TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

CAPITA SELECTA

uit de

TOEGEPASTE WISKUNDE

Problemen o.a. op het gebied van electromagnetisme en akoestiek

College van

Prof. Dr. C.J. Bouwkamp

Voorjaarssemester 1970

Dictaat bewerkt door

drs. P.J. de Doelder

Onderafdeling der Wiskunde

Capita Selecta uit de toegepaste wiskunde

PROBLEMEN O.A. OP HET GEBIED VAN ELECTROMAGNETISME EN AKOUSTIEK

PROF. DR. C.J. BOUWKAMP

DICTAAT BEWERKT DOOR DRS. P.J. DE DOELDER

VOORJAARSSEMESTER 1970

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 2.239
PRIJS f 2,--

Inhoudsbeschrijving
Capita Selecta uit de Toegepaste Wiskunde
Problemen o.a. op het gebied van electromagnetisme en akoustiek
1970

JdG, 1 Juli 2005

0. Inleiding

In dit college worden vraagstukken behandeld, die in de techniek voorkomen, vooral op het gebied van electromagnetisme en akoustiek.
De problemen, die genummerd zijn 1 t/m 11, zijn of door de docent of door de toehoorders gesteld.
Gedurende het college, dat als werkcollege is gegeven, werden de gestelde problemen door toehoorders besproken en eventueel met behulp van aanwijzingen door de docent opgelost.
De indeling van deze handleiding is als volgt: Hij is verdeeld in 11 hoofdstukken. In elk hoofdstuk wordt een opgave behandeld. Zo nodig wordt hierbij naar literatuur verwezen.

Hoofdstuk I

Opgave:

In een kleine show werkt een aantal blondines (F) en een aantal brunettes (B). Na afloop van de show wacht de heer X op zijn meisje, dat een brunette is. Eerst komen er 4 blondines naar buiten en daarna zijn meisje. Hij vraagt zich nu af (hij kent de samenstelling van de spelersgroep niet): "Zijn bijna alle meisjes blond op het mijne na?"
Om nader geïnformeerd te raken klampt hij de directeur aan en stelt hem bovenstaande vraag. Het antwoord is: "Neen, maar ik wil U wel zeggen dat de kans dat, als U twee meisjes ziet, er twee blond zijn gelijk is aan de kans, dat beiden brunettes zijn of één een brunette en één blond."
Gevraagd: "Hoeveel meisjes bevat de show."

Oplossing

Noem het aantal blondines F, het aantal brunettes B. Uit het gegeven volgt:

a) B en F zijn geheel;

b) $B \geq 4$ en $F \geq 1$.

De kans dat beide meisjes blond zijn is:

$$\frac{F}{B+F} \cdot \frac{F-1}{B+F-1} .$$

De kans dat beiden brunettes zijn is

$$\frac{B}{B+F} \cdot \frac{B-1}{B+F-1} .$$

De kans dat er één blond en één brunette is, is

$$2\,\frac{F}{B+F} \cdot \frac{B}{F+B-1} .$$

Uit de uitspraak van de directeur volgt nu

$$\frac{F}{B+F} \cdot \frac{F-1}{B+F-1} = \frac{B}{F+B} \cdot \frac{B-1}{F+B-1} + 2\,\frac{F}{F+B} \cdot \frac{B}{F+B-1}$$

of

$$F^2 - F = B^2 - B + 2FB .$$

We lossen deze vergelijking op als vierkantsvergelijking in F:

$$F = \frac{2B + 1 \pm \sqrt{4B^2 + 4B + 1 - 4B + 4B^2}}{2} = \frac{2B + 1 \pm \sqrt{8B^2 + 1}}{2} .$$

Daar $F > 0$ vervalt het minteken, dus

$$F = \frac{2B + 1 + \sqrt{8B^2 + 1}}{2} .$$

Om deze vergelijking op te lossen bedenken we, dat $8B^2 + 1$ een kwadraat moet zijn. Het is dus voldoende, als we $2B = y$ stellen, op te lossen

$$2y^2 + 1 = x^2 \qquad \text{(vergelijking van Pell).} \tag{1}$$

Hieruit blijkt dat x oneven en y even is. De vergelijking (1) kan worden opgelost met behulp van kettingbreuken.
Zij x_n, y_n een oplossing, dan moet gelden

$$F_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n + 1) \qquad \text{en} \qquad B_n = \tfrac{1}{2}y_n .$$

In het boekje: Gelfond, The solution of equations in integers, wordt de vergelijking van Pell behandeld.
Er blijkt hier dat voor x_n en y_n geldt

$$(x_n + y_n\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^{2n} ,$$

dus

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2(x_n + y_n\sqrt{2}) ,$$

waaruit als recurrente betrekking volgt:

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$$

$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

met initiaalvoorwaarden $x_1 = 3$, $y_1 = 2$.
We krijgen dan de tabel

n	B_n	F_n
1	1	3
2	6	15
3	35	85
4	204	493

enz.

Een algemene formule voor B_n luidt:

$$B_n = 3^{n-1} \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} \left(\frac{8}{9}\right)^k .$$

Opmerkingen:

a) Men zie in het boekje van Gelfand vooral § 2 en § 4.

b) Wil men over kettingbreuken nader worden geïnformeerd, dan kan men terecht in: Hardy-Wright, Theory of Numbers, Ch. X, en in O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrücken.
In § 26 wordt de vergelijking van Pell behandeld.

c) De oplossing (B_1,F_1) voldoet hier niet. De enige zinvolle oplossing zal hier zijn $(B_2,F_2) = (6,15)$.

d) Uit $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ en $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$ volgt nog:

$$B_{n+1} = B_n + 2F_n - 1 \; ; \; F_{n+1} = 2B_n + 5F_n - 2 \quad \text{met } (B_1,F_1) = (1,3) .$$

Dit kan worden herleid tot:

$$\Delta B_n = 2F_n - 1 \quad \text{en} \quad \Delta F_n = F_{n+1} - F_n = 2B_{n+1} ,$$

dus

$$\Delta^2 B_n = 2\Delta F_n \quad \text{waaruit} \quad B_{n+2} - 2B_{n+1} + B_n = 4B_{n+1}$$

en analoog

$$F_{n+2} = 6F_{n+1} - F_n - 2 .$$

Oplossen van deze differentievergelijkingen levert i.v.m. de beginvoorwaarden

$$B_n = \frac{1}{4\sqrt{2}} [(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n] \; ;$$

$$F_n = \frac{1}{4\sqrt{2}} [(3 + 2\sqrt{2})^{n+\frac{1}{2}} + (3 - 2\sqrt{2})^{n+\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2}] .$$

Met behulp van het binomium van Newton volgt nu direct de formule boven aan deze bladzijde.

Hoofdstuk II

Opgave:

In een electrisch systeem worden, equidistant in de tijd, stroompulsen opgewekt, en wel zodanig dat de stroompuls op het tijdstip $t_1 = T$ gelijk is aan i_1, op het tijdstip $t_2 = 2T$ gelijk is aan i_2, ..., op $t_n = nT$ gelijk is aan i_n. Voor i_n geldt

$$e^{\alpha i_n} = 1 + \beta(1 - e^{-\alpha i_{n-1}}) \qquad (n \geq 1) .$$

α en β zijn positieve constanten; $i_0 > 0$.

Gevraagd: de "eenvoudigste" tijdfunctie, die de "omhullende" van de stromen beschrijft.

Oplossing

De "omhullende" is niet eenduidig bepaald, zoals direct duidelijk is.
We stellen $x_n = e^{\alpha i_n}$, dan is

$$x_n = 1 + \beta\left(1 - \frac{1}{x_{n-1}}\right) \qquad (n \geq 1 \text{ en } x_0 \text{ gegeven}) .$$

We trachten deze kettingbreuk op te lossen. Stel daartoe $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ en $q_n = p_{n-1}$, dan is

$$\frac{p_n}{q_n} = 1 + \beta\left(1 - \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}\right) ,$$

dus

$$p_n = p_{n-1}(1 + \beta) - \beta p_{n-2} \qquad (n \geq 2) .$$

Dit is een differentievergelijking met constante coëfficiënten.
Neem $p_n = Au^n$, dan volgt:

$$\beta u^2 (1 + \beta)u + 1 = 0 \quad \text{dus} \quad u_1 = \frac{1}{\beta} \quad \text{of} \quad u_2 = 1 .$$

We hebben nu 2 gevallen:

A $\boxed{\beta \neq 1}$

In dit geval is $p_n = A\beta^n + C$ (A en C willekeurige constanten). Stel $p_0 = x_0$ of $q_0 = 1$; $p_1 = x_0(1 + \beta) - \beta$, dan volgt er

$$x_n = \frac{\beta^{n+1} + \frac{x_0 - \beta}{1 - x_0}}{\beta^n + \frac{x_0 - \beta}{1 - x_0}},$$

dus

$$i_n = \frac{1}{\alpha} \log \left[\frac{(1 + e^{\alpha i_0})\beta^{n+1} + e^{\alpha i_0} - \beta}{(1 - e^{\alpha i_0})\beta^n + e^{\alpha i_0} - \beta} \right].$$

Definieer nu

$$i(t) = \frac{1}{\alpha} \log \left[\frac{(1 + e^{\alpha i_0})\beta^{\frac{t}{T}+1} + e^{\alpha i_0} - \beta}{(1 - e^{\alpha i_0})\beta^{\frac{t}{T}} + e^{\alpha i_0} - \beta} \right],$$

dan staat hier een eenvoudige omhullende.
Er geldt

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ 0<\beta<1}} i(t) = 0 \; ; \quad \lim_{\substack{t\to\infty \\ \beta>1}} i(t) = \frac{1}{\alpha} \log \beta \; .$$

B $\boxed{\beta = 1}$

In dit geval is $p_n - 2p_{n-1} + p_{n-2} = 0$.

Neem $p_n = A_n + C$; $p_0 = e^{\alpha i_0}$; $p_1 = 2e^{\alpha i_0} - 1$, dan volgt er

$$x_n = \frac{(e^{\alpha i_0} - 1)n + e^{\alpha i_0}}{(e^{\alpha i_0} - 1)(n - 1) + e^{\alpha i_0}}, \qquad n = 0,1,\dots ,$$

dus

$$i_n = \frac{1}{\alpha} \log \frac{e^{\alpha i_0}(n + 1) - n}{e^{\alpha i_0} n - (n - 1)}.$$

Stel $n = \frac{t}{T}$, dan volgt de omhullende.

Opmerking. Als we $\beta \to 1$ in geval A, volgt geval B.

Vraag. Waarom is de omhullende, die we vonden, een eenvoudige?

Antwoord. Om een oplossing te vinden is het voldoende, dat we met één parameter volstaan (aanpassing aan de beginvoorwaarden bij voorgeschreven x_0). Om een eenvoudig verband te krijgen stellen we $q_n = p_{n-1}$.

Hoofdstuk III

Opgave:

Gegeven een rechthoekige balk met ribben a, b en c, en een rechte ℓ, die met de ribben van de balk achtereenvolgens de hoeken α, β en γ maakt.

Gevraagd: Hoe lang is de gemiddelde lengte van het segment van de rechten $/\!/ \ell$, dat door de balk wordt afgesneden?

Oplossing

Kies een orthonormaal assenstelsel zodanig, dat de Z-as evenwijdig met ℓ loopt. Projecteer de balk op het XOY-vlak, dan is de projectie van de balk bekend (zie fig. 1).

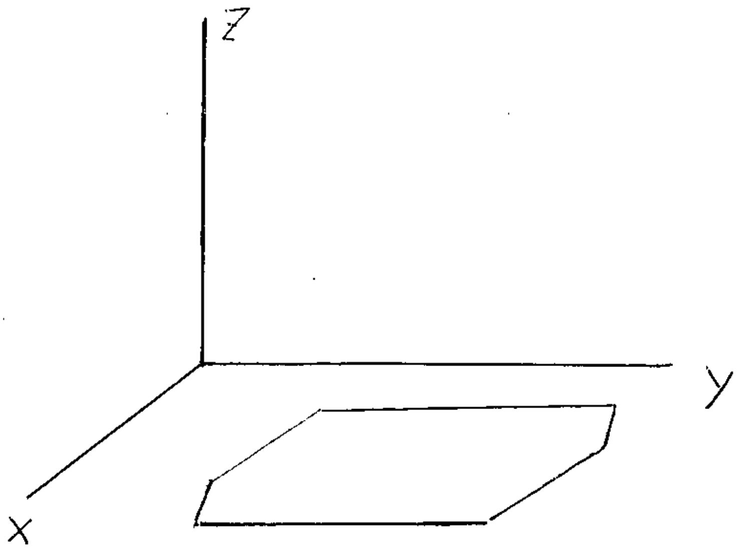


fig. 1

De oppervlakte van deze projectie P is

$$O = ab|\cos\gamma| + bc|\cos\alpha| + ac|\cos\beta| \,.$$

Neem in P een oppervlakje dxdy en beschouw het deel S van het blokje boven P, dat binnen de gegeven balk ligt. De inhoud van S kan men aangeven door $f(x,y)dxdy$, als $f(x,y) \sim$ de lengte van de opstaande ribben van S.
Voor de gemiddelde lengte δ van deze ribben geldt dus

$$\delta = \frac{\iint f(x,y)dxdy}{\iint dxdy} = \frac{\text{inhoud balk}}{O_P} = \frac{abc}{ab|\cos\gamma| + bc|\cos\alpha| + ac|\cos\beta|}$$

dus

$$\frac{1}{\delta} = \frac{|\cos\alpha|}{a} + \frac{|\cos\beta|}{b} + \frac{|\cos\gamma|}{c} \,.$$

Als we ℓ in R_3 draaien, wat wordt dan de gemiddelde lengte over alle richtingen?
Om deze vraag te beantwoorden gebruiken we het begrip lijnendichtheid op de eenheidsbol. De lijnendichtheid van lijnen gaande door het middelpunt van de bol stellen we evenredig aan de oppervlakte van dat deel van het oppervlak, dat ze passeren, d.w.z.

$$\text{lijnendichtheid} = \frac{d\omega}{4\pi}\ .$$

We bepalen het gemiddelde van $|\cos\alpha| = p$. Nemen we de a-ribbe als poolas, dan volgt

$$|\overline{\cos\alpha}| = \bar{p} = \frac{2\pi\int_0^\pi |\cos\theta|\sin\theta\, d\theta}{4\pi} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\ .$$

Wegens de symmetrie geldt dit ook voor $|\cos\beta|$ en $|\cos\gamma|$, dus

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)_{gem} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \tfrac{1}{4}\ \frac{2ab + 2bc + 2ac}{abc}$$

of

$$\overline{\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \tfrac{1}{4}\ \frac{\text{totale oppervlakte van de balk}}{\text{inhoud van de balk}} = \tfrac{1}{4}\ \frac{0}{J}\ .$$

Opmerkingen:

a) Heeft men een willekeurig convex lichaam, dan geldt dit resultaat ook. Zie hiervoor: Nieuw Archief voor Wiskunde, 1960 deel 8 blz. 49 opgave 49, en de oplossing in Wiskundige Opgaven met Oplossingen deel 21, 1964, blz. 49.

b) α, β en γ zijn niet onafhankelijk, immers

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\ .$$

Hoofdstuk IV

Opgave:

Bereken

a) $$F(p) = \int_0^\infty e^{-p \sinh^2 u}\, udu \qquad (p \to 0)\ ;$$

b) $$G(p) = \int_0^\infty \cosh^2 u\, e^{-p \sinh^2 u}\, udu \qquad (p \to 0)\ .$$

Oplossing

We differentiëren F(p) naar p, er volgt

$$\frac{dF}{dp} = -\int_0^\infty \sinh^2 u\, e^{-p \sinh^2 u}\, udu = -G(p) + F(p)\ .$$

Daar $\sinh^2 u = \frac{\cosh 2u - 1}{2}$, volgt

$$F(p) = e^{\frac{p}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{2}\cosh 2u}\, udu = \tfrac{1}{4} e^{\frac{p}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{2}\cosh t}\, tdt\ .$$

Stel $\frac{p}{2} = x$ en definieer

$$f(x) \equiv \int_0^\infty e^{-x \cosh t}\, tdt\ ,$$

dan is

$$F(p) = \frac{e^x}{4} f(x) \qquad \text{en} \qquad G(p) = \frac{1}{8} e^x [f(x) - f'(x)]\ ,$$

zoals direct blijkt.

In Watson: Besselfunctions, pag. 313, vinden we de formule

$$I_\nu(x) + I_{-\nu}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos\theta} \cos\nu\theta\, d\theta + \frac{2 \sin \pi\nu}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \sinh \nu t\, dt\ ,$$

dus

$$\int_0^\infty e^{-x\cosh t}\sinh \nu t\,dt = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left[I_\nu(x) + I_{-\nu}(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos\nu\theta\,d\theta\right] .$$

Verder is (l.c. pag. 79):

$$I_\nu(x) = \frac{(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta ,$$

dus

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\,d\theta ,$$

waaruit volgt:

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\sinh \nu t\,dt = \frac{\pi\nu}{\sin\pi\nu}\left[\frac{I_\nu(x) + I_{-\nu}(x) - 2I_0(x)}{2\nu}\right] +$$

$$+\frac{1}{\sin\pi\nu}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}(1-\cos\nu\theta)d\theta .$$

We ontwikkelen $I_\nu(x)$ naar ν:

$$I_\nu(x) = I_0(x) + \nu\left(\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}\right)_{\nu=0} + \frac{\nu^2}{2}\left(\frac{\partial^2 I_\nu(x)}{\partial^2\nu}\right)_{\nu=0} + \dots$$

en

$$I_{-\nu}(x) = I_0(x) + \nu\left(\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right)_{\nu=0} + \frac{\nu^2}{2}\left(\frac{\partial^2 I_{-\nu}(x)}{\partial\nu^2}\right)_{\nu=0} + \dots ,$$

dus

$$I_\nu(x) + I_{-\nu}(x) - 2I_0(x) = \nu\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu} + \frac{\partial I_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=0} + \frac{\nu^2}{2}\left(\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial^2\nu} + \frac{\partial^2 I_{-\nu}}{\partial^2\nu}\right)_{\nu=0} + \dots .$$

Substitutie in het rechterlid van (1) geeft

$$\int_0^\infty e^{-x\cosh t}\sinh\nu t\,dt = \frac{\pi\nu}{2\sin\pi\nu}\left[\left\{\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}+\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial\nu}\right\}_{\nu=0}+\frac{\nu}{2}\left\{\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial\nu^2}+\frac{\partial^2 I_{-\nu}}{\partial\nu^2}\right\}_{\nu=0}+\dots\right]+$$

$$+\frac{1}{\sin\pi\nu}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}(1-\cos\nu\theta)d\theta\ .$$

Reeksontwikkeling naar ν levert

$$\nu\int_0^\infty e^{-x\cosh t}\,t\,dt = \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial\nu^2}\right)_{\nu=0}+\frac{\nu}{2\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\,\theta^2 d\theta + O(\nu^3)$$

daar

$$\sinh\nu t=\nu t+\frac{\nu^3t^3}{3!}+\dots\ ;\quad \cos\theta\ =1-\frac{\nu^2\theta^2}{2}+\dots\ ;$$

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}=1\ ;\quad \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}+\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=0}=0\ \text{en}\ \left(\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial\nu^2}\right)_{\nu=0}=\left(\frac{\partial^2 I_{-\nu}}{\partial\nu^2}\right)_{\nu=0},$$

dus na gelijkstelling van gelijke machten in ν:

$$\int_0^\infty e^{-x\cosh t}\,t\,dt = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial\nu^2}\right)_{\nu=0}+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\,\theta^2 d\theta\ .$$

We bekijken nu de reeksontwikkeling van $I_\nu(x)$. Deze is

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+2m}}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)}\ ,$$

dus

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}=\sum_{m=0}^\infty \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+2m}}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)}\left[\log\frac{x}{2}-\psi(\nu+m+1)\right]$$

en

$$\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial\nu^2}=\sum_{m=0}^\infty \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+2m}}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)}\left[\log\frac{x}{2}-\psi(\nu+m+1)\right]^2-$$

$$-\sum_{m=0}^\infty \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+2m}}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)}\psi'(\nu+m+1)\ .$$

(Zie bijv. Whittaker-Watson, A Course of Modern Analysis, pag. 240, coll.2).

Uit deze formules blijkt

$$\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2m}}{(m!)^2} [\log \frac{x}{2} - \psi(m+1)]$$

en

$$\left(\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial \nu^2}\right)_{\nu=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2m}}{(m!)^2} \{[\log \frac{x}{2} - \psi(m+1)]^2 - \psi'(m+1)\} .$$

Hierbij is

$$\psi(m+1) = 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \gamma \qquad (m \geq 1)$$

$$\psi(1) = -\gamma$$

$$\psi'(m+1) = +\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2} + \ldots - \frac{1}{m^2}$$

$$\psi'(1) = +\frac{\pi^2}{6} ,$$

(zie Whittaker-Watson, pag.241).

We berekenen nog $I = \frac{1}{2\pi} \int_0 e^{x \cos\theta} \theta^2 d\theta$. Ontwikkel de e-macht, dan is

$$I = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(x \cos\theta)^n}{n!} \theta^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \theta^2 d\theta + x \int_0^{\pi} \cos\theta\, \theta^2 d\theta + \frac{x^2}{2} \int_0 \cos^2\theta\, \theta^2 d\theta + O(x^3) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{3}\pi^3 - 2\pi x + x^2(\frac{1}{12}\pi^3 + \frac{1}{8}\pi) + O(x^3)] =$$

$$= \frac{1}{6}\pi^2 - x + \frac{x^2}{2}(\frac{1}{12}\pi^2 + \frac{1}{8}) + O(x^3) .$$

We vinden dus tenslotte

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t}\, t\, dt = \tfrac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2m}}{(m!)^2} [\{\log \frac{x}{2} - \psi(m+1)\}^2 - \psi'(m+1)] +$$

$$+ \frac{1}{6}\pi^2 - x + \frac{x^2}{2}(\frac{1}{12}\pi^2 + \frac{1}{8}) + O(x^3) \qquad (x \to 0) .$$

We bekijken van de sommatie alleen m = 0 en m = 1. Dit geeft achtereenvolgens:

$$\tfrac{1}{2}\,(\log \frac{x}{2} + \gamma)^2 - \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{en} \qquad \tfrac{1}{2}\,\frac{x^2}{4}\,(\log \frac{x}{2} + \gamma - 1)^2 - \frac{\pi^2}{6} + 1 \quad ,$$

dus

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\,(\log \frac{2}{x} - \gamma)^2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{6}\,\pi^2 - x + \tfrac{1}{2}x^2(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{8}) +$$

$$+ \frac{x^2}{8}\,(\log \frac{2}{x} - \gamma + 1)^2 - \frac{\pi^2}{6} + 1 \; + O(x^3) \qquad (x \to 0)$$

en

$$f'(x) = -\frac{1}{x}\,(\log \frac{2}{x} - \gamma) - 1 + x(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{8}) + \tfrac{1}{4}x\,(\log \frac{2}{x} - \gamma + 1) - \frac{\pi^2}{6} + 1 \; -$$

$$- \frac{x}{4}\,(\log \frac{2}{x} - \gamma + 1) + O(x^2) \qquad (x \to 0)\;.$$

We stellen nog $L \equiv \log(\frac{4}{p}) - \gamma$, dan blijkt

$$F(p) = \tfrac{1}{4}e^{\frac{p}{2}}\left\{\tfrac{1}{2}L^2 - \frac{p}{2} + \frac{\pi^2}{12}\right\} + O(p^2) \qquad (p \to 0)\;.$$

Verder is

$$G(p) = F(p) - \frac{dF}{dp} = \tfrac{1}{2}F(p) - \frac{1}{8}\,e^{\frac{p}{2}}\,\frac{df}{dx}\;,$$

dus

$$G(p) = \frac{1}{8}\,e^{\frac{p}{2}}\left\{\frac{\pi^2}{12} + \tfrac{1}{2}L^2 - \frac{p}{2}\right\} + \frac{1}{8}\,e^{\frac{p}{2}}\left[\frac{2L}{p} + 1 - \frac{p}{2}\,(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{8}) + \right.$$

$$\left. - \frac{p}{8}\,\left\{(L+1)^2 - \frac{\pi^2}{6} + 1\right\} + \frac{p}{8}\,(L+1)\right] + O(p^2) \qquad (p \to 0)$$

of

$$e^{-\frac{p}{2}}\,G(p) = \tfrac{1}{4}\,\frac{L}{p} + \frac{1}{16}\,L^2 + \frac{1}{8} + \frac{\pi^2}{96} - \frac{1}{64}\,pL^2 - \frac{1}{64}\,pL \; +$$

$$- p\left[\frac{\pi^2}{384} - \frac{11}{128}\right] + O(p^2)\;.$$

Hoofdstuk V

Gevraagd wordt uitdrukkingen af te leiden voor de functies

$$\psi_1(p) = e^{-\frac{1}{2}p} \int_0^p I_0(\sqrt{ps})e^{-\frac{1}{2}s}\, ds$$

en

$$\psi_2(p) = \int_0^p e^{-\frac{1}{2}t}\, dt \int_0^p I_0(\sqrt{ts})e^{-\frac{1}{2}s}\, ds \; ,$$

die numerieke berekening mogelijk maakt voor grote waarden van p.

Oplossing

We ontwikkelen I_0 naar machten van ps, er volgt

$$\psi_1(p) = e^{-\frac{1}{2}p} \int_0^p e^{-\frac{1}{2}s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^m\, s^m}{(m!)^2\, 2^{2m}}\, ds =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^m}{(m!)^2\, 2^{2m}} \int_0^p e^{-\frac{1}{2}s}\, s^m\, ds \; .$$

Definieer

$$I_m \equiv \int_0^p e^{-\frac{1}{2}s}\, s^m\, ds \; ,$$

dan is

$$I_m = -\, 2e^{-\frac{1}{2}p}\, p^m + 2m\, I_{m-1} \; , \qquad m \geq 1$$

$$I_0 = 2 - 2e^{-\frac{1}{2}p} \; ,$$

dus

$$I_m = 2^{m+1}\, m! \left[1 - e^{-\frac{1}{2}p} \sum_{k=0}^{m} \frac{p^k}{k!\, 2^k} \right] ,$$

zoals direct blijkt. We vinden dus

$$\psi_1(p) = 2e^{-\frac{1}{2}p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^m}{(m!)2^m} \left[1 - e^{-\frac{1}{2}p} \sum_{k=0}^{m} \frac{p^k}{k!\ 2^k}\right] =$$

$$= 2 - 2e^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^m}{m!\ 2^m} \sum_{k=0}^{m} \frac{p^k}{k!\ 2^k} =$$

$$= 2 - 2e^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!\ 2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} .$$

Nu is

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{k} = \tfrac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{k} + \sum_{k=m}^{2m} \binom{2m}{k}\right] = \tfrac{1}{2}[2^{2m} + \binom{2m}{m}] \quad \text{als } n = 2m$$

en

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{k-1} + \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{k} = 2^{2m} \quad \text{als } n = 2m + 1 ,$$

dus

$$\psi_1(p) = 2 - 2e^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{2m}}{(2m)!\ 2^{2m}} (2^{2m-1} + \tfrac{1}{2}\binom{2m}{m}) -$$

$$- 2e^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{2m+1}}{(2m+1)!\ 2^{2m+1}} 2^{2m} =$$

$$= 2 - e^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{2m}}{(2m)!} - e^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(p)^{2m}}{(m!)^2} - e^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{2m+1}}{(2m+1)!} =$$

$$= 2 - e^{-p}[\cosh p + I_0(p) + \sinh p] = 1 - e^{-p}\, I_0(p) .$$

Het asymptotisch gedrag voor $p \to \infty$, $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$, is dus

$$\psi_1(p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \left\{1 + \frac{1}{8p} + \frac{9}{128p^2} + \frac{75}{1024p^3}\right\} + O(p^{-9/2}) .$$

<u>Opmerking</u>. Het bovenstaande resultaat had ook vlugger verkregen kunnen worden. Differentieer daartoe $\psi_1(p)$ naar p; er volgt

$$\frac{d\psi_1(p)}{dp} = - e^{-p}\, I_0(p) - \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}p} \int_0^p I_0(\sqrt{ps})e^{-\frac{1}{2}s}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{p}} e^{-\frac{1}{2}p} \int_0^p I_1(\sqrt{ps})\sqrt{s}\, e^{-\frac{1}{2}s}\, ds \ ,$$

als we bedenken dat:

a) $$\frac{\partial}{\partial p} \int_0^p f(s,p)ds = f(p,p) + \int_0^p \frac{\partial f}{\partial p} ds \ ,$$

b) $$p \frac{dI_1(p)}{dp} + I_1(p) = pI_0(p) \ .$$

De laatste integraal gaan we partieel integreren:

$$\int_0^p I_1(\sqrt{ps})\sqrt{s}\, e^{-\frac{1}{2}s}\, ds = -\, 2\sqrt{p}\, e^{-\frac{1}{2}p}\, I_1(p) + \sqrt{p} \int_0^p I_0(\sqrt{ps})e^{-\frac{1}{2}s}\, ds \ ,$$

dus

$$\frac{d\psi_1(p)}{dp} = e^{-p}\{I_0(p) - I_1(p)\} = -\frac{d}{dp}\{e^{-p}\, I_0(p)\} \ .$$

Conclusie:

$$\psi_1(p) = 1 - e^{-p}\, I_0(p) \ , \quad \text{daar} \quad \psi_1(0) = 0 \ .$$

Omdat

$$\frac{d\psi_2(p)}{dp} = e^{-\frac{1}{2}p} \int_0^p I_0(\sqrt{ps})e^{-\frac{1}{2}s}\, ds + \int_0^p e^{-\frac{1}{2}t}\, I_0(\sqrt{pt})e^{-\frac{1}{2}p}\, dt =$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}p} \int_0^p I_0(\sqrt{ps})e^{-\frac{1}{2}s}\, ds = 2\psi_1(p) \ ,$$

is

$$\psi_2(p) = 2 \int_0^p \psi_1(x)dx = 2 \int_0^p (1 - e^{-x}\, I_0(x))dx =$$

$$= 2p - \int_0^p e^{-x}\, I_0(x)dx = 2p - 2[pe^{-p}\{I_0(p) + I_1(p)\}] \ .$$

Asymptotisch gedrag voor $p \to \infty$

$$\psi_2(p) = 2p\left[1 - \frac{2}{\pi p}\left\{1 - \frac{1}{8p} - \frac{3}{128p^2} - \frac{15}{1024p^3}\right\}\right] + O(p^{-7/2}),$$

$$|\arg p| < \frac{\pi}{2}.$$

Hoofdstuk VI

Te berekenen de vier-dimensionale integraal

$$I = \iiiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ \xi^2+\eta^2\leq 1}} e^{-k|x-\xi|} \cos\beta x \cos\beta\xi \, dx\, d\xi\, dy\, d\eta \,.$$

Oplossing

Beschouw voor vaste x en ξ de integraal

$$I_1 = \iint dy\, d\eta \;;$$

dan is

$$I_1 = \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{\sqrt{1-\xi^2}} d\eta = 4\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)} \,.$$

Zij $\alpha \geq 2$ en ontwikkel $e^{-k|x|}$, $-\alpha < x < \alpha$, in een Fourier-cosinusreeks; er volgt:

$$e^{-k|x|} = \sum_{m=0}^{\infty}{}' a_m \cos\frac{m\pi}{\alpha}x \quad \text{met} \quad a_m = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} e^{-kt}\cos\frac{m\pi}{\alpha}t\, dt \,.$$

(Hierbij duidt het accent op het feit, dat i.p.v. a_0 dient te worden genomen $\frac{1}{2}a_0$.)

Na enig elementair rekenwerk volgt nu

$$a_m = \frac{2k}{(k\alpha)^2 + (m\pi)^2}\,[1 - (-1)^m e^{-k\alpha}] \,.$$

Daar

$$e^{-k|x-\xi|} = \sum_{m=0}^{\infty}{}' a_m \cos[\frac{m\pi}{\alpha}(x-\xi)] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}{}' a_m[\cos(\frac{m\pi}{\alpha}x)\cos(\frac{m\pi}{\alpha}\xi) + \sin(\frac{m\pi}{\alpha}x)\sin(\frac{m\pi}{\alpha}\xi)]$$

en de sinustermen geen bijdrage leveren volgt er

$$I = 4 \sum_{0}^{\infty}{}' a_m \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} d\xi \cos(\beta x)\cos(\beta\xi)\cos(\frac{m\pi}{\alpha} x)\cos(\frac{m\pi}{\alpha} \xi)\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \xi^2} =$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}' a_m \left\{2 \int_{-1}^{1} \cos(\beta x)\cos(\frac{m\pi}{\alpha} x)\sqrt{1 - x^2}\, dx\right\}^2 =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} a_m' \left\{ \int_{-1}^{1} [\cos(\beta + \frac{m\pi}{\alpha})x + \cos(\beta - \frac{m\pi}{\alpha})x]\sqrt{1 - x^2}\, dx\right\}^2 .$$

Nu is bekend (zie Watson, Bessel functions, page 165, form. 6)

$$J_1(z) = \frac{z}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} \cos zt\, dt ,$$

dus tenslotte

$$I = \pi^2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' a_m \left[\frac{J_1(\beta + \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta + \frac{m\pi}{\alpha}} + \frac{J_1(\beta - \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta - \frac{m\pi}{\alpha}}\right]^2 .$$

Opmerkingen

a) Als $k = 0$ reduceert de integraal zich tot

$$I(k = 0) = 4 \int_{-1}^{1} \cos(\beta x)\cos(\beta\xi)\sqrt{(1 - x^2)(1 - \xi^2)}dx\, d\xi = 4\pi^2 \left(\frac{J_1(\beta)}{\beta}\right)^2 .$$

b) De reeksontwikkeling is vrij snel convergerend. Als men subroutines voor J_1 bezit, kan men numerieke berekening van de integraal op eenvoudige wijze uitvoeren.

c) Om de integraal te vinden kan men ook als volgt te werk gaan: Bekend is

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a} \qquad (a > 0) .$$

Vervang a door $k|x - \xi|$. dan volgt er

$$e^{-k|x-\xi|} = \frac{2k}{\pi} |x - \xi| \int_{0}^{\infty} \frac{\cos u}{u^2 + k^2(x - \xi)^2}\, du =$$

$$(u = t|x - \xi|) = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos[(x - \xi)t]}{t^2 + k^2} dt .$$

Substitueren we dit resultaat in I en verwisselen we nog de integratievolgorde, dan zien we dat

$$I = \frac{8k}{\pi} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos[(x - \xi)t]\cos(\beta x)\cos(\beta\xi)\sqrt{(1 - x^2)(1 - \xi^2)} \, \frac{dt}{t^2 + k^2} =$$

$$= \frac{8k}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-1}^1 \cos(xt)\cos(\beta x)\sqrt{1 - x^2} \, dx \right]^2 \frac{dt}{t^2 + k^2} ,$$

als we $\cos(x - \xi)t$ uitsplitsen in $\cos(xt)\cos(\xi t) - \sin(xt)\sin(\xi t)$.
Hieruit blijkt dat

$$I = 2k\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{J_1(\beta + t)}{\beta + t} + \frac{J_1(\beta - t)}{\beta - t} \right\}^2 \frac{dt}{t^2 + k^2} .$$

Men kan een benadering van deze integraal vinden door sommatie van de waarden van de integrand in de equidistante punten $t_m = \frac{m\pi}{\alpha}$ $(m = 0,1,2,\ldots)$.
Dan wordt

$$I \approx 2\pi k \frac{\pi}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty}{}' \left\{ \frac{J_1(\beta + \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta + \frac{m\pi}{\alpha}} + \frac{J_1(\beta - \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta - \frac{m\pi}{\alpha}} \right\}^2 \frac{1}{(\frac{m\pi}{\alpha})^2 + k^2} \equiv I_{appr}$$

$$I_{appr} = \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{2k\alpha\pi^2}{(k\alpha)^2 + (m\pi)^2} \left\{ \frac{J_1(\beta + \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta + \frac{m\pi}{\alpha}} + \frac{J_1(\beta - \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta - \frac{m\pi}{\alpha}} \right\}^2 .$$

Dit is juist het resultaat, dat we hierboven hebben gevonden, afgezien van de correctieterm Δ

$$\Delta = - e^{-k\alpha} \sum_{m=0}^{\infty}{}' (-1)^m \frac{2k\alpha\pi^2}{(k\alpha)^2 + (m\pi)^2} \left[\frac{J_1(\beta + \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta + \frac{m\pi}{\alpha}} + \frac{J_1(\beta - \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta - \frac{m\pi}{\alpha}} \right]^2 .$$

Hoofdstuk VII

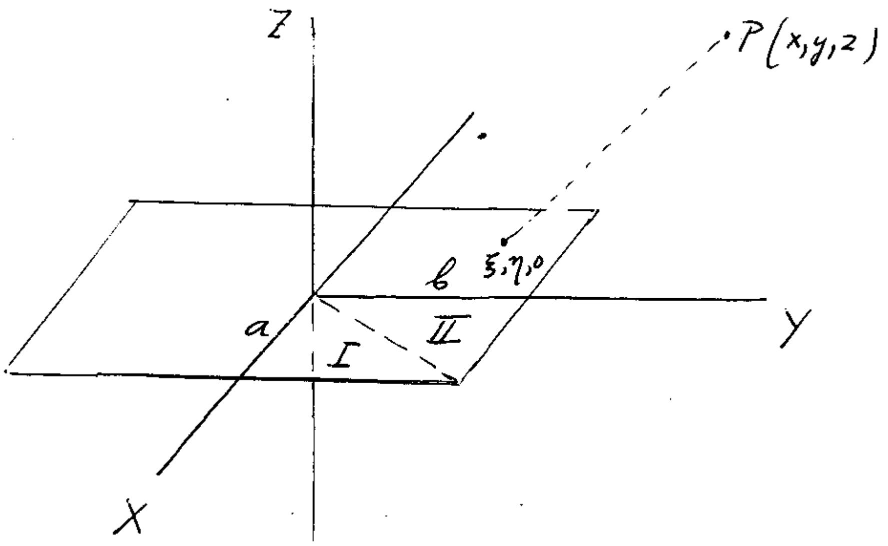
a) Gegeven een homogeen geladen rechthoekige plaat met zijden 2a en 2b. Gevraagd de potentiaal op de as van de plaat te berekenen.

b) Indien de plaat belegd is met dipolen evenwijdig aan de as, los dan hetzelfde probleem op.

Oplossing

a) Zij de as van de plaat de Z-as, de X-as en Y-as lopen evenwijdig aan de zijden. Het centrum van de plaat zij O.
De potentiaal V in een willekeurig punt P(x,y,z) is, als we de ladingsdichtheid 1 nemen,

$$V(x,y,z) = \int_{-a}^{a} d\xi \int_{-b}^{b} \frac{d\eta}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} .$$



Verder is V(0,0,z) = 4[U(z;a,b) + U(z;b,a)] als U(z;a,b) de potentiaal is veroorzaakt door I en U(z;b,a) de potentiaal veroorzaakt door II. Nu is

$$U(z;a,b) = \int_0^{\arctan\frac{b}{a}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= -|z| \arctan\frac{b}{a} + a \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{p+t^2}}{1+t^2}\,dt = \left(p = 1 + \frac{z^2}{a^2}\right) \qquad (\alpha)$$

$$= - |z| \arctan \frac{b}{a} + I \; .$$

Beschouw

$$\int \frac{\sqrt{p + t^2}}{1 + t^2} dt = (\sqrt{p + t^2} = t + u) = -\int \frac{(p + u^2)^2}{4u^2 + (p - u^2)^2} \frac{du}{u} =$$

$$= (u^2 = v) = - \tfrac{1}{2} \log v - \sqrt{p - 1} \arctan \left\{ \frac{v + 2 - p}{2\sqrt{p - 1}} \right\} ,$$

want $p > 1$.

Substitutie van de grenzen geeft:

$$U(z;a,b) = a \log \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}} +$$

$$+ |z| \left[\arctan \frac{a}{|z|} - \arctan(\frac{b}{a}) - \arctan \frac{a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}{a|z|} \right] .$$

$U(z;a,b)$ vinden we door verwisseling van a en b.

Men kan dit resultaat ook nog op andere wijze vinden, immers

$$\int_{-b}^{b} \frac{d}{\{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} = \log\{\eta + \sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2 + z^2}\} \Big|_{\eta = -b-y}^{\eta = b-y} .$$

De gevraagde integraal is derhalve

$$V(x,y,z) = \int_{-a-x}^{a-x} [\log(b - y + \sqrt{\xi^2 + (b - y)^2 + z^2}) - \log(-b - y + \sqrt{\xi^2 + (b + y)^2 + z^2})] d\xi \; .$$

Nu is voor $c > 1$:

$$\int \log(1 + \sqrt{u^2 + c}) du = u \log(1 + \sqrt{u^2 + c}) - u - \log(\sqrt{u^2 + c} - u) +$$

$$- 2\sqrt{c - 1} \arctan \left(\frac{\sqrt{u^2 + c} - u + 1}{\sqrt{c - 1}} \right) .$$

Als we dit resultaat toepassen en tevens $x = y = 0$ stellen komt er

$$V(0,0,z) = 2a \log \frac{b + \sqrt{a^2+b^2+z^2}}{-b + \sqrt{a^2+b^2+z^2}} + 2b \log \frac{a + \sqrt{a^2+b^2+z^2}}{-a + \sqrt{a^2+b^2+z^2}} +$$

$$+ 2|z| \left[\arctan \frac{a + b + \sqrt{a^2+b^2+z^2}}{|z|} + \arctan \frac{-a - b + \sqrt{a^2+b^2+z^2}}{|z|} + \right.$$

$$\left. - \arctan \frac{-a + b + \sqrt{a^2+b^2+z^2}}{|z|} - \arctan \frac{a - b + \sqrt{a^2+b^2+z^2}}{|z|} \right] .$$

Wegens

$$\arctan \alpha + \arctan \beta = \arctan \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} + k\pi \qquad (k = -1,0,1)$$

volgt er tenslotte

$$V(0,0,z) = 4a \log \frac{b + \sqrt{a^2+b^2+z^2}}{\sqrt{a^2+z^2}} + 4b \log \frac{a + \sqrt{a^2+b^2+z^2}}{\sqrt{b^2+z^2}} +$$

$$+ 4|z| \left[\arctan \frac{|z|\sqrt{a^2+b^2+z^2}}{ab} - \frac{\pi}{2} \right] ,$$

wat in overeenstemming blijkt te zijn met het al eerder gevondene.

b) Zij de plaat nu belegd met dipolen. Noem de potentiaal $\psi(x,y,z)$. Zij s de lading van de dipool, ε de lengte en $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon s = 1$, dan is

$$\psi(x,y,z) = s(V(x,y,z) - V(x,y,z+\varepsilon)) ,$$

dus

$$\psi(0,0,z) = - \lim_{\varepsilon\to 0} s\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} = - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{(0,0,z)} .$$

Nu is

$$\Phi(z;a,b) \equiv - \frac{\partial}{\partial z} U(z;a,b) = \operatorname{sgn}(z)\arctan \frac{b}{a} - \frac{z}{a} \int_0^{b/a} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{p+t^2}} ,$$

als we $p = 1 + \frac{z^2}{a^2}$ stellen.

Dus

$$\Phi(z;a,b) = \operatorname{sgn}(z)\arctan \frac{b}{a} - \frac{a}{z} \int_0^{b/a} \frac{\sqrt{p+t^2}}{1+t^2}\, dt + \frac{a}{z} \int_0^{b/a} \frac{dt}{\sqrt{p+t^2}} ,$$

zoals direct blijkt wegens

$$\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{p+t^2}} = \frac{1}{p-1}\left[\frac{\sqrt{p+t^2}}{t^2+1} - \frac{1}{\sqrt{p+t^2}}\right].$$

Na berekening van deze integralen zien we dat

$$\Phi(z;a,b) = \operatorname{sgn} z \arctan\frac{b}{a} - \frac{1}{z}\left[|z| \arctan\frac{b}{a} + U(z;a,b)\right] +$$

$$+ \frac{a}{z}\left[\log\sqrt{p+t^2} + t\right]_0^{b/a}$$

of

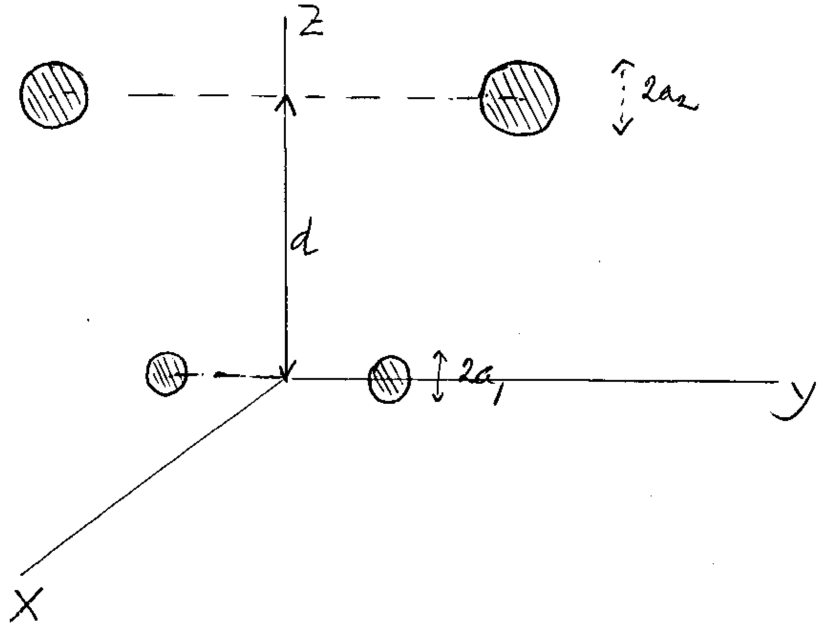
$$\Phi(z;a,b) = \operatorname{sgn}\left[z \arctan\frac{b}{a} - \arctan\frac{a}{|z|} + \arctan\frac{a^2+b^2-b\sqrt{a^2+b^2+z^2}}{a|z|}\right].$$

<u>Opmerking</u>. Φ is ook de ruimtehoek, waaronder men vanuit $(0,0,z)$ de vlakke plaat ziet.

Hoofdstuk VIII

Gevraagd te bepalen de coëfficiënt van wederzijdse inductie van een tweetal ringvormige co-axiale geleiders met cirkelvormige doorsnede.

We nemen een assenstelsel aan met de gemeenschappelijke as als z-as.
De straal en doorsnede van de ene ring zij R_1 resp. $2a_1$, de overeenkomstige grootheden van de tweede ring R_2 en $2a_2$.
We veronderstellen verder $\frac{a_1}{R_1} < 1$ en $\frac{a_2}{R_2} < 1$.
Tenslotte zij de afstand van de middelpunten der ringen: d.



We beschouwen, als $\vec{H}$ het magnetische veld is, de vectorpotentiaal $\vec{A}$, gegeven door

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{I}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{H} = \nabla \cdot \vec{A} .$$

Hieruit volgt

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\iiint_{V'} \frac{I(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\, dv'$$

als we in rechthoekige coördinaten werken (c = lichtsnelheid).
Voer cylindercoördinaten in, dan is de stroom in een oneindig dun cirkelvormig stroomdraadje met de Z-as als as:

$$\vec{I} = I\delta(z')\delta(R_1 - r')\vec{U}_\varphi \ ,$$

waarbij $\vec{U}_\varphi$ de eenheidsraakvector van de stroom is, die in dit stroomdraadje loopt. Nu is duidelijk, dat $A_r = 0$ en $A_z = 0$, en

$$A_\varphi(r,\varphi,z) = \frac{R_1}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos v \, dv}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2R_1 r \cos v + R_1^2}} =$$

$$= \frac{2R_1}{c} \int_0^{\pi} \frac{\cos v \, dv}{\sqrt{z^2 + v^2 - 2R_1 r \cos v + R_1^2}} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{R_1}{r}} \{(\frac{2}{k} - k)K - \frac{1}{k} E\}$$

met

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{en} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \, d\varphi \ ,$$

waarbij

$$k^2 = \frac{4R_1 r}{z^2 + (r + R_1)^2} \quad \text{en} \quad I = 1 \ .$$

(Zie Byrd-Friedman: Handbook of elliptic integrals, blz. 177.)
Voor de berekening van A_φ zie C.J. Bouwkamp: Over de berekening van het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring, THE, Rapport 1957-1.
Nemen we de tweede stroomdraad ook oneindig dun met dezelfde as, dan is de flux Φ, die door de eerste op de tweede werkt:

$$\Phi = \int_A (\underline{B}_1, \underline{n}) dA = \frac{1}{\mu} \int_A \{(\nabla \times \vec{A}), \underline{n}\} dA =$$

$$(\text{Stokes}) = \frac{1}{\mu} \int (\vec{A}, \vec{\tau}) ds = \frac{R_2}{\mu} \int A_\varphi \, ds = \frac{2\pi R_2}{\mu} A_\varphi \ .$$

Daar de afstand van beide draden d is en nu $r = R_2$ gesteld moet worden en $\mu = 1$ gesteld mag worden volgt tenslotte: De flux, die we $M_{0,0}$ zullen noemen is:

$$M_{0,0} = \frac{4\pi}{c} \sqrt{R_1 R_2} \{(\frac{2}{k} - k)K - \frac{2}{k} E\}$$

met

$$k = \frac{4R_1R_2}{d^2 + (R_1 + R_2)^2}$$

De hierboven gevonden uitdrukking voor $M_{0,0}$ kan nog anders worden geschreven. Bekend is (zie Watson: Bessel functions, p.384)

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2rR \cos v + r^2}} = \int_0^\infty e^{-|z|t} J_0\{t(r^2 - 2Rr \cos v + R^2)^{\frac{1}{2}}\}dt \ .$$

Hieruit volgt:

$$A_\varphi = \frac{R_1}{c} \int_0^\infty e^{-|z|t} \, dt \int_0^{2\pi} J_0\{t(r^2 - 2R_1 r \cos v + R_1^2)^{\frac{1}{2}}\}\cos v \, dv \ .$$

Verder is

$$J_0\{t(r^2 - 2R_1 r \cos v + R_1^2)^{\frac{1}{2}}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(rt)J_n(R_1 t)\cos nv \, dv$$

(zie Watson, p.358/9), dus

$$A_\varphi = \frac{2\pi R_1}{c} \int_0^\infty e^{-zt} J_1(rt)J_1(R_1 t)dt \qquad (z > 0) \ .$$

Neem $r = R_2$, dan is

$$M_{0,0} = \frac{2\pi R_2}{c} A_\varphi = \frac{4\pi^2 R_1 R_2}{c^2} \int_0^\infty e^{-dt} J_1(R_1 t)J_1(R_2 t)dt =$$

$$= \frac{4\pi}{c^2} \sqrt{R_1 R_2} \, \{(\frac{2}{k} - k)K - \frac{2}{k} E\} \ .$$

Bekijk nu een klein oppervlak dS_1 in de doorsnede van de ring met straal R_1. Neem de totale stroom 1, dan is de stroom door dS_1: $\dfrac{dS_1}{\pi a_1^2}$, d.w.z.

$$dA_\varphi = \frac{dS_1}{\pi a_1^2} \frac{2\pi r_1}{c} \int_0^\infty e^{-|z-z_1|t} J_1(rt)J_1(r_1 t)dt \qquad \text{(fig.2)} \ ,$$

dus

$$(1) \qquad A_\varphi = \frac{2\pi}{c} \int_0^\infty e^{-zt} J_1(rt)dt \frac{1}{\pi a_1^2} \iint_{S_1} e^{z_1 t} J_1(r_1 t) r_1 dS_1 \qquad (|z-z_1| = z-z_1) .$$

Verder is

$$I_1 = \frac{1}{\pi a_1^2} \iint_{S_1} e^{z_1 t} J_1(r_1 t) r_1 dS_1 = \frac{1}{\pi a_1^2} \int_{R_1-a_1}^{R_1+a_1} J_1(r_1 t) r_1 dr_1 \int_{-(a_1^2-(R_1-r_1)^2)^{\frac{1}{2}}}^{(a_1^2-(R_1-r_1)^2)^{\frac{1}{2}}} e^{z_1 t} dz =$$

$$= \frac{2}{\pi a_1^2 t} \int_{R_1-a_1}^{R_1+a_1} J_1(r_1 t) r_1 \sinh(a_1^2 - (R_1 - r_1)^2)^{\frac{1}{2}} t dr_1 .$$

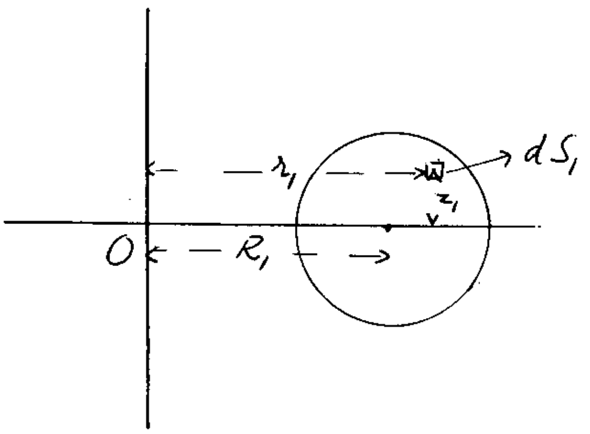


fig. 2

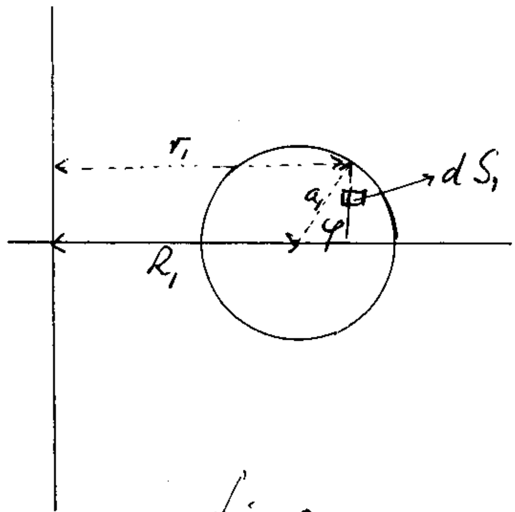


fig. 3

Voer nu in $r_1 = R_1 + a_1 \cos \varphi$ (fig.3), dan is

$$I_1 = \frac{2}{\pi a_1 t} \int_0^\pi \sinh(a_1 t \sin \varphi) J_1(R_1 t + a_1 t \cos \varphi)\cdot(R_1 + a_1 \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi ,$$

een niet erg overzichtelijk resultaat.

We gaan daarom nogmaals uit van (1) en bedenken dat

$$J_1(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin\theta} \sin\theta \, d\theta$$

(Watson: Bessel functions, p.20). Dan is

$$I_2 = \frac{1}{\pi a_1^2} \iint_{S_1} e^{z_1 t} J_1(r_1 t) r_1 dS_1 = \frac{i}{2\pi^2 a_1^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \iint_{S_1} e^{t(z_1 - ir_1 \sin\theta)} r_1 dS_1 \; .$$

Voer poolcoördinaten in; stel

$$r_1 = R_1 + \rho \cos\varphi$$

$$z_1 = \rho \sin\varphi \; ,$$

dan volgt er

$$I_2 = \frac{i}{2\pi^2 a_1^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, e^{-iR_1 t \sin\theta} d\theta \int_0^{a_1} \rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} (R_1 + \rho\cos\varphi) e^{\rho t \sin\varphi} \; .$$

$$\cdot \, e^{-\rho t \, i \sin\theta \cos\varphi} \, d\varphi \; .$$

Om deze integraal te kunnen berekenen bekijken we eerst

$$F \equiv \int_{-\pi}^{\pi} e^{x(\sin\varphi + u\cos\varphi)} d\varphi \; .$$

Voor $u > 0$ is $\sin\varphi + u \cos\varphi = \sqrt{1 + u^2} \sin(\varphi + \arctan u)$, dus

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} e^{x(\sin\varphi + u\cos\varphi)} d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\sqrt{1+u^2} \sin\varphi} d\varphi \; ,$$

daar de integratie over φ over een volle periode plaats vindt en de factor arctan u dus geen rol speelt.
Nu is echter Watson l.c. p.181)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{x\sqrt{1+u^2}\sin\varphi} d\varphi = 2\pi \, I_0(x\sqrt{1 + u^2}) \; .$$

Daar $I_0(x\sqrt{1+u^2})$ een analytische functie is van u kunnen we I_0 analytisch voortzetten en F derhalve ook, d.w.z. we kunnen F voor alle u beschouwen. Hieruit volgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(\sin\varphi - i\sin\theta\cos\varphi)}\, d\varphi = 2\pi\, I_0(x\cos\theta)$$

voor alle θ, zowel reëel als complex. Differentiëren naar θ geeft

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(\sin\varphi - i\sin\theta\cos\varphi)}\, d\varphi = -\, 2\pi i \tan\theta\, I_1(x\cos\theta) \ ,$$

dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} (R_1 + \rho\cos\varphi) e^{\rho t(\sin\varphi - i\sin\theta\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 2\pi R_1\, I_0(\rho t\cos\theta) - i\rho\tan\theta\, I_1(\rho t\cos\theta) \ .$$

Verder is bekend (Watson l.c. p.79, 3.71 (5))

$$\int_0^x u I_0(u)du = xI_1(x) \quad \text{en} \quad \int_0^x u^2 I_1(u)du = x^2 I_2(x) \ ,$$

dus

$$\int_0^{a_1} \rho I_0(\rho t\cos\theta)d\rho = \frac{a_1 I_1(at\cos\theta)}{t\cos\theta}$$

en

$$\int_0^{a_1} \rho^2 I_1(\rho t\cos\theta)d\rho = \frac{a_1^2 I_2(a_1 t\cos\theta)}{t\cos\theta} \ ,$$

waaruit volgt:

$$\int_0^{a_1} \rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} (R_1 + \rho\cos\varphi) e^{\rho t(\sin\varphi - i\sin\theta\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi a_1 R_1}{t\cos\theta}\left[I_1(a_1 t\cos\theta) - \frac{ia_1}{R_1}\tan\theta\, I_2(\rho_1 t\cos\theta)\right] \ .$$

Stel nog $x = R_1 t$ en $\varepsilon_1 = \frac{a_1}{R_1}$, dan wordt

$$I_2 = \frac{iR_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin\theta} \left[\frac{I_1(\varepsilon_1 x \cos\theta) - i\varepsilon_1 \tan\theta\, I_2(\varepsilon_1 x \cos\theta)}{\frac{1}{2}\varepsilon_1 x \cos\theta} \right] \sin\theta \, d\theta \, .$$

Wegens de reeksontwikkelingen voor I_1 en I_2 kunnen we de vorm tussen [ ] schrijven als

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_1^{2n} \left\{ \frac{(\frac{1}{2}x\cos\theta)^{2n}}{n!(n+1)!} - i\tan\theta \, \frac{(\frac{1}{2}x\cos\theta)^{2n-1}}{(n-1)!(n+1)!} \right\} \equiv \sum_{0}^{\infty} \beta_n \varepsilon_1^{2n} \, .$$

Hierbij is

$$\beta_0 = \frac{iR_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\theta} \sin\theta \, d\theta = R_1 J_1(x)$$

en

$$\beta_n = \frac{iR_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\theta} \left[\frac{(\frac{1}{2}x\cos\theta)^{2n}}{n!(n+1)!} - i\tan\theta \, \frac{(\frac{1}{2}x\cos\theta)^{2n-1}}{(n-1)!(n+1)!} \right] \sin\theta \, d\theta \qquad (n > 0)$$

of

$$\beta_n = \frac{R_1}{2\pi} \frac{(\frac{x}{2})^{2n-1}}{n!(n+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} (n \sin^2\theta \cos^{2n-2}\theta + \tfrac{1}{2} ix \sin\theta \cos^{2n}\theta) e^{-ix\sin\theta} \, d\theta \qquad (n \geq 1) \, .$$

<u>Opmerking</u>. Dit resultaat is ook nog geldig voor $n = 0$.

We zien nu

$$\beta_n = \frac{R_1}{2\pi} \frac{(\frac{x}{2})^{2n-1}}{n!(n+1)!} \left[n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2m+2}\theta \cos^{2n-2}\theta \, d\theta \, + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+2}}{(2m+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2m+2}\theta \cos^{2n}\theta \, d\theta \right] .$$

Deze integralen zijn eenvoudig te berekenen, er volgt

$$\beta_n = \frac{R_1}{2\pi} \frac{(\frac{x}{2})^{2n-1}}{n!(n+1)!} \left[2n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(m+n+1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+2}}{(2m+1)!} \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+n+2)} \right] =$$

$$= \frac{R_1}{2\pi} \frac{(\frac{x}{2})^{2n-1}}{n!(n+1)!} \left[2n \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m+2} \left\{ \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2m+2)\Gamma(m+n+2)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2n \frac{\Gamma(m+\frac{5}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(2m+3)\Gamma(m+n+2)} \right\} \right] = \frac{R_1}{2} \frac{(\frac{x}{2})^{2n-1}}{n!(n+1)!} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} x^{2m+2} \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(2m+3)\Gamma(m+n+1)} \right] =$$

$$= \frac{R_1}{2\pi} \frac{(\frac{x}{2})^{2n-1}}{n!(n+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(2m+1)\Gamma(m+n)} =$$

$$= \frac{R_1}{2\pi} \frac{(\frac{x}{2})^{2n-1}}{n!(n+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\tfrac{x}{2})^{2m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{m!\,\Gamma(m+n)} ,$$

wegens de verdubbelingsformule voor Γ-functies (Whittaker and Watson, Modern Analysis, p.240).

Tenslotte volgt nu

$$\beta_n = \frac{R_1}{2\pi} \frac{(\frac{x}{2})^{2n-1}}{n!(n+1)!} (\tfrac{2}{x})^{n-1} \Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{(\frac{x}{2})^{n-1+2m}}{m!(m+n-1)!} =$$

$$= \frac{R_1}{2\pi} \Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) (\tfrac{x}{2})^n J_{n-1}(x) .$$

We substitueren dit resultaat in (1). We zien dan

$$A_\varphi = \frac{2\pi}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2}) \left(\frac{R_1}{2}\right)^{n+1}}{\Gamma(\frac{1}{2})n!(n+1)!} \left(\frac{a_1}{R_1}\right)^{2n} \int_0^\infty e^{-zt} J_1(rt)J_{n-1}(R_1 t)t^n \, dt .$$

Zij de magnetische flux door een cirkelvormig stroomdraadje in de tweede geleider dM, dan is

$$dM = \frac{dS_2}{\pi a_2^2} \frac{2\pi r_2}{c} A_\varphi(z,r_2) \ ,$$

dus

$$M = \iint\limits_{S_2} \frac{2\pi r_2}{\pi a_2^2} \frac{1}{c} A_\varphi(z,r_2) dS_2 \ . \tag{2}$$

Substitutie van het hierboven gevondene in (2) levert

$$M = \frac{4\pi^2}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\left(\frac{R_1}{2}\right)^{n+1}}{\Gamma(\frac{1}{2})n!(n+1)!} \left(\frac{a_1}{R_1}\right)^{2n} \int_0^\infty e^{-dt} J_{n-1}(R_1t)t^n\, dt \ \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\pi a_2^2} \iint\limits_{S_2} e^{z_2 t} J_1(r_2 t) r_2 dS_2 \ .$$

Daar

$$\frac{1}{\pi a_2^2} \iint\limits_{S_2} e^{z_2 t} J_1(r_2 t) r_2 dS_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})\left(\frac{R_2}{2}\right)^{m+1}}{\Gamma(\frac{1}{2})m!(m+1)!} \left(\frac{a_2}{R_2}\right)^{2m} t^{2m} J_{m-1}(R_2 t)$$

volgt tenslotte, als we stellen

$$M_{n,m} \equiv \frac{4\pi}{c^2} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})}{n!m!(n+1)!(m+1)!} \left(\frac{R_1}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{R_2}{2}\right)^{m+1} \int_0^\infty e^{-dt} J_{n-1}(R_1t) J_{n-1}(R_2t) t^{m+n}\, dt \ ,$$

$(M_{n,m}(d;R_1,R_2) = M_{m,n}(d;R_2,R_1))$:

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} M_{n,m} \left(\frac{a_1}{R_1}\right)^{2n} \left(\frac{a_2}{R_2}\right)^{2m} \ .$$

We moeten tenslotte nog nagaan wanneer de reeks die we krijgen convergeert. Allereerst bekijken we

$$P = \int_0^\infty e^{-zt} J_1(rt)J_{n-1}(R_1t)t^n\, dt .$$

Bekend is (zie Watson l.c. p.31) dat $|J_p(z)| \leq 1$ (z reëel), dus

$$|P| \leq \int_0^\infty t^n e^{-zt} dt = \frac{n!}{z^{n+1}} ,$$

waaruit volgt

$$|A_\varphi| \leq \frac{2\pi}{c} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\left(\frac{R_1}{2}\right)^{n+1}}{\Gamma(\frac{1}{2})n!(n+1)!} \left(\frac{a_1}{R_1}\right)^{2n} \frac{n!}{z^{n+1}} .$$

Deze reeks is convergent voor $z > \frac{a_1^2}{2R_1}$, zoals direct is in te zien.

We bekijken nog enkele $M_{m,n}$'s en vragen ons af of deze mogelijk in elliptische integralen zijn uit te drukken.

We hebben afgeleid

$$M_{0,0} = \frac{4\pi^2}{c^2} R_1R_2 \int_0^\infty e^{-dt} J_1(R_1t)J_1(R_2t)dt ,$$

$$M_{1,0} = \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{1}{8} R_1^2R_2 \int_0^\infty e^{-dt} J_0(R_1t)J_1(R_2t)tdt .$$

Nu is

$$\int_0^\infty e^{-dt} J_0(R_1t)J_1(R_2t)tdt = -\frac{\partial}{\partial R_2} \int_0^\infty e^{-dt} J_0(R_1t)J_0(R_2t)dt .$$

Verder is (zie Byrd-Friedman l.c. p.176):

$$\int_0^\infty e^{-dt} J_0(R_1t)J_0(R_2t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv}{(d^2 + R_1^2 - 2R_1R_2 \cos v + R_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi} \frac{kK}{\sqrt{R_1R_2}}$$

met

$$k^2 = \frac{4R_1R_2}{d^2 + (R_1 + R_2)^2} .$$

Ook geldt (Byrd-Friedman l.c. p.282)

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k} .$$

Daar

$$\frac{\partial k}{\partial R_2} = \frac{k}{2R_2}\left\{1 - \frac{R_1 + R_2}{2R_1} k^2\right\}$$

volgt tenslotte

$$M_{1,0} = \frac{\pi}{4c^2}\frac{R_1}{R_2}\sqrt{R_1R_2}\, k\left[K - E + \frac{\frac{1}{2}k^2E}{1-k^2}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\right] .$$

Men verkrijgt $M_{0,1}$ uit deze formule door R_1 en R_2 te verwisselen.

$$M_{2,0} = \frac{4\pi^2}{c^2}\frac{1}{192} R_1^3R_2 \int_0^\infty e^{-dt} J_1(R_1t)J_1(R_2t)t^2dt ;$$

$$M_{1,1} = \frac{4\pi^2}{c^2}\frac{1}{64} R_1^2R_2^2 \int_0^\infty e^{-dt} J_0(R_1t)J_0(R_2t)t^2dt \qquad \text{etc.}$$

Men vindt $M_{2,0}$ door de uitdrukking voor $M_{0,0}$ tweemaal naar d te differentiëren en $M_{1,1}$ door $M_{0,0}$ eerst naar R_1 en daarna naar R_2 te differentiëren, waarbij we verder gebruik maken van

$$\frac{\partial}{\partial d} = -\frac{k^3d}{4R_1R_2}\frac{\partial}{\partial k} \qquad \text{en} \qquad \frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k} .$$

Algemeen geldt:

$$M_{\nu+1,\mu+1} = \frac{2^{2-\nu-\mu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\pi(\nu+1)!(\mu+1)!(\nu+2)!(\mu+2)!} R_1^{2\nu+2}\, R_2^{2\mu+2} .$$

$$\cdot \left(-\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial R_1}\right)^\nu \left(-\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial R}\right)^\mu \left(\frac{M_{1,1}}{R_1^2R_2^2}\right) .$$

Een beschouwing over deze materie kan men vinden in
C.J. Bouwkamp: On the mutual inductance of two parallel coaxial circles of circular cross-section (Indag. Math. vol. X, fasc. 5, 1948).

Hoofdstuk IX

Impedantie van een akoustische straler, bestaande uit een ring met stralen a en b.

Beschouw eerst een oneindige wand met een opening F. We nemen aan dat de geluidsbron aanleiding geeft tot een zekere snelheidsverdeling van de deeltjes, zodanig dat op de wand $v_n = 0$ en in F v_n is voorgeschreven.
De wand is gelegen in het vlak $z = 0$, de as van de cirkel zij de z-as.

De bewegingsvergelijking is $\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$, met eindige Φ.

Verder is de druk $f = \gamma\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, de snelheid $\vec{v} = -\nabla\Phi$. We beperken ons tot $\Phi = \varphi e^{-i\omega t}$, dan is het probleem herleid tot:

$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \quad (k = \frac{\omega}{c})$,

v_n voorgeschreven,

φ eindig, de voortgaande golf voldoet aan de uitstralingsvoorwaarde van Sommerfeld:

$$\varphi \sim \frac{e^{ikR}}{R}\left(\chi(\psi,\theta) + O\left(\frac{1}{R}\right)\right) , \tag{1}$$

waarbij R, ψ, θ bolcoördinaten zijn.
Verder is

$$P = -\,ik c\gamma\varphi e^{-i\omega t} \qquad \text{met } p = -\,ikc\gamma\varphi$$

$$\vec{V} = -\,\nabla\varphi e^{-i\omega t} .$$

Beschouw de functies $\Delta\varphi + k^2\varphi$ en $\Delta g + k^2 g$. Toepassing van de stelling van Green levert

$$\iiint[\varphi(\Delta g + k^2 g) - g(\Delta\varphi + k^2\varphi)]d\tau =$$

$$= \iiint(\varphi\Delta g - g\Delta\varphi)d\tau = -\iint\left(g\,\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\,\frac{\partial g}{\partial n}\right)d\sigma . \tag{2}$$

Beschouw nu de punten $\underline{x}$ en $\underline{x}'$, die ten opzichte van de wand elkaars gespiegelde zijn en sluit de wand af met een halve bol met straal R ($\underline{\xi}$ ligt op de bol) en n naar buiten gericht. Bepaal nu g zo, dat geldt:

$$\Delta g_{(\underline{\xi})} + k^2 g_{(\underline{\xi})} = - \delta(\underline{x} - \underline{\xi})$$

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 0 \ .$$

De oplossing hiervan is

$$g = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2}\right) \equiv g_1 + g_2 \ .$$

Hierbij zijn r_1 en r_2 de afstanden van $\underline{\xi}$ tot $\underline{x}$ resp. $\underline{x}'$.
Er volgt nu door substitutie in (2)

$$\varphi(\underline{x}) = \iint\limits_{\zeta=0} g \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma + \iint\limits_{\frac{1}{2}\ \mathrm{bol}} (g \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial g}{\partial n}) d\sigma \ .$$

Verder is

$$\iint\limits_{\zeta=0} g \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = \frac{2}{4\pi} \iint\limits_{F} \frac{e^{ikr}}{r}\, v\, d\sigma \ . \qquad (3)$$

We bewijzen nog dat de integraal over de halve bol naar nul gaat als $R \to \infty$.
Ga uit van

$$\varphi \simeq \frac{e^{ikR_1}}{R_1} (\chi(\psi_1,\theta_1) + O(\frac{1}{R_1}))$$

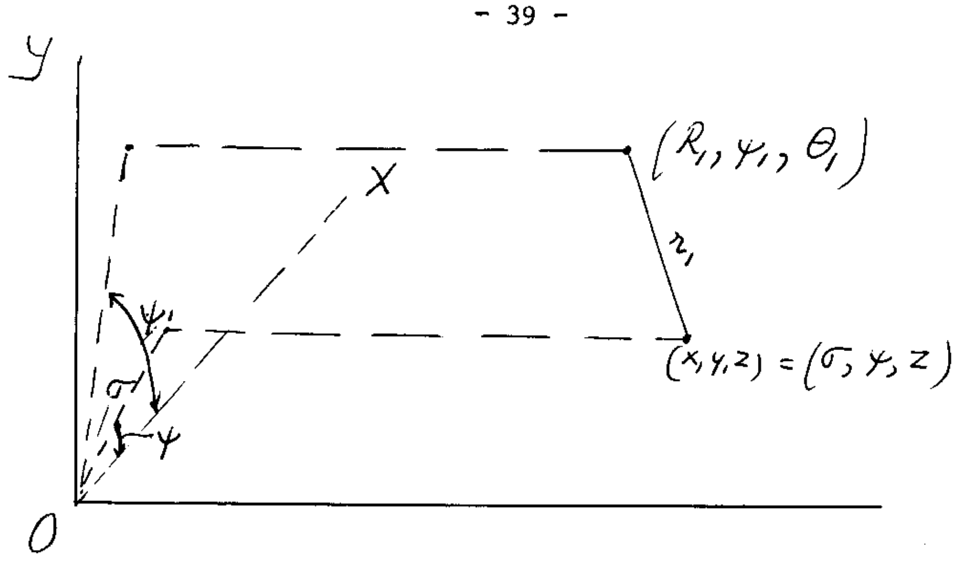
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial R_1} \simeq \frac{ike^{ikR_1}}{R_1} (\chi(\psi_1,\theta_1) + O(\frac{1}{R_1}))$$

$$g_1 = \frac{e^{ikr_1}}{4\pi r_1} \simeq \frac{e^{ikR_1}}{4\pi R_1} (e^{-ikc_1} + O(\frac{1}{R_1})) \ ,$$

waarbij we c_1 nog nader definiëren, dus

$$\frac{\partial g_1}{\partial n} = \frac{\partial g_1}{\partial R_1} = \frac{ike^{ikR_1}}{4\pi R_1} (e^{-ikc_1} + O(\frac{1}{R_1})) \ .$$

Analoog voor g_2.
We leiden eerst een ontwikkeling voor g_1 af.



Uit de figuur blijkt dat

$$r_1^2 = (R_1 \cos \theta_1 - z)^2 + (R_1 \sin \theta_1)^2 + \sigma^2 - 2\sigma R_1 \sin \theta \cos(\psi - \psi_1) =$$

$$= R_1^2 - 2R_1(z \cos \theta_1 + \sigma \sin \theta_1 \cos(\psi - \psi_1)) + \sigma^2 + z^2 \ .$$

Noem $c_1 = z_1 \cos \theta_1 + \sigma \sin \theta_1 \cos(\psi - \psi_1)$, dan is

$$r_1^2 = R_1^2 - 2R_1 c_1 + \sigma^2 + z^2 \quad \text{dus} \quad r_1 \approx R_1\left(1 - \frac{c_1}{R_1} + O\left(\frac{1}{R_1^2}\right)\right)$$

waaruit

$$\frac{e^{ikr_1}}{r_1} \approx \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left(e^{-ikc_1} + O\left(\frac{1}{R_1}\right)\right)$$

en analoog voor g_2.
Conclusie:

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial g}{\partial n} = O\left(\frac{1}{R_1^3}\right) \ ,$$

waarmee het gestelde bewezen is en

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{e^{ikr}}{r} v \, d\sigma \ .$$

We beschouwen de uitgestraalde energie W. Stel daartoe

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$$
$$p = p_1 + ip_2 = c\gamma k(\varphi_2 - i\varphi_1) .$$

Dan is

$$\mathrm{Re}\,\Phi = \varphi_1 \cos\omega t + \varphi_2 \sin\omega t \; ; \quad \mathrm{Re}\,P = c\gamma k\{\varphi_2 \cos\omega t - \varphi_1 \sin\omega t\} .$$

Verder is $V = ve^{-i\omega t}$, dus

$$\mathrm{Re}\,V = \mathrm{Re}\,(v_1 + iv_2)(\cos\omega t - i\sin\omega t) = v_1\cos\omega t + v_2 \sin\omega t .$$

Is dW de uitgestraalde energie in $z \geq 0$ tussen t en t + dt, dan is

$$\frac{dW}{dt} = \iint_F (\mathrm{Re}\,P)(\mathrm{Re}\,V)df = \iint_F (p_1 \cos\omega t + p_2 \sin\omega t)(v_1 \cos\omega t + v_2 \sin\omega t)df ,$$

zoals direct blijkt. Stellen we nog $v_1 = v$ en $v_2 = 0$, dan volgt er

$$\frac{dW}{dt} = \iint_F p_1 v \cos^2\omega t\, df + \iint_F p_2 v \sin\omega t \cos\omega t\, df \quad \text{of} \quad \frac{dW}{dt} = w_1 + iw_2 ,$$

waarbij w_1 en w_2 gegeven zijn door

$$w = w_1 + iw_2 = \iint_F (p_1 + ip_2)v df = \iint_F pv\, df .$$

Hierbij is w_1 een maat voor de uitgestraalde energie en w_2 de fluctuatie tussen bron en stralingsveld.

Met (3) volgt nu

$$w = -\frac{ikc\gamma}{2\pi} \iint_F v \iint_F \frac{v' e^{iks}}{s} df\, df' \qquad \text{met} \quad s = |\xi - \xi'|$$

en als de impedantie Z wordt gesteld:

$$Z \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{w}{v^2} = -\frac{ikc\gamma}{2\pi} \iint_F \iint_F \frac{e^{iks}}{s} df\, df' .$$

Verder is

$$pv = \tfrac{1}{2}(p + \bar{p})v = \tfrac{1}{2}(p\bar{v} + \bar{p}v)$$

omdat v reëel is, dus

$$w_1 = \mathrm{Re} \iint_F pv\, df = \tfrac{1}{2} \iint_F (p\bar{v} + \bar{p}v)df = \tfrac{1}{2}ikc\gamma \iint_F (\varphi \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n} - \bar{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial n})df =$$

$$= \frac{ikc\gamma}{2} \iint_{\frac{1}{2}\,\mathrm{bol}} (\varphi \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n} - \bar{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial n})df = k^2 c\gamma \iint |\chi(\psi,\theta)|^2 d\Omega \qquad (4)$$

wegens de uitstralingsvoorwaarde van Sommerfeld.
We dienen nu nog χ te berekenen. φ is vastgelegd door

a) $$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{e^{ikr}}{r} v \, df$$

en door

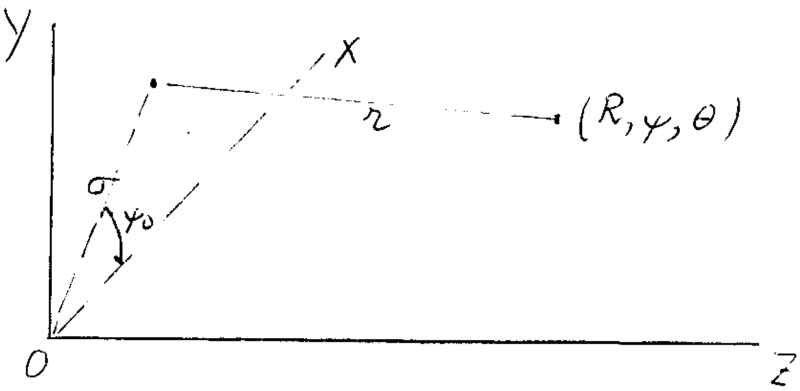
b) $$\varphi \approx \frac{e^{ikR}}{R} \left(\chi(\psi,\theta) + O\left(\frac{1}{R}\right)\right) \qquad (R \to \infty) .$$

Nu is

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{ikR}}{R} \left(e^{-ikc'} + O\left(\frac{1}{R}\right)\right)$$

met

$$c' = \sigma \sin\theta \cos(\psi - \psi_0) ,$$



dus

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{e^{ikR}}{R} \iint_F \left(e^{-ikc'} v + O\left(\frac{1}{R}\right)\right) df ,$$

waaruit

$$\chi(\psi,\theta) = \frac{1}{2\pi} \iint_F e^{-ikc'} v \, df . \tag{5}$$

We kunnen nu w_1 berekenen.

We gaan nu F uitbreiden tot een cirkel met straal A. In de uitbreiding van F nemen we $v = 0$.

Ontwikkel $v(\sigma,\psi_0)$ in een fourierreeks binnen de cirkel.

$$v(\sigma,\psi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(\sigma)\cos m\psi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(\sigma)\sin m\psi_0 ,$$

dan is

$$\chi(\psi,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^A v_m(\sigma)\sigma d\sigma \int_0^{2\pi} e^{-ik\sigma \sin\theta \cos(\psi-\psi_0)} \cos m\psi_0 \, d\psi_0 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^A v_m(\sigma)\sigma d\sigma \int_0^{2\pi} e^{-ik\sigma \sin\theta \cos(\psi-\psi_0)} \sin m\psi_0 \, d\psi_0 .$$

Noem $k\sigma \sin\theta = z$ en stel $\xi = \frac{\pi}{2} - (\psi - \psi_0)$, $d\psi_0 = d\xi$, dan is

$$\chi(\psi,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^A v_m(\sigma)\sigma d\sigma \int_0^{2\pi} e^{-iz\sin\xi} \left(\frac{e^{im(\xi+\psi-\frac{\pi}{2})} + e^{-im(\xi+\psi-\frac{\pi}{2})}}{2} \right) d\xi .$$

De tweede integraal kan geschreven worden als

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iz\sin\xi}\, e^{im\xi}\, d\xi\, \frac{e^{im\psi}\, e^{-im\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iz\sin\xi}\, e^{-im\xi}\, d\xi\, \frac{e^{-im\psi}\, e^{im\frac{\pi}{2}}}{2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}J_m(z)e^{im\psi}\, i^{-m} + \tfrac{1}{2}J_m(-z)e^{-im\psi}\, i^{m} = i^{-m}\, J_m(z)\cos m\psi ,$$

dus

$$\chi(\psi,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (i)^{-m} \cos m\psi \int_0^A v_m(\sigma)\sigma d\sigma\, J_m(k\sigma\sin\theta)d\sigma .$$

Voeren we nog in

$$f_m(\lambda) = \int_0^A v_m(\sigma)\sigma\, J_m(\lambda\sigma)d\sigma ,$$

dan is

$$w_1 = \mathrm{Re}\, w = \sum_{m=0}^{\infty} k^2 c\gamma \frac{2\pi}{\varepsilon_m} \int_0^{\pi/2} f_m^2(k \sin\theta)\sin\theta\, d\theta \quad \text{met} \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}$$

of

$$w_1 = 2\pi kc\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \int_0^k \frac{f_m^2(\lambda)\lambda d\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} .$$

Om w te berekenen bepalen we eerst φ. Uit het voorgaande weten we reeds

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint_F v \frac{e^{ikr}}{r} df .$$

Nu is (Watson, p.416)

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0 e^{-\mu z} J_0(s\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\mu}$$

met

$$r^2 = s^2 + z^2 \; ; \qquad \mu = \begin{cases} (\lambda^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} & , \lambda > k \\ - i(k^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} & , 0 < \lambda < k , \end{cases}$$

dus

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint_F v \left[\int_0^{\infty} e^{-\mu z} J_0(s\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \right] df .$$

Verder is

$$J_0[(z^2 + Z^2 - 2zZ \cos\varphi)^{\frac{1}{2}}] = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(z) J_m(Z) \cos m\varphi$$

(Watson, p.358) en daar $s^2 = \rho^2 + \sigma^2 - 2\rho s \cos(\psi - \psi_0)$ volgt er

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint_F \left\{ v \int_0^{\infty} e^{-\mu z} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\sigma) \cos m(\psi - \psi_0) \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \right\} df .$$

Schrijven we nog

$$v(\sigma,\psi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos n\psi_0 ,$$

dan is

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^A \left[\sum_{n=0}^{\infty} v_n(\sigma) \int_0^{\infty} \left[e^{-\mu z} \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\sigma) \varepsilon_m \, \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \int_0^{2\pi} \cos m(\psi - \psi_0) \cos n\psi_0 \, d\psi_0 \, \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \right] \sigma d\sigma \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^A \sum_{n=0}^{\infty} v_m(\sigma) \left[\int_0^{\infty} e^{-\mu z} J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\sigma) \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \cdot 2\pi \cos m\psi \right] \sigma d\sigma =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\psi \int_0^{\infty} e^{-\mu z} J_m(\lambda\rho) \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \int_0^A v_m(\sigma) J_m(\lambda\sigma) \sigma d\sigma$$

of

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\psi \left[\int_0^{\infty} e^{-\mu z} J_m(\lambda\rho) f_m(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \right].$$

Daar

$$w = \iint_F pv \, df = - ikc\gamma \iint_F v\varphi \, df$$

volgt nog als we $\psi_0 = 0$ stellen

$$w = - ikc\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{\lambda f_m(\lambda) d\lambda}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^A J_m(\lambda\rho) v_n(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos n\psi \cos m\psi \, d\psi \right] =$$

$$= - ikc\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{\varepsilon_m} \int_0^{\infty} \frac{\lambda f_m^2(\lambda)}{\mu} d\lambda \right],$$

waaruit

$$w_1 = 2\pi kc \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \int_0^k \frac{f_m^2(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}$$

en

$$w_2 = - 2\pi kc \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \int_0^{\infty} \frac{f_m^2(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}.$$

We gaan nu over tot het beschouwen van een ringvormige opening met stralen a en b, waarbij we stellen $v(\sigma,\psi) = v = \text{constant}$ en $a > b$. Dan is

$$f_0(\lambda) = v \int_b^a J_0(\lambda\sigma)\sigma d\sigma$$

en

$$w = -2\pi ikc\gamma \int_0^\infty \frac{f_0^2(\lambda)\lambda d\lambda}{\mu} ,$$

dus

$$Z = \frac{w}{v^2} = -2\pi ikc\gamma \int_0^\infty \left\{ \int_b^a J_0(\lambda\sigma)\sigma d\sigma \right\}^2 \frac{\lambda d\lambda}{\mu} .$$

Nu is

$$\int_b^a J_0(\lambda\sigma)\sigma d\sigma = \frac{a}{\lambda} J_1(\lambda a) - \frac{b}{\lambda} J_1(\lambda b) ,$$

dus

$$Z = -2\pi ikc\gamma \int_0^\infty \frac{\{a^2 J_1^2(\lambda a) - 2ab J_1(\lambda a) J_1(\lambda b) + b^2 J_1^2(\lambda b)\}}{\lambda\mu} d\lambda .$$

Voer nog in $ks = \lambda$, $\alpha = ka$ en $\beta = kb$, dan is

$$Z = -\frac{2\pi ic\gamma}{k^2} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 J_1^2(\alpha s) - 2\alpha\beta J_1(\alpha s) J_1(\beta s) + \beta^2 J_1^2(\beta s)}{s\sqrt{s^2 - 1}} ds$$

met

$$\sqrt{s^2 - 1} = \begin{cases} (s^2 - 1)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } s > 1 \\ -i(1 - s^2)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } 0 < s < 1 , \end{cases}$$

dus

$$Z = c\gamma\lambda^2 \left[\frac{\alpha^2}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{J_1^2(\alpha s)}{s\sqrt{s^2 - 1}} ds - \frac{2\alpha\beta}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha s) J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2 - 1}} ds + \frac{\beta^2}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{J_1^2(\beta s)}{s\sqrt{s^2 - 1}} ds \right] .$$

Hierbij is λ de golflengte.

Splits Z in 3 stukken, die we I_1, I_2 en I_3 noemen, dan is

$$Z = \lambda^2 c\gamma[I_1 - 2I_2 + I_3] \ .$$

We zullen nu trachten I_1, I_2 en I_3 te bepalen.

Berekening van I_1

$$\frac{2\pi i}{\alpha^2} I_1 = \int_0^\infty \frac{J_1^2(\alpha s)}{s\sqrt{s^2-1}}\, ds = \int_0^1 \frac{J_1^2(\alpha s)}{s\sqrt{s^2-1}}\, ds + \int_1^\infty \frac{J_1^2(\alpha s)}{s\sqrt{s^2-1}}\, ds \ .$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{J_1^2(\alpha s)}{s\sqrt{s^2-1}}\, ds = -\frac{1}{i}\int_0^1 \frac{J_1^2(\alpha s)}{s\sqrt{1-s^2}}\, ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{J_2(2\alpha s\cos\theta)}{-is(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}\, d\theta \quad \text{(Watson, p.150)} =$$

$$= -\frac{2}{\pi i}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{J_2(2\alpha s\cos\theta)}{s\sqrt{1-s^2}}\, ds = -\frac{2}{\pi i}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{J_2(2\alpha s\cos\theta\sin\varphi)}{\sin\varphi}\, d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{\pi i}\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(m+2)!m!}\alpha^{2m+2}\int_0^{\pi/2}\cos^{2m+2}\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}\varphi\, d\varphi \ ,$$

als we de reeksontwikkeling voor J_2 toepassen.
Na berekening der integralen volgt nu

$$I_{11} = -\frac{2}{\pi i}\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m\alpha^{2m+2}}{m!(m+2)!}\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\frac{\pi}{2}\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} =$$

$$= -\frac{1}{2i}\sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^{m-1}\alpha^{2m}}{m!(m+1)!} = -\frac{1}{2i}\left\{\frac{J_1(2\alpha)}{\alpha} - 1\right\} \ .$$

$$I_{12} = \int_1^\infty \frac{J_1(\alpha s)}{s\sqrt{s^2-1}}\, ds = \frac{H_1(2\alpha)}{2\alpha} \ ,$$

waarin H_1 de Struve-functie is (zie Watson l.c., p.140, 328, 391, 417).
Tenslotte volgt

$$I_1 = \frac{\alpha^2}{4\pi i}\left(\frac{H_1(2\alpha)}{2\alpha} + i\left(1 - \frac{J_1(2\alpha)}{\alpha}\right)\right) \ .$$

Analoog volgt voor I_3:

$$I_3 = \frac{\beta^2}{4\pi i}\left\{\frac{H_1(2\beta)}{2\beta} + i\left[1 - \frac{J_1(2\beta)}{\beta}\right]\right\} .$$

Berekening van I_2

We gaan uit van de formule (zie Watson, l.c. p.367):

$$\int_0^\pi \frac{C_\nu\{(Z^2+z^2-2zZ\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\}C_m^\nu(\cos\varphi)\sin^2\varphi}{(Z^2+z^2-2zZ\cos\varphi)^{\frac{1}{2}\nu}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi\Gamma(2\nu+m)}{2^{\nu-1}\, m!\,\Gamma(\nu)}\;\frac{C_{\nu+m}(Z)J_{\nu+m}(z)}{Z^\nu\, z^\nu} .$$

Hierbij zijn $C_{\nu+m}(z)$ cylinderfuncties (voor de definitie zie Watson l.c., p. 82/83) en $C_m^\nu(\cos\varphi)$ de coëfficiënt van α^m in $(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^\nu$. Neem $\nu = 1$, $m = 0$, dan is $C_0^1 = 1$ en $C_\nu = J_1$, waaruit volgt

$$J_1(\alpha s)J_1(\beta s) = \frac{\alpha\beta}{\pi}\, s^2 \int_0^\pi \frac{J_1(s(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}})}{s(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}\sin^2\varphi\, d\varphi .$$

Stel $s = \sin\theta$ dan is

$$A = \int_0^1 \frac{J_1(\alpha s)J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2-1}}\,ds = -\frac{\alpha\beta}{\pi i}\int_0^\pi d\int_0^{\pi/2}\frac{J_1(\sin\theta(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}})}{(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}\sin^2\varphi\, d\theta .$$

Met behulp van de machtreeksontwikkeling voor $J_1(z)$ volgt nu

$$A = -\frac{\alpha\beta}{i\pi}\int_0^\pi d\varphi\int_0^{\pi/2}\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{2m+1}\,\frac{(-1)^m}{m!\,(m+1)!}\,(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^m\sin^2\varphi\,\sin^{2m+1}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{i\alpha\beta}{\pi}\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\,\frac{1}{2^{2m+1}}\,(\frac{2m}{2m+1}\cdots\frac{2}{3})\int_0^\pi(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^m\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{i\alpha\beta}{\pi}\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(2m+2)!}\int_0^\pi(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^m\sin^2\varphi\, d\varphi .$$

Deze integraal berekenen we als volgt

$$\int_0^\pi (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi)^m \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k (2\alpha\beta)^k (\alpha^2 + \beta^2)^{m-k} \cdot$$

$$\cdot \cos^k\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi = \sum_{j=0}^{[m/2]} \binom{m}{2j}(2\alpha\beta)^{2j}(\alpha^2 + \beta^2)^{m-2j} \int_0^\pi \cos^{2j}\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \sum_{j=0}^{[m/2]} 2\binom{m}{2j}(2\alpha\beta)^{2j}(\alpha^2 + \beta^2)^{m-2j}\, B(j + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})$$

voor k even en = 0 voor k oneven.
Tenslotte

$$\int_0^1 \frac{J_1(\alpha s)J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2 - 1}}\, ds = \frac{i\alpha\beta}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!} \sum_{j=0}^{[m/2]} \binom{m}{2j}(2\alpha\beta)^{2j}(\alpha^2 + \beta^2)^{m-2j}\, B(j + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) =$$

$$= \frac{i\alpha\beta}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m + 2)!} \alpha^{2m} \sum_{j=0}^{[m/2]} \binom{m}{2j} \left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)^{2j} \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{m-2j} B(j + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) =$$

$$= \frac{i\alpha\beta}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m}}{(2m + 2)!} \sum_{j=0}^{[m/2]} \binom{m}{2j} \left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)^{2j} B(j + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) \sum_{k=0}^{m-2j} \binom{m-2j}{k} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{i\alpha\beta}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m}}{(2m + 2)!} T_m \,.$$

Hierbij is

$$T_m = \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{k=0}^{m-2j} \frac{m!}{(2j)!(m - 2j)!} \frac{(m - 2j)!}{k!(m - 2j - k)!} 2^{2j} B(j + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) \frac{\beta^{2(k+j)}}{\alpha^{2(k+j)}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{k=0}^{m-2j} \frac{m!}{(2j)!} 2^{2j} \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \frac{2j - 1}{2} \cdots \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}}{k!(m - 2j - k)!(j + 1)!} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2(k+j)} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{k=0}^{m-2j} \frac{m!}{j!(j + 1)!} \frac{1}{k!(m - 2j - k)!} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2(k+j)} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{c=j}^{m-j} \frac{m!}{j!(j + 1)!} \frac{1}{(c - j)!(m - c - j)!} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2c} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{c=0}^{m} \sum_{j=0}^{\substack{c \text{ als } c\le[m/2] \\ m-c \text{ als } c>[m/2]}} \frac{m!(m-c)!}{(m-c)!c!(m-c-j)!j!} \frac{(c+1)!}{(j+1)!(c-j)!(c+1)} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2c} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{c=0}^{m} \frac{1}{c+1} \binom{m}{c} \sum_{j=0}^{c} \binom{m-c}{j} \binom{c+1}{j+1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2c} = \frac{\pi}{2} \sum_{c=0}^{m} \frac{1}{c+1} \binom{m}{c} \binom{m+1}{c} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2c} ,$$

gebruik makend van

$$\sum_{j=0}^{c} \binom{m}{j} \binom{n}{c-j} = \binom{m+n}{c} .$$

Hieruit volgt:

$$\int_0^1 \frac{J_1(\alpha s) J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2-1}} ds = \frac{i\alpha\beta}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m}}{(2m+2)!} \sum_{c=0}^{m} \binom{m}{c} \binom{m+1}{c} \frac{1}{c+1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2c} .$$

De laatste som laat zich nog herleiden tot

$$\sum_{c=0}^{m} \frac{[m \ldots (m-c+1)][(m+1) \ldots (m+1-c+1)]}{c!(c+1)!} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2c} = {}_2F_1\left(-m,-m-1;2;\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) ,$$

dus tenslotte is

$$I_{2,1} = \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_0^1 \frac{J_1(\alpha s) J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2-1}} ds = \frac{\alpha^2\beta^2}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m}}{(2m+2)!} {}_2F_1\left(-m,-m-1;2;\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) .$$

We berekenen nu nog

$$I_{2,2} = \int_1^{\infty} \frac{J_1(\alpha s) J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2-1}} ds .$$

Deze is gelijk aan

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha\sqrt{t^2+1}) J_1(\beta\sqrt{t^2+1})}{t^2+1} dt .$$

Op analoge wijze als hierboven volgt nu

$$I_{2,2} = \frac{\alpha\beta}{\pi} \int_0^{\infty} dt \int_0 \frac{J_1\{(t^2+1)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\}}{(t^2+1)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}} \sin^2\varphi \, d\varphi .$$

Zij $(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}} \equiv \varepsilon$, dan is

$$\frac{J_1(\varepsilon\sqrt{t^2+1})}{\varepsilon\sqrt{t^2+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} (\tfrac{1}{2}\varepsilon^2)^m (\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(m+1)} J_{m+1}(\varepsilon t) ,$$

(Watson l.c., p.142 (16)) waaruit volgt

$$I_{2,2} = \frac{\alpha\beta}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} (\tfrac{1}{2}\varepsilon^2)^m \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{J_{m+1}(\varepsilon t)}{(\varepsilon t)^{m+1}} d(\varepsilon t) \sin^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon^{2m-1}}{2^m} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{m+1}\,\Gamma(m+\frac{3}{2})} \sin^2\varphi \, d\varphi ,$$

wegens Watson p.391 (1), dus

$$I_{2,2} = \frac{\alpha\beta}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{2\alpha\beta\cos}{\alpha^2+\beta^2}\right)^{m-\frac{1}{2}} \sin^2\varphi \, d\varphi .$$

Op analoge wijze als we eerder deden kan de integraal worden berekend en uitgedrukt worden in een hyperharmonische reeks. Er volgt tenslotte

$$I_{2,2} = \frac{\alpha\beta}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m+1}}{(2m+1)!} \; {}_2F_1\left(-m-\tfrac{1}{2}, -m+\tfrac{1}{2}; 2; (\tfrac{\beta}{\alpha})^2\right) ,$$

waaruit

$$I_2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\pi i} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \alpha^{2m-1} \; {}_2F_1\left(-m-\tfrac{1}{2}, -m+\tfrac{1}{2}; 2; (\tfrac{\beta}{\alpha})^2\right) + \right.$$

$$\left. + \, i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!} \alpha^{2m} \; {}_2F_1\left(-m-1, m; 2; (\tfrac{\beta}{\alpha})^2\right) \right\} .$$

Resumerend

$$Z = c\gamma\left\{\pi a^2\left(1 - \frac{J_1(2ka)}{ka}\right) + \pi b^2\left(1 - \frac{J_1(2kb)}{kb}\right) - \right.$$

$$\left. - \, 2\pi b^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(ka)^{2m+2}}{(2m+2)!} \; {}_2F_1\left(-m-1, -m; 2; (\tfrac{b}{a})^2\right)\right\} + ic\gamma\left\{- \pi a^2 \frac{H_1(2ka)}{ka} - \right.$$

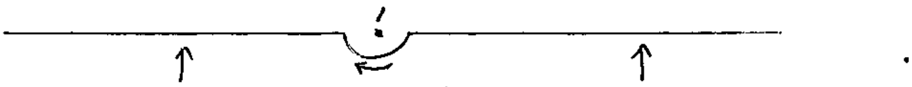
$$\left. - \, \pi b^2 \frac{H_1(2kb)}{kb} + 2\pi b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (ka)^{2m+1}}{(2m+1)!} \; {}_2F_1\left(-m-1, -m+\tfrac{1}{2}; 2; (\tfrac{b}{a})^2\right)\right\} .$$

Enkele opmerkingen

Hiervoor is berekend

$$\frac{Z}{c\gamma\lambda^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{[\alpha J_1(\alpha s) - \beta J_1(\beta s)]^2}{s\sqrt{s^2 - 1}} \qquad (\alpha = ka,\ \beta = kb)\ ,$$

waarbij de wortel als volgt is gedefinieerd:



$$\sqrt{s^2 - 1} = -\,i(1 - s^2)^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad \sqrt{s^2 - 1} = (s^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

We beschouwen nog eens de term $\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha s)J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2 - 1}}\, ds$ en definiëren

$$F \equiv \int_0^1 \frac{J_1(\alpha s)J_1(\beta s)}{s\sqrt{1 - s^2}}\, ds \ ; \qquad G \equiv \int_1^\infty \frac{J_1(\alpha s)J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2 - 1}}\, ds\ .$$

Nu is

$$\tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha s)J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2 - 1}}\, ds = F - iG\ .$$

Reeds is afgeleid

$$F - iG = -\frac{\alpha}{2\beta} \sum_{m=0}^\infty \frac{(i\beta)^m}{(m!)}\ {}_2F_1\left(-\tfrac{1}{2}m, -\tfrac{1}{2}m+1; 2; (\tfrac{\alpha}{\beta})^2\right)\ . \qquad \text{(A)}$$

We kunnen deze uitdrukking nog vervangen door

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u\ E\{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos u)^{\frac{1}{2}}\}du \qquad \text{(B)}$$

met

$$E(z) \equiv \int_0^z \frac{1 - e^{it}}{t}\, dt$$

of door partiële integratie toe passen

$$F - iG = \frac{\alpha\beta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 u \left\{ \frac{1 - \exp(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos u)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos u} \right\} du \ . \qquad \text{(C)}$$

Om (B) te bewijzen gaan we uit van

$$J_1(\alpha s)J_1(\beta s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_0(qs) \cos u \, du \quad \text{met} \quad q = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos u)^{\frac{1}{2}}$$

[Dit kan bewezen worden door de formule (1) (Watson blz. 358) te vermenigvuldigen met cos u en dan te integreren van $-\pi$ naar π.]

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u [J_0(qs) - 1] du \ ,$$

waaruit volgt

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u \, du \int_0^1 \frac{J_0(qs) - 1}{s\sqrt{1 - s^2}} ds \ .$$

Zij

$$L(q) = \int_0^1 \frac{J_0(qs) - 1}{s\sqrt{1 - s^2}} ds \ ,$$

dan is $L(0) = 0$ en

$$L'(q) = - \int_0^1 \frac{J_1(qs)}{\sqrt{1 - s^2}} ds = \text{(d.m.v. machtreeksontwikkeling)}$$

$$= \frac{\cos q - 1}{q}$$

dus

$$L(q) = - \int_0^q \frac{1 - \cos t}{t} dt \ .$$

Op analoge wijze vinden we

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \ \mathrm{Si}\{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos t)^{\frac{1}{2}}\} dt$$

met

$$Si(q) = \int_0^q \frac{\sin t}{t}\, dt$$

Hieruit volgt

$$F - iG = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u \left[\int_0^q \frac{1 - \cos t}{t}\, dt - i \int_0^q \frac{\sin t}{t}\, dt \right] du =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^q \frac{1 - e^{it}}{t}\, dt \right] \cos u\, du = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u\, E(q) du$$

als we definiëren

$$E(q) = \int_0^q \frac{1 - e^{it}}{t}\, dt \qquad \text{met} \quad q = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos u)^{\frac{1}{2}} .$$

Ook dit resultaat is nog om te vormen. Ga daarbij uit van (C). Allereerst is duidelijk

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 u}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos u}\, du = \frac{\pi}{2\beta^2} \qquad (\alpha \leq \beta) .$$

Immers, stellen we $z = e^{iu}$, dus

$$\sin u = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \; ; \quad \cos u = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \; ; \quad du = \frac{dz}{iz} ,$$

dan volgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 u}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos u}\, du = \frac{1}{8} \int_{|z|=1} \frac{-\left(z - \frac{1}{z}\right)^2}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \qquad \left(p = \frac{\alpha}{\beta} < 1\right)$$

$$= \frac{1}{8p\beta^2 i} \int_{|z|=1} \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(z - p)\left(z - \frac{1}{p}\right)}\, dz = \frac{1}{8\beta^2 ip} \int_{|z|=1} \left[A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z - p} + \frac{E}{z - \frac{1}{p}} \right] dz$$

met $B = p + \frac{1}{p}$ en $D = p - \frac{1}{p}$. Hieruit volgt direct het gestelde.

Rest ons nog te berekenen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(iq)\sin^2 u}{q^2}\,du = 2\int_0^{\pi} \frac{\exp(iq)\sin^2 u}{q^2}\,du \;.$$

Uit $q^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos u$ volgt $qdq = \alpha\beta \sin u\, du$, dus

$$\int_0^{\pi} \frac{\exp(iq)\sin^2 u}{q^2}\,du = \int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} \frac{e^{iq}}{q^2}\,\frac{qdq}{\alpha\beta}\,\sin u =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} \frac{e^{iq}}{q}\sin u\, dq = \quad \left(\sin u = \sqrt{1 - \frac{(\alpha^2+\beta^2-q^2)^2}{4\alpha^2\beta^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2\beta^2}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} \frac{e^{iq}}{q}\,(q^2-(\beta-\alpha)^2)^{\frac{1}{2}}(q^2-(\alpha+\beta)^2)^{\frac{1}{2}}\,dq \;.$$

Stel nog $q = (\alpha+\beta)t$, dan volgt tenslotte

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{2\alpha^2\beta^2}\int_v^1 \frac{e^{i(\alpha+\beta)t}}{t}\sqrt{(1-t^2)(t^2-v^2)}\,dt \qquad \text{met} \qquad v = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\,,$$

dus

$$I = \frac{1}{2\pi i c\gamma\lambda^2}\int_0^{\infty} \frac{2\alpha\beta\, J_1(\alpha s)J_1(\beta s)}{s\sqrt{s^2-1}}\,ds =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2\pi^2} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{2\pi^2}\int_v^1 \frac{e^{i(\alpha+\beta)t}}{t}\sqrt{(1-t^2)(t^2-v^2)}\,dt \;.$$

Controle: Als $\alpha = \beta$, dan volgt er

$$I = \frac{\alpha^2}{2\pi^2}\left(1 - \frac{J_1(2\alpha)}{\alpha} - i\,\frac{H_1(2\alpha)}{\alpha}\right) \;.$$

Hoofdstuk X

Het verband tussen het reële deel en het imaginaire deel van een electronische admittantie.

Inleiding. Uit de optica is bekend dat de dispersie een functie van de golflengte λ is; hieruit is de absorptie te bepalen in de electronische media en omgekeerd (Kramers, Kronig).
In de electrotechniek komen analoge problemen voor. Bekend is, dat men bij het serieschakelen van een weerstand R en een zelfinductie L een impedantie $Z = R + i\omega L$ heeft, waarbij ω de frequentie voorstelt. Daarnaast heeft men de admittantie $1/Z$.
Zij gegeven een eindig netwerk, bestaande uit weerstanden (R), capaciteiten (C) en zelfinducties (L).
Stelt men $p = i\omega$, dan is de admittantie van zo een passief netwerk (een tweepool, en geen bronnen in de black box):

$$Y(p) = \alpha p + \beta + \sum_k \frac{c_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Y_0(p)$$

met α, β, c_k en $\omega_k \geq 0$, terwijl $Y_0(p)$ eenwaardig analytisch is voor Re $p \geq 0$ en $pY_0(p)$ uniform begrensd voor Re $p \geq 0$; k geeft de polen op de imaginaire as aan.
Zij $Y(p)$ een admittantie, dan bestaat deze uit een dempingsterm $G(\omega)$ en een reactieve term $B(\omega)$, zodat

$$Y(i\omega) = G(\omega) + iB(\omega) .$$

De vraag is nu, hoe kan men bij gegeven $B(\omega)$ de bijbehorende $G(\omega)$ berekenen.

Opmerking. Deze vraag is in het algemeen zinloos want neem een parallelschakeling van R en L, dan is

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} .$$

R en L zijn volkomen willekeurig te kiezen. Bij de serieschakeling is echter

$$Y = \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{i\omega L}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

waar wel een verband tussen beide blijkt, want heeft men de ene, dan is de andere vastgelegd.

Om de gestelde vraag te onderzoeken gaan we uit van een "willekeurige" electronische admittantie $Y(i\omega)$ en nemen aan dat $Y(i\omega)$ de verzameling is van waarden, die door een analytische functie $Y(p)$ met variabele $p = \sigma + i\omega$ worden aangenomen, zodanig dat voor $\sigma = 0$ $Y(p) = Y(i\omega)$.
We nemen verder aan dat $Y(p)$ de volgende eigenschappen heeft:

a) $Y(p)$ is holomorf voor $\mathrm{Re}\, p > 0$.
b) Alle in het eindige gelegen nulpunten en singulariteiten van $Y(p)$ liggen in $\sigma \leq 0$.
c) $Y(p)$ is reëel voor p reëel.
d) $pY(p)$ is uniform begrensd voor $\sigma \geq 0$.

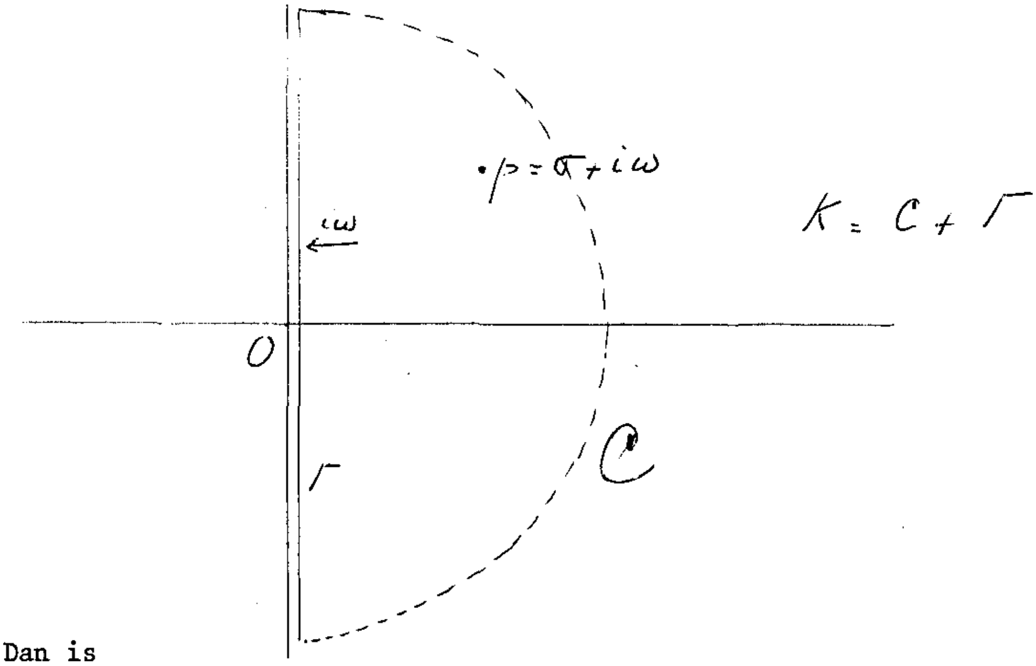
Uit c) volgt dat $G(\omega)$ even is als functie van ω en $B(\omega)$ oneven, dus

$$G(-\omega) = G(\omega) \quad \text{en} \quad B(-\omega) = -B(\omega)\ .$$

Zij nu K een kromme, in het complexe p-vlak gelegen, die het punt z omsluit, dan is

$$Y(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{Y(\zeta)}{\zeta - p}\, d\zeta \qquad \text{met } \mathrm{Re}\, p > 0\ .$$

Voor K nemen we nu een kromme, zoals de figuur aangeeft.



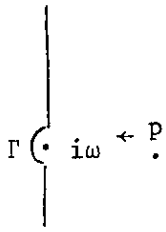
Dan is

$$Y(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{Y(z)}{z - p}\, dz\ ,$$

en daar wegens $\lim\limits_{z\to\infty} zY(z) = 0$ de bijdrage over de cirkelboog C wegvalt, blijft over

$$Y(p) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{Y(z)}{z-p}\,dz\ , \qquad \text{Re } p > 0\ .$$

Als $p = i\omega$ is de integraal divergent; als $p \to i\omega$ beschouwen we derhalve de contour



In dit geval is

$$Y(i\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i(\omega-\varepsilon)}\frac{Y(z)}{z-i\omega}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} - \frac{1}{2\pi i}\int_{i(\omega+\varepsilon)}^{i\infty}\frac{Y(z)}{z-i\omega}\,dz =$$

$$= \tfrac{1}{2}Y(i\omega) - \frac{1}{2\pi i}\,⨍_{-i\infty}^{i\infty}\frac{Y(z)}{z-i\omega}\,dz\ ,$$

dus

$$Y(i\omega) = -\frac{1}{\pi i}\,⨍_{-i\infty}^{i\infty}\frac{Y(z)}{z-i\omega}\,dz \qquad (\omega \text{ reëel})\ .$$

Voer in $\omega' = -iz$, dan is

$$Y(i\omega) = -\frac{1}{\pi}\,⨍_{-\infty}^{\infty}\frac{Y(i\omega')}{i(\omega'-\omega)}\,d\omega' = -\frac{1}{\pi}\,⨍_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\omega')+iB(\omega')}{i(\omega'-\omega)}\,d\omega'\ ,$$

dus

$$G(\omega) = -\frac{1}{\pi}\,⨍_{-\infty}^{\infty}\frac{B(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega' = -\frac{2}{\pi}\,⨍_{0}^{\infty}\frac{\omega' B(\omega')}{(\omega')^2-\omega^2}\,d\omega'\ ,$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\,⨍_{0}^{\infty}\frac{\omega\, G(\omega')}{(\omega')^2-\omega^2}\,d\omega'$$

daar G en B even resp. oneven functies van ω' zijn.

We willen nu nog Y(p) voor willekeurige complexe p bepalen en passen daartoe de methode van Cauchy-Stieltjes toe, waarmee we uit gegeven $G(\omega)$ of $B(\omega)$ een uitdrukking voor Y(p) kunnen vinden.

Het zal blijken dat

$$Y(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{pG(\omega')}{(\omega')^2 + p^2} d\omega' \quad \text{en} \quad Y(p) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' B(\omega')}{(\omega')^2 + p^2} d\omega' .$$

Uit

$$Y(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{Y(z)}{z - p} dz \qquad (\mathrm{Re}\ p > 0)$$

en splitsing van Y(p) in $G(\omega)$ en $B(\omega)$ volgt

$$Y(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{pG(\omega')}{(\omega')^2 + p^2} d\omega' - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' B(\omega')}{(\omega')^2 + p^2} d\omega' .$$

We tonen aan dat

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' B(\omega')}{(\omega')^2 + p^2} d\omega' = \tfrac{1}{2} Y(p) .$$

Daartoe beweren we

$$Y(p) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{B(\omega')}{\omega' + ip} d\omega' \qquad (\mathrm{Re}\ p > 0) .$$

Het rechterlid is zeker onder de voorwaarden a) t/m d), die we hiervoor noemden een analytische functie van p voor Re p > 0.

Stel $p = \sigma + i\omega$, $\sigma > 0$. We moeten dan aantonen

$$(1) \qquad Y_0(\sigma + i\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{B(\omega')}{(\omega' - \omega) + i\sigma} d\omega' =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{(\omega' - \omega) B(\omega')}{(\omega' - \omega)^2 + \sigma^2} d\omega' + i \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{B(\omega')}{(\omega' - \omega)^2 + \sigma^2} d\omega' .$$

Onder algemene voorwaarden (zie bijv. v.d. Pol-Bremmer, Operational Calculus p.71) is de Cauchy functie

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{(\omega' - \omega)^2 + \sigma^2} = \delta(\omega' - \omega) ,$$

waarbij δ de functie van Dirac is, dus

$$\lim_{\sigma \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\pi} \frac{B(\omega')}{(\omega' - \omega)^2 + \sigma^2} d\omega' = B(\omega) .$$

Inderdaad voldoet dus de functie (1) aan de eigenschap dat het imaginaire deel van $Y(\sigma + i\omega)$ voor $\sigma \to +0$ nadert tot de reactieve term $B(\omega)$. Dan moet ook het reële deel naderen tot de overeenkomstige dempingsterm $G(\omega)$. In het bijzonder geldt dus dat $Y(p)$ door (1) wordt gedefinieerd voor $\mathrm{Re}\, p > 0$.
Uit (1) volgt direct dat

$$Y(p) = -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\omega' B(\omega')}{(\omega')^2 + p^2} d\omega'$$

door gebruik te maken van de symmetrie eigenschap van $B(\omega')$.

Literatuur:
N.V. Philips Gloeilampenfabrieken Eindhoven, Rapport no. 91/51.

Hoofdstuk XI

Stralingsweerstand van een antenne met willekeurige stroomverdeling.

Ter inleiding geven we wat algemene theorie. In de vrije ruimte zijn de Maxwell-vergelijkingen (in Gauss-eenheden)

$$\text{rot}\ \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}\ ; \qquad \text{div}\ \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\text{rot}\ \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0} \qquad ; \qquad \text{div}\ \vec{H} = 0\ .$$

Verder is er, o.g.v. de wet ban behoud van lading, de volgende koppeling tussen de stroomdichtheid $\vec{J}$ en de ladingsdichtheid ρ:

$$\text{div}\ \vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\ .$$

We zullen ons bezig houden met systemen waarbij een begrensd gebied D in R_3 is aan te geven, waarbuitem $\vec{J} \equiv 0$ en $\rho \equiv 0$ en met systemen waarbij de brongrootheden een tijdsafhankelijkheid $e^{i\omega t}$ bezitten. Dus $\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r})e^{i\omega t}$ en $\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Voeren we een electrische vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r},t)$ in door

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\iiint_D \vec{J}(\vec{r})\ \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\ dv'\ e^{i\omega t} \quad \text{met} \quad \rho = |\vec{r} - \vec{r}\,'|,\ k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\ ,$$

dan voldoen

$$\vec{H}(\vec{r},t) \overset{\text{def}}{=} \text{rot}\ \vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{ik}\left[\text{rot rot}\ \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r},t)\right]$$

aan bovenstaande vergelijkingen.

We zien

$$\vec{A}(\vec{r},t) \underset{\text{schr.}}{\overset{\text{te}}{=}} \vec{A}(\vec{r})e^{j\omega t}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) \underset{\text{schr.}}{\overset{\text{te}}{=}} \vec{H}(r)e^{j\omega t}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) \underset{\text{schr.}}{\overset{\text{te}}{=}} \vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}$$

met

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint_D \vec{J}(\vec{r}\,') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} dv' \qquad \text{(I)}$$

en

$$\vec{H}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{ik} [\text{rot rot } \vec{A}(\vec{r}) - \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{r})] \; . \qquad \text{(II)}$$

De formules (II) voldoen aan:

$$\text{rot } \vec{H} - ik\vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \; ; \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

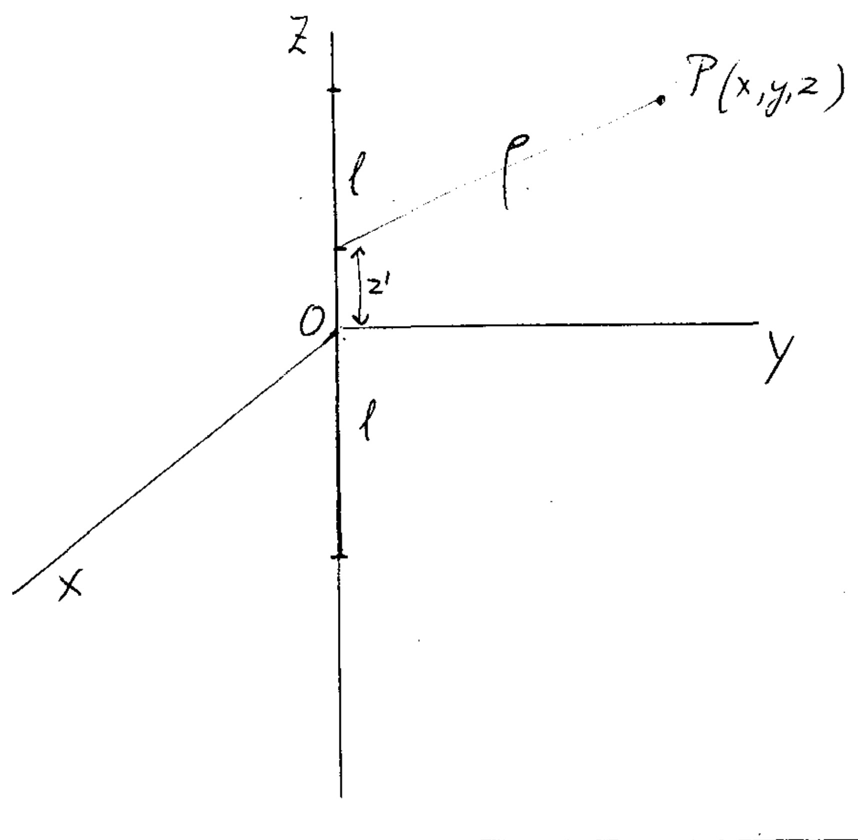
$$\text{rot } \vec{E} + ik\vec{H} = \vec{0} \quad ; \quad \text{div } \vec{H} = 0 \qquad (\text{div } \vec{J} = - i\omega\rho) \; ,$$

de tijdsonafhankelijke Maxwell-vergelijkingen.

We gaan uit van een dunne draad, lengte 2ℓ, waardoorheen een stroom I. Kies een assenstelsel met O in het midden van de draad en de Z-as erlangs. Zij de stroom door de draad gaande I, dan we wegens formule (I):

$$A_x = A_y = 0 \quad \text{en} \quad A_z = \frac{1}{c} \int_{-\ell}^{\ell} I(z') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} dz' \; ,$$

waarbij $\rho = (x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{\frac{1}{2}}$ (zie figuur).



We gaan over op bolcoördinaten, er volgt

$$A_r = A_z \cos\theta$$

$$A_\theta = -\sin\theta\, A_z$$

$$A_\varphi = 0\ .$$

Met behulp van formule (II) volgt nu

$$H_r(\vec{r}) = 0 \qquad E_r = \frac{1}{ik}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta}{r}H_\varphi\right]$$

$$H_\theta(\vec{r}) = 0 \qquad E_\theta = \frac{1}{ik}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]$$

$$H_\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} \qquad E_\varphi = 0$$

buiten de antenne.

We bepalen nu A_z voor grote waarden van r, we vinden

$$A_z(\vec{r}) = \frac{e^{-ikr}}{rc}\int_{-\ell}^{\ell} I(z')e^{ikz'\cos\theta}\,dz' + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)\ ,$$

waaruit

$$H_\varphi(\vec{r}) = \frac{e^{-ikr}}{rc}\sin\theta\int_{-\ell}^{\ell} I(z')e^{ikz'\cos\theta}\,dz' + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$H_r(\vec{r}) = H_\theta(\vec{r}) = 0$$

$$E_r(\vec{r}) = 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$E_\theta(\vec{r}) \simeq H_\varphi(\vec{r})$$

$$E_\varphi = 0\ .$$

We stellen $kz' = \xi$ en definiëren $I(\frac{\xi}{k}) = f(\xi)$, dan volgt

$$H_\varphi \simeq E_\theta \simeq \frac{ie^{-ikr}}{cr}\sin\theta\, H(f,\theta)$$

met

$$H(f,\theta) = \int_{-a}^{a} f(\xi) e^{i\xi \cos\theta}\, d\theta\,, \qquad \text{waarbij } k\ell = a\,.$$

Op grote afstand van de antenne is dan de Pointingvector, die gegeven is door

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re}[\vec{E}(r,t)] \times \operatorname{Re}[\vec{H}(r,t)]$$

gelijk aan

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi} \frac{\sin^2\theta}{c^2 r^2} [H_2 \cos(\omega t - kr) + H_1 \sin(\omega t - kr)]^2\, \vec{a}_r + \vec{v}O\left(\frac{1}{r^3}\right)\,.$$

Hierbij zijn H_1 en H_2 het reële resp. imaginaire deel van $\vec{H}$; $\vec{a}_r$ en $\vec{v}$ zijn eenheidsvectoren.
Middelen we over de tijd, dan volgt er

$$\overline{\vec{S}(\vec{r},t)} = \vec{s}(\vec{r}) = \frac{\sin^2\theta}{8\pi c r^2} |H|^2\, \vec{a}_r + \vec{v}O\left(\frac{1}{r^3}\right)\,.$$

de door de antenne per seconde uitgestraalde energie W is nu

$$W = \frac{1}{8\pi c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, |H(f,\theta)|^2\, d\theta\,.$$

Hierbij is ondersteld, dat we een grote bol om de antenne leggen en dan de straal naar oneindig laten gaan. Nu is

$$|H|^2 = \int_{-a}^{a} f(\xi) e^{i\xi\cos\theta} \int_{-a}^{a} \bar{f}(\eta) e^{-i\eta\cos\theta}\, d\theta\,,$$

dus

$$W = \frac{1}{4c} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} f(\xi)\bar{f}(\eta)\, d\xi\, d\eta \int_0^{\pi} e^{i(\xi-\eta)\cos\theta} \sin^3\theta\, d\theta\,.$$

De laatste integraal blijkt te zijn:

$$\frac{4}{(\xi-\eta)^2}\left[\frac{\sin(\xi-\eta)}{\xi-\eta} - \cos(\xi-\eta)\right]\,.$$

Noemen we hem $K(u)$ met $u = \xi - \eta$, dan is

$$W = \frac{1}{4c} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} f(\xi)\bar{f}(\eta)K(u)d\xi d\eta \ .$$

We willen de uitgestraalde energie maximaal laten zijn langs de aarde en dus maximaal in het vlak $z = 0$.

Bepaal nu een stroom $f(\xi)$ gaande door een antenne van lengte $2a$, die $|H(f)| = |H(f,\theta)|$ maximaal maakt.

Definieer

$$P(f) \equiv cW = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} f(\xi)\bar{f}(\eta)K(\xi - \eta)d\xi d\eta \ .$$

Daar W constant is, moet de integraal het ook zijn. Vullen we $K(\xi - \eta)$ nog in, dan blijkt

$$P(f) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1}(1 - t^2)dt \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} f(\xi)\bar{f}(\eta)e^{i(\xi-\eta)t} \, d\xi d\eta$$

met

$$H(f) = \int_{-a}^{a} f(\xi)d\xi \ .$$

Het komt er nu op neer dat we stellen: neem $H(f)$ gegeven, minimaliseer $P(f)$.

Om dit te kunnen doen voeren we een nieuw begrip in:

We noemen $f(\xi)$ <u>toelaatbaar</u> als hij sectiegewijs continu en eenwaardig complex is op $[-a,a]$, terwijl $H(f) = 1$ is.

We leiden enige stellingen af.

a) $P(f) > 0$, immers

$$P(f) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1}(1 - t^2)dt \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} f(\xi)\bar{f}(\eta)e^{i(\xi-\eta)t} \, d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1}(1 - t^2)dt|F(t)|^2 \, dt \ ,$$

waarbij

$$F(t) = \int_{-a}^{a} f(\xi)e^{i\xi t} \, dt \ .$$

Dus $P(t) > 0$ tenzij $F(t) \equiv 0$. Verder is $F(t)$ de Fouriergetransformeerde van $f(\xi)$. Met de stelling van Parseval

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|^2\,dt = \int_{-a}^{a}f^2(\xi)d\xi\right)$$

volgt nu: Als $F(t) \equiv 0$, dan is ook $f(\xi) \equiv 0$.

b) Heeft het probleem een oplossing, dan is deze reëel.
Zij f toelaatbaar en zij $f(\xi) = f_1(\xi) + if_2(\xi)$, dan is $P(f) = P(f_1) + P(f_2)$. Als $f_2 \not\equiv 0$ is $P(f_1) \leq P(f)$. Verder is $H(f) = H(f_1) + iH(f_2) = 1$, dus $H(f_1) = 1$ en $H(f_2) = 0$, waaruit volgt dat ook f_1 toelaatbaar is met $P(f_1) < P(f)$.

c) Nodige en voldoende voorwaarden voor de oplossing.
Zij f_0 toelaatbaar, $P(f_0)$ minimaal. Voer een hulpfunctie $g(\xi)$ in, die stuksgewijs continu is, terwijl $\int_{-a}^{a}g(\xi)d\xi = 0$. Beschouw

$$f(\xi) = f_0(\xi) + \varepsilon g(\xi)$$

met ε willekeurig dicht bij 0, dan is

$$P(f) = P(f_0) + 2\varepsilon P(f_0,g) + \varepsilon^2 P(g) \quad ,$$

waarbij

$$P(f_0,g) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}K(\xi - \eta)f_0(\xi)g(\eta)d\xi d\eta \ .$$

Wil $P(f_0)$ minimaal zijn, dan moet gelden $P(f_0,g) = 0$ voor <u>alle</u> g, dus

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}K(\xi - \eta)f_0(\xi)g(\eta)d\xi d\eta = 0$$

of

$$\int_{-a}^{a}g(\eta)d\eta\int_{-a}^{a}K(\xi - \eta)f_0(\xi)d\xi = 0 \ .$$

Een voldoende voorwaarde is

$$C_0(\eta) \equiv \int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f_0(\xi) d\xi = \text{constant} .$$

Deze voorwaarde is ook nodig.
Stel nl. $C_0(\eta) \not\equiv c$ in $[-a,a]$, dan zijn er een η_1 en een η_2 met $C_0(\eta_1) \neq C_0(\eta_2)$. Er zijn dan om η_1 en η_2 gebiedjes i_1 en i_2 met lengten ρ_1 en ρ_2, zodanig dat de gemiddelde waarde M_1 in i_1 en M_2 in i_2 van C_0 ongelijk zijn. Er is nu een toelaatbare functie $g_1(\eta)$ te construeren, zodat

$$g_1(\eta) = \begin{array}{ll} \rho_2 & \text{als } \eta \in i_2 \\ -\rho_1 & \text{als } \eta \in i_1 \\ 0 & \text{buiten } i_1 \text{ en } i_2 . \end{array}$$

Nu is

$$\int_{-a}^{a} g(\eta) C_0(\eta) d\eta = \int_{i_1} g_1(\eta) C_0(\eta) d\eta + \int_{i_2} g_1(\eta) C_0(\eta) d\eta =$$

$$= \rho_2 \int_{i_2} C_0(\eta) d\eta - \rho_1 \int_{i_2} C_0(\eta) d\eta = \rho_2 \rho_1 M_1 - \rho_1 \rho_2 M_2 = \rho_1 \rho_2 (M_1 - M_2) \neq 0 ,$$

wat tot een contradictie leidt.

d) Als er een c_0 en een f_0 bestaan met de eigenschap dat

$$\int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f_0(\xi) d\xi = C_0 ,$$

dan is het minimaliseringsprobleem opgelost en f_0 is minimaal met $H(f_0) = 1$.
Zij f toelaatbaar en beschouw

$$h(\xi) = f(\xi) - f_0(\xi) .$$

Nu is

$$P(f) = P(f_0) + P(h) + P(f_0, h)$$

met

$$P(f_0, h) = C_0 \int_{-a}^{a} h(\eta) d\eta = 0$$

want h is toelaatbaar, dus $P(f) = P(f_0) + P(h)$, waaruit volgt dat $P(f_0)$ het minimum is.

e) Zij gegeven

$$\int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f_0(\xi) d\xi = c_0 ,$$

dan is er een éénduidige oplossing nl. f_0. Beschouw hiertoe f_0 zodanig dat

$$\int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f_1(\xi) d\xi = c_0 ,$$

Dan is $P(f_1) = P(f_0)$. Stel $h = f_1 - f_0$, dan is

$$P(f_1) = P(f_0) + P(h) + 2P(f_0,h) = P(f_0) + P(h) ,$$

dus $P(h) = 0$, waaruit $h \equiv 0$ of $f_1 = f_0$.

f) Is er een oplossing, dan is deze even. Stel er is een c_0 en een f_0 met

$$\int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f_0(\xi) d\xi = c_0 .$$

Beschouw $f_1(\xi) = f_0(-\xi)$, dan is

$$\int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f_1(\xi) d\xi = \int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f_0(-\xi) d\xi =$$

$$= \int_{-a}^{a} K(- \xi - \eta) f_0(\xi) d\xi = \int_{-a}^{a} K(\xi + \eta) f_0(\xi) d\xi = c_0 ,$$

immers K is een even functie. Op grond van de eenduidigheid is dus $f_1(\xi) = f_0(\xi)$, of $f_0(\xi)$ is even.

g) $K(u)$ is in elk begrensd gebied een analytische functie van u.
Zij

$$C(\eta) = \int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f(\xi) d\xi ,$$

dan is $C(\eta)$ analytisch als functie van η.

Zij $C(\eta) = c_0$ op $[-a,a]$, dan is $C(\eta)$ overal constant. Verder is $\lim\limits_{u\to\infty} K(u) = 0$, dus bij elke $\varepsilon > 0$ is er een $A(\varepsilon)$ zodat $|K(\xi - \eta)| < \varepsilon$ voor $|\xi| \le a$ en $\eta > A(\varepsilon)$.

$$|C(\eta)| = \left| \int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f(\xi) d\xi \right| \le \int_{-a}^{a} |f(\xi)K(\xi - \eta)| d\xi < \varepsilon \int_{-a}^{a} |f(\xi)| d\xi ,$$

dus $C(\eta) = 0 = c_0$.

Is er dus een functie met $\int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f(\xi) d\xi = 0$, dan is $P(f) = 0$, dus $f = 0$.

Dit is echter geen toelaatbare functie, d.w.z. er is geen oplossing.

h) Als de ondergrens van $P(f) = B$, dan is $B = 0$.

Zij f een toelaatbare functie,

$$C(\eta) = \int_{-a}^{a} K(\xi - \eta) f(\xi) d\xi$$

en

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} C(\eta) d\eta = C .$$

Zij verder

$$\Delta_f = \tfrac{1}{2} \int_{-a}^{a} |C - C(\eta)| d\eta .$$

Daar B de ondergrens van $P(f)$ is, zijn er waarden van $P(f)$ met $B < P(f) < B + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Zij

$$g = \int_{-a}^{a} g(\eta) d\eta = 0 .$$

Neem $f_1 = f + \alpha g$, dan is f_1 ook toelaatbaar en er geldt:

$$P(f) < B + \varepsilon < P(f_1) + \varepsilon = P(f) + 2\alpha P(f,g) + \alpha^2 P(g) + \varepsilon$$

met $Q(\alpha) \equiv 2\alpha P(f,g) + \alpha^2 P(g) + \varepsilon > 0$ voor alle g.

Bepaal het minimum van $Q(\alpha)$. Dit wordt aangenomen in

$$\alpha_{min} = - \frac{P(f,g)}{P(g)} ,$$

dus

$$\varepsilon - \frac{P^2(f,g)}{P(g)} > 0 \quad \text{of} \quad \frac{P^2(f,g)}{P(g)} < \varepsilon \quad \text{voor alle } g . \qquad (1)$$

Neem $g(\xi) = C(\xi) - C$, dan is

$$P(f,g) = \int_{-a}^{a} g(\eta)d\eta \int_{-a}^{a} K(\xi - \eta)f(\xi)d\xi = \int_{-a}^{a} g(\eta)C(\eta)d\eta =$$

$$= \int_{-a}^{a} g(\eta)(C(\eta) - C)d\eta = \int_{-a}^{a} g^2(\eta)d\eta . \qquad (2)$$

Op de reële as is $|K(u)| < \frac{1}{3}$, dus

$$P(g) \le \frac{1}{3} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} |g(\eta)g(\xi)|d\xi d\eta \le \frac{1}{3}\left[\int_{-a}^{a} |g(\eta)|d\eta \right]^2 \le \frac{2}{3} a \int_{-a}^{a} g^2(\eta)d\eta .$$

Op grond van (1) en (2) is nu

$$\frac{3}{2a} \int_{-a}^{a} g^2(\xi)d\xi < \varepsilon ,$$

dus

$$\Delta_f^2 = \frac{1}{4} \int_{-a}^{a} |C(\eta) - C|d\eta^{\;2} \quad \frac{a}{2} \int_{-a}^{a} \frac{(C(\eta) - C)^2}{g^2(\eta)} d\eta < \frac{a^2}{3} \varepsilon .$$

<u>Opmerking</u>. De voorwaarde is alleen nodig, niet voldoende.

i) Een approximatiestelling.

Zij a vast en $G(t)$ continu op $[-1,1]$, dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een continue functie $g(\xi)$, gedefinieerd op $[-a,a]$ zodat

$$\left|G(t) - \int_{-a}^{a} g(\xi)e^{it\xi}\, d\xi\right| < \varepsilon \quad \text{uniform in } t.$$

Om dit te bewijzen bedenken we dat een continue functie $g(\xi)$ te benaderen is door een polynoom $P(t)$ van de graad N (Weierstrass):

$$P(t) = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n\, t^n$$

zodat $|G(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Voer nu Hermite-polynomen in, gedefinieerd door

$$H_n(u) = (-1)^n\, e^{\frac{u^2}{2}} \frac{d^n}{du^n}\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right),$$

dan is

$$e^{-\frac{t^2}{2A^2}}\, t^n = \frac{A^{n+1}}{i^n\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi)e^{i\xi t}\, d\xi \qquad (A > 0)\ .$$

Verder is

$$\lim_{A\to\infty} A^{n+1} \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi)e^{i\xi t}\, d\xi = 0$$

en

$$\lim_{A\to\infty} A^{n+1} \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi)e^{i\xi t}\, d\xi = 0 \quad \text{voor alle } n \text{ met } -1 \le t \le 1\ ,$$

dus

$$\left|e^{-\frac{t^2}{2A^2}}\gamma_n\, t^n - \frac{\gamma_n\, A^{n+1}}{i^n\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi)e^{it\xi}\, d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{4(N+1)}\ .$$

Ook is

$$\left| e^{-\frac{t^2}{2A^2}} \gamma_n\, t^n - \gamma_n\, t^n \right| < \frac{\varepsilon}{4(N+1)} ,$$

dus

$$\left| P(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\gamma_n\, A^{n+1}}{i^n\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi) e^{it\xi}\, d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Stellen we nu

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\gamma_n\, A^{n+1}}{i^n\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi) ,$$

dan volgt

$$\left| P(t) - \int_{-a}^{a} g(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

en dus

$$\left| G(t) - \int_{-a}^{a} g(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi \right| < \varepsilon .$$

In h) hebben we aangetoond dat als P(t) willekeurig dicht tot B nadert $\Delta_f \to 0$.

We kunnen nu laten zien, dat deze voorwaarde niet voldoende is. Voer in

$$u(\theta) = c^2 r^2 |E_\theta|^2 = \sin^2\theta\, |F(\cos\theta)|^2$$

met

$$F(t) = \int_{-a}^{a} f(\theta) e^{it\xi}\, d\xi .$$

We willen $f(\xi)$ zo bepalen dat $F(t) = (1 - t^2)^n \cdot |t| \leq 1$. In dat geval is

$$u(\theta) = \sin^{4n+2}\theta .$$

Verder is

$$e^{-\frac{t^2}{2A^2}} F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\xi) e^{it\xi}\, d\xi$$

met

$$(1) \qquad f_n(\xi) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} A^{2\ell} H_{2\ell}(A\xi) .$$

We zullen de eerder gedefinieerde P en H (zie blz. 64) nu noemen $P_n(a,A)$ resp. $H_n(a,A)$ en we kiezen A zodanig dat A $\geq$ grootste nulpunt α_{2n} van H_{2n}. Alle nulpunten van $f_n(\xi)$ liggen dan tussen $-a$ en $+a$. Vergelijk nu $F_a(t)$ en $F_\infty(t)$ met elkaar:

$$|F_a(t) - F_\infty(t)| = \left| \int_{-a}^{a} f_n(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi \right| \leq$$

$$\leq 2 \left| \int_{a}^{\infty} f_n(\xi) \cos \xi t \, d\xi \right| \leq 2 \int_{a}^{\infty} f_n(\xi) d\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_{aA}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} A^{2\ell} H_{2\ell-1}(Aa) \right] = \varepsilon ,$$

dus

$$F_a(t) = F_\infty(t) + \theta(t) \qquad \text{met } |\theta(t)| \leq 1 \text{ voor } |t| \leq 1 .$$

Verder is

$$P_n(a,A) - P_n(\infty,A) = \tfrac{1}{4} \int_{-1}^{1} (1 - t^2) |F_a(t)|^2 \, dt - \tfrac{1}{4} \int_{-1}^{1} (1 - t^2) |F_\infty(t)|^2 \, dt =$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_{-1}^{1} (1 - t^2) [\theta^2(t) \varepsilon^2 + 2\varepsilon\theta(t) F_\infty(t)] dt$$

met

$$F_\infty(t) = e^{-\frac{t^2}{2A^2}} (1 - t^2)^n \leq 1 ,$$

waaruit volgt

$$P_n(a,A) - P_n(\infty,A) \le \tfrac{1}{4} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)dt < \frac{3\varepsilon}{4} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)dt < \varepsilon$$

want $\varepsilon < 1$ als A groot genoeg is.

Neem $A = \frac{\beta}{a}$ met $\beta > \alpha_{2n}$, dan is (1) geworden

$$f_n(a,\xi,\beta) = \frac{\beta}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2\xi^2}{2a^2}} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(\frac{\beta}{a}\right)^{2\ell} H_{2\ell}\left(\frac{\beta\xi}{a}\right) .$$

Nu is

$$H_n(a,\beta) = H_n(\infty,\beta) + \theta_1\ \varepsilon_n(a,\beta) \qquad (H_n(\infty,\beta) = 1)$$

en

$$P_n(a,\beta) = P_n(\infty,\beta) + \theta_2\ \varepsilon_n(a,\beta) \qquad \text{met } |\theta_1,\theta_2| \le 1 ,$$

dus

$$P_n(a,\beta) \simeq P_n(\infty,\beta) .$$

Verder is

$$P_n(\infty,\beta) = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (1 - t^2)^{2n+1} e^{-\frac{t^2a^2}{\beta^2}} dt .$$

Is $\frac{a}{\beta} \ll 1$, dan is

$$P_n(\infty,\beta) \simeq \tfrac{1}{2} \frac{2.4 \ldots 4n + 2}{1.3 \ldots 4n + 3} ,$$

Voor $\frac{a}{\beta} \gg 1$ is

$$P_n(\infty,\beta) \simeq \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\ \frac{\beta}{a} .$$

Voor $n = 0$ is

$$f_0(a,\xi,\beta) = \frac{\beta}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2a^2}\xi^2} .$$

Er blijkt o.a.

$$\varepsilon_0(a,\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{2\sqrt{\pi}}^{\infty} e^{-t^2} dt = 0.000064 \qquad (\beta = 4) ,$$

dus ε_0 is niet verwaarloosbaar klein. H wordt dus niet willekeurig benaderd door de waarde 1.

Zie voor uitvoeriger documentatie:

C.J. Bouwkamp en N.G. de Bruijn: The problem of optimum antenna current distribution;
Phil. Res.Rep. vol. 1 no. 2, 1946 p. 135/158.