

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

VOORTGEZETTE

FUNCTIETHEORIE

Prof. Dr. G.W. Veltkamp

en

Prof. Dr. J. Boersma

Voorjaar 1975

2246

Böbe / Mey



Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Voortgezette functietheorie

Inhoudsbeschrijving

VOORTGEZETTE FUNCTIETHEORIE

voorjaar 1975

0. Doel van het college	1
1. De inverse van een analytische functie	2
2. Algemene stellingen over conforme afbeeldingen	19
3. Conforme afbeelding door elementaire functies	28
4. De formule van Schwarz-Christoffel	50
5. Toepassingen van conforme afbeelding	71
6. Gehele en meromorfe functies	86

JdG, 19 Juli 2005

Aantekeningen bij het college

Voortgezette Functietheorie

Voorjaar 1975.

Hoofdstuk 0. Doel van het college

De stof uit dit college bestaat uit een paar hoofdstukken van de complexe functietheorie die aansluiten bij het college Wiskunde 50. Het doel van het college is echter niet primair het aanbrenge van kennis van veel nieuw materiaal doch eerder het vergroten van de vaardigheid in het hanteren van reeds aanwezig materiaal. Een vruchtbare bestudering bestaat voor alles uit intensief spelen met het geboden materiaal opdat men de stof niet alleen leert kennen en begrijpen maar ook operationeel ter beschikking krijgt.

Hoofdstuk 1. De inverse van een analytische functie

1.1. Zij $f(z)$ analytisch in een gebied G in het complexe z -vlak. Door

$$z \rightarrow w := f(z)$$

wordt G afgebeeld op een verzameling in het complexe w -vlak. In dit hoofdstuk beschouwen we deze afbeelding en haar inverse zuiver lokaal, in hoofdstuk 2 meer globaal.

Het geval dat $f(z)$ constant is, is triviaal; G wordt dan op één punt uit het w -vlak afgebeeld. We sluiten dit verder steeds uit.

Zij $z_0 \in G$. Zij $w_0 := f(z_0)$. Daar f zeker continu is wordt een omgeving van z_0 afgebeeld in een omgeving van w_0 . In formule

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon) .$$

We vragen nu of dit soms een afbeelding δp is, d.w.z. treedt ieder punt uit een voldoende kleine omgeving van w_0 op als beeld van een punt uit een voorgeschreven omgeving van z_0 . Het antwoord is bevestigend.

Stelling 1.1. Zij $f(z)$ analytisch en niet constant voor $|z - z_0| < \Delta$. Zij $f(z_0) = w_0$. Dan geldt

$$\forall 0 < \delta \leq \Delta \exists \varepsilon > 0 (|w - w_0| < \varepsilon \rightarrow \exists z (|z - z_0| < \delta \wedge f(z) = w)) .$$

Bewijs. Kies δ' zó dat $0 < \delta' \leq \delta$, $\delta' < \Delta$ en $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| \leq \delta'$.

Zo'n δ' bestaat omdat $f(z) \neq f(z_0)$ in een gereduceerde omgeving van z_0 (zie WSK 50, pag. 41).*)

Zij $\varepsilon = \min_{|z - z_0| = \delta'} |f(z) - f(z_0)|$. Zeker is $\varepsilon > 0$ (waarom?). Beschouw nu voor

$|w - w_0| < \varepsilon$ de functie

$$N(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \delta'} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta .$$

Op de integratieweg is

$$|f(\zeta) - w| \geq |f(\zeta) - w_0| - |w - w_0| \geq \varepsilon - |w - w_0| > 0 .$$

Dus is (zie WSK 50, p. 51) $N(w)$ gelijk aan het aantal nulpunten van de functie $f(z) - w$ binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta'$ (meervoudige nulpunten meervoudig geteld).

*) De verwijzing WSK 50 is naar het collegediktaat Wiskunde 50, editie najaarssemester 1973.

Zij m de multipliciteit van het nulpunt $z = z_0$ van $f(z) - w_0$. D.w.z., zij

$$f^{(j)}(z_0) = 0 \text{ voor } 1 \leq j \leq m-1 \text{ en } f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Dan is $N(w_0) = m$ (ga na, ook door berekening van de integraal). Daar $N(w)$ echter een continue functie van w is (waarom?) en steeds een gehele waarde heeft, is $N(w) = m$ voor alle w met $|w - w_0| < \varepsilon$. Hieruit volgt de bewering.

1.2. We beschouwen nu het geval dat $f'(z_0) \neq 0$ nader. Nu is $N(w) = 1$ en we kunnen stelling 1.1 ook formuleren als

Stelling 1.1a. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, zij $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta' \leq \Delta$ en zij $f'(z_0) \neq 0$. Dan geldt, als $w_0 := f(z_0)$,

$$\forall 0 < \delta < \Delta' \exists \varepsilon > 0 (|w - w_0| < \varepsilon \rightarrow \exists!_z (|z - z_0| < \delta \wedge f(z) = w)).$$

Hierin betekent $\exists!$: er bestaat precies één

Bewijs deze stelling nog door kleine veranderingen in het bewijs van stelling 1.1 aan te brengen.

Daar nu bij iedere w uit $|w - w_0| < \varepsilon$ precies één z uit $|z - z_0| < \delta$ hoort, kunnen we zeggen dat $f(z)$ voor $|w - w_0| < \varepsilon$ een inverse functie $g(w)$ heeft, gedefinieerd door stelling 1.1a:

$g(w)$ voldoet aan

$$|g(w) - z_0| < \delta \text{ en } f(g(w)) = w.$$

Is $g(w)$ analytisch? Ja:

Stelling 1.2. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$ en zij $f'(z_0) \neq 0$. Zij $w_0 := f(z_0)$.

Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat in $|w - w_0| < \varepsilon$ een analytische functie $g(w)$ bestaat die de inverse is van $f(z)$, d.w.z.

$$|w - w_0| < \varepsilon \rightarrow (|g(w) - z_0| < \Delta \wedge f(g(w)) = w).$$

Bewijs. Volgens stelling 1a is er bij iedere δ met $0 < \delta < \Delta'$ een $\varepsilon > 0$ zo dat bij iedere w met $|w - w_0| < \varepsilon$ er één $z = g(w)$ met $|z - z_0| < \delta$ en $f(z) = w$. De waarde van $g(w)$ wordt gegeven door

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \delta} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta, \quad (1)$$

Dat $g(w)$ analytisch is volgt direct uit de stelling in WSK 50, p. 33, of ook als volgt:

Als $|w - w_0| < \varepsilon$ en $0 < |h| < \varepsilon - |w - w_0|$, dan is

$$\begin{aligned} \frac{g(w+h) - g(w)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\zeta f'(\zeta) d\zeta}{(f(\zeta) - w - h)(f(\zeta) - w)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\zeta f'(\zeta) d\zeta}{(f(\zeta) - w)^2} + \frac{h}{2\pi i} \oint \frac{\zeta f'(\zeta) d\zeta}{(f(\zeta) - w - h)(f(\zeta) - w)^2} . \end{aligned}$$

Daar op de integratieweg $|f(\zeta) - w_0| \geq \varepsilon$ is, is de tweede term rechts niet groter dan

$$\frac{|h| \delta M}{(\varepsilon - |w - w_0| - |h|)(\varepsilon - |w - w_0|)^2} ,$$

als $M = \text{Max}_{|z - z_0| = \delta} |zf'(z)|$.

Hieruit volgt (hoe?) de analyticiteit van $g(w)$.

1.3. Uit 1.2.(1) kunnen we een formule afleiden voor de machtreeks coëfficiënten van $g(w)$:

$$g(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (w - w_0)^n .$$

Veronderstel voor het gemak dat $z_0 = 0$, $w_0 = 0$ (behandel zelf het algemene geval).

Daar op de integratieweg $|f(\zeta)| \geq \varepsilon$, is voor $|w| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\delta} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \left(1 - \frac{w}{f(\zeta)}\right)^{-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\delta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta))^{n+1}} \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \end{aligned}$$

met

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\delta} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta))^{n+1}} d\zeta .$$

(ga na dat de verwisseling van integratie en sommatie geoorloofd is.)

Voor $n = 0$ is de integraal 0 (waarom?).

Voor $n > 0$ is

$$\begin{aligned}
 b_n &= -\frac{1}{2\pi i n} \oint_{|\zeta|=\delta} \zeta d(f(\zeta))^{-n} \\
 &= \frac{1}{2\pi i n} \oint_{|\zeta|=\delta} \frac{d\zeta}{(f(\zeta))^n} \\
 &= \frac{1}{2\pi i n} \oint_{|\zeta|=\delta} \left(\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta^n} \\
 &= \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{f(z)}\right)^n \Big|_{z=0} \tag{1}
 \end{aligned}$$

(vgl. WSK 50, p. 34).

Deze formule heet formule van Bürmann-Lagrange en werd in 1770 gevonden!

De notatie wordt iets fraaier als we in plaats van $w = f(z)$ schrijven

$$z = w.h(z)$$

(dus $f(z) = z/h(z)$).

Dan is

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (h(z))^n \Big|_{z=0} . \tag{2}$$

Opmerking. Kunnen we iets zeggen over de convergentiestraal R van de reeks voor $g(w)$? Deze is gelijk aan de straal van de grootste cirkel om $w = 0$ waarbinnen $g(w)$ analytisch is, dus minstens gelijk aan de ϵ uit het bewijs van stelling 1.1a. Daar werd ϵ bepaald door een δ te kiezen met $f(z) \neq 0$ voor $0 < |z| \leq \delta$ en dan $\epsilon = \min_{|z|=\delta} |f(z)|$ te nemen.

Als nu $f(z)$ analytisch is voor $|z| < \Delta$ en Δ' is het grootste getal $\leq \Delta$, zo, dat $f(z) \neq 0$ voor $0 < |z| < \Delta'$, dan geldt zeker

$$R \geq \sup_{0 < \delta < \Delta'} \min_{|z|=\delta} |f(z)| . \tag{3}$$

Zonder bewijs zij meegedeeld dat indien het supremum wordt aangenomen voor $\delta = \delta^*$, er een z^* is met $|z^*| = \delta^*$, $f'(z^*) = 0$ en $R = |f(z^*)|$.

Voorbeelden

1) $w = z/(1+z)$. Dus $h(z) = 1+z$.

Dus $(h(z))^n = (1+z)^n = z^n + nz^{n-1} + \dots$

Hieruit volgt $b_n = 1$ en dus

$$z = g(w) = \sum_1^{\infty} w^n = \frac{w}{1-w},$$

hetgeen klopt.

N.b. $f(z)$ is analytisch voor $|z| < 1$; $f(z) \neq 0$ voor $0 < |z| < 1$;

$$\sup_{0 < \delta < 1} \min_{|z|=\delta} |f(z)| = \sup_{0 < \delta < 1} \delta/(1+\delta) = \frac{1}{2}.$$

De convergentiestraal van de reeks voor $g(w)$ is echter 1, de relatie (3) kan dus niet door een gelijkheid vervangen worden.

$$2) \quad w = z(1+z). \quad (4)$$

Nu geldt (ga na)

$$\begin{aligned} b_n &= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \\ &= 2^{2n-1} \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\ &= 2^{2n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus} \quad z = g(w) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (4w)^n \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{1+4w} - 1), \end{aligned} \quad (5)$$

indien we voor de wortel die waarde nemen die correspondeert met de reeks (5). Ook dit klopt, daar uit (4) door oplossing van de vierkantsvergelijking volgt

$$z = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{1+4w}).$$

N.b. $f(z)$ is analytisch voor alle z , en $f(z) \neq 0$ voor $0 < |z| < 1$.

Er geldt

$$\sup_{0 < \delta < 1} \min_{|z|=\delta} |f(z)| = \sup_{0 < \delta < 1} \delta(1-\delta) = \frac{1}{4} = |f(-\frac{1}{2})|.$$

Dit klopt met de bewering onder formule (3), want $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ en de convergentiestraal van de reeks (5) is $\frac{1}{4}$.

$$3) w = ze^{-\alpha z}.$$

$$\text{Nu is } b_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{n\alpha z} \right|_{z=0} = \frac{(n\alpha)^{n-1}}{n!},$$

$$\text{en dus } z = g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\alpha)^{n-1}}{n!} w^n.$$

Dit is een niet-triviaal voorbeeld.

De convergentiestraal van de reeks is (ga na)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \frac{1}{|\alpha|e}.$$

Dit klopt weer, want $f(z)$ is analytisch voor alle z , $\neq 0$ voor $z \neq 0$ en

$$\sup_{0 < \delta < \infty} \min_{|z|=\delta} |f(z)| = \sup_{0 < \delta < \infty} \delta e^{-|\alpha|\delta} = \frac{1}{|\alpha|e} = \left| f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right|$$

$$\text{en } f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0.$$

1.4. Voor praktische situaties is de formule van Bürmann-Lagrange niet altijd gemakkelijk hanteerbaar. Een solide, niet erg elegante maar wel goed automatiseerbare methode is de volgende.

Zij weer

$$w = f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j \tag{1}$$

met $a_1 \neq 0$ en positieve convergentiestraal.

We weten (stelling 1.2) dat er dan een inverse functie

$$z = g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n \tag{2}$$

bestaat in een cirkel met positieve straal.

Zij

$$z^j = \sum_{n=j}^{\infty} c_{jn} w^n \tag{3}$$

(deze reeks begint met $c_{jj} w^j$!).

Dan volgt na substitutie in (1) door termen met w^n bij elkaar te nemen:

$$\sum_{j=1}^n a_j c_{jn} = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ 0 & \text{als } n > 1. \end{cases}$$

Dus $b_1 = c_{11} = 1/a_1$.

En voor $n > 1$ is

$$a_1 c_{1n} = - \sum_{j=2}^n a_j c_{jn},$$

of

$$b_n = - \left(\sum_{j=2}^n a_j c_{jn} \right) / a_1. \quad (4)$$

De berekening van de coëfficiënten c_{jn} kan gebeuren op grond van de relatie

$$z^j = z \cdot z^{j-1}, \quad (5)$$

waaruit volgt (ga na)

$$c_{jn} = \sum_{k=1}^{n+1-j} b_k c_{j-1, n-k}, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (6)$$

Voor vaste n en $2 \leq j \leq n$ is de hoogste waarde van de index k die rechts voorkomt $n-1$. Dat wil zeggen: de coëfficiënten c_{jn} ($2 \leq j \leq n$) kunnen met (6) berekend worden zodra b_1, \dots, b_{n-1} bekend zijn. Maar dan kan daarna met (4) de volgende b_n berekend worden.

Een volledige algoritme voor de berekening van b_1, b_2, \dots, b_N is dus (ga na!)

```
c11 := b1 := 1/a1;  
for n := 2 step 1 until N do  
  begin for j := n step -1 until 2 do  
    cj,n :=  $\sum_{k=1}^{n+1-j} b_k c_{j-1, n-k}$ ;  
    c1,n := bn :=  $-\left( \sum_{j=2}^n a_j c_{j,n} \right) / a_1$   
  end
```

Opgave. Pas bovenstaande methode toe op het voorbeeld $w = \sum_{j=1}^{\infty} jz^j$.

Gebruik niet mechanisch de formele algoritme maar vul het tableau

	w	w ²	w ³	w ⁴	. . .
z	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃	c ₁₄	. . .
z ²		c ₂₂	c ₂₃	c ₂₄	. . .
z ³			c ₃₃	c ₃₄	. . .
z ⁴				c ₄₄	. . .

kolomsgewijs en per kolom van onder naar boven door toepassing van (5) en (4).

Laat ook zien dat

$$w = z/(1-z)^2,$$

waaruit volgt

$$z = (1 + 2w - \sqrt{1 + 4w})/(2w). \quad (7)$$

Bepaal de coëfficiënten b_n ook met Bürmann-Lagrange en verifieer het resultaat met de tabel en met (7).

- 1.5. Zij weer $w = f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$ en zij $w_0 := f(z_0)$. We beschouwen nu het geval dat $f(z) - w_0$ in z_0 een m -voudig nulpunt heeft, met $m > 1$.

Door het bewijs van stelling 1.1 nog eens na te lopen blijkt dat nu geldt:

Stelling 1.1b. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$. Zij $m > 1$,

$f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Zij $f(z) \neq f(z_0)$ en $f'(z) \neq 0$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta' \leq \Delta$. Dan geldt, als $w_0 := f(z_0)$,

$$\forall_{0 < \delta < \Delta'} \exists_{\varepsilon > 0} (0 < |w - w_0| < \varepsilon \rightarrow$$

(er bestaan precies m onderling verschillende getallen $z^{(0)}, \dots, z^{(m-1)}$ met $\forall_{0 \leq j < m} (|z^{(j)} - z_0| < \delta \wedge f(z^{(j)}) = w)$)).

N.B. Dat de getallen $z^{(j)}$ onderling verschillend zijn volgt uit de onderstelling dat $f'(z) \neq 0$ is in een gereduceerde omgeving

$0 < |z - z_0| < \Delta'$ van z_0 . Meervoudige nulpunten van $f(z) - w$ kunnen hier dus niet optreden.

1.6. Om tot een resultaat als stelling 1.2 te komen voor het geval $m > 1$ moeten we kennelijk m verschillende functies

$$z = g_j(w) \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

construeren.

We beschouwen eerst het geval

$$w = z^m .$$

Definieer voor $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$g_j(w) = \eta^j w^{1/m} ,$$

waarin

$$\eta = e^{2\pi i/m} ,$$

$$w^{1/m} = \begin{cases} 0 & \text{als } w = 0 \\ e^{(\log w)/m} = |w|^{1/m} e^{i(\arg w)/m} & \text{als } w \neq 0 . \end{cases}$$

Dit is de zgn. hoofdwortel (vergelijk WSK 50, p. 62), $\arg w$ moet zo genomen worden dat $-\pi < \arg w \leq \pi$.

Deze functies zijn gedefinieerd voor alle complexe w . Kennelijk geldt

$$(g_j(w))^m = w ,$$

$$g_{j_1}(w) \neq g_{j_2}(w) \quad \text{als } w \neq 0 \text{ en } j_1 \neq j_2 .$$

Voor $w \neq 0$, $-\pi < \arg w < \pi$ is $g_j(w)$ zeker analytisch omdat $\log w$ daar analytisch is. De afgeleide is

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} g_j(w) &= \eta^j \frac{d}{dw} e^{(\log w)/m} \\ &= \eta^j \cdot e^{(\log w)/m} \cdot \frac{1}{mw} \\ &= \frac{g_j(w)}{mw} \\ &= \frac{1}{m} \eta^j w^{\frac{1}{m}-1} . \end{aligned}$$

Voor $w \rightarrow 0$ heeft dit de limiet oneindig, $g_j(w)$ is dus niet analytisch (wel continu!) in $w = 0$.

1.7. Om na te gaan hoe de functies $g_j(w)$ onderling samenhangen en hoe ze zich gedragen bij de negatief reële as, bespreken we eerst de logaritmische nader. Met $\log w$ bedoelen we de zgn. hoofdwaarde van de logaritme, gedefinieerd voor $w \neq 0$ door

$$\log w = \log|w| + i \arg w, \quad (1)$$

waarin $\log|w|$ de reële logaritme van $|w|$ is en $\arg w$ (het hoofdargument) gedefinieerd is door

$$\begin{aligned} -\pi < \arg w \leq \pi, \\ \cos(\arg w) &= \operatorname{Re} w/|w|, \\ \sin(\arg w) &= \operatorname{Im} w/|w|. \end{aligned}$$

Uit de goniometrie volgt dat hierdoor $\arg w$ eenduidig bepaald is, en dat bv. (als $\operatorname{Re} w = u$, $\operatorname{Im} w = v$)

in het rechterhalfvlak $\arg w = \arctan(v/u)$,
in het bovenhalfvlak $\arg w = \pi/2 - \arctan(u/v)$,
in het onderhalfvlak $\arg w = -\pi/2 - \arctan(u/v)$.

Kennelijk geldt

$$\begin{aligned} e^{\log w} &= |w|e^{i \arg w} \\ &= |w|(\cos(\arg w) + i \sin(\arg w)) \\ &= u + iv = w. \end{aligned}$$

En omgekeerd volgt uit

$$e^z = w, \quad -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$$

ook dat

$$z = \log w.$$

Daar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \log(u^2 + v^2) + i \arctan(v/u) \right) &= \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{1}{u + iv}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} \log(u^2 + v^2) + i \arctan(v/u) \right) &= \frac{v + iu}{u^2 + v^2} = \frac{i}{u + iv}, \end{aligned}$$

voldoen (ga na) reële en imaginaire deel van $\log w$ aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann en dus (WSK V, p.58) is $\log w$ analytisch in het rechterhalfvlak en (ga na) is

$$\frac{d}{dw} \log w = \frac{1}{w} .$$

Analoog voor boven- en onderhalfvlak *).

De functie $\log w$ is dus analytisch in het gebied G , bestaande uit het hele vlak behalve de oorsprong en de negatief reële as.

Het kan vervelend zijn dat de aldus geconstrueerde functie een snede heeft langs de negatief reële as. Er geldt, als $a > 0$

$$\lim_{b \downarrow 0} \log(-a + ib) = \log a + \pi i ,$$

$$\lim_{b \uparrow 0} \log(-a + ib) = \log a - \pi i .$$

$\log w$ is langs de snede dus niet continu, laat staan analytisch.

Is er geen functie $\ell(w)$ die analytisch is in bv. het linkerhalfvlak en daar voldoet aan $e^{\ell(w)} = w$?

Zij G^* het gebied bestaande uit het hele vlak behalve de oorsprong en de positief reële as. Definieer in G^*

$$\ell^+(w) = \log(-w) + \pi i ,$$

$$\ell^-(w) = \log(-w) - \pi i .$$

Daar $w \in G^* \rightarrow -w \in G$, zijn ℓ^+ en ℓ^- analytisch in G^* . Verder is

$$\begin{aligned} e^{\ell^\pm(w)} &= e^{\log(-w) \pm \pi i} \\ &= (-w)e^{\pm \pi i} = w . \end{aligned}$$

We merken nu op dat

$$\ell^+(w) = \begin{cases} \log w & \text{in het bovenhalfvlak en op de negatief reële as} \\ \log w + 2\pi i & \text{in het onderhalfvlak;} \end{cases}$$

$$\ell^-(w) = \begin{cases} \log w - 2\pi i & \text{in het bovenhalfvlak en op de negatief reële as} \\ \log w & \text{in het onderhalfvlak.} \end{cases}$$

Op grond hiervan kunnen we zeggen (vgl. WSK 50, p. 60)

*) Andere manieren om de analyticiteit van $\log w$ te bewijzen zijn

a) aan te tonen dat $\int_1^w \frac{dt}{t}$ analytisch is (zie WSK 50, p. 61),

b) door gebruikmaking van stelling 1.1 en het feit dat $e^{\log w} = w$.

$\ell^+(w)$ is de analytische voortzetting van $\log w$ (gedefinieerd in G) naar het gebied G^* door aansluiting van G en G^* via het bovenhalfvlak.

$\ell^-(w)$ is de analytische voortzetting van $\log w$ (gedefinieerd in G) naar het gebied G^* door aansluiting van G en G^* via het onderhalfvlak.

Natuurlijk kunnen we $\ell^+(w)$ ook weer analytisch voortzetten van G^* naar G .

Doen we het door aansluiting via het bovenhalfvlak dan krijgen we als voortzetting $\log w$ terug. Doen we het echter door aansluiting via het onderhalfvlak dan krijgen we als voortzetting $\log w + 2\pi i$ (want deze functie is analytisch in G en in het onderhalfvlak gelijk aan $\ell^+(w)$).

Conclusie: de analytische voortzetting van $\log w$ die verkregen wordt door in positieve zin van G via G^* naar G te gaan is $\log w + 2\pi i$.

Analoog als we j maal (j mag positief of negatief zijn) in positieve zin van G via G^* naar G gaan.

We vatten het resultaat als volgt samen.

Zij voor $w \neq 0$ en j geheel

$$\ell_j(w) := \log w + j \cdot 2\pi i .$$

Dan is voor alle j

1) $e^{\ell_j(w)} = w$ voor alle $w \neq 0$;

2) $\ell_j(w)$ analytisch in G ;

3) de functie

$$\ell_{j+\frac{1}{2}}(w) := \begin{cases} \ell_j(w) & \text{in het bovenhalfvlak en op de negatief reële as} \\ \ell_{j+1}(w) & \text{in het onderhalfvlak} \end{cases}$$

is analytisch in G^* ; $\ell_{j+\frac{1}{2}}(w)$ is de analytische voortzetting van $\ell_j(w)$ naar G^* door aansluiting via het bovenhalfvlak en de analytische voortzetting van $\ell_{j+1}(w)$ door aansluiting via het onderhalfvlak;

4) bij analytische voortzetting van $\ell_j(w)$ door k maal in positieve zin van G via G^* naar G te gaan is het resultaat

$$\ell_j(w) + k \cdot 2\pi i = \ell_{j+k}(w) .$$

Op grond hiervan zeggen we:

de inverse van $w = e^z$ is een oneindig veelwaardige "algemeen analytische functie", met als "vertakkingspunt" $w = 0$ en als "takken" of "functieëlementen" de functies $\ell_j(w)$, $-\infty < j < \infty$.

Bij éénmaal links om het vertakkingspunt lopen heeft $\ell_j(w)$ als analytische voortzetting $\ell_{j+1}(w)$.

N.b. Velen gebruiken het symbool $\log w$ of $\text{Log } w$ ook om deze oneindig veelwaardige "algemene analytische functie" aan te duiden. Dit kan licht tot verwarring aanleiding geven.

Opgave. Zij $-\pi < \alpha \leq \pi$. Bepaal voor $w \neq 0$ een functie $\ell_\alpha(w)$ zo, dat

- 1) $\ell_\alpha(w)$ is overal analytisch behalve op de halfrechte $w = -te^{i\alpha}$, t reëel, $t \geq 0$,
- 2) $e^{\alpha \ell_\alpha(w)} = w$,
- 3) $\ell_\alpha(1) = 0$ (resp. $\lim_{v \downarrow 0} \ell_\alpha(1+iv) = 0$ als $\alpha = \pi$).

Wat zijn de analytische voortzettingen van $\ell_\alpha(w)$?

N.b. Er is geen bezwaar tegen om in een goed aangegeven context deze functie $\ell_\alpha(w)$ aan te duiden met $\log w$, mits men (als $\alpha \neq 0$) er duidelijk bij zegt dat de snede verlegd is.

1.8. We keren nu terug tot de functies $g_j(w)$ uit 1.6.

Vergelijking van de definities van $g_j(w)$ en $\ell_j(w)$ leert dat voor $w \neq 0$

$$g_j(w) = e^{\ell_j(w)/m}.$$

Daar $e^{\ell_{j+m}(w)/m} = e^{\ell_j(w)/m + 2\pi i} = e^{\ell_j(w)/m}$, kunnen we g_j best voor alle j gedefinieerd denken en met de indices rekenen modulo m .

Uit de eigenschappen van de $\ell_j(w)$ volgt nu onmiddellijk:

- 1) $g_j(w)$ is analytisch in G ;
- 2) de functie

$$g_{j+\frac{1}{2}}(w) := \begin{cases} g_j(w) & \text{in het bovenhalfvlak en op de negatief reële as} \\ g_{j+1}(w) & \text{in het benedenhalfvlak} \end{cases}$$

is analytisch in G^* ; $g_{j+\frac{1}{2}}(w)$ is de analytische voortzetting van $g_j(w)$ door aansluiting via het bovenhalfvlak en de analytische voortzetting van $g_{j+1}(w)$ door aansluiting via het onderhalfvlak;

- 3) bij analytische voortzetting van $g_j(w)$ door k maal in positieve zin van G via G^* naar G te gaan is het resultaat

$$e^{2\pi ik/m} g_j(w) = g_{j+k}(w) ;$$

met name is bij m keer rondgaan het resultaat weer $g_j(w)$.

Op grond van deze eigenschappen zeggen we:

de inverse van $w = z^m$ (m geheel, $m > 1$) is een m -waardige algemene analytische functie met als vertakkingspunt $w = 0$ en als takken de functies $g_j(w)$ ($0 \leq j \leq m-1$). Bij éénmaal links om het vertakkingspunt lopen heeft $g_j(w)$ als analytische voortzetting

$$e^{2\pi i/m} \cdot g_j(w) = \begin{cases} g_{j+1}(w) & \text{als } j < m-1 \\ g_0(w) & \text{als } j = m-1. \end{cases}$$

1.9. We keren nu terug tot het algemene geval uit 1.5 en formuleren een stelling in de trant van stelling 1.2.

Stelling 1.3. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$. Zij $m > 1$,

$f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Zij $w_0 := f(z_0)$.

Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat voor $|w - w_0| < \varepsilon$ er een m -waardige algemene analytische functie bestaat met vertakkingspunt w_0 en takken $g_j(w)$ ($j = 0, \dots, m-1$) die de inverse is van $f(z)$.

Er bestaat een voor $|t| < \varepsilon^{1/m}$ analytische functie $k(t)$ zodanig dat

$$g_j(w) = k(\eta^j (w - w_0)^{1/m}), \quad (1)$$

waarin $\eta = e^{2\pi i/m}$ en $(w - w_0)^{1/m}$ de hoofdwortel is.

Opmerking. Uit (1) volgen onmiddellijk beweringen als: de functies $g_j(w)$ zijn analytisch voor $0 < |w - w_0| < \varepsilon$, $-\pi < \arg(w - w_0) < \pi$; bij éénmaal links om w_0 lopen heeft $g_j(w)$ als analytische voortzetting $g_{j+1}(w)$ indien $j < m-1$ en $g_0(w)$ indien $j = m-1$.

Bewijs. Uit het gegeven volgt dat voor $|z - z_0| < \Delta$

$$f(z) - w_0 = a_m (z - z_0)^m \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \right),$$

met $a_m \neq 0$.

Bepaal $\Delta' \leq \Delta$ zo dat voor $|z - z_0| < \Delta'$

$$-\pi < \arg \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \right) < \pi$$

(waarom kan dit?).

Definieer voor $|z - z_0| < \Delta'$

$$h(z) := (z - z_0) a_m^{1/m} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \right)^{1/m},$$

(met voor beide wortels de hoofdwortel).

Dan is $h(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta'$, $h(z_0) = 0$ en $h'(z_0) \neq 0$. Volgens stelling 1.2 is er dus een $\varepsilon' > 0$ en een voor $|t| < \varepsilon'$ analytische functie z_0 , dat de afbeelding

$$z = k(t) \quad (|t| < \varepsilon')$$

de inverse is van de afbeelding

$$t = h(z).$$

Aangezien

$$(h(z))^m = f(z) - w_0$$

is de samengestelde afbeelding

$$t = h(z), \tag{1}$$

$$w = w_0 + t^m \tag{2}$$

equivalent met

$$w = f(z). \tag{3}$$

De bij (2) behorende inverse afbeelding is m -waardig met takken

$$t_j = \eta^j (w - w_0)^{1/m} \quad (j = 0, \dots, m-1).$$

En daar de inverse van (1) is $z = k(t)$ (voor $|t| < \varepsilon'$) is de inverse van (3) ook m -waardig (voor $|w - w_0| < \varepsilon := (\varepsilon')^m$) met takken

$$g_j(w) := k(\eta^j (w - w_0)^{1/m}).$$

Voorbeeld. De functie

$$w = z^2 e^{-2\alpha z}$$

heeft voor $|w| < e^2 |\alpha|^2$ een tweewaardige inverse met als takken

$$g_0(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\alpha)^{n-1}}{n!} w^{n/2}, \quad g_1(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n\alpha)^{n-1}}{n!} w^{n/2}$$

(met $w^{n/2} := (w^{\frac{1}{2}})^n = (w^n)^{\frac{1}{2}}$, steeds hoofdwortels, ga na!).

1.10. Het maximumprincipe

Uit stelling 1.1 volgt een elegant bewijs van het zg. maximumprincipe voor analytische functies.

Stelling 1.10 (maximumprincipe). Zij $f(z)$ analytisch en niet constant in een gebied G .

Zij in G

$$|f(z)| \leq M .$$

Dan is in G

$$|f(z)| < M .$$

Bewijs. Zij $z_0 \in G$. Beschouw in een binnen G liggende omgeving $|z - z_0| < \Delta$ van z_0 de afbeelding $z \rightarrow w := f(z)$. Volgens stelling 1.1 overdekken de beeldpunten $f(z)$ een volle omgeving van $w_0 := f(z_0)$. Er zijn dus zeker punten z in $|z - z_0| < \Delta$ met $|f(z)| > |f(z_0)|$. Derhalve geldt voor iedere $z_0 \in G$

$$|f(z_0)| < \sup_{z \in G} |f(z)| \leq M ,$$

q.e.d.

Opmerkingen

- 1) Vergelijk dit bewijs met dat uit WSK 50, p. 42.
- 2) Men kan de stelling ook uitspreken als: de modulus van een niet constante analytische functie neemt in een open gebied geen maximum aan.
- 3) Een variant van de bovenstaande uitspraak is:

Stelling 1.10a. Zij G een begrensd gebied met rand C .

Zij $f(z)$ analytisch in G en continu in $G + C$. Dan geldt

$$\max_{z \in G + C} |f(z)| = \max_{z \in C} |f(z)| .$$

Als $f(z)$ niet constant is in G , dan geldt bovendien voor alle $z_0 \in G$

$$|f(z_0)| < \max_{z \in C} |f(z)| .$$

Bewijs deze stelling zelf (waarom bestaan de genoemde maxima?).

Opgave. Zij $f(z)$ analytisch in een gebied G . Bewijs door een rechtstreeks beroep op stelling 1.1 de volgende uitspraken:

- a) Als $|f(z)|$ constant is in G , dan is $f(z)$ ook constant in G .
- b) Als $\operatorname{Re}(f(z)) \leq a$ in G , dan is $\operatorname{Re}(f(z)) < a$ in G , tenzij f constant is.
- c) Als $\operatorname{Re}(f(z))$ constant is in G , dan is $f(z)$ ook constant in G .
- d) Als $|f(z)| \geq m > 0$ in G , dan is $|f(z)| > m$ in G , tenzij f constant is.

Enz. . . enz.

1.11. Het lemma van Schwarz

Een merkwaardig en belangrijk gevolg van het maximumprincipe is het zg. lemma van Schwarz:

Stelling 1.11. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$, zij hier $|f(z)| \leq 1$ en zij $f(0) = 0$.

Dan is

- òf $f(z) = ze^{i\theta}$ voor $|z| < 1$, met θ reëel (zodat $|f(z)| = |z|$),
- òf $|f(z)| < |z|$ voor $0 < |z| < 1$ en $|f'(0)| < 1$.

Bewijs. Zij

$$g(z) := \begin{cases} f'(0) & \text{als } z = 0 \\ f(z)/z & \text{voor } 0 < |z| < 1. \end{cases}$$

$g(z)$ is dan analytisch voor $|z| < 1$ (waarom?).

Zij $|z_0| < 1$. Dan geldt volgens stelling 1.10a voor alle ρ met $|z_0| < \rho < 1$ dat

$$|g(z_0)| \leq \max_{|z|=\rho} |g(z)| = (1/\rho) \max_{|z|=\rho} |f(z)| \leq 1/\rho.$$

Hieruit volgt (hoe?) dat $|g(z_0)| \leq 1$. Daar dit voor alle $z_0 \in G$ geldt, volgt nu uit stelling 1.10 dat in G

òf $g(z) = a$ (= constant), met $|a| = 1$,

òf $|g(z)| < 1$.

Deze alternatieven corresponderen met de beweringen van de stelling.

Opmerking. Een interessante omkering van het lemma van Schwarz is:

Als $f(z)$ analytisch is voor $|z| < 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ en $f(z)/z$ is niet constant, dan zijn er punten z met $|z| < 1$ en $|f(z)| > |z|$.

Anderzijds geldt niet voor alle z dat $|f(z)| \geq |z|$, want was dit het geval dan volgt door toepassing van het lemma van Schwarz op $f_1(z) := z^2/f(z)$, dat $|f'(0)| > 1$ (ga na!).

Hoofdstuk 2. Algemene stellingen over conforme afbeelding

2.1. Zij $f(z)$ analytisch en niet constant in een gebied G_z van het z -vlak.

Beschouw de afbeelding

$$z \rightarrow w := f(z)$$

van G_z in het w -vlak. Noem de beeldverzameling G_w . Dus

$$G_w := \{w \mid \exists z \in G_z (f(z) = w)\} .$$

We bestuderen nu de afbeelding van G_z op G_w .

Stelling 2.1. De beeldverzameling G_w is een gebied.

Bewijs. We moeten bewijzen dat G_w open en samenhangend is. Dat G_w open is (wat is dat precies?) volgt uit stelling 1.1 (hoe?). Dat G_w samenhangend is, volgt uit het feit dat f continu is in G_z . Neem nl. w_1 en w_2 in G_w . Deze hebben originelen z_1 en z_2 in G_z . G_z is samenhangend, dus z_1 en z_2 kunnen verbonden worden door een continue kromme K die in G_z ligt. Het beeld van K is dan een continue kromme die in G_w ligt en w_1 en w_2 verbindt.

2.2. Definitie. $f(z)$ heet univalent (duits: schlicht) in G_z als

$$\forall z_1 \in G \quad \forall z_2 \in G (f(z_1) = f(z_2) \rightarrow z_1 = z_2) .$$

Definitie. De afbeelding van G_z op G_w door de functie $w = f(z)$ heet conform als $f(z)$ in G_z analytisch en univalent is.

Stelling 2.2.1. Als $f(z)$ analytisch is in z_0 en $f'(z_0) \neq 0$, dan is er een $\Delta > 0$ zodanig dat ieder gebied G_z , gelegen binnen de cirkel $|z - z_0| = \Delta$ door $f(z)$ conform afgebeeld wordt.

Bewijs. Dit volgt uit stelling 1.1a (ga na).

Stelling 2.2.2. Als $f(z)$ G_z conform afbeeldt op G_w dan is $f'(z) \neq 0$ in G_z .

Bewijs. Dit volgt uit stelling 1.1b (ga na).

Uit $f'(z) \neq 0$ volgt dat een conforme afbeelding zg. hoektrouw is.

Zij $z_0 \in G_z$, $w_0 = f(z_0)$.

Zij $z = z_0 + te^{i\alpha}$, $0 \leq t < t_0$, een lijnstuk dat in z_0 begint en een hoek α met de positief reële as maakt. Het beeld van dit lijnstuk is een (in het algemeen niet rechte) boog K $w = f(z_0 + te^{i\alpha})$, $0 \leq t < t_0$, die in w_0 begint.

Uit

$$w = w_0 + te^{i\alpha} f'(z_0) + o(t^2) \quad (t \rightarrow 0)$$

volgt dat de raaklijn aan K in w_0 is de halfrechte

$$\begin{aligned} w &= w_0 + te^{i\alpha} f'(z_0) \\ &= w_0 + t|f'(z_0)|e^{i(\alpha + \arg f'(z_0))}, \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

De hoek die deze raaklijn maakt met de positief reële as is dus $\alpha + \arg f'(z_0)$. Slordig gezegd: door de afbeelding is de raaklijn over een hoek $\arg f'(z_0)$ verdraaid. Aangezien deze hoek onafhankelijk is van α geldt nu ook: de hoek die de raaklijnen in z_0 van twee in z_0 beginnende differentieerbare bogen met elkaar maken is dezelfde als de hoek die de raaklijnen in w_0 aan hun beelden met elkaar maken.

2.3. Uit stelling 2.2.2 volgt dat de eis $f'(z) \neq 0$ in G_z nodig is opdat $f(z)$ een conforme afbeelding geeft. Stelling 2.2.1 laat zien dat deze eis in het klein ook voldoende is. Maar in het groot niet, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld:

Bij ieder enkelvoudig samenhangend gebied G_z dat niet het hele z -vlak is en iedere $z_0 \notin G_z$ is er een natuurlijk getal n zo, dat de functie $f(z) := (z - z_0)^n$ niet univalent is in G_z (terwijl wel $f'(z) \neq 0$ in G_z). Bewijs dit zelf.

De eis van univalentie is equivalent met de eis dat de afbeelding een inverse heeft.

Stelling 2.3.1. Een conforme afbeelding van G_z op G_w heeft een inverse die conform is.

Bewijs. Zij $z \rightarrow w := f(z)$ de gegeven afbeelding van G_z op G_w . Uit de univalentie volgt dat er bij iedere $w \in G_w$ precies één $z \in G_z$ is met $f(z) = w$. Noem deze $z = g(w)$. Uit het feit dat g een inverse afbeelding is volgt (gana) dat g univalent is. En daar overal in G $f'(z) \neq 0$, volgt uit stelling 1.2 dat g analytisch is.

Stelling 2.3.2. Als $z \rightarrow w := f(z)$ een conforme afbeelding is van G_z op G_w en $w \rightarrow t := g(w)$ is een conforme afbeelding van G_w op G_t , dan is $z \rightarrow t := g(f(z))$ een conforme afbeelding van G_z op G_t .

Bewijs. Doe dit zelf.

Uit deze twee stellingen volgt dat de conforme afbeeldingen van een gebied G_z op zichzelf een groep vormen met als groepsoperatie het na elkaar uitvoeren van afbeeldingen en als eenheidselement de identieke afbeelding $z \rightarrow z$.

2.4. De nu volgende stelling is een heel prettig hulpmiddel om na te gaan of een in een gegeven gebied + rand analytische functie dat gebied conform afbeeldt (univalent is in dat gebied).

Stelling 2.4.1. Zij C_z een Jordankromme (= enkelvoudige gesloten kromme, vgl. WSK 50, p. 7) in het z -vlak. Zij $f(z)$ binnen en op C_z analytisch. Zij het beeld C_w van C_z bij de afbeelding $z \rightarrow w := f(z)$ weer een Jordankromme die door $f(z)$ enkelvoudig doorlopen wordt als z C_z doorloopt. Dan beeldt $f(z)$ het binnengebied G_z van C_z conform af op het binnengebied G_w van C_w . Als z C_z in positieve zin doorloopt, dan doorloopt $f(z)$ C_w ook in positieve zin.

Bewijs. Zij $w_0 \notin C_w$. Beschouw

$$N_1(w_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_w} \frac{dw}{w - w_0}, \quad N_2(w_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} \frac{f'(z) dz}{f(z) - w_0}.$$

$N_1(w_0)$ is 1 als $w_0 \in G_w$ en 0 als $w_0 \notin G_w$; $N_2(w_0)$ is het aantal nulpunten van $f(z) - w_0$ dat binnen C_z ligt, $N_2(w_0)$ is dus geheel en ≥ 0 .

Daar $f(z)$ C_w éénmaal doorloopt als z C_z doorloopt, volgt door substitutie van $w = f(z)$ (waarom mag dat?) dat

$$N_1(w_0) = \pm N_2(w_0), \quad (1)$$

met het + teken als positieve omloop van z langs C_z positieve omloop van $f(z)$ langs C_w impliceert en anders het minteken.

Zij $w_0 \notin G_w$. Dan is $N_1(w_0) = 0$ en dus $N_2(w_0) = 0$. Hieruit volgt dat het beeld van G_z bij de afbeelding $z \rightarrow w := f(z)$ geheel in $G_w + C_w$ ligt.

Maar dit beeld is een open verzameling, dus het ligt zelfs in G_w .

Zij $w_0 \in G_w$. Dan is $N_1(w_0) = 1$. Uit $N_2(w_0) \geq 0$ volgt dat in (1) het + teken geldt, waaruit de bewering over de omloopzin volgt. En uit $N_2(w_0) = 1$ volgt nu dat G_z univalent afgebeeld wordt op G_w .

Een gevolg van stelling 2.4.1 is:

Stelling 2.4.2. Als $z \rightarrow w := f(z)$ een enkelvoudig samenhangend gebied G_z conform afbeeldt op een gebied G_w , dan is G_w ook enkelvoudig samenhangend.

Bewijs. Zij C_w een Jordankromme in G_w . Zij C_z het origineel van C_w . Dit is ook een Jordankromme, die binnen G_z verloopt (waarom?). Daar G_z enkelvoudig samenhangend is, behoort het hele binnengebied van C_z tot G_z .

Dus (stelling 2.4.1) behoort het hele binnengebied van C_w tot G_w . Daar C_w willekeurig was, volgt hieruit dat G_w enkelvoudig samenhangend is. (Zie voor de definitie van enkelvoudig samenhangend WSK 50, p. 7).

Opmerking. Met enige zorg kunnen we ook een begrip m -voudig samenhangend gebied definiëren. Ruwweg: een enkelvoudig samenhangend gebied met $m-1$ gaten. Beelden we zo'n gebied conform af door een in het gebied univalente analytische functie, dan is het beeld weer m -voudig samenhangend.

2.5. De afbeeldingsstelling van Riemann

Kunnen we bij gebieden G_z en G_w altijd een conforme afbeelding vinden die G_z op G_w afbeeldt? Volgens stelling 2.4.2 moeten G_z en G_w zeker dezelfde samenhang hebben. En daar er geen niet constante analytische functie bestaat die in het hele z -vlak begrensd is (Liouville, zie WSK V, p.38) kan ook niet G_z het hele vlak en G_w begrensd zijn. Voor enkelvoudig samenhangende gebieden zijn deze restricties echter ook voldoende.

Stelling 2.5. Zij G_z een enkelvoudig samenhangend gebied, maar niet het hele z -vlak. Zij $z_0 \in G_z$.

Dan is er een eenduidig bepaalde conforme afbeelding $z \rightarrow w := f(z)$ van G_z op de schijf $|w| < 1$ zo, dat $f(z_0) = 0$ en $f'(z_0) > 0$.

Dit is de beroemde afbeeldingsstelling van Riemann. Het bewijs van het existentiegedeelte is tamelijk diepzinnig, we geven dit niet*). De eenduidigheid is een direct gevolg van het lemma van Schwarz en de groepseigenschap van de conforme afbeeldingen. Uit het lemma van Schwarz volgt nl.:

Lemma 2.5. Als $z \rightarrow w := f(z)$ de schijf $|z| < 1$ conform afbeeldt op $|w| < 1$ en $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, dan is $f(z)$ de identieke afbeelding: $f(z) = z$.

Bewijs. Toepassing van het lemma van Schwarz op $f(z)$ levert (daar $f(0) = 0$, $|f(z)| < 1$ voor $|z| < 1$) dat

$$\begin{aligned} \partial f \quad f(z) &= az, \text{ met } |a| = 1, \quad |f'(0)| = 1, \\ \partial f \quad |f'(0)| &< 1. \end{aligned}$$

*) Zie bijv.: Ahlfors, L.V., Complex Analysis, New York, 1953 (McGraw-Hill), Nehari, Z., Conformal Mapping, New York, 1952 (McGraw-Hill).

Zij $g(w)$ de bij $w = f(z)$ behorende inverse functie. Dan is $g(0) = 0$, $|g(w)| < 1$ voor $|w| < 1$ en dus

$$\begin{aligned} \text{of } g(w) &= bw \text{ met } |b| = 1, \quad |g'(0)| = 1, \\ \text{of } |g'(0)| &< 1. \end{aligned}$$

Daar echter $g'(0)f'(0) = 1$, moeten f en g lineair zijn met $b = 1/a$.

Uit $f'(0) > 0$ volgt dan dat $a = 1$.

Q.E.D.

Stel nu dat zowel $f_1(z)$ als $f_2(z)$ een gebied G_z afbeelden op $|w| < 1$ en dat $f_j(z_0) = 0$, $f'_j(z_0) > 0$ voor $j = 1, 2$.

Zij $g_1(w)$ de bij $f_1(z)$ behorende inverse functie. Zij voor $|w| < 1$

$$h(w) := f_2(g_1(w)).$$

Dan beeldt $h(w)$ de schijf $|w| < 1$ conform af op zichzelf, $h(0) = f_2(g_1(0)) = f_2(z_0) = 0$, $h'(0) = f'_2(z_0)/f'_1(z_0) > 0$.

Uit lemma 2.5 volgt nu dat $h(w) = w$, of

$$f_2(g_1(w)) = w \quad \text{voor } |w| < 1.$$

Dus $f_2(g_1(f_1(z))) = f_1(z)$ voor $z \in G_z$,

d.w.z. $f_2(z) = f_1(z)$ voor $z \in G_z$,

q.e.d.

Met de afbeeldingsstelling van Riemann is ook het probleem van de conforme afbeelding van twee willekeurige enkelvoudig samenhangende gebieden G_z en G_w op elkaar in principe opgelost.

Zij $z_0 \in G_z$, $w_0 \in G_w$, α reëel. We zoeken de afbeelding $z \rightarrow w := f(z)$ van G_z op G_w waarvoor $f(z_0) = w_0$, $\arg(f'(z_0)) = \alpha$.

Zij $z \rightarrow t := g_1(z)$ de conforme afbeelding van G_z op $|t| < 1$ waarvoor $g_1(z_0) = 0$, $g'_1(z_0) > 0$. Zij $w \rightarrow s := g_2(w)$ de conforme afbeelding van G_w op $|s| < 1$ waarvoor $g_2(w_0) = 0$, $g'_2(w_0) > 0$.

Zij h_1 de inverse van g_1 en h_2 de inverse van g_2 . Dan voldoet (ga na)

$$f(z) := h_2(e^{i\alpha} g_1(z))$$

aan de gestelde eisen.

En omgekeerd, als ook $\tilde{f}(z)$ voldoet, dan is

$$t \rightarrow s := k(t) := e^{-i\alpha} g_2(\tilde{f}(h_1(t)))$$

een conforme afbeelding van $|t| < 1$ op $|s| < 1$ met $k(0) = 0$ en $k'(0) > 0$ (ga na). Uit lemma 2.5 volgt dan dat $k(t) = t$. Dus

$$g_2(\tilde{f}(h_1(t))) = e^{i\alpha} t \quad \text{voor } |t| < 1.$$

Of, voor $z \in G_z$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= h_2(g_2(\tilde{f}(h_1(g_1(z)))) \\ &= h_2(e^{i\alpha} g_1(z)). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de gezochte afbeelding eenduidig bepaald is door de nevencondities $f(z_0) = w_0$ en $\arg(f'(z_0)) = \alpha$.

2.6. Het gedrag op de rand

Als $z \rightarrow w := f(z)$ een gebied G_z conform afbeeldt op een gebied G_w , dan is er in het algemeen niet veel te zeggen over het gedrag van $f(z)$ als z nadert tot de rand Γ_z van G_z . Met name behoeft voor een $a \in \Gamma_z$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in G_z}} f(z)$$

niet te bestaan. Bestaat deze limiet wel, met waarde b , dan ligt b ook op de rand Γ_w van G_w . Want daar voor $z \in G_z$ $f(z) \in G_w$ ligt, moet b in G_w of op Γ_w liggen. Stel dat $b \in G_w$. Zij $w \rightarrow z := g(w)$ de inverse afbeelding. Daar (als $b \in G_w$) $g(w)$ continu is in een omgeving van b geldt dan

$$a = \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in G_z}} z = \lim_{z \rightarrow a} g(f(z)) = g(\lim_{z \rightarrow a} f(z)) = g(b).$$

Maar $a \in \Gamma_z$, $g(b) \in G_z$, dus tegenspraak.

Als de randen Γ_z en Γ_w aan bepaalde gladheidsvoorwaarden voldoen dan kunnen we meer zeggen. We beschouwen het geval dat G_w de cirkel $|w| < 1$ is.

Stelling 2.6. Zij G_z een begrensds gebied waarvan de rand Γ_z bestaat uit eindig veel continu differentieerbare bogen. Zij $w \rightarrow z := g(w)$ een conforme afbeelding van $|w| < 1$ op G_z . Dan bestaat voor $0 \leq \alpha < 2\pi$

$$g(e^{i\alpha}) := \lim_{\substack{w \rightarrow e^{i\alpha} \\ |w| < 1}} g(w).$$

De aldus tot $|w| \leq 1$ uitgebreide functie $g(w)$ is hier continu. Als α van 0 naar 2π gaat dan doorloopt $g(e^{i\alpha}) \Gamma_z$ eenmaal in positieve zin.

Bij ieder punt $a \in \Gamma_z$ bestaat een natuurlijk getal m_a zo, dat voldoende kleine cirkelomgevingen van a een doorsnede met G_z hebben die in m_a disjuncte delen uiteenvalt. De functie $g(w)$ neemt dan in precies m_a verschillende punten van $|w| = 1$ de waarde a aan. Beschouwen we punten van Γ_z als verschillend als ze met verschillende punten van $|w| = 1$ corresponderen (hoewel ze hetzelfde punt van het z -vlak kunnen zijn), dan geldt dat $g(w) |w| \leq 1$ eeneenduidig op $G_z + \Gamma_z$ afbeeldt.

We bewijzen deze stelling niet. Het is duidelijk dat hij kan worden uitgebreid tot afbeeldingen van willekeurige gebieden met stuksgewijs continu differentieerbare randen op elkaar.

Voorbeeld. Door $z \rightarrow w := z^2$ wordt het gebied $G_z := \{z \mid |z| < 1 \wedge \operatorname{Re} z > 0\}$ conform afgebeeld op het gebied $G_w := \{w \mid |w| < 1 \wedge (\operatorname{Im} w = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} w > 0)\}$. Ga na wat er met de rand van G_z gebeurt.

Wat is de waarde van m_a voor a op de rand van G_w ?

2.7. Het spiegelsprincipe van Schwarz

Stelling 2.7.1. Zij G een gebied, gelegen in de bovenhelft van het z -vlak en veronderstel dat de rand van G een open interval Γ van de reële as bevat. Zij $f(z)$ analytisch in G , continu in $G + \Gamma$ en zij $f(z)$ reëel voor $z \in \Gamma$. Zij G^* het gebied

$$\{z \mid \bar{z} \in G\} .$$

Definieer in $G + \Gamma + G^*$

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{in } G + \Gamma \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{in } G^* . \end{cases}$$

Dan is $F(z)$ analytisch in $G + \Gamma + G^*$ en dus de analytische voortzetting van $f(z)$ in $G + \Gamma + G^*$.

Bewijs. Daar $f(z)$ reëel is op Γ is $F(z)$ continu in $G + \Gamma + G^*$ (ga na). Uit Cauchy-Riemann volgt (ga na) dat $F(z)$ analytisch is in G^* .

Zij $a \in \Gamma$. Zij ρ zo, dat de cirkel $C : |z - a| = \rho$ geheel binnen $G + \Gamma + G^*$ ligt. Noem het binnengebied C G_C . Definieer voor $z \in G_C$

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Zij $z \in G_C \cap G$. Dan kunnen we schrijven

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{clockwise}} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{counter-clockwise}} .$$

Op grond van een kleine uitbreiding van de residuenstelling (geoorloofd omdat $F(\zeta)$ continu is in $G_C + C$ en analytisch is in G en in G^*) is de eerste term rechts gelijk aan $F(z)$, de tweede term is 0. Dus $g(z) = F(z)$ in $G_C \cap G$. Analoog in $G_C \cap G^*$. Daar F en g continu zijn in G_C is dus overal in G_C $g(z) = F(z)$. Maar $g(z)$ is analytisch in G_C (zie WSK 50, p. 32). Dus $F(z)$ ook, dus met name in a , q.e.d.

Opmerking. We hebben eigenlijk een bijzonder geval van een algemenere stelling bewezen:

Als de randen van G_1 en G_2 een gladde boog Γ gemeen hebben, als $f_j(z)$ analytisch is in G_j en continu in $G_j + \Gamma$ ($j = 1, 2$) en $f_1(z) = f_2(z)$ op Γ , dan zijn $f_1(z)$ en $f_2(z)$ elkaars analytische voortzetting, d.w.z., de functie

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z) & \text{in } G_1 + \Gamma \\ f_2(z) & \text{in } G_2 \end{cases}$$

is analytisch in $G_1 + \Gamma + G_2$.

Opgave. Hoe zou $F(z)$ gedefinieerd moeten worden als $f(z)$ zuiver imaginair was op Γ ?

In termen van conforme afbeeldingen kunnen we onmiddellijk de volgende stelling formuleren.

Stelling 2.7.2. Zij G_z een gebied dat geheel aan een zijde van een rechte l_z ligt en waarvan de rand een open interval Γ_z met l_z gemeen heeft. Veronderstel dat $z \rightarrow w := f(z)$ G_z conform afbeeldt op een gebied G_w dat geheel aan een zijde van een rechte l_w ligt. Veronderstel dat $f(z)$ continu is in $G_z + \Gamma_z$ en dat het beeld van Γ_z op l_w ligt.

Zij G_z^* uit G_z verkregen door spiegeling van G_z aan l_z , analoog G_w^* uit G_w . Definieer $f(z)$ in G_z^* door $f(z) := (f(z^*))^*$, waarin z^* uit z verkregen wordt door spiegeling aan l_z en $(f(z^*))^*$ uit $f(z^*)$ door spiegeling aan l_w . Dan beeldt de aldus in $G_z + \Gamma_z + G_z^*$ voortgezette functie $f(z)$ dit gebied conform af op $G_w + \Gamma_w + G_w^*$.

Als l_z en l_w de reële assen van z - resp. w -vlak zijn, dan volgt dit onmiddellijk uit stelling 2.7.1 (de univalentie van de uitgebreide afbeeldingen volgt uit het feit dat G_z en G_w geheel aan een zijde van l_z , resp. l_w liggen).

Het algemene geval kan door translaties en draaiingen hiertoe teruggebracht worden.

Voorbeeld. Zij G_z het bovenhalfvlak, $f(z) = \log z$ (hoofdwaarde).

Dan is $f(z)$ analytisch in G_z en continu in $G_z + \text{rand}$, behalve in $z = 0$ en $z = \infty$. $z \rightarrow w := f(z)$ beeldt G_z af op de strook $0 < \text{Im } w < \pi$.

Zij Γ_z de negatief reële as, het beeld hiervan is de rechte $\text{Im } w = \pi$.

We willen hieraan spiegelen. Het spiegelbeeld van een punt z uit G_z aan Γ_z is het punt \bar{z} , het spiegelbeeld van een punt w aan $\text{Im } w = \pi$ is $2\pi i + \bar{w}$ (gana). De voortzetting van $f(z)$ in het onderhalfvlak G_z^* door spiegeling aan de negatief reële as wordt dus gegeven door

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\pi i + \overline{f(\bar{z})} \quad \text{voor } z \in G_z^* \\ &= 2\pi i + \overline{\log(\bar{z})} \\ &= 2\pi i + \log z, \end{aligned}$$

daar voor de hoofdwaarde geldt

$$\begin{aligned} \overline{\log(\bar{z})} &= \log|\bar{z}| - i \arg(\bar{z}) \\ &= \log|z| + i \arg z = \log z. \end{aligned}$$

Het gebied $G_z + \Gamma_z + G_z^*$ wordt door deze voortzetting afgebeeld op de strook $0 < \text{Im } w < 2\pi$.

Vergelijk deze resultaten met § 1.7.

Hoofdstuk 3. Conforme afbeelding door elementaire functies

3.1. De gebroken lineaire afbeelding (Möbius-transformatie)

3.1.1. Zij a, b, c, d complex, niet alle 0.

Beschouw de gebroken lineaire functie

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} . \quad (1)$$

We veronderstellen steeds dat

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 . \quad (2)$$

Want is dat niet het geval, dan is $f(z)$ constant (ga na).

De functie $f(z)$ is analytisch voor $z \neq -d/c$ met als afgeleide

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} .$$

De inverse van de afbeelding

$$z \rightarrow w := f(z)$$

is (ga na) de gebroken lineaire afbeelding

$$z := g(w) := \frac{dw - b}{-cw + a} .$$

$g(w)$ is (als (2) geldt) niet constant en overall analytisch behalve in $w = a/c$.

We kunnen dus zeggen (ga na aan de hand van de definities in 2.2):

f beeldt het gebied G_z , bestaande uit het hele complexe z -vlak met uitzondering van $z = -d/c$, conform af op het gebied G_w , bestaande uit het hele complexe w -vlak met uitzondering van $w = a/c$.

De uitzonderingspunten kunnen we wegwerken door ook de punten $z = \infty$ en $w = \infty$ te beschouwen. We constateren dat, als $c \neq 0$,

$$z \rightarrow t := 1/f(z)$$

een omgeving van $z = -d/c$ conform afbeeldt op een omgeving van $t = 0$ met als inverse afbeelding $t \rightarrow z := g(1/t)$. Daarom stellen we

$$f(-d/c) := \infty , \quad g(\infty) := -d/c$$

en zeggen dan:

$f(z)$ beeldt een omgeving van $z = -d/c$ conform af op een omgeving van $w = \infty$ met $g(w)$ als inverse.

Analoog stellen we, als $c \neq 0$,

$$f(\infty) := a/c, \quad g(a/c) := \infty$$

en zeggen:

$f(z)$ beeldt een omgeving van $z = \infty$ conform af op een omgeving van $w = a/c$ met $g(w)$ als inverse.

Behandel het geval $c = 0$ zelf door te kijken naar $s \rightarrow t := 1/f(1/s)$.

Opmerking. We kunnen (vgl. WSK 50, p. 49) een in een omgeving van $z = \infty$ analytische functie $f(z)$ analytisch in $z = \infty$ noemen als $f(1/s)$ analytisch is in $s = 0$ (na geschikte definitie voor $s = 0$). Analoog voor een pool in $z = \infty$. We kunnen dan het begrip conforme afbeelding uit 2.2 als volgt verruimen:

a) We laten toe dat G_z het punt $z = \infty$ bevat.

b) We laten toe dat $f(z)$ in G_z één pool van de eerste orde heeft (zodat G_w het punt $w = \infty$ bevat).

Met deze verruiming kunnen we zeggen: de gebroken lineaire transformatie beeldt het hele afgesloten z -vlak conform af op het hele afgesloten w -vlak.

3.1.2. We zagen al dat de inverse van een gebroken lineaire transformatie (g.l.tr.) weer een g.l.tr. is. Ook het "product" van twee g.l.tr. is een g.l.tr.:

als

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad g(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta},$$

dan is (ga na)

$$g(f(z)) = \frac{Az+B}{Cz+D},$$

met

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

De gebroken lineaire transformaties vormen dus een groep.

Elementaire g.l.tr. zijn

$$w = z + a \quad \text{translatie,}$$

$$w = b \times z \quad \text{draaistrekking t.o.v. } z = 0,$$

$$w = 1/z \quad \text{inversie t.o.v. } z = 0.$$

Daarbij kunnen we de draaistrekkingen nog uiteen laten vallen in de typen

$$w = e^{i\alpha} \times z \quad (\alpha \text{ reëel}), \quad \text{draaiing om } z = 0,$$

$$w = \rho \times z \quad (\rho > 0), \quad \text{vermenigvuldiging t.o.v. } z = 0.$$

Ga de meetkundige beelden van deze transformaties na!

De genoemde elementaire transformaties brengen de hele gebroken lineaire groep voort. Want als $c \neq 0$ dan is

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \times \frac{1}{z+(d/c)} .$$

En als $c = 0$ (hetgeen impliceert dat $a \neq 0$ en $d \neq 0$) dan is

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d} \times \left(z + \frac{b}{a}\right) .$$

3.1.3. We definiëren als "cirkels" in het afgesloten complexe vlak de verzameling van alle "gewone" cirkels en alle rechten. De rechten zijn dan precies die "cirkels" die door $z = \infty$ gaan. Iedere "cirkel" wordt gegeven door een vergelijking van de vorm

$$A z \bar{z} + B \bar{z} + \bar{B} z + C = 0 \quad (1)$$

met A en C reëel, $\bar{B}B - AC > 0$. (2)

Want een "echte" cirkel heeft een vergelijking van de vorm

$$|z-m|^2 = R^2 \quad \text{of} \quad z\bar{z} - m\bar{z} - \bar{m}z + m\bar{m} - R^2 = 0 ,$$

met $R^2 > 0$.

En een rechte heeft een vergelijking van de vorm

$$a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z + c = 0 , \quad \text{of} \quad (a+ib)\bar{z} + (a-ib)z + 2c = 0$$

met a, b, c reëel, $a^2 + b^2 > 0$.

Ga na dat omgekeerd ook iedere vergelijking (1) met coëfficiënten die voldoen aan (2), een rechte of een cirkel (met positieve straal) voorstelt.

Stelling 3.1.3. Bij een gebroken lineaire transformatie $z \rightarrow w$ wordt iedere "cirkel" uit het z -vlak afgebeeld op een "cirkel" uit het w -vlak.

Bewijs. Zelf (zie ook WSK 50, p. 70).

Opgave. Beschouw de afbeelding

$$z \rightarrow w := 1/(a-z) .$$

Welke cirkels gaan over in rechten, welke rechten in cirkels en welke rechten in rechten?

3.1.4. Definitie. De punten z_1 en z_2 liggen gespiegeld t.o.v. de cirkel

$$A z \bar{z} + B \bar{z} + \bar{B} z + C = 0$$

(met A en C reëel, $B\bar{B} - AC > 0$), indien

$$A z_1 \bar{z}_2 + B \bar{z}_2 + \bar{B} z_1 + C = 0.$$

(Ga na dat deze relatie reflexief is.)

Ga na dat als z_1 en z_2 gespiegeld liggen t.o.v. een rechte l :

$$\operatorname{Re}(e^{i\alpha} z) = \beta, \quad (1)$$

de verbindingslijn van z_1 en z_2 door l loodrecht middendoor gedeeld wordt en dat als z_1 en z_2 gespiegeld liggen t.o.v. een cirkel $|z - m|^2 = R^2$, uit

$$z_2 - m = \frac{R^2}{\bar{z}_1 - \bar{m}} = \frac{R^2}{|z_1 - m|^2} (z_1 - m),$$

volgt dat de verbindingslijn van z_1 en z_2 gaat door m , dat z_1 en z_2 aan dezelfde kant van m liggen en dat $|z_1 - m| |z_2 - m| = R^2$. Als $z_1 \rightarrow m$ dan nadert z_2 tot ∞ . Daarom zeggen we dat ook middelpunt en ∞ gespiegeld liggen.

Stelling 3.1.4. Als z_1 en z_2 gespiegeld liggen t.o.v. een "cirkel" C dan liggen na een gebroken lineaire transformatie de beelden van z_1 en z_2 gespiegeld t.o.v. het beeld van C .

Bewijs: zelf.

Toepassingen

a) Wat is het beeld van de eenheidscirkel bij de afbeelding

$$z \rightarrow w := 1/(e^{i\alpha} - z) \quad (\alpha \text{ reëel}).$$

Merk op dat $z = 0$ en $z = \infty$ gespiegeld liggen t.o.v. $|z| = 1$; $w = e^{-i\alpha}$ en $w = 0$ liggen dus gespiegeld t.o.v. het beeld van de eenheidscirkel.

Construeer op grond hiervan dit beeld.

b) Gevraagd worden alle g.l.afb. die $|z| < 1$ op $|w| < 1$ afbeelden.

Uit de continuïteit van de g.l.afb. volgt dat dan $|z| = 1$ op $|w| = 1$ afgebeeld wordt. Stel dat $z = a$, met $|a| < 1$, afgebeeld wordt op $w = 0$ (er is precies één zo'n a !). Volgens stelling 3.1.4 wordt dan $z = 1/\bar{a}$ afgebeeld op $w = \infty$ (ga na). Dus moet de afbeelding de vorm

$$w = c \frac{z-a}{z-1/\bar{a}} = c' \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

hebben. Daar $z = 1$ afgebeeld wordt op een punt van $|w| = 1$, moet $|c'| = 1$ zijn. Dus: iedere g.l.afb. die $|z| < 1$ afbeeldt op $|w| < 1$ heeft de vorm

$$z \rightarrow w := f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \text{met } \alpha \text{ reëel en } |a| < 1. \quad (2)$$

Omgekeerd beeldt ook iedere functie van deze vorm $|z| < 1$ conform af op $|w| < 1$ (ga na).

De g.l. functie (2) is gekarakteriseerd door

$$f(a) = 0, \quad \arg(f'(a)) = \alpha.$$

Laat zelf zien dat

$$z \rightarrow w := g(z) := \frac{e^{i\beta} z + b}{1 + \bar{b} e^{-i\beta} z}, \quad (\beta \text{ reëel, } |b| < 1) \quad (3)$$

een g.l.afb. van $|z| < 1$ op $|w| < 1$ gegeven wordt die gekarakteriseerd is door

$$g(0) = b, \quad \arg(g'(0)) = \beta.$$

- c) Zowel door (2) als door (3) wordt de meest algemene g.l.afb. gegeven die $|z| < 1$ conform afbeeldt op $|w| < 1$. De beperking tot g.l.afb. is daarbij niet essentieel. Er geldt nl.

Stelling 3.1.4.1. Iedere conforme afbeelding $z \rightarrow w := g(z)$ van $|z| < 1$ op $|w| < 1$ is gebroken lineair.

Bewijs. Zij $z \rightarrow w := g(z)$ een conforme afbeelding van $|z| < 1$ op $|w| < 1$. Zij $g(0) = b$, $\arg(g'(0)) = \beta$. We moeten bewijzen dat g dan door (3) gegeven wordt.

Beschouw de g.l.afb.

$$w \rightarrow t := f(w) := e^{-i\beta} \frac{w-b}{1-\bar{b}w}.$$

Deze beeldt $|w| < 1$ af op $|t| < 1$ met $f(b) = 0$, $\arg(f'(b)) = -\beta$.

De afbeelding

$$z \rightarrow t := h(z) := f(g(z)) = e^{-i\beta} \frac{g(z)-b}{1-\bar{b}g(z)}$$

beeldt dus $|z| < 1$ conform af op $|t| < 1$ met $h(0) = 0$, $\arg(h'(0)) = \arg(f'(b)g'(0)) = 0$.

Volgens lemma 2.5 is dus

$$h(z) = z,$$

of

$$e^{-i\beta} \frac{g(z) - b}{1 - \bar{b}g(z)} = z,$$

waaruit (3) volgt.

d) Opgave. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$ en zij hier $|f(z)| < 1$.

Dan geldt voor $|z| < 1$

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Hint: kies $z = a$, zij $f(a) = b$.

Zoek een afbeelding $s \rightarrow z := g(s)$ van $|s| < 1$ op $|z| < 1$ met $g(0) = a$.

Zoek een afbeelding $w \rightarrow t := h(w)$ van $|w| < 1$ op $|t| < 1$ met $h(b) = 0$.

Pas het lemma van Schwarz toe op $h(f(g(s)))$.

3.1.5. Definitie. Zij z_1, z_2, z_3, z_4 vier onderling verschillende complexe getallen (één mag er oneindig zijn). De dubbelverhouding van z_1, z_2, z_3, z_4 is

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$$

(met geschikte limiet als één der getallen oneindig is).

Stelling 3.1.5. Zij $z \rightarrow w := f(z)$ een g.l.afb. Zij z_1, z_2, z_3, z_4 onderling verschillend met beelden w_1, w_2, w_3, w_4 . Dan is

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Bewijs. Uit $w = (az + b)/(cz + d)$ volgt

$$w_1 - w_2 = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}.$$

Maak het bewijs zelf af.

Toepassingen.

a) Zij z_1, z_2, z_3 drie onderling verschillende complexe getallen (één mag er oneindig zijn).

Uit de elementaire meetkunde weten we dat er precies één "cirkel" C door deze punten gaat.

Een g.l.afb. die deze "cirkel" afbeeldt op de reële as van het w -vlak is

$$w = \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(z_3 - z_1)} \quad (1)$$

(met geschikte limiet als een der getallen $z_1, z_2, z_3 \infty$ is).

Immers, het is een g.l.afb.; "cirkels" worden dus op "cirkels" afgebeeld; z_1, z_2, z_3 gaan over in resp. $0, \infty, 1$; de "cirkel" door $0, \infty, 1$ is de reële as.

Wordt het binnengebied G_z van C afgebeeld op boven- of onderhalfvlak? Dat hangt af van de ligging van z_1, z_2, z_3 op C . Als z_1, z_2, z_3 in de links-om volgorde op C liggen (d.w.z., dat we van z_1 via z_2 naar z_3 lopend G_z aan de linkerhand hebben), dan is het beeld van G_z het onderhalfvlak, want als we langs de reële as van 0 via ∞ naar 1 gaan dan hebben we het onderhalfvlak aan de linkerhand. En volgens stelling 2.4.1 blijft immers de omloopszin behouden.

Opgave. Bewijs dat z_1, z_2, z_3 in de links-om volgorde op C liggen dan en slechts dan als

$$0 \leq \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} < \pi .$$

En is dit het geval dan ligt z in het binnengebied van C dan en slechts dan als

$$\arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} < \arg \frac{z_2 - z}{z_1 - z} < 2\pi .$$

Bewijs hiermee opnieuw de uitspraak over het beeld van G_z .

Opgave. Leid met behulp van (1) af dat de vergelijking van de "cirkel" door z_1, z_2, z_3 is

$$\operatorname{Im}((z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_2)(z_3 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)) = 0 .$$

Ga na dat deze vergelijking inderdaad een "cirkel" voorstelt.

- b) Zij z_1, z_2, z_3 drie onderling verschillende punten op een cirkel C_z en w_1, w_2, w_3 drie onderling verschillende punten op een cirkel C_w . De conforme afbeelding $z \rightarrow w$ die C_z op C_w afbeeldt is dan eenduidig bepaald en wordt gevonden door oplossen van w uit

$$\frac{(w-w_1)(w_3-w_2)}{(w-w_2)(w_3-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_3-z_1)}{(z-z_2)(z_3-z_2)} .$$

Bewijs dit zelf. Bewijs ook dat het binnengebied van C_z op dat van C_w wordt afgebeeldt dan en slechts dan als z_1, z_2, z_3 en w_1, w_2, w_3 in dezelfde volgorde op C_z , resp. C_w liggen. Wat gebeurt er in het andere geval?

- c) De meest algemene conforme afbeelding $z \rightarrow w$ waarbij de reële as overgaat in de reële as is

$$w = \frac{(z-\alpha)(\beta-\gamma)}{(z-\gamma)(\beta-\alpha)} ,$$

met α, β en γ reëel en verschillend (er mag er één oneindig zijn).

Daarbij wordt het bovenhalfvlak afgebeeld op het bovenhalfvlak indien

$$\text{òf } -\infty < \alpha < \beta < \gamma \leq \infty$$

$$\text{òf } -\infty < \gamma < \alpha < \beta \leq \infty$$

$$\text{òf } -\infty < \beta < \gamma < \alpha \leq \infty .$$

Bewijs dit zelf (verifieer ook of het beeld van $z = i$ inderdaad in het bovenhalfvlak ligt).

- d) Zij G_z een begrensd gebied waarvan de rand Γ_z bestaat uit eindig veel continu differentieerbare bogen. Volgens stellingen 2.5 en 2.6 is er een conforme afbeelding $z \rightarrow w := f(z)$ van G_z op $|w| < 1$ die continu voortzetbaar is tot afbeelding van $G_z + \Gamma_z$ op $|w| \leq 1$. Natuurlijk is f niet eenduidig bepaald: we kunnen $|w| < 1$ nog met een g.l.afb. op zichzelf afbeelden. Uit het voorgaande volgt echter:

Kies drie punten z_1, z_2, z_3 van Γ_z die in de "links-om" volgorde t.o.v. G_z liggen.

Kies drie punten w_1, w_2, w_3 op $|w| = 1$ die eveneens in de links-om volgorde liggen.

Dan is er precies één continue afbeelding $z \rightarrow w := f(z)$ van $G_z + \Gamma_z$ op $|w| \leq 1$ die G_z conform afbeeldt op $|w| < 1$ en z_1, z_2, z_3 op resp. w_1, w_2 en w_3 . Immers als

$$z \rightarrow t := g(z)$$

een conforme afbeelding van G_z op $|t| < 1$ is, dan wordt volgens stelling 2.6 Γ_z met behoud van de omloopszin afgebeeld op $|t| = 1$. Uit b) volgt nu dat $f(z)$ moet voldoen aan

$$\frac{(f(z) - w_1)(w_3 - w_2)}{(f(z) - w_2)(w_3 - w_1)} = \frac{(g(z) - g(z_1))(g(z_3) - g(z_2))}{(g(z) - g(z_2))(g(z_3) - g(z_1))} . \quad (1)$$

Hierdoor is $f(z)$ eenduidig bepaald.

Opgave. Veronderstel dat z_1, z_2, z_3 in de linksom volgorde liggen en w_1, w_2, w_3 in de rechtsom volgorde. Bepaal weer $f(z)$ uit (1). Wat is dan het beeld van G_z ?

- e) We willen $|z| < 1$ zo afbeelden op $\text{Im } w > 0$ dat $z = -1, -i, 1, i$ corresponderen met $w = -1, 0, 1, \infty$. Volgens het bovenstaande is het niet zeker dat dit mogelijk is! Laten we de eis $z = -1 \rightarrow w = -1$ weg, dan vinden we als afbeeldingsfunctie

$$w = \frac{(z+i)(1-i)}{(z-i)(1+i)} = \frac{z+i}{1+iz} . \quad (2)$$

Het blijkt dat het meevalt: $z = -1$ wordt op $w = -1$ afgebeeld. Verklaar dit op grond van een symmetrie beschouwing (laat bv. zien dat door (1) de halve cirkel $|z| < 1, \text{Re } z > 0$ afgebeeld wordt op het kwartvlak $\text{Im } w > 0, \text{Re } w > 0$ en pas het spiegelingprincipe toe!).

3.2. De functie $w = z^2$

De functie $f(z) := z^2$ is uiteraard analytisch voor alle z en $f'(z) \neq 0$ voor $z \neq 0$. Daar $z_1^2 = z_2^2$ en $z_1 \neq z_2$ impliceert $z_1 = -z_2$, beeldt $f(z)$ een gebied G_z conform af dan en slechts dan als $z \in G \Rightarrow -z \notin G$, ofwel, als het gebied

$$\tilde{G}_z := \{z \mid -z \in G_z\}$$

(verkregen door spiegeling van G_z aan de oorsprong) disjunct is met G_z . Met name mag G_z dus de oorsprong niet bevatten.

Veronderstel nu dat $f(z)$ een gebied G_z conform afbeeldt op G_w . Wat is de inverse functie $g(w)$? Uit $w = z^2$ volgt $z = \pm \sqrt{w}$. Welk teken moeten we nemen? Stel dat G_z een punt z_0 uit het rechterhalfvlak bevat. Zij $w_0 := z_0^2$. Dan is in een omgeving van w_0 (waarom?)

$$g(w) = \sqrt{w} \quad (\text{hoofdwaarde}).$$

En vanuit deze omgeving moeten we $g(w)$ analytisch voortzetten. Daar G_w geen gesloten Jordankrommen kan bevatten die de oorsprong in hun inwendige hebben

(waarom niet?) is deze voortzetting eenduidig bepaald en onafhankelijk van de wijze waarop we voortzetten. Passeren we bij de voortzetting de negatief reële as van het w -vlak, dan gaat \sqrt{w} over in $-\sqrt{w}$, als we met w de hoofdwaarde blijven bedoelen. Men schrijft echter ook vaak

$$g(z) = \sqrt{w}$$

voor alle $w \in G_w$ en bedoelt dan met \sqrt{w} eenvoudig de functie die de inverse afbeelding van G_w op G_z levert.

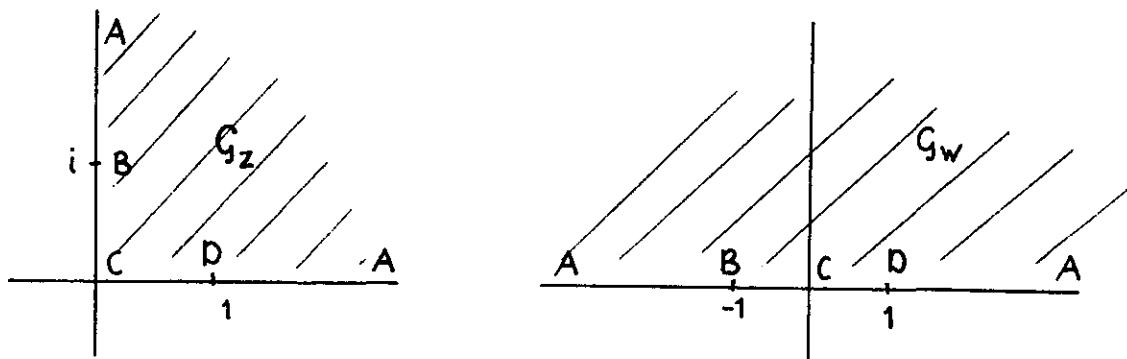
Opgaven

- 1) Zij $-\pi < \alpha \leq \pi$ en zij G_z het halfvlak $\text{Re}(e^{-i\alpha} z) > 0$. Dan is G_w het hele w -vlak behalve de halfrechte $w = e^{2i\alpha} t$, $-\infty < t \leq 0$.
Ga na waar in G_w $g(w) = \sqrt{w}$ (hoofdwaarde) en waar $g(w) = -\sqrt{w}$ (hoofdwaarde).
- 2) Beschouw het gebied G_z bepaald door

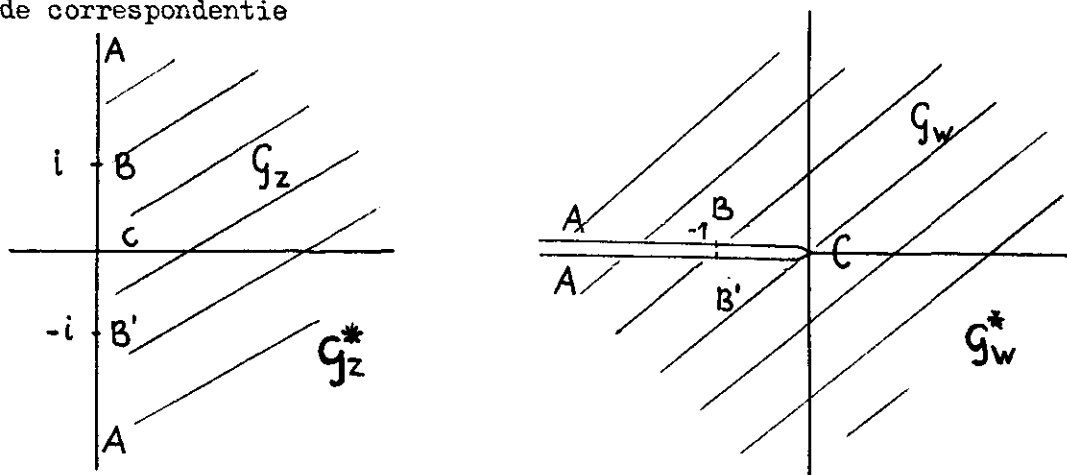
$$z \in G_z \Rightarrow \exists t > 0 \exists \rho > 0 (z = \rho e^{2\pi i t} \wedge 2t < \rho < 2t + 1)$$

en ga hiervoor de afbeelding en de inverse afbeelding na.

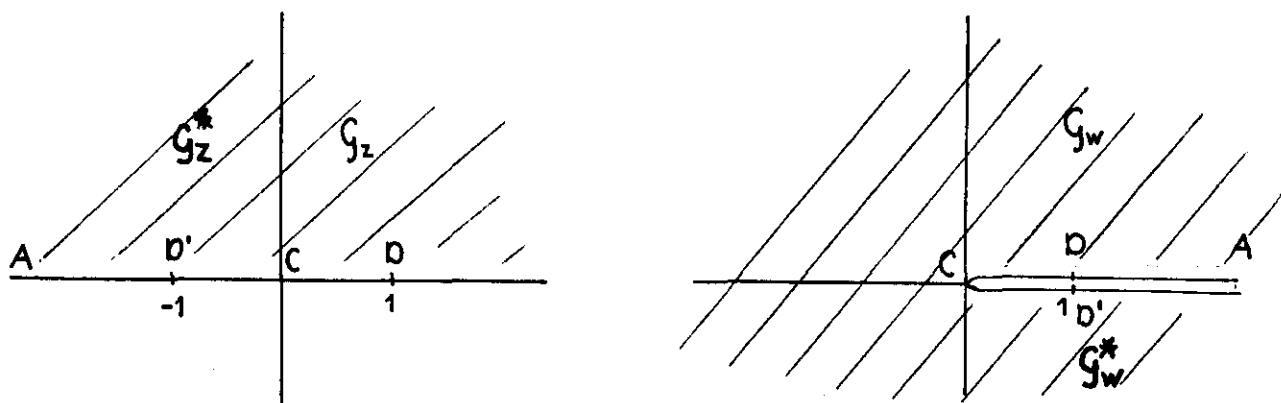
Het is duidelijk dat de hieronder geschetste gebieden G_z en G_w door $w = z^2$ op elkaar worden afgebeeld.



We passen nu het spiegelingprincipe toe. Spiegelen we aan CDA dan krijgen we de correspondentie



Spiegelen we aan ABC dan krijgen we



Opgaven

- 1) Vergelijk de resultaten uit deze paragraaf met die uit 1.6 en 1.8.
- 2) Zij $z = x + iy$, $w = u + iv$. Zij G_z het kwartvlak $x > 0$, $y > 0$. Bepaal het beeld van de halfrechte $x = x_0$ ($x_0 > 0$), $y > 0$ bij de afbeelding $w = z^2$. Dit is de "halve" parabool

$$u = x_0^2 - v^2/(4x_0^2), \quad v > 0.$$

Analoog is het beeld van $y = y_0$ ($y_0 > 0$), $x > 0$ de halve parabool

$$u = v^2/(4y_0^2) - y_0^2, \quad v > 0.$$

Laat zien dat beide scharen parabolen elkaar loodrecht snijden en de oorsprong als brandpunt hebben.

3.3. De functie $w = \sqrt{z^2 - 1}$

De functie $w = \sqrt{z^2 - 1}$ is analytisch voor $z \neq \pm 1$ en de afgeleide is $\neq 0$ voor $z \neq 0$. Uit $w_1 = w_2$ en $z_1 \neq z_2$ volgt $z_1 = -z_2$, maar anderzijds volgt uit $z_1 = -z_2$ niet altijd dat $w_1 = w_2$: het kan zijn dat $w_1 = -w_2$.

3.3.1. We bekijken eerst het geval dat G_z het (open) eerste kwadrant is en we eisen dat w positief reëel is als z positief reëel en > 1 is. Het beeldgebied G_w kunnen we op twee manieren vinden.

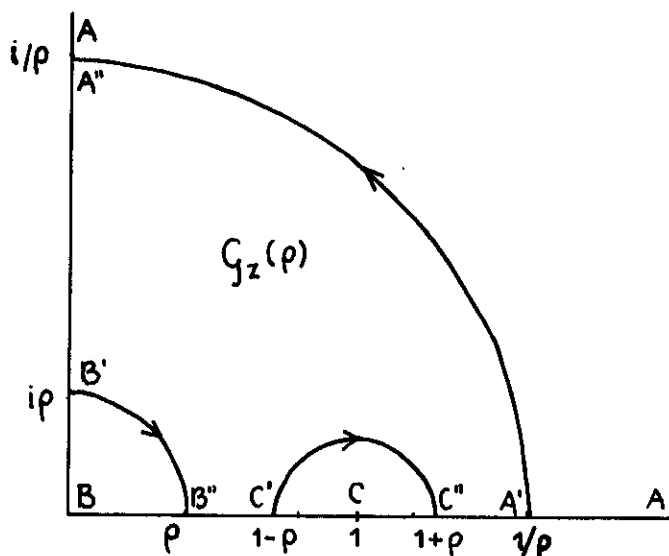
a) Door de afbeelding te ontleden in elementaire afbeeldingen

$$s = z^2, \quad t = s - 1, \quad w = \sqrt{t}$$

en na te gaan wat de met G_z corresponderende gebieden G_s , G_t en G_w zijn. Doe dit zelf.

b) Door na te gaan wat het beeld is van de rand van G_z en dan stelling 2.4.1 toe te passen.

Nauwkeuriger: we slaan cirkelbogen met stralen resp. $1/\rho$, ρ en ρ ($\rho < 1$) om B, B en C en beschouwen de gesloten weg $A'A''B''C''A'$ (zie figuur)



i. Langs $A'A''$ is $z = \rho^{-1} e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$,

$$w = \sqrt{\rho^{-2} e^{2i\theta} - 1} = \pm \rho^{-1} e^{i\theta} \sqrt{1 - \rho^2 e^{-2i\theta}}. \quad (1)$$

Daar $1 - \rho^2 e^{-2i\theta}$ in het rechterhalfvlak ligt, kunnen we voor de wortel de hoofdwortel nemen, het rechterlid van (1) is dan een continue functie van θ als we voor alle θ hetzelfde teken nemen. Daar volgens afspraak op CA w positief reëel is, moeten we het + teken hebben. Loopt nu z van A' naar A'' dan loopt w langs een kromme (die bij benadering een cirkel met straal ρ^{-1} is, als ρ groot is) van positief reële as naar positief imaginaire as.

ii. Op AB is $z = iy$, $0 < y < \infty$,

$$w = \sqrt{-y^2 - 1} = \pm i \sqrt{y^2 + 1}.$$

Aansluiting in A'' leert dat we het + teken moeten kiezen. w is dus op heel AB positief imaginair en nadert tot $+i$ als z naar 0 gaat.

iii. Langs $B'B''$ is $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, dus (hoofdwortel, aansluiting in B')

$$w = \sqrt{\rho^2 e^{2i\theta} - 1} = + i \sqrt{1 - \rho^2 e^{2i\theta}}.$$

iv. Op BC is $z = x$, $0 < x < 1$, en dus (aansluiting in B'')

$$w = \sqrt{x^2 - 1} = + i \sqrt{1 - x^2}.$$

- v. Langs $C'C''$ is $z = 1 + \rho e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, dus (hoofdwortel, aansluiting in C')

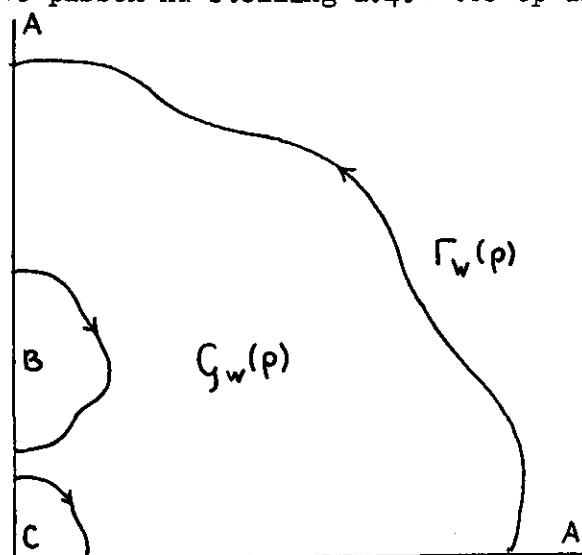
$$w = \sqrt{\rho e^{i\theta} (2 + \rho e^{i\theta})} = + e^{\frac{1}{2}i\theta} \sqrt{\rho (2 + \rho e^{i\theta})}.$$

Hieruit volgt dat w in C'' positief reëel is, in overeenstemming met het uitgangspunt:

- vi. Op CA hebben we $z = x$ ($1 < x < \infty$),

$$w = \sqrt{x^2 - 1}.$$

We passen nu stelling 2.4.1 toe op de gesloten weg $\Gamma_z(\rho) = A'A''B''C''$, die



als beeld een weg $\Gamma_w(\rho)$ heeft. $\sqrt{z^2 - 1}$ is analytisch op en binnen deze weg. En dus wordt het binnengebied $G_z(\rho)$ van $\Gamma_z(\rho)$ conform afgebeeld op het binnengebied $G_w(\rho)$ van $\Gamma_w(\rho)$.

Laten we nu $\rho \rightarrow 0$ gaan dan vinden we:

Als we afspreken dat $\sqrt{z^2 - 1}$ positief reëel is voor z reëel en > 0 , dan beeldt deze functie het eerste kwadrant van het z -vlak conform af op het eerste kwadrant van het w -vlak.

Opmerkingen

- 1) De gevolgde methode lijkt (en is) wat moeizaam. Hij is echter erg veilig en geeft een goed inzicht in het gedrag van de te onderzoeken functie bij de punten waar deze of zijn inverse niet analytisch is.
- 2) Men kan de methode iets versnellen door op te merken dat

$$\text{bij A: } w = \pm z \sqrt{1 - 1/z^2}$$

$$\text{bij B: } w = \pm i \sqrt{1 - z^2}$$

$$\text{bij C: } w = \pm \sqrt{z - 1} \cdot \sqrt{(2 + (z - 1))}.$$

De tweede factor is daarbij steeds analytisch in een omgeving van het beschouwde punt met positieve limietwaarde als we de hoofdwortel nemen. We hoeven daarom in wezen slechts de eerste factor te bekijken.

Merken we nu op dat $z^2 - 1$ positief reëel is op CA en negatief reëel op AB en BC , dan vinden we snel:

w positief reëel op CA (volgens afspraak)

⇒ + teken bij A

⇒ w positief imaginair op AB

⇒ + teken bij B

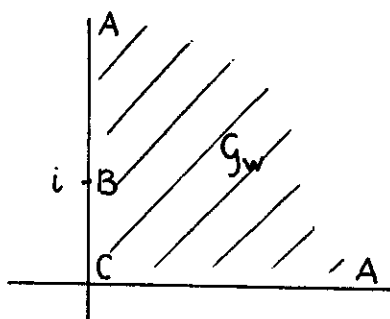
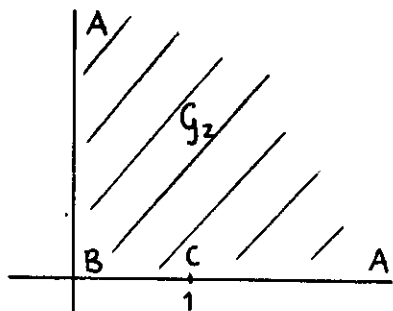
⇒ w positief imaginair op BC

⇒ + teken bij C (als we de hoofdwaarde van $\sqrt{z-1}$ nemen)

⇒ w positief reëel op CA.

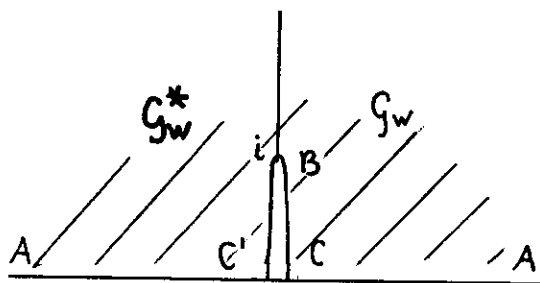
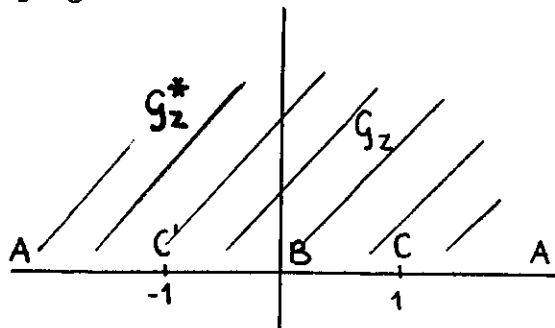
- 3) Merk op dat bij A de afbeelding conform is, in B $f(z)$ analytisch is maar $f'(z) = 0$ en bij C f niet analytisch is. Welke invloed heeft dat op de hoektrouwheid?
- 4) Dat $f(z)$ analytisch is op de open wegstukken AB, BC en CA is evident uit de formules. In algemenere situaties kan men het vaak concluderen met behulp van het spiegelingprincipe.

3.3.2. We beschouwen weer de afbeelding van eerste kwadrant op eerste kwadrant door $w = \sqrt{z^2 - 1}$.



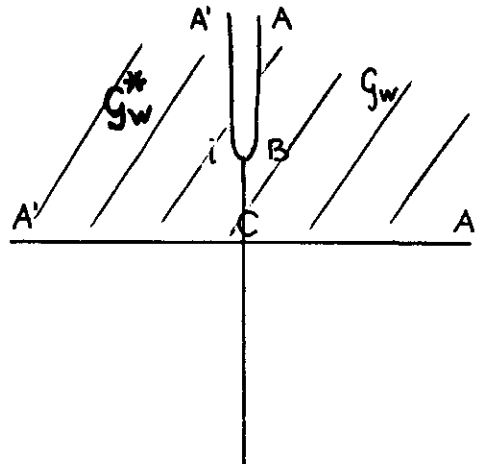
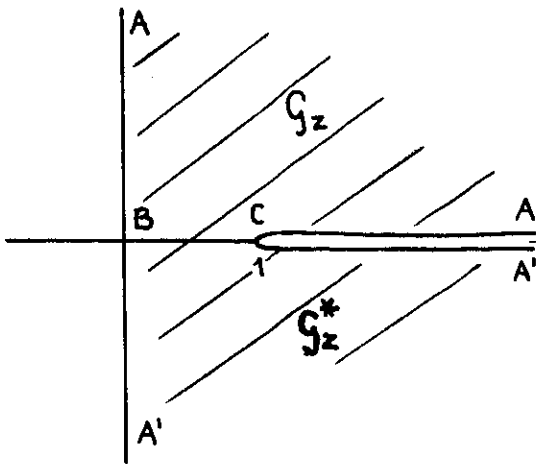
We willen het spiegelingprincipe toepassen. We kunnen spiegelen aan AB of aan BC of aan CA.

Spiegelen aan AB:



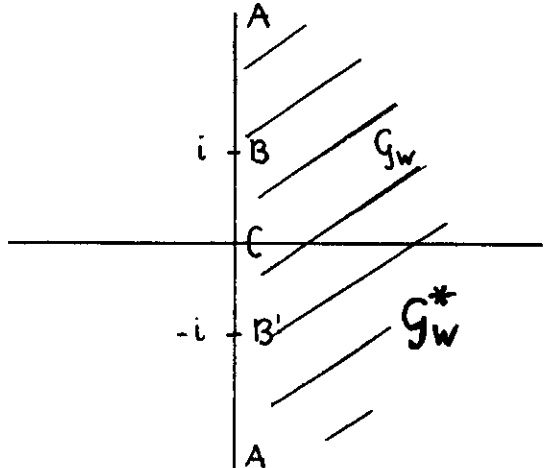
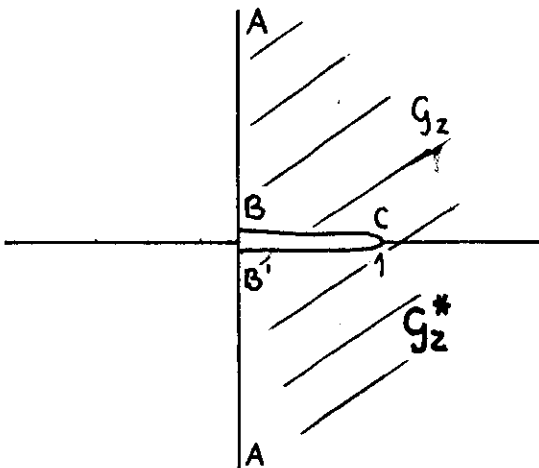
G_w is nu het bovenhalfvlak verminderd met het lijnstuk $w = iv, 0 < v \leq 1$.

Spiegelen aan BC:

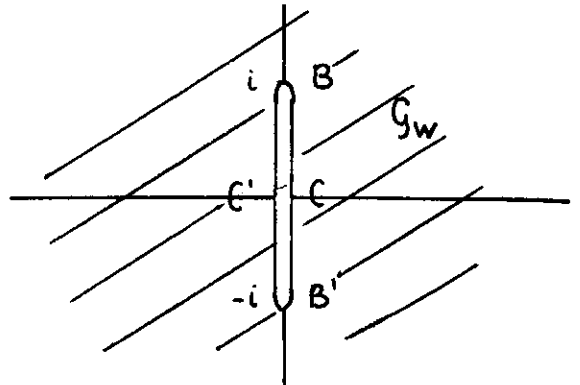
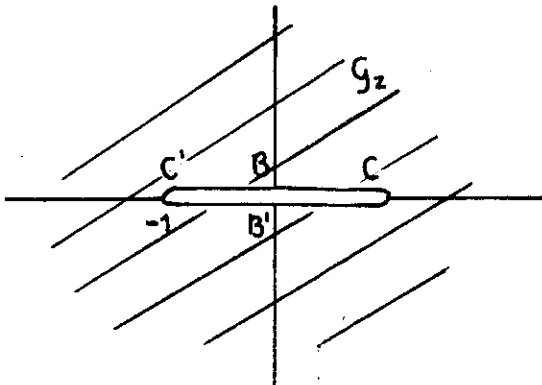


Merk op dat A en A' nu echt verschillende punten zowel van de rand van G_z als van de rand van G_w zijn (ga na wat de beelden van G_z en G_w op de Riemannbol zijn).

Spiegelen aan CA:



Spiegelen we in het laatste geval nog weer aan BAB' dan krijgen we



Merk op dat $z = \infty$ nu een inwendig punt van G_z geworden is (daar $\sqrt{z^2 - 1} = z\sqrt{1 - 1/z^2}$ conform is in een omgeving van $z = \infty$ kan dat).

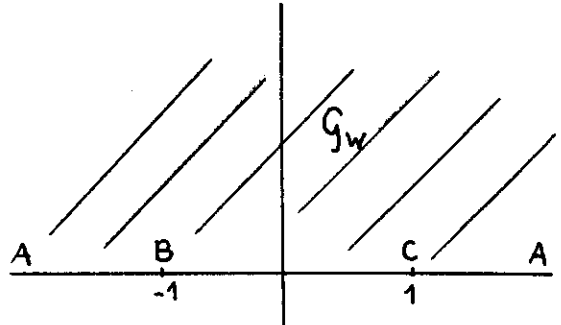
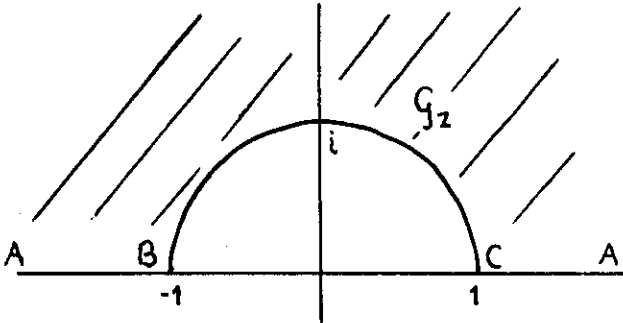
Opgaven

- 1) Pas de methode van het volgen van de randkromme toe op deze vier door spiegeling verkregen afbeeldingen.

2) Behandel de functie $w = z/\sqrt{1-z^2}$.

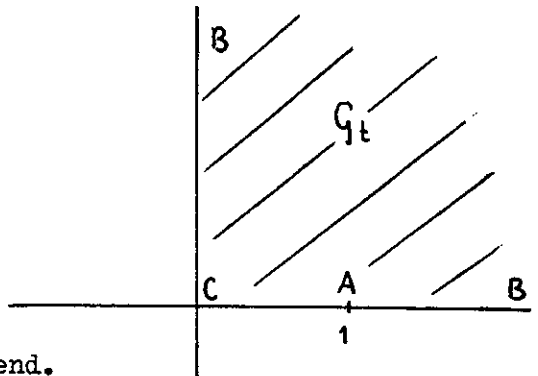
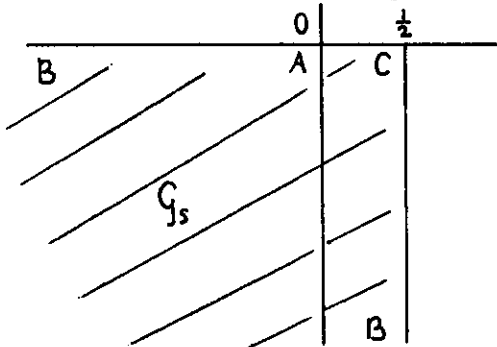
3.4. De functie $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$

We zoeken de conforme afbeelding van het gebied $G_z := \{z \mid \text{Im } z > 0 \wedge |z| > 1\}$ op het bovenhalfvlak $\text{Im } w > 0$ zodanig dat de randpunten $z = -1, 1, \infty$ corresponderen met resp. $w = -1, 1, \infty$.

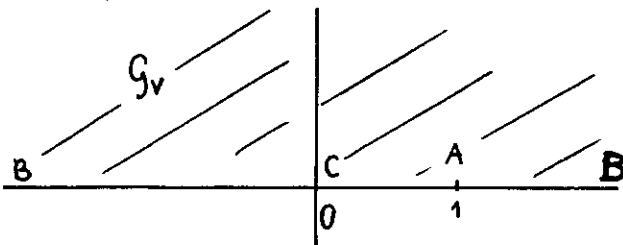


We zullen deze afbeeldingen synthetiseren via enkele tussenstappen.

- i. Zij $s = 1/(z+1)$. Bij deze gebroken lineaire transformatie gaan "cirkels" door het inversiepunt $z = -1$ over in rechten; zowel het beeld van CAB als dat van BC ligt dus op een rechte, deze rechten snijden elkaar loodrecht in het beeld van C. Uit het behoud van de omloopszin en de hoektrouwheid in C volgt nu (ga na) dat G_s is zoals getekend.



- ii. Zij $t = 1 - 2s$. G_t wordt dan zoals getekend.
- iii. Zij $v = t^2$. G_v wordt zoals getekend.



We hebben nu een afbeelding van G_z op een bovenhalfvlak, maar nog niet met de goede correspondentie van de randpunten. Deze verkrijgen we door nog een gebroken lineaire afbeelding toe te passen:

$$w = \frac{1+v}{1-v} .$$

Totaal krijgen we dan

$$w = \frac{1 + (1 - 2/(1+z))^2}{1 - (1 - 2/(1+z))^2} = \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) .$$

Opgaven

1) Stel $z = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 1$, $0 < \theta < \pi$), dan is, als $w = u + iv$,

$$u = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \cos \theta , \quad v = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}) \sin \theta .$$

Laat zien dat de (halve) cirkels $\rho = \text{constant}$ corresponderen met ellipsen (met ± 1 als brandpunten) en dat halfrechten $\theta = \text{constant}$ corresponderen met (kwart) hyperbolen (eveneens met ± 1 als brandpunten) die loodrecht op de ellipsen staan. Wat zijn de limietexemplaren als $\rho \rightarrow 1$ of $\theta \rightarrow 0$ of $\theta \rightarrow \pi$.

2) De bij $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ behorende inversen zijn

$$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1} .$$

Bespreek hoe deze functies het bovenhalfvlak afbeelden door na te gaan hoe ze zich op de reële as gedragen en stelling 2.4.1 toe te passen.

3) Laat zien dat $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ univalent is in ieder der gebieden $|z| > 1$, $|z| < 1$, $\text{Im } z > 0$, $\text{Im } z < 0$, en bepaal de conforme beelden van deze gebieden.

4) Zij G_z het hele z -vlak behalve de rechte lijn van $z = -1$ naar $z = 1$.
Zij G_w het hele w -vlak behalve de rechte lijn van $w = -e^{i\alpha}$ naar $e^{i\alpha}$ (met een reële α).

Zoek de functie $w = f(z)$ die G_z conform afbeeldt op G_w en wel zo, dat

$$f(\infty) = \infty , \quad \arg(f'(\infty)) = 0 .$$

Hint: beeld eerst G_z conform af op het gebied $|s| > 1$ en G_w op het gebied $|t| > 1$.

3.5. De exponentiële, hyperbolische en trigonometrische functies

3.5.1. We leiden eerst de voornaamste eigenschappen van de exponentiële en trigonometrische functies af uit de definitie door machtreeksen.

Definieer

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} ,$$

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) ,$$

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) ,$$

$$\cos(z) := \cosh(iz) ,$$

$$\sin(z) := -i \sinh(iz) .$$

Opgave. Leid de machtreeksen voor cosh, sinh, cos en sin af.

De machtreeks voor $\exp(z)$ heeft convergentiestraal oneindig, alle functies zijn dus gehele functies. Door term voor term differentiatie (zie WSK 50, p. 16) vinden we

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z) . \quad (1)$$

Hieruit volgt dat voor alle z en a

$$\frac{d}{dz}(\exp(a-z) \cdot \exp(z)) = 0 ,$$

dus $\exp(a-z) \cdot \exp(z) = \text{constant} = \exp(a)$,

want $\exp(0) = 1$.

Dus ook voor alle z_1 en z_2

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) . \quad (2)$$

Opgave. Leid (2) ook af door de termen van de machtreeks voor $\exp(z_1 + z_2)$ uit te werken.

Uit (2) volgt dat

$$\exp(z) \neq 0 \text{ voor alle } z .$$

Uit (2) en de definities volgt dat

$$\begin{aligned} \exp(x+iy) &= \exp(x) \cdot \exp(iy) \\ &= \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)) . \end{aligned} \quad (3)$$

Voor reële x en y zijn $\exp(x)$, $\cos(y)$ en $\sin(y)$ reëel.

Zeker is $\exp(x) > 0$ voor reële x , want deze functie is continu, nergens 0 en 1 voor $x = 0$.

Uit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$$

volgt dat $\exp(x)$ monotoon stijgt. Uit de reeks volgt dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = +\infty .$$

En met (2) is dan

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1/\exp(x)) = 0 .$$

Daar voor reële y $\overline{\exp(iy)} = \exp(-iy)$ (waarom?), is voor reële y

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy) \cdot \exp(-iy) = 1 . \quad (4)$$

Hieruit volgt dat ook

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty} \exp(z) = \infty , \quad \lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty} \exp(z) = 0 ,$$

uniform in $\operatorname{Im} z$.

Uit (1) en de definities volgt dat voor reële y

$$\frac{d}{dy} (\cos(y)) = -\sin(y) .$$

Daar

$$\begin{aligned} \sin(y) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{y^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{y^2}{(4k+2)(4k+3)} \right) \end{aligned}$$

is $\sin(y) > 0$ voor $0 < y < 2$.

En uit

$$\cos(y) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} = 1 - \sum_0^{\infty} \frac{y^{4k+2}}{(4k+2)!} \left(1 - \frac{y^2}{(4k+3)(4k+4)} \right)$$

volgt nu dat $\cos(y)$ monotoon daalt voor $0 < y < 2$ en dat $\cos(0) = 1$,

$\cos y < 1 - \frac{1}{2}y^2 \left(1 - \frac{y^2}{12} \right)$ voor $0 < y \leq 2$ en dus $\cos(2) < -\frac{1}{3}$.

Dus: $\cos(y)$ heeft in $(0, 2)$ precies één nulpunt y_0 .

We definiëren:

$$\pi := 2y_0 .$$

Daar $\sin y_0 > 0$, volgt uit (3) en (4) dat $\sin(\pi/2) = 1$ en

$$\exp(\pi i/2) = i .$$

Hieruit volgt met (2)

$$\exp(z + \pi i/2) = i \exp(z) ,$$

$$\cos(y + \pi/2) = -\sin(y), \sin(y + \pi/2) = \cos(y),$$

$$\sin(\pi/2 - y) = \cos(y) , \text{ etc.}$$

Met behulp van deze relaties kunnen we de bekende plaatjes van $\cos(y)$ en $\sin(y)$ voor $0 \leq y \leq 2\pi$ afleiden uit het plaatje van $\cos y$ in $0 \leq y \leq \pi/2$.

Met name zien we:

$$\exp(2\pi i) = 1$$

$$\text{en } \exp(iy) \neq 1 \text{ voor } 0 < y < 2\pi . \quad (5)$$

Met (3) volgt hieruit

$$\exp(z) = 1 \text{ dan en slechts dan als } z \text{ een geheel veelvoud van } 2\pi i \text{ is.}$$

Want $\exp(x+iy) = 1 \Rightarrow x = 0, \exp(iy) = 1$.

Zij $k = \text{entier}(y/(2\pi))$.

Dan is ook $\exp(i(y - 2\pi k)) = 1$.

Maar $0 \leq y - 2\pi k < 2\pi$, dus uit (5) volgt $y = 2\pi k$.

We hebben hiermee de met (2) voornaamste eigenschap van $\exp(z)$ gevonden:

$$\exp(z) \text{ is periodiek met periode } 2\pi i,$$

d.w.z.

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \text{ dan en slechts dan als } z_1 - z_2 \text{ een geheel veelvoud van } 2\pi i \text{ is.}$$

We definiëren nog: $e := \exp(1)$ en schrijven voortaan ook

$$e^z := \exp(z) ,$$

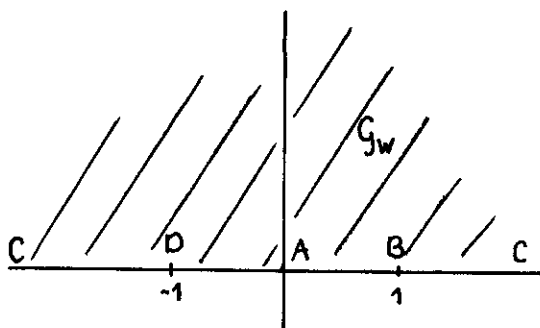
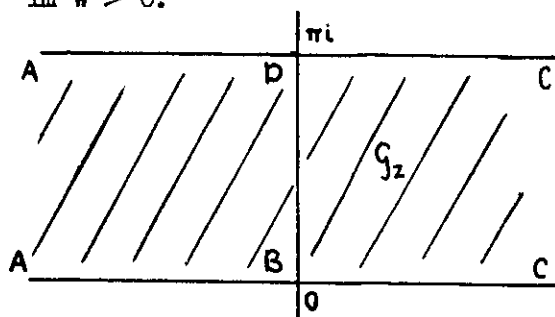
hetgeen zinvol is op grond van (2).

3.5.2. We beschouwen nu conforme afbeeldingen door middel van $w = e^z$.

Uit de periodicititeit volgt: de functie e^z is dan en slechts dan univalent in een gebied G_z als

$$z \in G_z \Rightarrow \forall k, k \text{ geheel}, k \neq 0 \quad (z + 2k\pi i \notin G_z) .$$

Zij G_z de strook $0 < \text{Im } z < \pi$. Dan is het beeldvlak van G_z het bovenhalfvlak $\text{Im } w > 0$.



Want als $z = x + iy$, $w = u + iv$, dan is

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y. \quad (1)$$

Uit $0 < y < \pi$ volgt dat $v > 0$. En omgekeerd is er bij iedere u en iedere $v > 0$ een x en y die aan (1) voldoen en zo dat $0 < y < \pi$:

$$x = \frac{1}{2} \log(u^2 + v^2) \quad (\text{de reële logarithme})$$

$$y = \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) \quad (\text{de hoofdwaarde}).$$

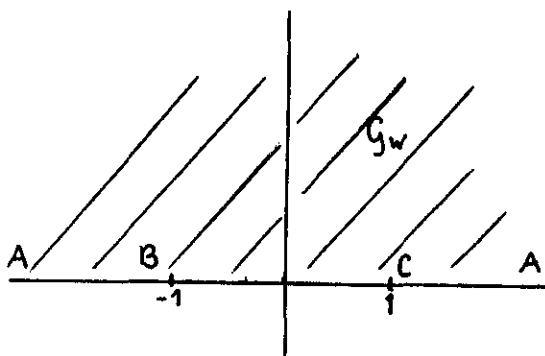
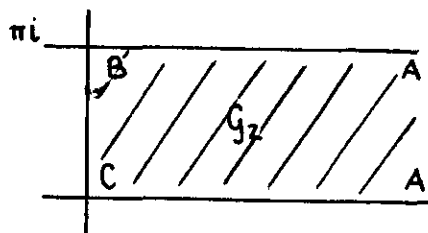
We kunnen spiegelen aan ABC en vinden dan dat de strook $|\text{Im } z| < \pi$ conform afgebeeld wordt op het w -vlak verminderd met oorsprong en negatief reële as.

De inverse functie bij $w = e^z$ is $z = \log w$. Deze functie is reeds in 1.7 uitvoerig besproken. De bijbehorende conforme afbeeldingen volgen uit het bovenstaande.

Opgave. Stel bekend dat $w = \exp(z)$ de strook $0 < \text{Im } z < \pi/2$ conform afbeeldt op het eerste kwadrant met $\text{Im } z = 0$ op $\text{Im } w = 0$ en $\text{Im } z = \pi/2$ op $\text{Re } w = 0$. Leid hieruit met behulp van het spiegelingprincipe af dat $\exp(z)$ periodiek is met periode $2\pi i$.

3.5.3. Uit $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ volgt gemakkelijk dat door $t = e^z$ de halve strook $\text{Re } z > 0$, $0 < \text{Im } z < \pi$ conform afgebeeld wordt op het gebied $|t| > 1$, $\text{Im } t > 0$. Door $w = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$ wordt dit gebied conform afgebeeld op $\text{Im } w > 0$ (vgl. 3.4). We vinden dus

door $w = \cosh z$ wordt de halve strook $\text{Re } z > 0$, $0 < \text{Im } z < \pi$ conform afgebeeld op $\text{Im } w > 0$ met de in de figuur aangegeven correspondenties.



Opgaven

- 1) Spiegel aan BC.
- 2) Bepaal de inverse functie.
- 3) Ga, gebruikmakend van

$$\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y ,$$

na wat het beeld van de rand van G_z is en bewijs met stelling 2.4.1 rechtstreeks dat G_z op G_w afgebeeld wordt.

Bepaal ook de beelden van rechten $\operatorname{Re} z = x_0$ en $\operatorname{Im} z = y_0$.

- 4) Bewijs dat door $w = \sin z$ de halve strook $|\operatorname{Re} z| < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0$ conform afgebeeld wordt op $\operatorname{Im} w > 0$.
- 5) Beschouw de functie

$$w = -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$$

voor $\operatorname{Im} z \geq 0$ (hoofdwaarde van wortel en logaritme in de buurt van $z=0$).

Ga na wat het beeld van $\operatorname{Im} z = 0$ is en wat het beeld van $\operatorname{Im} z > 0$ is.

- 6) Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ die de strook $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ afbeeldt op $\operatorname{Im} w > 0$ zo, dat $z = -\infty, 0, \infty$ afgebeeld wordt op resp. $w = -1, 0, 1$.
- 7) Bewijs dat $\tanh z$ de periode πi heeft en univalent is in de strook $|\operatorname{Im} z| < \pi/2$. Waarop wordt de strook afgebeeld? Wat is de inverse functie?
- 8) Zij a reëel. Door $s = \tanh z$, resp. $t = \tanh(z+a)$, wordt de strook $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ conform afgebeeld op de bovenhalfvlakken $\operatorname{Im} s > 0$, resp. $\operatorname{Im} t > 0$. Er moet dus (vgl. 3.1.5, pag. 35) een gebroken lineaire transformatie tussen s en t bestaan:

$$\tanh(z+a) = \frac{A \tanh z + B}{C \tanh z + D} .$$

Bepaal A, B, C en D door speciale waarden van z te nemen. Geldt de gevonden relatie nu ook voor complexe a ?

Hoofdstuk 4. De formule van Schwarz-Christoffel

4.1. Algemene beschouwingen

4.1.1. Zij G_z een begrensd enkelvoudig samenhangend gebied waarvan de rand Γ_z bestaat uit een eindig aantal lijnstukken. Zo'n gebied noemen we een polygoon gebied. Als we op dezelfde wijze als in 2.6 randpunten zo nodig meervoudig tellen dan kunnen we zeggen dat Γ_z een enkelvoudig gesloten polygoon is. Het aantal hoekpunten van Γ_z zij n .

We zoeken een conforme afbeelding $w \rightarrow z := g(w)$ van het bovenhalfvlak $\text{Im } w > 0$ op G_z . Volgens de afbeeldingsstelling van Riemann bestaat zo'n afbeelding. En volgens stelling 2.6 is $g(w)$ continu voort te zetten tot op de reële as, die dan afgebeeld wordt op Γ_z .

Zij z_1, \dots, z_n de hoekpunten van Γ_z , genummerd in positieve zin. Aan ieder hoekpunt z_k voegen we een "buitenhoek $\pi\mu_k$ toe: bij doorlopen van Γ_z in positieve zin draait de richtingsvector over de hoek $\pi\mu_k$ naar links. Kennelijk geldt

$$-1 \leq \mu_k < 1.$$

Daarbij correspondeert $0 < \mu_k < 1$ met een inspringende hoek van G_z , $-1 < \mu_k < 0$ met een uitspringende hoek en $\mu_k = -1$ met het uiteinde van een insnijding (coupure) in G_z .

Uit het feit dat Γ_z enkelvoudig en gesloten is en G_z als binnengebied heeft, volgt dat voor

$$0 < r \leq \min(|z_{k+1} - z_k|, |z_{k-1} - z_k|),$$

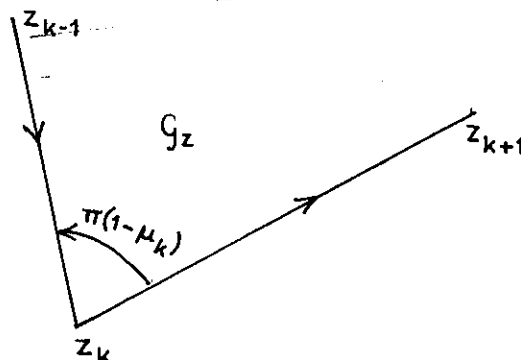
de punten

$$z = z_k + re^{i(\theta + \arg(z_{k+1} - z_k))}$$

tot G_z behoren als

$$0 < \theta < \pi(1 - \mu_k)$$

en op Γ_z liggen als $\theta = 0$ of $\theta = \pi(1 - \mu_k)$.



Meetkundig zien we in dat, omdat Γ_z enkelvoudig en gesloten is,

$$\sum_1^n \mu_k = 2. \quad (1)$$

We zullen deze relatie later langs analytische weg terugvinden.

4.1.2. Stel dat de hoekpunten z_1, \dots, z_n van Γ_z de beeldpunten zijn van w_1, \dots, w_n op de reële as. We veronderstellen de nummering zo, dat

$$-\infty \leq w_1 < w_2 < \dots < w_n < \infty. \quad (2)$$

(w_1, \dots, w_n moeten in de linksom zin t.o.v. het bovenhalfvlak liggen.)

De volgende stelling geldt nu:

Stelling 4.1. De functie $z = g(w)$ die $\text{Im } w > 0$ conform afbeeldt op het polygoon gebied G_z begrensd door een enkelvoudig gesloten polygoon Γ_z voldoet voor $\text{Im } w \geq 0$ aan

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{w - w_k}. \quad (3)$$

Hierin is n het aantal hoekpunten van Γ_z ; w_1, \dots, w_n zijn de originelen van de hoekpunten z_1, \dots, z_n ; μ_1, \dots, μ_n zijn de bij z_1, \dots, z_n behorende buitenhoeken.

Uit (3) volgt, als w_1, \dots, w_n alle eindig zijn,

$$g'(w) = C \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{-\mu_k} \quad (4)$$

met C een complexe constante. Als $w_1 = \infty$ dan moet de factor $(w - w_1)^{-\mu_1}$ weggelaten worden.

De formule (4) wordt formule van Schwarz-Christoffel genoemd.

We zullen stelling 4.1 in 4.2 bewijzen. We merken nu echter reeds op dat formule (4) zeer plausibel is.

Op grond van het spiegelingsprincipe is $g'(w)$ analytisch en $\neq 0$ op de reële as, behalve in de punten w_k . En daar voor $w_k < w < w_{k+1}$ het punt $g(w)$ op het lijnstuk (z_k, z_{k+1}) ligt, is voor deze w

$$\arg(g'(w)) = \arg(z_{k+1} - z_k).$$

Hieruit volgt:

als $w_{k-1} < w' < w_k < w'' < w_{k+1}$, dan is

$$\begin{aligned} \arg(g'(w'')) - \arg(g'(w')) &= \arg(z_{k+1} - z_k) - \arg(z_k - z_{k-1}) \\ &\equiv \pi\mu_k \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Daar nu

$$\arg(w - w_k) = \begin{cases} 0 & \text{als } w \text{ reëel en } > w_k \\ \pi & \text{als } w \text{ reëel en } < w_k \end{cases}$$

(we beschouwen $g(w)$ in $\text{Im } w \geq 0$, we moeten dus $\arg(w - w_k)$ continu nemen in $\text{Im } w \geq 0$) is ook

$$\arg((w'' - w_k)^{-\mu_k}) - \arg((w' - w_k)^{-\mu_k}) \equiv \pi\mu_k \pmod{2\pi}.$$

Uit deze beschouwing volgt dat

$$\arg\left(g'(w) \prod_1^n (w - w_k)^{\mu_k}\right)$$

constant moet zijn (modulo 2π) langs de hele reële as. Hieruit volgt nog niet (4): het zou kunnen zijn dat in plaats van de constante C een functie $C(w)$ nodig was; deze functie zou dan analytisch moeten zijn voor $w \neq w_k$ met in w_k polen of nulpunten van even orde.

3.1.3. Zij Γ_z gegeven, met n ($n \geq 3$) hoekpunten z_1, \dots, z_n . Zoals bekend (zie 3.1.5.d) kunnen we drie der punten w_1, \dots, w_n voorschrijven (mits in de goede volgorde), de overige punten w_k zijn dan in principe geheel bepaald, maar ons nog onbekend. Hoe kunnen we nu met behulp van (4) de afbeeldingsfunctie $g(w)$ geheel bepalen? In (4) zitten nog één complexe en $n-3$ reële onbekende parameters. En bij integratie van (4) komt er nog één additieve complexe parameter bij.

We merken op dat een begrensde gesloten polygoon met n hoekpunten waarvan alle buitenhoeken gegeven zijn, op translatie en rotatie na eenduidig bepaald is als van $n-2$ zijden de lengten gegeven zijn. Er zijn dus $n-2$ onafhankelijke relaties van de vorm

$$\begin{aligned} |z_{k+1} - z_k| &= \left| \int_{w_k}^{w_{k+1}} g'(w) dw \right| \\ &= |C| \int_{w_k}^{w_{k+1}} \prod_{j=1}^n |w - w_j|^{-\mu_j} dw. \end{aligned} \tag{5}$$

Deze zijn voldoende om $|C|$ en de $n-3$ onbekende w_k te bepalen. Op grond van de afbeeldingsstelling van Riemann weten we dat, als Γ_z enkelvoudig is, dit stelsel vergelijkingen (dat, als $n > 3$, zwaar niet-lineair is) precies één oplossing heeft.

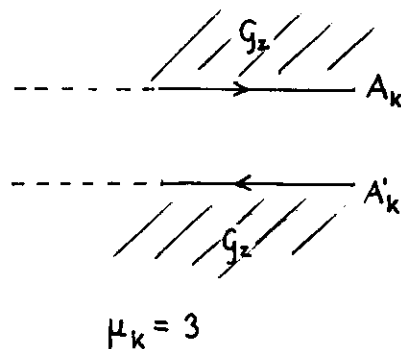
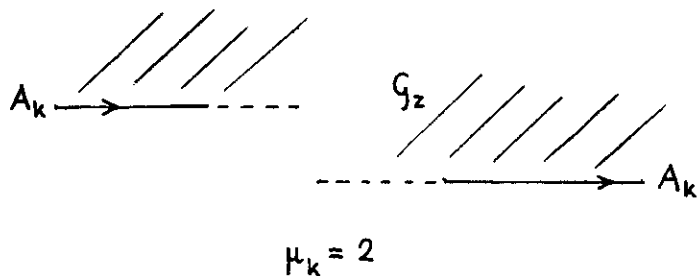
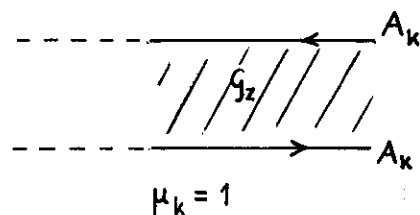
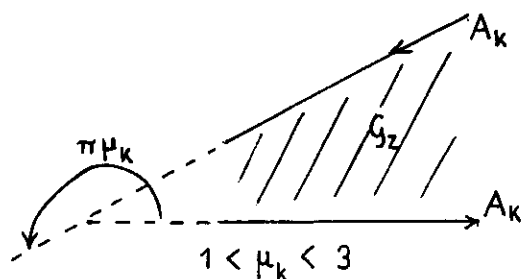
De translatie-vrijheidsgraden van het polygoon corresponderen met de complexe integratie constante bij de integratie van (4). En de rotatievrijheid correspondeert met $\arg C$. Bijvoorbeeld kan $\arg C$ bepaald worden uit

$$\arg C = \arg(z_1 - z_n)$$

(ga na, neem van alle factoren $(w - w_k)^{-\mu_k}$ de hoofdwaaarde).

4.1.4. Vaak willen we niet begrensde gebieden G_z afbeelden, waarvan de rand bestaat uit een eindig aantal lijnstukken, halfrechten en rechten. De rand Γ_z bevat dan het punt ∞ één of meerdere malen. Bij een hoekpunt $z_k = \infty$ definiëren we het getal μ_k op dezelfde manier als boven: $\pi\mu_k$ is de hoek waarover de richtingsvector langs Γ_z naar links draait bij het passeren van z_k . Uit onderstaande plaatjes blijkt dat in dit geval

$$1 \leq \mu_k \leq 3.$$



Ook in dit geval geldt de relatie (1) uit 4.1.1. En het blijkt dat stelling 4.1 ook voor deze algemenere situatie onverminderd geldt.

De bepaling van de parameters $|C|$ en w_k lukt echter niet altijd op de in 4.1.3 geschetste manier. Meestal kunnen we echter door ad hoc beschouwingen tot het vereiste aantal relaties komen.

4.2. Bewijs van de formule van Schwarz-Christoffel

4.2.1. Uit de beschouwing in 4.1.2 blijkt dat we moeten aantonen dat de functie

$$h(w) := g'(w) \prod_1^n (w - w_k)^{\mu_k} \quad (1)$$

een constante is. Uit (1) volgt

$$\frac{h'(w)}{h(w)} = \frac{g''(w)}{g'(w)} + \sum_1^n \frac{\mu_k}{w - w_k} \quad (2)$$

We zullen bewijzen, dat het rechterlid van (2) in het gehele vlak (ook in de punten w_k) analytisch is en in het oneindige naar 0 gaat. Daaruit volgt direct dat $h(w)$ constant is.

4.2.2. We beginnen met een lemma dat het locale gedrag van $g(w)$ bij een w_k beschrijft.

Lemma 4.2.2. Zij $f(w)$ analytisch voor $0 < |w| < \rho$, $\text{Im } w > 0$ en continu voor $0 \leq |w| < \rho$, $\text{Im } w \geq 0$.

Zij $f(0) = 0$.

Zij voor $0 < |w| < \rho$ $f(w) \neq 0$ en

$$\begin{aligned} \arg(f(w)) &= 0 && \text{als } 0 < w < \rho, \\ \arg(f(w)) &= \pi\alpha && \text{als } -\rho < w < 0, \\ 0 < \arg(f(w)) &< \pi\alpha && \text{als } \text{Im } w > 0, \end{aligned}$$

waarin

$$0 < \alpha \leq 2.$$

Dan is er een ρ' , met $0 < \rho' \leq \rho$, zo, dat voor $0 < |w| < \rho'$, $\text{Im } w \geq 0$,

$$f(w) = w^\alpha \sum_0^\infty a_k w^k \quad \text{met } a_0 > 0, \quad (3)$$

$$f'(w) = w^{\alpha-1} \sum_0^\infty b_k w^k \quad \text{met } b_0 > 0, \quad (4)$$

$$\frac{f''(w)}{f'(w)} + \frac{1-\alpha}{w} = \sum_0^{\infty} c_k w^k. \quad (5)$$

Bewijs: Zij voor $|w| < \rho$, $\text{Im } w \geq 0$,

$$g(w) := (f(w))^{1/\alpha}$$

(dus $g(0) = 0$ en voor $w \neq 0$ $g(w) = |f(w)|^{1/\alpha} e^{i \arg(f(w))/\alpha}$).

Dan is $g(w)$ analytisch voor $0 < |w| < \rho$, $\text{Im } w > 0$ en continu voor $|w| < \rho$, $\text{Im } w \geq 0$. Voor $0 < |w| < \rho$ is $g(w) \neq 0$ en

$$\left. \begin{array}{ll} \arg(g(w)) = 0 & \text{als } 0 < w < \rho, \\ \arg(g(w)) = \pi & \text{als } -\rho < w < 0, \\ 0 < \arg(g(w)) < \pi & \text{als } \text{Im } w > 0. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Met het spiegelingprincipe volgt hieruit dat $g(w)$ analytisch voort te zetten is in de hele schijf $|w| < \rho$. Daar $g(0) = 0$ geldt hier dus

$$g(w) = \sum_1^{\infty} p_k w^k. \quad (7)$$

Uit (6) volgt (waarom?) dat $p_1 \neq 0$ en zelfs positief reëel moet zijn. We schrijven nu (7) als

$$g(w) = p_1 w \left(1 + \sum_1^{\infty} a_k w^k \right).$$

Dan is duidelijk dat in een voldoende kleine schijf $|w| < \rho'' \leq \rho$

$$f(w) = (g(w))^\alpha = w^\alpha h(w),$$

met $h(w)$ analytisch, $h(0) = p_1^\alpha > 0$.

Hieruit volgen direct (3) en (4). Leid zelf (5) af (neem $\rho' \leq \rho''$ zo, dat $f'(w) \neq 0$ voor $0 < |w| < \rho'$).

Opgaven

- 1) De convergentiestraal van de reeksen in (3) en (4) is minstens ρ . Bewijs dit door op te merken dat $w^{-\alpha} f(w)$ analytisch is voor $|w| < \rho$.
- 2) Bewijs dat de coëfficiënten a_k , b_k en c_k alle reëel zijn.
- 3) Bewijs een analoge stelling voor het volgende geval:
 f is analytisch voor $R < |w| < \infty$, $\text{Im } w > 0$, en continu voor $R < |w| \leq \infty$, $\text{Im } w \geq 0$. $f(\infty) = 0$ en voor $R < |w| < \infty$ is $f(w) \neq 0$ en

$$\begin{aligned} \arg(f(w)) &= 0 && \text{als } R < w < \infty, \\ \arg(f(w)) &= -\pi\alpha && \text{als } -\infty < w < R, \\ -\pi\alpha < \arg(f(w)) < 0 && \text{als } \operatorname{Im} w > 0, \quad R < |w| < \infty. \end{aligned}$$

Hierin is $0 < \alpha \leq 2$.

Dan geldt o.m.: in een omgeving van $w = \infty$ is

$$\frac{f''(w)}{f'(w)} + \frac{1+\alpha}{w} = \sum_2^{\infty} c_k w^{-k}. \quad (8)$$

4.2.3. We bewijzen nu stelling 4.1 voor het geval dat alle getallen z_1, \dots, z_n en alle getallen w_1, \dots, w_n eindig zijn.

De afbeeldingsfunctie $g(w)$ is analytisch voor $\operatorname{Im} w > 0$ en continu voor $\operatorname{Im} w \geq 0$.

Voor $w_k < w < w_{k+1}$ ligt $g(w)$ op het lijnstuk (z_k, z_{k+1}) , op grond van het spiegelingprincipe is $g(w)$ dus ook analytisch op (w_k, w_{k+1}) en is ook daar $g'(w) \neq 0$ (waarom?).

We passen lemma 4.2.2 toe op de functies

$$f_k(w) := e^{-i \arg(z_{k+1} - z_k)} (g(w) - z_k)$$

($k = 1, \dots, n$; $z_{n+1} := z_1$, etc.).

Hiervoor geldt (vergelijk 4.1.1 bij de definitie van μ_k)

$$\begin{aligned} \arg(f_k(w)) &= 0 && \text{als } w_k < w < w_{k+1}, \\ \arg(f_k(w)) &= \pi(1 - \mu_k) && \text{als } w_{k-1} < w < w_k, \end{aligned}$$

en $0 < \arg(f_k(w)) < \pi(1 - \mu_k)$

als $\operatorname{Im} w > 0$, $|w - w_k| \leq \min(|w_{k+1} - w_k|, |w_{k-1} - w_k|)$.

Lemma 4.2.2 levert dus: de functie

$$\frac{f_k''(w)}{f_k'(w)} + \frac{\mu_k}{w - w_k} = \frac{g''(w)}{g'(w)} + \frac{\mu_k}{w - w_k}$$

is analytisch (voort te zetten) in een omgeving van w_k . Daar f_k reëel is voor $w_k < w < w_{k+1}$, is deze functie ook reëel voor $w_{k-1} < w < w_{k+1}$ (waarom?). Hieruit volgt onmiddellijk: de functie $h'(w)/h(w)$ uit (2) is analytisch in het bovenhalfvlak en op de reële as en reëel op de reële as, dus (spiegelingprincipe) een gehele functie.

We kijken nu naar $w = \infty$. Zij $g(\infty) = z_0$, dit is een punt op het lijnstuk (z_n, z_1) . Op grond van het spiegelingsprincipe is $g(w)$ analytisch in een omgeving van $w = \infty$ (ga na, kijk eerst naar $g(1/t)$ in de buurt van $t = 0$).

Hier is dus

$$g(w) = z_0 + \sum_1^{\infty} a_k w^{-k}.$$

Daar de door g gegeven afbeelding conform is in de buurt van $w = \infty$ moet $a_1 \neq 0$ zijn (ga na).

Hieruit volgt (ga na) dat voor $|w| > R$ geldt

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = -\frac{2}{w} + \sum_2^{\infty} c_k w^{-k}. \quad (9)$$

Voor de functie $h'(w)/h(w)$ betekent dit dat deze naar 0 gaat als $w \rightarrow \infty$. En volgens Liouville (WSK 50, p. 43) impliceert dit dat $h'(w)/h(w) = 0$. Uit (2) volgt dan

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = -\sum_1^n \frac{\mu_k}{w - w_k}. \quad (10)$$

Dit is uitspraak (3) uit stelling 4.1. De uitspraak (4) volgt door integratie.

Opmerking. Uit (9) en (10) volgt dat

$$\sum_1^n \mu_k = 2,$$

hetgeen we in 4.1.1 al op meetkundige gronden inzagen.

4.2.4. Veronderstel dat $w_1 = \infty$.

Zij a reëel, $w_n < a < \infty$. Beschouw nu de functie

$$g_1(t) := g\left(a - \frac{1}{t}\right).$$

Daar $w = a - 1/t$ bovenhalfvlak op bovenhalfvlak afbeeldt, geldt:

$t \rightarrow z = g_1(t)$ beeldt $\text{Im } t > 0$ af op G_z . De hoekpunten z_k corresponderen met

$$t_k := \frac{1}{a - w_k},$$

met name dus z_1 met $t_1 = 0$.

Daar alle t_k eindig zijn volgt nu met het reeds bewezen geval van Schwarz-Christoffel dat

$$\frac{g_1''(t)}{g_1'(t)} = - \sum_1^n \frac{\mu_k}{t - t_k} .$$

Leid hieruit af dat

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = \frac{2 - \sum \mu_k}{a - w} - \sum_2^n \frac{\mu_k}{w - w_k} .$$

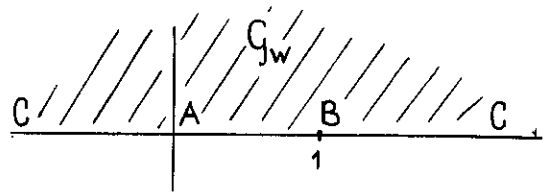
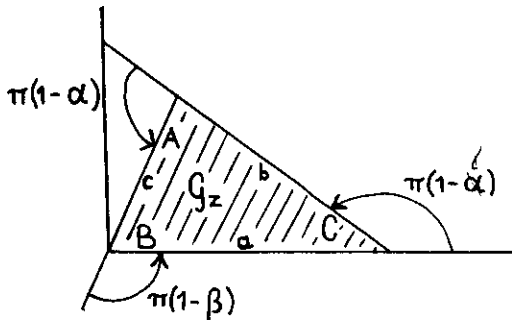
Daar g regulier is in $w = a$ moet de eerste term rechts verdwijnen.

Opgave. Behandel dit geval ook met de in 4.2.2, opgave 3 aangeduide variant op lemma 4.2.2.

4.2.5. Het bewijs van de formule van Schwarz-Christoffel voor het geval dat één of meer der punten z_k in ∞ liggen laten we achterwege. Het berust op lemmas die analoog zijn aan lemma 4.2.2, maar nu voor het geval dat $\lim f(w) = \infty$. Vooral de gevallen $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$ (zie de figuren in 4.1.4) vereisen enige zorg.

4.3. Voorbeelden

4.3.1. Beschouw het gebied G_z begrensd door een driehoek met hoekpunten A, B, C, zijden a, b, c en hoeken $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$.



We veronderstellen dat BC correspondeert met het lijnstuk $[0, a]$ van de reële as en dat A boven de reële as ligt.

We kiezen als beelden van A, B, C de punten 0, 1, ∞ uit het w -vlak.

Daar de buitenhoeken van Γ_z $1 - \alpha$, $1 - \beta$, $1 - \gamma$ zijn geldt dan

	z	w	μ
A	$ce^{\pi i \beta}$	0	$1 - \alpha$
B	0	1	$1 - \beta$
C	a	∞	$1 - \gamma$

$$\frac{dz}{dw} = Cw^{\alpha-1}(w-1)^{\beta-1} . \tag{1}$$

Daar op BC $\frac{dz}{dw}$ positief reëel is, is C positief reëel. De waarde van C kan bepaald worden uit bv.

$$c = |z(B) - z(A)| = C \left| \int_0^1 w^{\alpha-1} (w-1)^{\beta-1} dw \right|$$

$$= C \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = CB(\alpha, \beta), \quad (2)$$

waarin $B(\alpha, \beta)$ de zg. beta-functie is.

We herinneren aan de formules (zie 6.6.6)

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (3)$$

$$\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma) = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma}. \quad (4)$$

Daar $\alpha + \beta + \gamma = 1$ volgt uit (2), (3) en (4)

$$C = \frac{c\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\pi c}{\sin \pi\gamma} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}. \quad (5a)$$

Analoog hebben we (ga na)

$$a = C \left| \int_1^{\infty} w^{\alpha-1} (w-1)^{\beta-1} dw \right| = \quad (\text{stel } w = t^{-1})$$

$$= CB(\beta, \gamma) = C \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma), \quad (5b)$$

$$b = C \left| \int_{-\infty}^0 w^{\alpha-1} (w-1)^{\beta-1} dw \right| = \quad (\text{stel } w = 1-t^{-1})$$

$$= CB(\alpha, \gamma) = C \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma). \quad (5c)$$

Het verband tussen deze relaties klopt met de sinusregel uit de goniometrie.

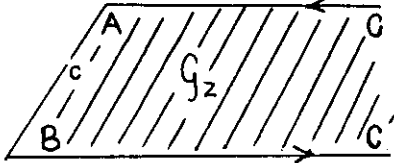
De afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ volgt nu formeel uit (1) door integratie (ervan gebruik makend dat in B $z = 0$ en $w = 1$):

$$z = C \int_1^w t^{\alpha-1} (t-1)^{\beta-1} dt \quad (6)$$

(met integratieweg willekeurig in het afgesloten bovenhalfvlak en hoofdwaarde van de factoren in de integrand).

Het is in het algemeen niet mogelijk de integraal uit te drukken in elementaire functies (wel in de zg. incomplete beta-functie).

Opmerking. Als $\beta = 1 - \alpha$, $\gamma = 0$ dan zijn AC en BC evenwijdig. We hebben nu met (4)

$$c = CB(\alpha, 1 - \alpha) = C\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = C \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} .$$

(7)

Deze relatie kan ook rechtstreeks uit (1) afgeleid worden. In een omgeving van $w = \infty$ geldt nu nl.

$$\frac{dz}{dw} = Cw^{\alpha-1}(w-1)^{-\alpha} = Cw^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w^{-j} \right) .$$

Integreer dit langs een cirkel $w = Re^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$ (met R groot genoeg - hoe groot is dat?). Dan vinden we

$$g(-R) - g(R) = \pi i C + O(R^{-1}) .$$
(8)

Nu ligt $g(R)$ op BC en $g(-R)$ op AC. Dus is voor alle voldoende grote R

$$\text{Im}[g(-R) - g(R)] = c \sin \pi\beta = c \sin \pi\alpha .$$

Daar dit onafhankelijk is van R volgt uit (8)

$$\pi C = c \sin \pi\alpha .$$

Hiermee hebben we (met een methode die vaak bruikbaar is en die aanlokkelijk is omdat er geen gecompliceerde integraal uitgerekend hoeft te worden) formule (7) teruggevonden. Of anders: we hebben een onafhankelijk bewijs van de met (4) corresponderende formule

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

gevonden.

Opgaven

1. Behandel het geval $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ verder door de integraal in (6) nu echt uit te rekenen. Het resultaat is

$$z = \frac{2c}{\pi} \log(\sqrt{w} + \sqrt{w-1}) ,$$

en omgekeerd

$$w = \frac{1}{2} \left(1 + \cosh \frac{\pi z}{c} \right).$$

Vergelijk dit met 3.5.3.

2. Behandel ook de gevallen

$$1 - \alpha = \frac{1}{2}, \quad 1 - \beta = -\frac{1}{2}, \quad 1 - \gamma = 2$$

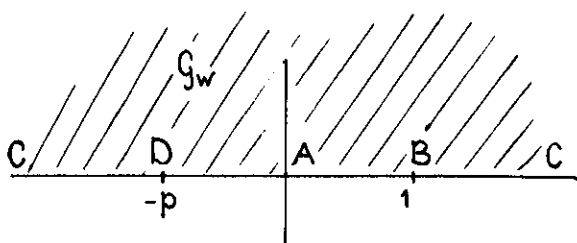
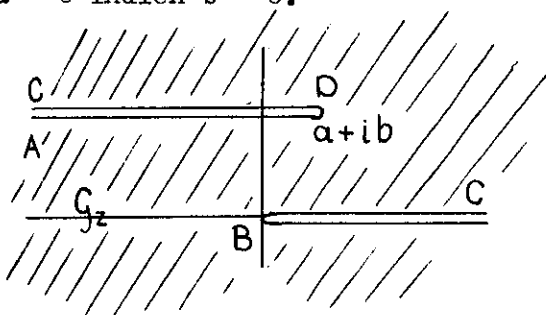
en

$$1 - \alpha = \frac{1}{2}, \quad 1 - \beta = -1, \quad 1 - \gamma = \frac{5}{2}.$$

3. Behandel het geval dat G_z het bovenhalfvlak is, verminderd met het kwartvlak $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > \pi$.

4. Behandel het geval dat G_z het bovenhalfvlak is, verminderd met de halfrchte $\operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = \pi$.

4.3.2. Zij G_z het hele z -vlak verminderd met de halfrechten $\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 0$ en $\operatorname{Im} z = b, \operatorname{Re} z \leq a$. De getallen a en b zijn willekeurig behoudens de eis dat $a < 0$ indien $b = 0$.



We eisen de in de figuur aangegeven correspondentie tussen z -vlak en w -vlak. Het getal p is daarbij nog onbekend,

alleen weten we zeker dat $p > 0$.

De getallen μ zijn als in de tabel aangegeven. De afbeelding voldoet dan aan

	z	w	μ
A	∞	0	2
B	0	1	-1
C	∞	∞	2
D	$a+ib$	$-p$	-1

$$\frac{dz}{dw} = C \frac{(w-1)(w+p)}{w^2} \tag{1}$$

(Merk op dat we de punten A en C, waar $\mu = 2$, in $w = 0$, resp. $w = \infty$ gelegd hebben, dit bespaart enig werk bij het integreren van (1).)

Daar $\frac{dz}{dw}$ positief reëel is op BC, is C positief reëel.

Door integratie van (1) vinden we (daar $z = 0$ als $w = 1$)

$$z = C \left[w + \frac{p}{w} + (p-1) \log w - 1 - p \right] \tag{2}$$

(hoofdlogarithme, die 0 is voor $w = 1$!).

De constanten C en p vinden we door naar het punt D te kijken:

$$a + ib = C[-2p - 2 + (p - 1)(\pi i + \log p)]$$

($\log w = \pi i + \log p$ omdat we de tak van $\log w$ moeten hebben die in het afgesloten bovenhalfvlak (behalve in $w = 0$) continu is).

Hieruit volgt, daar C reëel is:

$$b = C(p - 1)\pi \tag{3}$$

$$a = C[(p - 1)\log p - 2p - 2] . \tag{4}$$

Als $b = 0$ dan volgt hieruit, daar $C \neq 0$,

$$p = 1, \quad C = -\frac{1}{4}a \quad (a \text{ is } < 0 \text{ in dit geval!}).$$

De afbeelding wordt dan

$$z = -\frac{1}{4}a(w + w^{-1} - 2) .$$

Vergelijk dit met 3.4.

Als $b \neq 0$ dan kan p bepaald worden uit de vergelijking

$$\frac{\pi a}{b} = \log p - 2 \frac{p + 1}{p - 1} =: \varphi(p) \tag{5}$$

die door eliminatie van C uit (3) en (4) volgt.

Daar

$$\varphi'(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{(p - 1)^2} > 0$$

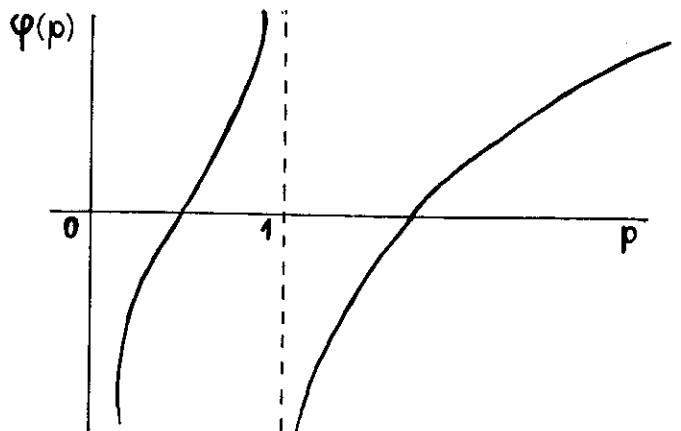
als $p > 0$, loopt $\varphi(p)$ monotoon van $-\infty$ naar ∞ als p van 0 naar 1 gaat en ook als p van 1 naar ∞ gaat.

De vergelijking (5) heeft dus voor iedere waarde van a/b twee oplossingen. Maar we weten dat $C > 0$ moet zijn. Met (3) volgt daaruit dat $p > 1$ als $b > 0$ en $p < 1$ als

$b < 0$. Hierdoor is p eenduidig bepaald. De afbeelding is in dit geval

$$z = \frac{b}{\pi} \log w + \frac{b}{\pi(p - 1)} \left[w + \frac{p}{w} - 1 - p \right] . \tag{6}$$

Opmerking. We kunnen vergelijking (3) rechtstreeks uit (1) verkrijgen door beschouwing van (1) in een omgeving van $w = 0$. Hier is



$$\frac{dz}{dw} = C \left[-\frac{p}{w^2} + \frac{p-1}{w} + O(1) \right].$$

Integratie langs $w = \rho e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, ρ klein genoeg, levert

$$z(-\rho) - z(\rho) = C \left[-\frac{2p}{\rho} + (p-1)\pi i + O(\rho) \right].$$

Daar $z(-\rho)$ op AD ligt en $z(\rho)$ op AB, is

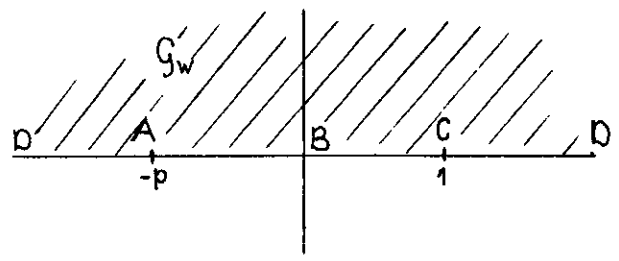
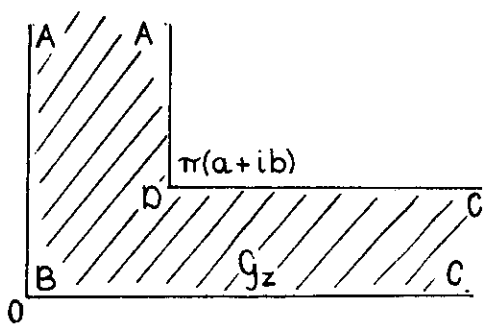
$$\text{Im}(z(-\rho) - z(\rho)) = b.$$

Daar dit onafhankelijk is van ρ en C reëel is, vinden we (3) terug. Ga na dat hetzelfde resultaat te bereiken is met een beschouwing in de buurt van $w = \infty$.

Opgaven

1. Wat gebeurt er als we de "verkeerde" oplossing van (5) kiezen? Ga na hoe de afbeelding (6) nu de reële as afbeeldt en hoe dus nu het onderhalfvlak van het w -vlak afgebeeld wordt. Breng het resultaat in verband met het feit dat $\varphi(1/p) = -\varphi(p)$.
2. Behandel ook de gebieden G_z bestaande uit het hele z -vlak verminderd met de halfrechten $\text{Im } z = 0$, $\text{Re } z \geq 0$ en $z = a + ib + te^{i\alpha}$, $0 \leq t < \infty$. Kijk speciaal naar de gevallen $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$, $\alpha = 3\pi/2$.

4.3.3. Zij $a > 0$, $b > 0$ en zij G_z het eerste kwadrant verminderd met het kwartvlak $\text{Re } z \geq \pi a$, $\text{Im } z \geq \pi b$.



We kiezen bij de afbeelding van G_z op het bovenhalfvlak G_w de correspondenties als getekend (merk op dat we de punten B en D, waar $\mu = \frac{1}{2}$, c.q. $-\frac{1}{2}$, in 0 en ∞ leggen).

	z	w	μ
A	∞	$-p$	1
B	0	0	$\frac{1}{2}$
C	∞	1	1
D	$\pi(a+ib)$	∞	$-\frac{1}{2}$

De afbeelding voldoet dan aan

$$\frac{dz}{dw} = - \frac{C}{\sqrt{w(w-1)(w+p)}} \quad (1)$$

De constante C is zeker positief reëel.

We bepalen nu eerst C en p door lokale beschouwingen bij $w = 1$ en $w = -p$.

Bij $w = 1$ geldt

$$\frac{dz}{dw} = - \frac{C}{p+1} \frac{1}{w-1} + o(1) .$$

Integratie langs $w = 1 + \rho e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, ρ klein genoeg levert (daar C reëel is)

$$\text{Im}(z(1-\rho) - z(1+\rho)) = - \frac{\pi C}{p+1} .$$

Hieruit volgt

$$C = (p+1)b .$$

Analoog vinden we bij $w = -p$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{C}{i\sqrt{p(p+1)}} \frac{1}{w+p} + o(1) ,$$

en daarmee

$$\text{Re}(z(-p-\rho) - z(-p+\rho)) = \frac{\pi C}{\sqrt{p(p+1)}} ,$$

waaruit volgt

$$C = \sqrt{p(p+1)}a .$$

Samen dus

$$p = \frac{b^2}{a^2}$$

$$C = (p+1)b = \sqrt{p(p+1)}a = \frac{b(b^2+a^2)}{a^2}$$

Hiermee kunnen we (1) schrijven als

$$\frac{dz}{dw} = \frac{b}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{a\sqrt{p}}{\sqrt{w}(p+w)} .$$

Door onbepaalde integratie vinden we

$$\begin{aligned} \int \frac{dw}{\sqrt{w}(1-w)} &= (\text{stel } w = t^2) = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \log \frac{1+t}{1-t} = \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} , \\ \int \frac{\sqrt{p} dw}{\sqrt{w}(p+w)} &= (\text{stel } w = pt^2) = \int \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2 \arctan t = 2 \arctan \sqrt{w/p} = i \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} . \end{aligned}$$

Dat we hierbij de goede takken gekozen hebben blijkt het eenvoudigst door reeksontwikkeling van integrand en resultaat bij $w = 0$. Het eindresultaat wordt nu (daar $z = 0$ correspondeert met $w = 0$)

$$z = b \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} + ia \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} . \quad (2)$$

Deze voorstelling (met hoofdwaaarde voor wortel en logaritmie) geldt in het hele bovenhalfvlak.

Geef zelf speciale voorstellingen voor w op de verschillende delen van de reële as.

In verband met latere toepassingen bepalen we nog het gedrag van $g(w)$ in omgevingen van $w = 1$, resp. $w = -p$.

Als $w = 1-u$, $|u|$ klein, dan is

$$\begin{aligned} \sqrt{w} &= 1 - \frac{1}{2}u + O(u^2) , \\ \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} &= \frac{2+O(u)}{\frac{1}{2}u + O(u^2)} = \frac{4}{u} (1+O(u)) , \\ \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} &= \log(4/u) + O(u) , \\ \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} &= \frac{1-i/\sqrt{p}}{1+i/\sqrt{p}} (1+O(u)) , \\ i \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} &= 2 \arctan(1/\sqrt{p}) + O(u) , \end{aligned}$$

en dus geldt

$$z = b \log \frac{4}{u} + 2a \arctan \frac{a}{b} + O(u) , \quad (u \rightarrow 0) .$$

We willen nu u als functie van z schrijven, voor $z \rightarrow +\infty$ (dus in de buurt van C). Uit (3) volgt

$$u = u_0 e^{-z/b} (1 + O(u)) , \quad (u \rightarrow 0) \quad (4)$$

met $u_0 = 4 \exp\left(\frac{2a}{b} \arctan \frac{a}{b}\right) .$

Kunnen we hieruit concluderen dat ook

$$u = u_0 e^{-z/b} (1 + O(e^{-z/b})) \quad (z \rightarrow +\infty) ? \quad (5)$$

Ja. Want in alle formules tot en met (4) kunnen we de $O(u)$ -term vervangen door een voor voldoende kleine u convergente machtreeks in u (zonder nulde term). Stellen we $e^{-z/b} = v$, dan kunnen we in plaats van (4) dus schrijven

$$u = u_0 v h(u) ,$$

waarin $h(u)$ analytisch is in een omgeving van $u = 0$ en $h(0) = 1$. Uit stelling 1.2 volgt dan dat voor kleine v

$$u = u_0 v k(v) ,$$

met $k(v)$ analytisch in een omgeving van $v = 0$ en $k(0) = 1$. Hieruit volgt direct (5).

In de buurt van $w = -p$ vinden we op analoge wijze:

als $w = -p(1 - v)$, $|v|$ klein, dan is

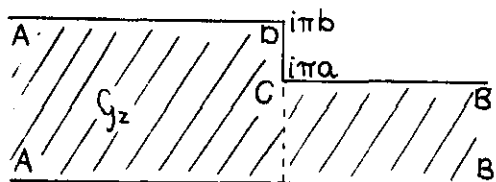
$$z = ia \log \frac{4}{v} + 2ib \arctan \frac{b}{a} + O(v) , \quad (v \rightarrow 0) .$$

En hieruit volgt dat

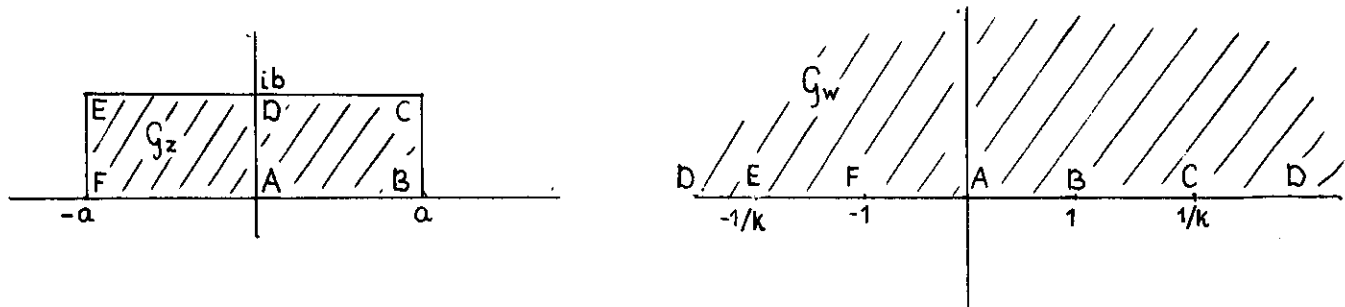
$$v = v_0 e^{iz/a} (1 + O(e^{iz/a})) , \quad (z \rightarrow +i\infty) ,$$

met $v_0 = 4 \exp\left(\frac{2b}{a} \arctan \frac{b}{a}\right) .$

Opgave. Behandel op analoge wijze het hieronder getekende gebied G_z .



4.3.4. Zij G_z de rechthoek $-a < \operatorname{Re} z < a, 0 < \operatorname{Im} z < b$.



We willen afbeelden zoals in de figuur aangegeven. Dat kan (met k een nog onbekende parameter, zeker $0 < k < 1$) op grond van het spiegelingprincipe: als de rechthoek ABCD afgebeeld wordt op het eerste kwadrant met als beelden van A, B en D $0, 1$ en ∞ , dan wordt de rechthoek BCEF afgebeeld op het bovenhalfvlak.

We vinden:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{C}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \quad (1)$$

met C reëel en > 0 .

Hieruit volgt

$$a = C \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = C \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$b = C \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} = (\text{stel } t = \tan \varphi)$$

$$= C \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi}} = C \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

met $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Men definieert als volledige elliptische integraal van de eerste soort

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Verder definieert men wel

$$K'(k) := K(k') .$$

Uit het bovenstaande volgt dan dat de parameter k bepaald moet worden uit

$$\frac{b}{a} = \frac{K'(k)}{K(k)} . \quad (2)$$

Het is uit de definitie duidelijk dat $K(k)$ monotoon van $\pi/2$ naar ∞ gaat als k van 0 naar 1 gaat. Het rechterlid van (2) gaat dus monotoon van $+\infty$ naar 0 als k van 0 naar 1 gaat. Bij iedere verhouding b/a is er dus precies één k die aan (2) voldoet.

Kiezen we $a = K(k)$, $b = K'(k)$, dan is $C = 1$ en uit (1) volgt voor de afbeelding van G_w op G_z

$$z = g(w) = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} . \quad (3)$$

Dit is een zg. onvolledige elliptische integraal van de eerste soort.

Zij $f(z)$ de inverse afbeelding. Deze wordt genoteerd als

$$w = \operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z; k) \quad (4)$$

Deze functie is voorshands gedefinieerd en analytisch in de gegeven rechtehoek. Er geldt

$$\operatorname{sn}(0) = 0, \operatorname{sn}(K) = 1, \operatorname{sn}(iK') = \infty, \operatorname{sn}(K+iK') = 1/k .$$

Uit het spiegelingprincipe volgt dat de functie analytisch voort te zetten is tot analytische functie in het gebied $|\operatorname{Re} z| < K$, $|\operatorname{Im} z| < K'$ door middel van de relatie

$$\operatorname{sn}(z) = \overline{\operatorname{sn}(\bar{z})} .$$

Eveneens kunnen we voortzetten in het gebied $|\operatorname{Re} z| < K$, $0 < \operatorname{Im} z < 2K'$ met behulp van

$$\operatorname{sn}(iK' + z) = \overline{\operatorname{sn}(iK' + \bar{z})}$$

of
$$\operatorname{sn}(z) = \overline{\operatorname{sn}(2iK' + \bar{z})} .$$

Combineren we beide voortzettingen dan hebben we een voortzetting in $|\operatorname{Re} z| < K$, $|\operatorname{Im} z| < 2K'$, die voldoet aan

$$\operatorname{sn}(2iK' + z) = \overline{\operatorname{sn}(2iK' + (2iK' + \bar{z}))} = \overline{\operatorname{sn}(\bar{z})} = \operatorname{sn} z .$$

Dat wil zeggen: de functie is periodiek met periode $2iK'$. En met behulp hiervan is sn z onmiddellijk voort te zetten in de hele strook $|\operatorname{Re} z| < K$. Analoog kunnen we de functie voortzetten door spiegeling aan $\operatorname{Re} z = \pm K$. We vinden dan (hoe?) dat sn z ook periodiek is met periode $4K$.

Daar een omgeving van het punt $z = iK'$ conform afgebeeld wordt op een omgeving van $w = \infty$ moet $\operatorname{sn}(z)$ een pool van de eerste orde hebben in $z = iK'$. We kunnen dit ook als volgt narekenen.

Er geldt bij $w = \infty$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = -\frac{1}{kw^2} (1-w^{-2})^{-\frac{1}{2}} (1-k^{-2}w^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

(ga na dat het teken goed is). Hieruit volgt (daar $w = \infty$ correspondeert met $z = iK'$) dat voor de functie uit (3) geldt

$$z = iK' + \frac{1}{kw} \left(1 + \sum_1^{\infty} c_j w^{-2j} \right)$$

in een omgeving van $w = \infty$.

Met stelling 1.2 volgt hieruit dat

$$\frac{1}{w} = k(z - iK') \left(1 + \sum_1^{\infty} d_j (z - iK')^{2j} \right)$$

in een omgeving van $z = iK'$ en dus ook

$$w = \frac{1}{k(z - iK')} \left(1 + \sum_1^{\infty} e_j (z - iK')^{2j} \right).$$

$\operatorname{sn}(z)$ heeft in $z = iK'$ dus een pool van de eerste orde met residu $1/k$.

Bewijs zelf dat de voortgezette functie polen heeft in

$$z = 4mK + (2n+1)iK' \text{ met residu } 1/k$$

en in

$$z = (4m+2)K + (2n+1)iK' \text{ met residu } -1/k$$

(m en n geheel).

Resumerend: de functie $w = \operatorname{sn}(z; k)$ die gedefinieerd is door analytische voortzetting van de inverse van de onvolledige elliptische integraal (3) is een dubbelperiodieke functie met perioden $4K(k)$ en $2iK'(k)$ die in het hele vlak analytisch is behoudens twee polen per periodenparallelogram.

Men noemt dubbelperiodieke functies die analytisch zijn behoudens een aantal polen (eindig veel per periodenparallelogram) elliptische functies.

De functie $\operatorname{sn}(z;k)$ is een der zg. elliptische functies van Jacobi; deze hebben een rechthoekig periodenparallelogram.

Hoofdstuk 5. Toepassingen van conforme afbeelding

5.1. Potentiaalproblemen in de mathematische fysica

In vele gebieden van de mathematische fysica komt men situaties tegen die beschreven kunnen worden met functies die voldoen aan de potentiaalvergelijking (vergelijking van Laplace)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 . \quad (1)$$

We noemen er enkele.

A. Warmtegeleiding (stationair).

In vaste stoffen wordt de stroming van warmte onder invloed van een temperatuur-verval beschreven door de wet van Fourier

$$q_1 = -k \frac{\partial T}{\partial x} , \quad q_2 = -k \frac{\partial T}{\partial y} , \quad q_3 = -k \frac{\partial T}{\partial z} , \quad (2)$$

of in vectorvorm

$$\underline{q} = -k \text{ grad } T ,$$

waarin $T(x,y,z)$ de temperatuur, $\underline{q}(x,y,z)$ de stroomsterkte (aantal eenheden van warmte per eenheid van tijd en eenheid van oppervlak door een oppervlak loodrecht op de stroomrichting) en k een evenredigheidsconstante is, die bij homogene materialen onafhankelijk van de plaats is. Verder geldt voor stationaire stroming een "behoud wet"

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z} = 0 , \quad \text{of} \quad \text{div } \underline{q} = 0 \quad (3)$$

die uitdrukt dat geen warmte verloren gaat of geproduceerd wordt.

Substitutie van (2) en (3) levert

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 , \quad \text{of} \quad \Delta T = \text{div grad } T = 0 ,$$

zodat T dus aan een vergelijking van het type (1) voldoet.

B. Electriche stroming in een metaal (stationair).

Hier geldt de wet van Ohm

$$\underline{i} = -\sigma \text{ grad } \varphi$$

(\underline{i} = stroomdichtheid, σ = geleidingsvermogen, φ = potentiaal).

Verder geldt weer $\text{div } \underline{i} = 0$, en dus $\Delta \varphi = 0$.

C. Diffusie (stationair).

Wet van Fick:

$$\underline{q} = - D \text{ grad } c$$

(\underline{q} = diffusiesnelheid, D = diffusieconstante, c = concentratie).

Verder $\text{div } \underline{q} = 0$, en dus $\Delta c = 0$.

D. Electrostatica.

Voor de elektrische veldsterkte \underline{E} geldt

$$\text{rot } \underline{E} = 0 \quad \left(= \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}, \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right)$$

waaruit volgt dat er een electrostatische potentiaal φ bestaat, zodanig dat

$$\underline{E} = - \text{grad } \varphi .$$

Verder geldt, indien geen vrije lading aanwezig is, voor de dielectrische verplaatsing \underline{D}

$$\text{div } \underline{D} = 0 .$$

Uit $\underline{D} = \epsilon \underline{E}$, waarin ϵ de dielectrische constante is, volgt dan weer, als ϵ niet van de plaats afhangt, $\text{div } \underline{E} = - \Delta \varphi = 0$,

E. Magnetostatica.

Voor magnetische veldsterkte \underline{H} en de magnetische inductie \underline{B} geldt:

$$\text{rot } \underline{H} = 0, \text{div } \underline{B} = 0, \underline{B} = \mu \underline{H} \quad (\mu = \text{permeabiliteit}).$$

F. Voor rotatievrije stroming van een ideale vloeistof (incompressibel en niet visceus) geldt $\text{rot } \underline{v} = 0$, $\text{div } \underline{v} = 0$ en dus $\underline{v} = - \text{grad } \varphi$, $\Delta \varphi = 0$.

Uit deze opsomming blijkt dat er een grote analogie bestaat tussen geheel verschillende verschijnselen (die ogenschijnlijk alleen gemeen hebben dat ze stationair zijn en dat de materiaal-constante onafhankelijk van x , y en z werd verondersteld).

In alle gevallen is de stroming divergentievrij (behoudwet). Ook is de stroming rotatievrij, dus een potentiaalstroming (snelheid = gradiënt van een potentiaal). In de gevallen A t/m C volgt dit uit een empirische weerstandswet (Fourier, Ohm, Fick), in de overige gevallen omdat het rotatievrij zijn als natuurwet of als beperkende hypothese (geval F) gegeven is.

Zoals bekend heeft de potentiaalvergelijking (1) vele oplossingen en eenduidigheid wordt pas verkregen door op grond van de fysische situatie bepaalde randvoorwaarden te formuleren. Ook hier blijken vergaande analogieën tussen de bovenbeschouwde gebieden op te treden.

5.2. Twee-dimensionale problemen. Stroomfunctie. Verband met functietheorie

In al het volgende zullen slechts twee-dimensionale problemen worden beschouwd; dat zijn problemen waarbij de optredende functies slechts van twee cartesische coördinaten afhangen. Dit is bv. het geval indien het gebied waarin de stroming plaats vindt begrensd wordt door twee evenwijdige ondoordringbare vlakken, terwijl de overige randen alle loodrecht hierop staan en de hier geldende randvoorwaarden niet variëren in de richting loodrecht op de vlakken. Ook kan een twee-dimensionaal probleem een benadering zijn van een in wezen drie-dimensionaal probleem, waarbij de afmetingen in één richting zeer veel groter zijn dan in de andere richtingen (bv. stroming om een vleugelprofiel). De handelbaarheid van twee-dimensionale potentiaalproblemen is nl. zoveel groter, dat men gaarne over de bezwaren van een niet geheel juist beeld heenstapt (of die achteraf door correcties ondervangt).

Definitie. Een functie $\varphi(x,y)$ heet harmonisch in een zeker gebied G van het x,y -vlak indien

- a) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ en $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ (en dus zeker φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$) bestaan en continu zijn in G ;
b) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ in G .

Zij $\varphi(x,y)$ harmonisch in een enkelvoudig samenhangend gebied G . We kunnen $\varphi(x,y)$ opvatten als potentiaal van een twee-dimensionale stroming

$$q_1 = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad q_2 = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{of } \underline{q} = - \text{grad } \varphi) . \quad (1)$$

Op grond van de bovenstaande definitie zijn $\frac{\partial q_1}{\partial x}$ en $\frac{\partial q_2}{\partial y}$ continu in G en

$$\text{div } \underline{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 , \quad (2)$$

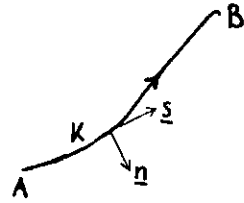
maar ook

$$\text{rot } \underline{q} = \left(0, 0, \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) = 0 ,$$

zodat de stroming zowel divergentievrij als rotatievrij is.

We willen nu een stroomfunctie invoeren. Daartoe beschouwen we eerst een geheel in G verlopende continu differentieerbare weg L die twee punten A en B uit G verbindt. De hoeveelheid "vloeistof" die per tijdseenheid door L gaat is

$$Q_{AB} = \int_K (\underline{q}, \underline{n}) ds = \int_K (q_1 dy - q_2 dx) \quad (3)$$



waarbij q_n de component van \underline{q} is in de richting van de normaal in een punt van de weg (we zullen bij een georiënteerde weg de normaalvector steeds kiezen in de richting die 90° "terug" gedraaid is ten opzichte van de raakvector).

Op grond van het divergentie theorema van Gauss (dat geldt als $\text{div } \underline{q}$ continu is) geldt voor een gesloten weg

$$\oint_K (\underline{q}, \underline{n}) ds = \iint_{G(K)} \text{div } \underline{q} \, dx dy = 0,$$

waarbij $G(K)$ het door de weg omsloten gebied is.

Hieruit volgt direct dat Q_{AB} onafhankelijk is van de gekozen weg (mits deze geheel binnen G verloopt).

Kies nu een vast punt (x_0, y_0) in G en zij

$$\psi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\underline{q}, \underline{n}) ds = \int (q_2 dx - q_1 dy). \quad (4)$$

Volgens het bovenstaande hangt $\psi(x, y)$ slechts van (x, y) en het vaste punt (x_0, y_0) af, niet van de integratieweg. Na keuze van (x_0, y_0) is $\psi(x, y)$ dus in geheel G eenduidig bepaald. $\psi(x, y)$ is kennelijk continu in G . Om de differentieerbaarheid na te gaan beschouwen we de uitdrukking

$$\frac{1}{h} \{ \psi(x+h, y) - \psi(x, y) \} \quad \text{met } h \neq 0.$$

Daar $\psi(x, y)$ onafhankelijk is van de integratieweg in (4), kunnen we deze eerst van (x_0, y_0) naar (x, y) laten gaan en dan langs een rechte lijn van (x, y) naar $(x+h, y)$, zodat

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \{ \psi(x+h, y) - \psi(x, y) \} &= - \frac{1}{h} \int_{(x, y)}^{(x+h, y)} q_n \, ds = \frac{1}{h} \int_{(x, y)}^{(x+h, y)} q_2 \, dx = \\ &= q_2(x + \theta h, y), \quad \text{met } 0 < \theta < 1, \text{ daar } q_2 \text{ continu is.} \end{aligned}$$

Conclusie: $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ bestaat en is gelijk aan $q_2 = - \frac{\partial \psi}{\partial y}$.

Analoog vindt men $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -q_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

De functie $\psi(x,y)$ voldoet dus aan de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Omgekeerd: als ook de functie $\psi^*(x,y)$ voldoet aan (5) (bij gegeven $\varphi(x,y)$), dan geldt klaarblijkelijk $\frac{\partial}{\partial x}(\psi - \psi^*) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(\psi - \psi^*) = 0$, en dus $\psi^* = \psi + \text{const.}$

Samenvattend:

Stelling 5.1. Zij $\varphi(x,y)$ harmonisch in een enkelvoudig samenhangend gebied G . Dan bestaat in G een op een additieve constante na eenduidig bepaalde continue differentieerbare functie $\psi(x,y)$, zodanig dat (5) geldt.

Uit (3) en (4) volgt

$$Q_{AB} = \psi_A - \psi_B. \quad (6)$$

Verder is $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = q_2 dx - q_1 dy$, waaruit volgt dat de lijnen $\psi = \text{const.}$ stroomlijnen zijn (waar $dy/dx = q_2/q_1$), die loodrecht op de equipotentiaallijnen (waar $d\varphi = -q_1 dx - q_2 dy = 0$ en dus $dy : dx = -q_1 : q_2$) staan.

Op grond hiervan zal $\psi(x,y)$ de stroomfunctie worden genoemd.

Uit de omkering van de stelling van Cauchy-Riemann (zie WSK 50, p. 66) volgt nu

Stelling 5.2. Als $\varphi(x,y)$ harmonisch is in een enkelvoudig samenhangend gebied G van het x,y -vlak, dan bestaat in het corresponderende gebied G_z van het z -vlak een op een additieve imaginaire constante na eenduidig bepaalde analytische functie $\Omega(z)$ zodanig dat $\varphi(x,y) = \text{Re } \Omega(z)$. Voor de bij φ behorende stroomfunctie(s) geldt $\psi(x,y) = \text{Im } \Omega(z)$ (+ const.).

We trekken hieruit enkele eenvoudige, doch belangrijke conclusies.

a) Iedere harmonische functie is oneindig vaak continu differentieerbaar en en alle differentiaal-quotienten zijn harmonisch.

b) Reële en imaginaire deel van een analytische functie zijn harmonisch.

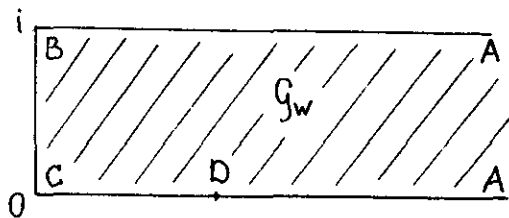
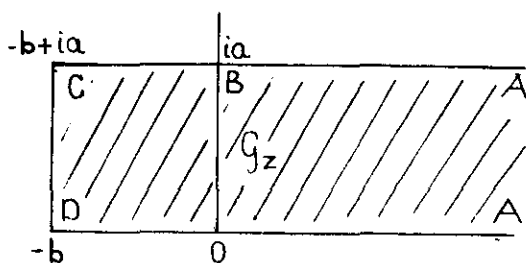
c) De functies $\psi(x,y)$, $q_1(x,y)$ en $q_2(x,y)$ zijn harmonisch.

d) De functie $q(z) = q_1(x,y) - iq_2(x,y) = -\frac{d\Omega}{dz}$ is een analytische functie van z (let op het minteken).

- e) Indien de functie $\Omega(z)$ in G_z univalent is dan geeft $z \rightarrow \Omega := \Omega(z)$ een conforme afbeelding van G_z op een gebied G_Ω van het $\Omega = \varphi + i\psi$ -vlak. Is de rand van G_z voldoende "netjes" (bv. bestaande uit eindig veel continu differentieerbare wegen) dan wordt deze op de rand van G_Ω afgebeeld. Hier ligt de basis van een groot aantal toepassingen van de conforme afbeelding op twee-dimensionale potentiaalproblemen. Vaak kent men nl. a priori de rand van G_Ω . Kan men dan een functie $f(z)$ vinden, die analytisch is in G_z en de rand van G_z op die van G_Ω afbeeldt met behoud van de omloopzin, dan beeldt $f(z)$ het gebied G_z op G_Ω af en dus $\Omega = f(z)$.
- f) Zij $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ een analytische functie van z die een gebied G_z conform afbeeldt op een gebied G_w . Zij $\varphi(u,v)$ harmonisch in G_w . dan is $\varphi^*(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$ harmonisch in G_z . Hier ligt de tweede toepassingsmogelijkheid van de conforme afbeelding. Heeft men een potentiaalprobleem in een ingewikkeld gebied G_z in het z -vlak, dat afgebeeld kan worden op een eenvoudig gebied G_w (cirkel of halfvlak) in het w -vlak, dan kan vaak het gestelde probleem in G_w wél worden opgelost. Is het resultaat $\varphi(u,v)$, dan is $\varphi^*(x,y)$ de oplossing van het oorspronkelijke probleem.

5.3. Voorbeelden

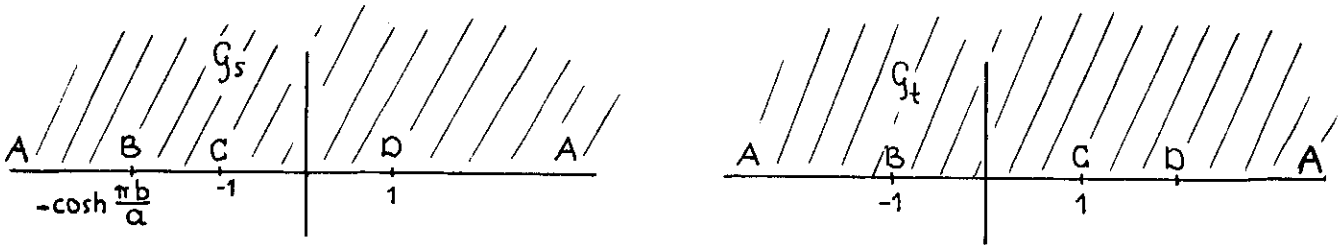
- 5.3.1. Beschouw de halve stroken $G_z: \operatorname{Re} z > -b, 0 < \operatorname{Im} z < a$ en $G_w: \operatorname{Re} w > 0, 0 < \operatorname{Im} w < 1$. We wensen deze op elkaar af te beelden met correspondenties zoals in de figuur aangegeven.



Door respectievelijk

$$s = \cosh \frac{\pi(z+b)}{a}, \quad t = \cosh \pi w$$

worden deze halve stroken afgebeeld op de bovenhalfvlakken $\operatorname{Im} s > 0$, resp. $\operatorname{Im} t > 0$.



En door

$$s = \frac{1}{2}(t - 1)\left(\cosh \frac{\pi b}{a} - 1\right) - 1$$

wordt (met de vereiste correspondenties) G_t op G_s afgebeeld.

Hieruit volgt dat het verband tussen z en w gegeven wordt door

$$w = \frac{1}{\pi} \log(t + \sqrt{t^2 - 1}), \quad (1)$$

$$t = 1 + 2 \frac{1 + \cosh(\pi(z+b)/a)}{\cosh(\pi b/a) - 1}. \quad (2)$$

Voor $x \rightarrow \infty$ volgt hieruit

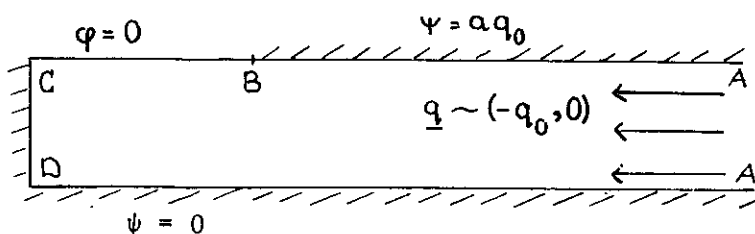
$$t = \frac{e^{\pi(z+b)/a}}{\cosh(\pi b/a) - 1} (1 + O(e^{-\pi x/a})) = \frac{2e^{\pi z/a}}{(1 - e^{-\pi b/a})^2} (1 + O(e^{-\pi x/a})),$$

$$w = \frac{1}{\pi} \log(2t) + O(t^{-2})$$

$$= \frac{z}{a} + \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi b/a}} + O(e^{-\pi x/a}). \quad (3)$$

We geven twee toepassingen hiervan.

- a) Veronderstel een stroming tussen twee ondoordringbare wanden langs $y = 0$ en $y = a$ die voor $x \rightarrow \infty$ nadert tot een uniforme stroming met horizontale snelheid $-q_0$. Langs $x = -b$ bevindt zich een ondoordringbare wand, maar langs $y = a$, $-b < x < 0$ kan de vloeistof (warmte, lading, diffusiestroom) uitstromen naar een reservoir waarvan de potentiaal (temperatuur, spanning, concentratie) op nul gehouden wordt.



Kiezen we langs CDA de waarde van de stroomfunctie ψ nul dan is langs AB

$$\psi = aq_0 .$$

Hieruit volgt dat, als $\Omega = \varphi + i\psi$ de complexe potentiaal is, de functie $\Omega(z)/aq_0$ de rand van G_z afbeeldt op de rand van het gebied G_w , inclusief de correspondentie van de punten A, B en C. Daaruit volgt dat

$$\Omega(z) = aq_0 w(z) \tag{4}$$

voldoet, uit een eenduidigheidsbeschouwing (die we hier niet geven) volgt dat dit ook de oplossing is.

Door combinatie van (1), (2) en (4) is nu Ω (en daarmee φ en ψ) als functie van z bekend. De waarde van Ω kan voor willekeurige z berekend worden, omgekeerd kunnen we, door z als functie van Ω te beschouwen, ook bv. stroomlijnen en equipotentiaallijnen eenvoudig bepalen.

Voor $x \rightarrow \infty$ volgt uit (3)

$$\Omega = q_0 z + \frac{2aq_0}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi b/a}} + O(e^{-\pi x/a}) , \tag{5}$$

dus

$$\varphi = q_0 x + \frac{2aq_0}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi b/a}} + O(e^{-\pi x/a}) \tag{6}$$

$$\psi = q_0 y + O(e^{-\pi x/a}) .$$

Hieruit blijkt dat voor $x \rightarrow \infty$ de stroming al spoedig vrijwel parallel wordt.

De grootheid

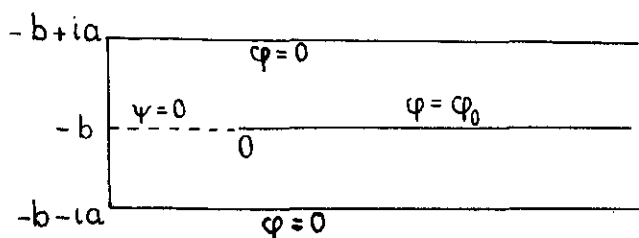
$$R := \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi b/a}}$$

zou men de geometrische uitstromingsweerstand kunnen noemen. Zouden we nl. in plaats van de beschouwde configuratie kijken naar het geval dat de halve strook $x > 0$, $0 < y < a$ langs $x = 0$ afgesloten was door een equipotentiaalvlak $\varphi = 0$, dan zou de potentiaal zijn

$$\varphi = q_0 x .$$

Het feit dat in onze configuratie de vloeistof pas langs BC kan uitstromen naar een reservoir met potentiaal nul veroorzaakt een verhoging van de potentiaal die voor $x \rightarrow \infty$ als limiet $\psi_0 R$ heeft, waarbij $\psi_0 = aq_0$ de totale flux is.

b)



Veronderstel dat de rand van de halve strook $x > -b$, $-a < y < a$ op potentiaal nul gehouden wordt, terwijl langs de halfrechte $y = 0$, $x > 0$ de potentiaal de waarde φ_0 heeft.

Ga na dat dan de complexe potentiaal gegeven wordt door

$$\Omega(z) = -i\varphi_0 w(z + ia)$$

waarbij G_z , G_w en de afbeelding van G_z op G_w uitgebreid moeten worden door spiegeling aan BC.

De totale flux (bv. warmteafgifte) $J(x_0)$ van de middenplaat tussen $x = 0$ en $x = x_0$ is

$$\begin{aligned} J(x_0) &= 2 \int_0^{x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, -0) dx = 2 \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} \Omega dx \\ &= -2 \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} \Omega dx = -2 \operatorname{Im} \Omega(x_0 - i0) \\ &= 2\varphi_0 \operatorname{Re} w(x_0 + ia - i0). \end{aligned}$$

Voor $x_0 \rightarrow \infty$ is dit volgens (3)

$$J(x_0) = \frac{2\varphi_0}{a} x_0 + \frac{4\varphi_0}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi b/a}} + O(e^{-\pi x_0/a}).$$

De tweede term kan nu geïnterpreteerd worden als randeffect (ga na).

Opgave. Laat zien dat in (5) de 0-term vervangen kan worden door een reeks van de vorm

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k\pi z/a},$$

waarin alle c_k reëel zijn. Wat correspondeert hiermee voor de reeksen in (6)?

Opgave. Beschouw het gebied G_z uit 4.3.3. Zij $\varphi = 0$ langs ABC, $\varphi = \pi$ langs ADC en zij φ harmonisch in G_z .

Bepaal de complexe potentiaal $\Omega(z)$.

Antwoord:

$$\Omega = -i \log \frac{w+p}{1-w} ,$$

als $p = b^2/a^2$, $\text{Im } w > 0$ en

$$z = b \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} + ia \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} .$$

Bepaal en interpreteer ook de grootte

$$R := \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{b} + \psi(x,0) \right) + \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{a} - \psi(0,y) \right) .$$

Antwoord:

$$R = 2 \log \frac{4ab}{a^2 + b^2} + \frac{2a}{b} \arctan \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} \arctan \frac{b}{a} .$$

Formuleer een analoog probleem waarbij ABC en ADC stroomlijnen zijn.

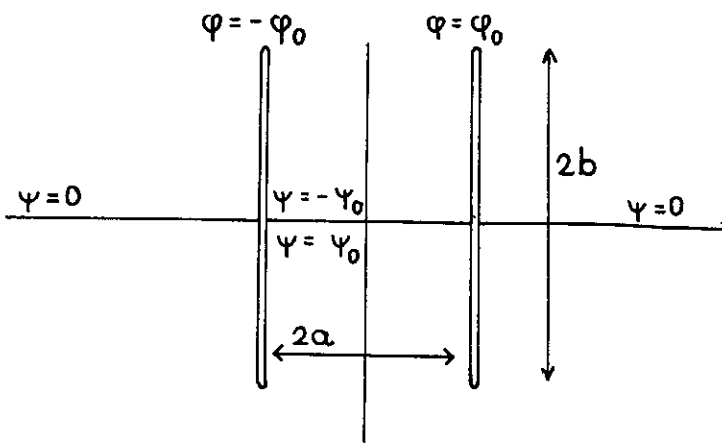
Opgave. Formuleer analoge problemen voor het gebied G_z uit de opgave aan het eind van 4.3.3.

5.3.2. We beschouwen een condensator die bestaat uit twee evenwijdige platen met breedte $2b$ en afstand $2a$ (zie figuur, de afmetingen loodrecht op het x,y -vlak worden zeer groot verondersteld).

Gevraagd wordt de capaciteit (per eenheid van lengte loodrecht op het x,y -vlak) van de condensator.

Stel de potentiaal van de platen $\pm \varphi_0$ en zij de lading (per eenheid van lengte loodrecht op het x,y -vlak) $\pm Q_0$. Dan is de capaciteit (per eenheid van lengte)

$$C = \frac{Q_0}{2\varphi_0} .$$



Kennen we de complexe potentiaal Ω dan is Q_0 eenvoudig te bepalen. Voor de oppervlakteladingsdichtheid van de platen geldt nl.

$$\omega = - \frac{(\underline{n}, \underline{E})}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

(normaal in de richting van het metaal, dus kloppend bij de omloopszin van G_z).

Hieruit volgt

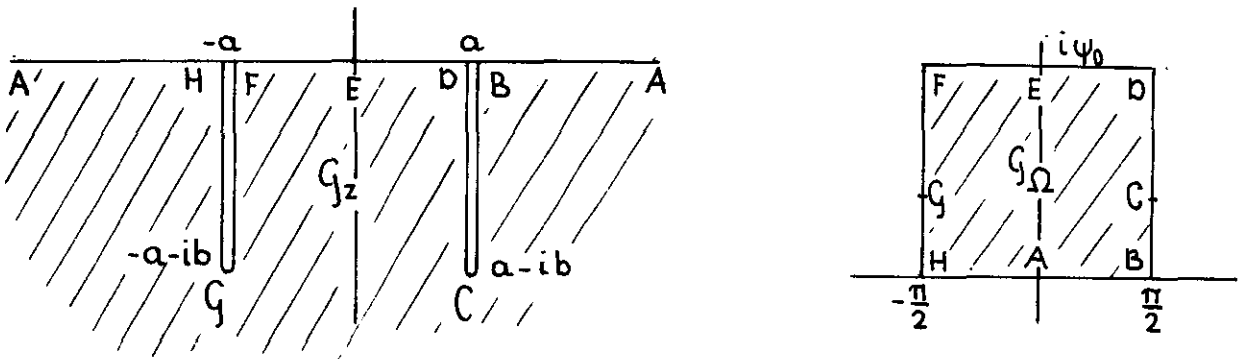
$$Q_0 = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \psi}{\partial s} ds$$

(kringintegraal over de rechterplaat).

De stroomfunctie ψ kan niet eenwaardig zijn, want dan zou Q_0 nul zijn (dit is niet in strijd met 5.2 want G_z is niet enkelvoudig samenhangend). Men kan echter een coupure aanbrengen langs $y = 0$, $-a < x < a$. Stellen we dan $\psi = 0$ voor $y = 0$, $|x| > a$, dan is $\psi = -\psi_0$ aan de bovenzijde en $\psi = \psi_0$ aan de onderzijde van de coupure en $Q_0 = \psi_0/2\pi$. Hiermee vinden we

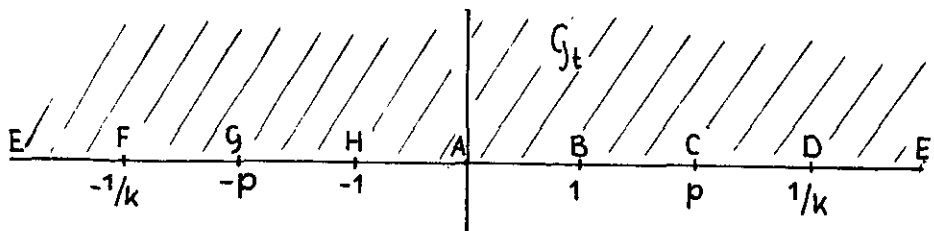
$$C = \frac{\psi_0}{4\pi\varphi_0} \quad (1)$$

Om de complexe potentiaal Ω te bepalen kijken we naar het "halve" probleem, zoals aangegeven in onderstaande figuren. Ter vereenvoudiging van de formules nemen we verder $\varphi_0 = \pi/2$.



Op de rand van G_z is hetzij φ , hetzij ψ constant, zodat de complexe potentiaal $\Omega = \Omega(z) G_z$ conform afbeeldt op het getekende gebied G_Ω .

De afbeelding van G_z op G_Ω kan geconstrueerd worden via afbeelding op een bovenhalfvlak G_t



Er geldt dan (vgl. 4.3.5))

$$t = \operatorname{sn}\left(\frac{2K(k)}{\pi} \Omega; k\right) \quad (2)$$

en

$$z = C \int_t^\infty \frac{s^2 - p^2}{s^2 \sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} ds . \quad (3)$$

De nog onbekende parameters C, p en k moeten bepaald worden met de relaties

$$t = 1 \rightarrow z = a, \quad t = 1/k \rightarrow z = a, \quad t = p \rightarrow z = a - ib .$$

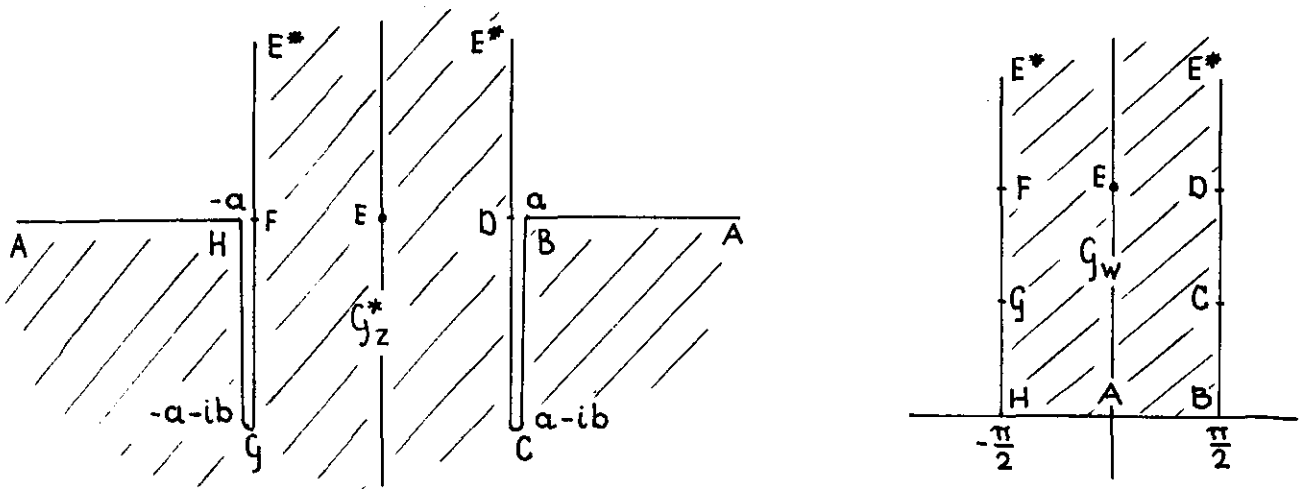
De waarde van ψ_0 is dan (vgl. 4.3.5)

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} \frac{K(k')}{K(k)} = \varphi_0 \frac{K(k')}{K(k)} , \quad \text{met } k' = \sqrt{1-k^2} .$$

De integraal in (3) is elliptisch. Hij kan worden herleid tot standaardvormen *).

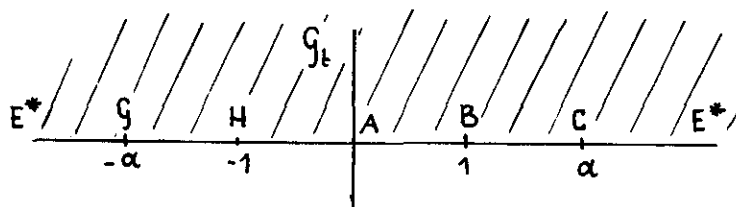
We zijn vooral geïnteresseerd in het geval dat $b \gg a$. Dat blijkt te corresponderen met kleine waarden van k. Men kan in dat geval proberen, de rechterleden te ontwikkelen naar machten van k^2 . Aantrekkelijker is de hieronder volgende beschouwing.

In plaats van naar G_z en G_Ω kijken we naar de gebieden G_z^* en G_w , zoals hieronder aangegeven.



*) Bv. met het zeer nuttige tabellenboek Byrd and Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin, 1954 (Springer), zie met name pag. 18.

Deze beelden we op elkaar af via een t -vlak



Er geldt dan

$$t = \sin w$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2a}{\pi} \frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 \sqrt{1-t^2}},$$

(de factor volgt uit het gedrag van dz/dt bij $t = \infty$), en dus

$$\frac{dz}{dw} = \frac{2a}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\sin^2 w} \right),$$

$$z = \frac{2a}{\pi} (w + \alpha^2 \operatorname{ctn} w)$$

(de integratieconstante is 0 omdat z reëel is op HAB en omdat $\operatorname{Re} z = 0$ als $\operatorname{Re} t = 0$).

De nog onbekende parameter α moet nu bepaald worden door naar het punt C te kijken. Hier is $z = a - ib$ en $\sin w = \alpha$ ($\alpha > 1$!) dus $w = \pi/2 + i \operatorname{arccosh} \alpha = \pi/2 + i \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$ en $(\operatorname{ga na}) \operatorname{ctn} w = -i \sqrt{\alpha^2 - 1} / \alpha$. Derhalve moet

$$\frac{\pi b}{2a} = \alpha \sqrt{\alpha^2 - 1} - \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}). \quad (4)$$

Het rechterlid gaat monotoon van 0 naar ∞ als α van 1 naar ∞ gaat ($\operatorname{ga na}$), bij iedere b/a is er dus één $\alpha > 1$. We merken op dat voor $b/a \rightarrow \infty$ uit (4) volgt dat

$$\alpha^2 = \frac{\pi b}{2a} + O\left(\log \frac{b}{a}\right)$$

en bij nauwkeuriger beschouwing vinden we

$$\alpha^2 = \frac{\pi b}{2a} \left(1 + \frac{a}{\pi b} \left(\log \frac{2\pi b}{a} + 1 \right) + O\left(\frac{a^2}{b^2} \log \frac{b}{a} \right) \right), \quad (b/a \rightarrow \infty). \quad (5)$$

Om verband te leggen met het eigenlijke probleem kijken we naar het lijnstuk

$$z = x, \quad x \text{ reëel, } |x| < a,$$

dat is de verbinding van D en F die in het inwendige van G_z^* ligt. Het beeld

van dit lijnstuk in het w -vlak wordt gegeven door de parameteraanpak

$$w + \alpha^2 \operatorname{ctn} w = \frac{\pi x}{2a}, \quad x \text{ reëel, } |x| < a, \quad (6)$$

waardoor w als functie van x bepaald is.

Stellen we $w = u + iv$, dan is (6) gelijkwaardig met

$$\begin{aligned} u &= \frac{\pi x}{2a} - 2\alpha^2 \sum_1^{\infty} e^{-2kv} \sin 2ku \\ v &= \alpha^2 + 2\alpha^2 \sum_1^{\infty} e^{-2kv} \cos 2ku. \end{aligned} \quad (7)$$

We hebben hierbij gebruikt dat

$$\operatorname{ctn} w = -i \frac{1 + e^{2iw}}{1 - e^{2iw}} = -i \left(1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{2ikw} \right).$$

In het geval dat b/a en dus α groot is kunnen we als volgt schatten. Met het punt E ($z = 0$) correspondeert $u = 0$ en v moet opgelost worden uit

$$v = \alpha^2 + 2\alpha^2 \sum_1^{\infty} e^{-2kv} = \alpha^2 \operatorname{ctnh} v.$$

Hieruit volgt dat in E $v > \alpha^2$. Verder volgt uit (7) dat, uniform op DEF ,

$$|v - \alpha^2| \leq 2\alpha^2 \sum_1^{\infty} e^{-2kv} = \frac{2\alpha^2}{e^{2v} - 1}.$$

Na enig jongleren volgt hieruit dat, uniform op DEF ,

$$v = \alpha^2 (1 + O(e^{-2\alpha^2})), \quad (\alpha \rightarrow \infty). \quad (8)$$

Dit resultaat betekent dat, als α groot is, het beeld van DEF in het w -vlak vrijwel op een rechte lijn ligt.

Beschouw nu in het oorspronkelijke gebied G_z de functies w en Ω . Beide zijn daar analytische functies van z . En daar Ω G_z conform afbeeldt op G_Ω , kunnen we w ook als functie van Ω opvatten. We splitsen weer $w = u + iv$, $\Omega = \varphi + i\psi$, en hebben dus

$$w(\Omega) = u(\varphi, \psi) + iv(\varphi, \psi).$$

Langs HAB is $v = 0$ en $\psi = 0$ en dus

$$\operatorname{Im}(w - \Omega) = 0. \quad (9)$$

Langs BCD, resp. FGH, is $u = \pm \frac{\pi}{2}$ en $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ en dus

$$\operatorname{Re}(w - \Omega) = 0. \quad (10)$$

Langs DEF tenslotte is $v = \alpha^2(1 + O(e^{-2\alpha^2}))$ ($\alpha \rightarrow \infty$) en $\psi = \psi_0$. Kunnen we hiermee de waarde van ψ_0 benaderen?

Met Cauchy-Riemann en (10) vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [v(\varphi, \psi) - \psi] d\varphi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\partial v}{\partial \psi} - 1 \right] d\varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} - 1 \right] d\varphi = [u(\varphi, \psi) - \varphi] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt met (9)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v(\varphi, 0) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [v(\varphi, \psi_0) - \psi_0] d\varphi \\ &= \pi[\alpha^2(1 + O(e^{-2\alpha^2})) - \psi_0], \quad (\alpha \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

daar (8) uniform op DEF geldt.

Hiermee is gevonden

$$\psi_0 = \alpha^2(1 + O(e^{-2\alpha^2})).$$

Daar we $\varphi_0 = \pi/2$ gesteld hebben, volgt nu uit (1) en (5) als resultaat

$$\begin{aligned} C &= \frac{\alpha^2}{2\pi^2} (1 + O(e^{-2\alpha^2})) \\ &= \frac{b}{4\pi a} \left(1 + \frac{a}{\pi b} \left(\log \frac{2\pi b}{a} + 1 \right) + O\left(\frac{a^2}{b^2} \log \frac{b}{a} \right) \right), \quad b/a \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Hoofdstuk 6. Gehele en meromorfe functies

6.1. Gehele functies

Een functie $f(z)$ heet geheel als f gedefinieerd en analytisch is in het gehele z -vlak (zie WSK 50, p. 42).

De Taylorreeks

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_k z^k \quad (1)$$

heeft dan de convergentiestraal ∞ en er geldt

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz, \quad (2)$$

voor iedere gesloten weg C die éénmaal in positieve zin om de oorsprong loopt.

6.1.1. Een deelverzameling van de gehele functies zijn de gehele rationale functies. Dit zijn de gehele functies waarbij de machtreeks (1) afbreekt, dus de polynomen.

De volgende uitbreiding van de stelling van Liouville karakteriseert de gehele rationale functies:

Stelling 6.1.1. Een gehele functie $f(z)$ is dan en slechts dan geheel rationaal indien er een geheel getal $m \geq 0$ is, zo dat

$$f(z) = O(z^m), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Bewijs. Als f een polynoom is, dan geldt (3) als $m \geq$ de graad van het polynoom. Als (3) geldt voor zekere m dan volgt uit (2) dat $a_k = 0$ voor $k > m$ (ga na, blaas C op).

Opmerking. Het kleinste gehele getal m waarvoor (3) geldt is de graad van het polynoom. Hiervoor geldt zelfs dat $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-m} f(z)$ bestaat en $\neq 0$ of ∞ is.

6.1.2. De niet rationale gehele functies noemt men transcendent. Daar de uitspraak van stelling 6.1.1. geschreven kan worden als:

$$\exists_{m \geq 0} \exists_{M > 0} \exists_{R \geq 0} \forall |z| > R (|f(z)| \leq M|z|^m),$$

geldt voor de transcendente gehele functies

$$\forall m \geq 0 \quad \forall M > 0 \quad \forall R \geq 0 \quad \exists |z| > R \quad (|f(z)| > M|z|^m) .$$

Dit is equivalent met de bewering:

als $f(z)$ geheel en transcendent is dan is voor alle $m \geq 0$

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} |z^{-m} f(z)| = \infty . \quad (4)$$

Complement op deze uitspraak is

Stelling 6.1.2 (Casorati-Weierstrass). Als $f(z)$ geheel en transcendent is, dan geldt voor ieder complex getal c en iedere $m \geq 0$

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} |z^m (f(z) - c)| = 0 , \quad (5)$$

d.w.z.

$$\forall c \quad \forall m \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall R \geq 0 \quad \exists |z| > R \quad (|z^m (f(z) - c)| < \varepsilon) .$$

Bewijs. Zonder beperking der algemeenheid mogen we $c = 0$ veronderstellen.

- a) Als $f(z)$ oneindig veel nulpunten heeft, dan bevat ieder gebied $|z| > R$ ook oneindig veel nulpunten, want zo niet, dan zou er een gebied $|z| \leq R$ zijn dat oneindig veel nulpunten bevat; dit kan niet want dan zou $f(z) \equiv 0$ zijn (identiteitsstelling, zie WSK 50, p. 42).
- b) Als $f(z)$ geen nulpunten heeft, dan is $g(z) := 1/f(z)$ ook geheel en transcendent en daaruit volgt volgens (4) dat voor alle $m \geq 0$

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} |z^{-m} g(z)| = \infty .$$

Dit is equivalent met (5) (als $c = 0$).

- c) Als $f(z)$ eindig veel nulpunten heeft, nl. in a_1, \dots, a_k , dan is

$$g(z) := \prod_{j=1}^k (z - a_j) / f(z)$$

geheel en transcendent. Hiervoor geldt dus

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} |z^{-m-k} g(z)| = \infty ,$$

hetgeen weer equivalent is met (5) (ga na).

Opgave. Bewijs dat voor alle polynomen $p(z)$ en $q(z)$ geldt:

Als $f(z)$ geheel en transcendent is, dan is

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z) - p(z)}{q(z)} \right| = \infty, \quad \liminf_{z \rightarrow \infty} |q(z)(f(z) - p(z))| = 0.$$

6.1.3. Het is bekend dat een polynoom van de graad m precies m (al dan niet samen-vallende) nulpunten heeft (hoofdstelling van de algebra, zie WSK 50, p. 44). Een gehele transcendente functie hoeft echter geen enkel nulpunt te hebben. Voorbeeld is

$$f(z) = e^z$$

(zie 3.5.1).

In zekere zin is de exponentiële functie ook de enige gehele functie zonder nulpunten. Er geldt namelijk

Stelling 6.1.3. Als $f(z)$ geheel is en geen nulpunten heeft, dan is er een gehele functie $g(z)$ zodanig dat

$$f(z) = e^{g(z)}.$$

Bewijs. Definieer voor alle z

$$g_0(z) := \int_0^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta.$$

De integratieweg mag willekeurig gekozen worden aangezien de teller en noemer van de integrand geheel zijn en de noemer geen nulpunten heeft.

Uiteraard is $g_0(z)$ geheel. Bewijs nu zelf dat

$$\frac{d}{dz} \left(f(z) e^{-g_0(z)} \right) = 0$$

en dus dat

$$f(z) = \exp(g_0(z) + \log f(0)).$$

Stel dat $f(z)$ eindig veel nulpunten heeft, nl. een k -voudig nulpunt in $z = 0$ ($k \geq 0$) en verder nulpunten in a_1, a_2, \dots, a_n (alle $\neq 0$). Dan geldt (ga na): er is een gehele functie $g(z)$ zodanig dat

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_j} \right).$$

In 6.5 zullen we nagaan hoe deze uitspraak gemodificeerd moet worden in het geval dat $f(z)$ oneindig veel nulpunten heeft.

6.2. Functies met geïsoleerde singulariteiten

Een punt a heet geïsoleerd punt van een deelverzameling \mathcal{V} van het complexe vlak indien a geen verdichtingspunt van \mathcal{V} is, d.w.z., indien er een gereduceerde omgeving van a bestaat die geen punten van \mathcal{V} bevat. Een verzameling \mathcal{V} die geen eindige verdichtingspunten heeft bestaat uitsluitend uit geïsoleerde punten. Zo'n verzameling is zeker aftelbaar want een schijf $|z| \leq n$ kan slechts eindig veel punten van \mathcal{V} bevatten (waarom?). Tevens blijkt hieruit dat als de verzameling $\mathcal{V} = \{a_1, a_2, \dots\}$ oneindig is en geen eindige verdichtingspunten heeft,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \infty. \quad (1)$$

Omgekeerd geldt, dat als voor een aftelbare verzameling $\mathcal{V} = \{a_1, a_2, \dots\}$ (1) geldt, \mathcal{V} geen eindige verdichtingspunten heeft.

We beschouwen nu functies $f(z)$ die eenwaardig analytisch zijn in het gehele complexe vlak verminderd met een deelverzameling \mathcal{V} die geen eindige verdichtingspunten heeft.

6.2.1. In ieder punt $a \in \mathcal{V}$ heeft $f(z)$ een geïsoleerde singulariteit, $f(z)$ is in een omgeving van a echter wel eenwaardig. Derhalve wordt het gedrag van $f(z)$ in een gereduceerde omgeving $0 < |z - a| < \rho$, die geen punten van \mathcal{V} bevat, beschreven door de Laurent-reeks (zie WSK 50, p. 45-47)

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

die convergeert voor $0 < |z - a| < \rho$ en waarin

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz,$$

met C een enkelvoudige gesloten weg die a omsluit en waar geen andere punten van \mathcal{V} op of binnen liggen.

Definiëren we

$$h_a(z) := \sum_1^{\infty} c_{-k} (z - a)^{-k},$$

$$g(z) := \sum_0^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

dan geldt

- i) $g(z)$ is analytisch voor $0 \leq |z - a| < \rho$;
- ii) $h_a(z)$ is analytisch voor $z \neq a$;
- iii) $\lim_{z \rightarrow \infty} h_a(z) = 0$;
- iv) $g(z) + h_a(z) = f(z)$ (voor $0 < |z - a| < \rho$).

Omgekeerd zijn de functies $g(z)$ en $h_a(z)$ door deze eigenschappen ook eenduidig bepaald (ga na).

De functie $h_a(z)$ heet het hoofddeel van $f(z)$ in het singuliere punt a .

Voor $h_a(z)$ hebben we de volgende integraalvoorstelling

$$h_a(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (2)$$

geldig voor een enkelvoudige gesloten weg C_a die a omsluit en waar noch z noch andere singulariteiten van $f(z)$ op of binnen liggen (vgl. WSK 50, p. 45-47).

6.2.2. We kunnen eigenschap ii) ook uitspreken als:
de functie

$$h_a^*(w) := h_a\left(a + \frac{1}{w}\right)$$

is een gehele functie van w (dus $h_a(z)$ is gehele functie van $1/(z - a)$).

We klassificeren nu het singuliere punt a van $f(z)$ overeenkomstig de classificatie van de gehele functie $h_a^*(w)$:

a) Als $h_a^*(w)$ constant en dus, i.v.m. iii), 0 is, dan heet a een ophefbare singulariteit; definiëren (of herdefiniëren) we $f(a)$ door

$$f(a) := g(a) \quad (= c_0)$$

dan is $f(z)$ analytisch voor $0 \leq |z - a| < \rho$.

b) Als $h_a^*(w)$ een gehele rationale functie is, dus een polynoom met graad $m > 0$, dan heet a een pool van de orde m . Er geldt nu (vgl. stelling 6.1.1)

$$f(z) = O((z - a)^{-m}), \quad z \rightarrow a$$

en zelfs

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) \text{ bestaat en is } \neq 0 \text{ of } \infty.$$

c) Als $h_a^*(w)$ geheel en transcendent is dan heet a een essentiële singulariteit. Hier geldt (Casorati-Weierstrass):

Voor iedere $m \geq 0$ en ieder complex getal c is

$$\limsup_{z \rightarrow a} |(z-a)^m f(z)| = \infty$$

$$\liminf_{z \rightarrow a} |(z-a)^{-m} (f(z) - c)| = 0 .$$

Bewijs dit zelf, uitgaande van stelling 6.1.2.

6.2.3. Heeft een functie $f(z)$ eindig veel singulariteiten a_1, \dots, a_n met hoofddelen $h_1(z), \dots, h_n(z)$, dan is er een gehele functie $g(z)$ zodanig dat

$$f(z) = g(z) + \sum_1^n h_j(z) . \quad (3)$$

Immers, de functie $f(z) - \sum h_j(z)$ heeft uitsluitend ophefbare singulariteiten, kan dus door geschikte definitie in de punten a_j uitgebreid worden tot een gehele functie.

De functie $g(z)$ wordt gegeven door

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta , \quad (4)$$

als C een enkelvoudige gesloten weg is waar z en alle singulariteiten van $f(z)$ binnen liggen. Bewijs dit zelf, gebruik makend van de integraalvoorstellingen (2) voor de functies $h_j(z)$ en de kanaalmethode, of door uit te gaan van het feit dat $\lim_{z \rightarrow \infty} h_j(z) = 0$ voor $j = 1, \dots, n$.

Uit (4) volgt natuurlijk dat

$$g(z) = \sum_0^\infty b_j z^j$$

met

$$b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta$$

Stel nu dat $f(z)$ singulier is in ieder punt van een aftelbare verzameling $\mathcal{V} = \{a_1, a_2, \dots\}$ zonder eindige verdichtingspunten. Zij $h_1(z), h_2(z), \dots$ de hoofddelen van $f(z)$ in deze punten.

We kunnen niet verwachten dat het analogon van (3) (met $n = \infty$) ook in deze situatie geldt, want het is niet zeker of de reeks voor enige z convergeert.

Wel geldt echter

Stelling 6.2.3 (Mittag-Leffler). Zij $f(z)$ analytisch voor alle z behalve in de punten van een aftelbare verzameling $V = \{a_1, a_2, \dots\}$ die geen eindige verdichtingspunten heeft, met hoofddelen $h_1(z), h_2(z), \dots$ in deze punten. Dan zijn er polynomen $p_1(z), p_2(z), \dots$ en een gehele functie $g(z)$ zo dat, uniform in ieder compact deel van het complexe vlak dat geen der punten a_1, a_2, \dots bevat,

$$f(z) = g(z) + \sum_1^{\infty} (h_j(z) - p_j(z)) .$$

Opmerking: Iets sterker geldt nog: bij ieder compact deel D van het complexe vlak is er een getal N zodanig dat

$$\sum_{N+1}^{\infty} (h_j(z) - p_j(z))$$

in D uniform convergeert (met als limiet een in D analytische functie).

Bewijs. We weten dat $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \infty$. Stel $a_j \neq 0$ voor $j \geq 2$ en kies $p_1(z) = 0$. Zij $j \geq 2$. Het hoofddeel $h_j(z)$ is analytisch voor $z \neq a_j$, dus zeker voor $|z| < |a_j|$. Zij hier

$$h_j(z) = \sum_0^{\infty} c_{jm} z^m .$$

Dan is er een index N_j zodanig dat voor $|z| \leq \frac{1}{2} |a_j|$

$$\left| \sum_{N_j+1}^{\infty} c_{jm} z^m \right| \leq 2^{-j} .$$

Kies

$$p_j(z) := \sum_0^{N_j} c_{jm} z^m .$$

Dan is

$$|h_j(z) - p_j(z)| \leq 2^{-j} \quad \text{voor } |z| \leq \frac{1}{2} |a_j| .$$

Zij D een compact gebied van het complexe vlak. Zij R zo, dat $z \in D \Rightarrow |z| \leq \frac{1}{2} R$. Bepaal N zo, dat $|a_j| \geq R$ voor $j > N$ (dit kan omdat $\lim a_j = \infty$).

Voor $z \in D$ en $j > N$ geldt dan

$$|h_j(z) - p_j(z)| \leq 2^{-j}$$

en dus is de reeks

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} (h_j(z) - p_j(z))$$

uniform convergent in D en dus analytisch. De functie

$$f_0(z) := \sum_{j=1}^{\infty} (h_j(z) - p_j(z))$$

heeft dus in D geen andere singulariteiten dan de punten a_j uit $\mathcal{V} \cap D$; de hoofddelen zijn hier $h_j(z)$. Derhalve heeft de functie

$$g(z) := f(z) - f_0(z)$$

in D uitsluitend ophefbare singulariteiten. Daar D willekeurig was, is $g(z)$ een gehele functie, q.e.d.

Opmerking: De polynomen $p_j(z)$ zijn natuurlijk geenszins eenduidig bepaald. Als $q_1(z), \dots$ polynomen zijn waarvoor

$$\sum_1^{\infty} q_j(z)$$

uniform convergeert in ieder compact deel van het complexe vlak dan geldt ook

$$f(z) = \tilde{g}(z) + \sum_1^{\infty} (h_j(z) - \tilde{p}_j(z)) ,$$

met

$$\tilde{p}_j(z) = p_j(z) + q_j(z) , \quad \tilde{g}(z) = g(z) + \sum q_j(z) .$$

Bewijs zelf: als er bij ieder compact deel D van het complexe vlak een N is zo dat

$$\sum_{N+1}^{\infty} h_j(z)$$

uniform convergeert in D , dan is er een gehele functie $g_0(z)$ zodanig dat

$$f(z) = g_0(z) + \sum_1^{\infty} h_j(z) .$$

6.3. Meromorfe functies

Een meromorfe functie is een functie $f(z)$ die analytisch is in het complexe vlak verminderd met een deelverzameling \mathcal{V} ; in de punten van \mathcal{V} heeft $f(z)$ polen.

Daar polen geïsoleerde singulariteiten zijn kan \mathcal{V} geen eindige verdichtingspunten hebben, daaruit volgt dat \mathcal{V} eindig of aftelbaar is: $\mathcal{V} = \{a_1, a_2, \dots\}$ en dat, als \mathcal{V} oneindig is, $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \infty$.

Het hoofddeel $h_j(z)$ van een meromorfe functie $f(z)$ in een pool a_j is een polynoom in $1/(z - a_j)$, de graad van dit polynoom is de orde van de pool.

Als $f(z)$ meromorf is en slechts eindig veel polen heeft: a_1, \dots, a_n met ordes m_1, \dots, m_n , dan is

$$(z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_n)^{m_n} f(z)$$

een gehele functie en $f(z)$ is dus van de vorm

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad (1)$$

met $q(z)$ een polynoom en $p(z)$ geheel. Later zullen we bewijzen dat iedere meromorfe functie geschreven kan worden in de vorm (1) met $p(z)$ en $q(z)$ geheel.

Daar de verzameling der nulpunten van een gehele functie geen eindige verdichtingspunten heeft en daar ieder nulpunt een eindige multipliciteit heeft (dit volgt uit de identiteitsstelling), geldt zeker dat iedere functie van de vorm (1) met $p(z)$ en $q(z)$ geheel, meromorf is.

6.3.1. Een deelverzameling van de meromorfe functies vormen de rationale functies. Dit zijn functies van de vorm (1) waarbij $p(z)$ en $q(z)$ polynomen zijn. We mogen veronderstellen dat $p(z)$ en $q(z)$ geen gemeenschappelijke nulpunten, dus geen gemeenschappelijke factoren $z - a$ hebben. Een rationale functie waarbij $q(z) = \text{constant}$ is geheel en rationaal, als $q(z)$ niet constant is (en $f(z)$ dus minstens één pool heeft), dan heet $f(z)$ gebroken rationaal.

Een andere karakteristiek van de gebroken rationale functies wordt gegeven door

Stelling 6.3.1. Een meromorfe functie $f(z)$ is dan en slechts dan rationaal als

1°. er slechts eindig veel polen zijn;

2°. er een gehele m is zodanig dat

$$f(z) = O(z^m), \quad z \rightarrow \infty.$$

Bewijs dit zelf.

Een rationale functie $f(z)$ kan men in zg. partiële breuken splitsen. Als $f(z)$ polen a_1, \dots, a_n met hoofddelen

$$h_j(z) = \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} (z - a_j)^{-k}$$

heeft, dan is

$$g(z) := f(z) - \sum h_j(z)$$

geheel. Maar daar (ga na)

$$g(z) = O(z^m), \quad z \rightarrow \infty,$$

met $m = \text{graad}(p(z)) - \text{graad}(q(z))$, moet $g(z)$ een polynoom zijn (stelling 6.1.1):

$$g(z) = \sum_0^m c_k z^k.$$

Dus geldt

$$f(z) = g(z) + \sum h_j(z) = \sum_{k=0}^m c_k z^k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} (z - a_j)^{-k}. \quad (2)$$

Dit is de partieelbreuksplitsing van $f(z)$.

Opgave. Bewijs dat

$$h_j(z) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3)$$

met C_j een enkelvoudige gesloten weg waar a_j binnen ligt maar waar z en de overige polen buiten liggen.

Bewijs ook dat

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (4)$$

met C een enkelvoudige gesloten weg waar z en alle polen binnen liggen.

Bewijs ook dat (2), (3) en (4) gelden voor iedere meromorfe functie $f(z)$ met eindig veel polen; $g(z)$ is dan en slechts dan geheel rationaal als $f(z)$ rationaal is, anders is $g(z)$ transcendent geheel.

6.3.2. Voor een meromorfe functie met oneindig veel polen (in a_1, a_2, \dots en met hoofddelen $h_1(z), h_2(z), \dots$) wordt het analogon van de partieelbreuksplitsing gegeven door de stelling van Mittag-Leffler:
er zijn polynomen $p_1(z), p_2(z), \dots$ en een gehele functie $g(z)$ zodanig dat

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{\infty} (h_j(z) - p_j(z)) . \quad (5)$$

6.3.3. We behandelen als eerste voorbeeld

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} .$$

Deze functie is kennelijk meromorf. $f(z)$ heeft als polen de punten $z = j$ (j geheel) met hoofddelen

$$h_j(z) = \frac{1}{(z-j)^2}$$

(voor $z \rightarrow 0$ is $z^2 f(z) = 1 + O(z^2)$; bedenk verder dat $f(z)$ periodiek is met periode 1).

We merken nu op:

a) De reeks

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} := \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=-N_1}^{N_2} \frac{1}{(z-j)^2}$$

convergeert uniform in ieder compact gebied dat geen punten $z = k$ met k geheel bevat. Want voor $|\operatorname{Re} z| \leq R$ geldt: als $|j| \geq 2R$ dan is

$$|z-j|^2 = (\operatorname{Re} z - j)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geq \frac{1}{4} j^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geq \frac{1}{4} j^2 \quad (6)$$

en $\sum_1^{\infty} j^{-2}$ convergeert. Maak het bewijs zelf af.

b) De functie

$$g(z) := f(z) - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2}$$

is geheel en heeft periode 1.

c) Voor de functie $g(z)$ geldt

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} g(z) = 0 , \quad \text{uniform voor } |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} .$$

Want

$$\begin{aligned} |\sin \pi z|^2 &= \sin^2 \pi x \cosh^2 \pi y + \cos^2 \pi x \sinh^2 \pi y \\ &= \sinh^2 \pi y + \sin^2 \pi x \geq \sinh^2 \pi y . \end{aligned}$$

En uit (6) volgt dat de reeks in (7) voor $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$ uniform convergeert en dat de termen hier naar 0 gaan als $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$.

d) De functie $g(z)$ is begrensd en dus constant en dus nul. Want uit c) volgt dat er een M is zo, dat

$$|g(z)| < 1 \quad \text{voor } |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Im} z| > M.$$

Daar $g(z)$ zeker begrensd is in het afgesloten gebied $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im} z| \leq M$, is $g(z)$ dus begrensd in de hele strook $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$ en dus, omdat $g(z)$ de periode 1 heeft, in het hele vlak. Met Liouville constateren we dat $g(z)$ constant moet zijn en met c) volgt hieruit dat $g(z) = 0$.

We hebben hiermee bewezen: voor iedere z die niet reëel en geheel is, is

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} . \quad (8)$$

Voor deze meromorfe functie zijn dus zowel de gehele functie $g(z)$ als alle polynomen $p_j(z)$ uit de Mittag-Leffler splitsing nul.

Een andere methode om (8) af te leiden is de volgende. Beschouw de integralen

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{1}{\zeta - z} \cdot \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \zeta} d\zeta , \quad (9)$$

waarin C_n een vierkant is met hoekpunten $\pm(n + \frac{1}{2}) \pm (n + \frac{1}{2})i$. De verticale zijden van C_n snijden de reële as in $z = \pm(n + \frac{1}{2})$, gaan dus net tussen de polen van de integrand door.

We constateren nu

a) Als z binnen C_n ligt en niet geheel en reëel is, dan is

$$J_n(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{j=-n}^n \frac{1}{(z-j)^2} .$$

Want de polen van de integrand binnen de integratieweg zijn dan $\zeta = z$

(enkelvoudig) en $\zeta = j$ ($|j| \leq n$, tweevoudig, hoofddeel = hoofddeel van

$$\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - j)^2} = -\frac{1}{(\zeta - j)^2} \cdot \frac{1}{(z - j) - (\zeta - j)}$$

dus

$$-\frac{1}{(\zeta - j)^2(z - j)} \left(1 + \frac{\zeta - j}{z - j}\right) = -\frac{1}{z - j} \cdot \frac{1}{(\zeta - j)^2} - \frac{1}{(z - j)^2} \cdot \frac{1}{\zeta - j},$$

dus residu $-(z - j)^{-2}$.

b) Op de verticale zijde $\zeta = n + \frac{1}{2} + iv$ geldt

$$|\text{integrand}| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2} - |\text{Re } z|} \frac{1}{\cosh^2 \pi v};$$

en dus

$$\left| \frac{(n + \frac{1}{2})(1+i)}{(n + \frac{1}{2})(1-i)} \right| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2} - |\text{Re } z|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\cosh^2 \pi v} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n + \frac{1}{2} - |\text{Re } z|}.$$

c) Op de horizontale zijden van C_n geldt

$$|\text{integrand}| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2} - |\text{Im } z|} \frac{1}{\sinh^2 \pi(n + \frac{1}{2})}.$$

d) Uit c) en d) volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(z) = 0$, uniform in ieder compact gebied.

e) Daar niet alleen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n$ maar ook $\lim_{N_1, 2 \rightarrow \infty} \sum_{-N_1}^{N_2}$ bestaat volgt nu (8).

We kunnen de hier gebruikte methode samenvatten in de volgende stelling:
Zij $f(z)$ meromorf met hoofddelen $g_1(z), g_2(z), \dots$. Zij C_1, C_2, \dots een rij enkelvoudige gesloten wegen zodanig dat

1. $\forall_z \exists_N \forall_{n > N} (z \text{ binnen } C_n)$;
2. Op C_n liggen geen polen van $f(z)$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{C_n} \frac{|f(z)|}{|z|} |dz| = 0$,

dan geldt

$$f(z) = \sum g_j(z),$$

uniform in ieder compact gebied dat geen polen bevat.

Bewijs deze stelling zelf.

6.3.4. Als tweede voorbeeld behandelen we

$$f(z) = \pi \operatorname{ctn} \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} .$$

Deze functie is meromorf met enkelvoudige polen in $z = j$ (geheel) en hoofddelen $h_j(z) = 1/(z - j)$ (ga na). De reeks

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - j}$$

is echter divergent, want

$$\frac{1}{z - j} = \frac{z}{j(z - j)} - \frac{1}{j} ,$$

$\sum_1^{\infty} \frac{z}{j(z - j)}$ is convergent (ga na), $\sum_1^{\infty} \frac{1}{j}$ is divergent.

De polynomen $p_j(z)$ uit de stelling van Mittag-Leffler moeten nu in werking treden om de convergentie te forceren. We kunnen hier nemen: $p_0(z) = 0$, $p_j(z) = -1/j$ (als $j \neq 0$). De functie

$$g(z) := \pi \operatorname{ctn} \pi z - \frac{1}{z} - \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right) \quad (10)$$

is dan geheel (ga na).

We bewijzen op twee manieren dat $g(z) = 0$.

a) Op grond van de uniforme convergentie in (10) geldt (zie WSK 50, p. 38)

$$g'(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} + \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(z - j)^2}$$

en dit is 0 op grond van (8). Dus $g(z) = \text{constant}$. Daar uit (10) volgt dat $g(z)$ oneven is (ga dit zorgvuldig na) moet $g(z) = 0$ zijn.

b) Door groepering der termen vinden we dat voor

$$S := \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right)$$

geldt

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2} .$$

Voor $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$ en $j > 0$ is $|z^2 - j^2| \geq (j - \frac{1}{2})^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ en dus is, als

$\text{Im } z \neq 0$,

$$|S| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2|z|}{(j - \frac{1}{2})^2 + (\text{Im } z)^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{2|z| dt}{t^2 + (\text{Im } z)^2} = \frac{\pi|z|}{|\text{Im } z|} .$$

Daar verder

$$\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} \pi \cotn \pi z = \bar{\pi} \pi i ,$$

volgt (hoe?) dat $g(z)$ begrensd is in de strook $|\text{Re } z| \leq \frac{1}{2}$. Daar $g(z)$ periode 1 heeft, volgt nu dat $g(z)$ begrensd en dus constant is. Dat $g(z) = 0$ volgt als boven.

De conclusie is dat

$$\pi \cotn \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2} . \quad (11)$$

We kunnen hiervoor ook schrijven (ga na)

$$\pi \cotn \pi z = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N \frac{1}{z-j} ,$$

maar het is misleidend (hoewel niet ongebruikelijk) om voor het rechterlid te schrijven

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-j} .$$

Opgaven

1) Bewijs (11) ook door beschouwing van

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \pi \cotn \pi \zeta \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta ,$$

waarin C_n dezelfde contour is als in (9). (Bewijs weer dat $\lim J_n(z) = 0$.)

2) Bewijs de volgende stelling:

Zij $f(z)$ meromorf met uitsluitend enkelvoudige polen in a_1, a_2, \dots met residuen r_1, r_2, \dots .

Zij $a_j \neq 0$ voor alle j .

Zij C_1, C_2, \dots een rij enkelvoudige gesloten wegen zodanig dat

1°. $\forall_z \exists_N \forall_{n > N} (z \text{ binnen } C_n)$;

2°. er is een geheel getal $m \geq 0$ zodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{C_n} \frac{|f(z)|}{|z|^{m+1}} |dz| = 0.$$

Dan geldt (uniform in ieder compact gebied dat geen der polen bevat)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} z^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_j}\right)^m \frac{r_j}{z - a_j}.$$

N.b. Er geldt

$$\left(\frac{z}{a_j}\right)^m \frac{1}{z - a_j} = \frac{1}{z - a_j} + \sum_{v=1}^m \binom{m}{v} \frac{(z - a_j)^{v-1}}{a_j^v}.$$

Kijk voor het bewijs naar

$$\oint_{C_n} f(\zeta) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^m \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

3) Druk

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3}$$

uit in elementaire functies

4) Zij a_1, a_2, \dots een rij onderling verschillende complexe getallen met $\lim a_j = \infty$ en zij r_1, r_2, \dots een rij complexe getallen $\neq 0$.

Stel dat m een geheel getal ≥ 0 is zo, dat $\sum_1^{\infty} |r_j| |a_j|^{-m-1}$ convergeert. Dan is

$$f(z) := \sum_1^{\infty} r_j \left(\frac{1}{z - a_j} + \frac{1}{a_j} + \frac{z}{a_j^2} + \dots + \frac{z^{m-1}}{a_j^m} \right)$$

een meromorfe functie met enkelvoudige polen in a_j en residuen r_j . Bewijs dit.

6.4. Oneindige producten

Ter inleiding op de definitie van een oneindig product geven we eerst een definitie van een oneindige reeks:

Een oneindige reeks

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_j$$

is een voorschrift om aan een gegeven rij getallen $\{t_1, t_2, \dots\}$ (de zg. termen) een rij getallen $\{s_1, s_2, \dots\}$ (de partiële sommen) toe te voegen, nl.

$$s_n = \sum_{j=1}^n t_j \quad (n = 1, 2, \dots).$$

De reeks heet convergent als

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

bestaat en we schrijven in dat geval

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} t_j.$$

Vrijwel analoog definiëren we nu:

Een oneindig product

$$\prod_{j=1}^{\infty} f_j$$

is een voorschrift om aan een gegeven rij getallen $\{f_1, f_2, \dots\}$ (de factoren) een rij getallen $\{p_1, p_2, \dots\}$ (de partiële producten) toe te voegen, nl.

$$p_n = \prod_{j=1}^n f_j \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Het product heet convergent als

$$p := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

bestaat en $\neq 0$ is en we schrijven in dat geval

$$p = \prod_{j=1}^{\infty} f_j.$$

De extra eis dat $p \neq 0$ is, blijkt nodig om een mooie theorie te krijgen. Hij impliceert dat bij een convergent product alle factoren ongelijk nul moeten zijn.

We kunnen deze eis wat verzwakken door te stellen:

Een product $\prod_{j=1}^{\infty} f_j$ heet convergent als er een N is zo, dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=N+1}^n f_j$$

bestaat en $\neq 0$ is.

Met name is het dan toegelaten dat eindig veel factoren nul zijn. En er geldt dan:

p is dan en slechts dan nul als een der factoren nul is.

6.4.1. Stelling 6.4.1. Een nodige (niet voldoende!) voorwaarde voor de convergentie van het product $\prod f_j$ is

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = 1.$$

Bewijs. Zij $f_j \neq 0$ voor $j > N$ en zij

$$p_n = \prod_{j=N+1}^n f_j.$$

Dan is

$$f_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

Als het product convergeert dan hebben teller en noemer rechts dezelfde limiet $p \neq 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Op grond van deze stelling schrijft men meestal een oneindig product in de vorm

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + u_j).$$

De u_j heten de termen. Bij een convergent product geldt $\lim u_j = 0$.

6.4.2. We beschouwen nu producten met uitsluitend niet negatieve of uitsluitend niet positieve termen.

Stelling 6.4.2. Zij $u_j \geq 0$ voor $j = 1, 2, \dots$. Dan zijn

$$\sum_1^{\infty} u_j, \quad \prod_1^{\infty} (1 + u_j), \quad \prod_1^{\infty} (1 - u_j)$$

tegelijk convergent en divergent.

Bewijs. Als een der drie vormen convergeert dan is $\lim u_j = 0$. Daarom kunnen we zonder beperking der algemeenheid aannemen dat $u_j < 1$ voor alle j . Zelfs nemen we aan: als $\sum u_j$ convergeert dan is de som kleiner dan 1.

Zij nu

$$s_n = \sum_1^n u_j, \quad p_n^+ = \prod_{j=1}^n (1 + u_j), \quad p_n^- = \prod_{j=1}^n (1 - u_j).$$

s_n en p_n^+ zijn monotoon niet dalend, p_n^- is monotoon niet stijgend. s_n en p_n^+ convergeren dus als ze naar boven begrensd zijn, p_n^- convergeert als p_n^- door een positieve constante naar onder begrensd wordt.

Nu geldt

$$1 + s_n \leq p_n^+ \leq e^{s_n} \quad (1)$$

$$1 - s_n \leq p_n^- \leq e^{-s_n} \quad (2)$$

De rechter ongelijkheden volgen nl. uit het feit dat voor alle reële u

$$1 + u \leq e^u .$$

De linker ongelijkheid van (1) is triviaal. De linker ongelijkheid van (2) bewijzen we inductief. Hij geldt voor $n=1$. En als hij geldt voor zekere n , dan is

$$p_{n+1}^- = (1 - u_{n+1}) p_n^- \geq (1 - u_{n+1})(1 - s_n) \geq 1 - u_{n+1} - s_n = 1 - s_{n+1} ,$$

daar $1 - u_{n+1} \geq 0$ en $u_{n+1} s_n \geq 0$.

Uit (1) volgt

als $\lim s_n = s < \infty$, dan is $p_n^+ \leq e^s$, dus p_n^+ convergent;

als $\lim p_n^+ = p^+ < \infty$, dan is $s_n \leq p^+ - 1$, dus s_n convergent.

Uit (2) volgt

als $\lim s_n = s < 1$, dan is $p_n^- \geq 1 - s > 0$, dus p_n^- convergent;

als $\lim p_n^- = p^- > 0$, dan is $s_n \leq -\log p^-$, dus s_n convergent.

Door deze stelling wordt de convergentietheorie van producten waarvan alle termen hetzelfde teken hebben teruggebracht tot de welbekende convergentietheorie van reeksen met positieve termen.

Voorbeelden

$$\prod_1^n \left(1 + \frac{1}{j}\right) = n + 1, \text{ dus divergent.}$$

$$\prod_2^n \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}, \text{ dus divergent.}$$

$$\prod_2^n \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}, \text{ dus convergent, limiet } \frac{1}{2}.$$

Het verband tussen de convergentie van $\prod (1+u_j)$ en $\sum u_j$ geldt niet meer als de u_j willekeurig reëel of complex zijn.

Voorbeelden

Zij

$$u_{2j} = \frac{1}{\sqrt{j}} \quad , \quad u_{2j+1} = -\frac{1}{\sqrt{j}} \quad .$$

Dan is $\sum u_j$ convergent en $\prod (1+u_j)$ divergent.

Zij

$$u_{2j} = \frac{1}{\sqrt{j}} \quad , \quad u_{2j+1} = -\frac{1}{\sqrt{j+1}} \quad .$$

Dan is $\sum u_j$ divergent en $\prod (1+u_j)$ convergent. Bewijs dit zelf.

6.4.3. Net als bij reeksen kunnen we een begrip absolute convergentie definiëren: $\prod (1+u_j)$ heet absoluut convergent als $\prod (1+|u_j|)$ convergent is.

Stelling 6.4.3. Absolute convergentie van $\prod (1+u_j)$ impliceert convergentie.

Bewijs. Zij $p_n = \prod_1^n (1+u_j)$, $P_n = \prod_1^n (1+|u_j|)$. Dan is zeker

$$|p_n| \leq P_n.$$

Verder is

$$|p_{n+1} - p_n| = |u_{n+1} p_n| \leq |u_{n+1}| P_n = P_{n+1} - P_n.$$

Als P_n convergeert, dan convergeert ook de reeks $\sum (P_{n+1} - P_n)$. Dus convergeert dan de reeks $\sum (p_{n+1} - p_n)$ absoluut, dus $\lim p_n$ bestaat. Kan deze limiet 0 zijn? Stel dat alle $|u_j| < 1$. Dan is

$$|p_n| \geq \prod_1^n (1 - |u_j|).$$

Het rechterlid heeft limiet > 0 (volgens stelling 6.4.2), dus moet ook $\lim p_n \neq 0$ zijn.

Combineren we het begrip absolute convergentie met stelling 6.4.2, dan krijgen we:

$\prod (1+u_j)$ is dan en slechts dan absoluut convergent als $\sum u_j$ absoluut convergent is.

En:

voldoende (maar niet nodig) voor de convergentie van $\prod (1+u_j)$ is dat $\sum u_j$ absoluut convergent is.

6.4.4. Voor het werken met producten met complexe termen is van belang

Stelling 6.4.4.

$$p = \prod_1^{\infty} (1+u_j) \quad \text{en} \quad s = \sum_1^{\infty} \log(1+u_j)$$

convergeren en divergeren tegelijk, als we voor de logaritmen de hoofdlogarithmen nemen.

Bij convergentie geldt

$$p = e^s .$$

En er is een N zo, dat voor $n > N$

$$\sum_{n+1}^{\infty} \log(1+u_j) = \text{hoofdlog van } \prod_{n+1}^{\infty} (1+u_j) .$$

Bewijs. Stel $u_j \neq -1$ voor alle j .

Zij

$$p_n = \prod_1^n (1+u_j) , \quad s_n = \sum_1^n \log(1+u_j) .$$

Dan is

$$p_n = e^{s_n} ,$$

dus convergentie van s_n impliceert convergentie van p_n .

Stel nu dat p_n convergeert met limiet p . Dan is

$$s_n = \log p + \log \frac{p_n}{p} + 2\pi i k_n \quad (\text{beide hoofdlog}), \quad (1)$$

waarbij k_n van n afhangt. We moeten bewijzen dat k_n (die steeds geheel is) op de duur niet meer verandert.

Uit (1) volgt

$$\begin{aligned} 2\pi i(k_{n+1} - k_n) &= s_{n+1} - s_n - \log \frac{p_{n+1}}{p} + \log \frac{p_n}{p} \\ &= \log(1+u_{n+1}) - \log \frac{p_{n+1}}{p} + \log \frac{p_n}{p} . \end{aligned}$$

Voor $n \rightarrow \infty$ gaat het rechterlid naar 0 (als p_n convergeert). Daar k_n geheel is, volgt hieruit dat op de duur $k_n = k$, onafhankelijk van n , en dus

$$\lim s_n = \log p + 2\pi i k .$$

6.4.5. We beschouwen nu producten waarvan de termen functies van z zijn:

$$p(z) = \prod_1^{\infty} (1 + u_j(z)) .$$

Ga na dat de stellingen 6.4.3 en 6.4.4 en hun gevolgen ook gelden voor uniforme convergentie in een gebied G :

Als $\sum |u_j(z)|$ uniform convergeert in een gebied G dan convergeert $\prod (1 + u_j(z))$ ook uniform in G ; $\prod (1 + u_j(z))$ convergeert dan en slechts dan uniform in G als $\sum \log(1 + u_j(z))$ in G uniform convergeert.

Van belang is

Stelling 6.4.5. Als voor $j = 1, 2, \dots$ $u_j(z)$ analytisch en $\neq -1$ is in een gebied G en $\prod (1 + u_j(z))$ in G uniform convergeert, dan is

$$p(z) = \prod_1^{\infty} (1 + u_j(z))$$

analytisch en $\neq 0$ in G en

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_1^{\infty} \frac{u_j'(z)}{1 + u_j(z)}$$

(waarbij de reeks uniform convergeert in G).

Bewijs. Alles volgt uit de stelling van Weierstrass over uniforme limieten van rijen van analytische functies (zie WSK 50, p. 37 en 38, de stelling is daar uitgesproken voor reeksen). Als nl.

$$p_n(z) = \prod_1^n (1 + u_j(z))$$

zodat

$$p_n'(z) = p_n(z) \sum_1^n \frac{u_j'(z)}{1 + u_j(z)} ,$$

dan zegt Weierstrass:

als $\lim p_n(z) = p(z)$, uniform in G , dan is $p(z)$ analytisch in G en $\lim p_n'(z)$ bestaat en is gelijk aan $p'(z)$.

6.4.6. Voorbeelden

a) Zij $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$.

Daar $\sum n^{-2}$ convergeert is $f(z)$ geheel, met nulpunten in $\pm 1, \pm 2, \dots$.
Er geldt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2} = \pi \operatorname{ctn} \pi z - \frac{1}{z}$$

(vergelijk 6.3.3, formule (11)).

Door integratie vinden we

$$f(z) = C \frac{\sin \pi z}{z} .$$

Daar kennelijk $f(0) = 1$, is $C = 1/\pi$ en dus

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) . \tag{1}$$

Dit is het zg. sinusproduct.

b) Zij $\operatorname{Re} w > 0$. Dan convergeert voor alle z (ga na)

$$\theta(z;w) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + e^{-(n+\frac{1}{2})w} e^z)(1 + e^{-(n+\frac{1}{2})w} e^{-z}) .$$

$\theta(z;w)$ is dus een gehele functie van z . Zeker is $\theta(z;w)$ als functie van z periodiek met periode $2\pi i$. Ook geldt (ga na!)

$$\theta(z+w;w) = e^{z+\frac{1}{2}w} \theta(z;w) .$$

Hieruit volgt onder meer dat, als

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta ,$$

de functie

$$f(z) = \frac{\theta(z-\alpha)\theta(z-\beta)}{\theta(z-\gamma)\theta(z-\delta)}$$

dubbel periodiek is met perioden $2\pi i$ en w .

De nulpunten van $\theta(z;w)$ zijn

$$z = (m+\frac{1}{2})w + (2k+1)\pi i , \text{ alle gehele } k \text{ en } m.$$

Daaruit volgt dat $f(z)$ nulpunten heeft in

$$\alpha + (m+\frac{1}{2})w + (2k+1)\pi i \quad \text{en} \quad \beta + (m+\frac{1}{2})w + (2k+1)\pi i$$

en polen

$$\gamma + (m + \frac{1}{2})w + (2k+1)\pi i \quad \text{en} \quad \delta + (m + \frac{1}{2})w + (2k+1)\pi i .$$

Opgave. Bewijs met Liouville dat er, behalve de constante, geen dubbel-periodieke gehele functies bestaan.

c) Zij

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-z/n} . \quad (2)$$

Hier zijn de termen $u_n(z) = (1 + \frac{z}{n}) e^{-z/n} - 1$.

Daar voor vaste z (of z in een compact gebied)

$$u_n(z) = - \frac{z^2}{2n^2} (1 + O(n^{-1})) , \quad (n \rightarrow \infty) ,$$

convergeert het product overal. $G(z)$ is dus een gehele functie met nulpunten in $-1, -2, \dots$. Er geldt

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right) . \quad (3)$$

We merken op dat, op grond van (1),

$$G(z)G(-z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} . \quad (4)$$

We komen op deze functie nog terug.

6.5. Productontwikkeling van gehele functies

Zij $f(z)$ een gehele functie. De nulpuntenverzameling \mathcal{V} van $f(z)$ is leeg, eindig of aftelbaar oneindig zonder eindige verdichtingspunten (waarom?). De eerste twee gevallen hebben we al behandeld in 6.1.3. Stel nu dat $f(z)$ een k -voudig nulpunt ($k \geq 0$) in $z = 0$ heeft en verder nulpunten in a_1, a_2, \dots met $\forall_n a_n \neq 0$, $\lim a_n = \infty$, en zo genummerd, dat als a een l -voudig nulpunt is, a precies l keer voorkomt in de rij a_1, a_2, \dots (in feite zeggen we dus: stel dat $f(z)$ lineaire factoren $(z - a_1), (z - a_2), \dots$ en geen andere bevat). Als het product

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \quad (1)$$

convergent is, dan geldt zeker

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

met $g(z)$ geheel, omdat dan

$$f(z)z^{-k} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{-1}$$

een gehele functie zonder nulpunten is (stelling 6.1.3). Maar voor de convergentie van (1) is het uiteraard wel nodig, maar geenszins voldoende, dat $\lim a_n = \infty$.

Opgave. Bewijs dat voor de convergentie van (1) voor alle z voldoende (maar niet nodig) is dat $\sum_1^{\infty} |a_n|^{-1}$ convergeert.

6.5.1. Stelling 6.5.1. Bij iedere rij a_1, a_2, \dots , met $\forall_n a_n \neq 0$ en $\lim a_n = \infty$ zijn er niet-negatieve gehele getallen m_1, m_2, \dots , zodanig dat het product

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}\right) \quad (1)$$

uniform convergeert in ieder compact gebied.

Bewijs. Kies $M > 0$. Bepaal N zo, dat voor $n \geq N$ $|a_n| \geq 2M$.

Zij $|z| \leq M$. Zij voor $n \geq N$

$$r_n(z) = \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$$

(hoofdlogarithme). Dan geldt, daar $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}$,

$$r_n(z) = - \sum_{j=m_n+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{a_n}\right)^j$$

en dus

$$|r_n(z)| \leq \sum_{m_n+1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^j = \left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+1} \left(1 - \left|\frac{z}{a_n}\right|\right)^{-1} \leq 2^{-m_n}.$$

Kiezen we nu de rij getallen m_1, m_2, \dots zo dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-m_n}$$

convergeert (dus bv. $m_n = n$), dan volgt de bewering uit stelling 6.4.4.

Corollarium. Bij iedere rij a_1, a_2, \dots met $\forall_n a_n \neq 0$ en $\lim a_n = \infty$ is er een gehele functie $P(z)$ met precies deze punten als nulpunten.

6.5.2. Stelling 6.5.2 (Weierstrass). Zij $f(z)$ een gehele functie met een k -voudig nulpunt in $z = 0$ ($k \geq 0$) en voorts nulpunten in a_1, a_2, \dots (met $\forall_n a_n \neq 0$). Dan is er een gehele functie $g(z)$ en een product $P(z)$ als in stelling 6.5.1 zodanig dat

$$f(z) = z^k e^{g(z)} P(z).$$

Bewijs. Volgt uit stellingen 6.5.1 en 6.1.3.

Opgave. Bewijs deze stelling ook door op te merken dat $f'(z)/f(z)$ meromorf is met uitsluitend enkelvoudige polen en daarop de stelling van Mittag-Leffler toe te passen.

6.5.3. Stelling 6.5.3. Iedere meromorfe functie $f(z)$ is te schrijven als quotiënt van twee gehele functies.

Bewijs. Construeer met stelling 6.5.1 een gehele functie $q(z)$ met in de polen van $f(z)$ nulpunten met ordes die dezelfde zijn als de ordes van de polen van $f(z)$. Dan is $q(z)f(z)$ geheel.

6.5.4. Zij weer de rij a_1, a_2, \dots , zo dat $\forall_n (a_n \neq 0)$ en $\lim a_n = \infty$.

Stel dat er een geheel getal h ($0 \leq h < \infty$) is zo, dat $\sum_1^{\infty} |a_n|^{-h-1}$ convergeert en $\sum_1^{\infty} |a_n|^{-h}$ divergeert. Dan convergeert het product

$$P_h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{h} \left(\frac{z}{a_n} \right)^h \right). \quad (1)$$

Bewijs dit zelf door op te merken dat voor $|z| \leq \frac{1}{2}|a_n|$

$$\left| \log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{h} \left(\frac{z}{a_n} \right)^h \right| \leq 2 \left| \frac{z}{a_n} \right|^{h+1}.$$

We noemen $P_h(z)$ een kanoniek product met geslacht h . In het geval $h = 0$ laten we ook toe dat $P_h(z)$ slechts eindig veel factoren heeft.

Zij voor een gehele functie $f(z)$ de orde ρ gedefinieerd door

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\log \log \left(\max_{|z| \leq r} |f(z)| \right) / \log r \right) .$$

Of, equivalent,

$$\rho = \inf \{ \tau \mid \exists_A \exists_R \forall_{r > R} \left(\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq A e^{r^\tau} \right) \} .$$

Men kan dan bewijzen *)

a) Voor een kanoniek product (1) geldt

$$\rho = \sigma := \inf \{ \tau \mid \sum_n |a_n|^{-\tau} \text{ convergeert} \} .$$

Kennelijk geldt

$$h \leq \sigma \leq h + 1 .$$

b) Bij iedere gehele functie $f(z)$ van eindige orde ρ zijn er niet-negatieve gehele getallen k , m en n met

$$\rho - 1 \leq \max(m, n) \leq \rho ,$$

een kanoniek product $P_m(z)$ met geslacht m en een polynoom $p_n(z)$ met graad n , zodanig dat

$$f(z) = z^k e^{P_n(z)} P_m(z) .$$

*) Zie bv. Kneser, H., Funktionentheorie, Göttingen, 1958 en Ahlfors, L.V., Complex Analysis, New York, 1953.

6.6. De Gamma-functie

De functie

$$G(z) := \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{1}$$

is geheel en heeft enkelvoudige nulpunten in $-1, -2, \dots$. De functie $G(z-1)$ heeft dus enkelvoudige nulpunten in $0, -1, -2, \dots$, dus in dezelfde punten als $zG(z)$. Daaruit volgt met stelling 6.1.3 dat

$$G(z-1) = zG(z)e^{g(z)} \tag{2}$$

waarin $g(z)$ een gehele functie is. Logarithmisch differentiëren levert

$$g'(z) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{z} - \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right),$$

waaruit volgt (ga zorgvuldig na) dat $g'(z) = 0$. $g(z)$ is dus een constante, die we γ noemen.

Nemen we in (2) $z = 1$, dan vinden we

$$1 = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} \cdot e^{\gamma},$$

of

$$e^{\gamma} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \exp\left(\sum_1^N \frac{1}{n}\right),$$

of, als we γ reëel kiezen,

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_1^N \frac{1}{n} - \log N\right). \tag{3}$$

Dus γ is de (door (3) gedefinieerde) constante van Euler ($\gamma = 0.57722\dots$).

Definiëren we $H(z) = e^{\gamma z} G(z)$, dan volgt uit (2) de eenvoudige functionaalbetrekking

$$H(z-1) = zH(z).$$

Op min of meer historische gronden beschouwt men in plaats van $H(z)$ liever

$$\Gamma(z) := \frac{1}{zH(z)}.$$

Hiervan kennen we nu al de volgende eigenschappen:

$$i) \quad \Gamma(z) = e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}.$$

ii) $\Gamma(z)$ is meromorf, zonder nulpunten en met enkelvoudige polen in $0, -1, -2, \dots$.

$$iii) \quad \Gamma(1+z) = z\Gamma(z).$$

Uit de relatie $G(z)G(-z) = \sin \pi z / (\pi z)$ (vgl. 6.4.6) volgt met iii)

$$iv) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Uit iii) en i) volgt $\Gamma(1) = \lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = 1$ en met iii) volgt hieruit

$$v) \quad \text{voor } n \text{ geheel en } \geq 0 \text{ is } \Gamma(n+1) = n!$$

Met iv) en v) volgt (ga na) dat voor n geheel en ≥ 0

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!},$$

zodat het residu in de pool $z = -n$ gelijk is aan $(-1)^n/n!$. Nemen we in iv) $z = \frac{1}{2}$, dan zien we: $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$. Daar uit i) volgt dat $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$, is

$$vi) \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Opgave. Bewijs dat voor n geheel en ≥ 0

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2} - n) = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}.$$

6.6.1. Uit de definitie i) volgt dat

$$\Gamma(z) = z^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(N! \prod_1^N (n+z)^{-1} \cdot \exp\left(z \left(\sum_1^N n^{-1} - \gamma \right) \right) \right).$$

en dus, in verband met (3),

$$vii) \quad \Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^z}{z(z+1)\dots(z+N)},$$

waarin $N^z = \exp(z \log N)$ (de reële logarithme). Voor een aantal doelen is deze productformule nuttiger dan i). Zo zien we vrij eenvoudig dat

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(2z)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N!)^2 N^{\frac{1}{2}} 2z(2z+1)\dots(2z+2N)}{(2N)! 2^{2z} z \dots (z+N)(z+\frac{1}{2}) \dots (z+N+\frac{1}{2})},$$

of

$$2^{2z} \frac{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(2z)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N!)^2 2^{2N+1} N^{\frac{1}{2}}}{(2N)!(N+z+\frac{1}{2})} . \quad (4)$$

Het rechterlid is onafhankelijk van z . Voor $z = \frac{1}{2}$ is het linkerlid $2\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}$. Hieruit volgt

$$\text{viii)} \quad \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z) .$$

Dit is de zg. verdubbelingsformule van Legendre.

Tevens zien we uit (4)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N!)^2 2^{2N}}{(2N)! \sqrt{N}} = \sqrt{\pi} , \quad (5)$$

of

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2N)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2N-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{\pi} .$$

(product van Wallis).

Opgave. Leid het product van Wallis ook af door in het sinusproduct (zie 6.4.6) $z = \frac{1}{2}$ te nemen.

6.6.2. Uit de reële analyse weten we dat

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

We bewijzen nu dat voor $\text{Re } z > 0$

$$\text{ix)} \quad \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \Gamma(z)$$

(zie ook Ackermans-Van Lint, Algebra en Analyse, 7.6.28).

De eis $\text{Re } z > 0$ is kennelijk nodig opdat de integraal bij $t = 0$ convergeert.

Om ix) te bewijzen merken we op dat, uniform in ieder gesloten interval

$0 \leq t \leq a$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} . \quad (6)$$

Zij voorlopig $z = x$ reëel en > 0 (als we bang zijn voor oneigenlijke integralen dan kunnen we ook $x \geq 1$ nemen).

Zij

$$G_n(x) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt .$$

Door n maal partieel integreren vinden we

$$G_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} ,$$

en dus, met vii),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = \Gamma(x) . \quad (7)$$

Anderzijds is voor iedere a met $0 \leq a \leq n$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt - G_n(x) \\ &= \int_0^a \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt + \int_a^\infty e^{-t} t^{x-1} dt - \int_a^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt . \end{aligned}$$

Daar $0 < 1 - \frac{t}{n} < e^{-t/n}$ voor $0 < t < n$, zijn zowel de eerste term rechts als de tweede en de derde term samen positief. Bovendien zijn tweede en derde term samen kleiner dan de tweede term.

Geef nu $\varepsilon > 0$. Bepaal a zo, dat

$$\int_a^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \varepsilon/2 .$$

Bepaal nu $n \geq a$ zo, dat ook

$$\int_0^a \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt < \varepsilon/2 .$$

Dit kan op grond van de uniformiteit van de limiet (6).

Voor deze n is dus

$$0 < \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt - G_n(x) < \varepsilon ,$$

waarmee ix) voor positief reële x bewezen is. Het linkerlid van ix) is analytisch voor $\operatorname{Re} z > 0$, want

$$\int_{\delta}^a t^{z-1} e^{-t} dt = \int_{\delta}^a e^{-t+(z-1)\log t} dt$$

is geheel (zie WSK 50, p. 33) en de limieten voor $\delta \rightarrow 0$ en $a \rightarrow \infty$ zijn uniform in stroken $0 < \varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq A$ (ga na). Op grond van de identiteitsstelling geldt ix) dus ook in het hele halfvlak $\operatorname{Re} z > 0$.

Om een analoge integraalvoorstelling te hebben die overal geldt bekijken we

$$F(z) := \int_C e^{(z-1)\log w+w} dw ,$$

waarbij C een weg is in het langs de negatief reële as opengesneden complexe w -vlak, die van $-\infty - i0$ naar $-\infty + i0$ loopt. Op C nemen we voor $\log w$ de hoofdlogarithme.

Als $\operatorname{Re} z > 0$ dan kunnen we C samentrekken tot de negatief reële as en we vinden met ix)

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^{\infty} e^{(z-1)(-\pi i + \log t)-t} dt - \int_0^{\infty} e^{(z-1)(\pi i + \log t)-t} dt = \\ &= 2i \sin \pi z \cdot \Gamma(z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(1-z)} . \end{aligned}$$

Derhalve geldt voor $\operatorname{Re} z < 1$

$$x) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-z \log w+w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C w^{-z} e^w dw .$$

Maar daar linker- en rechterlid geheel zijn (ga na) geldt x) voor alle z .

Opgave. Leid uit x) af dat $\Gamma(n+1) = n!$ ($n \geq 0$) en dat $1/\Gamma(z)$ nulpunten heeft in $0, -1, -2, \dots$.

6.6.4. Uit i) volgt met stelling 6.4.5 voor de logarithmische afgeleide van de Γ -functie

$$xi) \quad \psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right) - \frac{1}{z} - \gamma = -\gamma - \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n+1} \right) .$$

$\psi(z)$ is een meromorfe functie met polen in $0, -1, \dots$. We zien

$$\begin{aligned}\psi(1) &= \Gamma'(1) = -\gamma, \\ \psi(n+1) &= -\gamma + 1 + \dots + \frac{1}{n}, \\ \psi(z+1) &= \frac{1}{z} + \psi(z), \\ \psi(z) - \psi(1-z) &= -\pi \operatorname{ctn} \pi z.\end{aligned}$$

Uit ix) volgt (ga na)

$$\text{xii) } \gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^{\infty} e^{-t} \log t \, dt.$$

Hieruit zijn vele andere integraalvoorstellingen voor γ af te leiden, bv.

$$\text{xiii) } \gamma = -\int_0^1 \log t \, d(1-e^{-t}) + \int_1^{\infty} \log t \, de^{-t} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} \, dt - \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

Opgave. Leid uit de laatste formule af dat voor $\operatorname{Re} a > 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-at}}{t} \, dt = \log \frac{1}{a} - \gamma + \int_0^a \frac{1-e^{-t}}{t} \, dt = \log \frac{1}{a} - \gamma - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k \cdot k!}.$$

Deze formule is vooral interessant als $a \rightarrow 0$.

6.6.5. We onderzoeken nu het asymptotische gedrag van $\Gamma(z)$ als $z \rightarrow \infty$.

Voor $z = x =$ reëel en positief volgt uit vii)

$$\log(\Gamma(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\log(N!) + x \log N - \sum_0^N \log(x+k) \right]. \quad (8)$$

Door tweemaal partieel integreren blijkt (vgl. diktaat Numerieke Wiskunde I, p. 51 en 52) dat voor een tweemaal continu differentieerbare functie $f(t)$ geldt

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8} \right) f''(t) \, dt$$

en dus ook

$$\int_0^N f(t) \, dt = \sum_{k=0}^N f(k) + \int_0^N \varphi(t) f''(t) \, dt,$$

waarin

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}(t - [t] - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8} \quad (\text{met } [t] = \text{entier}(t))$$

en Σ'' aangeeft dat de 0-de en N-de term half genomen moeten worden.

Nemen we $f(t) = \log(t+x)$ dan vinden we

$$(N+x)\log(N+x) - x \log x - N = \Sigma'' \log(x+k) - \int_0^N \frac{\varphi(t)}{(t+x)^2} dt .$$

Combinatie met (8) levert

$$\begin{aligned} \log(\Gamma(x)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\log(N!) + x \log N + N - (N+x+\frac{1}{2})\log(N+x) + \right. \\ &\quad \left. + (x-\frac{1}{2})\log x - \int_0^N \frac{\varphi(t)}{(t+x)^2} dt \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [\log(N!) - (N+\frac{1}{2})\log N + N] \\ &\quad + (x-\frac{1}{2})\log x - x - \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(t+x)^2} dt . \end{aligned}$$

De integraal convergeert omdat $\varphi(t)$ begrensd is. De overblijvende limiet bestaat omdat de limiet in (8) bestaat. We hebben dus bewezen dat er een reële constante C bestaat zodat voor positief reële z

$$\log(\Gamma(z)) = (z-\frac{1}{2})\log z - z + C - \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(t+z)^2} dt . \quad (9)$$

De integraal rechts convergeert uniform in ieder compact deel van het z-vlak dat geen punten van de afgesloten negatief reële as bevat (ga na). Het rechterlid (met hoofdwaarde voor $\log z$) is dus eenwaardig analytisch in het langs de negatief reële as opengesneden z-vlak. In dit gebied is $\Gamma(z)$ analytisch en $\neq 0$, dus $\log \Gamma(z)$ kan gedefinieerd worden door analytische voortzetting vanaf de positief reële as. Voor deze voortzetting (waarbij de logaritmie beslist niet overal de hoofdlogaritmie is!) geldt nu formule (9) ook op grond van de identiteitsstelling. *)

*) Uit het feit dat (9) moet gelden voor ieder stukje analytische voortzetting van $\log(\Gamma(z))$ volgt dat deze voortzetting leidt tot een eenduidige analytische functie (die niet afhangt van de weg waarlangs is voortgezet). Hadden we (9) niet ter beschikking dan zouden we ons moeten beroepen op de zg. monodromiestelling, die zegt dat als een in een deelgebied G_0 van een enkelvoudig samenhangend gebied G analytische functie $f_0(z)$ naar ieder punt van G analytisch kan worden voortgezet, deze voortzetting ook eenduidig (onafhankelijk van de weg) is.

De constante C bepalen we straks, eerst kijken we hoe uit (9) het asymptotische gedrag van $\log(\Gamma(z))$ volgt. Daar $0 \leq -\varphi(t) \leq \frac{1}{8}$, geldt, als

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(t+z)^2} dt \right| &\leq \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{dt}{|t+re^{i\theta}|^2} = (\text{met } t = rs) \\ &= \frac{1}{8r} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = \frac{1}{8r} \cdot \frac{\theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Uit (9) en (10) volgt dus de asymptotische relatie

$$\log(\Gamma(z)) = (z - \frac{1}{2})\log z - z + C + O(z^{-1}) \quad (11)$$

als $z \rightarrow \infty$, uniform voor $|\arg z| \leq \pi - \delta < \pi$.

Of, meer expliciet:

$$\left| \log(\Gamma(z)) - (z - \frac{1}{2})\log z + z - C \right| \leq \frac{\pi - \delta}{8 \sin \delta} \cdot \frac{1}{|z|},$$

als $z \neq 0$, $|\arg z| \leq \pi - \delta < \pi$.

Om C te bepalen kijken we naar de rechte $z = \frac{1}{2} + iy$. Uit iv) volgt dat

$$\Gamma(\frac{1}{2} + iy)\Gamma(\frac{1}{2} - iy) = \frac{\pi}{\cosh \pi y}$$

en dus (daar - waarom? - $\overline{\Gamma(x+iy)} = \Gamma(x-iy)$)

$$|\Gamma(\frac{1}{2} + iy)| = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi y} (1 + O(e^{-2\pi y})), \quad y \rightarrow \infty.$$

Uit (11) volgt dat voor $y \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \log(\Gamma(\frac{1}{2} + iy)) &= iy \log(\frac{1}{2} + iy) - \frac{1}{2} - iy + C + O(y^{-1}) \\ &= iy(\frac{\pi i}{2} + \log y + \log(1 + \frac{1}{2iy}) - 1) - \frac{1}{2} + C + O(y^{-1}) \\ &= iy(\log y - 1) - \frac{\pi y}{2} + C + O(y^{-1}), \end{aligned}$$

dus

$$\log|\Gamma(\frac{1}{2} + iy)| = -\frac{\pi y}{2} + C + O(y^{-1}),$$

want C is reëel. Hieruit volgt dat $C = \frac{1}{2} \log(2\pi)$ en we hebben dus tenslotte

$$\begin{aligned} \text{xiv) } \log(\Gamma(z)) &= (z - \frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(t+z)^2} dt = \\ &= (z - \frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(z^{-1}) \end{aligned}$$

als $z \rightarrow \infty$, uniform voor $|\arg z| \leq \pi - \delta < \pi$.

Uit xiv) volgt dat in dezelfde sector

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}(1+O(z^{-1}))$$

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1+O(n^{-1}))$$

$$\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + O(z^{-2}) .$$

Opgave. Bepaal de waarde van C ook door de relaties (11) en (5) of (11) en viii) te combineren.

Opmerking. Definiëren we de Bernoulli polynomen door

$$\left. \begin{aligned} B_0(t) &= 1 \\ B'_n(t) &= n B_{n-1}(t) \\ \int_0^1 B_n(t) dt &= 0 \end{aligned} \right\} n \geq 1$$

dan is $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$, $B_2(t) = (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12}$, en dus $\varphi(t) = \frac{1}{2} B_2(t - [t]) - \frac{1}{12}$. Hieruit volgt dat

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(t+z)^2} dt = -\frac{1}{12z} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{B_2(t - [t])}{(t+z)^2} dt .$$

Door herhaald partieel integreren volgt hieruit, dankzij het feit dat voor $k \geq 2$ $B_k(0) = B_k(1)$ *),

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(t+z)^2} dt = -\sum_{k=2}^K \frac{B_k}{k(k-1)z^{k-1}} + \frac{1}{K+1} \int_0^\infty \frac{B_{K+1}(t - [t])}{(t+z)^{K+1}} dt , \quad (12)$$

geldig voor alle $K \geq 1$. Hierin zijn de B_k de zg. Bernoulli-getallen, gedefinieerd door $B_k = B_k(0)$. Er geldt $B_k = 0$ als k oneven en > 1 is **); $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$.

*) Dit volgt uit het feit dat voor $n \geq 2$

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t) dt = n \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0 .$$

***) Dit volgt uit het feit dat B_n als functie van $t - \frac{1}{2}$ even is als n even is en oneven is als n oneven is.

De integraal in (12) is (ga na) $O(z^{-K})$ voor $z \rightarrow \infty$, uniform voor $|\arg z| \leq \pi - \delta < \pi$ en we hebben in deze sector dus, voor iedere $K \geq 1$,

$$\begin{aligned} \text{xv) } \quad \log(\Gamma(z)) &= (z - \frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) \\ &+ \sum_{k=2}^K \frac{B_k}{k(k-1)z^{k-1}} + O(z^{-K}) . \end{aligned}$$

Dit is een volledige asymptotische reeks.

Opgave voor WSK-studenten.

Bewijs xv) ook, uitgaande van (8) door op de term $\sum \log(z+k)$ de somformule van Euler-MacLaurin toe te passen (zie Ackermans-Van Lint, Algebra en Analyse, 7.5.12). De constante C moet weer analoog als boven bepaald worden.

6.6.6. We beschouwen nu nog de zg. Beta-functie

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt .$$

De integraal convergeert als $\text{Re } \alpha > 0$, $\text{Re } \beta > 0$. Bewijs zelf dat $B(\alpha, \beta)$ hier een analytische functie van α , c.q. β is.

Uiteraard is $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

Ook geldt (stel $t = \cos^2 \varphi$)

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2\alpha-1} (\sin \varphi)^{2\beta-1} d\varphi .$$

De voornaamste eigenschap is het verband tussen Beta- en Gamma-functie:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} .$$

Deze eigenschap kan bewezen worden door de oppervlakte integraal

$$I = 4 \iint_{\substack{x > 0 \\ y > 0}} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

op twee manieren uit te rekenen.

De eerste manier is, I te schrijven als herhaalde integraal en $x^2 = s$, $y^2 = t$ te substitueren. Dit levert direct

$$I = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) .$$

Anderzijds gaan we over op poolcoördinaten:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

en vinden

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} r^{2\alpha+2\beta-1} (\cos \varphi)^{2\alpha-1} (\sin \varphi)^{2\beta-1} e^{-r^2} dr = \\ &= \Gamma(\alpha+\beta) \cdot B(\alpha, \beta) . \end{aligned}$$

Opgaven. Bewijs dat ook

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} (1+u)^{-\alpha-\beta} du ,$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (u^{\alpha-1} + u^{\beta-1}) (1+u)^{-\alpha-\beta} du .$$

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} .$$

Leid de laatste formule ook af uit

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{\alpha-1} (z-1)^{-\alpha} dz = 1$$

(langs contour die de snede van $z = 0$ naar $z = 1$ in positieve zin eenmaal omsluit).