TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

# VOORTGEZETTE FUNCTIETHEORIE

**Syllabus**

**Prof. Dr. J. Boersma**

(Voor de volledige uitwerking zie het gelijknamige manuscript)

**1978 - 1984**

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.297
Prijs f. 2,50

# Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

# Voortgezette Functietheorie

Syllabus naar het college van
prof.dr. J. Boersma

J. Boersma
HG 6.74

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

# V O O R T G E Z E T T E   F U N C T I E T H E O R I E

Syllabus naar het college van

Prof.dr. J. Boersma

Voorjaarssemester 1982

Inhoud blz.

Inhoud (vervolg) blz.

25-1-1982 / 31-1-1983 / 6-2-1984



# 1. Gammafunctie

Lit. AA[1] p. 374-377, p. 465-467

## 1.1. Definitie en eigenschappen van de gammafunctie

Definitie. $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ , $\operatorname{Re} z > 0$ . Euler 1729

Eigenschap 1. Voor $n = 0,1,2,\ldots$ geldt

$$\Gamma(n+1) = n! \, ,$$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cdots \cdot (n-\tfrac{1}{2})\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \, .$$

Eigenschap 2. $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ ;

$\Gamma(z)$ is analytisch in $\mathbb{C}$ met uitzondering van de enkelvoudige polen

$z = 0,-1,-2,\ldots$ ; $\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$ . Voor bewijs zie Wks 52

Eigenschap 3. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , (functionaalbetrekking)

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z) \, , \quad n \text{ geheel en } \geq 0 \, .$$

Eigenschap 4. $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ , $x > 0$ , $n$ geheel . Euler 1729

Voor het bewijs zie [1]*), 7.6.28.

Constante van Euler ([1], 7.5.15)

$$\lim_{n\to\infty} [1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n] = \gamma \, . \qquad \gamma = 0.577215\ldots$$

Eigenschap 5. $\Gamma(z) = e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{z}{n})^{-1} e^{z/n}$ , $z \in \mathbb{C}$ , Weierstrass 1856

$z \neq -m$ met $m = 0,1,2,\ldots$ .

Eigenschap 6. $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})$ , verdubbelingsformule van Legendre.

Nevenresultaat: $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\, n^{1/2}}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

---

*) Cijfers tussen [ ] verwijzen naar de literatuurlijst op p. 33.

## 1.2. Betafunctie, verdere eigenschappen van de gammafunctie

Definitie. $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ , $\operatorname{Re} p > 0$ , $\operatorname{Re} q > 0$ . Euler 1772

Eigenschap 7. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

Eigenschap 8. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ , $z \in \mathbb{C}$ , $z \neq m$ met $m$ geheel.

Gevolg. $\Gamma(z)$ heeft geen nulpunten. Verwijzen naar Wis 52, AAB.b.14.

Eigenschap 9. $\dfrac{1}{\Gamma(z)} = \dfrac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-z} dt$ , $z \in \mathbb{C}$ , (Hankel's contourintegraal) 1864

waarin de contour $C$ een lus is om de negatieve reële as en $|\arg t| < \pi$ .

Voor het bewijs zie [1], 8.6.13.

## 1.3. Psi-functie

Definitie. $\psi(z) = \dfrac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ . logarithmische afgeleide van $\Gamma(z)$

Eigenschap 10. $\psi(z)$ is analytisch in $\mathbb{C}$ met uitzondering van de enkelvoudige polen $z = 0,-1,-2,\dots$ ; $\operatorname*{Res}_{z=-n} \psi(z) = -1$.

/ 15-2-84

1-2-82 (eig. 12 al gedaan)

Eigenschap 11. $\psi(z) = -\gamma - \dfrac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{z+n}\right) = -\gamma - \dfrac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z}{n(z+n)}$ ,

$z \in \mathbb{C}$ , $z \neq -m$ met $m = 0,1,2,\dots$ .

7-2-1983

Eigenschap 12. a) $\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)$ ;

b) $\psi(z+n) = \frac{1}{z+n-1} + \frac{1}{z+n-2} + \ldots + \frac{1}{z} + \psi(z)$ , n geheel en $\geq 0$ ;

c) $\psi(2z) = \frac{1}{2}\psi(z) + \frac{1}{2}\psi(z+\frac{1}{2}) + \log 2$ , verdubbelingsformule ;

d) $\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi\cot(\pi z)$ .

Speciale waarden. $\psi(1) = -\gamma$; $\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$ , n geheel en $\geq 0$ ;

$\psi(\frac{1}{2}) = -\gamma - 2\log 2$ ; $\psi(n+\frac{1}{2}) = -\gamma - 2\log 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{2m-1}$ ,

n geheel en $\geq 0$ .

Eigenschap 13. a) $\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\log t\,dt$, Re $z > 0$ ;

b) $\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ , $z \in \mathbb{C}$ , $z \neq -m$ met $m = 0,1,2,\ldots$ ;

c) $\Gamma'(1) = -\gamma$, $\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}$ , $\psi'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{2}$ .

## 1.4. Asymptotiek van de gammafunctie

Uitgaande van eigenschap 4 is met behulp van de somformule van Euler-Maclaurin ([1], 7.5.12) af te leiden

$$\log\Gamma(x) = (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{12x} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{B_2(t-[t])}{(x+t)^2}dt, \quad x > 0,$$

waarin $B_2(t)$ het tweede Bernoulli polynoom is en $[t]$ = entier van t. Door analytische voortzetting en differentiatie volgt

$$\log\Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{B_2(t-[t])}{(z+t)^2}dt,$$

$$\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \int_0^\infty \frac{B_2(t-[t])}{(z+t)^3}dt,$$

geldig voor $z \in \mathbb{C}$ minus de negatieve reële as.

Asymptotische ontwikkelingen:

$$\log\Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + O(z^{-1}),\quad z\to\infty,\ |\arg z| \le \pi-\delta,\ \delta>0\ ;$$

$$\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + O(z^{-2}),\quad z\to\infty,\ |\arg z| \le \pi-\delta,\ \delta>0\ ;$$

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\ z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}[1 + O(z^{-1})],\quad z\to\infty,\ |\arg z| \le \pi-\delta,\ \delta>0\ ;$$

$$n! = \sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\ [1 + O(n^{-1})],\quad n\to\infty,\ \text{formule van Stirling}\ ;$$

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}[1 + O(z^{-1})],\quad z\to\infty,\quad |\arg z| \le \pi-\delta,\ \delta>0\ .$$

Of instructie

## 1.5. Toepassingen van de gamma-, beta-, en psi-functie

Hieronder volgen een aantal voorbeelden van integralen, reeksen en producten, die kunnen worden uitgedrukt in termen van de $\Gamma$-, B- of $\psi$-functie.

1) $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^p)t^{z-1}dt$ , $p > 0$ , $\operatorname{Re} z > 0$ .

2) $\displaystyle\int_1^\infty (\log x)^p x^{-q}dx$ , $p > -1$ , $q > 1$ .

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ , $0 < \alpha < 1$ ; $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ , $0 < \alpha < 2$ .

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(p+n)}{n!} z^n$ , $|z| < 1$ .

5) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx$ , $\operatorname{Re} p > 0$ , $\operatorname{Re} q > 0$ .

6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^p(\sin\varphi)^q\,d\varphi$ , $p > -1$ , $q > -1$ .

7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$ , $\operatorname{Re} p > 0$ , $\operatorname{Re} q > 0$ .

8) $\int_0^1 t^{-1} \log(1-t)dt$ , $\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \log t \, dt$ .

9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)}$ , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$ .

10) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)}$ .

8-2-1982 | 14-2-1982 | 20-2-1982

## 2. Inverse van een analytische functie, conforme afbeelding

### 2.1. Inverse van een analytische functie

Stelling 2.1. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, zij $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, en zij $f(z_0) = w_0$. Dan geldt

$$\forall_{0<\delta<\Delta}\ \exists_{\varepsilon>0}\ (|w-w_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists_z\ (|z-z_0| < \delta \wedge f(z) = w)) .$$

Stelling 2.2. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, zij $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, en zij $f(z_0) = w_0$.

a) Zij $f'(z_0) \neq 0$ , dan geldt

$$\forall_{0<\delta<\Delta}\ \exists_{\varepsilon>0}\ (|w-w_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists!_z\ (|z-z_0| < \delta \wedge f(z) = w)) .$$

b) Zij $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ , $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ voor zekere gehele $m > 1$, en zij $f'(z) \neq 0$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$. Dan geldt

$\forall_{0<\delta<\Delta}\ \exists_{\varepsilon>0}$ $(0 < |w-w_0| < \varepsilon \Rightarrow$ er bestaan precies m verschillende getallen $z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(m-1)}$ met

$0 < |z^{(k)} - z_0| < \delta \wedge f(z^{(k)}) = w$ voor $k = 0,1,\ldots,m-1)$ .

Stelling 2.3. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, zij $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, zij $f(z_0) = w_0$, en zij $f'(z_0) \neq 0$. Dan is er een $\varepsilon > 0$, zo dat op $|w - w_0| < \varepsilon$ een analytische functie $g(w)$ gedefinieerd is die de inverse is van $f(z)$, i.e.

$$|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow |g(w) - z_0| < \Delta \text{ en } f(g(w)) = w .$$

Formule van Bürmann-Lagrange. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z| < \Delta$, zij $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, en zij $f(z) \neq 0$ voor $0 < |z| < \Delta$. De functie $w = f(z)$ bezit dan de inverse functie $z = g(w)$, analytisch voor $|w| < \varepsilon$, en gegeven door de Taylor-ontwikkeling

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n \ , \ |w| < \varepsilon \ , \text{ met } b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{z}{f(z)}\right]^n \Bigg|_{z=0} .$$

## 2.2. Maximum-modulus principe, lemma van Schwarz

Maximum-modulus principe. (I) Zij $f(z)$ analytisch en niet constant in een gebied $G$, en zij $|f(z)| \leq M$ in $G$. Dan geldt $|f(z)| < M$ in $G$.

(II) Zij $f(z)$ analytisch in een gebied $G$, dan neemt $|f(z)|$ geen maximum aan in $G$, tenzij $f(z)$ constant is.

(III) Zij $f(z)$ analytisch in een begrensd gebied $G$ met rand $C$, en zij $f(z)$ continu in $\bar{G} = G \cup C$. Dan neemt $|f(z)|$ zijn maximum aan op $C$, i.e.

$$\max_{z \in \bar{G}} |f(z)| = \max_{z \in C} |f(z)| .$$

Als $f(z)$ niet constant is in $G$, neemt $|f(z)|$ zijn maximum niet aan in $G$, i.e.

$$|f(z_0)| < \max_{z \in C} |f(z)| \text{ voor } z_0 \in G .$$

Lemma van Schwarz. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$, zij $|f(z)| \leq 1$ voor $|z| < 1$, en zij $f(0) = 0$. Dan is

òf $|f(z)| < |z|$ voor $0 < |z| < 1$, $|f'(0)| < 1$ ,

òf $f(z) = z\, e^{i\alpha}$ voor $|z| < 1$, met $\alpha \in \mathbb{R}$ (zodat $|f(z)| = |z|$) .

## 2.3. Conforme afbeelding

Stelling 2.4. Zij de functie $w = f(z)$ analytisch en niet constant in een gebied $G_z$ in het z-vlak. Dan is de beeldverzameling $f(G_z) = G_w$ een gebied in het w-vlak.

Definitie. Een functie $f(z)$ heet univalent in $G_z$ als

$$\forall_{z_1 \in G_z} \forall_{z_2 \in G_z} \; (f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2) ,$$

oftewel als

$$\forall_{z_1 \in G_z} \forall_{z_2 \in G_z} \; (z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)) .$$

Definitie. De afbeelding van $G_z$ op $G_w$ door de functie $w = f(z)$ heet conform als $f(z)$ in $G_z$ analytisch en univalent is.

27-2-1984

Stelling 2.5. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, en zij $f'(z_0) \neq 0$. Dan is er een $\delta$ met $0 < \delta < \Delta$, zodat ieder gebied $G_z$ binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$ door $f(z)$ conform afgebeeld wordt.

21-2-1983

Stelling 2.6. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van $G_z$ op $G_w$, dan is $f'(z) \neq 0$ in $G_z$.

15-2-1982

Een conforme afbeelding is (rechtstreeks) hoektrouw, d.w.z. twee krommen in het z-vlak die elkaar onder een hoek $\alpha$ snijden, worden afgebeeld op twee krommen in het w-vlak die elkaar onder dezelfde hoek $\alpha$ snijden.

Stelling. Als de continu differentieerbare afbeelding $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ met Jacobiaan $\neq 0$ rechtstreeks hoektrouw is, dan is $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ een analytische functie van $z = x + iy$.

Voor het bewijs zie [6], p. 150-152.

Stelling 2.7. Een conforme afbeelding $w = f(z)$ van $G_z$ op $G_w$ heeft een inverse afbeelding $z = g(w)$ van $G_w$ op $G_z$ die ook conform is.

Stelling 2.8. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van $G_z$ op $G_w$, en zij $t = g(w)$ een conforme afbeelding van $G_w$ op $G_t$, dan is de samengestelde afbeelding $t = g(f(z))$ een conforme afbeelding van $G_z$ op $G_t$.

Stelling 2.9. Zij $C_z$ een Jordankromme in het z-vlak met binnengebied $G_z$, zij $f(z)$ analytisch in $G_z \cup C_z$, en zij $f(z)$ univalent op $C_z$. Dan is $w = f(z)$ een conforme afbeelding van $G_z$ op het binnengebied $G_w$ van de Jordankromme $C_w = f(C_z)$ in het w-vlak. Als $z$ de kromme $C_z$ in positive zin doorloopt, dan doorloopt $w = f(z)$ de kromme $C_w$ ook in positieve zin.

Stelling 2.10. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van een enkelvoudig samenhangend gebied $G_z$ op een gebied $G_w$, dan is $G_w$ ook enkelvoudig samenhangend.

## 2.4. Afbeeldingsstelling van Riemann

Lemma 2.11. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van de cirkelschijf $|z| < 1$ op de cirkelschijf $|w| < 1$, en zij $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Dan is $f(z) = z$, i.e. de identieke afbeelding.

28-2-1983/15-3-1983

Afbeeldingsstelling van Riemann (I). Zij $G_z$ een enkelvoudig samenhangend gebied dat niet het hele z-vlak is, en zij $z_0 \in G_z$. Dan is er een éénduidig bepaalde conforme afbeelding $w = f(z)$ van $G_z$ op de cirkelschijf $|w| < 1$, zodanig dat $f(z_0) = 0$ en $f'(z_0) > 0$.

Voor het bewijs van het existentiegedeelte zie [2], p. 172-174, [6], p. 173-178.

Afbeeldingsstelling van Riemann (II). Laat $G_z$ resp. $G_w$ enkelvoudig samenhangende gebieden zijn welke niet het hele z-vlak resp. het hele w-vlak zijn, en zij $z_0 \in G_z$, $w_0 \in G_w$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. Dan is er een éénduidig bepaalde conforme afbeelding $w = f(z)$ van $G_z$ op $G_w$, zodanig dat $f(z_0) = w_0$ en $\arg f'(z_0) = \alpha$.

1-3-1982

Stelling 2.12. Laat $G_z$ resp. $G_w$ gebieden zijn met rand $C_z$ resp. $C_w$, welke Jordankrommen zijn, en zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van $G_z$ op $G_w$. Dan bestaat voor elke $z_0 \in C_z$,

$$\lim_{z \to z_0, z \in G_z} f(z) =: w_0 \text{ en } w_0 \in C_w \,.$$

Definieer $f(z_0) = w_0$ voor $z_0 \in C_z$, dan is de aldus uitgebreide functie $f(z)$ continu op $G_z \cup C_z$, en $w = f(z)$ beeldt $G_z \cup C_z$ één-ééinduidig af op $G_w \cup C_w$. Als z de rand $C_z$ doorloopt in positive zin, dan doorloopt $w = f(z)$ de rand $C_w$ in positieve zin.

Voor het bewijs zie [6], p. 179-181.

## 2.5. Spiegelingsprincipe van Schwarz

Stelling 2.13. Laat $G_1$ en $G_2$ disjuncte gebieden zijn waarvan de randen een gladde boog C gemeen hebben. Laat de functies $f_k(z)$ analytisch zijn in $G_k$ en continu in $G_k \cup C$, $k = 1,2$, en zij $f_1(z) = f_2(z)$ voor $z \in C$. Dan is de functie f(z) gedefinieerd door

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1, \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in C, \\ f_2(z), & z \in G_2, \end{cases}$$

analytisch in $G_1 \cup C \cup G_2$.

Spiegelingsprincipe van Schwarz (I). Zij G een gebied boven de reële as, waarvan de rand een open interval C van de reële as bevat. Zij f(z) analytisch in G, continu in $G \cup C$, en zij f(z) reëel voor $z \in C$. Zij $G^* = \{z \mid \bar{z} \in G\}$, i.e. $G^*$ is het gespiegelde van G t.o.v. de reële as. Dan is de functie F(z) gedefinieerd door

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup C, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in G^*, \end{cases}$$

analytisch in $G \cup C \cup G^*$.

Spiegelingsprincipe van Schwarz (II). Laat $G_z$ resp. $G_w$ gebieden zijn die geheel aan één zijde van een rechte $\ell_z$ resp. $\ell_w$ liggen, en waarvan de randen een open interval $C_z$ resp. $C_w$ met $\ell_z$ resp. $\ell_w$ gemeen hebben. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van $G_z$ op $G_w$, zij f(z) continu in $G_z \cup C_z$, en zij $f(C_z) = C_w$. Zij $G_z^*$ resp. $G_w^*$ het gebied verkregen door spiegeling van $G_z$ resp. $G_w$ aan $\ell_z$ resp. $\ell_w$. Definieer voor $z \in G_z^*$ : $f(z) = f^*(z^*)$, waarin $z^*$ wordt verkregen uit z door spiegeling aan $\ell_z$ en $f^*(z^*)$ uit $f(z^*)$ door spiegeling aan $\ell_w$. Dan is de aldus voortgezette functie $w = f(z)$ een conforme afbeelding van $G_z \cup C_z \cup G_z^*$ op $G_w \cup C_w \cup G_w^*$.

7-3-1983/12-3-1984

# 3. Conforme afbeelding door elementaire functies

## 3.1. Gebroken lineaire afbeelding

Definitie. Een gebroken lineaire afbeelding (GLA) of Möbius transformatie is een afbeelding van de vorm

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} ,$$

met a,b,c,d complex, en $ad-bc \neq 0$ .

De GLA $w = f(z)$ is een conforme afbeelding van het uitgebreide z-vlak op het uitgebreide w-vlak.

De samengestelde afbeelding van twee GLA's is eveneens gebroken lineair.

Elementaire GLA's:

$$\begin{array}{lll} w = z + a & \text{translatie} & , \\ w = bz & \text{draaistrekking} & , \left\{ \begin{array}{l} w = e^{i\alpha} z, \ \alpha \in \mathbb{R}, \text{ rotatie om } z = 0 , \\ w = \rho z, \ \rho > 0, \text{ vermenigvuldiging t.o.v. } z = 0. \end{array} \right. \\ w = 1/z & \text{inversie} & , \end{array}$$

Elke GLA is op te bouwen door samenstelling van elementaire GLA's.

Definitie. Een "cirkel" in het uitgebreide complexe vlak is een gewone cirkel of een rechte.

De algemene vergelijking van een "cirkel" in het z-vlak luidt

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \ , \quad A \in \mathbb{R} , \ C \in \mathbb{R} , \ B\bar{B} - AC > 0 \ .$$

Stelling 3.1. Bij een GLA $w = f(z)$ wordt iedere "cirkel" in het z-vlak afgebeeld op een "cirkel" in het w-vlak.

Definitie. Twee punten $z_1$ en $z_2$ liggen gespiegeld t.o.v. de "cirkel"

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 ,$$

indien

$$Az_1\bar{z}_2 + Bz_1 + \bar{B}\bar{z}_2 + C = 0 .$$

Stelling 3.2. Laat $z_1$ en $z_2$ gespiegeld liggen t.o.v. de "cirkel" $C_z$, en zij $w = f(z)$ een GLA. Dan liggen de beeldpunten $w_1 = f(z_1)$ en $w_2 = f(z_2)$ gespiegeld t.o.v. de "cirkel" $C_w = f(C_z)$.

8-3-1982

## 3.2. Toepassingen van de gebroken lineaire afbeelding

1) De algemene GLA van $|z| < 1$ op $|w| < 1$ wordt gegeven door

$$w = f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} , \quad |a| < 1 , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Stelling 3.3. Iedere conforme afbeelding van $|z| < 1$ op $|w| < 1$ is gebroken lineair.

2) De algemene GLA van Im $z > 0$ op $|w| < 1$ wordt gegeven door

$$w = f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{z-\bar{a}} , \quad \text{Im } a > 0 , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Stelling 3.4. Iedere conforme afbeelding van Im $z > 0$ op $|w| < 1$ is gebroken lineair.

3) Laat $z_1$, $z_2$, $z_3$ drie verschillende punten zijn op een cirkel $C_z$ in het z-vlak, en $w_1$, $w_2$, $w_3$ drie verschillende punten op een cirkel $C_w$ in het w-vlak. De conforme afbeelding $w = f(z)$ van $C_z$ op $C_w$ zodanig dat $f(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$, is een GLA bepaald door

$$\frac{(w - w_1)(w_3 - w_2)}{(w - w_2)(w_3 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(z_3 - z_1)} .$$

Indien $z_1$, $z_2$, $z_3$ en $w_1$, $w_2$, $w_3$ in dezelfde volgorde op $C_z$ resp. $C_w$ liggen, wordt het binnengebied $G_z$ van $C_z$ afgebeeld op het binnengebied $G_w$ van $C_w$. De algemene GLA van $\mathrm{Im}\, z = 0$ op $\mathrm{Im}\, w = 0$ wordt gegeven door

$$w = f(z) = \frac{(z - \alpha)(\beta - \gamma)}{(z - \gamma)(\beta - \alpha)} , \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R}, \ \gamma \in \mathbb{R} .$$

Indien $\alpha,\beta,\gamma$ in positieve volgorde liggen, wordt $\mathrm{Im}\, z > 0$ afgebeeld op $\mathrm{Im}\, w > 0$.

13-3-1984

4) Afbeeldingsstelling van Riemann (III). Zij $G_z$ een gebied waarvan de rand $C_z$ een Jordankromme is. Laat $z_1$, $z_2$, $z_3$ resp. $w_1$, $w_2$, $w_3$ verschillende punten zijn welke in positieve volgorde op $C_z$ resp. $|w| = 1$ liggen. Dan is er een éénduidig bepaalde continue afbeelding $w = f(z)$ van $G_z \cup C_z$ op $|w| \leq 1$, welke $G_z$ conform afbeeldt op $|w| < 1$, zodanig dat $f(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$.

14-3-1983

## 3.3. De afbeeldingen $w = z^2$ en $w = \sqrt{z^2 - 1}$

De functie $w = z^2$ is een conforme afbeelding voor elk gebied $G_z$ met de eigenschap: $z \in G_z \Rightarrow -z \notin G_z$. De inverse afbeelding wordt gegeven door $z = \sqrt{w}$, waarbij een passende tak voor $\sqrt{w}$ te nemen is.

De functie $w = z^2$ beeldt het eerste kwadrant van het z-vlak conform af op het halfvlak $\text{Im } w > 0$. De afbeelding is voort te zetten door spiegeling aan (i) de positieve reële as, of (ii) de positieve imaginaire as van het z-vlak. In geval (i) wordt het halfvlak $\text{Re } z > 0$ afgebeeld op $-\pi < \arg w < \pi$, d.i. het w-vlak met snede langs de negatieve reële as. In geval (ii) wordt het halfvlak $\text{Im } z > 0$ afgebeeld op $0 < \arg w < 2\pi$, d.i. het w-vlak met snede langs de positieve reële as.

15-3-1982

De functie $w = \sqrt{z^2 - 1}$ beeldt het eerste kwadrant van het z-vlak conform af op het eerste kwadrant van het w-vlak, waarbij de punten $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$ overgaan in resp. $w = i$, $w = 0$, $w = \infty$. Deze afbeelding is voort te zetten door spiegeling aan diverse rechte randgedeelten. De functie $w = \sqrt{z^2 - 1}$ blijkt dan het z-vlak met snede $[-1,1]$ langs de reële as af te beelden op het w-vlak met snede $[-i,i]$ langs de imaginaire as.

21-3-1983 | 26-3-1984

### 3.4. De afbeelding $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$

De functie $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ is een conforme afbeelding voor elk gebied $G_z$ met de eigenschap: $z \in G_z \Rightarrow z^{-1} \notin G_z$.
De functie $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ beeldt het gebied $|z| > 1$ af op het w-vlak met snede $[-1,1]$ langs de reële as. De functie $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ beeldt het halfvlak $\text{Im } z > 0$ af op het w-vlak met snedes $(-\infty,-1]$ en $[1,\infty)$ langs de reële as.

22-3-1982

## 3.5. Afbeeldingen door exponentiële, hyperbolische en trigonometrische functies

De functie $w = e^z$ is een conforme afbeelding voor elk gebied $G_z$ met de eigenschap: $z \in G_z \Rightarrow z + 2k\pi i \notin G_z$ voor elke gehele $k \neq 0$.

De functie $w = e^z$ beeldt de strook $-\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi$ conform af op het w-vlak met snede langs de negatieve reële as.

De functie $w = \cosh z$ beeldt de strook $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$ conform af op het w-vlak met snedes $(-\infty,-1]$ en $[1,\infty)$ langs de reële as.

De functie $w = \sin z$ beeldt de strook $-\pi/2 < \mathrm{Re}\, z < \pi/2$ conform af op het w-vlak met snedes $(-\infty,-1]$ en $[1,\infty)$ langs de reële as.

11-4-1983 / 2-4-1984

## 4. Afbeeldingsfunctie van Schwarz-Christoffel

### 4.1. Formule van Schwarz-Christoffel

Een polygoon gebied is een enkelvoudig samenhangend gebied waarvan de rand bestaat uit een eindig aantal rechte lijnstukken, halfrechten of rechten. De hoekpunten van de rand worden aangegeven door $z_1, z_2, \ldots, z_n$, genummerd in positieve volgorde. Indien het gebied niet begrensd is, liggen één of meer hoekpunten in $\infty$.

In een eindig hoekpunt $z_k$ wordt de binnenhoek van de rand aangegeven door $\pi\alpha_k$, $0 < \alpha_k \le 2$, en de buitenhoek door $\pi\mu_k = \pi - \pi\alpha_k$, zodat $-1 \le \mu_k < 1$.

In een hoekpunt $z_k = \infty$ wordt gedefinieerd:

binnenhoek $\pi\alpha_k$ = hoek waarover $\overrightarrow{z_{k-1}z_k}$ door het gebied gedraaid moet worden om met $\overrightarrow{z_{k+1}z_k}$ samen te vallen, $0 \le \alpha_k \le 2$;

buitenhoek $\pi\mu_k = \pi + \pi\alpha_k$, zodat $1 \le \mu_k \le 3$.

Meetkundig is in te zien dat

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n-2 \,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 2 \,.$$

Laat $G_z$ een polygoon gebied zijn met hoekpunten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en buitenhoeken $\pi\mu_1, \pi\mu_2, \ldots, \pi\mu_n$. Zij $z = g(w)$ een conforme afbeelding van het halfvlak $\operatorname{Im} w > 0$ op $G_z$. Elk punt $z_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, is beeldpunt van een zeker punt $w_k$ op de reële as van het w-vlak.

Dan geldt voor de afbeeldingsfunctie $g(w)$:

$$\text{(I)} \qquad \frac{g''(w)}{g'(w)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{w-w_k} \,, \qquad \operatorname{Im} w \ge 0 \;;$$

hierbij is de term $\mu_j/(w-w_j)$ in de som weg te laten als $w_j = \infty$.

Door integratie van (I) volgt

$$\text{(II)}\qquad g'(w) = C \prod_{k=1}^{n} (w-w_k)^{-\mu_k}\ , \qquad \operatorname{Im} w \geq 0\ ,$$

$$\text{(III)}\qquad g(w) = C \int_{w_0}^{w} \prod_{k=1}^{n} (u-w_k)^{-\mu_k}\, du + D\ , \qquad \operatorname{Im} w \geq 0\ ,$$

waarin C en D complexe constanten zijn. Hierbij is de factor $(w-w_j)^{-\mu_j}$ in het product weg te laten indien $w_j = \infty$. De betrekking (III) heet <u>formule van Schwarz-Christoffel</u>.

Copie van 4,2 uitgedeeld op college

## 4.2. <u>Bewijs van de formule van Schwarz-Christoffel</u>

<u>Lemma 4.1.</u> Zij $f(w)$ analytisch voor $0 < |w| < \rho$, $\operatorname{Im} w > 0$, en continu voor $0 \leq |w| < \rho$, $\operatorname{Im} w \geq 0$. Zij $f(0) = 0$; zij $f(w) \neq 0$ voor $0 < |w| < \rho$, $\operatorname{Im} w \geq 0$; zij $0 < \arg f(w) < \pi\alpha$ voor $0 < |w| < \rho$, $\operatorname{Im} w > 0$; zij $\arg f(w) = 0$ voor $0 < w < \rho$ en $\arg f(w) = \pi\alpha$ voor $-\rho < w < 0$; hierin is $0 < \alpha \leq 2$.

Dan is er een $\rho'$ met $0 < \rho' \leq \rho$, zodat voor $0 < |w| < \rho'$, $\operatorname{Im} w \geq 0$ geldt

$$f(w) = w^{\alpha}\Phi(w), \qquad \frac{f''(w)}{f'(w)} + \frac{1-\alpha}{w} = \Psi(w)\ ,$$

waarbij $\Phi(w)$ en $\Psi(w)$ analytisch zijn voor $|w| < \rho'$.

Stelling 4.2. Laat $z = g(w)$ een conforme afbeelding zijn van het halfvlak $\text{Im } w > 0$ op een begrensd polygoon gebied $G_z$ met hoekpunten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en buitenhoeken $\pi\mu_1, \pi\mu_2, \ldots, \pi\mu_n$. Laat voor $k = 1,2,\ldots,n$, het hoekpunt $z_k$ beeldpunt zijn van het punt $w_k$ op de reële as van het w-vlak. Dan geldt voor de afbeeldingsfunctie $g(w)$:

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{w - w_k} , \qquad \text{Im } w \geq 0 .$$

Toevoeging. De stelling geldt ook voor de afbeelding $z = g(w)$ van $\text{Im } w > 0$ op een niet-begrensd polygoon gebied met één of meer hoekpunten in $\infty$; voor het bewijs zie [5], § 5.12.

29-3-1982

## 4.3. Voorbeelden van afbeeldingen bepaald met de formule van Schwarz-Christoffel

1) Conforme afbeelding van $\text{Im } w > 0$ op het "tweehoekig" gebied $G_z = \{z \mid 0 < \arg z < \pi\alpha\}$, waarbij de punten $z = 0$, $z = \infty$ corresponderen met resp. $w = 0$, $w = \infty$.

10-4-1983 / 9-4-1983

2) Het gebied $G_z$ wordt begrensd door een driehoek met hoekpunten A,B,C, zijden a,b,c, en binnenhoeken $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$, met $\alpha + \beta + \gamma = 1$. De hoekpunten A,B,C, worden gegeven door resp. $z = c\,e^{\pi i\beta}$, $z = 0$, $z = a$. Gevraagd de conforme afbeelding $z = g(w)$ van $\text{Im } w > 0$ op $G_z$, zodanig dat de punten A,B,C corresponderen met resp. $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$.
In de limiet voor $a \to \infty$ gaat $G_z$ over in een half-oneindige scheve strook met hoekpunten A en B als boven, terwijl het hoekpunt C in $\infty$ ligt. In het speciale geval $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ wordt $G_z = \{z \mid \text{Re } z > 0,\ 0 < \text{Im } z < c\}$ ; de afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ en haar inverse $w = f(z)$ zijn dan expliciet te bepalen.

3) $G_z$ is het halfvlak Im $z > 0$ met uitzondering van de snede Re $z \leq 0$, Im $z = \pi$. De rand van $G_z$ heeft hoekpunten A,B,C, gegeven door resp. $z = \infty$, $z = \infty$, $z = \pi i$. Gevraagd de conforme afbeelding $z = g(w)$ van Im $w > 0$ op $G_z$, zodanig dat de punten A,B,C corresponderen met resp. $w = \infty$, $w = 0$, $w = 1$.

4) Zij $G_z$ het gehele z-vlak met uitzondering van de snedes Re $z \geq 0$, Im $z = 0$ en Re $z \leq a$, Im $z = b$; hierbij zijn a en b willekeurig behalve dat $a < 0$ indien $b = 0$. De rand van $G_z$ heeft hoekpunten A,B,C,D, gegeven door resp. $z = \infty$, $z = 0$, $z = \infty$, $z = a + ib$. Gevraagd de conforme afbeelding $z = g(w)$ van Im $w > 0$ op $G_z$, zodanig dat de punten A,B,C corresponderen met resp. $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$.

5-4-1982 | 18-4-1983 | 16-4-1984

5) $G_z$ is het eerste kwadrant van het z-vlak verminderd met het kwartvlak Re $z \geq \pi a$, Im $z \geq \pi b$, met $a > 0$, $b > 0$. De rand van $G_z$ heeft hoekpunten A,B,C,D, gegeven door resp. $z = \infty$, $z = 0$, $z = \infty$, $z = \pi(a+ib)$. Gevraagd de conforme afbeelding $z = g(w)$ van Im $w > 0$ op $G_z$, zodanig dat de punten B,C,D corresponderen met resp. $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$.

6) Conforme afbeelding van het gebied buiten een vierhoek met symmetrie-as (vlieger) in het z-vlak op het w-vlak met snede $[-1,r]$ langs de reële as; zie O.F. Hughes, SIAM J. Math. Anal. 6, 258-261 (1975).

19-4-1982/2-5-1983/7-5-1985

# 5. Toepassingen van conforme afbeelding op potentiaalproblemen

## 5.1. Twee-dimensionale potentiaalproblemen, harmonische functies

De twee-dimensionale Laplace vergelijking of potentiaalvergelijking luidt

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 , \qquad \varphi = \varphi(x,y) .$$

Belangrijke randwaardeproblemen voor de potentiaalvergelijking zijn;

(I) Dirichlet probleem $\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \text{ in een gebied } G; \\ \varphi \text{ gegeven op de rand van } G. \end{cases}$

(II) Neumann probleem $\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \text{ in een gebied } G; \\ \partial\varphi/\partial n \text{ gegeven op de rand van } G. \end{cases}$

Daarnaast komen ook voor potentiaalproblemen waarbij $\varphi$ gegeven is op een gedeelte van de rand van G en $\partial\varphi/\partial n$ gegeven is op de rest van de rand.

Definitie. Een functie $\varphi(x,y)$ heet harmonisch in een gebied G in het $(x,y)$-vlak, indien (i) $\varphi \in C^2(G)$,

(ii) $\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ in G.

Stelling 5.1. Zij $\varphi(x,y)$ harmonisch in een enkelvoudig samenhangend gebied G. Dan bestaat er een functie $\psi(x,y)$, harmonisch in G en eenduidig bepaald op een constante na, zodanig dat $\varphi_x = \psi_y$, $\varphi_y = -\psi_x$ (Cauchy-Riemann vergelijkingen). Voorts is de functie $\Omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, $z = x + iy$, analytisch in G. De functie $\psi(x,y)$ heet geconjugeerde harmonische functie van $\varphi(x,y)$; de functie $\Omega(z)$ heet complexe potentiaal.

Met behulp van stelling 5.1 is een randwaardeprobleem voor de Laplace vergelijking te herleiden tot een potentiaalprobleem voor de complexe potentiaal $\Omega(z)$. Bij de oplossing van dit potentiaalprobleem kan gebruik gemaakt worden van conforme afbeelding als volgt:

$1^o$. Laat de gezochte potentiaal $\Omega(z)$ behalve analytisch, ook univalent in $G_z$ zijn. Dan is $\Omega = \Omega(z)$ een conforme afbeelding van $G_z$ op een gebied $G_\Omega$ in het $\Omega = \varphi + i\psi$-vlak. Laat de rand van $G_\Omega$ bekend zijn uit de randvoorwaarden voor $\Omega(z)$ op de rand van $G_z$. Dan is $\Omega(z)$ te bepalen als de functie welke $G_z$ conform afbeeldt op $G_\Omega$.

$2^o$. Een potentiaalprobleem in een ingewikkeld gebied $G_z$ in het z-vlak is over te voeren in een potentiaalprobleem in een eenvoudig gebied $G_w$ (bijv. cirkelschijf, halfvlak) in het w-vlak, door conforme afbeelding van $G_z$ op $G_w$.

Stelling 5.2. Zij $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ een conforme afbeelding van $G_z$ op $G_w$, en zij $\varphi(u,v)$ harmonisch in $G_w$, dan is de samengestelde functie $\varphi^*(x,y) = \varphi(u(x,y),v(x,y))$ harmonisch in $G_z$.

۹-۱۲-۱۹۸۲

## 5.2. Voorbeelden van potentiaalproblemen opgelost met conforme afbeelding

1) Potentiaalstroming om een cylinder gegeven door $x^2 + y^2 = 1$, waarbij ver van de cylinder de ongestoorde stroming heerst met snelheid $v_0$ in de negatieve x-richting.

26-4-1982

2) Potentiaalstroming om een strip gegeven door $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$, waarbij ver van de strip de ongestoorde stroming heerst met snelheid $v_0$ in de negatieve x-richting.

14-5-1984

3) Zij $G_z = \{z \mid \mathrm{Re}\, z > -b,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < a\}$ met $a > 0$, $b > 0$, en zij $G_w = \{w \mid \mathrm{Re}\, w > 0,\ 0 < \mathrm{Im}\, w < 1\}$ . De conforme afbeelding $w = f(z)$ van $G_z$ op $G_w$, zodanig dat de punten $z = \infty$, $z = ia$, $z = -b + ia$ overgaan in resp. $w = \infty$, $w = i$, $w = 0$, is te bepalen met behulp van 3.5. Met deze conforme afbeelding zijn de volgende potentiaalproblemen op te lossen.

a) Potentiaalstroming van een vloeistof in een half-oneindige pijp gegeven door $x > -b$, $0 < y < a$, waarbij voor $x \to \infty$ de stroming uniform is met snelheid $v_0$ in de negatieve x-richting. De wanden van de pijp zijn ondoordringbaar afgezien van een opening gegeven door $-b < x < 0$, $y = a$, waardoor de vloeistof uitstroomt in een oneindig reservoir.

b) Een configuratie van twee electroden bestaat uit een binnen-electrode gevormd door het lijnstuk $x \geq 0$, $y = 0$, en een buiten-electrode gevormd door de lijnstukken $x \geq -b, y = a$; $x = -b$, $-a \leq y \leq a$; $x \geq -b, y = -a$. Gevraagd de potentiaal $\varphi(x,y)$ van het electrostatische veld in het gebied tussen de electroden, indien $\varphi = 0$ op de binnen-electrode en $\varphi = \varphi_0$ op de buiten-electrode.

4) Stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ in het gebied $G_z = \{z = x + iy \mid -\pi/2 < x < \pi/2,\ y > 0\}$ , waarbij op de rand van $G_z$ de temperatuur is voorgeschreven volgens $T(\pm\pi/2,y) = 0$, $y > 0$; $T(x,0) = 1$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

5) $G_z$ is het eerste kwadrant van het z-vlak verminderd met het kwartvlak $\mathrm{Re}\, z \geq \pi a$, $\mathrm{Im}\, z \geq \pi b$, met $a > 0$, $b > 0$ (zie 4.3, voorbeeld 5). Langs de rand van $G_z$ zijn electroden geplaatst welke zich bevinden op de potentiaal $\varphi = 0$ resp. $\varphi = \pi$. Gevraagd de potentiaal $\varphi$ van het electrostatische veld in $G_z$.

3-5-1982

# 6. Meromorfe en gehele functies

## 6.1. Meromorfe functies

Definitie. Een functie $f(z)$ heet meromorf als $f(z)$ analytisch is in $\mathbb{C}$ met uitzondering van polen.

De verzameling der polen en de verzameling der nulpunten van een meromorfe functie hebben geen eindige verdichtingspunten; vergelijk [1], 8.4.11.

Gevolg. Een meromorfe functie heeft òf eindig veel polen $a_1,a_2,\ldots,a_n$, òf aftelbaar veel polen $a_1,a_2,a_3,\ldots$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; een zelfde resultaat geldt voor de nulpunten.

Zij $f(z)$ een meromorfe functie met eindig veel polen $a_1,a_2,\ldots,a_n$. In een gereduceerde omgeving van $a_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ is $f(z)$ te ontwikkelen in een Laurent-reeks met hoofddeel $h_k(z)$ te noemen. Dan is $f(z)$ voor te stellen door

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{n} h_k(z) ,$$

waarin $g(z)$ een gehele functie is.

Stelling van Mittag-Leffler. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met aftelbaar veel polen $a_1,a_2,a_3,\ldots$, en zij $h_n(z)$ het hoofddeel van de Laurent-reeks van $f(z)$ rond de pool $a_n$, $n = 1,2,3,\ldots$ . Dan bestaan er polynomen $p_n(z)$, $n = 1,2,3,\ldots$ , en een gehele functie $g(z)$, zodanig dat

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [h_n(z) - p_n(z)] .$$

Bij ieder begrensd gebied $G \subset \mathbb{C}$ is er een getal $N$ zodat de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} [h_n(z) - p_n(z)]$ uniform convergent is op $G$.

Voorbeeld I. $f(z) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{(z-n)^2}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq m$ met $m$ geheel,

d.i. de partieelbreuksplitsing van $\pi^2/\sin^2(\pi z)$.

21-5-1984

Stelling 6.1. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met aftelbaar veel polen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en bijbehorende hoofddelen $h_1(z), h_2(z), h_3(z), \ldots$ . Zij $C_1, C_2, C_3, \ldots$ een rij van Jordankrommen (om $z=0$) zodanig dat op $C_n$ geen polen van $f(z)$ liggen, en $R_n = \min\limits_{z \in C_n} |z| \to \overset{\infty}{\cancel{0}}$ als $n \to \infty$.

Zij voorts $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{C_n} \frac{|f(t)|}{|t|} |dt| = 0$, dan geldt $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(z)$.

Bij ieder begrensd gebied $G \subset \mathbb{C}$ is er een getal $N$ zodat de reeks $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} h_n(z)$ uniform convergent is op $G$.

10-5-1982

Voorbeeld II. $f(z) = \pi \cot(\pi z) = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\dfrac{1}{z-n} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z}{z^2 - n^2}$,

$z \in \mathbb{C}$, $z \neq m$ met $m$ geheel, d.i. de partieelbreuksplitsing van $\pi \cot(\pi z)$.

Stelling 6.2. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met aftelbaar veel polen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ , alle $\neq 0$, en bijbehorende hoofddelen $h_1(z), h_2(z), h_3(z), \ldots$ . Zij $C_1, C_2, C_3, \ldots$ een rij van Jordankrommen (om $z=0$) zodanig dat op $C_n$ geen polen van $f(z)$ liggen, en $R_n = \min\limits_{z \in C_n} |z| \to \overset{\infty}{\cancel{0}}$ als $n \to \infty$. Laat er een geheel getal $m \geq 0$ bestaan zodanig dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{|f(t)|}{|t|^{m+1}} |dt| = 0 .$$

Dan geldt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ h_n(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \right] .$$

Bij ieder begrensd gebied $G \subset \mathbb{C}$ is er een getal $N$ zodat de reeks

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left[ h_n(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \right]$$

uniform convergent is op $G$.

Stelling 6.3. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met aftelbaar veel enkelvoudige polen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, alle $\neq 0$, met bijbehorende residuen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ . Zij $C_1, C_2, C_3, \ldots$ een rij van Jordankrommen (om $z = 0$) zodanig dat op $C_n$ geen polen van $f(z)$ liggen, en $R_n = \min_{z \in C_n} |z| \to \infty$ als $n \to \infty$. Laat er een geheel getal $m \geq 0$ bestaan zodanig dat

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} \frac{|f(t)|}{|t|^{m+1}} |dt| = 0 .$$

Dan geldt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^m \frac{r_n}{z - a_n} .$$

Bij ieder begrensd gebied $G \subset \mathbb{C}$ bestaat er een getal $N$ zodat de reeks

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^m \frac{r_n}{z - a_n}$$

uniform convergent is op $G$.

## 6.2. Oneindige producten

**Definitie.** (I) Een oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ heet *convergent* als

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} f_k = p$$

bestaat en $\neq 0$ is; notatie $\prod_{n=1}^{\infty} f_n = p$. Als $\lim_{n\to\infty} p_n$ niet bestaat of gelijk aan 0 is, heet het oneindig product *divergent*.

(II) Een oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ heet *convergent* als er een geheel getal $N \geq 0$ is zodat

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N+1}^{n} f_k \text{ bestaat en } \neq 0 \text{ is.}$$

16.5.1983 / 28-5-1983

**Stelling 6.4.** Een nodige voorwaarde voor de convergentie van het oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ is $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$.

In verband met stelling 6.4 wordt de notatie gewijzigd:

$$f_n = 1 + u_n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} f_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) ,$$

waarbij $u_n$, $n = 1,2,3,\ldots$ , de termen genoemd worden. Nodige voorwaarde voor convergentie is nu $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

**Stelling 6.5.** Zij $u_n \geq 0$ voor $n = 1,2,3,\ldots$ , dan zijn de reeks en de producten

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) , \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1-u_n)$$

alle convergent of alle divergent.

17.5.1982 <u>Definitie</u>. Een oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ heet <u>absoluut convergent</u> als $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|u_n|)$ convergent is.

<u>Stelling 6.6</u>. Een absoluut convergent oneindig product is convergent.

<u>Stelling 6.7</u>. Zij $u_n \neq -1$ voor $n = 1,2,3,\ldots$ , dan zijn het product en de reeks

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \ , \ s = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n) \qquad \text{(hoofdwaarde log)}$$

beide convergent of beide divergent. In geval van convergentie geldt $p = e^s$, en er bestaat een getal $N$ zodat voor $n > N$ geldt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \log(1+u_k) = \log\left[\prod_{k=n+1}^{\infty} (1+u_k)\right] \qquad \text{(hoofdwaarde log)} \ .$$

<u>Definitie</u>. Een oneindig product $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1+u_n(z)]$ heet <u>uniform convergent</u> op een gebied $G \subset \mathbb{C}$, als de rij der partiële producten $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} [1+u_k(z)]$ uniform convergent is op $G$ met limiet $p(z)$, d.w.z. als

$p(z) \neq 0$

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{N>0} \ \forall_{n>N} \ \forall_{z\in G} \ (|p_n(z) - p(z)| < \varepsilon) \ .$$

eventueel eindig veel beginfactoren weglaten

<u>Stelling 6.8</u> (kenmerk van Weierstrass). Zij $|u_n(z)| \leq a_n$ voor $n = 1,2,3,\ldots$ en $z \in G$. Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is het oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} [1+u_n(z)]$ uniform convergent op $G$.

Stelling 6.9. Zij $u_n(z)$, $n = 1,2,3,\ldots$, analytisch en $\neq -1$ in een gebied $G \subset \mathbb{C}$, en zij het oneindig product $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1+u_n(z)]$ uniform convergent op G. Dan is $p(z)$ analytisch en $\neq 0$ in G, en

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}$$

waarbij de reeks uniform convergent is op G.

Voorbeelden. 1) $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{z^2}{n^2})$, sinusproduct. (Euler 1748)

2) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{z}{n})e^{-z/n} = e^{-\gamma z} z^{-1} [\Gamma(z)]^{-1}$.

## 6.3. Gehele functies

Definitie. Een functie $f(z)$ heet geheel als $f(z)$ analytisch is in $\mathbb{C}$.
Gehele functies worden onderscheiden in gehele rationale functies of polynomen, en gehele transcendente functies; zie [1], 8.4.19.

Stelling 6.10. Een gehele functie $f(z)$ is geheel rationaal dan en slechts dan als er een $m \in \mathbb{R}$ is zodat $f(z) = O(z^m)$ voor $z \to \infty$. Zie AA 8.4.20, 8.4.22.

De verzameling der nulpunten van een gehele functie heeft geen eindige verdichtingspunten; vergelijk [1], 8.4.11.

Gevolg. Een gehele functie heeft òf eindig veel nulpunten $a_1, a_2, \ldots, a_n$, òf aftelbaar veel nulpunten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Hierbij is een meervoudig nulpunt net zo vaak herhaald als zijn multipliciteit bedraagt.

Stelling 6.11. Als f(z) geheel is en geen nulpunten heeft, dan is er een gehele functie g(z) zodat f(z) = exp[g(z)].

Zij f(z) een gehele functie met een m-voudig nulpunt z = 0 en eindig veel nulpunten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \neq 0$. Dan is f(z) voor te stellen door

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) ,$$

waarin g(z) een gehele functie is.

Stelling 6.12. Zij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een rij complexe getallen met $a_n \neq 0$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ . Dan bestaan er niet-negatieve gehele getallen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ , zodanig dat het oneindig product

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left[\frac{z}{a_n} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}\right]$$

uniform convergent is op ieder begrensd gebied $G \subset \mathbb{C}$; P(z) is dan een gehele functie met nulpunten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ .

Stelling 6.13 (productontwikkeling van Weierstrass). Zij f(z) een gehele functie met een m-voudig nulpunt z = 0 en met aftelbaar veel nulpunten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ , alle $\neq 0$. Dan is er een gehele functie g(z) en een oneindig product P(z) als in stelling 6.12, zodanig dat

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z) .$$

Stelling 6.14. Een meromorfe functie is te schrijven als het quotient van twee gehele functies.

Stelling 6.15. Een meromorfe functie $f(z)$ is rationaal (d.i. het quotient van twee polynomen) dan en slechts dan als

1) $f(z)$ eindig veel polen heeft, en

2) $f(z) = O(z^m)$ als $z \to \infty$, voor zekere $m \in \mathbb{R}$.

Literatuur

[1] S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint, Algebra en analyse, Academic Service, Den Haag, 1976 (CAB).

[2] L.V. Ahlfors, Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, McGraw-Hill, New York, 1953 (CMA).

[3] E.T. Copson, An introduction to the theory of functions of a complex variable, Clarendon Press, Oxford, 1935 (CMA).

[4] B.A. Fuchs and B.V. Shabat, Functions of a complex variable and some of their applications, Vol. I, Pergamon Press, Oxford, 1964(CMA).

[5] P. Henrici, Applied and computational complex analysis, Vol. I, II, John Wiley, New York, 1974, 1977 (CMA).

[6] Z. Nehari, Conformal mapping, McGraw-Hill, New York, 1952 (CMM).

[7] E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1958 (CKB).

De drie-letter-combinatie verwijst naar de rubriek van de wiskunde bibliotheek der T.H. Eindhoven, waaronder het boek is opgenomen.