

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

POTENTIAL-

en

GOLFPROBLEMEN

bij

DE CIRKELCYLINDER

College van

Prof. Dr. C.J. Bouwkamp

Voorjaarssemester 1975

A T C
0 1
T H E



Wiskunde
Technische Hogeschool Eindhoven

nr.
2236

Onderafdeling der Wiskunde

Potentiaal-en Golfproblemen bij de cirkelcylinder

Prof. dr. C.J. Bouwkamp

Inhoudsbeschrijving

Potentiaal- en golfproblemen bij de Cirkelcylinder

1975

De her en der tussengevoegde, met letters a,b, ... genummerde, bladzijden bevatten aanvullingen en correcties.

Inleiding	0
I. Electrostatisch veld van puntlading binnen metalen cylinder op aardpotentiaal.	1
II. Acoustische puntvormige straler binnen starre cylinder.	17
III. Mathematische dipool, als bron van electromagnetische straling in oneindig goed geleidende cylinder.	23
Electrische dipool loodrecht op de as van de cylinder	37

POTENTIAL- EN GOLFPROBLEMEN BIJ DE CIRKELCYLINDER

C.J. Bouwkamp.

Dit dictaat is een verslag van formules, resultaten, opmerkingen over problemen die mij meer dan dertig jaar geleden bezighielden, zoals opgetekend in mijn "rood boekje". Delen er van zijn verwerkt in publicaties, voordrachten, colleges en collegedictaten. Er is nauwelijks sprake van enige stijl of opmaak: beide zijn slecht, maar de formules zijn zonder grove fouten, naar ik hoop.

Eindhoven, mei 1975.

Potentiaalproblemen in verband met cylinder

Drie problemen:

- I. Electrostatisch veld van puntlading binnen metalen cylinder op aard-potentiaal.
- II. Acoustische puntvormige straler binnen starre cylinder.
- III. Mathematische dipool, als bron van electromagnetische straling in oneindig goed geleidende cylinder.

Probleem I.

Veld wordt afgeleid uit potentiaal V : $\underline{E} = -\text{grad } V$.

V is de Greense functie van de eerste soort voor de oneindig lange cylinder t.a.v. de potentiaalvergelijking. Dat wil zeggen: V is binnen de cylinder een reguliere oplossing van de potentiaalvergelijking $\Delta V = 0$, behalve in het punt waar zich de (eenheids-) lading bevindt. Is r de afstand tot deze lading, dan moet $V \sim \frac{1}{r}$ eindig blijven voor $r \rightarrow 0$. Op de cylinderwand moet $V = 0$ en in het oneindige $V, \text{grad } V \rightarrow 0$. De straal van de cylinder zij a . Het potentiaalprobleem is even in z . Voorlopig nemen we de lading op de as aan, en is oorsprong van cylindercoördinaten (z, ρ, φ) . V is onafhankelijk van φ . Dus omwentelingssymmetrie.

§ 1. Op de wand geïnduceerde ladingen

Deze ladingsdichtheid $\eta(z)$ kan met stelling van Green bepaald worden. We kunnen voor $\eta(z)$ een integraalvergelijking geven van het Fouriertype, die direct oplosbaar is. Van iedere binnen de cylinder harmonische functie $g(z, \rho)$ met $g, \frac{\partial g}{\partial z}$ uniform begrensd, kunnen we de waarde in de oorsprong $g(0,0)$ afleiden uit haar waarde op de cylinder, als maar bovenstaande V bekend is. Immers:

$$g(0,0) = -\frac{1}{4\pi} \int g(z,a) \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = - \int g(z,a) \eta(z) d\sigma$$

te integreren over cylinderwand, n normaal naar buiten.

Bij blz. 2

Positieve nulpunten van $J_0(x)$ in opvolgende grootte zijn k_1, k_2, k_3, \dots

Bij blz. 3

$$-a^2 \eta(z) = \left. \begin{aligned} &0.30657 e^{-2.4048\zeta} \\ &- 0.46774 e^{-5.5201\zeta} \\ &+ 0.58636 e^{-8.6537\zeta} \\ &- 0.68466 e^{-11.7915\zeta} \end{aligned} \right\} \text{4e decimaal is goed voor } \zeta = \frac{z}{a} \geq 1$$

$$-a^2 \eta(z) = \left. \begin{aligned} &0.08003 \cos \zeta \\ &+ 0.02076 \cos 3\zeta \\ &+ 0.00372 \cos 5\zeta \\ &+ 0.00060 \cos 7\zeta \\ &+ 0.00009 \cos 9\zeta \\ &+ 0.00032 \cosh(2.4048\zeta) \end{aligned} \right\} \text{idem voor } \left| \frac{z}{a} \right| \leq 1$$

Bij blz. 4

The Use of Series of Bessel Functions in Problems connected with Cylindrical Windtunnels.

Proc. Roy. Soc. London A 130, 1930/31, pag. 29

Bij blz. 5 Geschikte waarde $\alpha = 2$:

$$\eta(z) = - \frac{1}{2\pi^2 a^2} \left[2 \sum_0^{\infty} \frac{\cos(2\nu+1) \frac{z}{a}}{I_0(2\nu+1)} + 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{\cosh \frac{z}{a} k_n}{J_1(k_n)[1 + e^{\frac{\pi k_n}{a}}]} \right], \text{ convergent voor } \left| \frac{z}{a} \right| < \pi$$

$$\eta(z) \approx - \frac{1}{\pi^2 a^2} \left[0.7898 \cos\left(\frac{z}{a}\right) + 0.2049 \cos\left(3 \frac{z}{a}\right) + 0.0367 \cos\left(5 \frac{z}{a}\right) + \right. \\ \left. + 0.0059 \cos\left(7 \frac{z}{a}\right) + 0.0009 \cos\left(9 \frac{z}{a}\right) + 0.00315 \cosh\left(2.4 \frac{z}{a}\right) \right]$$

geldig voor $\frac{z}{a} < 1$. Fout van $\approx 1\% \infty$.

Nu is voor elke reële λ de functie $g(z, \rho) \equiv e^{-i\lambda z} I_0(\lambda \rho)$ bruikbaar.

Dus

$$g(0,0) = 1 = - \int_0^{2\pi} a d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda z} I_0(\lambda a) \eta(z) dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda z} \eta(z) dz = - \frac{1}{2\pi a I_0(\lambda a)} .$$

Met Fourieromkering:

$$\eta(z) = - \frac{1}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z} \frac{d\lambda}{I_0(\lambda a)} .$$

$$\eta(z) = - \frac{1}{2\pi^2 a^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{z}{a} t\right)}{I_0(t)} dt \quad (1)$$

We kunnen (1) omvormen terwille van numerieke berekening.

Neem $z > 0$. Beschouw

$$\frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{I_0(t)} dt$$

waarin de integratieweg bestaat uit: $-R$ tot $+R$ langs reële as, de uiteinden hiervan verbonden met halve grote cirkel, straal R . R doorloopt een reeks waarden, zodanig dat steeds de weg W elke pool van de integrand vermijdt. De integraal langs de cirkelboog gaat naar nul voor $R \rightarrow \infty$. Volgens residuenstelling geldt dus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{I_0(t)} dt = \sum_1^{\infty} \text{Residu}_{(t=ik_n)} \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{I_0(t)} = \sum_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{I_0'(ik_n)} .$$

Met $I_0'(ik_n) = iJ_1(k_n)$ vindt men dan gemakkelijk

$$\eta(z) = -\frac{1}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{J_1(k_n)} \quad (z > 0) \quad (2)$$

De reeks (2) divergeert voor $z = 0$. Behalve voor kleine z leent zich (2) zeer goed voor numerieke berekening der geïnduceerde lading. Door integratie vindt men voor de lading tussen z en ∞

$$2\pi a \int_z^{\infty} \eta(u) du = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{k_n J_1(k_n)} .$$

Neemt men $z \rightarrow 0$, dan volgt hieruit de bekende relatie van Nielsen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n J_1(k_n)} = \frac{1}{2}$$

aangezien de totale lading op de bovenste cylinderhelft de waarde $-\frac{1}{2}$ moet hebben. Dit als contrôle.

In de buurt van $z = 0$ moeten we andere ontwikkelingen zoeken. Dit kan gebeuren met methode van Watson toegepast op geheel analoog probleem. Het probleem hier is iets eenvoudiger. De uitkomsten dus ook minder ingewikkeld dan die bij Watson. Overigens zie onder voor nader verband.

Beschouw

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cos \lambda w}{(w-t) I_0(w) \cos\left(\frac{\pi w}{\alpha}\right)} dw .$$

λ, α, t positief; t valt niet in nulpunt van $\cos \frac{\pi w}{\alpha}$.

De integratieweg is grote cirkel, straal R , om de oorsprong die alle polen van de integrand vermijdt ($R > t$). De integraal is nul voor $R \rightarrow \infty$ mits $\lambda < \frac{\pi}{\alpha}$.

De som van alle residuen van de integrand is dus ook nul.

Enkelvoudige polen van de integrand liggen bij

- a) $w = t$
 b) $w = \pm ik_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$
 c) $w = \pm (\nu + \frac{1}{2})\alpha \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$

De residuen hierin zijn achtereenvolgens

- a) $\frac{\cos \lambda t}{I_0(t) \cos(\frac{\pi}{\alpha} t)}$
 b) $-\frac{\cosh(\lambda k_n)}{\cosh(\frac{\pi k_n}{\alpha}) J_1(k_n) [k_n \pm it]}$
 c) $-\frac{\alpha}{\pi} \frac{(-1)^\nu \cos(\lambda \alpha \nu + \frac{1}{2} \lambda \alpha)}{I_0(\alpha \nu + \frac{1}{2} \alpha) [(\nu + \frac{1}{2})\alpha \mp t]}$

Door de som van al deze residuen nul te stellen, vindt men de partieelbreukensplitsing van

$$\frac{\cos(\lambda t)}{I_0(t) \cos(\frac{\pi t}{\alpha})} = \sum_1^{\infty} \frac{2k_n \cosh(\lambda k_n)}{J_1(k_n) \cosh(\frac{\pi k_n}{\alpha})} \frac{1}{k_n^2 + t^2} + \frac{\alpha}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cos(\nu \lambda \alpha + \frac{1}{2} \lambda \alpha)}{I_0(\nu \alpha + \frac{1}{2} \alpha)} \frac{2(\nu + \frac{1}{2})\alpha}{(\nu \alpha + \frac{1}{2} \alpha)^2 - t^2}.$$

We gaan nu met $\cos(\frac{\pi t}{\alpha})$ vermenigvuldigen en integreren van $-\infty$ naar $+\infty$.

Met behulp van

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha} t}{k_n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{k_n} e^{-\frac{\pi k_n}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha} t}{(\nu \alpha + \frac{1}{2} \alpha)^2 - t^2} dt = \frac{(-1)^\nu \pi}{(\nu + \frac{1}{2})\alpha}$$

(verg. Watson)

vindt men

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda t}{I_0(t)} dt = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda \alpha (\nu + \frac{1}{2})}{I_0(\nu \alpha + \frac{1}{2} \alpha)} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\lambda k_n)}{J_1(k_n) [1 + e^{\frac{2\pi k_n}{\alpha}}]}$$

en dus

$$\eta(z) = - \frac{1}{2\pi \frac{2}{a} \frac{2}{2}} \left[\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{z}{a} (\nu \alpha + \frac{1}{2} \alpha)}{I_0(\nu \alpha + \frac{1}{2} \alpha)} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh \frac{z}{a} k_n}{J_1(k_n) [1 + e^{\frac{2\pi k_n}{\alpha}}]} \right] \quad (3)$$

We kunnen hierbij opmerken:

De eerste reeks stelt voor de uitkomst van de integraal als we die numeriek benaderen door de som van al die argumentwaarden in equidistante punten van de integratie weg te nemen: $t = \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{2}\alpha, \frac{5}{2}\alpha, \dots$

De tweede reeks is de exacte correctieterm. Maken we α heel klein dan is deze tweede reeks praktisch te verwaarlozen. Door α groter te nemen kunnen we echter met veel minder termen in de eerste reeks volstaan. Natuurlijk speelt dan de correctieterm wel mee. Merkwaardig is dat de parameter α nog helemaal vrij te kiezen is!

De eerste reeks convergeert voor alle reële waarden van z .

De tweede slechts voor $|z| < 2\pi \frac{a}{\alpha}$. Door α klein genoeg te kiezen kunnen we het convergentiegebied in reële z net zo groot maken als we zelf willen.

Nemen we speciaal voor α de waarde

$$\alpha = \frac{a}{|z|} \pi$$

dan verdwijnt de eerste reeks identiek. De tweede wordt

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|z|}{a} k_n}}{J_1(k_n)}$$

en dit is equivalent aan (2).

Het is evident dat met (2) en (3) betrekkelijk eenvoudig de ladingsdichtheid op de cylinder berekend kan worden. We beperken ons echter tot $z = 0$. Daarvoor geldt:

$$-2\pi^2 a^2 n(0) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{I_0(t)} = \alpha \sum_0^{\infty} \frac{1}{I_0(\nu\alpha + \frac{1}{2}\alpha)} + 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{1}{J_1(k_n) [1 + e^{2\pi k_n/\alpha}]}$$

De numerieke berekening is uitgevoerd met $\alpha = 1$ en $\alpha = 3$.

In het eerste geval heeft de eerste reeks 18 termen, de tweede 1 term ($2.0832296 + 0.0000033 = 2.0832329$). Voor $\alpha = 3$ heeft de eerste reeks 6 termen, de tweede reeks 3 ($2.0053020 + 0.0779307 = 2.0832327$). Dit klopt prachtig. Voor de gemiddelde waarde vinden we

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{I_0(t)} = 2.0832328$$

$$n(0) = - \frac{0.10554}{a^2}$$

Evenzo zou men ook de waarde van $\int_0^{\infty} \frac{t^{2r} dt}{I_0(t)}$ kunnen berekenen om zodoende

voor $n(z)$ een machtreeksontwikkeling naar $\frac{z}{a}$ te verkrijgen, geheel aan het onderzoek van Watson analoog. Deze reeks is convergent voor $|\frac{z}{a}| < 1$. Daarbuiten divergent.

§ 2. Potentiaal, electrisch veld

We berekenen eerst de potentiaal van de geïnduceerde ladingen, en eerst alleen op de as van de cylinder. Met de methode d'ascente kunnen we dan gemakkelijk V overal berekenen.

$$V_0(z,0) = 2\pi a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi-z)^2 + a^2}} = 2\pi a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n(z+u)}{\sqrt{u^2 + a^2}} du$$

Bij blz. 7

Formule na (7) is equivalent met (13) in Webers artikel; formule (8)₁ met (18) en (8)₂ met (17).

Bij blz. 7

Weber zegt:

"The actual evaluation of the field distribution is rather difficult on account of the Fourier integrals which necessitate a point for point numerical integration in infinite limits."

The numerical integration of the integrals is very laborious ($z = 0$)

$$\frac{K_0(t)}{I_0(t)} \cong \sqrt{2\pi} t e^{-2t}$$

$$E_\rho (z = 0) \sim \frac{1}{\rho^2} \left[1 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{\rho}{\sqrt{4a^2 - \rho^2}} \right)^3 \right] \quad (A)$$

$$E_\rho (\rho = a) \sim \left[\frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\pi} \frac{a^2 - z^2}{(a^2 + z^2)^2} \right] \quad (B)$$

$$E_\rho (\rho = a) = -4\pi\eta(z)$$

$$E_\rho (\rho = a, z = 0) = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\infty \frac{dt}{I_0(t)} = \frac{4.166464}{\pi a^2} = \frac{1.32623}{a^2};$$

dit is exact, terwijl Weber vindt: (A) 1.307, (B) 1.318.

Weber geeft reeds plaatje voor veldsterkte aan de rand E_ρ = dus ladingsdichtheid.

Bij blz. 11

$\lambda_0 = 0.4353450$ volgens Smythe, JAP 31 (1960), 553-556;

$\lambda_0 = 0.435345066269$ volgens Ling en Lin, MC 26 (1972), 529-537.

We substitueren voor $n(z+u)$ de vroeger verkregen relatie (formule boven (1)):

$$\begin{aligned} V_0(z,0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z+i\lambda u} \frac{d\lambda}{I_0(\lambda a)} = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda z \frac{d\lambda}{I_0(\lambda a)} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda u}{\sqrt{u^2+a^2}} du . \end{aligned}$$

Nu is volgens Watson pag. 172

$$K_0(\lambda a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda u}{\sqrt{u^2+a^2}} du \quad (4)$$

en dus vindt men

$$V_0(z,0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} \cos \lambda z d\lambda . \quad (5)$$

Pas nu de methode d'ascente toe. In een omwentelingssymmetrisch potentiaal vraagstuk kunnen we de potentiaal buiten de as vinden uit die op de as:

$$\begin{aligned} V_0(z,\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_0(z+i\rho \cos \psi,0) d\psi = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} \cos \lambda z I_0(\lambda \rho) d\lambda . \end{aligned} \quad (6)$$

Voor de totale potentiaal moet die der bron nog opgeteld worden.

$$V(z,\rho) = V_0(z,\rho) + \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}} . \quad (7)$$

$$V(z,\rho) = \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}} - \frac{2}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{K_0(t)}{I_0(t)} I_0\left(\frac{\rho}{a} t\right) \cos\left(\frac{z}{a} t\right) dt$$

De formules voor de veldsterkte vindt men direct door differentiatie:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\infty \frac{K_0(t)}{I_0(t)} t I_0\left(\frac{\rho}{a} t\right) \sin\left(\frac{z}{a} t\right) dt \\
 E_\rho &= \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\infty \frac{K_0(t)}{I_0(t)} t I_1\left(\frac{\rho}{a} t\right) \cos\left(\frac{z}{a} t\right) dt
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Achteraf beschouwd zijn (5) en (7) evident. In de eerste plaats is $\cos \lambda z I_0(\lambda \rho)$ een oplossing van de potentiaalvergelijking die binnen de cylinder overal regulier is en wel voor elke reële λ . Integratie van 0 naar ∞ over λ met belegging $-\frac{2}{\pi} \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}$ verandert daaraan niets. Bovendien vertoont V volgens (7) de vereiste singulariteit in de oorsprong. Alleen de eis $V(z, a) = 0$ moet nog gecontroleerd worden. Nu is volgens de Fourieromkering van (4)

$$V_0(z, a) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda a) \cos \lambda z d\lambda = -\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

(zie ook Watson, pag. 388, formule (10)). Inderdaad is dus $V(z, a) = 0$. We zien dus hierin een kortere weg om tot de oplossing van het potentiaalprobleem te komen. We behoeven niet eerst de geïnduceerde ladingen te kennen. We kunnen direct een passende beleggingsfunctie $f(\lambda)$ proberen te vinden, zodanig dat de potentiaal van de geïnduceerde ladingen wordt voorgesteld door

$$V_0(z, \rho) = \int f(\lambda) \cos \lambda z I_0(\lambda \rho) d\lambda,$$

dit is door een continue som van elementaire oplossingen der potentiaalvergelijking. Uit het feit dat we weten dat ook de primaire lading een potentiaal heeft die in deze gedaante geschreven kan worden

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda z K_0(\lambda \rho) d\lambda$$

kiezen we eerst voor de integratiegrenzen 0 en ∞ .

Uit de eis $V_0 + \frac{1}{r} = 0$ voor $\rho = a$ vindt men dan direct de functie f

$$f(\lambda)I_0(\lambda a) + \frac{2}{\pi} K_0(\lambda a) = 0 .$$

Dit is natuurlijk weer het oude resultaat.

We merken nog op dat tenslotte de potentiaalfunctie in de volgende gedaante gebracht kan worden:

$$V(z, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda z \frac{I_0(\lambda a)K_0(\lambda \rho) - K_0(\lambda a)I_0(\lambda \rho)}{I_0(\lambda a)} d\lambda . \quad (9)$$

In deze vorm is direct het nul worden voor $\rho = a$ te zien.

Bovendien vindt men uit (9) direct weer de uitdrukking (1) voor de ladingsdichtheid op de cylinder. De Wronsky determinant voor I_0, K_0 is (Watson, pag. 80)

$$I_0(\lambda a)K_0'(\lambda a) - I_0'(\lambda a)K_0(\lambda a) = -\frac{1}{\lambda a} \quad (10)$$

en met

$$\eta(z) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=a}$$

vindt men direct (1).

Boven hebben we dus twee methoden besproken om het elektrische veld te berekenen. De formule voor $\eta(z)$ (1) is reeds getransformeerd terwille van numerieke berekening. Ditzelfde kan ook geschieden met de potentiaal, en dus de veldsterkte.

De integrand in (5) heeft een logarithmische singulariteit. Voor $\rho = 0$ kunnen we deze wegwerken door partiële integratie.

Maken we nogmaals gebruik van (10), dan vindt men

$$V_0(z, 0) = -\frac{2}{\pi z} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{z}{a} t}{t I_0^2(t)} dt \quad (11)$$

We passen precies dezelfde methode toe als op (1), met dit verschil dat nu de pool in de oorsprong vermeden wordt door een klein cirkelboogje boven de reële as. We vinden dan ($z > 0$):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{z}{a} t}{t I_0^2(t)} dt = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{residu} \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{t I_0^2(t)} \text{ in } t = i k_n.$$

Om het residu in $t = i k_n$ te bepalen, stellen we $t = x + i k_n$ en ontwikkelen de integrand naar opklimmende machten van x . De laagste macht is blijkbaar x^{-2} . We zoeken de coëfficiënt van x^{-1} . De integrand is van de gedaante $f(x)/g^2(x)$ waarin $g(x)$ in $x = 0$ een enkelvoudig nulpunt heeft en $f(0) \neq 0$ is. De coëfficiënt van x^{-1} blijkt te zijn

$$\frac{f(0)}{\{g'(0)\}^2} = \left\{ \frac{f'(0)}{f(0)} - \frac{g''(0)}{g'(0)} \right\} = - \frac{z}{a k_n} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{J_1^2(k_n)}.$$

Daarmee is gevonden voor $z > 0$

$$V_0(z, 0) = -\frac{1}{z} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{k_n J_1^2(k_n)}. \quad (12)$$

Om de totale potentiaal te krijgen moet hierbij die van de eenheidslading bijgeteld worden. Dit is $\frac{1}{z}$, een term die $-\frac{1}{z}$ in (12) juist compenseert. Dus

$$V(z, 0) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{a} k_n}}{k_n J_1^2(k_n)}.$$

Passen we op iedere term hiervan de methode d'ascente toe, dan vinden we, voor $z \approx 0$

$$V(z, \rho) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{k_n J_1^2(k_n)} e^{-\frac{|z|}{a} k_n} \quad (13)$$

Bij blz. 11

$$F_0 = 1$$

$$F_1 = u^2 - \frac{1}{2}v^2$$

$$F_2 = u^4 - 3u^2v^2 + \frac{3}{8}v^4$$

Bij blz. 13

Alternatieve methode:

$$\Delta V = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

$$\iiint \Delta V \, dx \, dy \, dz = \iint \frac{\partial V}{\partial n} \, df = -4\pi$$

$$\iint_{z=0} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=-0} \right] = -4\pi .$$

$$\text{Dus } \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=+0} = -2\pi\delta(x)\delta(y) = -2\pi \frac{1}{\pi} \frac{\delta(\rho)}{\rho} .$$

Er geldt:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\delta(r)}{r} = \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{J_0(k_m r)}{J_1^2(k_m)} \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\begin{aligned} p\delta(pr) &= \delta(r) & \frac{1}{\pi} \frac{\delta(\rho)}{\rho} &= \frac{1}{\pi a^2} \sum_1^{\infty} \frac{J_0(k_n \frac{\rho}{a})}{J_1^2(k_n)} \\ \frac{1}{a} \delta(\frac{\rho}{a}) &= \delta(\rho) \end{aligned}$$

$$V = \sum_1^{\infty} c_n e^{-\frac{z}{a}k_n} J_0(k_n \frac{\rho}{a})$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=0_+} = - \sum_1^{\infty} \frac{k_n}{a} c_n J_0(k_n \frac{\rho}{a}) .$$

$$\text{Vgl. coëf. geeft: } -\frac{k_n}{a} c_n = -\frac{2}{a^2} \frac{1}{J_1^2(k_n)} , \text{ dus } c_n = \frac{2}{k_n a} \frac{1}{J_1^2(k_n)}$$

$$V = \frac{2}{a} \sum_1^{\infty} e^{-\frac{z}{a}k_n} \frac{J_0(k_n \frac{\rho}{a})}{k_n J_1^2(k_n)} .$$

Deze reeks convergeert overal binnen de cylinder, behalve in de oorsprong.

Voor grote waarden van z kunnen we V gemakkelijk numeriek bepalen.

Voor kleine z kunnen we bijvoorbeeld in machtreeks ontwikkelen.

Dan wordt

$$V_0(z,0) = -\frac{z}{a} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \lambda_{2\nu}}{(2\nu)!} \left(\frac{z}{a}\right)^{2\nu}.$$

Hier zijn

$$\lambda_{2\nu} = \frac{1}{(2\nu+1)\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^{2\nu}}{I_0^2(t)} dt$$

de door Watson voor $\nu = 1, 2$ berekende integralen

$$\lambda_0 = 0.4353382$$

$$\lambda_2 = 0.2059112$$

$$\lambda_4 = 0.6588568.$$

Voor punten buiten de as geldt

$$V_0(z,\rho) = -\frac{z}{a} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \lambda_{2\nu}}{(2\nu)!} F_{\nu}\left(\frac{z}{a}, \frac{\rho}{a}\right) \quad (14)$$

met

$$F_{\nu}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u + iv \cos \psi)^{2\nu} d\psi = (u^2 + v^2)^{\nu} P_{2\nu}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$$

(P_{ν} Legendre polynoom). De ontwikkelingen zijn geldig voor $\rho^2 + z^2 < 4a^2$.

Ook de veldsterkte kan nu numeriek berekend worden.

Uit (13) vinden we ($z > 0$):

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{2}{a^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} e^{-\frac{z}{a} k_n} \\
 E_\rho &= \frac{2}{a^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} e^{-\frac{z}{a} k_n}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Deze reeksen komen in principe al bij Watson voor:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{2}{a^2} S_1(\rho, z) \\
 E_\rho &= -\frac{2}{a} \frac{\partial S_2}{\partial z}(\rho, z) .
 \end{aligned}$$

De reeksen S_1 en S_2 , die Watson onderzocht, kunnen dus uit onze $V(z, \rho)$ gevonden worden door differentiatie naar z , resp. integratie naar z , differentiatie naar ρ . Watson schrijft alleen voor (14) 4 termen expliciet op, terwijl hier de algemene term aangegeven is in de vorm van Legendre functies.

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2z}{a^3} \left[\lambda_2 + \frac{\lambda_4}{a^2} \left(\frac{\rho^2}{4} - \frac{z^2}{6} \right) + \dots \right] \\
 E_\rho &= \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\rho}{a^3} \left[\lambda_2 + \frac{\lambda_4}{a^2} \left(\frac{\rho^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

§ 3. Methode der discrete normaaloplossingen

We moeten nog iets zeggen over de ontwikkeling (13).

Elke term afzonderlijk voldoet aan de potentiaalvergelijking.

Elke term is nul op de cylinderwand en heeft het juiste gedrag in het oneindige. We kunnen dus a priori verwachten dat een dergelijke reeks met voorlopig onbepaalde coëfficiënten de oplossing van het potentiaalprobleem levert. Het is dan nog alleen nodig de coëfficiënten uit het karakter der

singulariteit in de oorsprong te bepalen. In de oorsprong zelf moet de reeks divergeren. Hoe we toch uit het gedrag van de functie in de onmiddellijke omgeving der singulariteit de ontwikkelingscoëfficiënten kunnen bepalen, leert ons de volgende beschouwing.

We stellen het probleem iets algemener, zodat het ook van toepassing is bij andere dan de potentiaalvergelijking.

Laat $G(z, \rho)$ een gegeven functie zijn met een of meer singulariteiten in het vlak $z = 0$. G zij even in z en $\frac{\partial G}{\partial z}$ buiten het vlak $z = 0$ continu en differentieerbaar naar ρ voor $0 \leq \rho \leq a$. (In ons voorbeeld is $G = (z^2 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}}$.)

Verder zij $f_n(z)$ een systeem van continu differentieerbare functies ($n = 1, 2, \dots$) met $f'_n(0)$ van nul verschillend. In ons voorbeeld $f_n(z) = e^{-z k_n/a}$. Zij verder δ positief. Het bewuste probleem wordt als volgt geformuleerd:

Onderstel dat we van een functie $F(z, \rho)$ weten:

- 1) F is even in z
- 2) $\frac{\partial}{\partial z} (F-G)$ continu in het gebied $|z| \leq \delta$, $0 \leq \rho \leq a$ en bovendien differentieerbaar naar ρ
- 3) Voor $z \neq 0$ is $F(z, \rho)$ ontwikkelbaar in een absoluut convergente ontwikkeling

$$F(z, \rho) = \sum_1^{\infty} c_n f_n(|z|) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) . \quad (17)$$

Gevraagd: Hoe berekenen we c_n .

Het antwoord kunnen we direct vinden uit de theorie der Fourier-Bessel reeksen (zie Watson pag. 591).

$\frac{\partial}{\partial z} (F-G)$ bezit een ontwikkeling in een F.B. reeks die bij vaste z uniform in ρ convergeert (met eventuele uitzondering van de uiteinden van het interval $(0, a)$).

$$\frac{\partial}{\partial z} (F-G) = \sum_1^{\infty} b_n(z) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) \quad |z| \leq \delta$$

De ontwikkelingscoëfficiënten zijn te vinden uit

$$b_n(z) = \frac{2}{a^2 J_1^2(k_n)} \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial z} (F-G) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho .$$

Het is duidelijk dat $b_n(0) = 0$ is. Voor $0 < z \leq \delta$ geldt verder

$$b_n(z) = \frac{2}{a^2 J_1^2(k_n)} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a \rho F(z, \rho) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho - \frac{2}{a^2 J_1^2(k_n)} \int_0^a \rho \frac{\partial G}{\partial z} J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho .$$

Nu is volgens (17) en 3)

$$\int_0^a \rho F(z, \rho) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho = c_n f_n(z) \frac{a^2 J_1^2(k_n)}{2} .$$

Dus ook

$$b_n(z) = c_n f_n'(z) - \frac{2}{a^2 J_1^2(k_n)} \int_0^a \rho \frac{\partial G}{\partial z} J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho \quad (0 < z \leq \delta).$$

Laat nu z naar nul gaan, dan volgt het bestaan van onderstaande limiet en gelijkheid.

$$c_n = \frac{2}{a^2 f_n'(0) J_1^2(k_n)} \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_0^a \rho \frac{\partial G}{\partial z} J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho \quad (18)$$

Hiermee is dus het gezochte verband tussen c_n en G gevonden. In ons potentiaalprobleem vinden we voor de limiet de waarde -1 . Verder is $f_n'(0) = -\frac{k_n}{a}$. Dus

$$c_n = \frac{2}{a k_n J_1^2(k_n)}$$

en dan geeft (17) opnieuw de ontwikkeling (13).

Om eerlijk te zijn is deze derde methode van oplossing niet voldoende om te waarborgen dat ook werkelijk (13) de oplossing van het potentiaalprobleem is. Vooropgezet dat we bewezen hebben dat (13) voor $|z| > 0$ absoluut convergeert, dan zouden we nog moeten aantonen dat ze met haar analytische

voortzetting in $z = 0$ inderdaad voldoet aan de eis 2). De derde methode is alleen heuristisch. Natuurlijk is bij ons potentiaalprobleem alles in orde.

§ 4. Singulariteit buiten de as

Het probleem is nu van φ afhankelijk. We plaatsen de eenheidslading op afstand ρ_0 van de as met $\varphi = 0$. Zij ϵ_m het Neumann symbool, $k_{n,m}$ het n^e positieve nulpunt van $J_m(x)$. We geven nu alleen maar de voornaamste resultaten. De bewijzen zijn algeheel analoog. Zie corresponderende formules zonder accent.

$$\eta(z, \varphi) = - \frac{1}{2\pi a^2} \sum_0^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} \frac{I_m\left(\frac{\rho_0}{a} t\right)}{I_m(t)} \cos\left(\frac{z}{a} t\right) dt \quad (1')$$

$$\eta(z, \varphi) = - \frac{1}{2\pi a^2} \sum_0^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{\rho_0}{a} k_{n,m}\right)}{J_{m+1}(k_{n,m})} e^{-\frac{|z|}{a} k_{n,m}} \quad (2')$$

$$V_0(z, \rho, \varphi) = - \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} \frac{K_m(\lambda a)}{I_m(\lambda a)} I_m(\lambda \rho_0) I_m(\lambda \rho) \cos \lambda z d\lambda \quad (5')$$

$$V(z, \rho, \varphi) = V_0(z, \rho, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2}} \quad (7')$$

$$V(z, \rho, \varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} \frac{I_m(\lambda a) K_m(\lambda \rho) - I_m(\lambda \rho) K_m(\lambda a)}{I_m(\lambda a)} I_m(\lambda \rho_0) \cos \lambda z d\lambda \quad (9')$$

Ze geldt slechts voor $\rho > \rho_0$. Is $\rho < \rho_0$ dan hebben we in (9') slechts ρ en ρ_0 van plaats te verwisselen.

$$V(z, \rho, \varphi) = \frac{2}{a} \sum_0^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \sum_1^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{\rho}{a} k_{n,m}\right) J_m\left(\frac{\rho_0}{a} k_{n,m}\right)}{k_{n,m} J_{m+1}^2(k_{n,m})} e^{-\frac{|z|}{a} k_{n,m}} \quad (13')$$

Deze laatste formule is symmetrisch in ρ en ρ_0 . Dit is steeds het geval bij Greense functies.

§ 5. Veld van dipool in asrichting

Moment +1, dan eenvoudig naar -z differentiëren!

Literatuur

- F. Oberhettinger: "Über ein Randwertproblem der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten".
Ann. d. Phys. 43, 136-160, 1943.
- H. Buchholz : "Gekoppelte Strahlungsfelder im kreiszylindrischen Hohlleiter".
Ann. d. Phys. 39, 81-128, 1941.
- R. Weyrich : "Über einige Randwertprobleme, insbesondere der Elektrodynamik".
J. reine angew. Math. 172, 133-150, 1934.
- S.A. Schelkunoff: "Modified Sommerfeld's integral and its applications".
Proc. I.R.E. 24, 1388-1398, 1936.
"Transmission theory of plane electromagnetic waves".
Proc. I.R.E. 25, 1457-1492, 1937.
Cf. also the bibliography.
- E. Weber : "The electrostatic field produced by a point charge in the axis of a cylinder".
J.A.P. 10, 663-666, 1939.

C.J. Bouwkamp

1 oktober 1945

Probleem II.

Het golfvergelijgingsprobleem is niet zo eenvoudig. Alleen de derde methode gaat betrekkelijk eenvoudig. We behandelen eerst het eenvoudigste golfvergelijgingsprobleem dat voor $k = 0$ in het vroegere probleem overgaat.

Als tijdfactor nemen we steeds $e^{-i\omega t}$. Buiten de puntbron voldoet de scalaire potentiaal U aan $\Delta U + k^2 U = 0$. In de buurt van de bron moet

$U - \frac{e^{ikr}}{r}$ eindig blijven. We nemen als voorwaarde op de cylinder $U = 0$.

(In het acoustische geval met starre cylinderwand is $\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0$.) Het onderhavige geval betekent, in acoustische taal, het geval waarin de druk overal op de cylinder nul is. Als voorwaarde in $z \rightarrow \pm \infty$ kunnen we niet meer stellen $U \rightarrow 0$. U moet het karakter hebben van lopende golven, komende uit de buurt van de oorsprong. Deze golven kunnen gedempt of ongedempt zijn.

Alleen de methode der discrete normaaloplossingen kan onmiddellijk worden toegepast. Een elementaire oplossing voor $z > 0$ van de golfvergelijking die op de wand nul wordt en in het oneindige zich goed gedraagt is

$$J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}}$$

Daarbij spreken we af dat $\sqrt{k_n^2 - k_a^2} = -i\sqrt{k_a^2 - k_n^2}$ is voor $0 < k_n < k_a$ (dit met het oog op de tijdfactor $e^{-i\omega t}$).

De onderstelling dat U in een reeks van deze functies ontwikkeld kan worden, ligt voor de hand. We stellen dus

$$U(z, \rho) = \sum_1^{\infty} c_n e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}} J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) \quad (z > 0).$$

We moeten daarbij echter uitdrukkelijk onderstellen dat de gevallen waarin $k_a = k_n$ voor een of andere waarde van n niet voorkomen. Dit betekent uitsluiting van resonante gevallen. Net als vroeger, vinden we

$$\begin{aligned}
 c_n &= - \frac{2}{aJ_1^2(k_n)\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \lim_{z \rightarrow +0} \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho \\
 &= - \frac{2}{aJ_1^2(k_n)\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \lim_{z \rightarrow +0} \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho \\
 &= \frac{2}{aJ_1^2(k_n)\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_0^a \frac{\rho z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) d\rho \\
 &= \frac{2}{aJ_1^2(k_n)\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{a}{z}} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} J_0\left(\frac{zk_n}{a} t\right) dt \\
 &= \frac{2}{aJ_1^2(k_n)\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \int_0^\infty \frac{t dt}{(1+t^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{2}{aJ_1^2(k_n)\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} .
 \end{aligned}$$

Dus vinden we

$$\boxed{U_1(z, \rho) = \frac{2}{a} \sum_1^\infty \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{|z|}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}}}{\sqrt{k_n^2 - k_a^2}}} \quad (19)$$

Deze reeks convergeert overal binnen de cylinder, behalve in $z = \rho = 0$. Voor $k = 0$ krijgen we formule (13) terug, dit overtuigt ons nogmaals dat (19) wel de goede oplossing van het probleem zal zijn. Eigenlijk zouden we graag bovenstaande reeks met behulp van residuenstelling willen omvormen tot bepaalde integraal. Dit is wel gelukt. Hetzelfde geldt voor alle verdere ontwikkelingen.

Nu komen we tot het andere acoustisch probleem. Acoustische straler in de oorsprong. Snelheidspotential $U_2 e^{-i\omega t}$. Complexe geluidsdruk is $p = -i\omega\gamma U_2$ (γ is dichtheid van de lucht). Snelheid van de luchtdeeltjes $v = -\text{grad } U_2$. U_2 voldoet aan dezelfde eisen als vroeger, maar nu is $\frac{\partial U_2}{\partial \rho} = 0$ ($\rho = a$). Laten x_n de nulpunten van $J_1(x)$ zijn. Dan voor $z > 0$

$$U_2 = \sum_0^{\infty} d_n e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} J_0\left(\frac{\rho}{a} x_n\right).$$

Aan de randvoorwaarde wordt voldaan, omdat van iedere term $\frac{\partial}{\partial \rho}$ voor $\rho = a$ nul is. Voor $F(z, \rho) \equiv \frac{\partial U_2}{\partial \rho}$ passen we nu de ontwikkelingsstelling (18) toe, niet op J_0 , maar op J_1 . Dit is geheel analoog.

$$\frac{\partial U_2}{\partial \rho} = \sum_1^{\infty} \gamma_n e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} J_1\left(\frac{\rho}{a} x_n\right) \quad (\gamma_n = -\frac{d_n x_n}{a}).$$

De singuliere functie is hier $G(z, \rho) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right\}$.
Nu wordt

$$\gamma_n = \frac{-2}{a\sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} \frac{1}{J_2^2(x_n)} \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_0^a \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \left(\frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) J_1\left(\frac{\rho x_n}{a}\right) d\rho.$$

Door éénmaal partieel naar ρ te integreren, komt er:

$$d_n = -\frac{2}{a\sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} \frac{1}{J_2^2(x_n)} \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) J_0\left(\frac{\rho}{a} x_n\right) d\rho$$

en dus

$$d_n = \frac{2}{a} \frac{1}{J_2^2(x_n) \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}.$$

Bij blz. 20, formule (20)

De term met $x_n = 0$ mag niet worden weggelaten, is echter onafhankelijk van ρ .

$$U_2(z, \rho) = \frac{2i}{ka^2} e^{ikz} + \frac{2}{a} \sum_1^{\infty} \dots, \quad \text{dus} \quad U_2 = \frac{2}{a} \sum_0^{\infty} \dots \quad (20)$$

Bij blz. 21

Numerieke waarden van rechterlid (21):

$k_1 = 2.4048$	$J_1(k_1) = 0.51915$
$k_2 = 5.5201$	$J_1(k_2) = -0.34026$
$k_3 = 8.6537$	$J_1(k_3) = 0.27143$
$k_4 = 11.7915$	$J_1(k_4) = -0.23246$
$k_5 = 14.9309$	$J_1(k_5) = 0.20655$

$$\frac{W_{1,a}}{W_{\infty}} = \frac{7.421}{\xi^2 - 5.783} + \frac{17.275}{\xi^2 - 30.472} + \frac{27.146}{\xi^2 - 74.887} + \frac{37.012}{\xi^2 - 139.039} + \frac{46.880}{\xi^2 - 222.932} + \dots$$

$$\xi = ka = \frac{2\pi a}{\lambda}$$

ξ

2.5	15.89	9.0	$0.099 + 0.342 + 4.441 = 4.882$
3.0	2.307	9.5	$0.088 + 0.289 + 1.767 = 2.144$
3.5	1.148	10.0	$0.079 + 0.248 + 1.081 = 1.408$
4.0	0.726	10.5	$0.071 + 0.217 + 0.768 = 1.056$
4.5	0.480	11.0	$0.064 + 0.191 + 0.589 = 0.844$
5.0	0.386	11.5	$0.059 + 0.170 + 0.473 = 0.702$
5.5	0.303	12.0	$0.054 + 0.152 + 0.393 + 7.461 = 8.060$
6.0	$0.246 + 3.125 = 3.371$	12.5	$0.049 + 0.137 + 0.334 + 2.150 = 2.670$
6.5	$0.203 + 1.467 = 1.670$	13.0	$0.045 + 0.125 + 0.288 + 1.235 = 1.693$
7.0	$0.172 + 0.932 = 1.104$	13.5	$0.042 + 0.114 + 0.253 + 0.857 = 1.266$
7.5	$0.147 + 0.670 = 0.817$	14.0	$0.039 + 0.104 + 0.224 + 0.650 = 1.017$
8.0	$0.127 + 0.515 = 0.642$	14.5	$0.036 + 0.096 + 0.201 + 0.520 = 0.853$
8.5	$0.112 + 0.413 = 0.525$	15.0	$0.034 + 0.089 + 0.181 + 0.431 + 22.669 = 23.404$
		15.5	$0.032 + 0.082 + 0.164 + 0.366 + 2.707 = 3.351$
		16.0	$0.030 + 0.077 + 0.150 + 0.316 + 1.418 = 1.991$

Nu is $J_2(x_n) = -J_0(x_n)$. Tenslotte vindt men dus

$$U_2(z, \rho) = \frac{2}{a} \sum_0^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} x_n\right)}{J_0^2(x_n)} \frac{e^{-\frac{|z|}{a} \sqrt{x_n^2 - k_a^2}}}{\sqrt{x_n^2 - k_a^2}} \quad (20)$$

Energiebeschouwing. Is de puntbron helemaal alleen in de ruimte, dan is de per seconde uitgestraalde energie $\frac{1}{2}W_{\infty}$ met W_{∞} :

$$\frac{1}{cY} \int |p|^2 df = 4\pi k \omega Y = W_{\infty}$$

(p is amplitude).

Hoe is het bij aanwezigheid van de volkomen meegaande cylinder (geval 1) of bij de starre cylinder (geval 2)? Voor $z \rightarrow \infty$ doen alleen de ongedempte golven mee, dus alleen die termen van de reeks waarvoor $k_n, x_n < k_a$.

Eerst geval 1. Voor grote positieve z geldt dus

$$U_1(z, \rho) \approx \frac{2}{a} \sum_{k_n < k_a} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{+i\sqrt{k_a^2 - k_n^2} \frac{z}{a}}}{-i\sqrt{k_a^2 - k_n^2}}$$

$$|p_1|^2 \approx \omega^2 Y^2 \frac{4}{a^2} \sum_{\substack{k_n < k_a \\ k_m < k_a}} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_m\right)}{J_1^2(k_n) J_1^2(k_m)} \frac{\cos \frac{z}{a} \{\sqrt{k_a^2 - k_n^2} - \sqrt{k_a^2 - k_m^2}\}}{\sqrt{k_a^2 - k_n^2} \sqrt{k_a^2 - k_m^2}}$$

Integreer nu bij constante z over de doorsnede van de buis, $df = 2\pi\rho d\rho$.

Nu is

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right) J_0\left(\frac{\rho}{a} k_m\right) \rho d\rho = 0 \text{ voor } n \neq m \\ = \frac{1}{2} a^2 J_1^2(k_n) \text{ voor } n = m.$$

Dus

$$\int |p|^2 df \text{ over \u00e9\u00e9n doorsnede bij } z \rightarrow \infty \text{ is}$$

$$\omega^2 \gamma^2 \frac{4}{a^2} 2\pi \sum_{k_n < ka} \frac{\frac{1}{2}a^2}{J_1^2(k_n)} \frac{1}{(k^2 a^2 - k_n^2)}$$

$$= 4\pi\omega^2 \gamma^2 \sum_{k_n < ka} \frac{1}{J_1^2(k_n)} \frac{1}{(k^2 a^2 - k_n^2)} .$$

De totale uitgestraalde energie (naar beide kanten $z = \pm \infty$) verkrijgt men door vermenigvuldiging met $\frac{2}{c\gamma}$. Is $\frac{1}{2}W_{1,a}$ de per seconde gemiddelde uitgestraalde energie bij aanwezigheid van de cylinder, dan is

$$\frac{W_{1,a}}{W_\infty} = 2 \sum_{k_n < ka} \frac{1}{J_1^2(k_n)(k^2 a^2 - k_n^2)} \quad (21)$$

Geheel analoog is het tweede geval met de starre wand. Men vindt dan

$$\frac{W_{2,a}}{W_\infty} = 2 \sum_{0 \leq x_n < ka} \frac{1}{J_0^2(x_n)(k^2 a^2 - x_n^2)} \quad (22)$$

We kunnen nog ingewikkelder problemen oplossen met de spiegelmethode. Neem de buis met starre wanden welke aan \u00e9\u00e9n kant afgesloten is. De puntbron bevindt zich op de as op afstand d van gesloten eind. Wat is de energieuitstraling nu?

Dan als hulpsysteem dat van twee gelijkphasige acoustische puntbronnen op afstand 2d in \u221e lange cylinder. Het middenschot is dan symmetrievlak, waarop vanzelf $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$. Het veld op grote afstand $z \rightarrow \infty$ is dan additief: Is z gerekend van middenschot, dan

$$U_3(z, \rho) = U_2(z-d, \rho) + U_2(z+d, \rho) .$$

$$U_3(z, \rho) \approx \frac{2}{a} \sum_{x_n < ka} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} x_n\right)}{J_0^2(x_n)} \frac{e^{i\sqrt{k^2 a^2 - x_n^2} \frac{z+d}{a}} + e^{i\sqrt{k^2 a^2 - x_n^2} \frac{z-d}{a}}}{-i\sqrt{k^2 a^2 - x_n^2}}$$

$$|p_3|^2 \approx \omega^2 \gamma^2 \frac{4}{a^2} \sum \sum \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} x_n\right) J_0\left(\frac{\rho}{a} x_m\right)}{J_0^2(x_n) J_0^2(x_m)} \left[\frac{e^{i \frac{z+d}{a} (\sqrt{-})} + e^{i \frac{z-d}{a} (\sqrt{-})} + \dots}{\sqrt{k^2 a^2 - x_n^2} \cdot \sqrt{k^2 a^2 - x_m^2}} \right].$$

De enige termen die tot de energie iets bijdragen zijn die voor $n = m$; die bijdrage is

$$\left[\frac{4 \cos^2 \frac{d}{a} (\sqrt{k^2 a^2 - x_n^2})}{k^2 a^2 - x_n^2} \right]$$

Dus wordt

$$\boxed{\frac{W_{3,a}}{W_\infty} = 4 \sum_{0 \leq x_n < ka} \frac{\cos^2 \left\{ \frac{d}{a} \sqrt{k^2 a^2 - x_n^2} \right\}}{J_0^2(x_n) \{k^2 a^2 - x_n^2\}}} \quad (23)$$

Waar $W_{3,a}$ de energie is die hij naar één kant uitstraalt. Voor $d = 0$ komt hier juist het dubbele bedrag. Dit klopt. Door de reactie van de wand wordt ook nog de energie die anders naar $-\infty$ werd gestuurd van $z = +\infty$ gereflecteerd of beter misschien: voor $d = 0$ komt er een puntbron met 2 maal zo grote amplitude, dan 4 maal zoveel intensiteit. De helft, dat is twee keer, gaat naar één kant. We zien dat altijd geldt

$$W_{3,a} < 2W_{2,a}.$$

Nu genoeg over het acoustische probleem.

Bij blz. 23, formule (24).

Ligt de dipool niet in de as, maar op afstand ρ_0 er buiten, dan

$$\Pi(z, \rho, \varphi) = \frac{2}{a} \frac{I ds}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \frac{J_m(k_{nm} \frac{\rho_0}{a}) J_m(k_{nm} \frac{\rho}{a})}{J_m^2(k_{nm}) \sqrt{k_{nm}^2 - k_a^2}} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_{nm}^2 - k_a^2}}$$

k_{nm} = n-de nulpunt van $J_m(x)$.

Zie Buchholz, Ann. d. Phys. 1941, blz. 81.

Zijn formule heeft waarschijnlijk het verkeerde teken.

transversaal magnetisch omdat $H_z = 0$.

$TM_{n,m}$

m = ordegetal = aantal radiale knooppunten;

n = aantal knoopcirkels voor E_φ, E_z, H_ρ , als de randcirkel $\rho = a$ wel, maar de as $\rho = 0$ niet meegeteld wordt.

Bij blz. 24, energiestraling

Gemakkelijker gaat het met de voorstelling van Π .

$$\text{Energie is evenredig met } \int \frac{\partial \Pi^*}{\partial z} (k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}) \rho d\rho$$

Bij blz. 25, formule (25)

In notatie van Schelkunoff is $v_n = \frac{k_n}{ka}$.

$$\text{Stralingsweerstand } R = 60 \left(\frac{ds}{a}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1^2(k_n)} \frac{v_n^2}{\sqrt{1 - v_n^2}}$$

$\eta = 120\pi$ klopt precies.

Probleem III. Electromagnetische straling

Het allereenvoudigste is een elektrische mathematische dipool in een punt van de as der oneindig lange cylinder.

De geïnduceerde stromen lopen alle in de asrichting. De vector potentiaal heeft alleen een z component, $\Pi(z, \rho)$, symmetrisch in z. Er is alleen een H_φ , E_z , E_ρ ; deze kunnen worden berekend uit de vector potentiaal met behulp van

$$H_\varphi = - \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}$$

$$-ikE_z = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \quad (= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}))$$

$$-ikE_\rho = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial \rho}$$

Op de cylinder moet $E_z = 0$ zijn. Dit is het geval als daar $\Pi = 0$ is. Bovendien heeft Π in de oorsprong als singulariteit de potentiaal van de vrije dipool. Is de lengte ds en I de constante stroomamplitude dan moet

$$\Pi = \frac{Ids}{c} \frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

eindig blijven.

$\Pi(z, \rho)$ is eenvoudig de functie U_1 van (19) op een evenredigheidsconstante na. Voor $z > 0$ is dus

$$\Pi_e(z, \rho) = \frac{2}{a} \frac{Ids}{c} \sum_1^\infty \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}}}{\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \quad (24)$$

De componenten der veldsterkte zijn voor $z > 0$

$$H_{\varphi} = \frac{2}{a} \frac{Ids}{c} \sum_1^{\infty} \frac{k_n}{a} \frac{J_1(\frac{\rho}{a} k_n)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}}}{\sqrt{k_n^2 - k_a^2}}$$

$$E_z = \frac{i}{k} \frac{2}{a} \frac{Ids}{c} \sum_1^{\infty} \frac{k_n^2}{a^2} \frac{J_0(\frac{\rho}{a} k_n)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}}}{\sqrt{k_n^2 - k_a^2}}$$

$$E_{\rho} = \frac{i}{k} \frac{2}{a} \frac{Ids}{c} \sum_1^{\infty} \frac{k_n}{a^2} \frac{J_1(\frac{\rho}{a} k_n)}{J_1^2(k_n)} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}}$$

Nu de energie die per seconde gemiddeld door de doorsnede loopt voor z heel groot. Deze is $\frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_{\rho} H_{\varphi}^*)$ geïntegreerd over deze doorsnede.

Voor $z \rightarrow \infty$ is

$$H_{\varphi} \approx \frac{2}{a} \frac{Ids}{c} \sum_{k_n < ka} \frac{k_n}{a} \frac{J_1(\frac{\rho}{a} k_n)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k_a^2 - k_n^2}}}{-i \sqrt{k_a^2 - k_n^2}}$$

$$E_{\rho} \approx \frac{2}{a} \frac{Ids}{c} \frac{i}{k} \sum_{k_m < ka} \frac{k_m}{a^2} \frac{J_1(\frac{\rho}{a} k_m)}{J_1^2(k_m)} e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k_a^2 - k_m^2}}$$

$$\text{Re}(E_{\rho} H_{\varphi}^*) \approx \left(\frac{2}{a} \frac{Ids}{c}\right)^2 \sum \sum \frac{k_n k_m}{a^3 k} \frac{J_1(\frac{\rho}{a} k_n) J_1(\frac{\rho}{a} k_m)}{J_1^2(k_n) J_1^2(k_m)} \frac{\cos \frac{z}{a} \{ \sqrt{k_a^2 - k_n^2} - \sqrt{k_a^2 - k_m^2} \}}{\sqrt{k_a^2 - k_n^2}}$$

Alleen de termen met $n = m$ dragen tot de energie bij, omdat

$$\int_0^a J_1(\frac{\rho}{a} k_n) J_1(\frac{\rho}{a} k_m) \rho d\rho = 0 \text{ voor } n \neq m$$

$$= \frac{1}{2} a^2 J_1^2(k_n) \text{ voor } n = m.$$

De totaal uitgezonden energie (naar beide kanten $z = \pm \infty$) is per seconde

$$2 \times \frac{c}{8\pi} \left(\frac{2}{a} \frac{I ds}{c} \right)^2 2\pi \sum_{k_n < ka} \frac{k_n^2 \frac{1}{2} a^2 J_1^2(k_n)}{a^3 k_n J_1^4(k_n)} \frac{1}{\sqrt{k_a^2 - k_n^2}}$$

$$W_{4,a} = \frac{I^2 ds^2}{a^3 kc} \sum_{k_n < ka} \frac{k_n^2}{J_1^2(k_n) \sqrt{k_a^2 - k_n^2}}$$

Wanneer de dipool vrij straalt is de per seconde uitgestuurde energie

$$W_0 = \frac{4}{3} \frac{I^2}{c} \left(\frac{k ds}{2} \right)^2 = \frac{k^2 I^2 ds^2}{3c}$$

De verhouding van deze twee energieën is

$$F_{e,d} = \frac{3}{(ka)^3} \sum_{k_n < ka} \frac{k_n^2}{J_1^2(k_n) \sqrt{k_a^2 - k_n^2}} \quad (25)$$

Nu voor de magnetische korte dipoolantenne (lusje!). Het veld wordt weer uit een potentiaal Π_m afgeleid

$$E_\varphi = \frac{\partial \Pi_m}{\partial \rho}$$

$$-ikH_\rho = \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z \partial \rho}, \quad -ikH_z = k^2 \Pi_m + \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2}$$

Als singulariteit voor Π_m nemen we $\frac{e^{ikr}}{r}$. Dan wordt Π_m eenvoudig de functie U_2 van (20). Dus

$$\Pi_m = \frac{2}{a} \sum_0^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} x_n\right)}{J_0^2(x_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}$$

$$E_\varphi = -\frac{2}{a} \sum_1^{\infty} \frac{x_n}{a} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} x_n\right)}{J_0^2(x_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}$$

$$H_z = \frac{2i}{ka} \sum_1^{\infty} \frac{x_n^2}{a^2} \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} x_n\right)}{J_0^2(x_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}}{\sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}$$

$$H_\rho = \frac{2i}{ka} \sum_1^{\infty} \frac{x_n}{a^2} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} x_n\right)}{J_0^2(x_n)} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}$$

Voor de energie vindt men dan (we moeten $-\frac{c}{8\pi} (E_\varphi^* H_\rho)$ integreren over de 2 deksels!)

$$\frac{c}{a^3 k} \int_{x_n < ka} \frac{x_n^2}{J_0^2(x_n)} \frac{1}{\sqrt{k^2 a^2 - x_n^2}}$$

Voor de vrij trillende magnetische dipool is $\Pi_0 = \frac{e^{ikr}}{r}$

$$E_\varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \approx ik \sin \theta \frac{e^{ikr}}{r}$$

en dus, daar op grote afstand $|E_\varphi| = |H_\theta|$ moet zijn

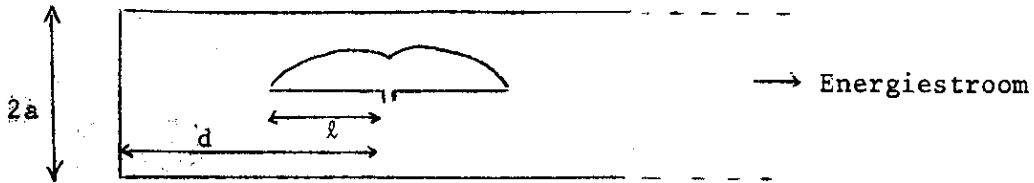
$$H_\theta \approx -ik \sin \theta \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$W_0 = \frac{ck^2}{8\pi} \int_{\text{bol}} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} df = \frac{1}{4} ck^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{ck^2}{3}$$

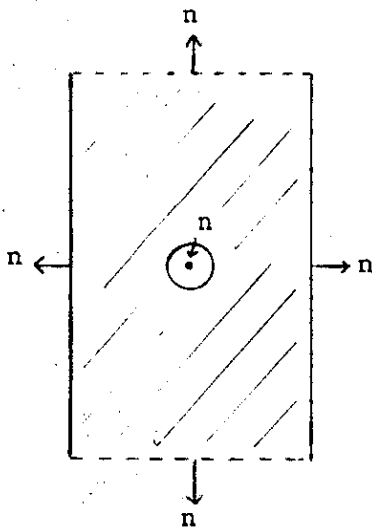
Bij blz. 27, formule (26)

Klopt ook met Schelkunoff.

Bij blz. 30, regel 6 van onderen



Bij blz. 32



$$g(z, \rho) = e^{-i\lambda z} I_0(\rho\sqrt{\lambda^2 - k^2}).$$

Bij blz. 33, formule (35)

$$f(z) = -\frac{Ids}{2\pi^2 a^2} \int_0^\infty \frac{\cos \frac{z}{a} t}{I_0(\sqrt{t^2 - k^2 a^2})} dt.$$

Dan wordt geheel analoog aan (25) voor de magnetische dipool

$$F_{m.d} = \frac{3}{(ka)^3} \sum_{x_n < ka} \frac{x_n^2}{J_0^2(x_n) \sqrt{k_a^2 - x_n^2}} \quad (26)$$

We kunnen nog meer problemen de baas. Laat de buis aan één kant gesloten zijn. Op afstand d van dit deksel weer een math. dipool (electrisch). We willen weer de straling uitrekenen. Weer met de spiegelmethode. Er komt dan direct

$$F'_{e.d} = \frac{6}{(ka)^3} \sum_{k_n < ka} \frac{k_n^2 \cos^2\left(\frac{d}{a} \sqrt{k_a^2 - k_n^2}\right)}{J_1^2(k_n) \sqrt{k_a^2 - k_n^2}} \quad (27)$$

Tenslotte nog enkele gevallen, waarin de bron van eindige afmetingen is. En wel nemen we als antenne een dunne cilindervormige draad ter lengte 2ℓ , die in het midden gevoed is. Als de draad maar dun genoeg is, zal de stroomverdeling in eerste benadering sinusvormig zijn, ook in aanwezigheid van de ∞ goed geleidende cylinderwand. De stroomfunctie is dus

$$I(s) = \sin k(\ell - |s|) \quad -\ell \leq s \leq \ell .$$

Door integratie van de oplossingen van een electriche dipool vindt men nu voor de vectorpotential voor $z > \ell$

$$\Pi = \frac{2}{ac} \sum_1^\infty \frac{J_0\left(\frac{\rho}{a} k_n\right)}{J_1^2(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_a^2 - k_n^2}}}{\sqrt{k_a^2 - k_n^2}} \int_{-\ell}^{\ell} I(s) e^{\frac{s}{a} \sqrt{k_a^2 - k_n^2}} ds .$$

Voor de integraal vinden we, als $\gamma = \frac{1}{a}\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}$

$$\int_0^{\ell} \sin(k\ell - ks) \{e^{s\gamma} + e^{-s\gamma}\} ds =$$

$$\text{Img.deel van } e^{ik\ell} \int_0^{\ell} \{e^{s(\gamma-ik)} + e^{-s(\gamma+ik)}\} ds$$

$$= \text{Im} \left\{ \frac{e^{\ell\gamma}}{\gamma-ik} - \frac{e^{-\ell\gamma}}{\gamma+ik} \right\} - e^{ik\ell} \left\{ \frac{1}{\gamma-ik} - \frac{1}{\gamma+ik} \right\}$$

$$= \frac{2k}{\gamma^2 + k^2} \{ \cosh \ell\gamma - \cos k\ell \} .$$

Nu is $\gamma^2 + k^2 = \frac{k_n^2}{a^2}$.

Dus

$$\int_{-\ell}^{\ell} I(s) e^{\frac{s}{a}\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} ds = \frac{2ka^2}{k_n^2} \{ \cosh(\frac{\ell}{a}\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}) - \cos k\ell \} .$$

Daarmee wordt de vectorpotentiaal in z richting ($z > \ell$)

$$\Pi = \frac{4ka}{c} \sum_1^{\infty} \frac{[\cosh(\frac{\ell}{a}\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}) - \cos k\ell]}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} J_0(\frac{\rho}{a} k_n) e^{-\frac{z}{a}\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} \quad (28)$$

We stellen even $c_n = \frac{4ka}{c} \frac{\cosh(\frac{\ell}{a}\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}) - \cos k\ell}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}$.

Dan is $\Pi = \sum_1^{\infty} c_n J_0(\frac{\rho}{a} k_n) e^{-\frac{z}{a}\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}$.

Voor $z \rightarrow \infty$ wordt dan

$$H_{\varphi} \approx \sum_{k_n < ka} \left(c_n \frac{k_n}{a} \right) J_1 \left(\frac{\rho}{a} k_n \right) e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}$$

$$E_{\rho} \approx \sum \left(c_n \frac{k_n}{ka^2} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \right) J_1 \left(\frac{\rho}{a} k_n \right) e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}$$

en de totale energielevering bedraagt:

$$\begin{aligned} & 2 \times \frac{c}{8\pi} \sum_{k_n < ka} \left(\frac{k_n c}{ka^2} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \right) \left(\frac{k_n c^*}{a} \right) 2\pi \frac{1}{2} a^2 J_1^2(k_n) \\ &= \frac{c}{4ka} \sum |c_n|^2 k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \end{aligned}$$

$$W = \frac{4ka}{c} \sum_{k_n < ka} \frac{\left\{ \cos \left(\frac{\ell}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \right) - \cos k\ell \right\}^2}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} \quad (29)$$

Laten we $\ell \rightarrow 0$ gaan, en bedenken we dat $I(0) = \sin k\ell \approx k\ell$.

De gemiddelde constante stroom is $I = \frac{1}{2} I(0)$. Verder is $\ell = \frac{1}{2} ds$.

Dus $I ds = \frac{1}{2} I(0) 2\ell = I(0)\ell$. Dan krijgen we juist de formule voor $W_{4,a}$ terug!

We kunnen ook de equivalente stralingsweerstand aangeven; is R de stralingsweerstand, betrokken op de stroom in het voedingspunt van de antenne, dan is $W = \frac{1}{2} RI^2(0) = \frac{1}{2} R \sin^2 k\ell$. Nemen we bovendien $c = \frac{1}{30}$ dan krijgt men R in ohms, dus

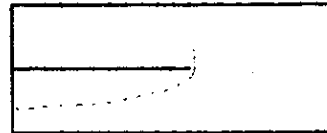
$$R = \frac{240 ka}{\sin^2 kl} \sum_{k_n < ka} \frac{[\cos(\frac{\ell}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}) - \cos kl]^2}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} \text{ ohm} \quad (30)$$

Brengen we een tussenschot aan loodrecht op de antenne, in het voedingspunt, dan blijft het veld gelijk. Daaruit volgt dat de equivalente stralingsweerstand R_0 voor het geval dat

een antenne (lengte ℓ) t.o.v.

buis als aarde gevoed wordt,

$$R_0 = \frac{1}{2} R.$$



Dit is geheel analoog als voor antennes loodrecht op een oneindig goed geleidende vlakke aarde. Is bijv. de antenne precies een kwart golflengte lang, dus $kl = \pi/2$, dan vindt men

$$R_0(\frac{1}{4} \text{ golfantenne}) = 120 \sum_{\frac{2\ell k_n}{\pi a} < 1} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - (\frac{2\ell k_n}{\pi a})^2})}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{1 - (\frac{2\ell k_n}{\pi a})^2}} \quad (31)$$

Bovenstaande formule geldt niet in het resonantiegeval, als nl. de straal a zodanig is, dat $\frac{a}{\ell} = \frac{2}{\pi} k_v$ voor een of andere v .

Er is nu nog één probleem dat we ook kunnen oplossen, nl. de configuratie op blz.f. Dit gaat weer met de spiegelmethode. We nemen het veld van twee zulke antennes in de weerszijden oneindig uitgestrekte cylinder. Afstand der middens weer $2d$, $d \geq \ell$.

Noemen we nu de potentiaal $\Pi'(z)$, z gerekend vanaf het deksel, dan is $\Pi'(z) = \Pi(z+d) + \Pi(z-d)$ als Π de functie is in (28). We vinden onmiddellijk

$$W' = \frac{8ka}{c} \sum_{k_n < ka} \frac{\left\{ \cos\left(\frac{l}{a}\sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}\right) - \cos k\ell \right\}^2 \cos^2\left(\frac{d}{a}\sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}\right)}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} \quad (32)$$

$$R' = \frac{480ka}{\sin^2 k\ell} \sum_{k_n < ka} \frac{\left\{ \cos\left(\frac{l}{a}\sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}\right) - \cos k\ell \right\}^2 \left\{ \cos\left(\frac{d}{a}\sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}\right) \right\}^2}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}} \quad (33)$$

en speciaal voor een halve golfantenne ($k\ell = \pi/2$):

R' ($\frac{\lambda}{2}$ antenne in aan één kant gesloten buis)

$$R' \left(\frac{\lambda}{2}\right) = 480 \sum_{\frac{2\ell k_n}{\pi a} < 1} \frac{\left\{ \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2\ell k_n}{\pi a}\right)^2} \cos \frac{\pi d}{2\ell} \sqrt{1 - \left(\frac{2\ell k_n}{\pi a}\right)^2} \right\}^2}{k_n^2 J_1^2(k_n) \sqrt{1 - \left(\frac{2\ell k_n}{\pi a}\right)^2}} \quad (34)$$

C.J. Bouwkamp

October 1945

We kunnen nu ook de andere methoden toepassen voor probleem III.

We gaan de stromen in de cylinder berekenen met de methode, analoog aan § 1.

Π = vectorpotentiaal van de dipool, dus Π is binnen de cylinder een reguliere oplossing van $\Delta\Pi + k^2\Pi = 0$; behalve in de oorsprong.

Daar moet $\Pi - \frac{Ids}{c} \frac{e^{ikr}}{r}$ voor $r \rightarrow 0$ regulier blijven. Voor $|z| \rightarrow \infty$ moet ze het karakter hebben van golven die uit de oorsprong schijnen te komen.

Voor k reëel kunnen gedempte, zowel als ongedempte golven optreden. Als k complex (in het eerste quadrant) dan alleen gedempte golven.

Neem nu functie $g(z, \rho)$ die overal binnen de cylinder een reguliere oplossing van $\Delta g + k^2 g = 0$ is. Pas weer de stelling van Green toe op gearceerde volume (zie blz. f)

$$\iiint (\Pi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \Pi}{\partial n}) d\sigma = \iiint (\Pi \Delta g - g \Delta \Pi) dS = 0.$$

We vinden direct

$$\begin{aligned} \frac{Ids}{c} g(0,0) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{cyl.mantel}} G \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} d\sigma + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{beide deksels}} \left\{ \Pi \frac{\partial g}{\partial |z|} - g \frac{\partial \Pi}{\partial |z|} \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

We kiezen voor de functie g de volgende:

$$g(z, \rho) = e^{-i\lambda z} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda^2}) \quad \lambda \text{ reëel.}$$

Kunnen we nu, net als in § 1, de integraal over de deksels weglaten?

Neen, niet zonder meer! Want, ondersteld dat k reëel is, zal Π voor $|z| \rightarrow \infty$ alleen sterk naar nul gaan, als $ka <$ eerste nulpunt van $J_0(x)$. Is $ka > k_1$ dan zal Π zuiver-sinustermen bevatten.

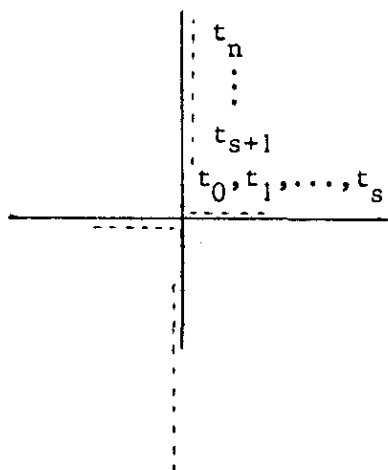
De integraal over de mantel van de cylinder zal dan niet convergeren voor $|z| \rightarrow \infty$. Daarom moeten we een kunstgreep toepassen. We onderstellen k complex. Dan komt alles in orde en er geldt

$$g(0,0) = 1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\pi a}{Ids} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, a) \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} dz.$$

Bij blz. 33

Citaat

Oberhettinger, pag. 143.



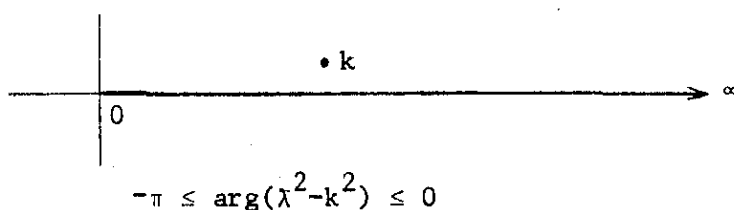
gebied van nulpunten van $I_0(\sqrt{t^2 - k^2 a^2})$

Reële deel van $\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}$ positief.

Bij blz. 34, formule (36)

$$f(z) = -\frac{I_{ds}}{2\pi^2 a^2} \left[\alpha \sum_0^{\infty} \frac{\cos \frac{z}{a} (v\alpha + \frac{1}{2}\alpha)}{I_0(\sqrt{(v + \frac{1}{2})^2 \alpha^2 - k^2 a^2})} + \right. \\ \left. + 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} \frac{\cosh(\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2})}{J_1(k_n) [1 + e^{\frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}]} \right]$$

Bij blz. 36, voor $0 \leq \lambda < \infty$, definitie:



Nu is $\frac{\partial H}{\partial \rho} = -H_{\varphi} = \frac{4\pi}{c} f(z)$ als $f(z)$ de geïnduceerde stroomdichtheid op de cylinderwand is, dus wordt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda z} f(z) dz = - \frac{Ids}{2\pi a} \frac{1}{J_0(a\sqrt{k^2 - \lambda^2})}$$

en met Fourieromkering:

$$f(z) = - \frac{Ids}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda z}}{J_0(a\sqrt{k^2 - \lambda^2})} d\lambda$$

$$f(z) = - \frac{Ids}{2\pi^2 a^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{z}{a} t}{J_0(\sqrt{k^2 a^2 - t^2})} dt$$

(35)

Dit is helemaal analoog aan (1).

Het is ook duidelijk dat we niet zonder meer in (35) k reëel mogen nemen.

Is k reëel met $ka > k_1$ dan convergeert de integraal niet, vanwege de singulariteit der integrand. Hier heeft Oberhettinger niet op gewezen.

De theorie van Oberhettinger is niet zonder critiek wat dit betreft.

Trouwens wat resonantie betreft is niets bij hem te vinden. Het is ook duidelijk dat we deze eigenaardigheid niet hadden bij de potentiaalproblemen in de electrostatica. Voor $k \rightarrow 0$ is altijd voldaan aan $ka < k_1$.

Vervolgens de residuenstelling loslaten op (35). De analyse van Oberhettinger is daarvoor ook niet voldoende! Hij maakt zich er af met "Umgeht man bei der Integration längs der reellen λ -Achse die auf ihr liegenden Pole durch einen kleines nach oben? oder unten gehenden Halbkreisbogen mit der Radius δ , den man nachträglich gegen Null gehen lassen kann"

Voor k "bijna reëel" liggen een gedeelte van de nulpunten van $J_0(\sqrt{k^2 a^2 - t^2})$ vlak bij de reële as, de rest vlak bij de imaginaire as. Neem $t_n =$

$= + \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}$, waarin $\sqrt{\quad}$ zo gekozen is dat het imaginaire deel positief is, dan net als vroeger voor $z > 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{I_0(\sqrt{t^2 - k^2 a^2})} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Residu}_{t=t_n} \frac{e^{i \frac{z}{a} t}}{I_0(\sqrt{t^2 - k^2 a^2})} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{J_1(k_n)} \frac{e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2}}}{\sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{J_1(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2}}}{i \sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2}} .
 \end{aligned}$$

$$f(z) = -\frac{I_{ds}}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{J_1(k_n)} \frac{e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2}}}{\sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2}} \quad (z > 0) \quad (36)$$

Dit is helemaal analoog aan (2).

Het is nu in deze formule dat we k reëel mogen nemen, mits het geval van resonantie uitgesloten wordt. In zoverre is dus (36) algemener dan (35).

Nu is bovendien elke tweeduidigheid verdwenen.

$\sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2}$ heeft positief reëel deel. Voor de termen waar deze wortel zuiver imaginair is, geldt $\sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2} = -i \sqrt{k_n^2 a^2 - k_n^2}$. Overigens klopt (36) precies met de uitdrukking op de rand voor H_φ , gegeven bovenaan blz. 24, door de relatie: $f(z) = -\frac{c}{4\pi} H_\varphi(z, a)$.

Ook hier kunnen we de methode van Watson toepassen:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cos \lambda w}{(w-t) I_0(\sqrt{w^2 - k^2 a^2}) \cos \frac{\pi w}{\alpha}} dw .$$

Enkelvoudige polen liggen bij

a) $w = t$

b) $w = \pm i\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}$

c) $w = \pm (\nu + \frac{1}{2})\alpha$.

De residuen zijn achtereenvolgens:

a)
$$\frac{\cos \lambda t}{I_0(\sqrt{t^2 - k^2 a^2}) \cos \frac{\pi t}{\alpha}}$$

b)
$$-\frac{\cosh(\lambda\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2})}{\cosh(\frac{\pi\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}{\alpha}) J_1(k_n) [\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2} \pm it]} \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}$$

c)
$$-\frac{\alpha}{\pi} \frac{(-1)^\nu \cos(\lambda\alpha\nu + \frac{1}{2}\lambda\alpha)}{I_0(\sqrt{(\nu+\frac{1}{2})^2 \alpha^2 - k^2 a^2})} \frac{1}{[(\nu+\frac{1}{2})\alpha \mp t]}$$

Nu krijgen we de partiële breuksplitsing:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \lambda t}{I_0(\sqrt{t^2 - k^2 a^2}) \cos \frac{\pi t}{\alpha}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n \cosh(\lambda\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2})}{J_1(k_n) \cosh(\frac{\pi\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}{\alpha})} \frac{1}{(k_n^2 - k^2 a^2 + t^2)} \\ &+ \frac{\alpha}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cos(\lambda\alpha\nu + \frac{1}{2}\lambda\alpha)}{I_0(\sqrt{(\nu+\frac{1}{2})^2 \alpha^2 - k^2 a^2})} \frac{2(\nu+\frac{1}{2})\alpha}{(\nu+\frac{1}{2})^2 \alpha^2 - t^2} \end{aligned}$$

Weer met $\cos \frac{\pi t}{\alpha}$ vermenigvuldigen en integreren.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda t}{I_0(\sqrt{t^2 - k^2 a^2})} dt = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda\alpha(\nu+\frac{1}{2})}{I_0(\sqrt{(\nu+\frac{1}{2})^2 \alpha^2 - k^2 a^2})} + 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} \frac{\cosh(\lambda\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2})}{J_1(k_n) [1 + e^{\frac{2\pi\sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}}{\alpha}}]}$$

Dit is geheel analoog aan (3).

De formules gelden alleen buiten resonantie!

Voor $\alpha = \frac{a}{|z|} \pi$ krijgen we juist formule 36 terug.

Schelkunoff gebruikt, afgezien dat hij $j = -i$ gebruikt,

$$\frac{e^{+ikr}}{r} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\rho\sqrt{\lambda^2 - k^2}) \cos \lambda z d\lambda .$$

De reflectie van de buis wordt beschreven door

$$\Pi_{\text{refl.}} = \int_0^{\infty} I_0(\rho\sqrt{\lambda^2 - k^2}) \cos \lambda z P(\lambda) d\lambda$$

$$P(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \frac{K_0(a\sqrt{\lambda^2 - k^2})}{I_0(a\sqrt{\lambda^2 - k^2})} \text{ uit eis } \Pi = 0 \text{ voor } \rho = a .$$

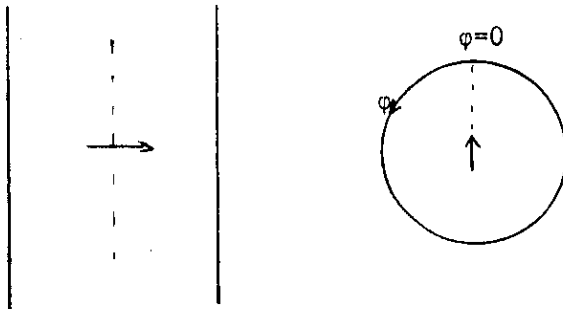
Dus

$$\Pi_{\text{refl.}} = -\frac{I_{ds}}{c} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(a\sqrt{\lambda^2 - k^2})}{I_0(a\sqrt{\lambda^2 - k^2})} I_0(\rho\sqrt{\lambda^2 - k^2}) \cos \lambda z d\lambda .$$

Dit geheel analoog aan (6).

Electrische dipool loodrecht op de as van de cylinder

Neem stroomelement $I ds$. Het veld van de dipool, vrij in de ruimte, kunnen we in cylindercoördinaten beschrijven, met z as loodrecht op de dipoolas.



Voor de vrije dipool is de vectorpotentiaal Π^0 bekend; ze heeft alleen een component parallel aan de as van de dipool.

Stel deze component $f(z, \rho)$, dus $\Pi^0 = f \vec{e}_z$,

$$f(z, \rho) = \frac{I ds}{c} \frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}.$$

In cylindercoördinaten zijn de componenten van Π^0 als volgt:

$$\Pi_z^0 = 0$$

$$\Pi_\rho^0 = \cos \varphi f(z, \rho)$$

$$\Pi_\varphi^0 = -\sin \varphi f(z, \rho).$$

Het veld van de vrije dipool is in deze coördinaten ($H = \text{rot } \Pi$, $-ikE = \text{rot } H$)

$$H_z^0 = -\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

$$-ikE_z^0 = \cos \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \rho}$$

$$H_\rho^0 = \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$-ikE_\rho^0 = \cos \varphi \left\{ k^2 f + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right\}$$

$$H_\varphi^0 = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$-ikE_\varphi^0 = -\sin \varphi \left\{ k^2 f + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} \right\}.$$

Nu brengen we de cylinder aan. Het primaire veld heeft alleen $\begin{matrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{matrix}$ componenten wat de φ afhankelijkheid betreft. Het secundaire veld, opgewekt door het primaire zal dan ook slechts deze φ afhankelijkheid kunnen hebben.

We kunnen een zeer algemene oplossing van de Maxwellvergelijkingen in cylindercoördinaten opschrijven, waarbij nog twee willekeurige scalaire golf-functies Π en P voorkomen. De Π is de z -component van een magnetische vector van Fitzgerald.

$$\begin{aligned} H &= \text{rot } \Pi_e \\ -ikE &= k^2 \Pi_e + \text{grad div } \Pi_e \\ E &= \text{rot } \Pi_m \\ ikH &= k^2 \Pi_m + \text{grad div } \Pi_m \\ -ikE_z &= k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \\ -ikE_\rho &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} - \frac{ik}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \\ -ikE_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial z} + ik \frac{\partial P}{\partial \rho} \\ ikH_z &= k^2 P + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\ ikH_\rho &= \frac{ik}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial z} \\ ikH_\varphi &= -ik \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial z} . \end{aligned}$$

P en Π zijn scalaire golf-functies, die voldoen aan

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = \Delta P + k^2 P = 0 .$$

We laten ons er niet over uit of dit het algemene veld is, maar proberen P en Π te bepalen, zodat aan alle eisen voldaan is.

We hebben gezien dat alleen termen $e^{ni\varphi}$ optreden met $n = \pm 1$. Het ligt dus voor de hand om te stellen

$$\Pi = \cos \varphi U(z, \rho)$$

$$P = \sin \varphi V(z, \rho) .$$

De formules voor het veld worden dan

$$-ikE_z = \cos \varphi \left\{ k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\}$$

$$-ikE_\rho = \cos \varphi \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} - ik \frac{V}{\rho} \right\}$$

$$-ikE_\varphi = -\sin \varphi \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z} - ik \frac{\partial V}{\partial \rho} \right\}$$

$$ikH_z = \sin \varphi \left\{ k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\}$$

$$ikH_\rho = \cos \varphi \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial z} - \frac{ik}{\rho} U \right\}$$

$$ikH_\varphi = \cos \varphi \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z} - ik \frac{\partial U}{\partial \rho} \right\} .$$

Kijk nu eerst naar de randvoorwaarden:

$$E_z = 0, E_\varphi = 0, H_\rho = 0 \text{ voor } \rho = a \text{ voor alle } (z, \varphi).$$

Hiervan zijn 2 onafhankelijk. De eerste $E_z = 0$ kan vervuld worden door $U = 0$ op de cylinder, want dan is $\frac{\partial U}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ ook nul. $E_\varphi = 0$, dus nog eisen $\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0$.

We zien ook dat dan automatisch $H_\rho = 0$ wordt op de rand.

Dit zijn oude bekende randvoorwaarden:

$$U = 0 \text{ en } \frac{\partial V}{\partial n} = 0 .$$

Normaaloplossingen voor U en V zijn

$$J_1(\lambda \rho) e^{-|z| \sqrt{\lambda^2 - k^2}} ,$$

dus direct op te schrijven:

$$\left. \begin{aligned}
 U &= \sum_1^{\infty} \alpha_n J_1\left(k_n \frac{\rho}{a}\right) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \\
 V &= \sum_1^{\infty} \beta_n J_1\left(x_n \frac{\rho}{a}\right) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k_a^2}}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 J_1(k_n) &= 0 \\
 J_1'(x_n) &= 0
 \end{aligned}$$

We moeten nu α_n en β_n nog bepalen uit het karakter van hun singulariteit in de oorsprong. Eerst α_n :

$$\begin{aligned}
 -ikE_z &= \cos \varphi \left\{ k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\} = \cos \varphi \sum_1^{\infty} \alpha_n \frac{k_n^2}{a^2} J_1\left(k_n \frac{\rho}{a}\right) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \\
 &\sim \cos \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \rho} \text{ voor } (z, \rho) \rightarrow (0, 0) .
 \end{aligned}$$

E_z is een oneven functie van z . Bij één keer integreren krijgen we een even functie van z , als we constanten nul stellen.

Dus

$$\frac{c}{Ids} \sum_1^{\infty} \alpha_n \frac{k_n^2}{a^2} \frac{-a}{\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} J_1\left(k_n \frac{\rho}{a}\right) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k_a^2}} \sim \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) .$$

Dit probleem is reeds opgelost, zie formule (20), (19) en de theorie daartussen. Er komt

$$(\gamma_n) = \frac{c}{Ids} \alpha_n \frac{k_n^2}{a^2} \frac{-a}{\sqrt{k_n^2 - k_a^2}} = \frac{k_n^2}{a} \frac{2}{a} \frac{-1}{J_0^2(k_n) \sqrt{k_n^2 - k_a^2}}$$

dus

$$\alpha_n = \frac{Ids}{c} \frac{2}{ak_n J_0^2(k_n)} ,$$

dus

$$U = \frac{I_{ds}}{c} \frac{2}{a} \sum_1^{\infty} \frac{J_1(k_n \frac{\rho}{a})}{k_n J_0^2(k_n)} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{k_n^2 - k^2 a^2}} \quad (37)$$

Nu de functie V. Deze wordt gevonden uit de singulariteit van H_z .

$$ikH_z = \sin \varphi \left\{ k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} = \sin \varphi \sum_1^{\infty} \beta_n \frac{x_n^2}{a^2} J_1(x_n \frac{\rho}{a}) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} \sim ik \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \rho},$$

$$\sum_1^{\infty} \beta_n \frac{x_n^2}{a^2} J_1(x_n \frac{\rho}{a}) e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} \sim -ik \frac{I_{ds}}{c} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right).$$

Rechts-links staat een even functie van z.

$$\frac{\partial}{\partial z} (F - G) = \sum_1^{\infty} b_n(z) J_1\left(\frac{x_n}{a} \rho\right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial z} \{F - G\} J_1(x_n \frac{\rho}{a}) d\rho &= \sum_1^{\infty} b_m(z) \int_0^a \rho J_1(x_n \frac{\rho}{a}) J_1(x_m \frac{\rho}{a}) d\rho \\ &= b_n(z) \int_0^a \rho J_1^2(x_n \frac{\rho}{a}) d\rho \\ &= \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) b_n(z) J_1^2(x_n) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \rho \frac{\partial F}{\partial z} J_1(x_n \frac{\rho}{a}) d\rho &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^a \rho F(z, \rho) J_1(x_n \frac{\rho}{a}) d\rho \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^a \beta_n \frac{x_n^2}{a^2} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} \rho J_1^2(x_n \frac{\rho}{a}) d\rho \right] \end{aligned}$$

$$= - \frac{\sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}{a} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} \beta_n \frac{x_n^2}{a^2} \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{x_n^2}\right) J_1^2(x_n) .$$

Nu $z \rightarrow 0^+$, dus $b_n(z) \rightarrow 0$

$$\beta_n = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{-2a}{\sqrt{x_n^2 - k^2 a^2} [x_n^2 - 1] J_1^2(x_n)} \int_0^a \rho \frac{\partial G}{\partial z} J_1(x_n \frac{\rho}{a}) d\rho$$

$$\beta_n = \frac{-2a}{\sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} \frac{-ik \frac{Ids}{c}}{(x_n^2 - 1) J_1^2(x_n)} \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_0^a \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \left(\frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) J_1(x_n \frac{\rho}{a}) d\rho .$$

De limiet is ook (eenmaal naar ρ partieel integreren)

$$= \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) \frac{d}{d\rho} \{ \rho J_1(x_n \frac{\rho}{a}) \} d\rho$$

$$= - \frac{x_n}{a} \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ik\sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) \rho J_0(\rho \frac{x_n}{a}) d\rho$$

$$= - \frac{x_n}{a} \int_0^a \frac{-z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho = - \frac{x_n}{a} \int_0^a z \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) d\rho$$

$$= \frac{x_n}{a} \text{ voor } z \rightarrow +0 .$$

$$\beta_n = +2ik \frac{Ids}{c} \frac{1}{(x_n - \frac{1}{x_n}) J_1^2(x_n) \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}}$$

$$V = +2ik \frac{Ids}{c} \sum_1^{\infty} \frac{J_1(x_n \frac{\rho}{a})}{(x_n - \frac{1}{x_n}) J_1^2(x_n) \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} e^{-\frac{z}{a} \sqrt{x_n^2 - k^2 a^2}} \quad (38)$$

Nu de energie die per seconde door de doorsnede gaat op $z \rightarrow +\infty$.

Deze is $\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E_{\rho} H_{\varphi}^* - E_{\varphi} H_{\rho}^*]$ geïntegreerd.

$$\begin{aligned}
 & [E_{\rho} H_{\varphi}^* - E_{\varphi} H_{\rho}^*] \times k^2 = \\
 & \cos^2 \varphi \left\{ ik \frac{V}{\rho} - \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} \right\} \left\{ ik \frac{\partial U^*}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V^*}{\partial z} \right\} \\
 & + \sin^2 \varphi \left\{ ik \frac{U^*}{\rho} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial \rho \partial z} \right\} \left\{ ik \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z} \right\} .
 \end{aligned}$$

Geïntegreerd over de doorsnede geeft dit

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho [\cos^2 \varphi (\dots) + \sin^2 \varphi (\dots)] = \pi \int_0^a \rho d\rho \{ (\dots) + (\dots) \} = \\
 & - \pi \int_0^a d\rho \left[+k^2 V \frac{\partial U^*}{\partial \rho} + k^2 U^* \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial V^*}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \rho \partial z} \right] \\
 & + \pi ik \int_0^a d\rho \left[\frac{V}{\rho} \frac{\partial V^*}{\partial z} - \frac{U^*}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z} + \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \rho \partial z} - \rho \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} \right] .
 \end{aligned}$$

De eerste integraal kunnen we direct integreren. De integrand is nl.

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[V U^* + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V^*}{\partial z} \right]$$

$$\left[V U^* + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V^*}{\partial z} \right]_0^a = 0, \text{ daar } U \text{ en } \frac{\partial U}{\partial z} \text{ nul voor } \rho = a, \text{ en}$$

$$V \text{ en } \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \text{ voor } \rho = 0.$$

In de tweede integraal:

$$\int_0^a -\rho d\rho \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} = \left(-\rho \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Big|_0^a + \int_0^a \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \right) \frac{\partial U}{\partial z} d\rho .$$

De stokterm verdwijnt:

$$\int_0^a \left(-\frac{U^*}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z} - \rho \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} \right) d\rho = \int_0^a \frac{\partial U}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \right) - \frac{U^*}{\rho} \right\} d\rho .$$

Precies eender:

$$\int_0^a \left(\frac{V}{\rho} \frac{\partial V^*}{\partial z} + \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \rho \partial z} \right) d\rho = \int_0^a \frac{\partial V^*}{\partial z} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{V}{\rho} \right\} d\rho .$$

Nu voldoet $\cos \varphi U (= \Pi)$ aan de golfvergelijking, dus U aan:

$$\rho \left(k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = \frac{U}{\rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right), \text{ idem voor } V.$$

De integralen zijn dan samen

$$\int_0^a \frac{\partial V^*}{\partial z} \left[k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] \rho d\rho - \int_0^a \frac{\partial U}{\partial z} \left[k^2 U^* + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} \right] \rho d\rho .$$

De energie die per seconde door één doorsnee stroomt is dan het reële deel van

$$\frac{c}{8ik} \int_0^a \left[\frac{\partial U}{\partial z} \left\{ k^2 U^* + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial V^*}{\partial z} \left\{ k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} \right] \rho d\rho .$$

Uit deze vorm kunnen we het direct uitrekenen.

$$U \sim \sum_{k_n < k_a} u_n J_1 \left(k_n \frac{\rho}{a} \right) e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k_a^2 a^2 - k_n^2}}, \quad u_n = \frac{Ids}{c} \frac{2}{a} \frac{1}{k_n J_0^2(k_n)}$$

$$V \sim \sum_{x_n < k_a} v_n J_1 \left(x_n \frac{\rho}{a} \right) e^{i \frac{z}{a} \sqrt{k_a^2 a^2 - x_n^2}}, \quad v_n = \frac{Ids}{c} 2k \frac{1}{\left(x_n - \frac{1}{x_n} \right) J_1^2(x_n) \sqrt{k_a^2 a^2 - x_n^2}} .$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \sum \left(\frac{i}{a} \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} \right) u_n (\dots)$$

$$k^2 U^* + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} = \sum \frac{k_n^2}{a^2} u_n^* , \text{ termen zijn orthogonaal.}$$

$$\int_0^a \rho J_1\left(k_n \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(k_m \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{1}{2} a^2 \delta_{n,m} J_2^2(k_n) .$$

Dus

$$\int_0^a \frac{\partial U}{\partial z} \left\{ k^2 U^* + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} \right\} \rho d\rho = \frac{i}{2a} \sum_{ka > k_n} k_n^2 |u_n|^2 \sqrt{k^2 a^2 - k_n^2} J_0^2(k_n) .$$

$$k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \sum \frac{x_n^2}{a^2} v_n (\dots)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial z} = \sum \frac{-i}{a} \sqrt{k^2 a^2 - x_n^2} v_n^* ; \int \rho J_1\left(x_n \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(x_m \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{1}{2} a^2 \delta_{n,m} \left(1 - \frac{1}{x_n^2}\right) J_1^2(x_n)$$

$$\int_0^a - \frac{\partial V^*}{\partial z} \left\{ k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} \rho d\rho = \frac{i}{2a} \sum_{ka > x_n} x_n^2 |v_n|^2 \sqrt{k^2 a^2 - x_n^2} \left(1 - \frac{1}{x_n^2}\right) J_1^2(x_n) .$$

Energie door de doorsnee reële deel van

$$\left(\frac{I_{ds}}{c}\right)^2 \frac{c}{8ik} \frac{i}{2a} \left\{ \sum_1 \frac{4}{a^2} \frac{\sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}{J_0^2(k_n)} + \sum_2 4k^2 \frac{x_n^2}{x_n^2 - 1} \frac{1}{J_1^2(x_n) \sqrt{k^2 a^2 - x_n^2}} \right\} .$$

De energie die per seconde stroomt door de doorsnede ($z \neq 0$) is gelijk aan

$$\frac{I^2 ds^2}{4a^3 kc} \left\{ \sum_{k_n < ka} \frac{\sqrt{k^2 a^2 - k_n^2}}{J_0^2(k_n)} + k^2 a^2 \sum_{x_n < ka} \frac{x_n^2}{(x_n^2 - 1) J_1^2(x_n) \sqrt{k^2 a^2 - x_n^2}} \right\} .$$

Stond de dipool vrij, dan is de energie die hij per seconde in een half-ruimte stuurt: $\frac{k^2 I^2 ds^2}{6c}$.

De stralingsfactor is dus:

$$F_1 = \left(\frac{3}{2ka^3}\right) \sum \frac{\sqrt{k_a^2 - k_n^2}}{J_0^2(k_n)} + \left(\frac{3}{2ka}\right) \sum \frac{x_n^2}{(x_n^2 - 1)J_1^2(x_n)\sqrt{k_a^2 - x_n^2}}$$

Gevonden 10-11 januari 1946.