de gevallen $y \equiv 0$ en $\lambda = h^2 = 0$. De door parameter-onafhankelijke beginvoorwaarden $y(z_0) = a_0$ en $y'(z_0) = a_1$ gedefinieerde oplossingen zijn gehele functies van z , λ en h^2 en voor vaste z ten hoogste van de orde $\frac{1}{2}$ in de parameters λ en h^2 (M.-S. pag. 99).

Over de invoering van het begrip orde, zie M.-S. pag. 37 e.v.

2) Zoals we vroeger hebben gezien geldt voor de Wronski-determinant van de oplossingen y_1 en y_2 :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C \exp \left[- \int_0^z P(t) dt \right],$$

als $P(z)$ de coëfficiënt van y' is en C een constante $\neq 0$ (zie dit diktaat blz. 4). Daar in (1) geldt $P(z) \equiv 0$, volgt dat voor twee onafhankelijke oplossingen van (1):

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \text{constant.}$$

Zoals direct is in te zien blijkt dat (1) invariant is voor de volgende substituties

$$z \rightarrow -z$$

$$z \rightarrow z \pm \pi$$

$$z \rightarrow z \pm \frac{\pi}{2}; \quad h^2 \rightarrow -h^2.$$

Conclusie. Is $y(z, \lambda, h^2)$ een oplossing van (1), dan zijn ook $y(-z, \lambda, h^2)$ en $y(z \pm \pi, \lambda, h^2)$ oplossingen van (1); is $y(z, \lambda, -h^2)$ een oplossing van $y''(z) + (\lambda + 2h^2 \cos 2z)y(z) = 0$, dan zijn $y(z \pm \frac{\pi}{2}, \lambda, -h^2)$ oplossingen van (1).

3.3.2. Het fundamenteelsysteem van oplossingen

Stel dat y_1 en y_2 een genormaliseerd fundamenteelsysteem van oplossingen vormen met

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1,$$

dan is

$$y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z) = W(y_1, y_2) = 1.$$

Verder is:

$$y_1(-z) = y_1(z); \quad y_2(-z) = -y_2(z);$$

$$y_1(z \pm \pi) = y_1(\pi)y_1(z) \pm y_1'(\pi)y_2(z)$$

en

$$y_2(z \pm \pi) = \pm y_2(\pi)y_1(z) + y_2'(\pi)y_2(z).$$

We tonen eerst aan dat $y_1(-z) = y_1(z)$. $y_1(-z)$ is een oplossing van (1), dus

$$y_1(-z) = \alpha y_1(z) + \beta y_2(z)$$

$$-y_1'(-z) = \alpha y_1'(z) + \beta y_2'(z).$$

Stel $z = 0$, dan komt er:

$$y_1(0) = 1 = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) = \alpha, \quad \text{dus } \alpha = 1$$

en

$$-y_1'(0) = 0 = \alpha y_1'(0) + \beta y_2'(0) = \beta, \quad \text{dus } \beta = 0,$$

waaruit het gestelde volgt.

Analoog is te bewijzen dat $y_2(-z) = -y_2(z)$.

Om aan te tonen dat

$$y_1(z + \pi) = y_1(\pi)y_1(z) + y_1'(\pi)y_2(z)$$

merken we op dat $y_1(z + \pi)$ een oplossing van (1) is, dus

$$y_1(z + \pi) = \alpha y_1(z) + \beta y_2(z)$$

$$y_1'(z + \pi) = \alpha y_1'(z) + \beta y_2'(z).$$

Stel $z = 0$, dan is

$$y_1(\pi) = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) = \alpha$$

en

$$y_1'(\pi) = \alpha y_1'(0) + \beta y_2'(0) = \beta,$$

dus

$$y_1(z + \pi) = y_1(\pi)y_1(z) + y_1'(\pi)y_2(z).$$

Op analoge wijze volgen de andere betrekkingen.

Door substitutie van $z = \pi$ in $y_1(z - \pi) = y_1(\pi)y_1(z) - y_1'(\pi)y_2(z)$ volgt er

$$y_1^2(\pi) - y_1'(\pi)y_2(\pi) = 1. \quad (2)$$

Stellen we $z = \pi$ in $y_2(z - \pi) = -y_2(\pi)y_1(z) + y_2'(\pi)y_2(z)$, dan blijkt dat

$$0 = y_2(\pi)(y_2'(\pi) - y_1(\pi)).$$

Is $y_2(\pi) \neq 0$, dan is $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$. Is $y_2(\pi) = 0$, dan blijkt uit (2) dat $y_1^2(\pi) = 1$, dus $y_1(\pi) = \epsilon = \pm 1$. Met behulp van de Wronskiaan vinden we

$$y_1(\pi)y_2'(\pi) - y_1'(\pi)y_2(\pi) = 1,$$

dus

$$y_1(\pi)y_2'(\pi) = 1,$$

waaruit volgt in verband met het bovenstaande

$$y_2'(\pi) = y_1(\pi) = \epsilon.$$

Er bestaan nog meer van dit soort betrekkingen, zoals bv.

$$\begin{aligned} y_1(\pi) + 1 &= 2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_1(\pi) - 1 &= 2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_1'(\pi) &= 2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_2(\pi) &= 2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{M.-S. pag. 100}). \end{aligned}$$

Als we de som bekijken van $y_1(z + \pi)$ en $y_1(z - \pi)$, dan blijkt dat

$$y_1(z + \pi) + y_1(z - \pi) = 2y_1(\pi)y_1(z),$$

en analoog

$$y_2(z + \pi) + y_2(z - \pi) = 2y_2'(\pi)y_2(z).$$

Verder kunnen we nog het volgende opmerken: In (2.2.2) hebben we gevonden

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2P = \sigma_1 + \sigma_2 = e^{i\nu\pi} + e^{-i\nu\pi} = 2 \cos \nu\pi,$$

als ν de Floquet-exponent is. Daar volgens het hierboven gevondene

$y_1(\pi) = y_2'(\pi)$ is dus $y_1(\pi) = y_2'(\pi) = \cos \nu\pi$, dus

$$y_1(z + \pi) + y_1(z - \pi) = 2 \cos \nu\pi \cdot y_1(z)$$

en

$$y_2(z + \pi) + y_2(z - \pi) = 2 \cos \nu\pi \cdot y_2(z).$$

D.w.z. voor elke oplossing $y(z)$ van de Mathieu-vergelijking geldt

$$y(z + \pi) + y(z - \pi) = 2 \cos \nu\pi \cdot y(z).$$

3.3.3. Coëxistentie van oplossingen

In 2.1.33 en 2.1.34 hebben we gevonden: Als $y_2(\pi) \neq 0$, dan geldt wegens $y_1(\pi) = \varepsilon$:

$$\begin{cases} Y_1(z) = y_2(\pi)y_1(z) \\ Y_2(z) = y_2(z) \\ Y_1(z + \pi) = \varepsilon Y_1(z) \\ Y_2(z + \pi) = \varepsilon Y_2(z) + Y_1(z) \end{cases} \quad (3)$$

Is $y_2(\pi) = 0$, dan blijkt

$$\begin{cases} Y_1(z) = y_2(z) \\ Y_2(z) = y_1(z) \\ Y_1(z+\pi) = \varepsilon Y_1(z) \\ Y_2(z+\pi) = \varepsilon Y_2(z) + y_1'(\pi) Y_1(z) . \end{cases} \quad (4)$$

We zien hieruit dat één van de twee oplossingen Y_1, Y_2 te identificeren is met één van de twee genormaliseerde oplossingen y_1, y_2 .

Als $y_2(\pi) \neq 0$ is dus, als we (3) gebruiken

$$y_1(z+\pi) = \frac{Y_1(z+\pi)}{y_2(\pi)} = \frac{\varepsilon Y_1(z)}{y_2(\pi)} = \varepsilon y_1(z)$$

en

$$y_2(z+\pi) = \varepsilon y_2(z) + y_2(\pi) y_1(z) .$$

Als $y_2(\pi) = 0$ vinden we door gebruik te maken van (4)

$$y_2(z+\pi) = \varepsilon y_2(z)$$

$$y_1(z+\pi) = \varepsilon y_1(z) + y_1'(\pi) y_2(z) .$$

Conclusie.

Als $y_2(\pi) \neq 0$, is $y_1(z)$ een Floquet-oplossing van (1),

als $y_2(\pi) = 0$, is $y_2(z)$ een Floquet-oplossing van (1).

Definiëren we weer $w(z)$ (zie 2.1.32) met $w(z+\pi) = \varepsilon w(z)$, dan volgt

in het eerste geval: $w(z) = \pi y_2(z) - \varepsilon z y_2(\pi) y_1(z)$: oneven in z ,

in het tweede geval: $w(z) = \pi y_1(z) - \varepsilon z y_1'(\pi) y_2(z)$: even in z .

In M.-S. wordt $\mu = iv$ gesteld, dus $\sigma = e^{\pi v i}$ (voor definitie van σ zie 1.2, 1.2.1 en 1.2.2).

De karakteristieke vergelijking

$$\sigma^2 - (y_1(\pi) + y_2'(\pi))\sigma + 1 = 0$$

wordt

$$\sigma^2 - 2y_1(\pi, \lambda, h^2)\sigma + 1 = 0 ,$$

dus

$$y_1(\pi, \lambda, h^2) = \cos v\pi .$$

v heet de karakteristieke exponent van de Mathieu-vergelijking.

Als v voldoet aan $\cos v\pi = y_1(\pi, \lambda, h^2)$ is er een oplossing $y(z)$ van (1) die voldoet aan

$$y(z + \pi) = e^{i\nu\pi} y(z) \neq 0 .$$

Meixner noteert deze oplossing met $me_{\nu}(z)$ of beter $me_{\nu}(z; \lambda, h^2)$.

Is de normering nog niet vastgelegd dan komt er nog een multiplicatieve factor bij.

Als $\nu \neq$ geheel, dan zijn de Floquet-oplossingen van (1) $me_{\nu}(z)$ en $me_{-\nu}(z)$

lineair onafhankelijk, immers in dit geval is $e^{i\pi\nu} \neq e^{-i\pi\nu}$.

Verder geldt hier de eigenschap: $me_{-\nu}(z) = me_{\nu}(-z)$.

Bewijs. Elke Floquet-oplossing van (1) met karakteristieke exponent ν kunnen we schrijven als

$$me_{\nu}(z) = e^{i\nu z} u(z) \quad \text{met} \quad u(z + \pi) = u(z) .$$

Vervang z door $-z$, dan is $me_{\nu}(-z)$ weer een oplossing van (1) t.w.

$$me_{\nu}(-z) = e^{-i\nu z} u(-z) \quad \text{met} \quad u(-z + \pi) = u(-z) .$$

Dit is een Floquet-oplossing bij $-\nu$, dus $me_{-\nu}(z)$.

We hebben reeds bewezen (3.3.2) dat

$$y(z + \pi) + y(z - \pi) = 2 \cos \nu\pi \cdot y(z)$$

of

$$\begin{aligned} y(z + \pi) - e^{-i\pi\nu} y(z) &= e^{i\pi\nu} y(z) - y(z - \pi) \\ &= e^{i\pi\nu} [y(z) - e^{-i\pi\nu} y(z - \pi)] . \end{aligned}$$

Als we definiëren $\Psi(z) \equiv y(z + \pi) - e^{-i\pi\nu} y(z)$, dan blijkt hieruit

$$\Psi(z) = e^{i\pi\nu} \Psi(z - \pi) .$$

Als $y(z) \neq 0$ een willekeurige oplossing van (1) is, is òf $y(z)$ een Floquet-oplossing van (1) met exponent $-\nu$ òf $y(z + \pi) - e^{-i\nu\pi} y(z)$ een Floquet-oplossing van (1) met exponent ν .

Opmerking. Door de transformatie $z \rightarrow z + \frac{\pi}{2}$, $h^2 \rightarrow -h^2$ vinden we

$$\cos \pi\nu = y_1(\pi; \lambda, h^2) = y_1(\pi; \lambda, -h^2) ,$$

dus $\cos \pi\nu$ is een gehele functie van λ en h^4 .

3.4. Nader onderzoek van de oplossingen van de differentiaalvergelijking van Mathieu

Voor een uitvoerige behandeling hiervan wordt verwezen naar M.-S. 2.2, pag. 105-131.

3.4.1. Een recurrente betrekking

We voeren in de notatie: $me_{\nu}(z) = e^{i\nu z} u(z)$ met $u(z+\pi) = u(z)$ en stellen

$$z = \frac{1}{2i} \log t .$$

Deze transformatie is analytisch met singulariteiten in $t = 0$ en $t = \infty$. Doorloopt t een cirkel om de oorsprong $t = 0$, dan verandert z in $z+\pi$, immers:

$$\log t = \log|t| + i \arg t ,$$

dus $\Delta(\arg t) = 2\pi$, $\Delta(\log t) = 2\pi i$, waaruit volgt $\Delta z = \pi$. Alle oplossingen zijn gehele functies van z , dus $u(\frac{1}{2i} \log t)$ is buiten $t = 0$ en $t = \infty$ een éénwaardige holomorfe functie en we kunnen u dus in een Laurentreeks ontwikkelen:

$$u\left(\frac{1}{2i} \log t\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{2\rho} z^{\rho} ,$$

die in elke gesloten cirkelring $0 < r_1 \leq |t| \leq r_2 < \infty$ absoluut convergeert.

We zien hieruit:

E en Floquet-oplossing bij een karakteristieke exponent ν kan in een Fourierreeks worden ontwikkeld:

$$me_{\nu}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{2\rho} e^{i(\nu+2\rho)z} .$$

Deze reeksen met hun afgeleiden zijn convergent binnen een strook parallel aan de reële as in het complexe z -vlak. De coëfficiënten $c_{2\rho}$ voldoen dus aan de betrekking

$$\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} |c_{2\rho}|^{1/|\rho|} = 0 . \quad (5)$$

Differentiëren we de reeksontwikkeling formeel en substitueren we dit resultaat in de Mathieu-vergelijking, dan ontstaat er een recurrente betrekking tussen $c_{2\rho+2}$, $c_{2\rho}$ en $c_{2\rho-2}$, nl.

$$-h^2 c_{2\rho+2} + [\lambda - (\nu+2\rho)^2] c_{2\rho} - h^2 c_{2\rho-2} = 0 , \quad (6)$$

een homogene differentiaalvergelijking van de 2e orde. De coëfficiënten $c_{2\rho}$ zijn voor $h^2 \neq 0$, gegeven de randvoorwaarde (5), op een constante multiplicatieve factor na bepaald.

Bij gegeven v is λ te vinden. Dit geeft aanleiding tot een stelsel van oneindig veel vergelijkingen met oneindig veel onbekenden, die we de baas kunnen met behulp van de theorie der kettingbreuken.

3.4.2. Het oplossen van het stelsel vergelijkingen

$$A_k z_{k+1} + B_k z_k + C_k z_{k-1} = 0$$

met $A_k \neq 0$, $B_k \neq 0$, C_k willekeurig ($k = 1, 2, \dots$) (M.-S. 1.8, pag 89 e.v.).

De bovenstaande differentievergelijking is homogeen, d.w.z. als u_k en v_k oplossingen zijn is elke lineaire combinatie $\alpha u_k + \beta v_k$ ook een oplossing.

Zijn zekere z_i en z_{i+1} gegeven, dan is de oplossing eenduidig bepaald. Er zijn dus maximaal twee lineair onafhankelijke oplossingen.

Door een eenvoudige transformatie is het mogelijk om $A_k = C_k = 1$ te krijgen voor $k = 1, 2, \dots$.

We definiëren daartoe de van nul verschillende getallen $\alpha_0, \alpha_1, \dots$, zodanig dat

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{k+1} &= \alpha_{k-1} \frac{C_k}{A_k} \quad (k = 1, 2, \dots) . \end{aligned}$$

Definieer nu $D_k \equiv -\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \cdot \frac{B_k}{A_k}$ ($k = 1, 2, \dots$) en stel $z_k = \alpha_k y_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

dan volgt na substitutie:

$$y_{k+1} - D_k y_k + y_{k-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) . \quad (7)$$

Stelling. Als y_k en \bar{y}_k twee oplossingen zijn, dan is

$$\delta(y_k, \bar{y}_k) = \begin{vmatrix} y_{k+1} & y_k \\ \bar{y}_{k+1} & \bar{y}_k \end{vmatrix}$$

onafhankelijk van k .

Bewijs. Wegens (7) is

$$y_{k+1} - D_k y_k + y_{k-1} = 0$$

en ook

$$\bar{y}_{k+1} - D_k \bar{y}_k + \bar{y}_{k-1} = 0 .$$

Vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met \bar{y}_k , de tweede met y_k en trekken we af, dan volgt er:

$$y_{k+1}\bar{y}_k - y_k\bar{y}_{k+1} = y_k\bar{y}_{k-1} - \bar{y}_ky_{k-1}$$

of

$$\delta(y_k, \bar{y}_k) = \delta(y_{k-1}, \bar{y}_{k-1}) .$$

We kunnen nu twee gevallen onderscheiden:

A. $y_k \equiv 0$. Dit is niet interessant.

B. $y_k \neq 0$ voor $k = 1, 2, \dots$.

B1. Stel nu dat er een natuurlijk getal k bestaat zodat

$$|y_k| > |y_{k-1}| \frac{1}{|D_k| - 1} ,$$

dan blijkt: $y_k \neq 0$ en

$$|D_k||y_k| - |y_k| > |y_{k-1}| \quad \text{of} \quad |D_k||y_k| > |y_k| + |y_{k-1}| .$$

Uit (7) volgt

$$\begin{aligned} |y_{k+1}| &= |D_k y_k - y_{k-1}| \geq |D_k||y_k| - |y_{k-1}| \geq \\ &\geq |y_k| + |y_{k-1}| - |y_{k-1}| = |y_k| , \end{aligned}$$

dus

$$|y_{k+1}| > |y_k|$$

en verder

$$\begin{aligned} |y_{k+2}| &= |D_{k+1}y_{k+1} - y_k| \geq |D_{k+1}||y_{k+1}| - |y_k| > \\ &> |D_{k+1}||y_{k+1}| - |y_{k+1}| = (|D_{k+1}| - 1)|y_{k+1}| . \end{aligned}$$

N.B. In de discussie zullen we verder aannemen $|D_k| \geq 2$ ($k = 1, 2, \dots$). Mocht $|D_k| \geq 2$ worden vanaf $k = k_0 > 1$, dan laten we $(k - 1)$ vergelijkingen weg en nummeren de andere opnieuw.

Op grond van bovenstaande afspraak volgt:

$$|y_{k+2}| > (|D_{k+1}| - 1)|y_{k+1}| \geq |y_{k+1}| \quad \text{en} \quad \frac{|y_{k+1}|}{|y_{k+2}|} < \frac{1}{|D_{k+1}| - 1} .$$

Op analoge wijze tonen we nu aan

$$|y_{k+3}| > |y_{k+2}| \quad \text{en} \quad \left| \frac{y_{k+2}}{y_{k+3}} \right| < \frac{1}{|D_{k+2}| - 1} , \text{ enzovoorts,}$$

dus

$$0 < |y_k| < |y_{k+1}| < |y_{k+2}| \dots,$$

een monotoon stijgende rij.

Er volgt verder uit onze onderstelling

$$\begin{aligned} \left| D_{k+2} \frac{y_{k+2}}{y_{k+3}} - 1 \right| &= \left| \frac{D_{k+2} y_{k+2} - y_{k+3}}{y_{k+3}} \right| = \left| \frac{y_{k+1}}{y_{k+3}} \right| = \\ &= \left| \frac{y_{k+1}}{y_{k+2}} \cdot \frac{y_{k+2}}{y_{k+3}} \right| < \frac{1}{|D_{k+1}| - 1} \cdot \frac{1}{|D_{k+2}| - 1}. \end{aligned}$$

B2. Stel nu dat het tegenovergestelde van B1 waar is, d.w.z. voor alle $k = 1, 2, \dots$ geldt

$$|y_k| \leq |y_{k-1}| \frac{1}{|D_k| - 1}.$$

In dit geval is $y_{k-1} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left| D_k \frac{y_k}{y_{k-1}} - 1 \right| &= \left| \frac{D_k y_k - y_{k-1}}{y_{k-1}} \right| = \left| \frac{y_{k+1}}{y_{k-1}} \right| = \left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \cdot \frac{y_k}{y_{k-1}} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|D_{k+1}| - 1} \cdot \frac{1}{|D_k| - 1}. \end{aligned}$$

Er zijn dus a priori 3 typen van oplossingen mogelijk onder de voorwaarde $|D_k| \geq 2$, $k = 1, 2, \dots$.

I. Alle oplossingen zijn identiek nul.

II. Voor $k = 1, 2, 3, \dots$ geldt

$$|y_k| \leq \frac{1}{|D_k| - 1} |y_{k-1}|, \quad y_{k-1} \neq 0$$

$$\left| D_k \frac{y_k}{y_{k-1}} - 1 \right| \leq \frac{1}{|D_k| - 1} \cdot \frac{1}{|D_{k+1}| - 1}.$$

III. Vanaf zeker rangnummer k_1 geldt

$$|y_{k+1}| > (|D_k| - 1) |y_k|, \quad y_k \neq 0$$

$$\left| D_k \frac{y_k}{y_{k+1}} - 1 \right| < \frac{1}{|D_{k-1}| - 1} \cdot \frac{1}{|D_k| - 1}.$$

Uit het voorgaande blijkt dat de oplossingen van type II begrensd zijn.

De oplossingen van type III nemen onbegrensd toe. Neem nl. als initiaalvoorwaarde $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, dan liggen alle y_k vast en er blijkt dat $|y_k| \geq k$. Om dit te bewijzen is het voldoende aan te tonen dat $|y_{k+1}| \geq |y_k| + 1$, $k = 1, 2, \dots$. We doen dit met de methode van volledige inductie. Voor $k = 1$ is het juist. Neem aan dat het juist is voor $k = m - 1 > 0$. Uit de differentievergelijking (7) volgt:

$$y_{m+1} = D_m y_m - y_{m-1},$$

dus

$$|y_{m+1}| \geq |D_m| |y_m| - |y_{m-1}|.$$

Uit de inductie onderstelling volgt

$$|y_m| \geq |y_{m-1}| + 1 \quad \text{of} \quad -|y_{m-1}| \geq -|y_m| + 1,$$

dus

$$\begin{aligned} |y_{m+1}| &\geq |D_m| |y_m| - |y_{m-1}| \geq |D_m| |y_m| - |y_m| + 1 = \\ &= (|D_m| - 1) |y_m| + 1 \geq |y_m| + 1 \end{aligned}$$

wegens $|D_m| \geq 2$.

Daar er een oplossing van type III bestaat, volgt direct dat er geen twee lineair onafhankelijke oplossingen van type II kunnen bestaan. Als dat wel het geval was, zouden alle oplossingen begrensd zijn en dus automatisch tot type II behoren.

We bewijzen nu: y_k is juist dan een oplossing van type II als

$$\frac{y_1}{y_0} = \sqrt{\frac{1}{D_1}} - \sqrt{\frac{1}{D_2}} - \sqrt{\frac{1}{D_3}} \dots;$$

In dat geval is

$$\frac{y_i}{y_{i-1}} = \sqrt{\frac{1}{D_i}} - \sqrt{\frac{1}{D_{i+1}}} - \sqrt{\frac{1}{D_{i+2}}} \dots \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

De oplossing wordt dus gegeven met behulp van oneindige kettingbreuken.

Opmerking. Een uitvoerige behandeling van de theorie der kettingbreuken is te vinden in: O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (1913).

Zij

$$\sqrt{\frac{1}{D_i}} - \sqrt{\frac{1}{D_{i+1}}} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^{(i)}}{T_k^{(i)}},$$

waarbij $S_k^{(i)}$ en $T_k^{(i)}$ de door de initiaalvoorwaarden $S_{i-1}^{(i)} = -1$, $S_i^{(i)} = 0$; $T_{i-1}^{(i)} = 0$, $T_i^{(i)} = 1$ gegeven oplossingen van (7) zijn ($i = 1, 2, \dots$). $y_k \equiv 0$ is altijd een oplossing van (7), terwijl het mogelijk is om direct een oplossing van type III aan te geven, nl. $T_k^{(1)}$, die voldoet aan

$$|T_{k+1}^{(1)}| \geq |T_k^{(1)}| + 1,$$

zoals we hiervoor hebben aangetoond (B1).

We laten nu nog zien, dat de kettingbreuk (8) een oplossing van type II is.

We bewijzen eerst de convergentie van (8) en beperken ons tot $i = 1$, wat zonder bezwaar kan. Dan is

$$\begin{aligned} \frac{S_{k+1}^{(1)}}{T_{k+1}^{(1)}} - \frac{S_k^{(1)}}{T_k^{(1)}} &= \frac{S_{k+1}^{(1)}T_k^{(1)} - T_{k+1}^{(1)}S_k^{(1)}}{T_k^{(1)}T_{k+1}^{(1)}} = \frac{\delta(S_k^{(1)}, T_k^{(1)})}{T_k^{(1)}T_{k+1}^{(1)}} = \\ &= \frac{\delta(S_{k-1}^{(1)}, T_{k-1}^{(1)})}{T_k^{(1)}T_{k+1}^{(1)}} = \frac{(0 \cdot 0) - (-1)(1)}{T_k^{(1)}T_{k+1}^{(1)}} = \frac{1}{T_k^{(1)}T_{k+1}^{(1)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

In verband met de initiaalvoorwaarden volgt er:

$$T_k^{(i+1)} = S_k^{(i)} \quad \text{en} \quad S_k^{(i+1)} = -T_k^{(i)} + D_i S_k^{(i)}.$$

Op grond hiervan zijn

$$v_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^{(i)}}{T_k^{(i)}} \neq 0 \quad \text{voor alle } i$$

en er volgt

$$v_{i+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^{(i+1)}}{T_k^{(i+1)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D_i S_k^{(i)} - T_k^{(i)}}{S_k^{(i)}} = D_i - \frac{1}{v_i}$$

of

$$v_{i+1} + \frac{1}{v_i} = D_i \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots$$

Stelt men $y_0 = 1$ en $y_i = v_i y_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$) dan is y_i een oplossing van (7). Deze oplossing blijkt van het type II te zijn, immers wegens (9) is

$$v_1 = \frac{1}{T_1^{(1)}T_2^{(1)}} + \frac{1}{T_2^{(1)}T_3^{(1)}} + \dots$$

Wegens $|\mathbb{T}_k^{(1)}| \geq k$ volgt dus

$$|v_1| \leq \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots = 1$$

en analoog $|v_k| \leq 1$, waarmee de stelling is aangetoond.

3.5. Betrekkingen tussen de coëfficiënten van de reeksontwikkeling voor $m_{\nu}(z)$.

Zoals we in 3.4 hebben gedefinieerd is $m_{\nu}(z)$ te schrijven als

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_{2\rho} e^{i(\nu+2\rho)z}.$$

Hierbij is voor $h^2 \neq 0$

$$c_{2\rho+2} - \frac{\lambda - (\nu+2\rho)^2}{h^2} c_{2\rho} + c_{2\rho-2} = 0. \quad (1)$$

Opdat $c_{2\rho} \rightarrow 0$ voor $\rho \rightarrow \infty$, moet gelden:

$$\frac{c_{2\rho}}{c_{2\rho-2}} = \frac{1}{\frac{\lambda - (\nu+2\rho)^2}{h^2}} - \frac{1}{\frac{\lambda - (\nu+2\rho+2)^2}{h^2}} - \dots$$

Verder moet ook $c_{2\rho} \rightarrow 0$ voor $\rho \rightarrow -\infty$. Dit geeft

$$\frac{c_{2\rho-2}}{c_{2\rho}} = \frac{1}{\frac{\lambda - (\nu+2\rho-2)^2}{h^2}} - \frac{1}{\frac{\lambda - (\nu+2\rho-4)^2}{h^2}} - \dots$$

Deze kettingbreuken zijn in elke compacte verzameling ν, λ, h^2 ($h^2 \neq 0$) uniform convergent. Ze moeten elkaars reciproken zijn (of de ene nul en de andere ∞) en derhalve:

ν is dan en slechts dan karakteristieke exponent als aan één der volgende (en daarmee aan alle) kettingbreuken is voldaan:

$$\lambda - (\nu+2\rho)^2 - \frac{h^4}{\lambda - (\nu+2\rho+2)^2} - \dots = \frac{h^4}{\lambda - (\nu+2\rho-2)^2} - \frac{h^4}{\lambda - (\nu+2\rho-4)^2} - \dots \quad (\rho = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

Opmerking. Bij de substituties $h^2 \rightarrow -h^2$, $c_{2\rho} \rightarrow (-1)^\rho c_{2\rho}$, $v \rightarrow 2k \pm v$, $\rho \rightarrow -k \pm \rho$ (k geheel) gaat de recurrente betrekking (1) in zichzelf over. Noteert men $c_{2\rho} = c_{2\rho}(v; \lambda, h^2)$, dan blijken $c_{2\rho}(v; \lambda, h^2)$, $(-1)^\rho c_{2\rho}(v; \lambda, -h^2)$ en $c_{2(-k \pm \rho)}(2k \pm v; \lambda, h^2)$ onderling evenredig, waarbij de evenredigheidsconstante niet van ρ afhangt (zie M.-S. blz. 106, 117).

3.5.1. Enkele bijzondere gevallen voor v en ρ

3.5.11. Type I. $v = 0$, $\rho = 0$, $c_0 \neq 0$.

In dit geval is $c_{2\rho} = c_{-2\rho}$ ($\rho = 1, 2, \dots$). Substitutie van $v = 0$ en $\rho = 0$ in (2) geeft als eigenwaardevergelijking

$$\lambda = -\sqrt{\frac{2h^4}{4-\lambda}} - \sqrt{\frac{h^4}{16-\lambda}} \dots \quad (3)$$

De wortels van deze vergelijking noemen we $a_{2n}(h^2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

De oplossingen worden gegeven door

$$ce_{2n}(z; h^2) \equiv \sum_0^\infty A_{2\rho} \cos 2\rho z,$$

een oplossing, even in z met periode π . (Het symbool ce is een afkorting van cosine elliptic.)

We kunnen direct verifiëren, dat λ door (3) wordt voorgesteld. Stel nl.

$$y = A_0 + A_2 \cos 2z + A_4 \cos 4z + \dots$$

en substitueer dit in de Mathieu-vergelijking. Gelijktelling van coëfficiënten van $\cos 2nz$ geeft:

$$\begin{aligned} \lambda A_0 - h^2 A_2 &= 0 \\ h^2 A_4 - (4 - \lambda) A_2 + 2h^2 A_0 &= 0 \\ \vdots & \\ h^2 A_{2n+2} + (4n^2 - \lambda) A_{2n} + h^2 A_{2n-2} &= 0 \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Nodig en voldoende opdat $\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ is:

$$0 = -\lambda + \sqrt{\frac{-2h^4}{2^2 - \lambda}} + \sqrt{\frac{-h^4}{4^2 - \lambda}} \dots,$$

wat in overeenstemming is met (3).

3.5.12. Type II. $\nu = 1, \rho = 0, c_0 = c_{-2}$.

Hier is $c_{2\rho} = c_{-2\rho-2}$ ($\rho = 1, 2, \dots$). De oplossing wordt

$$ce_{2n+1}(z; h^2) = \sum_0^{\infty} A_{2\rho+1} \cos(2\rho+1)z ,$$

even in z met periode 2π .

De bijbehorende eigenwaardenvergelijking is

$$\lambda = 1 + h^2 - \sqrt{9 - \lambda} - \sqrt{25 - \lambda} - \dots$$

met wortels $a_{2n+1}(h^2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

3.5.13. Type III. $\nu = 1, \rho = 0, c_0 = -c_{-2}$.

In dit geval is $c_{2\rho} = -c_{-2\rho-2}$ ($\rho = 1, 2, \dots$). Nu wordt de oplossing

$$se_{2n+1}(z; h^2) = \sum_0^{\infty} B_{2\rho+1} \sin(2\rho+1)z ,$$

oneven in z met periode 2π .

De bijbehorende eigenwaardenvergelijking is

$$\lambda = 1 - h^2 - \sqrt{9 - \lambda} - \sqrt{25 - \lambda} \dots$$

met wortels $b_{2n+1}(h^2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

3.5.14. Type IV. $\nu = 0, \rho = 0, c_0 = 0$.

Nu is $c_{2\rho} = -c_{-2\rho}$ ($\rho = 1, 2, \dots$). Als oplossing vinden we

$$se_{2n+2}(z; h^2) = \sum_0^{\infty} B_{2\rho+2} \sin(2\rho+2)z ,$$

oneven in z met periode π .

De bijbehorende eigenwaardenvergelijking is

$$\lambda = 4 - \sqrt{16 - \lambda} - \sqrt{36 - \lambda} - \dots$$

met wortels $b_{2n+2}(h^2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Op analoge wijze als dat gebeurd is bij 3.5.11 is het mogelijk de eigenwaardenvergelijkingen van elk der andere typen te verifiëren.

3.5.2. Het verband tussen de verschillende typen

E.L. Ince heeft bewezen (Proc. Cambr. Phil. Soc. 21, p. 117 (1922) dat geen tweetal vergelijkingen uit typen I t/m IV (zie 3.5.1) gemeenschappelijke wortels heeft voor h^2 reëel.

Type I en IV hebben geen gemeenschappelijke wortel, immers voor een wortel λ van type IV is het rechterlid van type I oneindig.

Wat type II en type III betreft, ook deze hebben geen gemeenschappelijke wortel, want de rechterleden verschillen $2h^2$.

Er blijven over de volgende combinaties:

type I en II ; dan zou de algemene oplossing even in z zijn;

type II en III; dan zou de algemene oplossing een afgeleide nul hebben in
 $z = \pi/2$;

type II en IV ; dan zou de algemene oplossing een nulpunt hebben in $z = \pi/2$;

type III en IV ; dan zou de algemene oplossing oneven in z zijn.

De bovenstaande mogelijkheden kunnen niet optreden, omdat elk punt een gewoon punt is t.a.v. de Mathieu-vergelijking.

Conclusie. Voor reële $h^2 \neq 0$ bestaan er geen twee lineair onafhankelijke oplossingen met periode π en 2π (zie ook C.J. Bouwkamp, A note on Mathieu-functions, Kon. Akad. Wet., Vol. 51 no 7 (1948)).

De volgende betrekkingen bestaan nog tussen de typen:

$$ce_{2n}(z; -h^2) = (-1)^n ce_{2n}(z + \frac{\pi}{2}; h^2)$$

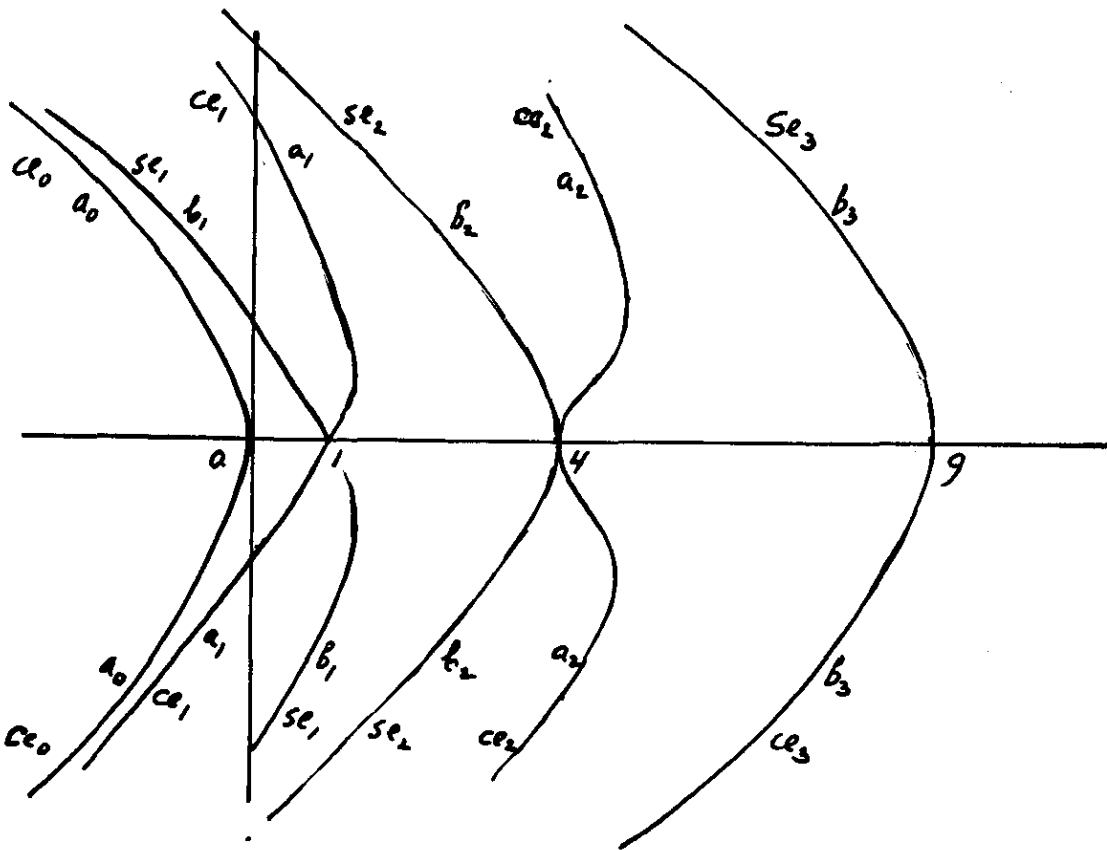
$$ce_{2n+1}(z; -h^2) = (-1)^n se_{2n+1}(z + \frac{\pi}{2}; h^2)$$

$$se_{2n+1}(z; -h^2) = (-1)^{n+1} ce_{2n+1}(z + \frac{\pi}{2}; h^2)$$

$$se_{2n+2}(z; -h^2) = (-1)^{n+1} se_{2n+2}(z + \frac{\pi}{2}; h^2)$$

(Goldstein: Trans. Cambr. Phil. Soc. 23 (1927), 304).

3.5.3. Het verband tussen λ en h^2



	even	oneven	even	oneven		
bijbehorende functies	ce_0	se_1	ce_1	se_2	ce_2	se_3
$h^2 > 0$	a_0	b_1	a_1	b_2	a_2	$b_3 \dots$
$h^2 < 0$	a_0	a_1	b_1	b_2	a_2	$b_3 \dots$
bijbehorende functies	ce_0	ce_1	se_1	se_2	ce_2	se_3
	even	even	oneven	oneven		

Van links naar rechts is de primitieve periode

$$\pi \quad 2\pi \quad 2\pi \quad \pi .$$

Verder geldt

$$a_{2n}(-h^2) = a_{2n}(h^2)$$

$$b_{2n+2}(-h^2) = b_{2n+2}(h^2)$$

$$a_{2n+1}(-h^2) = b_{2n+1}(h^2)$$

Er is een zeer gedetailleerd onderzoek gedaan in de loop der jaren. Voor bijzonderheden zie M.-S. 2.2 t/m 2.8.

Er is ook veel numeriek werk verricht, men zie hiervoor:

Nat. Bureau of Standards: Tables relating to Mathieu functions, Columbia Univ. Press, N.Y. 1951,

Blanch and Clemm: Tables relating to the radial Mathieu functions, vol. 1: functions of the first kind, vol. 2: functions of the second kind, Washington 1964.

3.5.4. Machtreeksen en eigenwaarden

Voor niet gehele waarden van ν is

$$\lambda_\nu(h^2) = \nu^2 + O(h^4).$$

(Stel $\rho = 0$ in 3.5, formule 2,)

Door successieve benadering blijkt dat

$$\lambda_\nu(h^2) = \nu^2 + \frac{1}{2(\nu^2 - 1)} h^4 + \frac{5\nu^2 + 7}{32(\nu^2 - 1)^3(\nu^2 - 4)} h^8 + \dots,$$

terwijl

$$a_0(h^2) = -\frac{1}{2} h^4 + \frac{7}{128} h^8 - \frac{29}{2304} h^{12} + \frac{68687}{18874368} h^{16} + \dots$$

⋮

$$a_6(h^2) = 36 + \frac{1}{70} h^4 + \frac{187}{43904000} h^8 + \frac{6743617}{92935987200000} h^{12} + \dots$$

Voor $m \geq 7$ geldt

$$\left. \begin{array}{l} a_m(h^2) \\ b_m(h^2) \end{array} \right\} = m^2 + \frac{1}{2(m^2 - 1)} h^4 + \frac{5m^2 + 7}{32(m^2 - 1)^3(m^2 - 4)} h^8 + \frac{9m^4 + 58m^2 + 29}{64(m^2 - 1)^5(m^2 - 4)(m^2 - 9)} h^{12} + O(h^{14}).$$

Voor $m \geq 8$ kan $O(h^{14})$ door $O(h^{16})$ vervangen worden. Verder is

$$a_m(h^2) - b_m(h^2) = O\left(\frac{h^{2m}}{m^{m-1}}\right) \quad (m \rightarrow \infty).$$

De reeksen hebben een eindige convergentiestraal. Op de rand van de convergentiecirkel liggen tenminste twee geconjugeerde vertakkingspunten.

Voor $a_0(h^2)$ en $a_2(h^2)$ is de straal $< \frac{5}{2}$, voor $a_{2n}(h^2)$ ($n \geq 2$) is de straal > 3 .

$a_0(h^2)$ en $a_2(h^2)$ zijn onderzocht door C.J. Bouwkamp voor $h^2 = \pm is$, $s > 0$ (J. Math. Phys. 26, 1947, 79-92).

Bij $s = s_0 = 1.468768\dots$ ligt een vertakkingspunt.

Voor $0 \leq s \leq s_0$ zijn a_0 en a_2 reëel en verschillend. Voor $s > s_0$ zijn ze elkaars complex toegevoegde. In het vertakkingspunt is $a_0 = a_2 = 2.088\dots$.

De reeksontwikkelingen zijn

$$2^{\frac{1}{2}} ce_0(z;h^2) = 1 - h^2 \cdot \frac{1}{2} \cos 2z + h^4 \left\{ \frac{1}{32} \cos 4z - \frac{1}{16} \right\} + O(h^6)$$

$$ce_1(z;h^2) = \cos z - h^2 \cdot \frac{1}{8} \cos 3z + h^4 \left\{ \frac{1}{192} \cos 5z - \frac{1}{64} \cos 3z - \frac{1}{128} \cos z \right\} + O(h^6)$$

$$se_1(z;h^2) = \sin z - h^2 \cdot \frac{1}{8} \sin 3z + h^4 \left\{ \frac{1}{192} \sin 5z + \frac{1}{64} \sin 3z - \frac{1}{128} \sin z \right\} + O(h^6)$$

$$ce_2(z;h^2) = \cos 2z - h^2 \left\{ \frac{1}{12} \cos 4z - \frac{1}{4} \right\} + h^4 \left\{ \frac{1}{384} \cos 6z - \frac{19}{288} \cos 2z \right\} + O(h^6)$$

met normering

$$\int_0^{2\pi} \{f(z;h^2)\}^2 dz = \pi .$$

Wat de nulpunten betreft, als h^2 reëel is bezitten $ce_m(z;h^2)$ en $se_{m+1}(z;h^2)$ m nulpunten in $0 < z < \pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Als $h \rightarrow \infty$, blijkt dat, als we $\lambda = a_m(h^2)$ of $\lambda = b_{m+1}(h^2)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) stellen,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\lambda + 2h^2}{h} = m + \frac{1}{2} .$$

Verder geldt voor $h \rightarrow \infty$:

$$\left. \begin{array}{l} a_m(h^2) \\ b_{m+1}(h^2) \end{array} \right\} = -2h^2 + (4m+2)h + O(1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

wat nog verscherpt kan worden tot

$$\left. \begin{array}{l} a_m(h^2) \\ b_{m+1}(h^2) \end{array} \right\} = -2h^2 + 2Mh - \frac{1}{8}(M^2+1) - \frac{1}{128h}(M^3+3M) + \\ - \frac{1}{4096h^2}(5M^4+34M^2+9) + O(h^{-3})$$

als we $M = 2m+1$ stellen.

Dezelfde reeks geldt voor $\lambda_v(h^2)$ als $m^2 < v^2 < (m+1)^2$.

Tenslotte volgt nog

$$b_{m+1}(h^2) - a_m(h^2) \sim \frac{2^{4m+5}}{m!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} h^{m+3/2} e^{-4h} \left[1 - \frac{6m^2 + 14m + 7}{32h} \right]$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots),$$

(zie M.-S. 2.331 pag. 134/139).

3.6. Ontwikkelingen van de oplossingen van Mathieufuncties naar Besselfuncties

In het voorgaande zijn van de Mathieu-vergelijking 4 typen oplossingen behandeld en wel

$$(1) \quad ce_{2n}(z;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(h^2) \cos 2rz, \quad \text{even, periode } \pi,$$

$$(2) \quad ce_{2n+1}(z;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n+1)}(h^2) \cos(2r+1)z, \quad \text{even, periode } 2\pi,$$

$$(3) \quad se_{2n+1}(z;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \sin(2r+1)z, \quad \text{oneven, periode } 2\pi,$$

$$(4) \quad se_{2n+2}(z;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) \sin(2r+2)z, \quad \text{oneven, periode } \pi.$$

Het is zinvol om naast deze Fourierontwikkelingen ook reeksontwikkelingen naar Besselfuncties te bezitten. Het argument dat hier voorkomt is $k \cos z$ of $k \sin z$ met $k = 2h$.

De Mathieu-vergelijking zullen we schrijven in de gedaante (M.V.)

$$y'' + (\Lambda - k^2 \cos^2 z)y = 0 \quad \text{met } \Lambda = \lambda + 2h^2.$$

De bewering is nu, dat met dezelfde coëfficiënten als bij (1) t/m (4) de functies

$$(1a) \quad \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(h^2) J_{2r}(k \cos z),$$

$$(2a) \quad \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) J_{2r+1}(k \cos z),$$

$$(3a) \quad \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) I_{2r+1}(k \sin z)$$

oplossingen zijn van de Mathieu-vergelijking, evenredig met de functies (1), (2) en (3).

Dit is eenvoudig na te gaan door formele substitutie van de reeksen in M.V., daarbij gebruik makend van de recurrente betrekkingen tussen de Besselfuncties. Voor de coëfficiënten vindt men dan precies dezelfde differentiaalvergelijkingen, randvoorwaarden en kettingbreukvergelijking.

Zoals blijkt komt er geen (4a) voor in de gedaante

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) I_{2r+2}(k \sin z) .$$

Deze is nl. geen oplossing van de Mathieu-vergelijking, maar van de inhomogene vergelijking

$$y'' + (\Lambda - k^2 \cos^2 z)y = h^2 B_2^{(2n+2)}(h^2) I_0(k \sin z) .$$

Dit hangt samen met het feit, dat $\sin 2rz$ nul is voor $r = 0$, wat niet het geval is met $I_{2r}(k \sin z)$.

De term $B_0^{(2n+2)}$ ontbreekt als het ware in (4).

Wel is de functie

$$(1b) \quad \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(h^2) I_{2r}(k \sin z)$$

oplossing van de Mathieu-vergelijking en daarom evenredig met $ce_{2n}(z; h^2)$.

We hebben dus drie ontwikkelingen voor $ce_{2n}(z; h^2)$:

$$(1) \quad ce_{2n}(z; h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(h^2) \cos 2rz$$

$$(1a) \quad = \frac{ce_{2n}(\frac{\pi}{2}, h^2)}{A_0^{(2n)}(h^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(h^2) J_{2r}(2h \cos z)$$

$$(1b) \quad = \frac{ce_{2n}(0; h^2)}{A_0^{(2n)}(h^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(h^2) I_{2r}(2h \sin z) .$$

De evenredigheidsconstanten zijn verkregen door substitutie van $z = \frac{\pi}{2}$ en $z = 0$ in (1) en (1a), respectievelijk in (1) en (1b), immers $J_{2r}(0) = 0$ voor $r \neq 0$ en $J_0(0) = 1$.

Het verband tussen (2) en (2a), alsmede dat tussen (3) en (3a) kan op analoge wijze worden vastgelegd.

We kunnen ons nog afvragen, waar (2b), (3b), (4a) en (4b) gebleven zijn.

Dit zijn enigszins gecompliceerdere ontwikkelingen. Men gaat als volgt te werk.

$$y'' + (\Lambda - k^2 \cos^2 z)y = 0 .$$

Stel $y = w \tan z$, dan volgt er

$$w'' + \frac{2}{\sin z \cos z} w' + \left(\frac{2}{\cos^2 z} + \Lambda - k^2 \cos^2 z \right) w = 0 .$$

Stel nog $k \cos z = s$, dan wordt de nieuwe differentiaalvergelijking:

$$s^2 w'' + sw' + s^2 w - k^2 w'' - \Lambda w + 2k^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{w}{s} \right) = 0 .$$

Stellen we $y = w \cot z$ en $k \sin z = s$, dan volgt er

$$(5) \quad s^2 w'' + sw' - s^2 w - k^2 w'' + (k^2 - \Lambda)w + 2k^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{w}{s} \right) = 0 .$$

In de eerste vergelijking wordt w naar $J_r(s)$ ontwikkeld, in de tweede naar $I_r(s)$.

6.1. Ontwikkeling van w naar $J_r(s)$

We stellen

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r J_r(s) .$$

Dan is

$$s^2 w'' + sw' + s^2 w = \sum_{r=1}^{\infty} r^2 \alpha_r J_r(s) ,$$

$$- k^2 w'' = - h^2 \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r (J_{r-2} - 2J_r + J_{r+2}) ,$$

$$- \Lambda w = \sum_{r=1}^{\infty} -\Lambda \alpha_r J_r ,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{J_r(s)}{s} \right) &= \frac{d}{ds} \frac{J_{r-1} + J_{r+1}}{2r} = \frac{1}{2r} \left\{ \frac{1}{2} (J_{r-2} - J_r) + \frac{1}{2} (J_r - J_{r+2}) \right\} = \\ &= \frac{1}{4r} (J_{r-2} + J_{r+2}) , \end{aligned}$$

$$2k^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{w}{s} \right) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} h^2 \frac{J_{r-2} - J_{r+2}}{r} \alpha_r .$$

Tellen we de linkerleden op, dan vinden we het linkerlid van (5). Er volgt dan dat dit gelijk is aan

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \left\{ r^2 J_r - h^2 \{ J_{r-2} - 2J_r + J_{r+2} \} - \Lambda J_r + 2h^2 \frac{J_{r-2} - J_{r+2}}{r} \right\} = \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \left\{ (r^2 + 2h^2 - \Lambda) J_r + h^2 J_{r-2} \left(\frac{2}{r} - 1 \right) - h^2 J_{r+2} \left(\frac{2}{r} + 1 \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \left\{ -h^2 \frac{r-2}{r} J_{r-2} + (r^2 - \lambda) J_r - h^2 \frac{r+2}{r} J_{r+2} \right\} .$$

De coëfficiënt van J_1 is $\alpha_1 \{1 - \lambda - h^2\} - \frac{1}{3} h^2 \alpha_3$, die van J_2 : $\alpha_2 \{4 - \lambda\} - \frac{1}{2} h^2 \alpha_4$.
Omvormen van de reeks geeft

$$0 = \sum_{r=1}^{\infty} r J_r(s) \left\{ -h^2 \frac{\alpha_{r+2}}{r+2} + (r^2 - \lambda) \frac{\alpha_r}{r} - h^2 \frac{\alpha_{r-2}}{r-2} \right\} .$$

Stel vervolgens $\alpha_r = i^r r b_r$, dan is

$$\begin{aligned} (1 - \lambda - h^2) b_1 + h^2 b_3 &= 0 \\ (4 - \lambda) b_2 + h^2 b_4 &= 0 \\ \hline h^2 b_{r+2} + (r^2 - \lambda) b_r + h^2 b_{r-2} &= 0 \quad (r \geq 2); \end{aligned}$$

dit is hetzelfde systeem als dat van $A_{2\rho}$ (zie 3.5.11).

Het systeem van de b 's valt uiteen in twee stukken:

α) Het systeem van de oneven indices: b_1, b_3, b_5, \dots .

β) Het systeem van de even indices: b_2, b_4, b_6, \dots .

Dit past precies bij de functies se_{2n+1} resp. se_{2n+2} , d.w.z.

$se_{2n+1}(z; h^2)$ is evenredig met

$$(3b) \quad \tan z \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) J_{2r+1}(k \cos z)$$

en

$se_{2n+2}(z; h^2)$ is evenredig met

$$(4a) \quad \tan z \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) J_{2r+2}(k \cos z) .$$

Uit de tweede differentiaalvergelijking

$$y'' + (\Lambda - k^2 \cos^2 z) y = h^2 B_2^{(2n+2)}(h^2) I_0(k \sin z)$$

vinden we de ontbrekende functies, nl.:

$ce_{2n+1}(z; h^2)$ is evenredig met

$$(2b) \quad \cot z \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) I_{2r+1}(k \sin z)$$

en

$se_{2n+2}(z; h^2)$ is evenredig met

$$(4a) \quad \cot z \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) I_{2r+2}(k \sin z) .$$

In detail wordt

Type 2:

$$(2) \quad ce_{2n+1}(z; h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \cos(2r+1)z =$$

$$(2a) \quad = - \frac{ce'(\frac{\pi}{2}; h^2)}{hA_1^{(2n+1)}(h^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) J_{2r+1}(2h \cos z) =$$

$$(2b) \quad = \frac{ce_{2n+1}(0; h^2)}{hA_1^{(2n+1)}(h^2)} \cot z \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) I_{2r+1}(2h \sin z) .$$

De evenredigheidsconstante vindt men in het eerste geval door te differentiëren naar z en daarna $z = \frac{\pi}{2}$ te stellen, in het tweede geval door $z = 0$ te substitueren.

Type 3:

$$(3) \quad se_{2n+1}(z; h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \sin(2r+1)z =$$

$$(3a) \quad = \frac{se'_{2n+1}(0; h^2)}{hB_1^{(2n+1)}(h^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) I_{2r+1}(2h \sin z) =$$

$$(3b) \quad = \frac{se_{2n+1}(\frac{\pi}{2}; h^2)}{hB_1^{(2n+1)}(h^2)} \tan z \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) J_{2r+1}(2h \cos z) .$$

Op analoge wijze als bij type 2 vindt men de evenredigheidsconstante.

Type 4:

$$(4) \quad se_{2n+2}(z; h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) \sin(2r+2)z =$$

$$(4a) \quad = - \frac{se'_{2n+2}(\frac{\pi}{2}; h^2)}{h^2 B_2^{(2n+2)}(h^2)} \tan z \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) J_{2r+2}(2h \cos z) =$$

$$(4b) \quad = \frac{se'_{2n+2}(0; h^2)}{h^2 B_2^{(2n+2)}(h^2)} \cot z \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) I_{2r+2}(2h \sin z) .$$

Opmerking. Het vervangen van J door Y en van I door K levert andere ontwikkelingen van de Mathieufuncties op.

3.7. Integraalvergelijkingen die met Mathieufuncties verband houden

7.1. Integralen voor Besselfuncties

Zoals bekend (zie bv. Watson, Besselfunctions, pag. 20/21) is

$$J_{2n}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin t) \cos 2nt \, dt$$

en

$$J_{2n+1}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \sin t) \sin(2n+1)t \, dt .$$

Substitutie van $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$ levert

$$(-1)^n J_{2n}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos t) \cos 2nt \, dt$$

en

$$(-1)^n J_{2n+1}(z) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos t) \cos(2n+1)t \, dt .$$

Uit de allereerste formule, gebruik makend van

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z)$$

verkrijgen we

$$\frac{2n+1}{z} J_{2n+1}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos(z \sin t) \cos(2n+1)t \, dt .$$

Analoog uit de tweede formule:

$$\frac{2n}{z} J_{2n}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \sin(z \sin t) \sin 2nt \, dt .$$

De laatste twee kunnen we nog transformeren door t te vervangen door $\frac{\pi}{2} - t$, er komt dan

$$(-1)^n \frac{2n+1}{z} J_{2n+1}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(z \cos t) \sin(2n+1)t \, dt$$

en

$$(-1)^{n-1} \frac{2n}{z} J_{2n}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \sin(z \cos t) \sin 2nt \, dt .$$

Deze formules hebben we later nodig. Ze komen voor in vier groepen van twee met Fouriertermen $\cos 2nt$, $\cos(2n+1)t$, $\sin(2n+1)t$ en $\sin 2nt$.

Door de transformatie $z \rightarrow iz$ krijgen we nog vier andere formules, die we met * aangeven.

De formules, waarvan het volgnummer onderstreept is, zullen we in het volgende nodig hebben. De nummering zullen we daar dan ook aanhouden.

Een overzicht wordt gegeven in 7.2.

7.2. Enkele formules over Besselfuncties

$$\underline{1} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos t) \cos 2nt \, dt = (-1)^n J_{2n}(z)$$

$$2 \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin t) \cos 2nt \, dt = J_{2n}(z)$$

$$\underline{2^*} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cosh(z \sin t) \cos 2nt \, dt = (-1)^n I_{2n}(z)$$

$$\underline{3} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos t) \cos(2n+1)t \, dt = (-1)^n J_{2n+1}(z)$$

$$4 \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos(z \sin t) \cos(2n+1)t \, dt = \frac{2n+1}{z} J_{2n+1}(z)$$

$$\underline{4^*} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cosh(z \sin t) \cos(2n+1)t \, dt = (-1)^n \frac{2n+1}{z} I_{2n+1}(z)$$

$$5 \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \sin t) \sin(2n+1)t \, dt = J_{2n+1}(z)$$

$$\underline{5^*} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sinh(z \sin t) \sin(2n+1)t \, dt = (-1)^n I_{2n+1}(z)$$

$$\underline{6} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(z \cos t) \sin(2n+1)t \, dt = (-1)^n \frac{2n+1}{z} J_{2n+1}(z)$$

$$\underline{7} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \sin(z \cos t) \sin(2n+2)t \, dt = (-1)^n \frac{2n+2}{z} J_{2n+2}(z)$$

$$\underline{8} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \sin(z \sin t) \sin(2n+2)t \, dt = \frac{2n+2}{z} J_{2n+2}(z)$$

$$\underline{8^*} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \sinh(z \sin t) \sin(2n+2)t \, dt = (-1)^n \frac{2n+2}{z} I_{2n+2}(z) .$$

7.3. Een integraalvergelijking

In 3.1 hebben we reeds gezien welk verband er bestaat tussen rechthoekige coördinaten x, y en elliptische coördinaten (ξ, η) .

Er bleek dat

$$x = \cos(i\xi)\cos \eta \quad \text{en} \quad iy = \sin i\xi \sin \eta .$$

Beschouw de 2-dimensionale golfvergelijking

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{0}$$

en tracht deze op te lossen door separatie. Stel dus $u = F(x)G(y)$, dan volgt door substitutie

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + k^2 = 0 .$$

Als speciaal geval nemen we $\frac{F''}{F} = 0$, dan volgt als particuliere oplossing:

$$U = FG = (Ax+B)(C \sin ky + D \cos ky) .$$

Deze is te splitsen in vier eenvoudige oplossingen.

Verwisselen we x en y , dan krijgen we nog vier oplossingen; in totaal dus acht speciale eenvoudige oplossingen van (0).

Stellen we nog $z = \eta$ en $t = i\xi$, dan zijn alle acht functies even of oneven en van periode π of 2π (in alle combinaties) in beide variabelen z en t gelijktijdig. Ze zijn bovendien symmetrisch in z en t .

De functies kunnen als volgt worden geschreven:

		pariteit	periode
$\cos kx = \cos(k \cos z \cos t)$	}	even	π
$\cos ky = \cosh(k \sin z \sin t)$			π
$\sin kx = \sin(k \cos z \cos t)$			2π
$x \cos ky = \cos z \cos t \cosh(k \sin z \sin t)$			2π
$i \sin ky = \sinh(k \sin z \sin t)$	}	oneven	2π
$iy \cos kx = \sin z \sin t \cos(k \cos z \cos t)$			2π
$iy \sin kx = \sin z \sin t \sin(k \cos z \cos t)$			π
$ix \sin ky = \cos z \cos t \sinh(k \sin z \sin t)$			π

Deze functies kunnen ontwikkeld worden naar producten van de corresponderende Mathieufuncties van dezelfde pariteit en periode en wel als volgt:

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(k \cos z \cos t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_{2n}} ce_{2n}(z)ce_{2n}(t) \\ \cosh(k \sin z \sin t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\beta_{2n}} ce_{2n}(z)ce_{2n}(t) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sin(k \cos z \cos t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_{2n+1}} ce_{2n+1}(z)ce_{2n+1}(t) \\ \cos z \cos t \cosh(k \sin z \sin t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\beta_{2n+1}} ce_{2n+1}(z)ce_{2n+1}(t) \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \sinh(k \sin z \sin t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\gamma_{2n+1}} se_{2n+1}(z)se_{2n+1}(t) \\ \sin z \sin t \cos(k \cos z \cos t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\delta_{2n+1}} se_{2n+1}(z)se_{2n+1}(t) \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \sin z \sin t \sin(k \cos z \cos t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\gamma_{2n+2}} se_{2n+2}(z)se_{2n+2}(t) \\ \cos z \cos t \sinh(k \sin z \sin t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\delta_{2n+2}} se_{2n+2}(z)se_{2n+2}(t) \end{cases}$$

Als h^2 reëel is kunnen we als volgt normeren:

$$ce_0(z;0) = 2^{-\frac{1}{2}}; \quad ce_n(z;0) = \cos nz; \quad se_n(z;0) = \sin nz \quad (n=1,2,\dots)$$

en

$$\int_0^{2\pi} [ce_m(z;h^2)]^2 dz = \int_0^{2\pi} [se_m(z;h^2)]^2 dz = \pi .$$

We vinden dan, gebruik makend van het bovenstaande

$$\int_0^{2\pi} \cos(k \cos z \cos t) ce_{2n}(t) dt = \frac{\pi}{\alpha_{2n}} ce_{2n}(z) ,$$

of ook

$$ce_{2n}(z) = \frac{4}{\pi} \alpha_{2n} \int_0^{\pi/2} \cos(k \cos z \cos t) ce_{2n}(t) dt .$$

Zoals hieruit blijkt is de functie $ce_{2n}(z)$ oplossing van de homogene integraalvergelijking met symmetrische kern:

$$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cos(k \cos z \cos t) f(t) dt$$

met eigenwaarde $\lambda = \frac{4}{\pi} \alpha_{2n}$.

N.B. Verwar deze λ niet met die uit de Mathieu-vergelijking!

In totaal zijn er acht integraalvergelijkingen, die op analoge wijze kunnen worden verkregen. Zij hebben geen andere oplossingen dan de gespecificeerde Mathieufuncties.

Tabel van de acht integraalvergelijkingen

	integraalvergelijking	eigen- waarden	eigen- functies
I.	$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cos(k \cos z \cos t) f(t) dt$	$\frac{4}{\pi} \alpha_{2n}$	} $ce_{2n}(z; h^2)$
II.	$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cosh(k \sin z \sin t) f(t) dt$	$\frac{4}{\pi} \beta_{2n}$	
III.	$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \sin(k \cos z \cos t) f(t) dt$	$\frac{4}{\pi} \alpha_{2n+1}$	} $ce_{2n+1}(z; h^2)$
IV.	$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cos z \cos t \cosh(k \sin z \sin t) f(t) dt$	$\frac{4}{\pi} \beta_{2n+1}$	
V.	$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \sinh(k \sin z \sin t) f(t) dt$	$\frac{4}{\pi} \gamma_{2n+1}$	} $se_{2n+1}(z; h^2)$
VI.	$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \sin z \sin t \cos(k \cos z \cos t) f(t) dt$	$\frac{4}{\pi} \delta_{2n+1}$	
VII.	$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \sin z \sin t \sin(k \cos z \cos t) f(t) dt$	$\frac{4}{\pi} \gamma_{2n+2}$	} $se_{2n+2}(z; h^2)$
VIII.	$f(z) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cos z \cos t \sinh(k \sin z \sin t) f(t) dt$	$\frac{4}{\pi} \delta_{2n+2}$	

Hierin is $k = 2h$.

7.3.1. Verband tussen Mathieufuncties en Besselfuncties

We kunnen met behulp van deze integraalvergelijkingen de ontwikkeling van Mathieufuncties in reeksen van Besselfuncties eenvoudig afleiden.

7.3.11. We geven een voorbeeld:

Zoals we hierboven zagen is

$$\begin{aligned} ce_{2n}(z; h^2) &= \frac{4}{\pi} \alpha_{2n} \int_0^{\pi/2} \cos(k \cos z \cos t) ce_{2n}(t) dt = \text{(zie 6)} \\ &= 2\alpha_{2n} \sum_0^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(h^2) \int_0^{\pi/2} \cos(k \cos z \cos t) \cos 2rt dt = \\ &= 2\alpha_{2n} \sum_0^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(h^2) J_{2r}(k \cos z) . \end{aligned}$$

In verband met 6 formule 1a wordt

$$\alpha_{2n} = \frac{ce_{2n}(\frac{\pi}{2}; h^2)}{2A_0^{(2n)}(h^2)} .$$

7.3.12. De andere vergelijking is

$$\begin{aligned} ce_{2n}(z; h^2) &= \frac{4}{\pi} \beta_{2n} \int_0^{\pi/2} \cosh(k \sin z \sin t) ce_{2n}(t) dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \beta_{2n} \sum_0^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(h^2) \int_0^{\pi/2} \cosh(k \sin z \sin t) \cos 2rt dt = \\ &= 2\beta_{2n} \sum_0^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(h^2) I_{2r}(k \sin z) . \end{aligned}$$

Wegens 6 formule 1b is

$$\beta_{2n} = \frac{ce_{2n}(0; h^2)}{2A_0^{(2n)}(h^2)} .$$

Uit de tabel van 7.3 kunnen we ook alle andere betrekkingen halen:

$$\begin{aligned} 7.3.13. \quad ce_{2n+1}(z; h^2) &= \frac{4}{\pi} \alpha_{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin(k \cos z \cos t) ce_{2n+1}(t) dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \alpha_{2n+1} \sum_0^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \int_0^{\pi/2} \sin(k \cos z \cos t) \cos(2r+1)t dt = \end{aligned}$$

$$= 2\alpha_{2n+1} \sum_0^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) J_{2r+1}(k \cos z) .$$

Het verband met 6 formule 2a is

$$\alpha_{2n+1} = - \frac{ce'_{2n+1}(\frac{\pi}{2}; h^2)}{2hA_1^{(2n+1)}(h^2)} .$$

7.3.14.

$$\begin{aligned} ce_{2n+1}(z; h^2) &= \frac{4}{\pi} \beta_{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos z \cos t \cosh(k \sin z \sin t) ce_{2n+1}(t) dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \beta_{2n+1} \cos z \sum_0^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \int_0^{\pi/2} \cos t \cosh(k \sin z \sin t) \cos(2r+1)t dt = \\ &= 2\beta_{2n+1} \cos z \sum_0^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \frac{2r+1}{k \sin z} I_{2r+1}(k \sin z) = \\ &= \beta_{2n+1} \frac{\cot z}{h} \sum_0^{\infty} (-1)^r (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) I_{2r+1}(k \sin z) . \end{aligned}$$

Verband met 6 formule 2b:

$$\beta_{2n+1} = \frac{ce_{2n+1}(0; h^2)}{A_1^{(2n+1)}(h^2)} .$$

7.3.15.

$$\begin{aligned} se_{2n+1}(z; h^2) &= \frac{4}{\pi} \gamma_{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sinh(k \sin z \sin t) se_{2n+1}(t) dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \gamma_{2n+1} \sum_0^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \int_0^{\pi/2} \sinh(k \sin z \sin t) \sin(2r+1)t dt = \\ &= 2\gamma_{2n+1} \sum_0^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) I_{2r+1}(k \sin z) . \end{aligned}$$

Het verband met 6 formule 3a is

$$\gamma_{2n+1} = \frac{se'_{2n+1}(0; h^2)}{2hB_1^{(2n+1)}(h^2)} .$$

$$\begin{aligned}
 7.3.16. \quad se_{2n+1}(z; h^2) &= \frac{4}{\pi} \delta_{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin z \sin t \cos(k \cos z \cos t) se_{2n+1}(t) dt = \\
 &= \frac{4}{\pi} \delta_{2n+1} \sin z \sum_0^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(k \cos z \cos t) \sin(2r+1)t dt = \\
 &= 2\delta_{2n+1} \sin z \sum_0^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) \frac{2r+1}{k \cos z} J_{2r+1}(k \cos z) = \\
 &= \delta_{2n+1} \frac{\tan z}{h} \sum_0^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)}(h^2) J_{2r+1}(k \cos z) .
 \end{aligned}$$

Het verband met 6 formule 3b is

$$\delta_{2n+1} = \frac{se_{2n+1}(\frac{\pi}{2}; h^2)}{B_1^{(2n+1)}(h^2)} .$$

$$\begin{aligned}
 7.3.17. \quad se_{2n+2}(z; h^2) &= \frac{4}{\pi} \gamma_{2n+2} \int_0^{\pi/2} \sin z \sin t \sin(k \cos z \cos t) se_{2n+2}(t) dt = \\
 &= \frac{4}{\pi} \gamma_{2n+2} \sin z \sum_0^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) \int_0^{\pi/2} \sin t \sin(k \cos z \cos t) \sin(2r+1)t dt = \\
 &= 2\gamma_{2n+2} \sin z \sum_0^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) \frac{2r+2}{k \cos z} J_{2r+2}(k \cos z) = \\
 &= \gamma_{2n+2} \frac{\tan z}{h} \sum_0^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) J_{2r+2}(k \cos z) .
 \end{aligned}$$

Het verband met 6 formule 4a is:

$$\gamma_{2n+2} = - \frac{se'_{2n+2}(\frac{\pi}{2}; h^2)}{hB_2^{(2n+2)}(h^2)} .$$

$$\begin{aligned}
 7.3.18. \quad se_{2n+2}(z; h^2) &= \frac{4}{\pi} \delta_{2n+2} \int_0^{\pi/2} \cos z \cos t \sinh(k \sin z \sin t) se_{2n+2}(t) dt = \\
 &= \frac{4}{\pi} \delta_{2n+2} \cos z \sum_0^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) \int_0^{\pi/2} \cos t \sinh(k \sin z \sin t) \sin(2r+2)t dt = \\
 &= 2\delta_{2n+2} \cos z \sum_0^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) \frac{2r+2}{k \sin z} I_{2r+2}(k \sin z) = \\
 &= \delta_{2n+2} \frac{\cot z}{h} \sum_0^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)}(h^2) I_{2r+2}(k \sin z).
 \end{aligned}$$

In verband met 6 formule 4b is:

$$\delta_{2n+2} = \frac{se_{2n+2}'(0; h^2)}{hB_2^{(2n+2)}(h^2)}.$$

(Zie ook M.-S. pag. 186.)

Opmerkingen:

1) De integralen in de tabel van 7.3 kunnen ook nog worden geschreven als volgt:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2h \cos z \cot t) ce_{2n}(t; h^2) dt &= \frac{A_0^{(2n)}(h^2)}{ce_{2n}(\frac{\pi}{2}; h^2)} ce_{2n}(z; h^2) \\
 \text{II. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cosh(2h \sin z \sin t) ce_{2n}(t; h^2) dt &= \frac{A_0^{(2n)}(h^2)}{ce_{2n}(0; h^2)} ce_{2n}(z; h^2) \\
 \text{III. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2h \cos z \cos t) ce_{2n+1}(t; h^2) dt &= - \frac{hA_1^{(2n+1)}(h^2)}{ce_{2n+1}'(\frac{\pi}{2}; h^2)} ce_{2n+1}(z; h^2) \\
 \text{IV. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos z \cos t \cosh(2h \sin z \sin t) ce_{2n+1}(t; h^2) dt &= \frac{A_1^{(2n+1)}(h^2)}{2ce_{2n+1}(0; h^2)} ce_{2n+1}(z; h^2) \\
 \text{V. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sinh(2h \sin z \sin t) se_{2n+1}(t; h^2) dt &= \frac{hB_1^{(2n+1)}(h^2)}{se_{2n+1}'(0; h^2)} se_{2n+1}(z; h^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{VI. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin z \sin t \cos(2h \cos z \cos t) \text{se}_{2n+1}(t; h^2) dt = \frac{B_1^{(2n+1)}(h^2)}{2 \text{se}_{2n+1}(\frac{\pi}{2}; h^2)} \text{se}_{2n+1}(z; h^2)$$

$$\text{VII. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin z \sin t \sin(2h \cos z \cos t) \text{se}_{2n+2}(t; h^2) dt = - \frac{h B_2^{(2n+2)}(h^2)}{2 \text{se}_{2n+2}'(\frac{\pi}{2}; h^2)} \text{se}_{2n+2}(z; h^2)$$

$$\text{VIII. } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos z \cos t \sinh(2h \sin z \sin t) \text{se}_{2n+2}(t; h^2) dt = \frac{h B_2^{(2n+2)}(h^2)}{2 \text{se}_{2n+2}'(0; h^2)} \text{se}_{2n+2}(z; h^2) .$$

2) De niet genoemde functies zijn wel oplossingen van de integraalvergelijking, maar singulier met $\lambda = \infty$; zó is bijvoorbeeld

$$\int_0^{\pi} e^{ik \cos z \cos t} \text{se}_{2n}(t; h^2) dt \equiv 0 .$$

7.4. Opgaven

Bewijs de volgende uitspraken:

De acht integraalvergelijkingen kunnen we twee aan twee combineren en wel als volgt:

$$\text{(I) en (III) tot } f(z) = \lambda \int_0^{\pi} e^{ik \cos z \cos t} f(t) dt$$

met eigenfuncties $\text{ce}_n(z; h^2)$,

$$\text{(VI) en (VII) tot } f(z) = \lambda \int_0^{\pi} \sin z \sin t e^{ik \cos z \cos t} f(t) dt$$

met eigenfuncties $\text{se}_n(z; h^2)$,

$$\text{(II) en (V) tot } f(z) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^k \sin z \sin t f(t) dt$$

met eigenfuncties $\text{ce}_{2n}(z; h^2)$ en $\text{se}_{2n+1}(z; h^2)$,

$$\text{(IV) en (VIII) tot } f(z) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos z \cos t e^k \sin z \sin t f(t) dt$$

met eigenfuncties $\text{se}_{2n+2}(z; h^2)$ en $\text{ce}_{2n+2}(z; h^2)$.

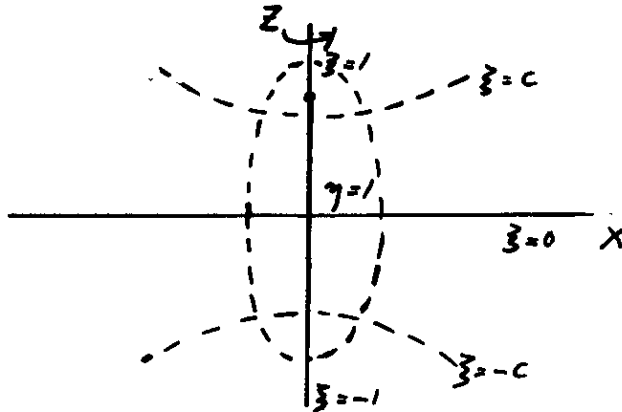
8. Sferoïdale golfuncties

8.1. We gaan uit van een stelsel confocale ellipsen en hyperbolen, met brandpuntsafstand 2.

Wentelen om de lange as geeft gestrekt-omwentelingsellipsoïdale coördinaten (prolate), wentelen om de korte as geeft afgeplat-omwentelingsellipsoïdale coördinaten (oblate).

8.1.1. De analytische voorstelling van het prolate systeem is als volgt:

Neem de Z-as in de richting van de "naald", d.w.z. langs de omwentelingsas.



Doorsnede x-z-vlak
 halve lange as η
 halve korte as $\sqrt{\eta^2 - 1}$.

Zij

$$\begin{cases} x = \rho \cos \Phi \\ y = \rho \sin \Phi \\ z = \xi \eta \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{(\eta^2 - 1)(1 - \xi^2)}, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \eta \geq 1, 0 \leq \Phi < 2\pi.$$

Nu is $\rho^2 = (\eta^2 - 1)(1 - \xi^2)$, dus $\frac{\rho^2}{\eta^2 - 1} = 1 - \xi^2 = 1 - \frac{z^2}{\eta^2}$, dus $\frac{\rho^2}{\eta^2 - 1} + \frac{z^2}{\eta^2} = 1$

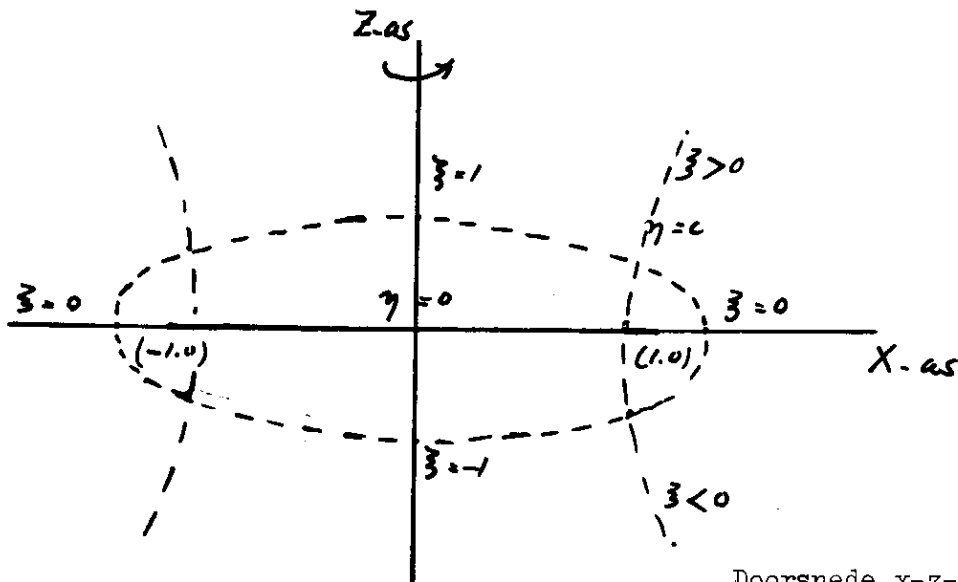
is een ellips en analoog $\frac{z^2}{\xi^2} - \frac{\rho^2}{1 - \xi^2} = 1$ een hyperbool.

Op de ellips en hyperbool zijn η resp. ξ constant. Voor deze coördinaten wordt de Laplace-operator

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\eta^2 - 1)(1 - \xi^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} \right\}.$$

8.1.2. De analytische voorstelling van het oblate systeem.

We nemen de Z-as loodrecht op de cirkelschijf, die door wenteling ontstaat.



Doorsnede x-z-vlak
 halve korte as: η
 halve lange as: $\sqrt{1+\eta^2}$.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \Phi \\ y = \rho \sin \Phi \\ z = \xi \eta \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{(1-\xi^2)(1+\eta^2)}, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \eta \geq 0, 0 \leq \Phi < 2\pi.$$

Nu is $\rho^2 = (1-\xi^2)(1+\eta^2)$ of $\frac{\rho^2}{1-\xi^2} = 1 + \eta^2 = 1 + \frac{z^2}{\xi^2}$, dus $\frac{\rho^2}{1-\xi^2} - \frac{z^2}{\xi^2} = 1$,

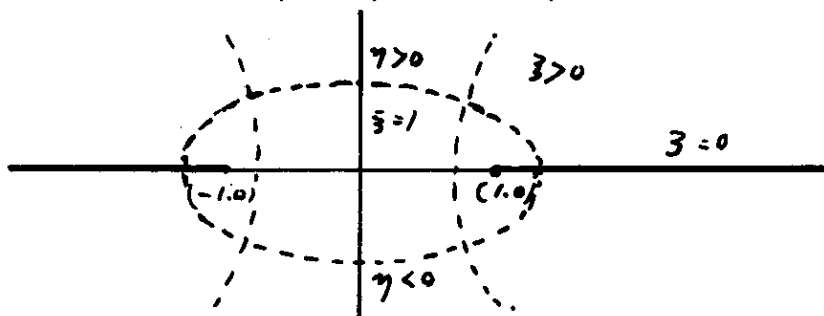
een hyperbool. Analoo $\frac{\rho^2}{1+\eta^2} + \frac{z^2}{\eta^2} = 1$, een ellips.

Op ellips en hyperbool zijn η resp. ξ constant. De Laplace-operator is in dit geval

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\xi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1+\eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\eta^2 + 1)(1-\xi^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} \right\}.$$

Opmerkingen

1) Soms moeten de bereiken anders worden gekozen, bv. bij een opening in een scherm. Dan is $-\infty < \eta < \infty$; $0 \leq \xi \leq 1$; $0 \leq \Phi < 2\pi$.



2) De Laplace-operators van het oblate en prolate systeem gaan in elkaar over door $\eta \rightarrow i\eta$.

8.2. De golfvergelijking $\Delta u + k^2 u = 0$

We trachten een oplossing te vinden door separatie in $u = u_1(\xi)u_2(\eta)u_3(\Phi)$.

Prolate coördinaten. Er volgt:

$$\begin{cases} [(1-\xi^2)u_1'(\xi)]' + \left[\frac{-\mu^2}{1-\xi^2} + \lambda + k^2(1-\xi^2) \right] u_1(\xi) = 0 \\ [(1-\eta^2)u_2'(\eta)]' + \left[\frac{-\mu^2}{1-\eta^2} + \lambda + k^2(1-\eta^2) \right] u_2(\eta) = 0 \\ u_3''(\Phi) + \mu^2 u_3(\Phi) = 0 . \end{cases}$$

Oblate coördinaten.

$$\begin{cases} [(1-\xi^2)u_1'(\xi)]' + \left[\frac{-\mu^2}{1-\xi^2} + \lambda - k^2(1-\xi^2) \right] u_1(\xi) = 0 \\ - [(1+\eta^2)u_2'(\eta)]' + \left[\frac{-\mu^2}{1+\eta^2} + \lambda - k^2(1+\eta^2) \right] u_2(\eta) = 0 \\ u_3''(\Phi) + \mu^2 u_3(\Phi) = 0 . \end{cases}$$

Het oblate systeem gaat in het prolate systeem over door de substitutie $\eta \rightarrow \pm i\eta$ en $k^2 \rightarrow -k^2$.

8.3. Meixner's normaalvorm van de differentiaalvergelijking

Deze is gebaseerd op het prolate systeem en wordt geschreven als

$$(1) \quad (1-z^2)y''(z) - 2zy'(z) + \left[\lambda + \gamma^2(1-z^2) + \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] y(z) = 0 .$$

In de toepassingen zijn λ en γ^2 meestal reëel, terwijl $\mu = 0, 1, 2, \dots$.

Verder is z reëel in het prolate geval en zuiver imaginair in het oblate geval.

De differentiaalvergelijking heeft singuliere punten in ± 1 en ∞ .

$z = \pm 1$ zijn regulier-singuliere punten.

$z = \infty$ is essentieel singulier voor $\gamma \neq 0$ en regulier singulier voor $\gamma = 0$.

In dit geval reduceert de differentiaalvergelijking zich tot de vergelijking van Legendre met oplossingen $P_v^\mu(z)$ en $Q_v^\mu(z)$, waarbij $\lambda = v(v+1)$.

Zij z_0 een gewoon punt, $y(z_0)$ en $y'(z_0)$ willekeurig voorgeschreven, onafhankelijk van λ, γ, μ . Dan is $y(z) = P(z-z_0)$ een machtreeksontwikkeling, con-

vergent tot het dichtstbijgelegen singuliere punt, dus

$$y(z) = \sum_0^{\infty} c_n (z - z_0)^n = y(z; \lambda, \gamma^2, \mu^2) .$$

Deze oplossing is een analytische functie in alle variabelen en een gehele functie in λ , γ^2 en μ^2 van de orde $\leq \frac{1}{2}$. Dit geldt ook voor de afgeleiden naar z .

Heeft men twee onafhankelijke oplossingen gevonden, dan is

$$y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z) = \frac{\text{const}}{1-z^2} \quad (\text{Wronski}),$$

met constante $\neq 0$.

Indien $y(z)$ een oplossing is, is $y(-z)$ het ook.

8.3.1. De singuliere punten $z = \pm 1$.

De karakteristieke vergelijking, die bij deze punten behoort is $\alpha^2 - \frac{1}{4}\mu^2 = 0$.

Opmerking. De karakteristieke vergelijking vindt men door in (1) te substitueren in de omgeving van $z = 1$: $y(z) = (1-z)^\alpha u(z)$ (zie diktaat Wiskunde III § 14 blz. 33, najaar 1968). De karakteristieke exponent is $\alpha = \pm \frac{1}{2}\mu$, dus $\alpha_1 - \alpha_2 = \mu$.

Bekijk eerst $z = 1$ en stel $\mu \neq$ geheel, dan is

$$y_1(z) = (1-z)^{\mu/2} P_1(1-z) , \quad P_1(0) = 1 ,$$

en

$$y_2(z) = (1-z)^{-\mu/2} P_2(1-z) , \quad P_2(0) = \frac{1}{2\mu} .$$

$P_1(1-z)$ en $P_2(1-z)$ zijn voor $|z-1| < 2$ analytische functies van z , λ , γ^2 van orde $\leq \frac{1}{2}$ in λ en γ^2 , terwijl

$$W(y_1, y_2) = \frac{1}{1-z^2} .$$

Indien men z door $-z$ vervangt krijgt men een analoog fundamenteelsysteem voor de omgeving van $z = -1$.

Neem nu μ geheel: $\mu = m = 0, 1, 2, \dots$, dan is

$$y_1(z) = (1-z)^{m/2} P_1(1-z) , \quad P_1(0) = 1$$

en

$$y_2(z) = (1-z)^{-m/2} P_2(1-z) + A_m y_1(z) \log(1-z) ,$$

terwijl

$$W(y_1, y_2) = \frac{1}{1-z^2} .$$

$y_2(z)$ kan eenduidig worden vastgelegd door de coëfficiënt van $(1-z)^m$ in $P_2(1-z)$ nul te maken en voor $\log(1-z)$ de hoofdwaarde te nemen voor $-1 < z < 1$.

Voor $m = 0$ wordt $P_2(0) = 0$ en $A_0 = -\frac{1}{2}$, terwijl $P_2(0) = \frac{1}{2m}$ voor $m = 1, 2, \dots$.

A_m is een polynoom in γ^2, λ van de graad m in λ en γ samen. Zo is

$$A_1 = -\frac{1}{4}\lambda$$

$$A_2 = -\frac{1}{32} [\lambda(\lambda-2) + 4\gamma^2]$$

$$A_3 = -\frac{1}{576} [\lambda(\lambda-2)(\lambda-6) + 16(\lambda-4)\gamma^2] .$$

Het kan zijn, dat sommige A_m 's nul zijn voor $m \neq 0$. Dit hangt van λ en γ af.

8.3.2. Het punt $z = \infty$

We bekijken eerst $\gamma \neq 0$, dus $z = \infty$ is een essentieel singulier punt; de karakteristieke exponent zij ν .

We zoeken oplossingen met eenvoudige "omlooprelaties": een negatieve halve omloop om $z = \infty \equiv$ een positieve halve omloop om $z = +1, -1$, d.w.z. $z \rightarrow ze^{\pi i}$.

Het verband tussen $y(z)$ en $y(ze^{\pi i})$ is nu te geven.

Kies z_0 zodanig, dat $|z_0| > 1$ en definieer als fundamenteelsysteem

$$\begin{cases} y_1(z_0) = 1 \\ y_1'(z_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(z_0) = 0 \\ y_2'(z_0) = 1 \end{cases} ,$$

dan is $W(y_1, y_2) = \frac{1-z_0^2}{1-z_0^{-2}} = 1$ voor $z = z_0$.

De algemene oplossing is gegeven door $y = Ay_1(z) + By_2(z)$. Ook $y(ze^{\pi i})$ is een oplossing. We verlangen dat deze evenredig is met $y(z)$, dus

$$y(ze^{\pi i}) = e^{i\pi\nu} y(z) \neq 0 .$$

We vinden dan

$$Ay_1(z_0 e^{\pi i}) + By_2(z_0 e^{\pi i}) = e^{\pi i\nu} A ,$$

$$- Ay_1'(z_0 e^{\pi i}) - By_2'(z_0 e^{\pi i}) = e^{\pi i\nu} B .$$

Dit stelsel moet niet triviaal oplosbaar zijn. Nu is $W(y_1, y_2) = 1$, dus de voorwaarde voor oplosbaarheid is:

$$\sin \pi v = \frac{1}{2i} [y_1(z_0 e^{\pi i}) - y_2'(z_0 e^{\pi i})],$$

onafhankelijk van de keuze van z_0 .

Als v de karakteristieke exponent is, is ook $2l + v$ en $-2l - v - 1$ (l geheel) er een.

$\sin \pi v$ is een gehele functie van λ, γ^2, μ^2 van orde $\frac{1}{2}$. Voor $\gamma^2 = \mu^2 = 0$ is $\sin \pi v = -\cos \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$.

We vinden tenslotte

8.3.21. $v \not\equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$. Er zijn twee lineair onafhankelijke oplossingen:

$$y_\alpha(z e^{\pi i}) = e^{\pi i v} y_\alpha(z)$$

en

$$y_\beta(z e^{\pi i}) = e^{-\pi i v} y_\beta(z).$$

Voor $1 < |z| < \infty$ is

$$y_\alpha(z) = z^v \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{2r}^{(v)} z^{2r}$$

en

$$y_\beta(z) = z^{-v-1} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{2r}^{(-v-1)} z^{2r},$$

twee Laurentreeksen, in dit gebied convergent.

8.3.22. $v \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$. Er is maar één oplossing van dit type; de andere oplossing is logaritmisch. De oplossingen zijn

$$y_\alpha(z) = z^v \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{2r}^{(v)} z^{2r}$$

en

$$y_\beta(z) = z^v \sum_{-\infty}^{\infty} f_{2r}^{(v)} z^{2r} + a y_\alpha(z) \log z,$$

beide Laurentreeksen, convergerend voor $|z| > 1$.

Opmerking. Het hierboven behandelde is te vinden in M.-S. 3.1-3.13, pag. 221-227.

8.4. Transformatie van de sferoïdaalvergelijking

De vergelijking 8.3 (1) kan geschreven worden als

$$\left((1-z^2)y'(z) \right)' + \left(\lambda + \gamma^2(1-z^2) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right) y(z) = 0 .$$

Stel $z = \cos \theta$ en $y(z) \equiv (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} g(\theta)$, dan volgt er

$$g''(\theta) + \left(\lambda + \frac{1}{4} + \gamma^2 \sin^2 \theta - \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \theta} \right) g(\theta) = 0 \quad (\text{normaalvorm van Liouville}).$$

Voor $\mu^2 = \frac{1}{4}$ vinden we

$$g''(\theta) + (\lambda + \frac{1}{4} + \gamma^2 \sin^2 \theta)g(\theta) = 0$$

of

$$g''(\theta) + \left(\lambda + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma^2}{2} \cos 2\theta \right) g(\theta) = 0 ,$$

d.i. de Mathieuv vergelijking.

Door de transformatie $z = \cos \theta$, $y(z) = (\sin \theta)^{-\mu} h(\theta)$ gaat 8.3 (1) over in

$$h''(\theta) + (1-2\mu)\cot \theta h'(\theta) + (\lambda + \gamma^2 \sin^2 \theta + \mu - \mu^2)h(\theta) = 0 ,$$

de zg. geassocieerde Mathieuv vergelijking.

Voor $\mu = \frac{1}{2}$ ontstaat de gewone Mathieuv vergelijking weer.

8.5. Sferoïdfuncties van de orde nul

We beperken ons tot $\mu = 0$. De differentiaalvergelijking is in dit geval

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + (\lambda + \gamma^2(1 - z^2))y = 0 .$$

Men kan dit enigszins anders noteren door te stellen

$$\lambda + \gamma^2(1 - z^2) = \Lambda + k^2 z^2$$

met

$$\Lambda = \lambda - k^2 \quad \text{en} \quad -\gamma^2 = k^2 .$$

We gaan dus uit van

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + (\Lambda + k^2)y = 0 .$$

We vragen naar oplossingen die analytisch zijn in het gehele z -vlak, inclusief de punten $z = \pm 1$. Deze oplossingen zijn dus gehele functies van z . Dit kan alleen voor speciale waarden van $\Lambda = \Lambda(k)$. Bij elke k behoort een aftelbare rij $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ (k^2 reëel).

Het punt $z = 0$ is een gewoon punt, we schrijven dus de machtreeks rond $z = 0$ op, zij deze

$$y(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n .$$

Substitutie geeft de recurrente betrekking:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} (n+2)(n+1)a_{n+2} + (\Lambda - n(n+1))a_n + k^2 a_{n-2} &= 0 \\ a_{-1} = a_{-2} &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 0)$$

Behalve $a_n \equiv 0$ zijn er twee typen oplossingen:

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = 1 \quad \text{en} \quad (II) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{a_{n+2}}{a_n} = k^2 ,$$

immers delen door a_n geeft:

$$(n+2)(n+1) \frac{a_{n+2}}{a_n} + k^2 \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-2}}} = n(n-1) - \Lambda .$$

Hierbij domineert dus $\delta f \frac{a_{n+2}}{a_n}$ $\delta f \frac{a_{n-2}}{a_n}$. In het eerste geval vinden we

type (I), in het tweede type (II).

In het algemeen is oplossing (I) dominant, we moeten speciaal (II) hebben. Dan is de reeks voor alle eindige z convergent.

We voeren in $N_n = \frac{a_{n+2}}{a_n}$, dan wordt (2)

$$N_n = \frac{k^2}{(n+2)(n+3) - \Lambda - (n+3)(n+4)N_{n+2}} .$$

Iteratie geeft een oneindige kettingbreuk, nl.

$$N_n = \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{k^2}{(n+1)(n+2) - \Lambda} - \frac{(n+3)(n+4)k^2}{(n+4)(n+5) - \Lambda} - \frac{(n+5)(n+6)k^2}{(n+6)(n+7) - \Lambda} - \dots$$

met beginwaarden

$$N_0 = \frac{a_2}{a_0} = -\frac{\Lambda}{2} ; \quad N_1 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{3} - \frac{\Lambda}{6} .$$

De eigenwaarden en eigenfuncties van het even systeem voldoen aan:

$$0 = -\Lambda - \frac{1 \cdot 2 k^2}{2 \cdot 3 - \Lambda} - \frac{3 \cdot 4 k^2}{4 \cdot 5 - \Lambda} - \frac{5 \cdot 6 k^2}{6 \cdot 7 - \Lambda} - \dots ,$$

van het oneven systeem aan:

$$0 = 2 - \Lambda - \frac{2 \cdot 3 k^2}{3 \cdot 4 - \Lambda} - \frac{4 \cdot 5 k^2}{5 \cdot 6 - \Lambda} - \dots .$$

De wortels van deze vergelijkingen Λ_v ($v = 0, 1, 2, 3, \dots$) vormen een oneindig aftelbaar stelsel. De bij deze eigenwaarden behorende eigenfuncties zijn geheel transcendent.

Deze kettingbreuken convergeren zeer langzaam. Er is daarom een veel betere methode.

Voor $k = 0$ is de differentiaalvergelijking geworden tot de differentiaalvergelijking van Legendre, oplossing $P_m(z)$ met

$$\lambda_v(0) = v(v+1) .$$

De eigenfuncties kunnen dan ontwikkeld worden naar Legendre polynomen. Dit gaat goed, omdat de recurrente betrekking ook van de 2e orde is en er kan

weer met kettingbreuken worden gewerkt, die voor grotere k-waarden beter numeriek kunnen worden beheerst dan met de eerste methode.

Voor Legendre polynomen geldt o.a.:

$$1. \quad zP_n'(z) = \frac{(n+1)P_{n+1}(z) + nP_{n-1}(z)}{(2n+1)}, \quad n \text{ geheel,}$$

$$P_{-n-1}(z) = P_n(z).$$

(Deze betrekkingen gelden ook voor $Q_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) met andere beginwaarden.)

$$2. \quad z^2 P_n''(z) = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}(z) + \frac{2n(n+1)-1}{(2n-1)(2n+3)} P_n'(z) +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2}(z).$$

Substitutie van $y = \sum_0^{\infty} b_n P_n(z)$ in de gegeven differentiaalvergelijking levert wegens

$$(1-z^2)y'' - 2zy' = - \sum_1^{\infty} n(n+1)b_n P_n'(z) :$$

$$- \sum_1^{\infty} n(n+1)b_n P_n'(z) + (\Lambda + k^2 z^2) \sum_0^{\infty} b_n P_n'(z) = 0.$$

Voor b_n volgt nu de recurrente betrekking:

$$k^2 \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} b_{n+2} + \left(\Lambda - (n+1)n + \frac{2n(n+1)-1}{(2n-1)(2n+3)} k^2 \right) b_n +$$

$$+ k^2 \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} b_{n-2} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}} \right\} n \geq 0$$

$$b_{-1} = b_{-2} = 0.$$

We splitsen weer naar pariteit:

$b_0 \neq 0, b_1 = 0$ geeft de even functies,

$b_0 = 0, b_1 \neq 0$ geeft de oneven functies.

Er zijn weer twee typen lineair onafhankelijke oplossingen $\neq 0$:

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+2}}{n^2 b_n} = \frac{k^2}{4} \quad \text{en} \quad (II) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{k^2}{4}.$$

In (I) is $\frac{b_{n+2}}{b_n}$ groot t.o.v. $\frac{b_{n-2}}{b_n}$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-2}}{b_n} = 0$, bij (II) is het net andersom.

We definiëren nu

$$\alpha_n \equiv n(n+1) - \frac{k^2}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right\}, \quad n \geq 0,$$

$$\beta_n \equiv \frac{n^2(n-1)^2}{(2n-1)^2} \frac{k^4}{(2n-3)(2n+1)}, \quad n \geq 2,$$

$$N_n \equiv k^2 \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \frac{b_n}{b_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

De recurrente betrekking wordt dan

$$(3) \quad N_n = \frac{n}{\alpha_n - \Lambda - N_{n+2}} \quad \text{of} \quad N_{n+2} = \alpha_n - \Lambda - \frac{\beta_n}{N_n}.$$

We eisen $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, dan volgt door iteratie

$$N_n = \sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n - \Lambda}} - \sqrt{\frac{\beta_{n+2}}{\alpha_{n+2} - \Lambda}} - \sqrt{\frac{\beta_{n+4}}{\alpha_{n+4} - \Lambda}} - \dots \quad (\text{oneindige kettingbreuk})$$

Deze kettingbreuk convergeert overal.

$b_n = 0$ ($n < 0$) geeft wegens de tweede gedaante van (3)

$$N_{n+2} = \alpha_n - \Lambda - \sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_{n-2} - \Lambda}} - \sqrt{\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-4} - \Lambda}} - \dots \quad (\text{eindige kettingbreuk})$$

Het einde van de kettingbreuk wordt aangegeven door

$\alpha_0 - \Lambda$ voor even n en door

$\alpha_1 - \Lambda$ voor oneven n .

De transcendente vergelijking van de eigenwaarden is nu, als we in de eerste kettingbreuk $n = m+2$ nemen en in de tweede $n = m$:

$$U(\Lambda) = U_1(\Lambda) + U_2(\Lambda) = 0$$

met

$$U_1(\Lambda) = \alpha_m - \Lambda - \sqrt{\frac{\beta_m}{\alpha_{m-2} - \Lambda}} - \sqrt{\frac{\beta_{m-2}}{\alpha_{m-4} - \Lambda}} - \dots$$

en

$$U_2(\Lambda) = -\sqrt{\frac{\beta_{m+2}}{\alpha_{m+2} - \Lambda}} - \sqrt{\frac{\beta_{m+4}}{\alpha_{m+4} - \Lambda}} - \dots$$

We kunnen $m = 0$ of $m = 1$ nemen. De eigenwaardenvergelijking is dan voor het even probleem:

$$0 = -\alpha_0 + \Lambda + \frac{\beta_2}{\alpha_2 - \Lambda} - \frac{\beta_4}{\alpha_4 - \Lambda} - \dots \quad (\text{oneindig}),$$

en voor het oneven probleem:

$$0 = -\alpha_1 + \Lambda + \frac{\beta_3}{\alpha_3 - \Lambda} - \frac{\beta_5}{\alpha_5 - \Lambda} - \dots \quad (\text{eindig}).$$

Als $k \rightarrow 0$ is $\Lambda_m(k) \sim m(m+1)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) en $y_m(z; k)$ evenredig met $P_m(z)$.

Voor kleine reële waarden van k^2 ligt $\Lambda_m(k)$ dicht bij $m(m+1)$ en $y_m(z; k)$ dicht bij $P_m(z)$.

De normering is als volgt

$$\lim_{k \rightarrow 0} y_m(z, k) = P_m(z)$$

$$\int_{-1}^1 y_m^2(z, k) dz = \frac{2}{2m+1},$$

net als bij $P_m(z)$. Ook is $y_m(z; 0) \equiv P_m(z)$.

8.6. Numerieke bepaling van eigenwaarden

Zij λ_m een of andere approximatie (hoe verkregen doet niet ter zake) van de m^{e} eigenwaarde Λ_m . Was λ_m correct, dan zou $U(\lambda_m) = 0$ zijn. Hoe kleiner $|U(\lambda_m)|$ is, hoe beter de benadering. We zoeken een correctieterm $\delta\lambda$, zodat $\lambda_c = \lambda_m + \delta\lambda$. Deze λ_c is dan een betere benadering van Λ_m . Welke invloed heeft deze correctie nu op N_n en N_{n+2} ?

Uit de recursiebetrekking

$$N_{n+2} = \alpha_n - \Lambda - \frac{\beta_n}{N_n} \quad (\text{zie 8.5 form. 3})$$

volgt

$$\delta N_{n+2} = -\delta\lambda + \frac{\beta_n}{N_n^2} \delta N_n,$$

dus door iteratie

$$\delta U_1 = -\delta\lambda \left(1 + \frac{\beta_m}{N_m^2} + \frac{\beta_m \beta_{m-2}}{N_m^2 N_{m-2}^2} + \dots \right)$$

en

$$\delta U_2 = -\delta\lambda \left(\frac{N_{m+2}^2}{\beta_{m+2}} + \frac{N_{m+2}^2 N_{m+2}^2}{\beta_{m+2} \beta_{m+4}} + \dots \right).$$

Daar $0 = U(\lambda_m) = U(\lambda_m) + \delta U_1 + \delta U_2$ is de correctie $\delta\lambda$ te bepalen uit

$$\delta\lambda = \frac{U_1(\lambda_m) + U_2(\lambda_m)}{\left(1 + \frac{\beta_m}{N_m^2} + \dots\right) + \left(\frac{N_{m+2}^2}{\beta_{m+2}} + \frac{N_{m+2}^2 N_{m+4}^2}{\beta_{m+2} \beta_{m+4}} + \dots\right)}$$

8.6.1. $m = 3, k^2 = 6$.

We berekenen eerst de coëfficiënten α_n en β_n ; er volgt:

$\alpha_1 = - 1.600000$	
$\alpha_3 = 8.933333$	$\beta_3 = 2.468571$
$\alpha_5 = 26.97436$	$\beta_5 = 2.308802$
$\alpha_7 = 52.9864$	$\beta_7 = 2.277353$
$\alpha_9 = 86.992$	$\beta_9 = 2.26582$
$\alpha_{11} = 128.99$	$\beta_{11} = 2.2603$
$\alpha_{13} = 179.0$	$\beta_{13} = 2.257$
$\alpha_{15} = 237$	$\beta_{15} = 2.26$

Zij $\lambda_3 = 9.04$ een approximatie van de derde eigenwaarde, die op een of andere manier is gevonden.

De oneindige kettingbreuk breken we af bij N_{17} en we stellen $N_{17} = 0$, dan blijkt er dat

$$\begin{aligned} N_{15} &= 0.01 \\ N_{13} &= 0.013 \\ N_{11} &= 0.0188 \\ N_9 &= 0.02907 \\ N_7 &= 0.051855 \\ N_5 &= 0.129110 = - U_2(\lambda_3) . \end{aligned}$$

Nu gaan we van de andere kant af met de eindige kettingbreuk werken. Dan is

$$\begin{aligned} N_3 &= - 10.6400 \\ N_5 &= 0.125342 = U_1(\lambda_3) , \end{aligned}$$

dus

$$U_1(\lambda_3) + U_2(\lambda_3) = - 0.003768$$

en

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\beta_3}{N_3^2}\right) + \left(\frac{N_5^2}{\beta_5} + \frac{N_5^2 N_7^2}{\beta_5 \beta_7} + \dots\right) &= (1 + 0.021805) + \\ &+ (0.007200 + 0.000008) = 1.029013 . \end{aligned}$$

De correctie $\delta\lambda$ wordt derhalve

$$\delta\lambda = - \frac{0.003768}{1.029013} = - 0.003662 ,$$

dus de gecorrigeerde $\lambda = \lambda_c$ is

$$\lambda_c = 9.036338 .$$

We gaan nu de gecorrigeerde N waarden bepalen. Deze noemen we N' . Het is niet nodig ver in de rij te beginnen.

We starten bij N'_7 en gaan naar "beneden":

$$N'_7 = 0.051851 ; \quad N'_5 = 0.129083 .$$

Correctie naar "boven" levert

$$N'_3 = - 10.63634 ; \quad N'_5 = 0.129083 .$$

N'_5 is dus dezelfde in beide richtingen.

Door een iteratieve stap liggen nu 6 decimalen vast, dus we hebben sinds de vorige bepaling van N_5 4 decimalen gewonnen.

Het is duidelijk dat dit iteratieve proces het beste met een computer kan worden uitgevoerd.

Om $\Lambda(k)$ te verkrijgen, gaat men $\Lambda_0(k^2)$ als functie van k construeren en neemt kleine stapjes in k^2 . Er wordt gestart met $\Lambda_0(0) = 0$. Zo kan men dan $\Lambda_0(k)$ als functie van k^2 numeriek benaderen.

Vervolgens bekijkt men Λ_1, Λ_2 enzovoorts. Men moet er wel voor zorgen, dat men steeds op de goede kromme blijft.

Literatuur. C.J. Bouwkamp: On special spheroidal wave functions of order zero, J. Math. Phys. 26 (1947), 79 - 92.

Om een schatting van Λ te krijgen, stellen we $\Lambda = a + bk^2 + ck^4 + \dots$ en substitueren dit in U_1 en U_2 . Stel $U(\Lambda) = 0$, dan vinden we a, b, c, \dots .

Er blijkt dat

$$\Lambda_0 = - \frac{1}{3} k^2 - \frac{2}{135} k^4 - \frac{4}{8505} k^6 + \frac{26}{1913625} k^8 + \frac{39}{37889775} k^{10} + \\ + \frac{513988}{9050920003125} k^{12} + \dots .$$

Is $X_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n$, dan vinden we wegens $\int_{-1}^1 X_0^2 dz = 2$, dat

$$b_0 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3^4 \cdot 5} k^4 - \frac{2}{3^6 \cdot 5 \cdot 7} k^6 + \frac{713}{2^3 \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7} k^8 + \dots,$$

$$b_2 = \frac{1}{9} k^2 + \frac{2}{3^4 \cdot 7} k^4 - \frac{61}{2 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7} k^6 - \frac{79}{3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} k^8 + \dots,$$

$$b_4 = \frac{1}{3 \cdot 5^2 \cdot 7} k^4 + \frac{4}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} k^6 - \frac{10001}{2 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} k^8 + \dots,$$

$$b_6 = \frac{1}{3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11} k^6 + \frac{2}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} k^8 + \dots,$$

$$b_8 = \frac{1}{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} k^8 + \dots,$$

terwijl $b_{2n+1} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Tenslotte volgt er

$$X_0(1) = 1 + \frac{1}{9} k^2 + \frac{17}{2 \cdot 3^4 \cdot 5} k^4 - \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2} k^6 + \frac{1729}{2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7} k^8 + \dots$$

en

$$X_0(0) = 1 - \frac{1}{18} k^2 - \frac{37}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2} k^4 + \frac{313}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2} k^6 + \frac{28813}{2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7} k^8 + \dots$$

$|k^2| \leq 1$.

Op analoge wijze kan men formules afleiden voor $\Lambda_1, b_1, b_3, b_5, \dots, X_1(1), \left\{ \frac{d}{d\xi} X_1(\xi) \right\}_{\xi=0}$ en voor Λ_2, Λ_3 enzovoorts. Zo is

$$\Lambda_3 = 12 - \frac{23}{43} k^2 + \frac{3302}{1002375} k^4 + \dots$$

In 6 decimalen nauwkeurig vindt men voor $|k^2| \leq 1$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = & 0 - 0.333333333333 k^2 - 0.014814814815 k^4 + \\ & - 0.000470311581 k^6 + 0.000013586779 k^8 + \\ & + 0.000002428096 k^{10} + 0.000000057688 k^{12} + \\ & (- 0.000000007106 k^{14}) \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & 2.000000000000 - 0.600000000000 k^2 + \\ & - 0.006857142857 k^4 + 0.000060952381 k^6 + \\ & + 0.000002589628 k^8 - 0.000000087280 k^{10} + \\ & - 0.00000001558 k^{12} + \dots \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \Lambda_6 = & 42.000000000000 - 0.503030303030 k^2 + \\ & + 0.000787433385 k^4 - 0.000000365478 k^6 + \\ & + 0.000000014965 k^8 + \dots \end{aligned}$$

Zie voor tabellen en literatuur het hierboven aangehaalde artikel.
Voor een analoog resultaat met sferoïdaalfuncties van orde 1 zie men:
C.J. Bouwkamp, Philips Res. Reports 5 (1950), blz. 87-90.

8.7. Een integraalvergelijking voor sferoïdaalfuncties

We beperken ons tot functies van orde 0; men kan deze karakteriseren als eigenfuncties van de integraalvergelijking

$$y(z) = \mu \int_{-1}^1 e^{kzt} y(t) dt .$$

Neem daartoe een integratieweg in het complexe vlak en bekijk

$$(1) \quad y(z) = \int_C e^{kzt} h(t) dt ,$$

waarbij $h(z)$ een onbekende gehele functie van z is.

Zij $\Omega_z \equiv (1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + (\lambda + k^2 z^2)$ een differentiaaloperator, waarvoor $\Omega_z y(z) = 0$ is. We passen Ω_z op (1) toe en er komt na partiële integratie

$$\Omega_z y(z) = \left[(1-t^2) \left\{ kzh(t) - \frac{dh}{dt} \right\} e^{kzt} \right]_C + \int_C e^{kzt} \Omega_t(h(t)) dt .$$

De integraal is nul, als $h(t)$ een eigenfunctie van de differentiaalvergelijking is. $h(t)$ en $h'(t)$ zijn dan eindig in $t = \pm 1$. Neem nu voor C de weg van

-1 tot +1, dan is de stokterm ook 0 en $y(z)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking, dus

$$y(z) = \mu \int_{-1}^1 e^{hzt} h(t) dt \equiv h_1(z)$$

is een eigenfunctie. Ook het omgekeerde is waar.

We kunnen ons nog afvragen, welk verband er bestaat tussen μ_ν en λ_ν voor verschillende waarden van ν . Er blijkt dat

$$\mu_\nu(k) = \frac{(2\nu)!(2\nu+1)!}{2^{2\nu+1}(\nu!)^3} k^{-\nu}(1+O(k^2)) \quad (k \rightarrow 0).$$

Voor $k = 0$ heeft het geen zin een verband te zoeken, want $k = 0$ is een singulariteit.

We willen de functies kennen langs de reële as en de imaginaire as. Voor $-1 < x < 1$ kunnen we volstaan met

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x).$$

Deze reeks is in het gehele complexe z -vlak convergent, dus op de imaginaire as kunnen we schrijven

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(iy).$$

Het is praktisch onmogelijk deze te bepalen.

Zij

$$(2) \quad X_\nu(z) = \mu \int_{-1}^1 e^{kzt} X_\nu(t) dt,$$

dus

$$X_\nu(iy) = \mu \int_{-1}^1 e^{iky t} X_\nu(t) dt.$$

Er blijkt dat voor grote waarden van y de functie zich als $\frac{\sin ky}{y}$ gedraagt.

De functies $\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(iy)$ komen voor in staande golfproblemen. De functies

$X_\nu(t)$ zijn compleet en orthogonaal op $-1 < x < 1$, de functies $X_\nu(iy)$ zijn dit voor $-\infty < y < \infty$ (Pollack en Landau).

In het voorgaande hebben we de stokterm nul gekregen door voor C het lijnstuk van -1 naar +1 te nemen. Men kan de stokterm ook nul krijgen door voor C te kiezen een weg van +1 naar $i\infty$.

De functie

$$\int_1^{i\infty} e^{kzt} X_V(t) dt$$

is dus bij $\lambda = \lambda_V$ ook een oplossing van de differentiaalvergelijking: een lopende golf.

8.7.1. Een andere mogelijkheid is nog om de eigenfuncties te ontwikkelen naar Besselfuncties. Deze ontwikkeling kan geschreven worden als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n I_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

(I is de gemodificeerde Besselfunctie van de eerste soort). Een tweede oplossing wordt dan gegeven door de K-functies, t.w. $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$, waarbij K de gemodificeerde Besselfunctie van de tweede soort is.

De eerstgenoemde oplossing convergeert voor alle x, de laatste alleen voor $|x| > 1$.

$K_{n+\frac{1}{2}}$ is analytisch voort te zetten binnen de eenheidscirkel met behulp van een integraalvoorstelling.

8.7.2. Een andere integraalvoorstelling voor $X_V(z)$ vindt men als volgt.

We weten dat

$$\begin{aligned} X_V(z) &= \mu \int_{-1}^1 e^{kzt} X_V(t) dt = \mu \int_{-1}^1 e^{kzt} dt \cdot \mu \int_{-1}^1 e^{k\tau t} X_V(\tau) d\tau = \\ &= \mu^2 \int_{-1}^1 d\tau X_V(\tau) \int_{-1}^1 e^{kt(z+\tau)} dt = \mu^2 \int_{-1}^1 \frac{2 \sinh k(z+\tau)}{k(z+\tau)} X_V(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

dus

$$X_V(z) = \frac{2\mu^2}{k} \int_{-1}^1 \frac{\sinh k(z+\tau)}{z+\tau} X_V(\tau) d\tau.$$

Hierbij is de eigenwaarde $\frac{2\mu^2}{k}$.

Deze vorm treedt op in de telecomunicatietheorie: zoveel mogelijk informatie in een zo smal mogelijk kanaal stoppen.

Opmerkingen

1) Zie voor verdere literatuur:

C.J. Bouwkamp: On the theory of spheroidal wave functions of order zero,
Proc. Kon. Akad. A'dam 53 (1950), pag. 931-944.

2) Naast het in het voorgaande gebruikte boek van Meixner-Schäpfke is ook aan
te bevelen:

N.W. MacLachlan: Theory and applications of Mathieufuncties, Clarendon
Press 1951.