

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

## CAPITA SELECTA

Toepassingen van

## BESSELFUNCTIES

in Physica en Techniek

College van

Prof. Dr. C.J. Bouwkamp

Voorjaarssemester 1969

Dictaat bewerkt door

drs. P.J. de Doelder

2247

Bild / May

May.



Technische Hogeschool Eindhoven

## *Onderafdeling der Wiskunde*

### *Capita Selecta*

Toepassingen van besselfuncties in physica en techniek

Prof. dr. C.J. Bouwkamp

Dictaat bewerkt door drs. P.J. de Doelder

1965

# Inhoudsbeschrijving

## Capita Besselfuncties

### 1969

0.	Inleiding	1
1.	Attractie van bollen	2
2.	Attractie van schijven	19
3.	Potentiaalproblemen bij cilindrs	40
3.1	Het elektrische veld van een puntlading binnen een oneindige cylinder op potentiaal nul	40
3.2	Potentiaal en elektrisch veld	45
3.3	Methode van discrete normaaloplossingen	53
3.4	De eenheidslading op een willekeurige plaats binnen de cylinder	55
4.	Akoustische golfproblemen bij cilindrs	57
4.1	Een akoustische puntbron	57
4.2	Energiebeschouwingen	59
5.	Electromagnetische straling in golfpijpen	64
5.1	De elektrische dipool	64
5.2	De magnetische dipool	66
5.3	Enige andere problemen	68
5.4	Enkele configuraties	71
5.5	Enkele opgaven	72
6.	Akoustische straling van een vlak membraan	75
6.1	De snelheidspotentiaal	75
6.2	Energiebeschouwingen	78
6.3	Opgaven	85
7.	Een homogeen gemagnetiseerde cylinder	88

## 0. Inleiding

In dit college zullen toepassingen van Besselfuncties in physica en techniek worden gegeven. Er is een groot aantal verschijnselen, waarbij Besselfuncties optreden. Enkele voorbeelden daarvan zijn:

- a) attractie van bollen, schijven en cylinders;
- b) magnetische velden bij spoelen, zelfinducties, wederzijdse inducties;
- c) electromagnetische velden in golfpijpen, bij het aanstoten van modi door diverse voedingsantennes, bij inductieverschijnselen (bijv. bol in een draaiveld), bij het skin-effect;
- d) buigingstheorie;
- e) akoustische stralers;
- f) golfvoortplanting over een vlakke aarde.

Uit deze opsomming blijkt, dat Besselfuncties o.a. voorkomen bij problemen van potentiaal- en golfvergelijkingen in cilindrische structuren. (Besselfuncties worden ook wel cylinderfuncties genoemd.)

In dit college zullen we ons achtereenvolgens bezighouden met:

Attractie van bollen;

Attractie van schijven;

Een potentiaalprobleem bij cylinders;

Akoustische golfproblemen bij cylinders;

Electromagnetische straling in cilindrische golfpijpen;

Akoustische straling van een vlak membraan.

1. Attractie van bollen

1.1. Neem een puntmassa P met massa 1, dan is om deze massa een potentiaalveld aanwezig met potentiaal  $F(r) = \frac{1}{r}$ , als we de gravitatiewet van Newton aannemen. Hierbij is r de afstand van het massapunt tot het veldpunt. Het krachtveld rond P is gegeven door  $\vec{K} = \text{grad } F$ , dus in ons geval

$$F_r = \frac{\partial F}{\partial r} = - \frac{1}{r^2} .$$

N.B. In het electrostatische equivalent (Coulomb) definiëren we:

Een positieve eenheidslading heeft een elektrische potentiaal  $F = \frac{1}{r}$  en de veldsterkte is  $\vec{E} = - \text{grad } F$ , dus

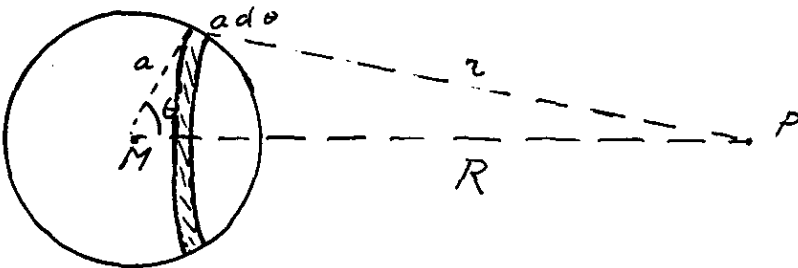
$$E_r = - \text{grad } F = \frac{1}{r^2} .$$

F kan hier fysisch worden geïnterpreteerd als potentiële energie (zwaartekracht) of als elektrische spanning (Coulomb-attractie).

In het algemeen zijn krachten moeilijker te berekenen dan potentialen. De laatste hebben het voordeel, dat ze scalair additief zijn. Zo is de kracht tussen twee homogene bollen eenvoudig te berekenen uit de wederzijdse potentiële energie door differentiatie naar de afstand van de middelpunten. Om deze berekening uit te voeren beschouwen we twee homogene bollen met straal a, resp. b, terwijl de afstand der middelpunten c is, waarbij  $c > a + b$ . Noem de wederzijdse potentiële energie  $V(a,b;c)$ , dan is de aantrekkingskracht tussen de bollen, deze werkt langs de verbindingslijn der middelpunten, gegeven door  $K = \frac{\partial V}{\partial c}$ .

We tonen eerst aan het bekende, uit de attractiewet van Newton volgende, resultaat dat twee homogene bollen elkaar aantrekken alsof hun massa's in hun respectieve middelpunten waren geconcentreerd.

Bewijs. We beschouwen een oppervlakte-bolschil en een punt P.



Zij  $F(r)$  de potentiaal tussen twee eenheidspuntmassa's op afstand  $r$ .  
Voer bolcoördinaten in op de bolschil en neem de oppervlakte-massadichtheid  
 $= 1$ . De oppervlakte van de schil is  $2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ , dus de potentiaal tussen  
de schil en het punt  $P$  is  $2\pi a^2 F(r) \sin \theta d\theta$ , waaruit de totale potentiaal  
tussen boloppervlak en  $P$  gegeven wordt door:

$$G(R) = 2\pi a^2 \int_0^\pi F(r) \sin \theta d\theta .$$

Nu is

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta , \quad \text{dus} \quad r dr = aR \sin \theta d\theta ,$$

waaruit volgt

$$G(R) = 2\pi a^2 \int_{R-a}^{R+a} \frac{r}{aR} F(r) dr = \frac{2\pi a}{R} \int_{R-a}^{R+a} r F(r) dr .$$

In het geval van de Newtonse attractie is  $rF(r) = 1$ , dus

$$G(R) = \frac{4\pi a^2}{R} = \frac{\text{opp. schil}}{R} = \frac{\text{totale massa van de schil}}{R} .$$

Inderdaad is het dus zo, dat we de massa geconcentreerd kunnen denken in het  
middelpunt.

Daar de stelling voor een bolschil geldt, geldt ze ook voor een homogene  
bol. Door  $P$  op te blazen tot een bol volgt analoog, dat de stelling ook  
geldt voor twee homogene ballen.

Opmerking. Uit het voorgaande blijkt dat het voldoende is te onderstellen,  
dat de massa concentrisch homogeen is, d.w.z. de massadichtheid is alleen  
afhankelijk van de afstand tot het middelpunt.

De voorwaarde van een Newtonveld is niet alleen voldoende voor massaconcen-  
tratie in het middelpunt, maar ook nodig.

Bewijs. Zij  $M$  de totale massa van de bolschil, dus  $M = 4\pi a^2$ , dan is

$$G(R) = \frac{M}{2aR} \int_{R-a}^{R+a} r F(r) dr .$$

Verder eisen we  $G(R) = MF(R)$ , dus  $F(R)$  moet voldoen aan

$$F(R) = \frac{1}{2aR} \int_{R-a}^{R+a} r F(r) dr .$$

Deze integraalvergelijking trachten we nu op te lossen

1.1.1. 1e methode van oplossing

De vergelijking moet waar zijn voor alle waarden van  $a$ . We stellen

$rF(r) = y(r)$ , dan wordt de vergelijking

$$y(R) = \frac{1}{2a} \int_{R-a}^{R+a} y(r) dr . \quad (1)$$

Differentiëren naar  $R$  levert:

$$y'(R) = \frac{1}{2a} [y(R+a) - y(R-a)] . \quad (2)$$

Nu is

$$y(R+a) = y(R) + y'(R)a + \frac{y''(R)}{2!} a^2 + \frac{y'''(R)}{3!} a^3 + \dots ,$$

en

$$y(R-a) = y(R) - y'(R)a + \frac{y''(R)}{2!} a^2 - \frac{y'''(R)}{3!} a^3 + \dots .$$

Substitutie van deze uitdrukkingen in (2) levert

$$\frac{y(R+a) - y(R-a)}{2a} - y'(R) = \frac{y'''(R)}{6} a^2 + \dots \quad \text{voor alle } a .$$

Het linkerlid is voor alle waarden van  $a$  gelijk aan nul, dus ook

$a^2 \left[ \frac{y'''(R)}{6} + \dots \right] = 0$  of  $\left[ \frac{y'''(R)}{6} + \dots \right] = 0$ . Laat nu  $a \rightarrow 0$ , dan volgt direct dat  $y'''(R) = 0$ , dus  $y(r) = Ar^2 + Br + C$ .

Opmerking. Omdat  $y(r)$  continu ondersteld wordt, is ze wegens (1) differentieerbaar en dus willekeurig vaak differentieerbaar.

We vullen het gevonden resultaat nog in (1) in en er blijkt dat  $A = 0$ , waaruit  $y(r) = Br + C$ , dus

$$F(r) = B + \frac{C}{r} .$$

Nemen we nog als randvoorwaarde  $F(\infty) = 0$ , dan volgt tenslotte

$$F(r) = \frac{C}{r} .$$

1.1.2. 2e methode van oplossing

Uit (1) volgt

$$2ay(R) = \int_{R-a}^{R+a} y(r) dr .$$

Differentiatie naar a levert

$$2y(R) = y(R+a) + y(R-a) \quad \text{voor alle } a.$$

We zoeken hiervan de oplossing.

$$y(R+a) = y(R) + y'(R)a + \frac{y''(R)}{2} a^2 + \frac{y'''(R)}{6} a^3 + \dots$$

$$y(R-a) = y(R) - y'(R)a + \frac{y''(R)}{2} a^2 + \frac{y'''(R)}{6} a^3 + \dots .$$

Optellen geeft:

$$0 = y''(R)a^2 + \dots , \quad \text{dus } y''(R) = 0 ,$$

waaruit

$$y(r) = Ar + B , \quad \text{dus } F(r) = A + \frac{B}{r} .$$

1.2. Homogene bol en puntmassa

1.2.1. Zij een homogene bol gegeven met massadichtheid 1, straal a, terwijl de afstand van het middelpunt tot een puntmassa P gelijk is aan R.

Beschouw een volumebolschil met straal  $\rho$ ,  $\rho + d\rho$ . De massa is dan  $4\pi\rho^2 d\rho$ .

Volgens het voorgaande is de potentiaal

$$\frac{4\pi\rho^2 d\rho}{2\rho R} \int_{R-\rho}^{R+\rho} rF(r) dr .$$

Integratie over  $\rho$  geeft

$$G_{\text{bol}}(R) = \frac{2\pi}{R} \int_0^a \rho d\rho \int_{R-\rho}^{R+\rho} rF(r) dr . \quad (1)$$

Noem  $\int_{R-\rho}^{R+\rho} rF(r) dr \equiv A(\rho)$  en pas op (1) partiële integratie toe. We vinden dan



$$\frac{2\pi}{R} \int_0^a \rho d\rho \int_{R-\rho}^{R+\rho} rF(r) dr = \frac{2\pi}{R} \left[ \left[ \frac{1}{2} \rho^2 A(\rho) \right]_0^a - \int_0^a \frac{1}{2} \rho^2 \{ (R+\rho)F(R+\rho) + (R-\rho)F(R-\rho) \} d\rho \right].$$

Stellen we nog  $R+\rho = s$  en  $R-\rho = t$ , dan komt er tenslotte

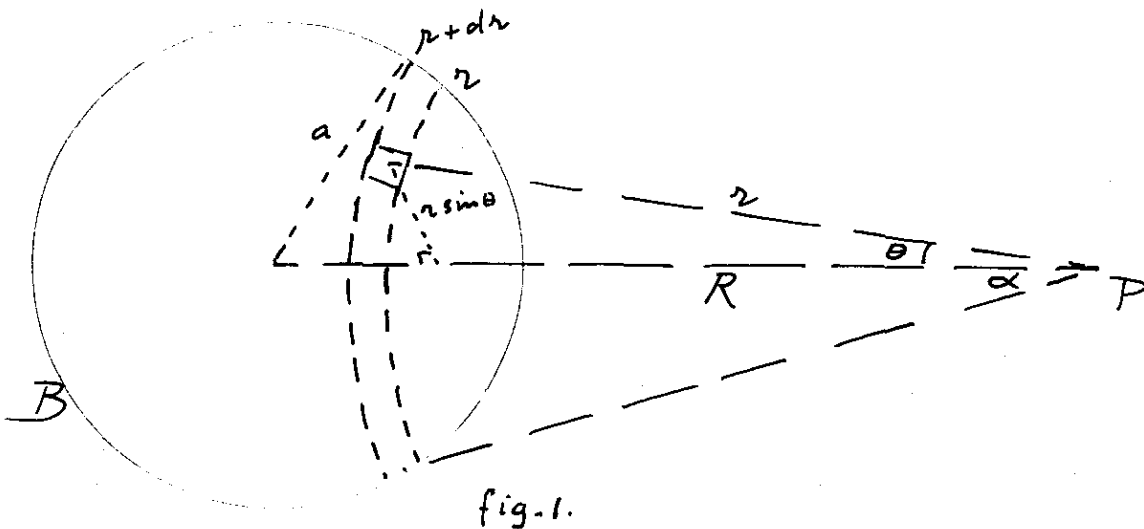
$$G_{\text{bol}}(R) = \frac{2\pi}{R} \left[ \frac{1}{2} a^2 \int_{R-a}^{R+a} rF(r) - \int_R^{R+a} \frac{1}{2} (s-R)^2 sF(s) ds + \int_R^{R-a} \frac{1}{2} (R-t)^2 tF(t) dt \right],$$

of

$$G_{\text{bol}}(R) = \frac{\pi}{R} \int_{R-a}^{R+a} rF(r) [a^2 - (R-r)^2] dr. \quad (2)$$

### 1.2.2. Andere afleiding van (2)

Sla om de puntmassa P bollen met stralen  $r$  en  $r+dr$  en bekijk het volume van de bolschil, gelegen binnen de bol B (figuur 1).



Dit volume is

$$dr \cdot 2\pi \int_0^\alpha r d\theta r \sin \theta = 2\pi r^2 (1 - \cos \alpha) dr.$$

Nu is  $a^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha$ , dus

$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr} = \frac{a^2 - (R-r)^2}{2Rr}.$$

Het volume is derhalve  $\frac{\pi}{R} [a^2 - (R-r)^2] r dr$ .

Vermenigvuldigen met  $F(r)$  en integreren van de kleinste tot de grootste  $r$  levert de gevraagde  $G_{bol}(R)$  of

$$G_{bol}(R) = \frac{\pi}{R} \int_{R-a}^{R+a} [a^2 - (R-r)^2] r F(r) dr .$$

### 1.3. Aantrekking tussen twee bollen

We beschouwen twee bollen met stralen  $a$  en  $b$  en afstand van de middelpunten  $c$ , zodanig dat  $c > a+b$  is. Zij  $P$  een punt van bol ( $b$ ) en  $R$  de afstand van het middelpunt van bol ( $a$ ) tot  $P$ .

Het potentiaalveld van een homogene bol bij de wet  $F(r)$  is identiek met het potentiaalveld van een punt, nl. het middelpunt met als wet  $G_{bol}(R)$ . We vinden derhalve

$$\begin{aligned} H_{bol/bol}(c) &= \frac{\pi}{c} \int_{c-b}^{c+b} [b^2 - (c-R)^2] R G_{bol/punt}(R) dR = \\ &= \frac{\pi^2}{c} \int_{c-b}^{c+b} [b^2 - (c-R)^2] dR \int_{R-a}^{R+a} [a^2 - (R-r)^2] r F(r) dr . \end{aligned}$$

Als we  $V(a,b;c)$  de wederzijdse potentiële energie tussen de twee bollen met stralen  $a$  en  $b$ , massadichtheid = 1 en afstand der middelpunten  $c$ , met  $c > a+b$ , noemen is dus

$$V(a,b;c) = \frac{\pi^2}{c} \int_{c-b}^{c+b} [b^2 - (c-R)^2] dR \int_{R-a}^{R+a} [a^2 - (R-r)^2] r F(r) dr .$$

Opmerking. Is  $rF(r) = 1$ , dan hebben we de Newton-potentiaal.

Is  $r^6 F(r) = 1$ , dan hebben we de London-v.d. Waals-potentiaal.

Is  $rF(r) = e^{-\lambda r}$ , dan hebben we de Yukawa-potentiaal.

We voeren nog nieuwe variabelen in:

$$rF(r) = f(r) ; \quad r = R+x ; \quad R = c+y .$$

Er volgt nu

$$\begin{aligned}
 V(a,b;c) &= \frac{\pi^2}{c} \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) f(c+x+y) = \\
 &= \frac{\pi a^3 \pi b^3}{c} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv (1-u^2)(1-v^2) f(c+au+bv) . \quad (1)
 \end{aligned}$$

Deze formule is symmetrisch in a en b.

Opmerking. Het is moeilijk om de laatste integraal bruikbaar te maken bij gegeven functie  $F(r)$  en bovendien zodanig dat de symmetrie bewaard blijft tussen a en b.

We komen daar later nog op terug.

Opgave. Neem  $a = b$ , dan is

$$V(a,a;c) = \left(\frac{4}{3} \pi a^3\right)^2 c^{-1} \frac{3}{160} \int_0^2 (32 - 40t^2 + 20t^3 - t^5) [f(c+at) + f(c-at)] dt .$$

$V(a,b;c)$  is een lineaire functionaal van  $F(r)$ .

- 1.3.1. Als  $F(r)$ , de elementaire wet tussen twee puntmassa's, aanleiding geeft tot  $V(a,b;c)$ , de energie tussen twee bollen, dan geeft de elementaire wet  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rF(r))$  aanleiding tot  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} (cV(a,b;c))$ .

Het bewijs is triviaal, immers

$$cV = \pi a^3 \pi b^3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-u^2)(1-v^2) f(c+au+bv) du dv ,$$

dus

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} (cV) = \pi a^3 \pi b^3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-u^2)(1-v^2) \frac{f'(c+au+bv)}{c} du dv .$$

Nu is, als  $f(r) = rF(r)$ , direct duidelijk dat

$$\frac{1}{r} f'(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rF(r)) ,$$

waarmee het gestelde is aangetoond.

We geven nog een toepassing: Zij

$$F(r) = F_\lambda(r) = r^{-\lambda} .$$

Noem  $V_\lambda(a,b;c)$  de bijbehorende energie, dan is

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rF(r)) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^{-\lambda+1}) = (1-\lambda)r^{-\lambda-1} = (1-\lambda)F_{\lambda+1}(r).$$

Bij  $\frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rF_\lambda(r)) = F_{\lambda+1}(r)$  behoort  $\frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} (cV_\lambda)$  en anderzijds  $V_{\lambda+1}$ .

Hieruit vinden we

$$V_{\lambda+1}(a,b;c) = \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} (cV_\lambda(a,b;c)).$$

Opmerking. De formule geldt niet voor  $\lambda = 1$  (Newton). We kunnen dus niet bij  $\lambda = 1$  starten om recursieformules af te leiden.

#### 1.4. De betrekking $V(a,b;c) = \varphi(a,b)F(c)$

We gaan de voorgaande problemen anders benaderen en stellen ons de vraag:

Bestaat er een potentiaalwet  $F(r)$  voor twee puntmassa's met de eigenschap,

dat de overeenkomstige potentiaal tussen twee homogene bollen met stralen  $a$  en  $b$  en afstand der middelpunten  $c$  gegeven wordt door  $V(a,b;c) = \varphi(a,b)F(c)$  ?

Er is in elk geval een oplossing  $F(r) = \frac{1}{r}$  met

$$\varphi(a,b) = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{4\pi b^3}{3},$$

zoals uit (1.3 formule (1)) blijkt. Ook de functies  $\frac{e^{-\lambda r}}{r}$ ,  $\frac{\sin \lambda r}{r}$ ,  $\frac{\cos \lambda r}{r}$  met  $\lambda$  willekeurig reële constanten, voldoen aan de vraag.

1.4.1. We tonen het aan voor  $F(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}$  ( $\lambda = 0$  Newtonpotentiaal). We voeren (figuur 2) bolcoördinaten in.

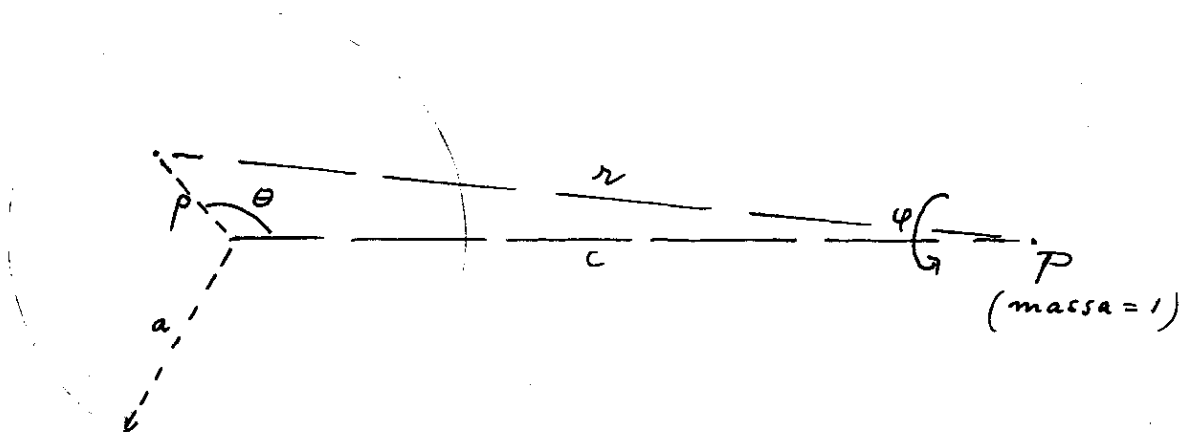


fig. 2.

De potentiële energie van de puntmassa is nu

$$V = \iiint \rho^2 \sin \theta \frac{e^{-\lambda r}}{r} d\rho d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^a d\rho \int_0^\pi \rho^2 \sin \theta d\theta \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

met

$$r^2 = \rho^2 - 2\rho c \cos \theta + c^2 .$$

Nu is

$$r dr = \rho c \sin \theta d\theta$$

en

$$\frac{d}{d\theta} e^{-\lambda r} = -\lambda e^{-\lambda r} \frac{dr}{d\theta} = -\lambda e^{-\lambda r} \frac{\rho c \sin \theta}{r} ,$$

dus

$$\sin \theta \frac{e^{-\lambda r}}{r} = -\frac{1}{\lambda \rho c} \frac{d}{d\theta} (e^{-\lambda r}) ,$$

waaruit

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a d\rho \int_0^\pi \left(-\frac{\rho}{\lambda c}\right) \frac{d}{d\theta} e^{-\lambda r} d\theta = \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda c} \int_0^a \rho d\rho [e^{-\lambda(\rho+c)} - e^{-\lambda(c-\rho)}] , \quad \text{daar } r = \rho + c \text{ voor } \theta = \pi \\ &\quad \text{en } r = c - \rho \text{ voor } \theta = 0 , \\ &= \frac{2\pi}{\lambda c} e^{-\lambda c} \int_0^a \rho [e^{+\lambda\rho} - e^{-\lambda\rho}] d\rho = \frac{e^{-\lambda c}}{c} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \int_0^a (e^{\lambda\rho} + e^{-\lambda\rho}) d\rho = \\ &= \frac{e^{-\lambda c}}{c} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{2}{\lambda} \sinh(\lambda a) \right] = \frac{4\pi a}{\lambda^2} \left[ \cosh \lambda a - \frac{\sinh \lambda a}{\lambda a} \right] \frac{e^{-\lambda c}}{c} . \end{aligned}$$

Inderdaad is dit van de vereiste vorm

$$\varphi(a, 0) = \frac{4\pi a}{\lambda^2} \left[ \cos \lambda a - \frac{\sinh \lambda a}{\lambda a} \right] .$$

Hierbij is  $b = 0$  gesteld, het punt P wordt beschouwd als een bol met straal nul.

We kunnen door invoering van gemodificeerde Besselfuncties nog de volgende vereenvoudiging aanbrengen.

Uit de theorie is bekend, als  $I_{3/2}(z)$  de gemodificeerde Besselfunctie is van de orde  $3/2$ , dat

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \cosh z - \frac{\sinh z}{z} \right).$$

In ons geval geldt dus

$$\varphi(a,0) = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^{3/2} I_{3/2}(\lambda a)$$

en ook

$$V(a,0;c) = (2\pi a)^{3/2} \frac{I_{3/2}(\lambda a)}{\lambda^{3/2}} \frac{e^{-\lambda c}}{c}.$$

Conclusie. Bij de potentiaalwet  $\frac{e^{-\lambda c}}{c}$  is de aantrekking van bol en puntmassa zodanig, dat we de gereduceerde massa  $\varphi(a,0)$  in het middelpunt geconcentreerd kunnen denken.

Als we de reductie tweemaal toepassen vinden we

$$\varphi(a,b) = \varphi(a,0)\varphi(b,0),$$

dus

$$V(a,b;c) = (2\pi a)^{3/2} (2\pi b)^{3/2} \frac{I_{3/2}(\lambda a) I_{3/2}(\lambda b)}{\lambda^3} \frac{e^{-\lambda c}}{c}.$$

Opmerking. Voor  $\lambda \rightarrow 0$  volgt  $V = \frac{4\pi a^3}{3} \frac{4\pi b^3}{3} \frac{1}{c}$  (Newton).

1.4.2. Gebruiken we als elementaire wet  $\frac{\sin \lambda r}{r}$  of  $\frac{\cos \lambda r}{r}$ , dan volgt er op analoge wijze:

$$\varphi(a,b) = (2\pi a)^{3/2} (2\pi b)^{3/2} \frac{J_{3/2}(\lambda a) J_{3/2}(\lambda b)}{\lambda^3},$$

waarbij  $J$  de gewone Besselfunctie voorstelt. Dit komt er op neer, dat we in 1.4.1  $\lambda$  zuiver imaginair in plaats van reëel nemen. We vinden tenslotte

$$V_1(a,b;c) = (2\pi a)^{3/2} (2\pi b)^{3/2} \frac{J_{3/2}(\lambda a) J_{3/2}(\lambda b)}{\lambda^3} \frac{\cos \lambda c}{c} \quad \text{bij de wet } \frac{\cos \lambda r}{r};$$

$$V_2(a,b;c) = (2\pi a)^{3/2} (2\pi b)^{3/2} \frac{J_{3/2}(\lambda a) J_{3/2}(\lambda b)}{\lambda^3} \frac{\sin \lambda c}{c} \quad \text{bij de wet } \frac{\sin \lambda r}{r}.$$

In al deze gevallen is  $\lambda \geq 0$ .

Daar potentialen additief zijn, kunnen we elk van deze speciale gevallen generaliseren door integratie naar  $\lambda$  als we nog een zekere beleggings- of gewichtsfunctie  $w(\lambda)$  invoeren. Bij de elementaire wet

$$F(r) = \int w(\lambda) \frac{e^{-\lambda r}}{r} d\lambda$$

behoort dan een interactie-energie tussen twee bollen:

$$V(a,b;c) = (4\pi^2 ab)^{3/2} \int w(\lambda) \frac{I_{3/2}(\lambda a) I_{3/2}(\lambda b)}{\lambda^3} \frac{e^{-\lambda c}}{c} d\lambda .$$

De integraal wordt hier genomen langs de reële of imaginaire as in het  $\lambda$ -vlak.

1.4.2.1. Als men  $rF(r)$  opvat als bijv. Laplace-getransformeerde van  $w(\lambda)$ , dus als we schrijven

$$rF(r) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) e^{-\lambda r} d\lambda$$

met onbekende  $w(\lambda)$ , dan is

$$cV(a,b;c) \equiv cV(c) = (4\pi^2 ab)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \frac{I_{3/2}(\lambda a) I_{3/2}(\lambda b)}{\lambda^3} e^{-\lambda c} d\lambda .$$

Opmerking. Stelt men  $w(\lambda) \equiv 0$  voor  $\lambda \leq 0$ , dan heeft men de gewone Laplace-transformatie.

Is

$$rF(r) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \sin \lambda r d\lambda$$

of is

$$rF(r) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \cos \lambda r d\lambda ,$$

d.w.z. werken we met Fourier-getransformeerden, dan wordt de potentiaal achter-eenvolgens

$$cV(c) = (4\pi^2 ab)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \frac{J_{3/2}(\lambda a) J_{3/2}(\lambda b)}{\lambda^3} \sin(\lambda c) d\lambda$$

en

$$cV(c) = (4\pi^2 ab)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \frac{J_{3/2}(\lambda a) J_{3/2}(\lambda b)}{\lambda^3} \cos(\lambda c) d\lambda .$$

Men kan zich afvragen hoe het staat met de eenduidigheid. Er zijn 3 klassen van functies (potentialen  $F(r)$ ):

$$\text{I} \quad A_1 \frac{e^{-\lambda r}}{r} + A_2 \frac{e^{\lambda r}}{r} \quad (\lambda \geq 0) ;$$

$$\text{II} \quad \frac{B_1}{r} + B_2 ;$$

$$\text{III} \quad C_1 \frac{\sin \lambda r}{r} + C_2 \frac{\cos \lambda r}{r} ,$$

met  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  en  $C_2$  constanten, die voldoen aan de eis, dat de interactie-energie  $V$  van twee homogene bollen voldoet aan

$$V(a,b;c) = \varphi(a,b)F(c) .$$

Bewezen kan worden dat dit ook de enige zijn.

Eisen we dat  $F(\infty) = 0$ ,  $F(r) \geq 0$  voor  $r \geq 0$ , dan is de Yukawa-potentiaal

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r} \quad (\lambda \geq 0) \text{ de enige.}$$

### 1.5. Enige toepassingen

$$1.5.1. \quad F(r) = r^{-n} \quad (n > 1) .$$

$$r^{-n} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n-1)} \lambda^{n-2} \frac{e^{-\lambda r}}{r} d\lambda \quad (\text{Euler}),$$

dus de gewichtsfunctie is gedefinieerd door

$$w(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-1)} \lambda^{n-2} & \lambda \geq 0 \\ 0 & \lambda < 0 . \end{cases}$$

Wegens het voorgaande is nu

$$cV_n(a,b;c) = \frac{(4\pi^2 ab)^{3/2}}{\Gamma(n-1)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda c} I_{3/2}(\lambda a) I_{3/2}(\lambda b) \lambda^{n-5} d\lambda .$$

Uit de theorie der Besselfuncties is bekend dat

$$I_{3/2}(\lambda a) I_{3/2}(\lambda b) = \frac{1}{2\pi\lambda^3 (ab)^{3/2}} [\lambda a (e^{\lambda a} + e^{-\lambda a}) - (e^{\lambda a} - e^{-\lambda a})] .$$



$$\begin{aligned}
 & [\lambda b(e^{\lambda b} + e^{-\lambda b}) - (e^{\lambda b} - e^{-\lambda b})] = \\
 & = \frac{1}{2\pi\lambda^3 (ab)^{3/2}} [ab\lambda^2 \{e^{\lambda(a+b)} + e^{\lambda(a-b)} + e^{-\lambda(a-b)} + e^{-\lambda(a+b)}\} + \\
 & + \lambda \{ (a+b) \{ e^{-\lambda(a+b)} - e^{\lambda(a+b)} \} + (a-b) \{ e^{\lambda(a-b)} - e^{-\lambda(a-b)} \} \} + \\
 & + \{ e^{\lambda(a+b)} - e^{\lambda(a-b)} - e^{-\lambda(a-b)} + e^{-\lambda(a+b)} \} ] ,
 \end{aligned}$$

waaruit

$$\begin{aligned}
 cV_n(a,b;c) & = \frac{4\pi^2}{\Gamma(n-1)} \left[ \int_0^\infty ab\lambda^{n-6} d\lambda \{ e^{-\lambda(c-a-b)} + e^{-\lambda(c-a+b)} + e^{-\lambda(c+a-b)} + \right. \\
 & + e^{-\lambda(c+a+b)} \} + \int_0^\infty \lambda^{n-7} d\lambda \{ (a+b)(e^{-\lambda(c+a+b)} - e^{-\lambda(c-a-b)}) + (a-b) \cdot \\
 & \cdot (e^{-\lambda(c-a+b)} - e^{-\lambda(c+a-b)}) \} + \int_0^\infty \lambda^{n-8} d\lambda \{ e^{-\lambda(c-a-b)} - e^{-\lambda(c-a+b)} - e^{-\lambda(c+a-b)} + \\
 & \left. + e^{-\lambda(c+a+b)} \} \right] . \tag{A}
 \end{aligned}$$

Voor  $n > 8$  is deze transformatie geoorloofd, daar dan alle integralen convergeren.

Echter,  $V_n$  is een analytische functie van  $n$  voor  $n > 1$  en  $c > a+b$ . De uitkomst die we krijgen geldt in principe dus voor  $n > 1$ .

We hebben hier te maken met integralen van het type

$$\int_0^\infty \lambda^{n-p} e^{-\lambda(c+a+b)} d\lambda = \frac{\Gamma(n-p+1)}{(c+a+b)^{n-p+1}} .$$

Op grond hiervan vinden we na enig cijferwerk

$$\begin{aligned}
 \frac{c}{4\pi^2} V_n(a,b;c) & = \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} [ab \{ (c+a+b)^{5-n} + (c-a-b)^{5-n} + \\
 & + (c+a-b)^{5-n} + (c-a+b)^{5-n} \} - \frac{c}{n-6} \{ (c+a+b)^{6-n} + (c-a-b)^{6-n} - \\
 & - (c+a-b)^{6-n} - (c-a+b)^{6-n} \} + \frac{1}{n-7} \{ (c+a+b)^{7-n} + (c-a-b)^{7-n} - \\
 & - (c+a-b)^{7-n} - (c-a+b)^{7-n} \} ] , \tag{B}
 \end{aligned}$$

geldig voor  $n > 1$  en symmetrisch in  $a$  en  $b$ .

Opmerking. Bovenstaande formule is afgeleid in de onderstelling dat  $n > 8$  is. De integraaluitdrukking (A) is convergent voor  $n > 1$  en we mogen daarom ook (B) toepasbaar verklaren voor  $n > 1$ .

(B) geldt dus ook voor  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ . We moeten dan echter wel limietovergangen toepassen. Er ontstaan dan logaritmische termen. In het limietgeval  $n = 1$  geldt de formule (B) ook. Dit is eenvoudig te controleren, immers

$$V_1(a, b; c) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow 1} V_n(a, b; c) = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{4}{3} \pi b^3 \frac{1}{c} .$$

Door analytische voortzetting toe te passen blijkt nu dat (B) geldt voor alle  $n$ , inclusief negatief gehele waarden van  $n$ .

Tenslotte volgt ook hier:

$$V_{n+1} = \frac{1}{1-n} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} (cV_n) \quad (\text{zie ook blz. 9}).$$

#### 1.5.1.1. De gevallen $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Als specifiek voorbeeld bekijken we het geval  $n = 2$ . We passen op de breuken  $\frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$ ,  $\frac{1}{(n-2) \dots (n-6)}$  en  $\frac{1}{(n-2) \dots (n-7)}$ , die in (B) voorkomen, partieelbreuksplitsing toe en vinden daarmee:

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi^2} V_n(a, b; c) &= \left\{ \frac{-1/6}{n-2} + \frac{1/2}{n-3} + \frac{-1/2}{n-4} + \frac{1/6}{n-5} \right\} ab[(c+a+b)^{5-n} + (c-a-b)^{5-n} + \\ &+ (c+a-b)^{5-n} + (c-a+b)^{5-n}] + \left\{ \frac{-1/24}{n-2} + \frac{1/6}{n-3} + \frac{-1/4}{n-4} + \frac{1/6}{n-5} + \frac{-1/24}{n-6} \right\} \cdot \\ &\cdot c[(c+a+b)^{6-n} + (c-a-b)^{6-n} - (c+a-b)^{6-n} - (c-a+b)^{6-n}] + \left\{ \frac{1/30}{n-2} + \frac{-1/8}{n-3} + \right. \\ &+ \left. \frac{1/6}{n-4} + \frac{-1/12}{n-5} + \frac{1/120}{n-7} \right\} [(c+a+b)^{7-n} + (c-a-b)^{7-n} - (c+a-b)^{7-n} - (c-a+b)^{7-n}] \end{aligned}$$

We ontwikkelen nu de termen tussen vierkante haken naar  $n-2$  en vinden bijv.

$$\begin{aligned} &(c+a+b)^{5-n} + (c-a-b)^{5-n} + (c+a-b)^{5-n} + (c-a+b)^{5-n} = \\ &= (c+a+b)^3 + (c-a-b)^3 + (c+a-b)^3 + (c-a+b)^3 + (2-n)[(c+a+b)^3 \cdot \\ &\cdot \log(c+a+b) + (c-a-b)^3 \log(c-a-b) + (c+a-b)^3 \log(c+a-b) + \\ &+ (c-a+b)^3 \log(c-a+b)] + 0(2-n)^2 . \end{aligned}$$

Doen we dit ook voor de andere vormen tussen vierkante haken, dan volgt er tenslotte

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi^2} V_2(a,b;c) = & -\frac{11}{36} ab\{(c+a+b)^3 + (c-a-b)^3 + (c+a-b)^3 + (c-a+b)^3\} + \\ & -\frac{25}{288} c\{(c+a+b)^4 + (c-a-b)^4 - (c+a-b)^4 - (c-a+b)^4\} + \\ & +\frac{61}{900} \{(c+a+b)^5 + (c-a-b)^5 - (c+a-b)^5 - (c-a+b)^5\} + \\ & +\frac{1}{6} ab\{(c+a+b)^3 \log(c+a+b) + (c-a-b)^3 \log(c-a-b) + \\ & \quad - (c+a-b)^3 \log(c+a-b) - (c-a+b)^3 \log(c-a+b)\} + \\ & +\frac{1}{24} c\{(c+a+b)^4 \log(c+a+b) + (c-a-b)^4 \log(c-a-b) + \\ & \quad - (c+a-b)^4 \log(c+a-b) - (c-a+b)^4 \log(c-a+b)\} + \\ & -\frac{1}{30} \{(c+a+b)^5 \log(c+a+b) + (c-a-b)^5 \log(c-a-b) + \\ & \quad - (c+a-b)^5 \log(c+a-b) - (c-a+b)^5 \log(c-a+b)\} . \end{aligned}$$

Daar

$$(c+a+b)^3 + (c-a-b)^3 + (c+a-b)^3 + (c-a+b)^3 = 4c(c^2 + 3a^2 + 3b^2)$$

$$(c+a+b)^4 + (c-a-b)^4 - (c+a-b)^4 - (c-a+b)^4 = 16ab(3c^2 + a^2 + b^2)$$

$$(c+a+b)^5 + (c-a-b)^5 - (c+a-b)^5 - (c-a+b)^5 = 80abc(a^2 + b^2 + c^2) ,$$

wordt het uiteindelijke resultaat

$$V_2(a,b;c) = \frac{\pi^2}{30} [4ab(c^2 + 11a^2 + 11b^2) + \{c^4 - 10c^2(a^2 + b^2) - 15(a^2 - b^2)^2\} .$$

$$\cdot \log \frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} + \frac{4a^3}{c} (5c^2 + a^2 - 5b^2) \log \frac{a^2 - (b-c)^2}{a^2 - (b+c)^2} + \frac{4b^3}{c} (5c^2 + b^2 - 5a^2) .$$

$$\cdot \log \frac{b^2 - (a-c)^2}{b^2 - (a+c)^2} ] .$$

Op analoge wijze vindt men:

$$V_3(a, b; c) = \frac{\pi^2}{6c} \left[ -4ab(c^2 + 3a^2 + 3b^2) + \{c^4 - 6c^2(a^2 + b^2) - 3(a^2 - b^2)^2\} \cdot \right. \\ \left. \cdot \log \frac{c^2 - (a-b)^2}{c^2 - (a+b)^2} + 8ca^3 \log \frac{a^2 - (b+c)^2}{a^2 - (b-c)^2} + 8cb^3 \log \frac{b^2 - (a+c)^2}{b^2 - (a-c)^2} \right],$$

$$V_4(a, b; c) = \frac{\pi^2}{3} \left[ 4ab + (c^2 - 3a^2 - 3b^2) \log \frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} + \frac{2a^3}{c} \log \frac{a^2 - (b-c)^2}{a^2 - (b+c)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2b^3}{c} \log \frac{b^2 - (a-c)^2}{b^2 - (a+c)^2} \right],$$

$$V_5(a, b; c) = \frac{\pi^2}{3c} \left[ -4ab + (c^2 - a^2 - b^2) \log \frac{c^2 - (a-b)^2}{c^2 - (a+b)^2} \right],$$

$$V_6(a, b; c) = \frac{\pi^2}{6} \left[ \frac{4ab(c^2 - a^2 - b^2)}{[c^2 - (a-b)^2][c^2 - (a+b)^2]} + \log \frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \right]$$

(London-v.d. Waalskracht) en

$$V_7(a, b; c) = \frac{\pi^2}{30} \left[ \frac{ab}{c} \left( \frac{1}{(c+a+b)^2} + \frac{1}{(c-a-b)^2} + \frac{1}{(c-a+b)^2} + \frac{1}{(c+a-b)^2} \right) + \right. \\ \left. - \frac{8abc}{[c^2 - (a-b)^2][c^2 - (a+b)^2]} + \frac{1}{c} \log \frac{c^2 - (a-b)^2}{c^2 - (a+b)^2} \right].$$

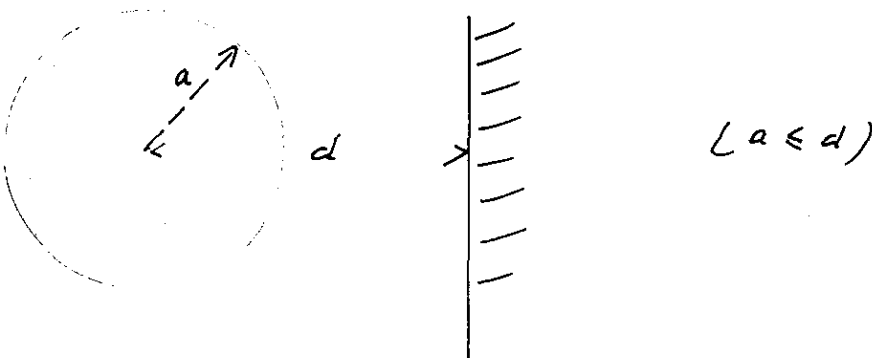
Opmerking. Door deze formules zijn nu ook de integralen

$$cV_n(a, b; c) = \frac{(4\pi^2 ab)^{3/2}}{\Gamma(n-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda c} I_{3/2}(\lambda a) I_{3/2}(\lambda b) \lambda^{n-5} d\lambda$$

bekend voor de gevallen  $n = 2$  t/m  $n = 7$ .

### 1.5.2. Bol en halfruimte

Dit is een bijzonder geval van het voorgaande, daar we de halfruimte kunnen beschouwen als een bol met oneindig grote straal.



De potentiaal stellen we evenredig met  $r^{-n}$  ( $n > 3$ ). Voor  $n \leq 3$  convergeert de integraal niet.

Substitueer  $c = b + d$  en laat  $b \rightarrow \infty$ , dan volgt er:

$$(n-2)(n-3)(n-4)U_n(a;d)/4\pi^2 = \frac{1}{n-6} \{(d+a)^{6-n} - (d-a)^{6-n}\} + \\ - \frac{d}{n-5} \{(d+a)^{5-n} - (d-a)^{5-n}\} .$$

Op analoge wijze als in 1.5.1.1 kunnen weer de limietgevallen  $n = 4, 5, 6$  worden bekeken. Er blijkt:

$$U_4(a;d) = \pi^2 (2ad + (d^2 - a^2) \log \frac{d-a}{d+a})$$

$$U_5(a;d) = \frac{2\pi^2}{3} (-2a + d \log \frac{d+a}{d-a})$$

$$U_6(a;d) = \frac{\pi^2}{6} \left( \log \frac{d-a}{d+a} + \frac{2ad}{d^2 - a^2} \right) \quad (\text{London-v.d. Waalskracht})$$

$$U_7(a;d) = \frac{2}{15} \frac{\pi^2 a^3}{(d^2 - a^2)^2} = \frac{\pi M}{10} \frac{1}{(d^2 - a^2)^2} ; \quad M = \frac{4\pi a^3}{3} .$$

Opgave. Leid een algemene formule af voor de energie tussen bol en halfruimte bij willekeurige gegeven  $F(r)$ .

#### Literatuur

- R.S. Bradley, The cohesive force between solid surfaces and the surface energy of solids, *Philos. Mag.* 13 (1932), 853 - 862.
- H.C. Hamaker, The London-v.d. Waals attraction between spherical particles, *Physica* 4 (1937), 1058 - 1072.
- C.J. Bouwkamp, A new method for computing the energy of interaction between two spheres under a general law of force, *Physica* 8 (1947), 501 - 507.
- I.N. Sneddon and C.K. Thornhill, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 45 (1949), 318 ff.
- H.D. Block, Laws of attraction having a certain generalized Newtonian property, *J. Math. Phys.* 31 (1952), 151 - 153.
- I.N. Sneddon, *Fourier-transforms*, McGraw Hill 1951, 333 ff.
- W.B.J. Altenburg, Enige problemen uit het college *Capita Selecta* van Prof.dr. C.J. Bouwkamp, voorjaar 1969.

## 2. Attractie van schijven

We beschouwen twee cirkelvormige schijven met stralen  $a$  en  $b$ , afstand van de middelpunten  $c$ , die in hetzelfde vlak liggen en met homogene massa van dichtheid 1 zijn bedekt. We noemen de wederzijdse energie  $V(a,b;c)$ , de elementaire potentiaalwet tussen twee punten met afstand  $r$ :  $F(r)$ .

Het probleem, dat hier gesteld wordt, is afkomstig uit de attractie van twee identieke cilindervormige permanent-magnetische staafjes, homogeen gemagnetiseerd in de asrichting en parallel aan elkaar. Bij lange dunne staafjes, die dicht bij elkaar liggen, is de attractie essentieel die van de twee paren uiteinden van de staafjes, de polen van de magneten.

In  $R_2$  kent men de logarithmische potentiaal  $\log r$ , het analogon van de Newton-potentiaal in  $R_3$ . Ook hier geldt de eigenschap

$$V(a,b;c) = \pi a^2 \cdot \pi b^2 \log c$$

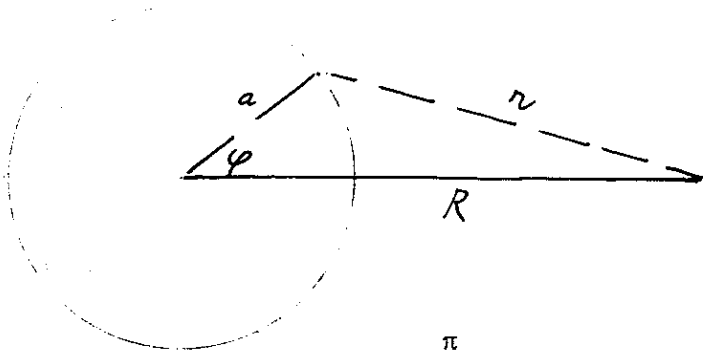
voor  $F(r) = \log r$ .

Het is weer alsof de massa's in de middelpunten geconcentreerd zijn.

Het blijkt, dat algemene formules ingewikkelder worden dan in hoofdstuk 1.

### 2.1.1. Cirkel en punt

Zij de totale massa van de cirkel 1, dan is de lijndichtheid  $\frac{1}{2\pi a}$ , als  $a$  de straal is, en na invoering van poolcoördinaten zien we dat



(fig 1)

$$G_{\text{cirkel}}(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(r) d\varphi . \quad (1)$$

Wegens  $r^2 = a^2 - 2aR \cos \varphi + R^2$ , dus  $r dr = aR \sin \varphi d\varphi$ , volgt er

$$G_{\text{cirkel}}(R) = \frac{2}{\pi} \int_{R-a}^{R+a} \frac{F(r) r dr}{2aR \sin \varphi} .$$

Verder is

$$4a^2 R^2 \sin^2 \varphi = 4a^2 R^2 - 4a^2 R^2 \cos^2 \varphi = 4a^2 R^2 - (R^2 + a^2 - r^2)^2,$$

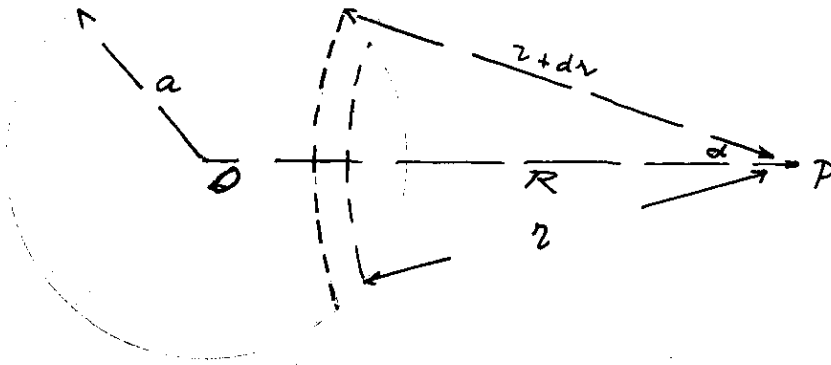
waaruit we vinden

$$2aR \sin \varphi = \{[(R+a)^2 - r^2][r^2 - (R-a)^2]\}^{\frac{1}{2}},$$

dus

$$G_{\text{cirkel}}(R) = \frac{2}{\pi} \int_{R-a}^{R+a} \frac{F(r)rdr}{[\{(R+a)^2 - r^2\}\{r^2 - (R-a)^2\}]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2)$$

### 2.1.2. Cirkelschijf en punt



(fig 2)

Om dit op te lossen is het voldoende het bovenstaande resultaat naar  $a$  te integreren. Het kan echter ook op een meer directe manier. Sla om het massapunt  $P$  twee cirkels met stralen  $r$  en  $r+dr$ , die de schijf snijden. Door deze cirkels wordt uit de schijf een oppervlakje  $2ardr$  gesneden.

Daar  $a^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \alpha$ , is

$$\alpha = \arccos\left(\frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}\right).$$

Zij de totale massa = oppervlakte van de schijf =  $\pi a^2$ . Voor de eenheid van massa, homogeen uitgesmeerd over de schijf, wordt de potentiaal dan

$$G_{\text{schijf}}(R) = \frac{2}{\pi a^2} \int_{R-a}^{R+a} rF(r) \arccos\left(\frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}\right) dr. \quad (3)$$

Vragen we naar functies  $F(r)$  zodanig, dat de totale massa van cirkel of cirkelschijf in het middelpunt ervan is geconcentreerd, dan moeten we de volgende vergelijkingen oplossen:

$$\frac{2}{\pi} \int_{R-a}^{R+a} \frac{F(r)rdr}{\{[(R+a)^2 - r^2][r^2 - (R-a)^2]\}^{\frac{1}{2}}} = F(R) \quad (0 \leq a \leq R < \infty) \quad (4)$$

en

$$\frac{2}{\pi a^2} \int_{R-a}^{R+a} rF(r) \arccos\left(\frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}\right) dr = F(R) \quad (0 \leq a \leq R < \infty) . \quad (5)$$

We laten zien dat de oplossing hiervan gegeven is door

$$F(R) = A \log R + B, \quad A \text{ en } B \text{ constanten}$$

en dat dit de enige oplossing is.

Om dit probleem te behandelen gaan we terug naar vergelijking (1).

We moeten in ons geval dus oplossen

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(r) d\varphi = F(R), \quad (6)$$

die equivalent is met de andere twee in het geval van homogene belegging.

Vergelijking (6) is geheel equivalent met (4), terwijl (5) alleen geldt voor homogene schijven. Het is voldoende om (6) of (4) te bekijken.

Daar  $r = (R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}$ , wordt (6)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi}) d\varphi = F(R)$$

identiek in  $a$ . We differentiëren linker- en rechterlid naar  $a$ . Er volgt:

$$\int_0^{\pi} F'(r) \frac{a - R \cos \varphi}{r} d\varphi = 0 .$$

Substitueert men hierin  $a = 0$  dan vindt men  $0 = 0$ . Nogmaals differentiëren naar  $a$  levert

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ F''(r) \left( \frac{a - R \cos \varphi}{r} \right)^2 d\varphi + F'(r) \left[ \frac{1}{r} - \frac{(a - R \cos \varphi)^2}{r^3} \right] \right\} d\varphi .$$

Voor  $a \rightarrow 0$  volgt er, daar dan  $r \rightarrow R$ :

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ F''(R) \cos^2 \varphi + F'(R) \left( \frac{1}{R} - \frac{\cos^2 \varphi}{R} \right) \right] d\varphi$$



of

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ F''(R) \cos^2 \varphi + \frac{F'(R)}{R} \sin^2 \varphi \right] d\varphi = 0 . \quad (7)$$

Daar

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \neq 0$$

volgt uit (7) dat  $F''(R) + \frac{F'(R)}{R} = 0$ , met als algemene oplossing

$$F(R) = A \log R + B .$$

Is dit een oplossing van (6) ?

$$\begin{aligned} F(r) &= \log r = \log R + \frac{1}{2} \log \left( 1 - 2 \frac{a}{R} \cos \varphi + \frac{a^2}{R^2} \right) = \\ &= \log R - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{R} \right)^n \cos n\varphi , \end{aligned}$$

dus

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(r) d\varphi = \log R - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \left( \frac{a}{R} \right)^n \cos n\varphi \, d\varphi = \log R = F(R) .$$

Het is direct duidelijk, dat ook  $F(r) \equiv 1$  een oplossing is van (6), dus daarmee is aangetoond, dat  $A \log r + B$  met  $A$  en  $B$  willekeurige constanten de algemene oplossing is van (3).

## 2.2. Toepassing van Besselfuncties op het schijvenprobleem

We stellen de vraag: Is er een elementaire wet  $F(r)$  (= potentiaal tussen twee puntmassa's), zodanig dat ook voor schijven geldt

$$V(a,b;c) = \varphi(a)\varphi(b)F(c) ?$$

Als deze vraag bevestigend kan worden beantwoord, kunnen we de gereduceerde massa's weer in het middelpunt geplaatst denken.

Daar we ons volgens de titel van deze paragraaf met Besselfuncties bezig zullen houden, komen we al gauw op de gedachte  $K_0(r)$  te bekijken, daar  $K_0(r)$  in  $r = 0$  een logarithmische singulariteit heeft.

Zij dus  $F(r) = K_0(rt)$  met  $t > 0$  als parameter.

2.2.1. In 2.1.1 hebben we gevonden dat voor een cirkel geldt

$$G(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(r) d\varphi ,$$

dus in ons geval is

$$G(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_0(t\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi}) d\varphi .$$

Met behulp van het additietheorema voor  $K_0$  vinden we dan

$$G_{\text{cirkel}}(R) = I_0(at)K_0(Rt) \quad (a < R) . \quad (1)$$

2.2.2. Om  $G_{\text{schijf}}(R)$  te vinden moeten we, als we de totale massa van de schijf = 1 stellen, dus de massadichtheid  $\frac{1}{\pi a^2}$ , integreren over de straal van de schijf (zie ook 2.1.2). Er volgt dan, als we een schijfelement  $2\pi\rho d\rho$  stellen:

$$\begin{aligned} G_{\text{schijf}}(R) &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi\rho d\rho I_0(\rho t)K_0(Rt) = \\ &= \frac{2}{a^2} K_0(Rt) \int_0^a \rho d\rho I_0(\rho t) = \frac{2}{at} K_0(Rt)I_1(at) . \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat we in plaats van de totale massa 1 een gereduceerde massa  $\frac{2I_1(at)}{at}$  in het middelpunt dienen te plaatsen.

Opmerking.  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{2I_1(at)}{at} = 1.$

De wederzijdse energie tussen twee schijven met stralen  $a$  en  $b$  en afstand der middelpunten  $c$ , beide met totale massa 1, is dus

$$\frac{2I_1(at)}{at} \frac{2I_1(bt)}{bt} K_0(ct)$$

en derhalve

$$V(a,b;c) = \pi a^2 \cdot \pi b^2 \frac{2I_1(at)}{at} \frac{2I_1(bt)}{bt} K_0(ct)$$

onder de elementaire wet  $F(r) = K_0(rt)$ , toegepast op homogene schijven met massadichtheid = 1.

We nemen nu de totale massa van elke schijf = 1 en dan wordt de wederzijdse energie  $U(a,b;c)$  gelijk aan

$$U(a,b;c) = \frac{2I_1(at)}{at} \frac{2I_1(bt)}{bt} K_0(ct) .$$

Onderstellen we dat de gegeven functie  $F(r)$  kan worden voorgesteld door

$$F(r) = \int_0^\infty f(t)K_0(rt)dt , \quad (B)$$

waarbij  $f(t)$  dus als beleggingsfunctie optreedt, dan wordt wegens het additief zijn van energie

$$U(a,b;c) = \frac{4}{ab} \int_0^\infty I_1(at)I_1(bt)K_0(ct)f(t)t^{-2} dt . \quad (A)$$

We nemen  $F(r) = r^{-n}$  ( $n > 0$ ). Bekend is (zie Watson 1944, pag. 388, eq. 12) dat

$$r^{-n} = \frac{2^{2-n}}{\Gamma^2(\frac{n}{2})} \int_0^\infty K_0(rt)t^{n-1} dt .$$

Vervangen we  $U$  door  $U_n(a,b;c)$  dan komt er

$$U_n(a,b;c) = \frac{2^{4-n}}{ab\Gamma^2(\frac{n}{2})} \int_0^\infty I_1(at)I_1(bt)K_0(ct)t^{n-3} dt . \quad (C)$$

Hoewel de integraal in (C) er ingewikkeld uitziet, zal het, vanwege het feit dat er van Besselfuncties veel resultaten bekend zijn, gelukken  $U_n(a,b;c)$  te berekenen.

### 2.2.2.1. Enkele differentiaal- en recurrentierelaties

Neem een rechthoekig assenstelsel aan in het vlak  $V$  van de schijf, die willekeurige vorm en massaverdeling heeft. Zij de potentiaal buiten de schijf en in  $V$  gegeven door

$$U(x,y) = \iint_{\text{schijf}} D(\xi,\eta)F(r)d\xi d\eta$$

met  $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$  en  $D(\xi,\eta) =$  lokale massadichtheid.

Beschouw de Laplace-operator  $\Delta U$ , dan is

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \iint_{\text{schijf}} D(\xi, \eta) \Delta_{x,y} F(r) d\xi d\eta = \\ &= \iint_{\text{schijf}} D(\xi, \eta) \Delta_{\xi, \eta} F(r) d\xi d\eta = \iint_{\text{schijf}} D(\xi, \eta) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) d\xi d\eta = \\ &= \iint_{\text{schijf}} D(\xi, \eta) \left[ \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right] d\xi d\eta . \end{aligned}$$

Hiermee is aangetoond:

Stelling I. Is  $U$  de potentiaal van een schijf tegen puntmassa onder de elementaire wet  $F(r)$ , dan is  $\Delta U$  de potentiaal van dezelfde schijf tegen die puntmassa bij de elementaire wet  $F''(r) + \frac{1}{r} F'(r)$ .

Passen we dit resultaat toe op **een cirkelvormige schijf met cirkelsymmetrische massaverdeling**  $D$ , die dus alleen afhankelijk van  $\rho$  is, dan is  $U(x, y) = U(c)$  met  $c$  = afstand van het veldpunt tot het middelpunt van de **schijf**, dus  $\Delta U = U''(c) + \frac{1}{c} U'(c)$ .

Passen we dit tweemaal toe, dan volgt:

Stelling II. Is  $U(a, b; c)$  de wederzijdse energie van twee cirkelvormige schijven met cirkelsymmetrische massaverdeling bij de elementaire wet  $F(r)$ , dan is

$$\bar{U}(a, b; c) = \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial c} = 4 \frac{\partial}{\partial c^2} \left( c^2 \frac{\partial U}{\partial c^2} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} \left( c \frac{\partial U}{\partial c} \right)$$

de wisselwerkingsenergie van dezelfde schijven bij de elementaire wet

$$\bar{F}(r) = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} .$$

Opmerking. Stelling II kan ook bewezen worden door uit te gaan van (A) (zie 2.2.2). Maakt men gebruik van de differentiaalvergelijking voor  $K_0(z)$ , t.w.  $K_0''(z) + \frac{1}{z} K_0'(z) = K_0(z)$ , dan ziet men dat  $\bar{U}$  de genererende functie  $t^2 f(t)$  heeft, als  $U$  de genererende functie  $f(t)$  heeft.

Op zijn beurt behoort  $t^2 f(t)$  via (B) (zie 2.2.2) bij de wet  $\bar{F}(r)$ .

Stelling II is belangrijk vanwege de toepasbaarheid op  $r^{-n}$ .

We kunnen volstaan met  $0 < n \leq 2$ , daar we voor alle andere  $n$  het resultaat door differentiëren kunnen vinden, immers

$$U_{n+2}(a,b;c) = \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial c^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} \right\} U_n(a,b;c) \quad n > 0$$

(zie formule (C) (2.2.2) en maak gebruik van de differentiaalvergelijking voor  $K_0$ ).

#### 2.2.2.2. Enkele speciale gevallen

We gaan uit van formule (C) (2.2.2) en bekijken achtereenvolgens de gevallen  $b = 0$ ,  $a = b$ ,  $a \neq b \neq 0$ ,  $b \rightarrow \infty$ .

##### 2.2.2.21. $b = 0$

In dit geval wordt

$$U_n(a,0;c) = \frac{2^{3-n}}{a\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty I_1(at)K_0(ct)t^{n-2} dt = \frac{1}{c^n} F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}; 2; \frac{a^2}{c^2}\right)$$

(zie Watson, Besselfunctions, page 410, form. 1).

Hierbij is  $F$  de hypergeometrische reeks, voor  $|x| < 1$  gedefinieerd door

$$F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)} \frac{x^n}{n!}.$$

Deze reeks kan analytisch worden voortgezet door aanbrengen van een coupure buiten  $(-1,1)$ .

Een integraalvoorstelling van deze reeks, die we steeds zullen gebruiken, is te vinden in Whittaker-Watson, Modern Analysis (voortaan afgekort door W.W.), 1952, 14.6 pag. 291. Deze voorstelling luidt

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-uz)^{-a} du$$

geldig voor  $\text{Re } c > \text{Re } b > 0$  en  $|z| < 1$ .

Het hierboven gevonden resultaat voor  $U_n(a,0;c)$  geldt voor alle  $n$ .

Voor even  $n$  is  $F$  elementair, er volgt bijv.

$$U_2(a,0;c) = -\frac{1}{a^2} \log\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)$$

$$U_4(a,0;c) = \frac{1}{(c^2 - a^2)^2}$$

$$U_6(a,0;c) = \frac{c^2 + \frac{1}{2}a^2}{(c^2 - a^2)^4}.$$

Alle andere formules volgen uit de recurrente betrekking voor  $U_n$ .

Voor oneven  $n$  blijkt  $U_n$  uit te drukken te zijn in complete elliptische integralen van de 1e en 2e soort. Zo is bijv.:

$$\boxed{n=1} \quad U_1(a, 0; c) = \frac{1}{c} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; \frac{a^2}{c^2}\right).$$

Stel  $\frac{a}{c} = k$ . Nu is

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; k^2\right) &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}(1-k^2u)^{-\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} d\varphi = \frac{4}{\pi} \left[ \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi \right] = \frac{4}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) K(k) + \frac{1}{k^2} E(k) \right\}, \end{aligned}$$

dus

$$U_1(a, 0; c) = \frac{4c}{\pi a^2} \left[ E\left(\frac{a}{c}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) K\left(\frac{a}{c}\right) \right].$$

$$\boxed{n=3} \quad U_3(a, 0; c) = \frac{1}{c^3} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \frac{a^2}{c^2}\right).$$

Als we weer  $\frac{a}{c} = k$  stellen, dan is

$$\begin{aligned} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; k^2\right) &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2u)^{-3/2} du = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi = \frac{4}{\pi k} \frac{d}{dk} K(k) = \frac{4}{\pi k^2} \left[ \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right], \end{aligned}$$

(zie hiervoor W.W., 1952, 22.736, pag. 521), dus

$$U_3(a, 0; c) = \frac{4}{\pi a^2 c} \left[ \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)^{-1} E\left(\frac{a}{c}\right) - K\left(\frac{a}{c}\right) \right].$$

Door vergelijking van de resultaten voor  $U_1$  en  $U_3$  blijkt dat

$$U_1(a, 0; c) = (c^2 - a^2) U_3(a, 0; c).$$

Opmerking. Dit resultaat hadden we ook kunnen vinden door toepassing van de Euler-transformatie voor hypergeometrische functies:

$$F(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; x)$$

(zie W.W., 1952, 14.4, pag. 285).

$n=5$ . Op analoge wijze blijkt

$$U_5(a, 0; c) = \frac{4}{9\pi a^2 c^3} \left[ \frac{1+7k^2}{(1-k^2)^3} E(k) - \frac{1+3k^2}{(1-k^2)^2} K(k) \right]; \quad k = \frac{a}{c}.$$

Algemeen:  $U_{2n+1}(a, 0; c)$  is een lineaire combinatie van  $K(\frac{a}{c})$  en  $E(\frac{a}{c})$  met coëfficiënten, die rationaal zijn in  $\frac{a}{c}$ .

Ook voor  $n = m + \frac{1}{2}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , kunnen we de functie  $U_n(a, 0; c)$  in elementaire functies en integralen van de 1e en 2e soort uitdrukken. We gebruiken hierbij Kummer's relatie:

$$F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; 2; \sin^2 \theta\right) = F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \sin^2 \frac{1}{2} \theta\right), \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

(W.W., 1952, pag. 298, ex. 12).

Toepassing van dit resultaat levert

$$\boxed{n = \frac{3}{2}} \quad U_{3/2}(a, 0; c) = \frac{16\sqrt{c}}{\pi a^2} \left[ E \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{a^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)} \right\} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{a^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} K \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{a^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)} \right\} \right].$$

Opmerking. Uit Kummer's formule volgt direct

$$U_3(a, 0; c) = c^{-3/2} U_{3/2} \left( 2a \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}, 0; c \right).$$

De lezer bewijze dit zelf.

$n = \frac{5}{2}$ . Met behulp van Euler's transformatie (zie hiervoor) blijkt dat

$$F\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}; 2; \frac{a^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; 2; \frac{a^2}{c^2}\right),$$

waaruit volgt

$$U_{5/2}(a, 0; c) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}} U_{3/2}(a, 0; c) .$$

$n = \frac{7}{2}$  . Op een dergelijke manier is  $U_{7/2}(a, 0; c)$  te vinden. Er blijkt nl.

$$U_{7/2}(a, 0; c) = (c^2 - a^2)^{-3/2} U_{1/2}(a, 0; c) .$$

Verder is

$$U_{7/2}(a, 0; c) = \frac{4}{9} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial c^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} \right\} U_{3/2}(a, 0; c) .$$

We hebben dus nu ook  $U_{1/2}(a, 0; c)$  gevonden.

Algemeen:  $U_{m+\frac{1}{2}}$  is voor  $m$  geheel en  $\geq 0$  uit te drukken in elementaire functies en elliptische integralen van de 1e en 2e soort.

#### 2.2.2.22. $a = b$

In dit geval wordt formule (A) (2.2.2)

$$\begin{aligned} U_n(a, a; c) &= \frac{2^{4-n}}{a^2 \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty I_1^2(at) K_0(ct) t^{n-3} dt = \\ &= \frac{1}{c^n} {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 2, 3; \frac{4a^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

(gegeneraliseerde hypergeometrische reeks, Erdélyi e.a.: Higher transcendental functions, Vol. I, pag. 182 e.v.).

Bewijs. Ontwikkel  $I_1^2(at)$  naar machten van  $t$ . Er volgt

$$I_1^2(at) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{at}{2}\right)^{2m+2} \frac{\Gamma(2m+3)}{m! \Gamma^2(m+2) \Gamma(m+3)} \quad (\text{Watson, pag. 147}).$$

Verder is

$$\int_0^\infty K_0(ct) t^p dt = 2^{p-1} \Gamma^2\left(\frac{p+1}{2}\right) \quad (\text{ibid. pag. 388}),$$

dus als we sommatie- en integratievolgorde verwisselen komt er:

$$U_n(a, a; c) = \frac{1}{c^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2m+3)}{\Gamma(m+1) \Gamma(m+3)} \left\{ \frac{\Gamma(m+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(m+2)} \right\}^2 \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^m =$$



$$= \frac{1}{c^2} \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma^2(\frac{n}{2})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma^2(m+\frac{n}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+2)\Gamma(m+3)} \left(\frac{4a^2}{c^2}\right)^m,$$

of

$$U_n(a, a; c) = \frac{1}{c^n} {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}; 2, 3; \frac{4a^2}{c^2}\right)$$

geldig voor alle  $n$ .

Is  $n$  even dan worden  $U_n(a, a; c)$  elementaire functies.

Voor  $n = 4$  en  $n = 6$  reduceert  ${}_3F_2$  zich tot de gewone hypergeometrische reeks.

Er volgt

$$U_4(a, a; c) = \frac{1}{c^4} F\left(\frac{3}{2}, 2; 3; \frac{4a^2}{c^2}\right)$$

en

$$U_6(a, a; c) = \frac{1}{c^6} F\left(\frac{3}{2}, 3; 2; \frac{4a^2}{c^2}\right).$$

Daar

$$F\left(\frac{3}{2}, 2; 3; \frac{4a^2}{c^2}\right) = 2 \int_0^1 u(1-xu)^{-3/2} du = \frac{1}{\left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right)^{1/2}} \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{c^2}}} \right\}^2$$

is

$$U_4(a, a; c) = \frac{1}{c^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right)^{1/2}} \left\{ \frac{2}{1 + \left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right\}^2.$$

Om  $U_6(a, a; c)$  te bepalen bedenken we dat

$$F\left(\frac{3}{2}, 3; 2; x\right) = (1-x)^{-5/2} F\left(\frac{1}{2}, -1; 2; x\right) \quad (\text{transf. van Euler}).$$

Daar  $F\left(\frac{1}{2}, -1; 2; x\right)$  afbreekt na de tweede term, is

$$U_6(a, a; c) = \frac{1}{c^6} \frac{1 - \frac{a^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right)^{5/2}}.$$

Om  $U_2$  te vinden kunnen we van de recurrente betrekking gebruikmaken, t.w.

$$U_4(a, a; c) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial c^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} \right\} U_2(a, a; c)$$

en dan integreren.

Het kan echter ook anders. We maken gebruik van de formule

$$\frac{d}{dx} \{x {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, 1, 1; 2, 3; x\right)\} = F\left(\frac{3}{2}, 1, 3, x\right).$$

Hier is

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+n)} \frac{\Gamma(e)}{\Gamma(e+n)} x^n.$$

Verder is

$$\begin{aligned} F\left(\frac{3}{2}, 1, 3; x\right) &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{3}{2}, 2, 3; x\right) = \left\{ \frac{2}{1+\sqrt{1-x}} \right\}^2 = \\ &= -8 \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \log(1+\sqrt{1-x}) \right\}. \end{aligned}$$

Na het bepalen van de integratieconstante volgt tenslotte

$${}_3F_2\left(\frac{3}{2}, 1, 1; 2, 3; x\right) = \frac{8}{x} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} - \log \frac{1+\sqrt{1-x}}{2} \right\}$$

en dus

$$U_2(a, a; c) = \frac{1}{a^2} \left[ 1 - \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4a^2}{c^2}}} - 2 \log \left\{ \frac{1+\sqrt{1-\frac{4a^2}{c^2}}}{2} \right\} \right].$$

Is n oneven dan wordt het berekenen van  $U_n$  veel ingewikkelder.

Voor  $n = 3$  is het mogelijk om  $U_n$  in gesloten vorm te brengen. We gebruiken daarbij de formule van Clausen (W.W. pag. 298 ex. 11 of Erdelyi e.a., dl I pag. 185). Voor zekere waarden van  $a, b, c, d$  en  $e$  volgt er

$${}_3F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 3; x\right) = \left\{ F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; 2; x\right) \right\}^2,$$

waaruit

$$U_3(a, a; c) = \frac{1}{c^3} \left\{ F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; 2; \frac{4a^2}{c^2}\right) \right\}^2 = \left\{ U_{3/2}(2a, 0; c) \right\}^2 =$$

$$(zie blz. 28) \quad = \frac{16c}{\pi^2 a^4} [E(k) - (1-k^2)K(k)]^2$$

met

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{c^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Opmerkingen

- 1) We kunnen het gevonden resultaat voor  $U_3(a, a; c)$  ook in Legendre functies uitdrukken. Men heeft nl. (zie C.S. Meyer: Integralvorstellungen für Produkte von Legendresche Funktionen, Nieuw Archief voor Wiskunde 19, 1938, pag. 216 form. (56) en pag. 222 form. (86):

$$\int_0^{\infty} K_0\left(\frac{2}{\eta} u\right) I_1^2(\xi u) du = \frac{\xi^2 \eta^3 \pi}{64} {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 3; \xi^2 \eta^2\right) =$$

$$= (\text{wegens de formule van Clausen}) \frac{\xi^2 \eta^3 \pi}{64} \left\{ F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; 2; \xi^2 \eta^2\right) \right\}^2,$$

en (zie L. Robin: Fonctions Sphériques de Legendre, tome II, pag. 53 form. 95):

$$P_{-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \theta) = \frac{\sin \theta}{2} F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; 2; \sin^2 \theta\right) \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}).$$

Stel  $\eta = \frac{2}{c}$ ,  $\xi = a$ , dan blijkt

$$\int_0^{\infty} K_0(ct) I_1^2(au) du = \frac{\pi}{8c} \left\{ P_{-\frac{1}{2}}^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{4a^2}{c^2}}\right) \right\}^2.$$

dus

$$U_3(a, a; c) = \frac{1}{a^2 c} \left\{ P_{-\frac{1}{2}}^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{4a^2}{c^2}}\right) \right\}^2.$$

- 2) Door reeksontwikkeling van F en daarna termgewijs te integreren is te vinden

$${}_3F_2(a, b, m; c, 2m; x^2) = \frac{\Gamma(2m)}{2^{2m-1} \Gamma^2(m)} \int_0^{\pi} \sin^{2m-1} \varphi [F(a, b; c; x^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi)] d\varphi.$$

Neem als speciaal geval  $m = 3/2$ ,  $a = b = \frac{1}{2}$ ,  $c = 2$ , dan is

$${}_3F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2, 3; x^2\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; x^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi\right) d\varphi$$

dus (zie blz. 29)

$$U_1(a, a; c) = \frac{2}{\pi c} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; \frac{4a^2}{c^2} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi\right) d\varphi.$$

Stel  $\alpha = \frac{2a}{c}$  en  $k = \alpha \sin \frac{1}{2} \varphi$ , dan volgt er

$$U_1(a, a; c) = \frac{16}{\pi c \alpha^4} \int_0^\alpha k^2 \sqrt{\alpha^2 - k^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; k^2\right) dk .$$

Nu is

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; k^2\right) = \frac{4}{\pi k} (1 - k^2) \frac{dK(k)}{dk} ,$$

zoals eenvoudig te verifiëren is, dus

$$U_1(a, a; c) = \frac{64}{\pi^2 c \alpha^4} \int_0^\alpha k(1 - k^2) \sqrt{\alpha^2 - k^2} \frac{dK(k)}{dk} dk .$$

Het rechterlid is nog enigszins om te vormen. Men krijgt dan

$$U_1(a, a; c) = \frac{64}{\pi^2 c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u \cos^2 u \cos^2 v}{(1 - \alpha^2 \sin^2 u \sin^2 v)^{\frac{1}{2}}} dudv ,$$

of

$$U_1(a, a; c) = \frac{16}{\pi^3 c} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2 u \sin^2 u \sin^2 v}{1 - \alpha \cos u \cos v \cos w} dudvdw .$$

### 2.2.2.23. $a \neq b$

We nemen  $n$  willekeurig reëel. Voor  $n > 0$  hebben we de integraalvoorstelling

$$U_n(a, b; c) = \frac{2^{4-n}}{ab \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty I_1(at) I_1(bt) K_0(ct) t^{n-3} dt ,$$

convergent voor  $n > 0$ ,  $0 \leq a + b < c$ . Ontwikkel het product van de twee  $I$ -functies in een machtreeks naar  $t$  (Watson, pag. 148, form. (2),  $z \rightarrow it$ ).

Dan is

$$I_1(at) I_1(bt) = \frac{at}{2} \frac{bt}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{at}{2}\right)^{2m} \frac{F(-m, -m-1; 2; b^2/a^2)}{m!(m+1)!} .$$

Invullen en termgewijs integreren levert

$$U_n(a, b; c) = \frac{2^{4-n}}{ab \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{ab}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F(-m, -m-1; 2; b^2/a^2)}{m!(m+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2m} \int_0^\infty t^{2m+n-1} K_0(ct) dt =$$

$$= \frac{2^{2-n}}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F(-m, -m-1; 2; b^2/a^2)}{m!(m+1)!} \left(\frac{a^2}{4}\right)^m \frac{2^{n+2m-2} \Gamma^2\left(\frac{n}{2}+m\right)}{c^{n+2m}}$$

(voor de integraal zie blz. 29). Nu is  $F(-m, -m-1; 2; x)$  een polynoom; er blijkt

$$\begin{aligned} F(-m, -m-1; 2; x) &= 1 + \sum_{k=1}^m \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)(m+1)(m) \dots (m-k+2)}{k!(k+1)!} x^k = \\ &= 1 + \sum_{v=0}^{m-1} \frac{m(m-1) \dots (v+1)}{(m-v)!} \frac{(m+1)(m) \dots (v+2)}{(m-v+1)!} x^{m-v} = \\ &= \sum_{v=0}^m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(v+1)} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(v+2)} \frac{x^{m-v}}{\Gamma(m-v+1)\Gamma(m-v+2)}. \end{aligned}$$

Dit resultaat substituerend in het rechterlid van  $U_n(a, b; c)$  volgt er

$$U_n(a, b; c) = \frac{1}{c^n} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right\}^2 \sum_{v=0}^m \frac{1}{v!(v+1)!(m-v)!(m-v+1)!} \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^v \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{m-v}.$$

We verwisselen de sommatievolgorde nog, dus

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{v=0}^m = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m=v}^{\infty}.$$

Dan blijkt dat

$$U_n(a, b; c) = \frac{1}{c^n} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!(v+1)!} \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^v \sum_{m=v}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right\}^2 \frac{1}{(m-v)!(m-v+1)!} \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{m-v}.$$

Neem in de laatste sommatie  $m = v + \mu$  dan wordt

$$\begin{aligned} U_n(a, b; c) &= \frac{1}{c^n} \frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!(v+1)!} \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^v \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\mu+v\right)\}^2}{\mu!(\mu+1)!} \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{\mu} = \\ &= \frac{1}{c^n} \frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\mu+v\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\mu+v\right)}{\Gamma(\mu+2)\Gamma(v+2)\mu!v!} \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^{\mu} \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^v \end{aligned}$$

of

$$U_n(a, b; c) = \frac{1}{c^n} F_4\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}; 2, 2; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right),$$

waarbij  $F_4$  Appell's hypergeometrische functie van twee variabelen voorstelt.

Opmerkingen

- 1) De reeksvoorstelling voor  $F_4$  convergeert voor  $a+b < c$ .
- 2) Voor numerieke berekeningen is het resultaat belangrijk, vooral als  $\frac{a}{c}$  en  $\frac{b}{c}$  klein zijn t.o.v. 1.
- 3) De relatie geldt voor alle  $n$ .

We onderzoeken weer enkele gevallen.

$n = 4$

$$U_4(a,b;c) = \frac{1}{ab} \int_0^\infty I_1(at) I_1(bt) K_0(ct) t dt .$$

Naar een formule van McDonald (Watson, pag. 412, form. 6) is

$$\int_0^\infty K_\mu(at) J_\nu(bt) J_\nu(ct) t^{\mu+1} dt = - \frac{a^\mu \cos v\pi (X^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}(bc)^{\mu+1} \sin(\mu+v)\pi} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(X)$$

met

$$X = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \quad \text{en} \quad \text{Re}(a \pm ib \pm ic) > 0 .$$

Daar het rechterlid in hypergeometrische functies is uit te drukken (zie bv. Erdélyi e.a.: Higher tr. f. dl. I, pag. 121 e.v.), kunnen we ook schrijven

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty K_\mu(at) J_\nu(bt) J_\nu(ct) t^{\mu+1} dt = \\ & = \frac{a^\mu \Gamma(\mu+\nu+1)}{2^{\nu+1} (bc)^{\mu+1} \Gamma(\nu) X^{\mu+\nu+1}} F\left(\frac{\mu+\nu+2}{2}, \frac{\mu+\nu+1}{2}; \nu+1, \frac{1}{X^2}\right) . \end{aligned}$$

Neem nu  $\mu = 0$  en  $\nu = 1$ , dan volgt er

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty K_0(at) J_1(bt) J_1(ct) t dt = \frac{1}{4bcX^2} F\left(\frac{3}{2}, 1; 2; X^{-2}\right) = \\ & = \frac{1}{4bcX^2} \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{X^2}\right)^{-3/2} du = \frac{1}{2bc} \left\{ \left(1 - \frac{1}{X^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\} . \end{aligned}$$

Vervang tenslotte  $a$  door  $c$ ,  $b$  door  $ia$  en  $c$  door  $ib$ , dan is

$$\int_0^{\infty} I_1(at) I_1(bt) K_0(ct) t dt = \frac{1}{2ab} \left[ \left( 1 - \frac{4a^2 b^2}{(c^2 - a^2 - b^2)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

en derhalve

$$U_4(a, b; c) = \frac{1}{2a^2 b^2} \left[ \frac{c^2 - a^2 - b^2}{\sqrt{[c^2 - (a-b)^2][c^2 - (a+b)^2]}} - 1 \right].$$

Opmerking. Stellen we  $a = b$  dan vinden we ons vroegere resultaat terug (zie blz. 30).

Nu we  $U_4$  hebben gevonden kunnen we ook  $U_6$ ,  $U_8$  enz. door differentiëren bepalen. Zo vindt men

$$U_6(a, b; c) = \frac{c^2(2c^2 - a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)^2}{2[c^2 - (a-b)^2]^{5/2} [c^2 - (a+b)^2]^{5/2}}.$$

Dit resultaat werd gevonden door: G.P. Dube - H.K. Dasgupta: Indian J. Physics 13, 1939, pag. 411 - 416.

Door integratie kan  $U_2$  gevonden worden, immers

$$U_4 = \frac{\partial}{\partial c^2} \left( c^2 \frac{\partial U_2}{\partial c^2} \right).$$

Stel  $u = c^2$  en  $W(u) = [u^2 - 2(a^2 + b^2)u + (a^2 - b^2)^2]^{\frac{1}{2}}$ . Door éénmaal te integreren vinden we

$$u \frac{\partial U_2}{\partial u} = \frac{1}{2a^2 b^2} \int_{\infty}^u \left\{ \frac{t - a^2 - b^2}{W(t)} - 1 \right\} dt = \frac{1}{2a^2 b^2} [a^2 + b^2 - u + W(u)].$$

Hierbij is geëist dat  $\lim_{u \rightarrow \infty} u \frac{\partial U_2}{\partial u} = 0$ . Dan is  $\lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{\partial U_2}{\partial u} = -1$ . Nogmaals integreren geeft

$$2a^2 b^2 U_2 = W(u) - u + a^2 + b^2 - (a^2 + b^2) \log \frac{W(u) + u - a^2 - b^2}{2u} + (a^2 - b^2)^2 \int_{\infty}^u \frac{dt}{tW(t)}.$$

De integratieconstante is hier zo vastgelegd, dat

$$\lim_{u \rightarrow \infty} U_2(u) = 0.$$

Verder is

$$(a^2 - b^2)^2 \int_{\infty}^u \frac{dt}{tW(t)} = - |a^2 - b^2| \log \left\{ \frac{u(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - |a^2 - b^2|W(u)}{u(a^2 + b^2 - |a^2 - b^2|)} \right\},$$

waarmee we als uiteindelijk resultaat vinden

$$U_2(a, b; c) = \frac{1}{2a^2 b^2} \left[ W - c^2 + a^2 + b^2 - (a^2 + b^2) \log \left\{ \frac{W + c^2 - a^2 - b^2}{2c^2} \right\} + \right. \\ \left. - |a^2 - b^2| \log \left\{ \frac{c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - |a^2 - b^2|W}{c^2(a^2 + b^2 - |a^2 - b^2|)} \right\} \right],$$

waarin

$$W \equiv W(c^2) = \sqrt{[c^2 - (a - b)^2][c^2 - (a + b)^2]}.$$

Voor oneven  $n$  ( $n \geq 3$ ) kunnen we  $U$  weer uitdrukken in complete elliptische integralen.

$n = 3$ . We hebben gevonden (blz. 35) dat

$$U_3(a, b; c) = \frac{1}{c^3} F_4\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right).$$

Om het rechterlid te kunnen berekenen maken we gebruik van de formule

$$F_4(a, b; c, a + b - c + 1; x(1 - y), y(1 - x)) = F(a, b; c; x)F(a, b; a + b - c + 1; y)$$

(zie W.N. Bailey: Generalized hypergeometric series, Cambr. 1935, pag. 81).

In ons geval wordt dit

$$F_4\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right) = F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; x\right)F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; y\right).$$

Het rechterlid hiervan is bekend (zie blz. 27), zodat als resultaat volgt

$$U_3(a, b; c) = \frac{16c}{\pi^2 a^2 b^2} [E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)][E(k_2) - (1 - k_2^2)K(k_2)]$$

met

$$k_1^2 = \frac{1}{2c^2} (c^2 + a^2 - b^2 - W) \quad \text{en} \quad k_2^2 = \frac{1}{2c^2} (c^2 - a^2 + b^2 - W).$$

$U_5, U_7$  enz. kunnen nu weer door differentiatie gevonden worden.  $U_1$  is tot nu toe alleen gevonden, uitgedrukt in  $F_4$ .



Literatuur

C.J. Bouwkamp: A study of Bessel functions in connection with the problem of two mutually attracting circular discs, Proc. A'dam 50 (1947), 1071-1083 = Ind. Math. 9 (1947), 485-497.

Opgaven

- 1) Neem een cirkelvormige schijf met massa 1, straal  $a$ , en een halfvlak met massadichtheid 1. De afstand van het middelpunt van de schijf tot de rand van het halfvlak zij  $\Delta$ , de potentiaalwet  $V(r) = r^{-n}$  ( $n > 2$ ). Als we stellen

$$u_n(a; \Delta) = \lim_{b \rightarrow \infty} \pi b^2 U_n(a, b; \Delta + b),$$

dan is

$$u_n(a; \Delta) = \frac{2^{3-n} \pi}{a \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\Delta t} I_1(at) t^{n-4} dt,$$

$$u_{n+1}(a; \Delta) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 \frac{\partial u_n(a; \Delta)}{\partial \Delta};$$

$$u_n(a; \Delta) = \frac{\pi}{(2\Delta)^{n-2}} \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} F\left(\frac{n-2}{2}, \frac{n-1}{2}; 2; \frac{a^2}{\Delta^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{(4\Delta^2)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} F\left(\frac{n-2}{2}, \frac{5-n}{2}; 2; -\frac{a^2}{\Delta^2 - a^2}\right).$$

Hieruit volgt bijvoorbeeld

$$u_3(a; \Delta) = \frac{4}{\Delta + (\Delta^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad u_4(a; \Delta) = \frac{\pi}{2a^2} \left\{ \frac{\Delta}{(\Delta^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\};$$

$$u_5(a; \Delta) = \frac{4}{9} \frac{1}{(\Delta^2 - a^2)^{3/2}}; \quad u_6(a; \Delta) = \frac{3\pi}{32} \frac{\Delta}{(\Delta^2 - a^2)^{5/2}};$$

$$u_7 = \frac{4}{75} \frac{4\Delta^2 + a^2}{(\Delta^2 - a^2)^{7/2}}.$$

Toon dit aan.

- 2) Zij de wisselwerkingsenergie tussen twee massapunten met onderlinge afstand  $r$ :  $V(r)$ . Toon aan, dat de wisselwerkingsenergie van twee homogene cirkelvormige schijven, in éénzelfde vlak gelegen en beide met massa 1, gegeven is

door

$$U(a,b;c) = \frac{4}{ab} \int_0^{\infty} G(a,b;c;r) V(r) r dr$$

met

$$G(a,b;c;r) = \int_0^{\infty} J_1(at) J_1(bt) J_0(ct) J_0(rt) \frac{dt}{t} .$$

Hierbij zijn a, b en c de stralen van de schijven en de afstand der middelpunten in deze volgorde (zie Wisk. Opg. XIX (1950), vrgst. VII).

Opmerking. De formule blijft geldig als de schijven elkaar geheel of gedeeltelijk overdekken.

3) Bewijs

$$\int_0^{\infty} J_1^2(t) J_0^2(xt) \frac{dt}{t} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} [x + \frac{1}{2}(1-x^2) \log \frac{1+x}{1-x} + 2\lambda(x)] & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{\pi^2} [x + \frac{1}{2}(1-x^2) \log \frac{x+1}{x-1} - 2\lambda(\frac{1}{x})] & x \geq 1 \end{cases}$$

met

$$\lambda(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (\text{l.c. id. vrgst. X}).$$

4) Indien twee eenheidsmassapunten op afstand r elkaar aantrekken met een kracht  $r^{-n}$  ( $n > 2$ ) gericht langs hun verbindinglijn, dan is de kracht tussen twee massieve cylinders, die elkaar loodrecht kruisen, gegeven door

$$(n-2) \frac{8\pi^3 ab}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-ct} I_1(at) I_1(bt) t^{n-5} dt$$

waarbij a en b de stralen van de cylinders zijn en c de afstand van de assen; de massadichtheid van de cylinders is 1;  $c > a+b$  (l.c. XXI (1961), 51).

### 3. Potentiaalproblemen bij cilindres

#### 3.1. Het elektrische veld van een puntlading binnen een oneindige cylinder op potentiaal nul

3.1.1. Zij de straal van de cylinder  $a$ . We nemen een puntlading  $+1$  binnen de cylinder gelegen.

Zij het elektrische veld  $\vec{E}$ , de potentiaal  $V$ , dan is  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , waarbij  $V$  de Greense functie **van de eerste soort voorstelt**. Binnen de cylinder is  $V$  een oplossing van de potentiaalvergelijking  $\Delta V = 0$ , behalve in het punt waar zich de puntlading bevindt. Is  $r$  de afstand tot deze lading, dan is  $V = \frac{1}{r}$  **analytisch in de omgeving van  $r = 0$ . Op de cylindermantel is  $V = 0$  en als  $r \rightarrow \infty$  moet gelden binnen de cylinder**

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = \lim_{r \rightarrow \infty} |\text{grad } V| = 0 .$$

We plaatsen de puntlading op de as van de cylinder. Daar het probleem rotatiesymmetrisch is, nemen we cylindercoördinaten  $(z, \rho, \varphi)$ ; de as van de cylinder is de  $z$ -as. We merken op dat het probleem even is in  $z$ .

Door de puntlading (we noemen de plaats daarvan  $0$ ) wordt op de wand van de cylinder een negatieve lading geïnduceerd. Noem de ladingsdichtheid ervan  $\eta(z)$ . Kennen we  $V$ , dan ook  $\eta(z)$ , immers

$$\eta(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} .$$

We leiden voor  $\eta(z)$  een integraalvergelijking af van het Fouriertype.

Stel  $g(z, \rho)$  een harmonische functie binnen de cylinder met  $g$  en  $\frac{\partial g}{\partial z}$  uniform begrensd. Volgens een stelling van Green is dan

$$\begin{aligned} g(0,0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{cyl}} g(z,a) \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = - \int_{\text{cyl}} g(z,a) \eta(z) d\sigma = \\ &= - \int_0^{2\pi} a d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} g(z,a) \eta(z) dz . \end{aligned}$$

We proberen nu  $g(z, \rho) = e^{-i\lambda z} I_0(\lambda \rho)$  ( $\lambda > 0$ ). Het rechterlid is een oplossing van  $\Delta g = 0$ , zoals eenvoudig is in te zien.

Uit het voorgaande volgt

$$g(0,0) = 1 = - 2\pi a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda iz} I_0(\lambda a) \eta(z) dz ,$$

dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda iz} \eta(z) dz = - \frac{1}{2\pi a I_0(\lambda a)} .$$

Met toepassing van de Fourier-omkering volgt nu

$$\eta(z) = - \frac{1}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{I_0(\lambda a)} e^{\lambda iz} d\lambda ,$$

en daar  $\eta(z)$  reëel is volgt direct

$$\eta(z) = - \frac{1}{2\pi^2 a^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{z}{a} t}{I_0(t)} dt .$$

Om deze integraal voor  $z \geq 0$  te berekenen gaan we als volgt te werk.

Beschouw

$$I_W = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{I_0(t)} dt$$

met  $W$ : de verbindingslijn van  $-R$  tot  $+R$  en de halve cirkel met  $0$  als middelpunt en  $R$  als straal in het bovenhalfvlak.  $W$  gaat niet door de nulpunten van  $I_0(t)$ , gelegen op de imaginaire as. Voor  $R \rightarrow \infty$  gaat de integraal over de cirkelboog naar nul.

Volgens de residuenstelling is nu:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_W = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \text{Res} \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{I_0(t)} \right\}_{t=ik_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{I_0'(ik_n)} = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{J_1(k_n)} .$$

Hierin zijn  $k_1, k_2, \dots$  de positieve nulpunten in opvolgende grootte van  $J_0(x)$ . We vinden dus

$$\eta(z) = - \frac{1}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{J_1(k_n)} \quad (z > 0) .$$

Opmerking. In de omgeving van  $z = 0$  is dit resultaat niet goed bruikbaar,

want  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(k_n)}$  divergeert.

De totale lading tussen  $z$  en  $\infty$  is nu

$$2\pi a \int_z^\infty \eta(u) du = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{k_n J_1(k_n)} .$$

Neem  $z \rightarrow 0$ , dan volgt voor de totale lading

$$\lim_{z \rightarrow 0} 2\pi a \int_z^\infty \eta(u) du = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n J_1(k_n)} = - \frac{1}{2} \quad (\text{Nielsen}).$$

Dit klopt natuurlijk ook, daar de helft van de op de cylindermantel geïnduceerde negatieve lading rechts van de oorsprong zit.

### 3.1.2. De ladingsdichtheid in de omgeving van $z = 0$

In  $z = 0$  divergeerde de integraal I. We moeten dus een andere methode zien te vinden. Deze is ontwikkeld door Watson (The use of series of Bessel functions in problems connected with windtunnels, Proc. Roy. Soc. London A 130 (1930/1), p. 29). Beschouw

$$I_W = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\cos \lambda w}{(w-t) I_0(w) \cos \frac{\pi w}{\alpha}} dw$$

met  $\lambda, \alpha, t$  positief;  $t$  valt niet samen met een nulpunt van  $\cos \frac{\pi w}{\alpha}$ .

Als integratieweg  $W$  nemen we een cirkel met straal  $R$  om de oorsprong ( $R \rightarrow \infty$ ), die alle polen van de integrand vermijdt, terwijl  $R > t$  is.

Verder eisen we dat  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_W = 0$ . Daarvoor is nodig dat  $\lambda < \frac{\pi}{\alpha}$ . De som van de residuen binnen  $W$  is dus 0. De integrand heeft als polen:

$$w = t; \quad w = \pm i k_n; \quad w = \pm (\nu + \frac{1}{2})\alpha \quad (n = 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots) .$$

De residuen hiervan zijn resp.

$$\frac{\cos \lambda t}{I_0(t) \cos \frac{\pi}{\alpha} t}; \quad - \frac{\cosh(\lambda k_n)}{\cosh(\frac{\pi k_n}{\alpha}) J_1(k_n) [k_n + it]}; \quad - \frac{\alpha}{\pi} \frac{(-1)^\nu \cos(\lambda \alpha \nu + \frac{1}{2} \lambda \alpha)}{I_0(\alpha \nu + \frac{1}{2} \alpha) [(\nu + \frac{1}{2}) \alpha + t]}$$

Hieruit volgt dus:

$$\frac{\cos \lambda t}{I_0(t) \cos \frac{\pi}{\alpha} t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n \cosh(\lambda k_n)}{J_1(k_n) \cosh(\frac{\pi k_n}{\alpha})} \frac{1}{k_n^2 + t^2} + \frac{\alpha}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cos(\nu \lambda \alpha + \frac{1}{2} \lambda \alpha)}{I_0(\nu \alpha + \frac{1}{2} \alpha)} \frac{2(\nu + \frac{1}{2})\alpha}{(\nu \alpha + \frac{1}{2} \alpha)^2 - t^2}$$

Vermenigvuldig linker- en rechterlid met  $\cos \frac{\pi}{\alpha} t$  en integreer termsgewijs van  $-\infty$  naar  $\infty$ . Maak verder gebruik van

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha} t}{k_n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{k_n} e^{-\frac{\pi k_n}{\alpha}} \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha} t}{(\nu\alpha + \frac{1}{2}\alpha)^2 - t^2} dt = \frac{(-1)^\nu \pi}{(\nu + \frac{1}{2})\alpha},$$

dan volgt er tenslotte

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda t}{I_0(t)} dt = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos[\lambda\alpha(\nu + \frac{1}{2})]}{I_0[(\nu + \frac{1}{2})\alpha]} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\lambda k_n)}{J_1(k_n)[1 + \exp 2\pi k_n/\alpha]}.$$

Opmerkingen

- 1) Voor kleine waarden van  $\alpha$  stelt de eerste reeks een benadering van de integraal voor, de tweede reeks is de correctieterm. We hebben hier een soort Euler-McLaurin-ontwikkeling, nl. een som van functiewaarden van de functie  $\frac{\cos \lambda t}{I_0(t)}$  in de punten  $t = \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{2}\alpha, \frac{5}{2}\alpha, \text{enz.}$
- 2) Neem  $\alpha$  zo, dat  $\cos \lambda\alpha(\nu + \frac{1}{2}) \neq 0$  is, want anders is de integraal = correctieterm.
- 3) Kiest men  $\alpha$  klein, dan bestaat de correctieterm slechts uit enkele termen, vanwege de snelle convergentie.

Tenslotte vinden we dus

$$\eta(z) = -\frac{1}{2\pi^2 a^2} \left[ \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(\nu + \frac{1}{2}) \frac{\alpha z}{a}}{I_0(\alpha(\nu + \frac{1}{2}))} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\frac{zk_n}{a})}{J_1(k_n)[1 + e^{2k_n\pi/\alpha}]} \right].$$

We merken op dat de eerste reeks convergeert voor elke reële  $z$ , de tweede voor  $|z| < \frac{2\pi a}{\alpha}$ . Door  $\alpha$  dus klein genoeg te kiezen kunnen we het convergentiegebied voor reële  $z$  net zo groot maken als we zelf willen.

Nemen we  $\alpha = \frac{a}{|z|} \pi$ , dan verdwijnt de eerste reeks identiek en we houden over

$$\eta(z) = -\frac{1}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|z|}{a} k_n}}{J_1(k_n)},$$

wat we reeds eerder hebben gevonden.

3.1.3. Numerieke voorbeelden

Het "lastige" punt in onze beschouwingen was het punt  $z = 0$ . We hebben nu gevonden

$$-2\pi^2 a^2 \eta(0) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{I_0(t)} = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{I_0(\nu\alpha + \frac{\alpha}{2})} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(k_n)[1 + e^{2\pi k_n/\alpha}]}.$$

$\alpha = 1$ . Bij de numerieke berekening van  $-2\pi^2 a^2 \eta(0)$  in 7 decimalen voor deze waarde van  $\alpha$  blijkt dat we van de eerste reeks 18 termen en van de tweede reeks 1 term nodig hebben. Er volgt

$$2.0832296 + 0.0000033 = 2.0832329 .$$

$\alpha = 3$ . In dit geval hebben we van de eerste reeks 6 termen en van de tweede reeks 3 termen nodig. Het resultaat wordt

$$-2\pi^2 a^2 \eta(0) = 2.0053020 + 0.0779307 = 2.0832327 .$$

Dit klopt uitstekend, want neem de gemiddelde waarde en vergelijk met

$\int_0^{\infty} \frac{dt}{I_0(t)}$ . De waarde van deze integraal is 2.083232... . Tenslotte:

$$\eta(0) = -\frac{0.10554}{a^2} .$$

#### Opmerkingen

1) Een nogal eens voorkomende **geschikte** waarde voor  $\alpha$  is  $\alpha = 2$ . Voor  $0 \leq z \leq a$  is dan

$$\begin{aligned} -a^2 \eta(z) &= 0.08003 \cos\left(\frac{z}{a}\right) + 0.02076 \cos\left(\frac{3z}{a}\right) + 0.00372 \cos\left(\frac{5z}{a}\right) + \\ &+ 0.00060 \cos\left(\frac{7z}{a}\right) + 0.00009 \cos\left(\frac{9z}{a}\right) + 0.000014 \cos\left(\frac{11z}{a}\right) + \\ &+ 0.00032 \cosh\left(\frac{2.4z}{a}\right) \text{ in 4 decimalen nauwkeurig.} \end{aligned}$$

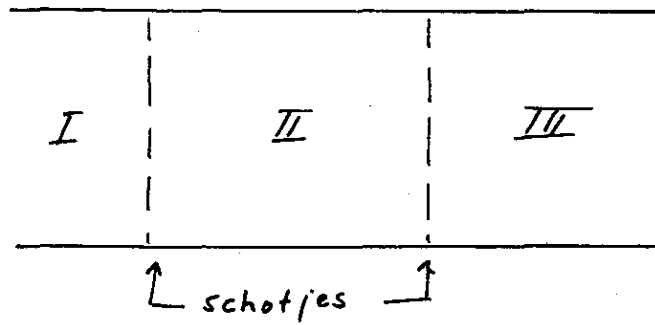
Voor  $z \geq a$  kunnen we gebruikmaken van

$$a^2 \eta(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{J_1(k_n)} \quad (\text{zie pag. 41}),$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} -a^2 \eta(z) &= 0.30657 \exp(-2.40z/a) - 0.46774 \exp(-5.52z/a) + \\ &+ 0.58636 \exp(-8.65z/a) - 0.68466 \exp(-11.79z/a) . \end{aligned}$$

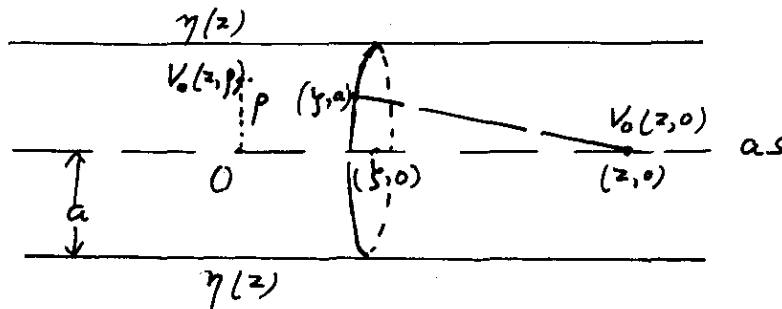
2) Door Zernike is hetzelfde probleem onderzocht. Hij verdeelde daartoe de cylinder in 3 delen, gescheiden door "schotjes". Bij de schotjes werden de resultaten van de stukken I, II en III, III aangepast. Hetzelfde resultaat als boven werd verkregen als de afstand der schotjes  $\frac{2\pi a}{\alpha}$  is.



### 3.2. Potentiaal en elektrisch veld

We berekenen de potentiaal van de geïnduceerde lading.

3.2.1. We beginnen met de as van de cylinder.



Het blijkt dat men, door met de potentiaal  $V_0(z, 0)$  op de as te beginnen, de potentiaal elders kan bepalen ("méthode d'ascence"). Men vindt

$$\begin{aligned}
 V_0(z, 0) &= 2\pi a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\zeta) d\zeta}{\sqrt{a^2 + (z - \zeta)^2}} = 2\pi a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(z+u)}{\sqrt{a^2 + u^2}} du = \\
 &= 2\pi a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} \left( -\frac{1}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(z+u)\lambda}}{I_0(\lambda a)} d\lambda \right) = \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda z \frac{d\lambda}{I_0(\lambda a)} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda u}{\sqrt{u^2 + a^2}} du ,
 \end{aligned}$$

waaruit

$$V_0(z, 0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} \cos \lambda z d\lambda ,$$



daar

$$K_0(\lambda a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda u}{\sqrt{u^2 + a^2}} du \quad (\text{zie Watson, pag. 172}).$$

### 3.2.2. De potentiaal binnen de cylinder

Om de potentiaal van de geïnduceerde lading buiten de as te berekenen, maken we gebruik van het feit dat het veld rotatie-symmetrisch is.

De potentiaal buiten de as kunnen we dan uit de potentiaal op de as vinden uit

$$V_0(z, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_0(z + i\rho \cos \psi, 0) d\psi \quad (\text{méthode d'ascente}).$$

Dit resultaat **vereist** de analytische voortzetting van  $V_0(z, 0)$  in het complexe  $z$ -vlak.

De functie  $V_0(z, \rho)$  is een oplossing van de potentiaalvergelijking en voor  $\rho = 0$  is hij  $= V_0(z, 0)$ .

Nu is

$$V_0(z + i\rho \cos \psi, 0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda(z + i\rho \cos \psi) \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} d\lambda,$$

dus

$$\begin{aligned} V_0(z, \rho) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} \cos \lambda(z + i\rho \cos \psi) d\psi \right) d\lambda = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} I_0(\lambda \rho) \cos \lambda z d\lambda. \end{aligned}$$

Dit is de potentiaal, veroorzaakt door de cylinderwand. Om de totale potentiaal te krijgen moet die van de bron nog worden toegevoegd. Het eindresultaat wordt derhalve

$$V(z, \rho) = V_0(z, \rho) + \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}},$$

wat geschreven kan worden als

$$V(z, \rho) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} - \frac{2}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{K_0(t)}{I_0(t)} I_0\left(\frac{\rho}{a} t\right) \cos\left(\frac{z}{a} t\right) dt.$$

### 3.2.3. De veldsterkte binnen de cylinder

De veldsterkte wordt gevonden door differentiëren, dus

$$E_z = \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} - \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\infty t \frac{K_0(t)}{I_0(t)} I_0\left(\frac{\rho}{a} t\right) \sin\left(\frac{z}{a} t\right) dt$$

en

$$E_\rho = \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} + \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\infty t \frac{K_0(t)}{I_0(t)} I_1\left(\frac{\rho}{a} t\right) \cos\left(\frac{z}{a} t\right) dt .$$

### 3.2.4. Een andere methode

De in 3.2.2 en 3.2.3 gevonden oplossingen zijn achteraf beschouwd niet verwonderlijk, immers  $I_0(\lambda \rho) \cos \lambda z$  is een oplossing van de potentiaalvergelijking, die binnen de cylinder overal regulier is voor elke reële  $\lambda$  (deze kan gevonden worden door separatie).

Vermenigvuldiging met een gewichtsfactor  $f(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}$  en integreren over  $\lambda$  van 0 naar  $\infty$  verandert hieraan niets.

Verder vertoont  $V(z, \rho)$  de vereiste singulariteit in de oorsprong (zie de laatste formule 3.2.2). Alleen  $V(z, a) = 0$  moet nog worden geverifieerd.

Nu is

$$K_0(\lambda a) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda u}{(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} du$$

en (Fourier-omkering)

$$\frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(t) \cos\left(\frac{z}{a} t\right) dt \quad (\text{Watson pag. 388}),$$

dus

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{2}{\pi a} \int_0^\infty K_0(t) \cos\left(\frac{z}{a} t\right) dt = 0 = V(z, a) .$$

Er is dus blijkbaar een andere weg om ons probleem op te lossen, zonder van geïnduceerde ladingen gebruik te maken,

Probeer een beleggingsfunctie  $f(\lambda)$  te vinden, zodanig dat de potentiaal van de geïnduceerde lading wordt voorgesteld door

$$V_0(z, \rho) = \int_W f(\lambda) \cos \lambda z I_0(\lambda \rho) d\lambda$$

met  $V_0(z, \rho)$ : even in  $z$ , oplossing van de potentiaalvergelijking, omwenteling-symmetrisch in cylindercoördinaten.

Voor een eenheidsbron in de vrije ruimte geldt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\lambda \rho) \cos(\lambda z) d\lambda .$$

Kies als integratieweg  $W$  de reële as  $0 \leq x$ . Verder eisen we  $V_0(z, \rho) + \frac{1}{r} = 0$  als  $\rho = a$ , dus

$$\int_0^{\infty} f(\lambda) \cos(\lambda z) I_0(\lambda \rho) d\lambda + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\lambda \rho) \cos(\lambda z) d\lambda = 0$$

of

$$\int_0^{\infty} [f(\lambda) I_0(\lambda \rho) + \frac{2}{\pi} K_0(\lambda \rho)]_{\rho=a} \cos(\lambda z) d\lambda = 0 .$$

Daar dit resultaat voor alle  $z$  waar moet zijn, moet

$$f(\lambda) I_0(\lambda a) + \frac{2}{\pi} K_0(\lambda a) = 0$$

zijn, waarmee  $f(\lambda)$  en dus ons vroegere resultaat is verkregen.

Het gehele veld wordt nu gegeven door

$$V(z, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda z \frac{I_0(\lambda a) K_0(\lambda \rho) - K_0(\lambda a) I_0(\lambda \rho)}{I_0(\lambda a)} d\lambda .$$

Uit deze formule volgt dan  $\eta(z)$ ; immers

$$\eta(z) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \quad \text{en} \quad I_0(\lambda a) K_0'(\lambda a) - I_0'(\lambda a) K_0(\lambda a) = -\frac{1}{\lambda a} ,$$

(Watson, pag. 80).

3.2.5. Numerieke resultaten

We bekijken eerst het secundaire veld op de as van de cylinder. Dit is

$$V_0(z,0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} \cos \lambda z \, d\lambda .$$

De integrand heeft een logarithmische singulariteit, die door partiële integratie weg te werken is. Het resultaat wordt

$$V_0(z,0) = -\frac{2}{\pi z} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{z}{a} t}{t I_0^2(t)} \, dt$$

Om deze integraal te berekenen passen we de residuenmethode toe op

$\int_W \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{t I_0^2(t)} \, dt$ .  $W$  is een weg in het bovenhalfvlak, die als volgt is samengesteld: De lijn  $(-R, -\epsilon)$ ; de halve cirkel met straal  $\epsilon$  om  $0$ ; de lijn  $(\epsilon, R)$ ; de halve cirkel om  $0$  met straal  $R$ . Dit levert ons, daar de integrand een enkelvoudige pool heeft in  $0$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{z}{a} t}{t I_0^2(t)} \, dt = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty \operatorname{res}_{t=ik_n} \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{t I_0^2(t)} .$$

Om het residu van  $\varphi(t) = \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{t I_0^2(t)}$  in  $t = ik_n$  te bepalen, stellen we  $t = x + ik_n$ .

Er volgt dan

$$\varphi(x + ik_n) = \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n} e^{i \frac{x}{a} z}}{(x + ik_n) I_0^2(x + ik_n)} .$$

Van deze functie zoeken we de reeksontwikkeling naar  $x$  en speciaal de coëfficiënt van  $x^{-1}$ .

Stellen we  $f(x) = e^{i \frac{x}{a} z}$  en  $g(x) = I_0(x + ik_n)$ , dan heeft  $g(x)$  een enkelvoudige pool in  $x = 0$ , terwijl  $f(0) \neq 0$  is. Nu is

$$\frac{e^{i \frac{x}{a} z}}{(x + ik_n) I_0^2(x + ik_n)} = \frac{1}{x + ik_n} \frac{f(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{ik_n \left(1 + \frac{x}{ik_n}\right)} \frac{f(0) + xf'(0) + \dots}{x^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{g''(0)}{g'(0)} x + \dots\right]^2 (g'(0))^2} =$$

$$= \frac{1}{ik_n} \frac{f(0)}{(g'(0))^2} [1 + x \frac{f'(0)}{f(0)} + \dots] [1 - \frac{g''(0)}{g'(0)} x + \dots] [1 - \frac{x}{ik_n} + \dots] .$$

De coëfficiënt van  $x^{-1}$  is derhalve

$$A = \frac{1}{ik_n} \frac{f(0)}{(g'(0))^2} \left\{ \frac{f'(0)}{f(0)} - \frac{g''(0)}{g'(0)} - \frac{1}{ik_n} \right\} .$$

Uit het voorgaande blijkt:

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = i \frac{z}{a}; \quad g'(0) = I_0'(ik_n) = I_1(ik_n) = iJ_1(k_n);$$

$$g''(0) = I_1'(ik_n) = - \frac{J_1(k_n)}{k_n} .$$

Dit laatste volgt uit  $tI_1'(t) = -I_1(t) + tI_0(t)$ .

Samenvattend blijkt nu

$$A = - \frac{z}{ak_n} \frac{1}{J_1^2(k_n)}$$

en dus

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{z}{a} t}{t I_0^2(t)} dt = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{ak_n} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{J_1^2(k_n)} .$$

Voor  $z > 0$  vinden we nu

$$V_0(z, 0) = - \frac{1}{z} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{k_n J_1^2(k_n)} .$$

Om de totale potentiaal te vinden moeten we de potentiaal van de eenheidslading toevoegen. Dit is precies  $\frac{1}{z}$ , dus

$$V(z, 0) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{k_n J_1^2(k_n)} .$$

Met behulp van de methode d'ascente volgt hieruit

$$V(z, \rho) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{k_n J_1^2(k_n)} e^{-\frac{|z|}{a} k_n} .$$

Deze reeks convergeert overal binnen de cylinder, behalve in de oorsprong.

Voor grote  $|z|$  is  $V$  gemakkelijk numeriek te bepalen. Voor kleine  $|z|$  is de reeks echter onbruikbaar. We moeten dan analoge beschouwingen houden als hiervoor (zie 3.1.2 en 3.1.3), geldig op de as. Men vindt dan

$$V_0(z,0) = -\frac{2}{\pi z} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\alpha z}{a} (v + \frac{1}{2})}{(v + \frac{1}{2}) I_0^2(\alpha(v + \frac{1}{2}))} +$$

$$+ \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + e^{-2\pi k_n/\alpha}] \cosh\left(\frac{k_n z}{a}\right) - (2\pi a/\alpha z) \sinh\left(\frac{k_n z}{a}\right)}{k_n J_1^2(k_n) \cosh^2(\pi k_n/\alpha)} \quad (1)$$

De eerste reeks is convergent voor alle  $z$ , de tweede voor  $|z| \leq 2\pi a/\alpha$ . Voor  $\alpha = 2\pi a/z$  verdwijnt de eerste reeks, de tweede wordt

$$\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{k_n J_1^2(k_n)},$$

wat gelijk is aan  $V(z,\rho)$  voor  $\rho = 0$ .

### 3.2.6. Enkele toepassingen

#### 3.2.6.1. $\alpha = 2$

In dit geval is (zie hierboven):

$$-a V_0(z,0) = \frac{a}{z} [0.79432 \sin\left(\frac{z}{a}\right) + 0.01782 \sin\left(3 \frac{z}{a}\right) +$$

$$+ 0.00034 \sin\left(5 \frac{z}{a}\right) + \dots] - 0.00323 \cosh\left(2.4 \frac{z}{a}\right),$$

convergent voor  $|\frac{z}{a}| < \pi$  en numeriek bruikbaar voor  $|z| \leq |a|$ .

#### 3.2.6.2. $z$ klein; $\rho \neq 0$

Dit geval is veel moeilijker. We passen de machtreeksmethode toe:

$$V_0(z,0) = -\frac{2}{\pi z} \int_0^{\infty} \frac{\sin(tz/a)}{t I_0^2(t)} dt = -\frac{2}{a} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v)!} \lambda_{2v} \left(\frac{z}{a}\right)^{2v}$$

met

$$\lambda_{2v} = \frac{1}{(2v+1)\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^{2v}}{I_0^2(t)} dt.$$

Zo is

$$\lambda_0 = 0.4353450; \lambda_2 = 0.2059112; \lambda_4 = 0.6588568.$$

Zie voor verdere waarden van  $\lambda_{2v}$ : Smythe: J. of Appl. Phys. 31 (1960), 553-556; Ling-Lin: Math. of Comp. 26 (1972), 529-537.

waar een tabel voorkomt van

$$\frac{1}{(n!)^2} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{I_0^2(t)} dt \quad (n = 0(1)41).$$

Voor punten buiten de as geldt

$$V_0(z, \rho) = -\frac{2}{a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \lambda_{2\nu}}{(2\nu)!} F_\nu\left(\frac{z}{a}, \frac{\rho}{a}\right)$$

met

$$F_\nu(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u + iv \cos \phi)^{2\nu} d\phi = (u^2 + v^2)^\nu P_{2\nu}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right),$$

waarbij  $P_{2\nu}$  het Legendre-polynoom voorstelt. De ontwikkeling geldt voor  $\rho^2 + z^2 < 4a^2$ . In het bijzonder is

$$F_0(u, v) = 1; \quad F_1(u, v) = u^2 - \frac{1}{2}v^2; \quad F_2(u, v) = u^4 - 3u^2v^2 + \frac{3}{8}v^4.$$

We bepalen tenslotte de veldsterkte:

$$E_z = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} e^{-\frac{z}{a} k_n}$$

$$E_\rho = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} e^{-\frac{z}{a} k_n},$$

zoals blijkt door differentiatie van  $V(z, \rho)$  (pag. 50).

Door gebruik te maken van de uitdrukking voor  $F_\nu(u, v)$  volgt dat

$$E_z = \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \cdot \frac{2z}{a^3} \left[ \lambda_2 + \frac{\lambda_4}{a^2} \left( \frac{\rho^2}{4} - \frac{z^2}{6} \right) + \dots \right]$$

en

$$E_\rho = \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} + \frac{\rho}{a^3} \left[ \lambda_2 + \frac{\lambda_4}{a^2} \left( \frac{\rho^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) + \dots \right].$$

Literatuur:

C.J. Bouwkamp en N.G. de Bruijn, The electrostatic field of a point charge inside a cylinder, in connection with wave-guide theory (J. of Appl. Ph. 18, 1947, 6, pag. 562-577); correcties *ibid.* jan. 1948.

### 3.3. Methode van discrete normaaloplossingen

We separeren  $\Delta V = 0$ , geschreven in cylindercoördinaten, waardoor voor  $z \geq 0$  een systeem van oplossingen ontstaat van de vorm

$$J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) \exp\left(-\frac{z}{a} k_n\right) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

waarbij  $k_n$  het  $n$ -de positieve nulpunt van  $J_0(x)$  is. Deze oplossingen voldoen aan de gegeven randvoorwaarden op de wand en in  $z = \infty$ . Ze vormen een compleet systeem, dus iedere rotatiesymmetrische oplossing kan worden geschreven als

$$V(z, \rho) = \sum_1^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) e^{-\frac{z}{a} k_n}. \quad (1)$$

Het ligt voor de hand, dat we de oplossing, die door de Greense functie wordt voorgesteld, kunnen ontwikkelen. We bepalen daartoe de coëfficiënten van deze ontwikkeling uit het gedrag van de singulariteit in de oorsprong. Zoals bekend voldoet de Greense functie  $V$  aan de vergelijking

$$\Delta V = -4\pi \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (2)$$

Hierbij is  $\delta(x)$  de  $\delta$ -functie van  $x$ , gedefinieerd zoals gebruikelijk.

Integratie van (2) over het volume links en rechts van  $z = 0$  levert:

$$\iiint \Delta V \, dx \, dy \, dz = \iint \frac{\partial V}{\partial n} \, df = -4\pi$$

of

$$\iint_{z=0} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=+0} - \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=-0} \right] dx \, dy = -4\pi.$$

Dit kan worden geïnterpreteerd als

$$\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=+0} = -2\pi \delta(x)\delta(y) = -2 \frac{\delta(\rho)}{\rho}$$

als we naar poolcoördinaten overgaan.

Opmerking. Deze laatste overgang is als volgt in te zien:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y) \, dx \, dy = 1,$$

terwijl ook

$$\int_0^{\infty} \delta(\rho) 2\pi \rho \, d\rho = 1.$$



Hieruit concluderen we:

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta(\rho)}{\rho} .$$

We differentiëren  $V(z, \rho)$  naar  $z$ , er volgt

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - \sum_1^{\infty} a_n \frac{k_n}{a} J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) e^{-\frac{z}{a} k_n} .$$

Voor  $z \rightarrow 0$  is dan

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=+0} = - \frac{2\delta(\rho)}{\rho} = - \sum_1^{\infty} a_n \frac{k_n}{a} J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) .$$

Gebruikmakend van het feit dat

$$\frac{1}{\pi} \frac{\delta(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \quad (0 \leq \rho \leq a) \quad (3)$$

volgt tenslotte

$$V(z, \rho) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{a} k_n} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{k_n J_1^2(k_n)} ,$$

in overeenstemming met (3.2.5 blz. 50).

Vergelijking (3) zullen we nog even nader bezien.

We ontwikkelen in een reeks naar  $J_0(k_m \rho)$ ,  $0 \leq \rho < 1$ . (Fourier-Bessel ontwikkeling). Dan is

$$\delta(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(k_m \rho) \rho$$

en

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\infty} \delta(\rho) J_0(k_n \rho) d\rho = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^1 \rho J_0(k_m \rho) J_0(k_n \rho) d\rho = \frac{1}{2} c_n J_1^2(k_n) ,$$

immers

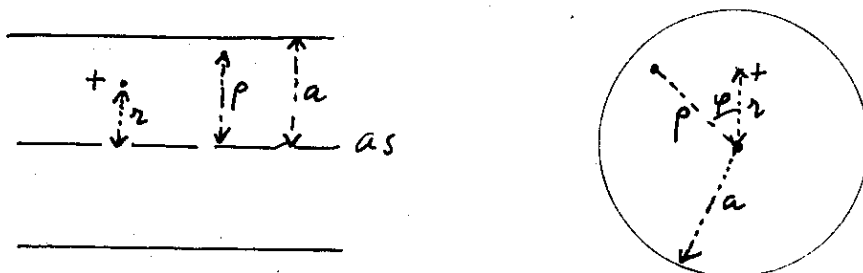
$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho J_0(k_n \rho) J_0(k_m \rho) d\rho &= 0 && \text{als } n \neq m , \\ &= \frac{1}{2} J_1^2(k_n) && \text{als } n = m . \end{aligned}$$

Er volgt nu direct

$$c_m = \frac{1}{J_1^2(k_m)} .$$

Met de gelijkheid  $\delta(\rho) = \frac{1}{a} \delta\left(\frac{\rho}{a}\right)$  volgt (3).

3.4. De eenheidslading op een willekeurige plaats binnen de cylinder



Het probleem is nu niet meer rotatiesymmetrisch en dus  $\varphi$ -afhankelijk.

We plaatsen de positieve eenheidslading op een afstand  $r$  van de  $\varphi = 0$ .

Zij

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m > 0 \end{cases} \quad (\text{Neumann-symbool})$$

en  $k_{n,m}$  het  $n$ -de positieve nulpunt van  $J_m(x)$ .

De ladingsdichtheid  $\eta$  geïnduceerd op de wand kan door analoge beschouwingen als hiervoor worden gevonden. Er blijkt

$$\begin{aligned} \eta(z, \varphi) &= - \frac{1}{2\pi^2 a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} \frac{I_m\left(\frac{r}{a} t\right)}{I_m(t)} \cos \frac{z}{a} t dt = \\ &= (\text{residuenmeth.}) = - \frac{1}{2\pi a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{r}{a} k_{n,m}\right)}{J_{m+1}(k_{n,m})} e^{-\frac{|z|}{a} k_{n,m}} . \end{aligned}$$

De potentiaal van de geïnduceerde lading wordt nu

$$V_0(z, \rho, \varphi) = - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} \frac{K_m(\lambda a)}{I_m(\lambda a)} I_m(\lambda r) I_m(\rho \lambda) \cos \lambda z \, d\lambda .$$

Daar

$$V(z, \rho, \varphi) = V_0(z, \rho, \varphi) + \frac{1}{(z^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos \varphi + r^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

volgt er

$$V(z, \rho, \varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} \frac{I_m(\lambda a) K_m(\lambda \rho) - I_m(\lambda \rho) K_m(\lambda a)}{I_m(\lambda a)} I_m(\lambda r) \cos \lambda z \, d\lambda$$

( $\rho > r$ )

(Is  $\rho < r$ , dan moeten we  $\rho$  en  $r$  verwisselen.)

Als we weer met de residuenontwikkeling werken, volgt er tenslotte

$$V(z, \rho, \varphi) = \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{\rho}{a} k_{n,m}\right) J_m\left(\frac{r}{a} k_{n,m}\right)}{k_{n,m} J_{m+1}^2(k_{n,m})} \exp\left(-\frac{|z|}{a} k_{n,m}\right) ,$$

de ontwikkeling van de Green'se functie naar het complete systeem in discrete eigenfuncties.

Opmerking. Wil men het veld van een dipool bekijken, dan gaat het op analoge wijze.

Zij het moment van de dipool +1. Differentieer nu naar  $-z$ , dan vindt men de potentiaal binnen de cylinder. (De dipool is in de positieve  $z$ -richting geplaatst.)

4. Akoustische golfproblemen bij cilindrs

Golfproblemen zijn analoog aan potentiaalproblemen. Om dit soort problemen tot oplossing te brengen is misschien de methode van de discrete normaaloplossingen de eenvoudigste.

**Bij frequentie nul gaat het eerste randwaardeprobleem in het vroeger behandelde electrostatische probleem over.**

Zij de frequentie  $\omega$  en de tijdsfactor  $e^{-i\omega t}$ .

4.1. Een akoustische puntbron

De scalaire potentiaal voldoet aan  $\Delta U + k^2 U = 0$  met  $k = \frac{\omega}{c}$ , de zg. golfvergelijking ( $c$  is de voortplantingssnelheid van het geluid). In de vrij ruimte is de potentiaal  $\frac{e^{ikr}}{r}$ .

In het algemeen komen er twee randwaardeproblemen voor, t.w.  $U = 0$  of  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$  op de cylinderwand.

4.1.1.  $U = 0$  (probleem van Green)

In dit geval is de druk op de wand gelijk aan nul (zachte wand). In het oneindige is, behalve  $U = 0$ , een uitstralingsvoorwaarde nodig.

We bekijken een golf in de positieve  $z$ -richting, deze kan worden voorgesteld door  $e^{i(kz-\omega t)}$ . Is  $k$  complex, dan is er demping in de  $z$ -richting als  $\text{Im } k > 0$ . Om de golfvergelijking op te lossen passen we separatie toe. De bron plaatsen we op de as van de cylinder en er volgt als elementaire oplossing

$$J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) \exp\left[-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}\right].$$

Als  $0 < k_n < ka$  spreken we af

$$\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2} \equiv -i \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}.$$

De reden hiervan is, dat dit past bij de tijdsfactor  $\exp(-i\omega t)$ . Hij is dan **gedempt in de voortplantingsrichting**. De lopende golf kan nu worden voorgesteld door

$$e^{-i\omega t} \exp\left(-\frac{z}{a} \cdot -i \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}\right) = e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}\right)};$$

deze golf gaat in de positieve  $z$ -richting.

Om het randwaardeprobleem op te lossen stellen we

$$U(z, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) \exp\left[-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}\right], \tag{1}$$

maar sluiten het geval  $k_n = ka$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) uit, omdat er dan geen golf meer is. Daardoor vervallen dus een reeks van  $k$ -waarden. De situatie wordt als volgt:

$0 < ka < k_1$  : damping;

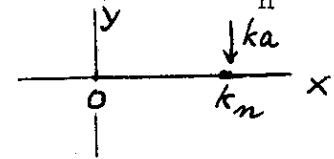
$ka = k_1$  : resonantie;

$k_1 < ka < k_2$  : één lopende golf, de rest is gedempt;

etc.

Om deze moeilijkheid te omzeilen nemen we vaak  $k$  complex en laten  $ka$  tot  $k_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) naderen van de bovenkant van de reële as.

We laten op (1) de deltatechniek los en er komt



$$U_1(z, \rho) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} \quad (2)$$

met randvoorwaarde  $U = 0$ .

Opmerkingen

- a) De index 1 bij  $U_1(z, \rho)$  duidt aan: het eerste Green'se probleem.
- b) Voor  $k \rightarrow 0$  gaat (2) over in  $V(z, \rho)$  van 3.2.5 blz. 50.

4.1.2.  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$  (probleem van Neumann)

We hebben hier een akoestische straler in de oorsprong en een harde wand. De snelheidspotentiaal zij  $U_2 \exp(-i\omega t)$ , waarbij  $U_2$  een oplossing van de golfvergelijking is.

De snelheid van de luchtdeeltjes is  $\vec{v} = -\text{grad } U_2$ , terwijl de geluidsdruk  $p$  gegeven wordt door  $p = -i\omega\gamma U_2$  ( $\gamma$  is de dichtheid van de lucht). We eisen nu

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{\rho=a} = 0 \quad (a \text{ is de straal van de cylinder}).$$

Definieer  $\kappa_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) de positieve nulpunten van  $J_1(x)$ , terwijl  $\kappa_0 = 0$  is. Stel verder

$$U_2(z, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n J_0\left(\frac{\rho}{a} \kappa_n\right) \exp\left[-\frac{|z|}{a} \sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}\right]$$

en maak dezelfde afspraak over de wortel als hiervoor (4.1.1) om resonantie uit te sluiten, dan volgt met de techniek van  $\delta$ -functies:

$$U_2(z, \rho) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} \kappa_n\right)}{J_0^2(\kappa_n)} \frac{e^{-\frac{|z|}{a} \sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}}$$

Opmerking. De eerste term is  $\frac{2i}{ka^2} e^{ikz}$ , onafhankelijk van  $\rho$ . Voor alle  $k$  is dit een oplossing van de golfvergelijking, die aan de randvoorwaarde voldoet. Voor elke positieve  $k$  hebben we hier te maken met ongedempte golven, in tegenstelling met het geval, behandeld in 4.1.1, want daar hebben we voor  $ka < k_1$  alleen gedempte golven.

( $U_1$ : high-pass filter;  $U_2$ : low-pass filter.)

#### 4.2. Energiebeschouwingen

We nemen aan, dat de puntbron de enige is in de ruimte. De erdoor uitgestraalde energie per seconde is  $\frac{1}{2}W_{\infty}$  met

$$\frac{1}{c\gamma} \int_{\text{bol}} |p|^2 df = 4\pi k \omega \gamma \equiv W_{\infty}.$$

Dit resultaat wordt als volgt verkregen: We weten dat de potentiaal  $\varphi$  van de puntbron gegeven wordt door  $\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}$ . De uitgestraalde energie wordt gegeven door  $\int_{\text{bol}} p v df$ . Nu is  $v_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sim -ik\varphi$  ( $r \rightarrow \infty$ ) en daar  $p = -i\omega\gamma\varphi = ikc\gamma\varphi$ , volgt er dat

$$\begin{aligned} \int_{\text{bol}} p v df &= \int_{\text{bol}} \frac{|p|^2}{c\gamma} df = \frac{1}{c\gamma} \int_{\text{bol}} k^2 c^2 \gamma^2 |\varphi|^2 df = \\ &= k^2 c\gamma \int_{\text{bol}} \frac{df}{r^2} = 4\pi k^2 c^2 \gamma = 4\pi k \omega \gamma. \end{aligned}$$

##### 4.2.1. Energiebeschouwing bij de cylinder

Ver van de oorsprong merken we van de invloed van de gedempte golf niets, de uitgestraalde energie zit dus in de ongedempte golf, d.w.z. alleen die termen van de reeks doen mee, waarvoor  $k_n$  of  $\kappa_n$  kleiner dan  $ka$  zijn.

4.2.11.  $U = 0$

In dit geval wordt voor  $z \rightarrow \infty$  :

$$U_1(z, \rho) \approx \frac{2}{a} \sum_{k_n < ka} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) e^{+i \frac{z}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}}{J_1^2(k_n) - i \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} \quad (z \rightarrow \infty)$$

terwijl

$$|p_1|^2 \approx \frac{4\omega^2 \gamma^2}{a^2} \sum_{k_n < ka} \sum_{k_m < ka} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_m\right) \cos\left[\frac{z}{a} \left\{ \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} - \sqrt{k^2 a^2 - k_m^2} \right\}\right]}{J_1^2(k_n) J_1^2(k_m) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \cdot \sqrt{k^2 a^2 - k_m^2}} \quad (z \rightarrow \infty).$$

Integreer nu bij constante  $z$  over de doorsnede van de cylinder, d.w.z.

$df = 2\pi \rho d\rho$ ; en laat daarna  $z \rightarrow \infty$ . Nu is

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_m\right) \rho d\rho = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \quad (\text{Watson pag. 480 en 482}) \\ \frac{1}{2} a^2 J_1^2(k_n) & (n = m), \end{cases}$$

dus  $\int |p|^2 df$  voor één doorsnede bij  $z \rightarrow +\infty$  is

$$\frac{4\omega^2 \gamma^2}{a^2} 2\pi \sum_{k_n < ka} \frac{\frac{1}{2} a^2}{J_1^2(k_n) (k^2 a^2 - k_n^2)} = 4\pi \omega^2 \gamma^2 \cdot \sum_{k_n < ka} \frac{1}{J_1^2(k_n) (k^2 a^2 - k_n^2)}.$$

De totale, naar beide zijden uitgestraalde energie wordt derhalve verkregen door dit resultaat te vermenigvuldigen met  $\frac{2}{cy}$ .

Noemen we  $\frac{1}{2} W_{1,a}$  de gemiddeld uitgestraalde energie bij aanwezigheid van de cylinder, dan is

$$\frac{W_{1,a}}{W_\infty} = 2 \sum_{k_n < ka} \frac{1}{J_1^2(k_n) (k^2 a^2 - k_n^2)}.$$

4.2.111: Numerieke waarden

We bepalen  $\frac{W_{1,a}}{W_\infty}$  door enkele waarden van  $k_n$  te substitueren.

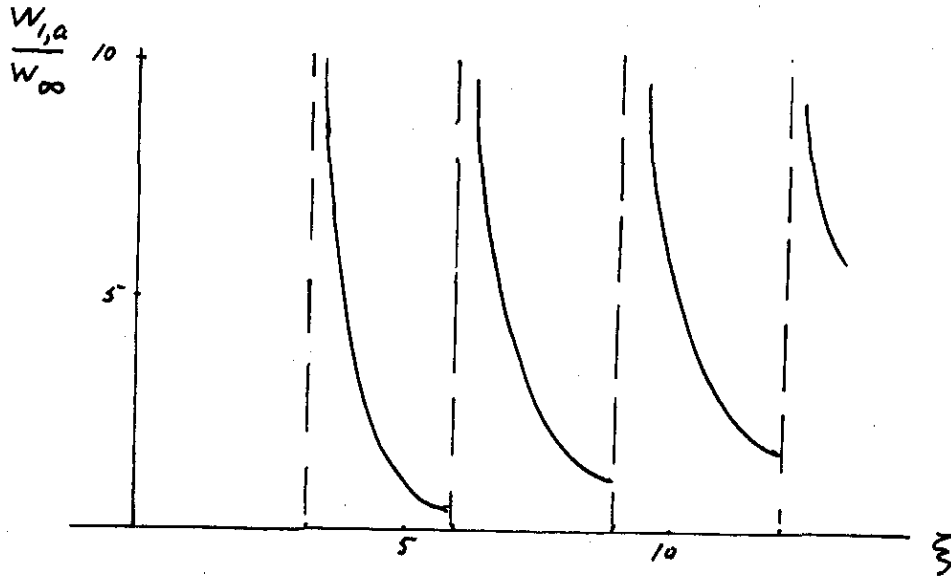
$$\begin{array}{ll} k_1 = 2.4048 & J_1(k_1) = 0.51915 \\ k_2 = 5.5201 & J_1(k_2) = -0.34026 \\ k_3 = 8.6537 & J_1(k_3) = 0.27143 \end{array}$$

$$k_4 = 11.7915 \quad J_1(k_4) = -0.23246$$

$$k_5 = 14.9309 \quad J_1(k_5) = 0.20655$$

Stel nu  $\xi = \frac{2\pi a}{\lambda}$ , dan is

$$\frac{W_{1,a}}{W_\infty} = \frac{7.421}{\xi^2 - 5.783} + \frac{17.275}{\xi^2 - 30.472} + \frac{27.146}{\xi^2 - 74.887} + \dots$$



4.2.12.  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$

Geheel analoog volgt voor de starre wand

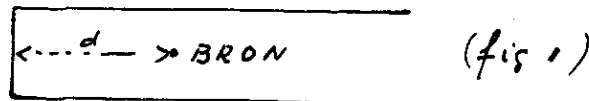
$$\frac{W_{2,a}}{W_\infty} = 2 \sum_{0 \leq n_1 \leq ka} \frac{1}{J_0^2(n_1)(k^2 a^2 - n_1^2)}$$

Bij kleine waarden van  $\xi$  treden aanzienlijke verschillen op t.o.v. het vorige geval.

4.2.13. Spiegelmethode

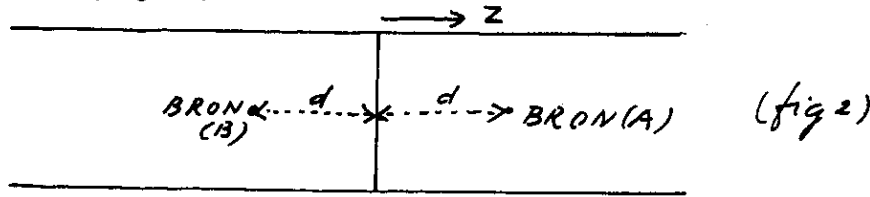
Met deze methode kunnen ingewikkelder problemen worden opgelost.

Neem een buis met starre wand welke aan één kant is afgesloten. Plaats de puntbron op de as van de cylinder op afstand  $d$  van het gesloten eind van de buis (fig. 1).





Hoe zit het nu met de energie-uitstraling? Beschouw daartoe een hulpsysteem van twee gelijkfasige puntbronnen op afstand  $2d$  van elkaar in de oneindig lange cylinder (fig. 2).



Op het tussenschot is nu  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ .

Opmerking. Zijn beide bronnen in antifase, dan is  $U = 0$  op het tussenschot.

De bron in A geeft aanleiding tot een potentiaal  $\frac{e^{ikr}}{r}$ , die in B is ook  $\frac{e^{ikr}}{r}$ . Het totale veld is nu

$$U_3(z, \rho) = U_2(z-d, \rho) + U_2(z+d, \rho).$$

In verband met het in 4.2.1 gevondene is

$$U_3(z, \rho) \approx \frac{2}{a} \sum_{0 \leq \kappa_n < ka} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} \kappa_n\right)}{J_0^2(\kappa_n)} \frac{e^{i\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} \left(\frac{z+d}{a}\right)} + e^{i\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} \left(\frac{z-d}{a}\right)}}{-i\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2}} \quad (z \rightarrow \infty).$$

en

$$\begin{aligned} |p_3|^2 \approx & \frac{4\omega^2 \gamma^2}{a^2} \sum_{0 \leq \kappa_n < ka} \sum_{0 \leq \kappa_m < ka} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} \kappa_n\right) J_0\left(\frac{\rho}{a} \kappa_m\right)}{J_0^2(\kappa_n) J_0^2(\kappa_m)} \left[ \frac{e^{i\frac{z+d}{a}(\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} - \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_m^2})}}{\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_m^2}} + \right. \\ & + \frac{e^{i\frac{z-d}{a}(\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} - \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_m^2})}}{\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_m^2}} + \\ & \left. + \frac{e^{i\frac{z-d}{a}(\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} - \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_m^2})} - e^{i\frac{z+d}{a}(\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} - \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_m^2})}}{\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_m^2}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

De enige termen, die tot de energie bijdragen zijn die voor  $n = m$ . De vorm

tussen [ ] wordt dan 
$$\frac{4 \cos^2\left(\frac{d}{a} \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2}\right)}{k^2 a^2 - \kappa_n^2}.$$

Noemen we de uitgestraalde energie naar rechts  $W_{3,a}$ , dan

$$\frac{W_{3,a}}{W_{\infty}} = 4 \sum_{0 \leq \kappa_n < ka} \frac{\cos^2 \left( \frac{d}{a} \sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2} \right)}{J_0^2(\kappa_n) (k^2 a^2 - \kappa_n^2)} \quad (z \rightarrow \infty).$$

Voor  $d \rightarrow 0$  vindt men  $2W_{2,a}$ . Dit is ook fysisch duidelijk, want door de reactie van de wand wordt de energie, die anders naar  $z = -\infty$  wordt gestuurd naar  $z = +\infty$  gereflecteerd.

Nog anders: Voor  $d = 0$  komt er een puntbron met  $2x$  zo grote amplitudo, dus  $4x$  zo grote energie. De helft ervan gaat dan naar één kant.

Opmerking: Uit 4.2.12 volgt, zoals direct blijkt:

$$W_{3,a} < 2W_{2,a}.$$

## 5. Electromagnetische straling in golfpijpen

### 5.1. De elektrische dipool

We plaatsen de dipool zodanig op de as, dat ze in de asrichting staat. De wand van de cylinder nemen we oneindig goed geleidend. De geïnduceerde stroom is dan ook evenwijdig aan de as van de cylinder. De vectorpotentiaal heeft alleen een z-component,  $\Pi(z, \rho)$  even in z en onafhankelijk van  $\varphi$ . De componenten, die ongelijk aan nul zijn, zijn  $H_\varphi$ ,  $E_z$  en  $E_\rho$ . Tussen deze grootheden bestaan de volgende betrekkingen:

$$H_\varphi = - \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} ; \quad -ikE_z = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) ;$$

$$-ikE_\rho = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial \rho} .$$

Op de wand is  $E_z = 0$ , dus  $\Pi = 0$  op de wand. Verder heeft  $\Pi$  in de oorsprong een singulariteit, buiten de oorsprong voldoet  $\Pi$  aan de **golfvergelijking**  $\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0$ .

Zij de lengte van de dipool ds, de stroom I, dan is het **antennemoment**  $I ds$ .  $\frac{I ds}{c} \frac{e^{ikr}}{r}$  is de z-component van de vectorpotentiaal, die bij een geïsoleerde dipool met moment  $I ds$  behoort.

We eisen dat  $\Pi - \frac{I ds}{c} \frac{e^{ikr}}{r}$  overal regulier is, dus ook voor  $r = 0$  ( $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ ).

Het is duidelijk dat  $\Pi$ , afgezien van een evenredigheidsfactor, gelijk is aan  $U_1$  (zie 4.1.1), dus

$$\Pi_e(z, \rho) = \frac{2}{a} \frac{I ds}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} \quad (z > 0) .$$

De componenten van het electromagnetische veld zijn nu

$$H_\varphi = \frac{2}{a} \frac{I ds}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{a} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} ;$$

$$E_z = \frac{i}{k} \frac{2}{a} \frac{I ds}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2}{a^2} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} ;$$

$$E_{\rho} = \frac{i}{k} \frac{2}{a} \frac{I ds}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{a^2} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 a^2 - k^2}}$$

Men spreekt hier van een transversaal magnetisch (TM) veld. H staat hier loodrecht op de z-richting ( $H_z = 0$ ).

Men spreekt ook wel van E-golf: E heeft nl. een component in de z-richting.

### 5.1.1. De stralingsenergie

De per seconde uitgestraalde energie door een doorsnede in de positieve z-richting is gegeven door

$$\frac{c}{8\pi} \int_{\text{doorsnede}} \text{Re}(E_{\rho} H_{\varphi}^*) df$$

Voor  $z \rightarrow \infty$  geldt:

$$H_{\varphi} \approx \frac{2}{a} \frac{I ds}{c} \sum_{k_n < ka} \frac{k_n}{a} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 a^2 - k^2}}}{-i \sqrt{k_n^2 a^2 - k^2}};$$

$$E_{\rho} \approx \frac{2}{a} \frac{I ds}{c} \frac{i}{k} \sum_{k_m < ka} \frac{k_m}{a^2} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} k_m\right)}{J_1^2(k_m)} e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k_m^2 a^2 - k^2}},$$

dus

$$\text{Re}(E_{\rho} H_{\varphi}^*) \approx \left(\frac{2}{a} \frac{I ds}{c}\right)^2 \sum \sum \frac{k_n k_m}{a^3 k} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) J_1\left(\frac{\rho}{a} k_m\right)}{J_1^2(k_n) J_1^2(k_m)} \frac{\cos \frac{z}{a} \left\{ \sqrt{k_n^2 a^2 - k^2} - \sqrt{k_m^2 a^2 - k^2} \right\}}{\sqrt{k_n^2 a^2 - k^2}}$$

Daar alleen de termen met  $n = m$  een bijdrage leveren bij integratie, immers

$$\int_0^a J_1\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) J_1\left(\frac{\rho}{a} k_m\right) \rho d\rho = \begin{cases} 0 & n \neq m \quad (\text{Watson, pag. 480 en 482}) \\ \frac{1}{2} a^2 J_1^2(k_n) & n = m, \end{cases}$$

vinden we voor de naar beide kanten uitgestraalde energie:

$$W_{4,a} = 2 \frac{c}{8\pi} \left(\frac{2}{a} \frac{I ds}{c}\right)^2 2\pi \sum_{k_n < ka} \frac{k_n^2}{a^3 k} \frac{\frac{1}{2} a^2 J_1^2(k_n)}{J_1^4(k_n)} \frac{1}{\sqrt{k_n^2 a^2 - k^2}} =$$

$$= \frac{(Ids)^2}{a^3 kc} \sum_{k_n < ka} \frac{k_n^2}{J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} .$$

De per seconde uitgestraalde energie  $W_0$  van een dipool in de vrije ruimte is

$$W_0 = \frac{4}{3} \frac{I^2}{c} \left( \frac{kds}{2} \right)^2 = \frac{k^2 (Ids)^2}{3c} .$$

De verhouding van de energieën  $\frac{W_{4,a}}{W_0}$  is dan

$$F_{\text{el.dipool}} = \frac{3}{(ka)^3} \sum_{0 < k_n < ka} \frac{k_n^2}{J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} .$$

Als we nu de equivalente stralingsweerstand  $R$  noemen, is de uitgestraalde energie  $W_{4,a} = \frac{1}{2} I^2 R$ . We vinden dus

$$R = \frac{2}{a^3 kc} (ds)^2 \sum_{0 < k_n < ka} \frac{k_n^2}{\sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} \frac{1}{J_1^2(k_n)} .$$

Neem  $c = \frac{1}{30}$ , dan is de stralingsweerstand gegeven in ohms.

Definiëren we nog  $v_n = \frac{k_n}{ka}$ , dan wordt

$$R = 60 \left( \frac{ds}{a} \right)^2 \sum_{0 < v_n < 1} \frac{1}{J_1^2(k_n)} \frac{v_n^2}{\sqrt{1 - v_n^2}} \Omega .$$

## 5.2. De magnetische dipool

Een magnetische dipool is equivalent met een cirkelstroompje. Ook hier is het veld afleidbaar uit een potentiaal, de magnetische vectorpotentiaal. De enige component van deze potentiaal is die in de richting van de dipool.

Zij de potentiaal  $\Pi_m$ . Er gelden de volgende formules:

$$E_\varphi = \frac{\partial \Pi_m}{\partial \rho} ; \quad -ik H_\rho = \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z \partial \rho} ; \quad -ik H_z = k^2 \Pi_m + \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} .$$

De singulariteit van  $\Pi$  is die van  $\frac{e^{ikr}}{r}$  in  $r = 0$ . We construeren dus weer een functie,  $\Pi_m - \frac{e^{ikr}}{r}$ , die regulier is in  $r = 0$  en voldoet aan de golfvergelijking.

Op de cylinder geldt  $E_\varphi(z, a) = 0$ , dus  $\frac{\partial \Pi_m}{\partial \rho} = 0$ . Er blijkt dat  $\Pi_m = U_2$  (voor  $U_2$  zie (4.1.2)). In verband hiermee volgt

$$\Pi_m = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} \kappa_n\right)}{J_0^2(\kappa_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}},$$

waaruit

$$E_\varphi = -\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{a} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} \kappa_n\right)}{J_0^2(\kappa_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}};$$

$$H_z = \frac{2i}{ka} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n^2}{a^2} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} \kappa_n\right)}{J_0^2(\kappa_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}};$$

$$H_\rho = \frac{2i}{ka} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{a^2} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} \kappa_n\right)}{J_0^2(\kappa_n)} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\kappa_n^2 - k^2 a^2}}.$$

De energie-uitstraling wordt gegeven door

$$-\frac{c}{8\pi} \int_{\text{bol}} \text{Re}(E_\varphi^* H_\rho) df = \frac{c}{a^3 k} \sum_{0 < \kappa_n < ka} \frac{\kappa_n^2}{J_0^2(\kappa_n)} \frac{1}{\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2}}.$$

Opmerking. We hebben hier te maken met TE- (transversaal-electrische) golven of H-golven.

Voor de vrij stralende magnetische dipool is  $\Pi = \frac{e ikr}{r}$ . Dan is

$$E_\varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \sim ik \sin \theta \frac{e ikr}{r} \quad (r \rightarrow \infty),$$

als we met bolcoördinaten werken.

Op grote afstand is verder  $|E_\varphi| \sim |H_\theta|$ ;

$$H_\theta \sim -ik \sin \theta \frac{e ikr}{r}.$$

De in de ruimte uitgestraalde energie  $W_0$  is nu

$$W_0 = \frac{ck^2}{8\pi} \int_{\text{bol}} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} df = \frac{1}{4} ck^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{ck^2}{3}.$$

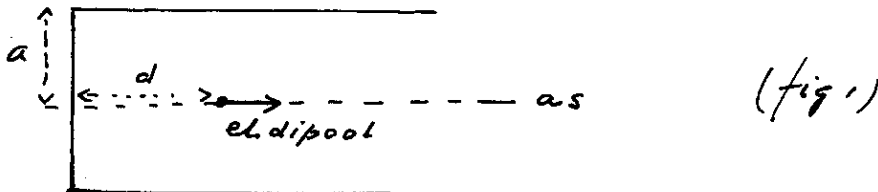
De genormeerde straling  $F_{\text{magn.dipool}}$  is derhalve

$$F_{\text{magn.dipool}} = \frac{3}{(ka)^2} \sum_{0 < k_n < ka} \frac{k_n^2}{J_0^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}$$

Opmerking. We kunnen ook hier het probleem beschouwen, waarbij de magnetische dipool niet meer in het centrum en ook niet in de richting van de as staat. We dienen dan de componenten te bekijken.

### 5.3. Enige andere problemen

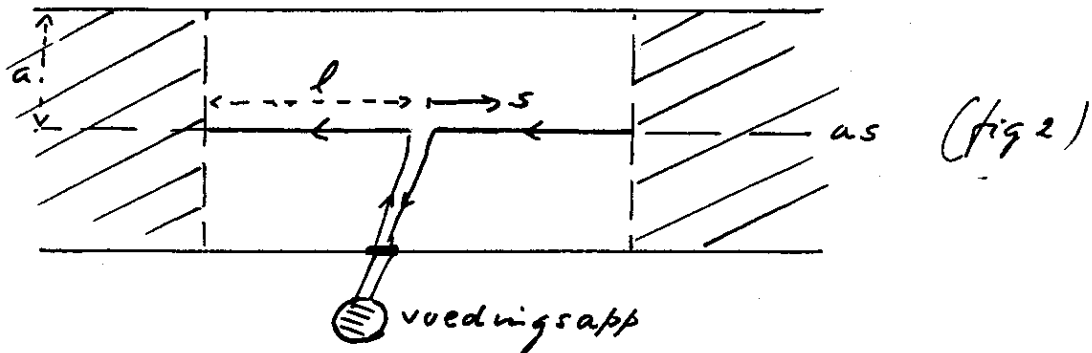
5.3.1. Plaats op de as van een cilindervormige buis een elektrische dipool (zie fig. 1).



Met behulp van de spiegelmethode (zie 4.2.13) vinden we dat

$$F'_{\text{el.dipool}} = \frac{6}{(ka)^3} \sum_{0 < k_n < ka} \frac{k_n^2 \cos^2\left(\frac{d}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}\right)}{J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}$$

5.3.2. We bekijken in een cylinder een bron van eindige afmetingen (antenne). Deze antenne is geplaatst langs de as van de cylinder (fig. 2), heeft een lengte  $2l$  en wordt in het midden op één of andere manier gevoed.



De stroom langs de antenne zij gegeven door de formule van Labus:

$$I = \sin k(l - |s|) \quad |s| \leq l .$$

Er treedt resonantie op als  $kl = \frac{\pi}{2}$ .

We denken ons de stroomverdeling als een superpositie van dipolen. De lopende golven treden op buiten de antenne, dus in het gearceerde gebied (fig. 2); tussen de gearceerde delen zijn de golven staand.

Door integratie van de oplossing voor de elektrische dipool vindt men nu voor de vectorpotentialiaal voor  $z > l$ :

$$\Pi = \frac{2}{ac} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} \int_{-l}^l I(s) e^{\frac{s}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} ds .$$

Stel  $\psi = \frac{1}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}$ , dan is

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l I(s) e^{\psi s} ds &= \int_0^l \sin(kl - ks) \{e^{\psi s} + e^{-\psi s}\} ds = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ e^{ikl} \int_0^l (e^{s(\psi - ik)} + e^{-s(\psi + ik)}) ds \right\} = \frac{2k}{\psi^2 + k^2} (\cosh l\psi - \cos kl) , \end{aligned}$$

terwijl

$$\psi^2 + k^2 = \frac{k_n^2}{a^2} .$$

Er volgt tenslotte voor  $z > l$ :

$$\Pi = \frac{4ka}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh\left[\frac{l}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}\right] - \cos kl}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} .$$

We berekenen nog de per seconde uitgestraalde energie  $W$ . Definieer

$$c_n \equiv \frac{4ka}{c} \frac{\cosh\left(\frac{l}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}\right) - \cos kl}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} ,$$

dan is

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} ;$$



$$H_{\varphi} \approx \sum_{0 < k_n < ka} \left( c_n \frac{k_n}{a} \right) J_1 \left( \frac{\rho}{a} k_n \right) e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} ;$$

$$E_{\varphi} \approx \sum_{0 < k_n < ka} c_n \frac{k_n}{ka^2} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} J_1 \left( \frac{\rho}{a} k_n \right) e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}$$

dus

$$W = 2 \frac{c}{8\pi} \sum_{0 < k_n < ka} \left( \frac{k_n c_n}{ka^2} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \frac{k_n c_n^*}{a} 2\pi \frac{1}{2} a^2 J_1^2(k_n) \right) =$$

$$= \frac{c}{4ka} \sum_{0 < k_n < ka} |c_n|^2 k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} .$$

$c_n$  weer substituerend volgt tenslotte

$$W = \frac{4ka}{c} \sum_{0 < k_n < ka} \frac{\left\{ \cos \left( \frac{\ell}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \right) - \cos kl \right\}^2}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} ,$$

Opmerking. Dit resultaat kunnen we nog controleren. Neem daartoe  $\ell \rightarrow 0$ , dan is

$$I(0) = \sin kl \approx kl ; \quad I_{\text{gem}} = \frac{1}{2} kl = \frac{1}{2} I(0) ; \quad \ell = \frac{1}{2} ds ,$$

dus

$$I ds = \frac{1}{2} I(0) 2\ell = \ell I(0) = kl^2 .$$

We krijgen dan juist formule  $W_{4,a}$  terug (5.1.1).

Als we stellen  $W = \frac{1}{2} R I^2(0)$  met  $R$  als stralingsweerstand, dan is

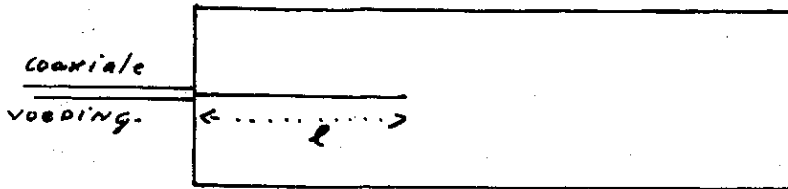
$W = \frac{1}{2} R \sin^2 kl$ . Neem  $c = \frac{1}{30}$ , dan is  $R$  in ohms uitgedrukt en

$$R = \frac{240 ka}{\sin^2 kl} \sum_{0 < k_n < ka} \frac{\left[ \cos \left( \frac{\ell}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \right) - \cos kl \right]^2}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} \text{ Ohm} .$$

Deze uitdrukking is geldig **voor een dunne draad**, terwijl  $kl < \frac{3\pi}{4}$  (in elk geval  $kl < \pi$ , want voor  $kl = \pi$  treedt anti-resonantie op en dan geldt de formule van Labus niet meer).

5.4. Enkele configuraties

5.4.1. Neem een cilindervormige buis, met een antenne, gelegen op de as, ter lengte  $\ell$ . De buis heeft een metalen bodem loodrecht op de as staande (fig. 1).



(fig. 1)

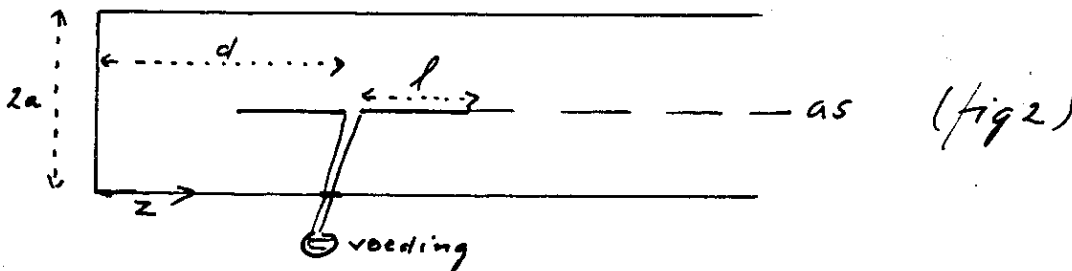
Het veld is nu gelijk aan dat uit 5.3.2; de stralingsweerstand is  $R_0 = \frac{1}{2}R$ .

Is de antenne precies een kwart golflengte, dus  $k\ell = \frac{\pi}{2}$ , dan is

$$R_0 \left(\frac{\lambda}{4}\right) = R_0 = 120 \sum_{0 < \frac{2\ell k_n}{\pi a} < 1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2\ell k_n}{\pi a}\right)^2}\right)}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{1 - \left(\frac{2\ell k_n}{\pi a}\right)^2}} \text{ Ohm .}$$

Evenals elders sluiten we ook hier resonantie uit, dus  $\frac{a}{\ell} \neq \frac{2}{\pi} k_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ).

5.4.2. Een andere configuratie, die een voor ons oplosbaar probleem is, is aangegeven in fig. 2.



(fig. 2)

Deze configuratie bestaat weer uit een cylinder met metalen afsluiting, waarin op de as een antenne ter lengte  $2\ell$  is geplaatst, die in het midden wordt gevoed. De energiestraling gaat naar rechts.

We lossen dit probleem op met de spiegelmethode. Noemen we de potentiaal van deze configuratie  $\bar{\Pi}(z)$ , dan is

$$\bar{\Pi}(z) = \Pi(z+d) + \Pi(z-d) ,$$

waarbij  $\Pi(z)$  de in 5.3.2 beschouwde potentiaal is.

Er volgt, als  $\bar{W}$  de uitgestraalde energie is:

$$\bar{W} = \frac{8ka}{c} \sum_{k_n < ka} \frac{(\cos(\frac{\ell}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}) - \cos k\ell)^2 \cos^2(\frac{d}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2})}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}$$

en

$$\bar{R} = \frac{480 ka}{\sin^2 k\ell} \frac{\{\cos \frac{\ell}{a} (\sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}) - \cos k\ell\}^2 \cos^2(\frac{d}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2})}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} \text{ Ohm .}$$

Hebben we een halve golfantenne, dus  $k\ell = \frac{\pi}{2}$ , dan is

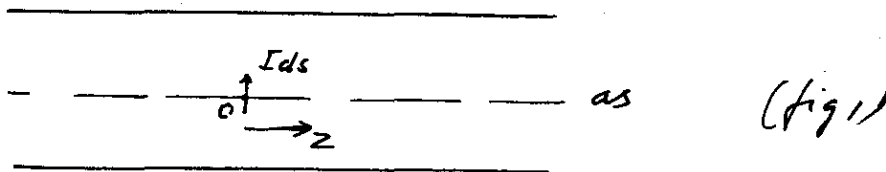
$$\bar{R}(\frac{\lambda}{2}) = \bar{R} = 480 \sum_{0 < \frac{2\ell k_n}{\pi a} < 1} \frac{\left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2\ell k_n}{\pi a}\right)^2}\right) \cos\left(\frac{\pi d}{2\ell} \sqrt{1 - \left(\frac{2\ell k_n}{\pi a}\right)^2}\right) \right]^2}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{1 - \left(\frac{2\ell k_n}{\pi a}\right)^2}}$$

Literatuur

F. Oberhettinger, Über ein Randwertproblem der Wellengleichung in Zylinder-Koordinaten, Ann. der Physik 43 (1943), 136 - 160.  
 R. Weirich, J. f. reine und angew. Math. 1934, 133 e.v.  
 H. Buchholz, Ann. der Physik 39 (1941), 81 - 128.  
 S.A. Schelkunoff, Proc. Inst. Radio Eng. 24 (1936), 1388 - 1398  
25 (1937), 1457 - 1490.

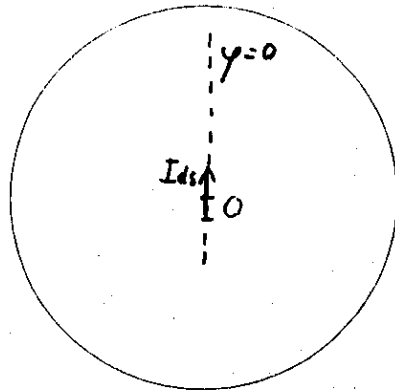
5.5. Enkele opgaven

5.5.1. Een elektrische dipool met stroomelement  $I ds$  is geplaatst in een punt van de as van een cylinder, loodrecht op de asrichting (fig. 1).



Het totale veld is uitdrukbaar in twee scalaire golf functies P en II, resp. de z-component van een magnetische vector van Fitzgerald en een elektrische vector van Hertz.

Als  $\phi$  gegeven wordt zoals in fig. 2 (deze is de loodrechte doorsnede van de cylinder)



(fig 2)

is

$$\Pi = \cos \varphi \cdot U(z, \rho)$$

$$P = \sin \varphi \cdot V(z, \rho) .$$

Het veld wordt dan gegeven door

$$- ik E_z = \cos \varphi \left\{ k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\} ;$$

$$- ik E_\rho = \cos \varphi \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} - ik \frac{V}{\rho} \right\} ;$$

$$- ik E_\varphi = - \sin \varphi \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z} - ik \frac{\partial V}{\partial \rho} \right\} ;$$

$$ik H_z = \sin \varphi \left\{ k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} ;$$

$$ik H_\rho = \sin \varphi \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial z} - \frac{ik}{\rho} U \right\} ;$$

$$ik H_\varphi = \cos \varphi \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z} - ik \frac{\partial U}{\partial \rho} \right\} .$$

U en V voldoen aan  $U_{\rho=a} = \left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} = 0$ . We ontwikkelen weer in discrete normale oplossingen ( $z > 0$ ) en er volgt

$$U = \frac{Ids}{c} \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1 \left( \frac{\rho}{a} \eta_n \right)}{\eta_n J_0^2(\eta_n)} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\eta_n^2 - k^2 a^2}}$$

en

$$V = 2ik \frac{Ids}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1 \left( \frac{\rho}{a} \eta_n \right)}{\left( \eta_n - \frac{1}{\eta_n} \right) J_1^2(\eta_n) \sqrt{\eta_n^2 - k^2 a^2}} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\eta_n^2 - k^2 a^2}} .$$

$F_{\text{el.dipool}}$  wordt gegeven door

$$F_{\text{el.dipool}} = \frac{3}{2k^3 a^3} \sum_{0 < ka < \kappa_n} \frac{\sqrt{k^2 a^2 - \kappa_n^2}}{J_0^2(\kappa_n)} + \frac{3}{2ka} \sum_{0 < ka < \eta_n} \frac{\eta_n^2}{(\eta_n^2 - 1) J_1^2(\eta_n) \sqrt{k^2 a^2 - \eta_n^2}}.$$

Opmerking. In bovenstaande formules zijn  $\kappa_n$  en  $\eta_n$  gegeven door  $J_1(\kappa_n) = 0$  en  $J_1'(\eta_n) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

5.5.2. Een elektrische dipool is geplaatst op de as en in de asrichting. Bepaal de stroomdichtheid  $f(z)$  op de wand van de cylinder.

Antwoord:

$$f(z) = - \frac{Ids}{2\pi^2 a^2} \int_0^\infty \frac{\cos \frac{z}{a} t}{J_0(\sqrt{k^2 a^2 - t^2})} dt.$$

Met de methode van Watson volgt

$$f(z) = - \frac{Ids}{2\pi^2 a^2} \left[ \alpha \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\cos \left[ \frac{z}{a} \left( v + \frac{1}{2} \right) \alpha \right]}{I_0 \left[ \sqrt{\left( v + \frac{1}{2} \right)^2 \alpha^2 - k^2 a^2} \right]} + \right. \\ \left. + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} \frac{\cosh \left( \frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2} \right)}{J_1(k_n) \left[ 1 + \exp \left( \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2} \right) \right]} \right].$$

Hierbij is  $\alpha$  een willekeurige constante.

## 6. Akoustische straling van een vlak membraan

### 6.1. De snelheidspotentiaal

We beschouwen de voortplanting van het geluid in een homogeen isotroop medium (lucht) zonder viscositeit. Deze wordt bij kleine trillingen om een evenwichtsstand beschreven door een snelheidspotentiaal  $\Phi$ . Buiten de bronnen voldoet  $\Phi$  aan de golfvergelijking

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 .$$

Hierbij is  $c$  de voortplantingssnelheid van het geluid in het medium. Noem de geluidsdruk  $P$  en de snelheid van de luchtdeeltjes  $\vec{U}$ , dan is

$$P = \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad \text{en} \quad \vec{U} = - \text{grad } \Phi .$$

Hierbij is  $\gamma$  de dichtheid van de lucht in evenwichtstoestand.

We beperken ons in het vervolg tot harmonische verschijnselen met vaste frequentie  $\frac{\omega}{2\pi}$ . We gebruiken de complexe rekenwijze, zolang de verschijnselen lineair zijn. Stel

$$\Phi = \varphi e^{-i\omega t} ; \quad P = p e^{-i\omega t} ; \quad \vec{U} = \vec{u} e^{-i\omega t} .$$

Er volgt dan buiten de bron:

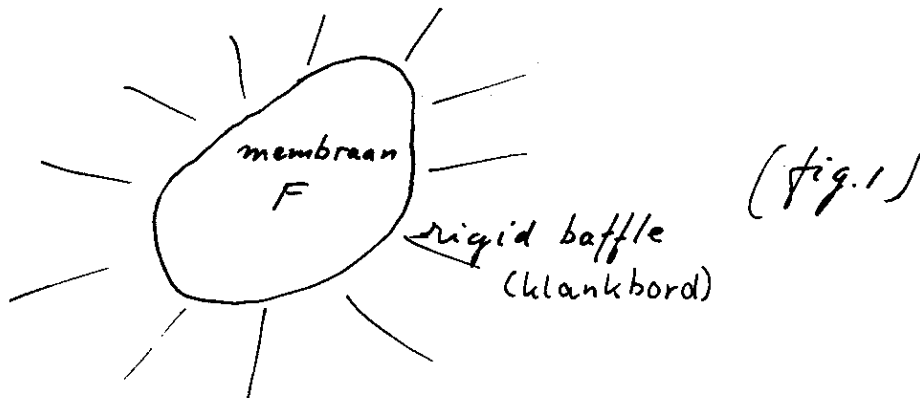
$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$$

$$p = - c\gamma ik\varphi$$

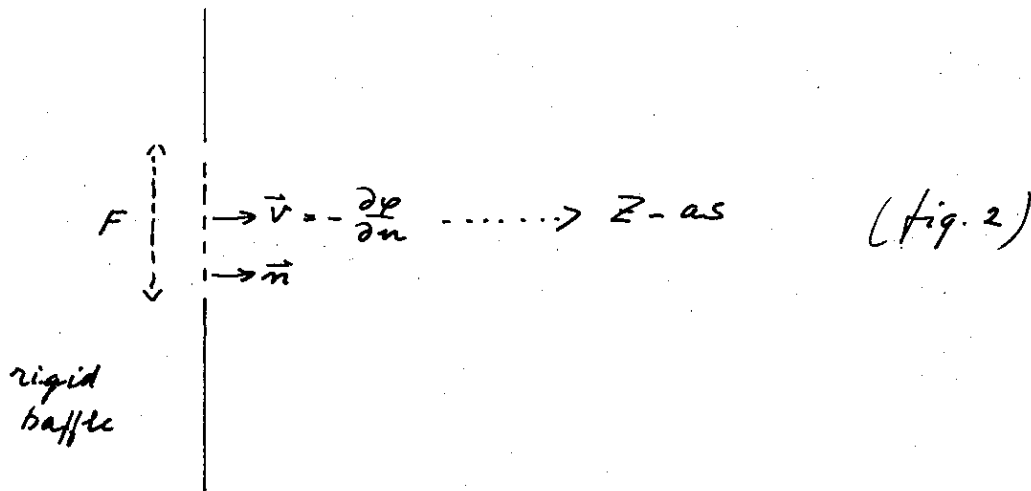
$$\vec{u} = - \text{grad } \varphi .$$

Hierbij is  $k$  het golfgetal, gegeven door  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  ( $\lambda \equiv$  golflengte).

We beschouwen de straling van een harmonisch oscillerend membraan, bij een willekeurige snelheidsamplitude-verdeling in een zg. rigid baffle van oneindige uitgebreidheid (zie fig. 1).



Het is voldoende om de straling in een halfruimte te bekijken (fig. 2).



Op elk moment is de normaal-snelheid van het membraan identiek met de normaal-snelheid van de luchtdeeltjes, dus  $v = - \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  is voorgeschreven op  $F$ .  $\vec{n}$  is de normaal op  $F$ ;  $\vec{n}$  en  $\vec{v}$  hebben **dezelfde positieve richting**. De baffle is star, d.w.z. daar geldt dat de luchtdeeltjes evenwijdig eraan trillen, dus langs de baffle is  $v_{\text{normaal}} = 0$  of  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ .

De te berekenen akoustische straling wordt dus blijkbaar gevonden door het oplossen van een randvoorwaardeprobleem, waarbij op het vlak  $z = 0$  de waarde van  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  is gegeven.

De druk  $p$  (en dus  $\varphi$ ) moet overal eindelijk zijn, terwijl in de vrije ruimte grad  $\varphi$  continu is. Bij een begrensde membraan  $F$  moet  $\varphi$  aan Sommerfeld's uitstralingsvoorwaarde voldoen, d.w.z.  $F$  reduceert tot een punt op grote afstand. De bolgolf die uit dit "punt" uitgaat is vastgelegd door

$$\varphi \sim K(\theta, \psi) \frac{e^{ikR}}{R} \quad (R \rightarrow \infty).$$

$R$  is hierbij de afstand tot de "oorsprong",  $\theta$  en  $\psi$  zijn de hoeken om de normaal.

De karakteristieke functie  $K$  bepaalt het stralingsdiagram via  $|K|^2$ .

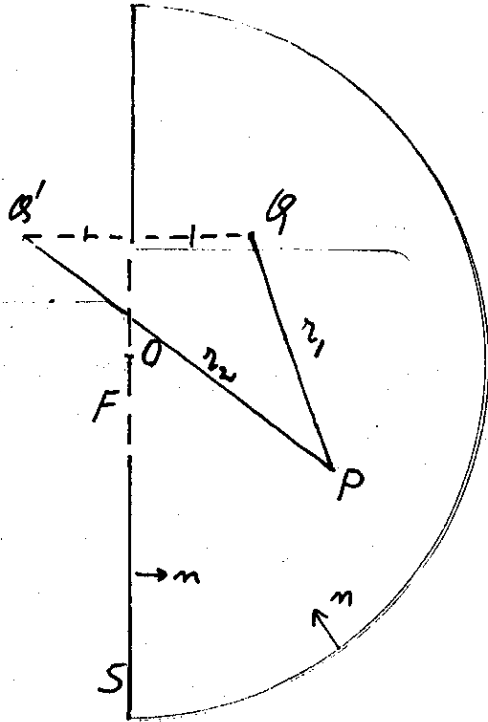
De oplossing van dit probleem is reeds door Rayleigh gegeven.

Bekijk een halve bol met geen grote straal  $R$  (fig. 3) en ga uit van

$$G = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2}.$$

Dan is

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta_Q - 4\pi\delta_{Q'}, \quad (1)$$



(fig 3)

waarbij  $\delta_{Q'}$  en  $\delta_Q$ , deltafuncties zijn met dragers in  $Q'$  en  $Q$ . Nu is (Green)

$$\iiint (\varphi \Delta G - G \Delta \varphi) d\tau = - \iint (\varphi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n}) d\tau . \quad (2)$$

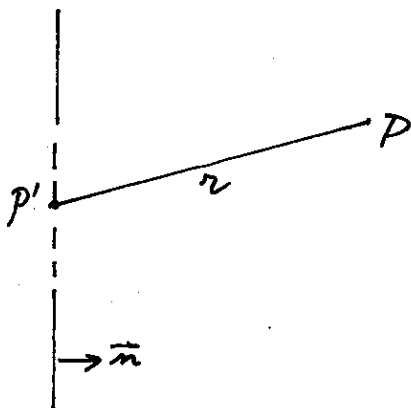
Het linkerlid reduceert zich tot  $-4\pi\varphi(P)$ . Het rechterlid wordt in de limiet

$$\iint_{z=0} G \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 2 \iint_{z=0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} df ,$$

want op  $S$  is  $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$  en over de halve bol is de bijdrage, gezien de uitstralingsvoorwaarde, ook 0 als  $R \rightarrow \infty$ .

Tenslotte vinden we dus de identiteit:

$$\varphi(P) = - \frac{1}{2\pi} \iint_{z=0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} (P') \frac{e^{ikr_{PP'}}}{r_{PP'}} df_{P'} \quad (\text{zie fig. 4}), \quad (3)$$



(fig. 4)



geldig als oplossing van de golfvergelijking voor  $z > 0$ , met continue eerste afgeleiden en voldoende aan de uitstralingsvoorwaarde. Passen we dit resultaat toe op het membraan  $F$ , dan volgt:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_F v \frac{e^{ikr}}{r} df . \quad (4)$$

We kunnen aan deze formule allerlei mathematische bespiegelingen vastknopen. In de afleiding is  $v$  continu ondersteld. Dit is in het algemeen niet zo, want dan zou  $v = 0$  zijn aan de rand van het membraan. Is  $v$  niet continu, dan kunnen we ook van (4) gebruik maken. Is nl.  $v = v_0 = \text{constant}$  ( $\neq 0$ ) over  $F$ , dan is er een discontinuïteit in  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow -v_0$  voor het binnengebied van  $F$  als we bij limietovergang in de richting van de normaal naderen. Bij een randpunt met een tangent zal gelden  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow -\frac{1}{2} v_0$  (gemiddelde waarde tussen de snelheid binnen  $F$  en buiten  $F$ ). Is  $F$  een cirkel met straal  $a$  (Rayleigh-piston), dan is dus

$$\varphi = \frac{v_0}{2\pi} \iint_F \frac{e^{ikr}}{r} df$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{r < a} = -v_0 ; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{r > a} = 0 .$$

## 6.2. Energiebeschouwingen

### 6.2.1. Energiestraling en akoestische impedantie

Bij energiebeschouwingen gaat het om reële grootheden. Het is voldoende om  $v$  reëel te nemen, want was  $v$  complex, dan komt het er op neer, dat we 2 problemen moeten adderen. Neem dus

$$V = \text{Re}(v e^{-i\omega t}) = v \cos \omega t$$

als voorgeschreven snelheid. Zij verder

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$$

$$p = p_1 + ip_2 = c\gamma k(\varphi_2 - i\varphi_1) .$$

Stellen we

$$\Phi = \text{Re}(\varphi e^{-i\omega t}) \quad \text{en} \quad P = \text{Re}(p e^{-i\omega t}) ,$$

dan volgt er

$$\Phi = \varphi_1 \cos \omega t + \varphi_2 \sin \omega t$$

en

$$P = c\gamma k(\varphi_2 \cos \omega t - \varphi_1 \sin \omega t) .$$

Zij  $dW$  de energie uitgestraald in  $z \geq 0$  door het membraan  $F$  in het tijdvak  $(t, t+dt)$ , dan is

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int_F P \cdot v \cdot df = \int_F (p_1 \cos \omega t + p_2 \sin \omega t) v \cos \omega t df = \\ &= w_1 \cos^2 \omega t + w_2 \sin \omega t \cos \omega t . \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbij zijn  $w_1$  en  $w_2$  het reële en imaginaire deel van de complexe grootheid  $w$ , waarbij

$$w = w_1 + iw_2 = \int_F (p_1 + ip_2) v df = \int_F p v df ,$$

dus

$$w_1 = \int_F p_1 v df \quad \text{en} \quad w_2 = \int_F p_2 v df .$$

Hierbij is  $w_2$  een maat voor de energie-uitwisseling tussen de bron en het stralingsveld. Deze energie is gemiddeld nul.

$\frac{w_1}{2}$  is de gemiddeld per seconde uitgestraalde energie. Hieruit volgt dat  $w_1 > 0$  is. Verder blijkt dat  $-w_2 > 0$ , d.w.z. een vlak membraan gedraagt zich, als we in electromagnetische termen spreken, als een inductiespoel. De uitdrukking  $\frac{w}{v^2}$  noemen we de stralingsimpedantie (bij  $v = \text{constant}$ ).

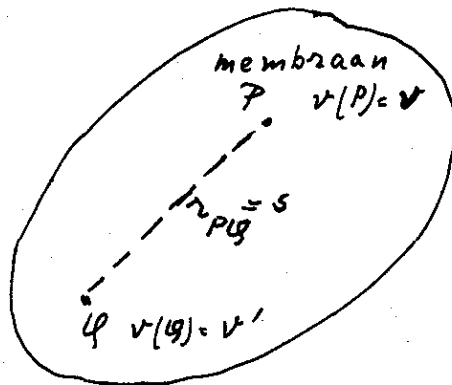
Noemen we  $\text{Re} \left( \frac{w}{v^2} \right) = R$ , dan is de energie  $\frac{1}{2} R v^2$ .

We passen nog de in 6.1 gevonden formule (4) toe. Deze luidde

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_F v \frac{e^{ikr}}{r} df .$$

Verder is  $p = -c\gamma ik\varphi$  en  $w = \int_F p v df$ , dus

$$w = -\frac{c\gamma ik}{2\pi} \int_F v(P) df_P \int_F v(Q) \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} df_Q \quad (\text{fig. 1}).$$



(fig. 1)

We splitsen deze uitdrukking in reële en imaginaire delen en bedenken dat  $v$  reëel is. Er komt

$$w_1 = \frac{cyk}{2\pi} \int_F vv' \frac{\sin ks}{s} df df' \quad (2)$$

en

$$-w_2 = \frac{cyk}{2\pi} \int_F vv' \frac{\cos ks}{s} df df' . \quad (3)$$

Onafhankelijk van  $F$  en  $v$  is het duidelijk dat  $w_1 > 0$  moet zijn (de gemiddelde straling per seconde is positief) als  $v \neq 0$ .

We tonen verder aan dat ook  $-w_2 > 0$  voor  $v \neq 0$ .

### 6.2.11. $w_1 > 0$ en $-w_2 > 0$

We noteren de toegevoegd complexe van een getal  $a$  met  $a^*$ . In ons geval is dus  $v = v^*$ . Verder is

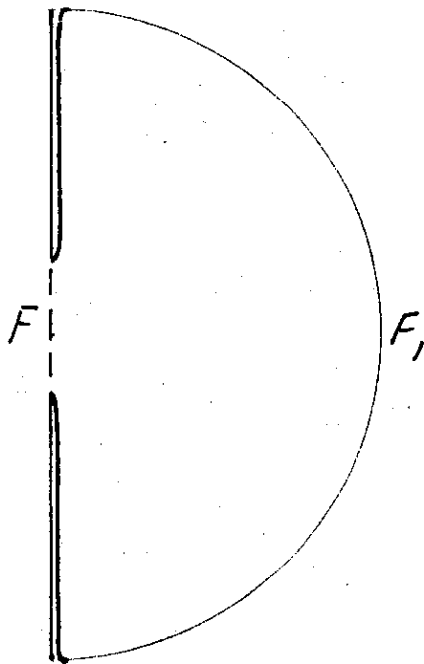
$$w_1 = \text{Re} \int_F (pv) df = \frac{1}{2} \int_F (pv^* + p^*v) df .$$

Daar op  $F$  geldt  $p = -cyk\varphi$  en  $v = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  volgt er

$$w_1 = \frac{1}{2} ciyk \int_F \left( \varphi \frac{\partial\varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) df . \quad (4)$$

De integraal verandert niet, zoals met de stelling van Green direct is in te zien, als we  $F$  omvouwen tot een oppervlak  $F_1$ , waarbij de rand van  $F \equiv$  rand van  $F_1$ , immers in  $z > 0$  zijn geen bronnen aanwezig.

We stulpen  $F$  uit tot een halve bol + een stuk van de starre wand (zie fig. 2)



(fig. 2)

Het deel van  $F_1$  dat langs de starre wand loopt geeft voor de integraal (4) een bijdrage nul, immers daar is  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ . Rest de bijdrage over de halve bol, waarvan we de straal  $R$  naar  $\infty$  laten gaan.

Daar  $\varphi \sim K(\theta, \psi) \frac{e^{ikR}}{R}$  ( $R \rightarrow \infty$ ) (zie 6.1) is  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \sim ik\varphi$ . Verder is

$$df = R^2 d\Omega = R^2 \sin \theta d\theta d\psi$$

in bolcoördinaten, dus

$$w_1 = c\gamma k^2 \int_{\text{halve bol}} |\varphi|^2 df = \frac{1}{c\gamma} \int_{R \rightarrow \infty} |p|^2 df .$$

Voor  $R \rightarrow \infty$  is het verband tussen  $p$  en  $K$  gegeven door

$$|p|_{R \rightarrow \infty} \sim c\gamma k \frac{|K|}{R} ,$$

dus

$$w_1 = c\gamma k^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} |K(\theta, \psi)|^2 \sin \theta d\theta , \quad (5)$$

Fysisch betekent dit, dat de in de ruimtehoek  $d\Omega(\theta, \psi)$  per seconde uitgestraalde energie gelijk is aan

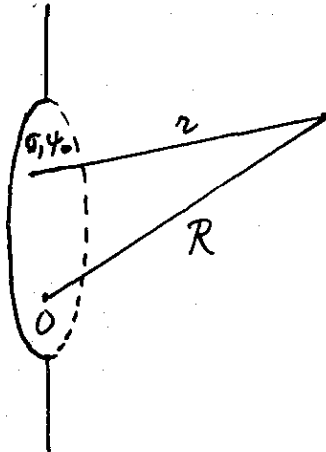
$$\frac{1}{2} c\gamma k^2 |K(\theta, \psi)|^2 d\Omega .$$

K heet de stralingskarakteristiek.

Zet men  $|K|^2$  uit in sferische coördinaten  $\theta$  en  $\phi$ , dan vindt men het zg. stralingsdiagram.

6.2.111. Berekening van  $K(\theta, \phi)$

Zij  $v$  gegeven over  $F$ . Neem in  $F$  poolcoördinaten  $\sigma, \phi_0$ ;  $\theta, \phi$  zijn de hoeken om de normaal op  $F$  (de poolas). Dan is



$$r^2 = R^2 - 2\sigma R \cos \chi + \sigma^2$$

$$\cos \chi = \sin \theta \cos(\phi - \phi_0)$$

Als  $R \rightarrow \infty$  is

$$\frac{e^{ikr}}{r} \sim \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ik\sigma \cos \chi}$$

Daar

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_F v \frac{e^{ikr}}{r} df,$$

is

$$\varphi \sim \frac{e^{ikR}}{R} \frac{1}{2\pi} \int_F v \cdot e^{-ik\sigma \cos \chi} df,$$

dus

$$K(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_F v \cdot e^{-ik\sigma \cos \chi} df. \quad (6)$$

Neem nu  $F$  cirkelvormig met straal  $a$ , en ontwikkel de voorgeschreven snelheid  $v$  in een fourierreeks

$$v(\sigma, \phi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \{v_m(\sigma) \cos m\phi_0 + v'_m(\sigma) \sin m\phi_0\}.$$

We nemen als basistype  $v(\sigma, \phi_0) = v(\sigma) \cos m\phi_0$  (7),  $m$  is een natuurlijk getal of nul en geeft het aantal knooplijnen in radiale richting.

De nulpunten in  $v(\sigma)$  geven de knooplijnen in azimuthale richting.

Voor het Rayleigh-piston is  $m = 0$  en  $v(\sigma) = v_0 = \text{constant}$ . Neem nu (7) als voorbeeld voor de berekening van  $K$  en  $w$ . Voor  $K$  geldt

$$K(\theta, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a v(\sigma) \sigma d\sigma \int_0^{2\pi} e^{-ik\sigma \sin \theta \cos(\psi - \psi_0)} \cos m\psi_0 d\psi_0 =$$

$$= \cos m\psi (\exp(-m\pi i/2)) \int_0^a J_m(k\sigma \sin \theta) v(\sigma) \sigma d\sigma ,$$

zoals uit de theorie der Besselfuncties volgt. We definiëren

$$f_m(\lambda) \equiv \frac{1}{a^2} \int_0^a J_m(\lambda\sigma) v(\sigma) \sigma d\sigma ,$$

dus

$$K(\theta, \psi) = a^2 i^{-m} f_m(k \sin \theta) \cos m\psi ,$$

behorend bij  $v = v(\sigma) \cos m\psi_0$ .

Ditzelfde kan ook worden uitgevoerd met het basistype  $v(\sigma) \sin m\psi_0 = v'$ .

Als algemeen resultaat vinden we derhalve: Bij  $v(\sigma, \psi_0)$  hoort

$$K(\theta, \psi) = a^2 \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} \{ f_m(k \sin \theta) \cos m\psi + f'_m(k \sin \theta) \sin m\psi \}$$

met

$$f'_m(\lambda) = \frac{1}{a^2} \int_0^a J_m(\lambda\sigma) v'(\sigma) \sigma d\sigma .$$

De functie  $K$  is additief, zoals het hele veld Fourier-additief is, wat  $\psi$  betreft.

Daar  $\cos m\psi$  en  $\sin m\psi$  orthogonaal zijn, is ook  $w_1$  additief evenals  $w_2$ .

Voor de term behorend bij  $v = v_m(\sigma) \cos m\psi_0$  krijgen we

$$w_1 = c\gamma a^4 k^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 m\psi d\psi \int_0^{\pi/2} f_m^2(k \sin \theta) \sin \theta d\theta .$$

Stellen we nog  $\lambda = k \sin \theta$  en voeren we weer de Neumann factor  $\epsilon_m$  in ( $\epsilon_m = 1, m = 0$  en  $\epsilon_m = 2, m \neq 0$ ), dan volgt

$$w_1 = \frac{2\pi c\gamma k a^4}{\epsilon_m} \int_0^k \frac{f_m^2(\lambda)}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \lambda d\lambda . \quad (8)$$

Sommatie over  $m$  levert de totale straling voor  $v = \sum_0^{\infty} v_m(\sigma) \cos m\phi_0$ .  
 Voor  $w_2$  vinden we op analoge wijze

$$w_2 = \frac{2\pi c \gamma k a^4}{\epsilon_m} \int_0^k \frac{f_m^2(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda. \quad (9)$$

Bewijs. Gebruik de Sommerfeld-integraal

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^{\infty} e^{-\mu z} J_0(s\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\mu}$$

waarbij  $\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ ,  $s$  is de projectie van  $r$  op  $F$  ( $r^2 = s^2 + z^2$ ). Is  $\lambda \geq k$  dan is  $\mu = (\lambda^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$  en  $\mu = -i(k^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$  als  $0 \leq \lambda \leq k$ .

Voor  $v = v_m(\sigma) \cos m\phi$  volgt

$$\begin{aligned} \varphi(z, \rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_F v \frac{e^{ikr}}{r} df = \int_0^{\infty} e^{-\mu z} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \frac{1}{2\pi} \int_F v J_0(s\lambda) df = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\mu z} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} a^2 f_m(\lambda) J_m(\lambda \rho) \cos m\phi, \end{aligned}$$

vanwege het additietheorema van Besselfuncties.

Daar

$$w = -c\gamma ik \int_F v \varphi df \quad (\text{zie pag. 79}),$$

volgt nu

$$\begin{aligned} w &= -c\gamma ik \int_0^a v(\sigma) \sigma d\sigma \int_0^{2\pi} \varphi(0, \sigma, \phi_0) \cos m\phi_0 d\phi_0 = \\ &= -c\gamma i k a^2 \int_0^a v(\sigma) \sigma d\sigma \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi_0 d\phi_0 \int_0^{\infty} J_m(\lambda \sigma) f_m(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\mu} = \\ &= -\frac{2\pi c\gamma i k a^2}{\epsilon_m} \int_0^{\infty} f_m(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \int_0^a v(\sigma) J_m(\lambda \sigma) \sigma d\sigma = \end{aligned}$$

$$= - \frac{2\pi c \gamma i k a^4}{\epsilon_m} \int_0^\infty f_m^2(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \quad (10)$$

Splits dit resultaat nog in reëel en imaginair deel, dan blijkt direct dat voor elke component  $v_m \cos m\phi_0$  geldt  $w_1 > 0$  en  $-w_2 > 0$ , dus ook voor  $v$  zelf. Het geldt ook voor een willekeurig membraan, want dit kan men inbedden in een cirkel. Men stelt dan in het gebied tussen de rand van de membraan en van de cirkel  $v_m = 0$ .

De uitdrukkingen voor  $w_1$  en  $-w_2$  zijn dus definitief positief.

We kunnen het gevonden resultaat (10) nog omvormen tot

$$w = c \gamma k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2 - i\infty} |K(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta .$$

Literatuur:

C.J. Bouwkamp: Philips Res. Repts. 1 (1946), 251 - 277.

H. Stenzel: Ann. der Physik 41 (1942), 245 e.v.

H. Stenzel: Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgänge (1939).

6.3. Opgaven

6.3.1. Gegeven het Rayleigh-piston, waarbij  $F$  een cirkel is met straal  $a$  en  $v = v_0 = \text{constant}$ . Bewijs

$$w = c \gamma v^2 \pi a^2 \left\{ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} - i \frac{H_1(2ka)}{ka} \right\}$$

$H_1$ : functie van Struve (Watson pag. 328).

Opmerking: Alleen  $f_0(\lambda)$  komt voor.

6.3.2. Zij weer gegeven het Rayleigh-piston, dan is

$$\frac{p}{c\gamma} = -ik\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{H_{2n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR)}{\sqrt{kR}} P_{2n}(\cos \theta) \quad (R \geq a).$$

Hierbij is

$$B_n = v(4n+1)P_{2n}(0) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{ka} J_{2n+\frac{1}{2}}(x) \sqrt{x} dx .$$



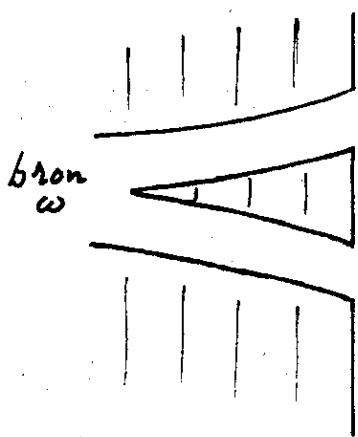
Opmerking:  $H_{2n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR)$  zijn halftallige Hankelfuncties (zie Watson).

Het is mogelijk om  $\frac{e^{ikr}}{ikr}$  naar deze functies te ontwikkelen. Er blijkt

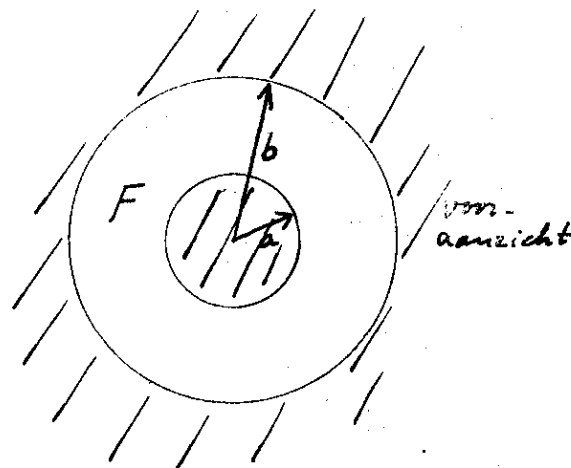
$$\frac{e^{ikr}}{ikr} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k\sigma)}{\sqrt{kR}} \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR)}{\sqrt{k\sigma}} P_n(\cos \chi) \quad (R > \sigma)$$

in de notaties van 6.2.111.

6.3.3. Gegeven een luidsprekermembraan in de vorm van een cirkelvormige ring, gesneden uit een oneindige, starre wand. Op F zij  $v = \text{constant}$  (fig. 1 en 2).



(fig. 1)  
dwars-  
doorsnede



Het gearceerde deel is starre wand.

Gevraagd een tabel voor de akoustische impedantie als  $0 < ka < kb < 3$ .

Oplossing (aanwijzingen):

De impedantie Z is gegeven door

$$Z = - \frac{c\rho ik}{2\pi} \int_F df_1 \int_F df_2 \frac{e^{ik|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Pas de hiervoor (zie 6.2.111) afgeleide formules toe met  $m = 0$ , dan is

$$f_0(\lambda) = \frac{1}{b^2} \int_0^b J_0(\lambda\sigma) v(\sigma) \sigma d\sigma = \frac{v}{b^2} \int_a^b J_0(\lambda\sigma) \sigma d\sigma,$$

want voor  $r < a$  is  $v(\sigma) = 0$ . Berekening van de integraal geeft

$$f_0(\lambda) = \frac{v}{b^2} \frac{bJ_1(\lambda b) - aJ_1(\lambda a)}{\lambda},$$

dus

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{2\pi\gamma k b^4}{1} \int_0^k \frac{\frac{v^2}{b^4} \left[ \frac{bJ_1(\lambda b) - aJ_1(\lambda a)}{\lambda} \right]^2}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \lambda d\lambda = \\ &= 2\pi\gamma k v^2 \int_0^k \frac{[bJ_1(b\lambda) - aJ_1(a\lambda)]^2}{\lambda \sqrt{k^2 - \lambda^2}} d\lambda. \end{aligned}$$

Stel nog  $\lambda = ks$ ,  $\alpha = ka$  en  $\beta = kb$  dan volgt tenslotte

$$w_1 = \frac{2\pi\gamma}{k^2} \int_0^1 \frac{[\beta J_1(\beta s) - \alpha J_1(\alpha s)]^2}{s\sqrt{1-s^2}} ds.$$

Op analoge wijze vinden we

$$-w_2 = \frac{2\pi\gamma}{k^2} \int_1^\infty \frac{[\beta J_1(\beta s) - \alpha J_1(\alpha s)]^2}{s\sqrt{s^2-1}} ds.$$

Deze integralen zijn numeriek bepaald voor  $0 \leq \alpha < \beta \leq 3$  met intervallen van 0.1.

7. Een homogeen gemagnetiseerde cylinder

7.1. We beschouwen een cylinder, straal  $a$  en hoogte  $2b$ , die in de  $x$ -richting homogeen gemagnetiseerd is. De dichtheid van het magnetische moment zij  $m\vec{e}_x$ , waarbij  $\vec{e}_x$  de eenheidsvector in de  $x$ -richting voorstelt. De component van het magneetveld in die richting is dan  $H_x \equiv H$ .

Men vraagt  $\int H d\tau$  waarbij geïntegreerd wordt over de cylinder.

Zij dus het magneetveld  $\vec{H}$ , de scalaire potentiaal  $\Phi$ , dan is  $\vec{H} = - \text{grad } \Phi$ .

De potentiaal van de dipool is  $-\text{div}\left(\frac{m\vec{e}_x}{R}\right)$  met  $R = \text{afstand}|\vec{r} - \vec{r}'|$ .

De potentiaal van de gehele cylinder is

$$\Phi = -m \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{\text{cyl}} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

Het gemiddelde van  $\vec{H}$  is dus een zesvoudige integraal!

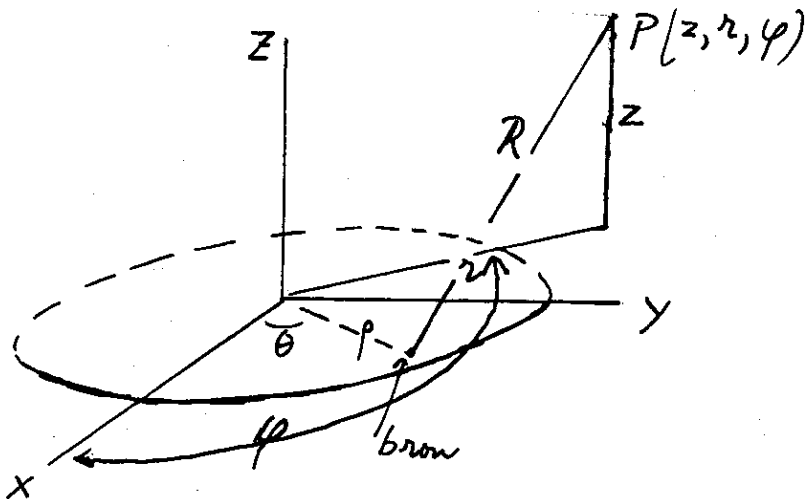
We lossen dit probleem op in stappen.

7.1.1. De geladen cirkelschijf

Uit figuur 1 blijkt dat

$$R^2 = z^2 + s^2$$

$$s^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)$$



Verder is

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + s^2}} = \int_0^\infty e^{-|z|t} J_0(st) dt$$

Integratie over  $\theta$  levert

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R} = \int_0^{\infty} e^{-|z|t} dt \int_0^{2\pi} J_0(t\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)}) d\theta = \text{(zie Watson pag. 358)}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) J_0(\rho t) dt .$$

Integratie over  $\rho$  levert

$$\int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R} = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) dt \int_0^a \rho J_0(\rho t) d\rho =$$

$$= 2\pi a \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) \frac{J_1(at)}{t} dt ,$$

dus

$$\iiint_{\text{schijf}} \frac{d\sigma}{R} = 2\pi a \int_0^{\infty} e^{-|z|t} J_0(rt) \frac{J_1(at)}{t} dt . \quad (1)$$

Deze uitdrukking levert ons de potentiaal van een homogeen belegd schijfje met straal  $a$  en ladingsdichtheid  $1$ .

### 7.1.2. De geladen cylinder

Denken we ons een cylinder, straal  $a$ , hoogte  $2b$  en als as de  $\zeta$ -as, die homogeen geladen is met een ruimtelijke ladingsdichtheid  $1$ , dan is de potentiaal

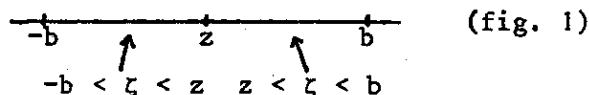
$$\iiint_{\text{cyl}} \frac{d\tau}{R} = 2\pi a \int_0^{\infty} J_0(rt) \frac{J_1(at)}{t} dt \int_{-b}^b e^{-|z-\zeta|t} d\zeta ,$$

zoals uit (1) direct kan worden afgeleid door te bedenken dat voor  $\zeta$  geldt:  $-b < \zeta < z$  en  $z < \zeta < b$  (zie fig. 1). Ligt  $z$  in het inwendige van de cylinder, dan is blijkbaar

$$\int_{-b}^b e^{-|z-\zeta|t} d\zeta = \int_{-b}^z e^{-(z-\zeta)t} dt + \int_z^b e^{-(\zeta-z)t} dt = \frac{2}{t} [1 - e^{-bt} \cosh(zt)] ,$$

dus

$$\iiint_{\text{cyl}} \frac{d\tau}{R} = 4\pi a \int_0^{\infty} J_0(rt) \frac{J_1(at)}{t} dt \left[ \frac{1 - e^{-bt} \cosh zt}{t} \right] .$$



### 7.1.3. De magnetische cylinder

Zoals al in 7.1 is vermeld is de magnetische potentiaal van een dipool met moment  $\vec{m} = m\vec{e}_x$  gegeven door

$$\Phi = - \operatorname{div}\left(\frac{\vec{m}}{R}\right) .$$

Voor de gemagnetiseerde cylinder geldt:

$$\Phi = -m \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{\text{cyl}} \frac{d\tau}{R} .$$

We gaan over op cylindercoördinaten:

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi ;$$

dus wegens  $\frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}$  volgt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{of} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} .$$

Verder is

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(rt) = t J_0'(rt) = -t J_1(rt) .$$

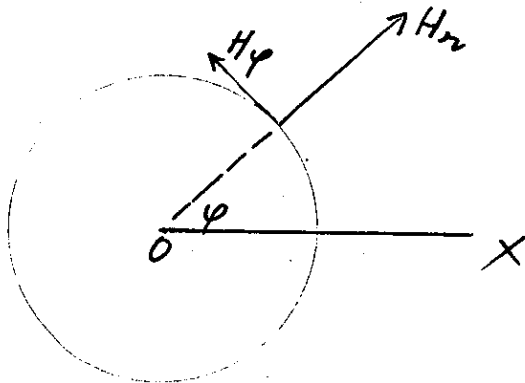
Hieruit volgt

$$\Phi = 4\pi am \cos \varphi \int_0^\infty J_1(rt) J_1(at) \frac{1 - e^{-bt} \cosh(zt)}{t} dt ,$$

een uitdrukking van de vorm  $F(z,r) \cos \varphi$ .

We bepalen het magneetveld  $\vec{H} = - \operatorname{grad} \Phi$ . In ons geval is

$$H \equiv H_x = H_r \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi \quad (\text{zie fig. 2}).$$



(fig. 2)

Nu is  $H_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$  en  $H_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ , dus

$$H_r = -\cos \varphi \frac{\partial F}{\partial r} ; \quad H_\varphi = \frac{\sin \varphi}{r} F(r, z),$$

dus

$$-H = \cos^2 \varphi \frac{\partial F}{\partial r} + \sin^2 \varphi \frac{F}{r}.$$

We berekenen nu  $\iiint_{\text{cyl}} H d\tau$ . Daartoe bepalen we eerst het gemiddelde over  $\varphi$ , d.w.z.

$\int_0^{2\pi} H d\varphi$ . We vinden

$$-\int_0^{2\pi} H d\varphi = \pi \left[ \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} F \right].$$

Middelen we nu over  $r$ , d.w.z. bepalen we

$$J = -\int_0^a r dr \int_0^{2\pi} H d\varphi,$$

dan blijkt dat

$$J = \pi \int_0^a r dr \left[ \frac{F}{r} + \frac{\partial F}{\partial r} \right] = \pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial r} (rF) dr = \pi a F(z, a).$$

Tenslotte integreren we over  $z$ , er komt

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\text{cyl}} H d\tau = -\pi a \int_{-b}^b F(z, a) dz = \pi a m \cdot 4\pi a \int_0^\infty \frac{J_1^2(at)}{t} dt \int_{-b}^b [e^{-bt} \cdot \cosh(zt) - 1] dz = \\ &= 8\pi^2 a^2 b m \int_0^\infty \left( \frac{1 - e^{-2bt}}{2bt} - 1 \right) \frac{J_1^2(at)}{t} dt. \end{aligned}$$

Opmerking: Daar  $\frac{1 - e^{-2bt}}{2bt} - 1 < 0$  is  $\iiint_{\text{cyl}} H d\tau < 0$ .

Deze integraal splitsen we in drie stukken:

$$1) \quad -\int_0^\infty \frac{J_1^2(at)}{t} dt = -\frac{1}{2} \quad (\text{Watson pag. 403 form. 1}).$$

$$2) \quad \frac{1}{2b} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(at)}{t^2} dt = \frac{1}{2b} \frac{4a}{3\pi} = \frac{2a}{3b\pi} \quad (\text{Watson pag. 403 form. 1}).$$

$$3) \quad -\frac{1}{2b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2bt} J_1^2(at)}{t^2} dt = -\frac{a}{2b} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2b}{a}s} \frac{J_1^2(s)}{s^2} ds =$$

$$= \frac{a}{2b} \left[ \frac{b}{a} - \frac{4}{3\pi} \frac{(1-k^2)K(k) + (2k^2-1)E(k)}{k^3} \right] \quad \text{met } k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

(K(k) en E(k) zijn de elliptische integralen van de 1e en 2e soort, Byrd-Friedman, Handbook of Ell. Integrals form. 562.05.)

Optellen van 1), 2) en 3) levert

$$\bar{I} = \iiint_{\text{cyl}} H d\tau = \frac{16\pi a^3 m}{3} \left[ 1 - \frac{(1-k^2)K(k) + (2k^2-1)E(k)}{k^3} \right],$$

dus het gemiddelde magnetveld  $\bar{H}$ , dat we vinden door I te delen door het volume  $2\pi a^2 b$  van de cylinder is

$$\bar{H} = \frac{8\pi m a}{3b} \left[ 1 - \frac{(1-k^2)K(k) + (2k^2-1)E(k)}{k^3} \right]. \quad (2)$$

Opmerkingen:

1) Formule (2) kan ook nog anders worden geschreven, nl.

$$\bar{H} = \frac{8\pi m}{3} \frac{k}{k'} \left\{ 1 - \frac{3\pi}{4k} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, k^2\right) \right\}.$$

Hierbij is  $k' = (1-k^2)^{\frac{1}{2}}$ .

2) Voor a vast,  $b \rightarrow \infty$  of  $a \rightarrow 0$ , b vast is  $k \rightarrow 0$ , waaruit

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bar{H} = -2\pi m.$$

Een asymptotische ontwikkeling voor  $k \rightarrow 0$  is

$$\bar{H} \sim \frac{8\pi m}{3} \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \left\{ 1 - \frac{3\pi}{4k} \left( 1 - \frac{3}{8} k^2 - \frac{5}{64} k^3 - \dots \right) \right\}.$$

Als  $k \rightarrow 1$  ( $k < 1$ ) voeren we nog de complementaire modulus  $k'$  in; in dit geval is immers  $k' \rightarrow 0$ .

Daar

$$K(k) = -\frac{1}{4}(k')^2 - \frac{21}{128}(k')^4 - \dots + (1 + \frac{1}{4}(k')^2 + \frac{9}{64}(k')^4 + \dots) \log \frac{4}{k'}$$

en

$$E(k) = 1 - \frac{1}{4}(k')^2 - \frac{13}{64}(k')^4 - \dots + (\frac{1}{2}(k')^2 + \frac{3}{16}(k')^4 + \dots) \log \frac{4}{k'}$$

volgt er tenslotte

$$\bar{H} \sim \frac{8m}{3} \left[ \frac{k - \frac{3\pi}{4} (1 - \frac{3}{8}k^2 - \frac{5}{64}k^4 - \frac{35}{1024}k^6 - \dots)}{\sqrt{1-k^2}} \right] \quad (k \rightarrow 0)$$

$$\bar{H} \sim \frac{8m}{3} \left[ \frac{3}{4} \sqrt{1-k^2} - \frac{3}{2} \sqrt{1-k^2} \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + \dots \right] \quad (k \uparrow 1)$$

met

$$k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{en} \quad k' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$