TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

behorend bij het college

VOORTGEZETTE FUNCTIETHEORIE

Voorjaarssemester 1980

Bibl | Mag

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.245
Prijs f.3,50

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Vraagstukken behorend bij het college

Voortgezette Functietheorie

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij

VOORTGEZETTE FUNCTIETHEORIE

voorjaar 1980

JdG, 19 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

en Informatica

VRAAGSTUKKEN behorend bij het college

VOORTGEZETTE FUNCTIETHEORIE

Voorjaarssemester 1980

Hoofdstuk 1.

1. Gegeven $z = w(a + w)$; $w(0) = 0$, $a \neq 0$.
   Ontwikkel w in een machtreeks naar z.

2. Gegeven $w = z(1 + z)^m$; $w(0) = 0$, $m \neq 0$.
   Ontwikkel z in een machtreeks naar w.

3. Als $w = z - az^2$ $(a \neq 0)$, druk dan z uit in een machtreeks naar w en bepaal het convergentiegebied.

4. Zij $w = f(z) = \frac{\log z}{z}$ met $f(1) = 0$.
   Toon aan dat

   $$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^n .$$

   Bepaal het convergentiegebied van deze machtreeks.

5. Zij $f(z)$ analytisch in een gebied G.
   Bewijs de volgende stelling:
   Als $|f(z)|$ constant is in G, dan is ook $f(z)$ constant in G.

6. f en g zijn polynomen met complexe coëfficiënten en van dezelfde graad.
   Gegeven is dat g geen nulpunten heeft in $\operatorname{Im} z > 0$ en dat $|f(x)| \leq |g(x)|$ voor alle reële x.
   Toon aan dat $|f(z)| \leq |g(z)|$ voor alle $z \in \operatorname{Im} z > 0$.

7. Bewijs de volgende stelling:
   Zij $w = f(z)$ een analytische functie in een gebied G.
   Zij $z_0 \in G$, zodanig dat $|z_0| < R$. Zij verder $|w_0| = |f(z_0)| < M$.
   Als $\zeta = Tz$ een bilineaire transformatie is, die $|z| < R$ afbeeldt op $|\zeta| < 1$ zodanig dat $Tz_0 = 0$ en als S een bilineaire transformatie is, die $|w| < M$ afbeeldt op $|Sw| < 1$, zodanig dat $Sw_0 = 0$,

   a) toon dan aan dat $S(f(T^{-1}\zeta))$ voldoet aan het lemma van Schwarz en
   b) toon verder aan dat

   $$\left|\frac{M(f(z) - f(z_0))}{M^2 - \overline{f(z_0)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}\right| .$$

8. Als f een analytische functie van z is met $|f(z)| < 1$ als $|z| < 1$, toon dan aan dat

$$\left|\frac{f'(z)}{1 - |f(z)|^2}\right| \le \frac{1}{1 - |z|^2} .$$

9. Als f een analytische functie van z is, zodanig dat Im $f(z) \ge 0$ als Im $z > 0$, bewijs dan dat

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - \overline{f(z_0)}}\right| \le \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|} .$$

10. Toon onder dezelfde voorwaarden als bij opgave 9 aan dat

$$\frac{|f'(z)|}{\operatorname{Im} f(z)} \le \frac{1}{y} .$$

11. Als in opgave 8 of in opgave 9 het gelijkteken optreedt, is f een gebroken lineaire functie van z. Toon dat aan.

12. Zij $f(z)$ analytisch voor Re $z > 0$ met $|f(z)| \le 1$ en $f(1) = 0$. Toon aan dat

$$|f(z)| \le \left|\frac{z - 1}{z + 1}\right| \quad \text{voor Re } z > 0 .$$

Hoofdstuk II

1. Zij $f(z)$ analytisch in het complexe z-vlak; reëel op de reële as en zuiver imaginair op de imaginaire as. Toon aan dat $f(z)$ een oneven functie in z is.

2. Bewijs het spiegelingsprincipe van Schwarz (stelling (2.7.1), door gebruik te maken van de vergelijkingen van Cauchy-Riemann.

3. Zij Γ_0 een deel van de reële as.
   Zij voor $\operatorname{Im} z > 0$ $f(z)$ analytisch, terwijl op Γ_0 geldt

$$\operatorname{Im}(e^{-i\alpha} f(z)) = C \qquad (\alpha \text{ en } C \text{ constanten}) .$$

   Toon aan:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{voor } \operatorname{Im} z \geq 0 , \\ e^{2i\alpha}\overline{f(\bar{z})} + 2iCe^{i\alpha} & \text{voor } \operatorname{Im} z < 0 . \end{cases}$$

Hoofdstuk III

1. Zij G het gebied in het eerste kwadrant, gelegen binnen $|z-1| = 1$ en $|z - i| = 1$.
Bepaal de conforme afbeelding van G, verkregen door de transformatie $w = f(z)$ met

a) $w = \dfrac{1}{z - 1}$,

b) $w = \dfrac{1}{z - 1 - i}$,

c) $w = \dfrac{1}{2z - 1 - i}$.

2. Bepaal het middelpunt en de straal van het conforme beeld van Im $z = 0$ onder de transformatie

$$w = \frac{ze^{\alpha} - i}{z - ie^{\alpha}} \quad (\alpha \text{ reëel}) .$$

3. De getallen a, b, c en d zijn reëel en $ad - bc > 0$. Zij de transformatie $w = f(z)$ gegeven door $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.
Het beeldpunt van z doorloopt de cirkelboog $|z| = 1$, Im $z > 0$.
Beschrijf de baan van het beeldpunt van w.

4. a) Waarop beeldt $w = \dfrac{1 + z}{1 - z}$ het gebied $|z| \leq 1$ af?
b) Onderzoek onder deze transformatie ook het beeld van $|z| \leq \rho < 1$.

5. Toon aan dat $\bar{a}wz + bw + \bar{b}z + a = 0$ de eenheidscirkel $|z| = 1$ conform afbeeldt op $|w| = 1$ als $|b| \neq |a|$.
Welke betrekking moet er tussen a en b bestaan, opdat $|z| < 1$ conform wordt afgebeeld op $|w| < 1$?

6. Zij f een bilineaire transformatie in het complexe z-vlak. Voor welke van deze transformaties geldt

$$f(f(f(z))) = z \ ?$$

7. Bepaal de bilineaire transformatie $w = f(z)$, waarvoor geldt

a) $f(1) = 0$; $f(-1) = 1 - i$; $f(2) = -i$,

b) $f(1) = 1 + i$; $f(-1) = 1 - i$; $f(\infty) = 1$.

8. Bepaal de bilineaire transformatie $w = f(z)$ gegeven door $f(-1) = -i$; $f(1) = -1$; $f(\infty) = i$.
   Bepaal onder deze transformatie het beeld van:
   a) $\mathrm{Im}\, z < 0$,
   b) $\mathrm{Im}\, z = 1$, $\mathrm{Re}\, z > 0$.

9. Bepaal de meest algemene bilineaire transformatie, die $|z - 4| > 4$ overvoert in $|w| < 1$.

10. Bepaal de meest algemene lineaire transformatie die $\mathrm{Im}\, z > 0$ overvoert in $|w| < 1$.

11. Bepaal het conforme beeld van de strip

$$\begin{cases} 0 < \mathrm{Re}\, z < 1 \\ \mathrm{Im}\, z > 0 \end{cases}$$

door de transformatie $w = z^{-1}$.

12. Aan welke voorwaarde moeten de complexe getallen a, b, c en d voldoen opdat door de transformatie $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ het bovenhalfvlak op zichzelf wordt afgebeeld?

13. Bepaal het conforme beeld van $|z| < 1$ onder de transformatie

$$w = \frac{z}{z - e^{i\alpha}} \quad (\alpha \text{ reëel}) .$$

14. Doe dit ook voor $\mathrm{Im}\, z > 0$ onder dezelfde transformatie.

15. a) Bepaal een conforme afbeelding $f(z)$ van $|z| < 1$ op $|w| < 1$ met $f(0) = a$ en $\arg f'(0) = \alpha$.
    b) Laat zien dat dit de enige afbeelding is.

16. Bepaal met $w = \cos z$ het beeld van $0 < \mathrm{Re}\, z < \pi$.

17. Zij

$$G_z : \begin{cases} \operatorname{Re} z < 0 \\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi \,. \end{cases}$$

Als $w = -\coth \frac{z}{2}$, bepaal dan G_w.

18. Bepaal het conforme beeld van

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z > 0 \\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi \end{cases}$$

met $w = e^z$.

19. Bepaal een afbeelding $w = f(z)$, die $0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ conform afbeeldt op

$$\begin{cases} |w| < 1 \\ \operatorname{Im} w > 0 \,. \end{cases}$$

20. Bepaal het gebied G_w, waarin het gebied

$$G_z = \begin{cases} \operatorname{Re} z > 0 \\ |\operatorname{Im} z| < \pi \end{cases}$$

overgaat door $w = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

21. Zij G_z hetzelfde gebied als in no. 20. Wat wordt G_w als $w = \log \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$?

22. Zij G_z: $\operatorname{Im} z > 0$.
Bepaal het conforme beeld G_w van G_z als $w = \pi i + z - \log z$.

23. Bepaal een afbeelding $w = f(z)$, die

$$G_z : \begin{cases} |z| < 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$$

conform afbeeldt op G_w: $\operatorname{Im} z > 0$.

24. Bepaal de afbeelding, die

$$G_z : \begin{cases} |\mathrm{Re}\, z| < \pi/2, \\ \mathrm{Im}\, z > 0 \end{cases}$$

conform afbeeldt op G_w: $\mathrm{Im}\, w > 0$, zodanig dat $f(0) = 0$; $f(-\pi/2) = -1$ en $f(\pi/2) = 1$.

25. G_z is gegeven door $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$ met een snede langs de lijn:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, z < 0\ , \\ \mathrm{Im}\, z = \pi/2\ . \end{cases}$$

Bepaal de transformatie, die G_z conform afbeeldt op $\mathrm{Im}\, w > 0$.

26. G_z is gegeven door $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$ met een snede langs de imaginaire as ter lengte h $(0 < h < \pi)$.

a) Toon aan dat door $s = e^z$ het gebied G_z conform wordt afgebeeld op $\mathrm{Im}\, s > 0$ met een cirkelvormige snede.

b) Bepaal de afbeelding $w = f(z)$, die G_z conform afbeeldt op $\mathrm{Im}\, w > 0$.

27. Bepaal de in $\mathrm{Im}\, z > 0$ begrensde functie $T(x,y)$, die voldoet aan

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\ ,$$

terwijl bovendien geldt $T(x,0) = 0$ voor $x < -1$, $T(x,0) = 1$ voor $x > 1$ en $\frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0$ voor $|x| < 1$. Bereken verder $T(x,0)$ voor $|x| < 1$.

28. Het gebied G_z is gegeven door $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$. De rand van G_z is belegd met een electrische lading en wel zodanig dat de potentiaal V op die rand als volgt gegeven is:

$V(x,0) = 0$ voor $x > 0$; $V(x,\pi) = 0$ voor $x > 0$; $V(x,0) = 1$ voor $x < 0$ en $V(x,\pi) = 1$ voor $x < 0$.

Als binnen G_z de potentiaal V begrensd is en voldoet aan $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$, bereken dan V binnen G_z.

29. a) Bereken de potentiaal $V(x,y)$ in het binnengebied van een oneindig lange cirkelcylinder C met straal 1. De cylinder is in $\mathbb{R}^3$ zodanig geplaatst dat een loodrechte doorsnede samenvalt met het vlak van tekening (XOY-vlak). Binnen C is $V(x,y)$ begrensd en voldoet aan

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 .$$

Op de rand is $V(x,y) = 0$ op een vierde deel van de cirkelboog van de loodrechte doorsnede en $V(x,y) = 1$ op het resterende $\frac{3}{4}$ deel van die boog.

b) Bepaal de potentiaal op de as van C.

Hoofdstuk IV/V

1. Beeld het binnengebied van een gelijkzijdige driehoek, gelegen in het complexe z-vlak, met hoekpunten O: (0,0); A: (a,0) en B: $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{3})$ $(a > 0)$ conform af op $\mathrm{Im}\, w > 0$ zodanig dat $w(0) = 0$; $w(a) = \infty$ en $w(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}ia\sqrt{3}) = -1$.

2. a) Bepaal het binnengebied van de rechthoek G_z, gelegen in het complexe z-vlak, met hoekpunten A: $(-b,0)$; B: $(b,0)$; C: $(b + ic)$ en $D(-b + ic)$ conform af op $\mathrm{Im}\, w > 0$, zodanig dat $w(-b) = -1$, $w(b) = 1$ en $w(b + ic) = a$.
   b) Doe hetzelfde als $w(-b) = -1$; $w(b) = 1$ en $w(b + ic) = \infty$.

3. a) Beeld het gebied G_z bestaande uit $\mathrm{Im}\, z > 0$ verminderd met de straal

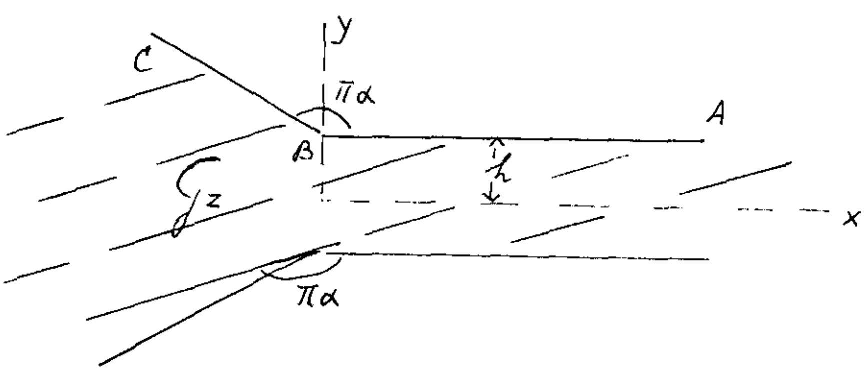
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, z < 0 \\ 0 < \mathrm{Im}\, z < \pi \end{cases}$$

   conform af op $\mathrm{Im}\, w > 0$.
   b) Zij $T(x,y)$ de begrensde functie in G_z, die voldoet aan $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, terwijl verder $T(x,\pi) = 1$ als $x < 0$ en $T(x,y) = 0$ elders op de rand van G_z. Toon aan, dat als α een reële parameter is $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ het met $w = i \tan \alpha$ overeenkomende beeldpunt van z in G_z gegeven is door

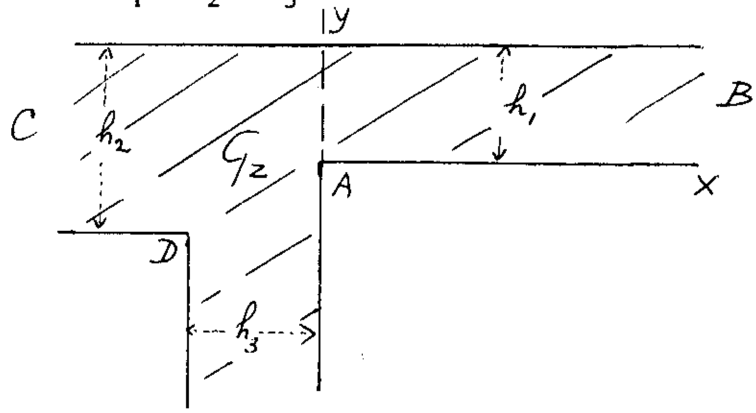
$$z = \log \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + i(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\cos \alpha})$$

   en dat in dit punt $T(x,y) = \frac{\alpha}{\pi}$.

4. Bepaal een conforme afbeelding, die G_z (zie figuur) afbeeldt op $\mathrm{Im}\, w > 0$, zodanig dat $w(\infty + hi) = w(A) = 0$; $w(hi) = w(B) = 1$ en $w(C) = \infty$.



5. a) Beeld nevenstaand gebied in het complexe z-vlak conform af op $\mathrm{Im}\, w > 0$, zodanig dat $w(A) = w(0) = 0$; $w(B) = 1$, $w(D) = \infty$. Noem hierbij de beelden van C en E: a resp. -b.
   Verder zijn h_1, h_2 en h_3 gegeven.
   b) Druk h_1, h_2 en h_3 in a en b uit.
   c) Neem $h_1 = h_2 = h_3 = h$ en bepaal nu de afbeeldingsfunctie.

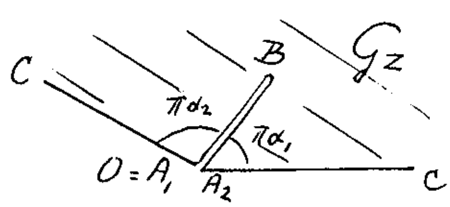


6. Het gebied G_z is gegeven door $\mathrm{Im}\, z > 0$ met een snede langs $z = x + i\pi$, $x < 0$. G_z wordt conform afgebeeld op $\mathrm{Im}\, w > 0$. Als $w(\infty) = \infty$; $w(-\infty) = 0$ en $w(\pi i) = -1$, bepaal dan de afbeeldingsfunctie.

7. a) Bepaal de conforme afbeelding, die G_z, gegeven door onderstaande figuur, afbeeldt op $\mathrm{Im}\, w > 0$ zodanig dat $w(A_1) = w(0) = -1$; $w(A_2) = 1$, $w(C) = \infty$, terwijl de lengte van de snede $A_1B = 1$.
   b) Zij $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Als binnen G_z een begrensde temperatuursverdeling $T(x,y)$ is gegeven, die voldoet aan

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \,,$$

   terwijl verder $T(x,0) = 0$ voor $x > 0$; $T(x, xe^{2\pi i\alpha}) = 0$ voor $x > 0$ en langs de snede $T(x,y) = 1$, bereken dan $T(x,y)$.



8. Bepaal het gebied G_z dat door

$$z = \int_0^w t^{\alpha-1}(1 - t)^{\beta}dt$$

conform wordt afgebeeld op Im $w > 0$ als:

a) $\alpha + \beta < 1$;

b) $\alpha + \beta = 1$;

c) $\alpha + \beta = 2$;

d) $\alpha = \beta = 3/2$.

9. Bepaal het gebied G_z dat door

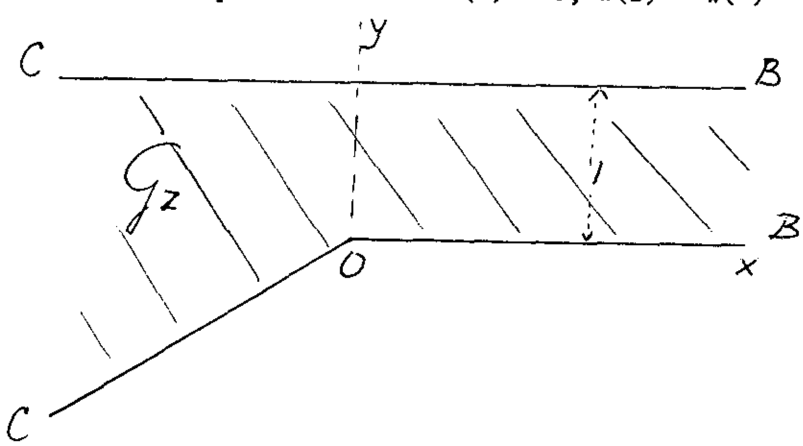
$$z = \int_0^w \frac{t - \lambda}{\sqrt{t(1 - t)}}\,dt$$

conform wordt afgebeeld op Im $w > 0$ als:

a) $\lambda < 0$;

b) $\frac{1}{2} < \lambda < 1$.

10. Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$, die het gebied G_z (zie figuur) conform afbeeldt op Im $w > 0$ als $w(0) = 0$; $w(B) = w(\infty) = 1$ en $w(C) = w(-\infty + i) = \infty$.



Hoofdstuk VI

1. Bepaal de partieelbreuksplitsing van

a) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$;

b) $f(z) = \frac{1}{\sinh z}$;

c) $f(z) = \coth z$.

2. Bepaal de partieelbreuksplitsing van

$$f(z) = \frac{1}{\cos \pi z - \cos \alpha\pi} \quad (\alpha \text{ reëel, maar niet geheel}) .$$

3. Bereken, als a een getal is, zodanig dat de noemer niet nul wordt:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)^3}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + a)^2}$.

4. Voor welke waarden van z convergeert het product:

a) $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z + z^{2n}}{1 + z^{2n}}$;

b) $q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z} \sin \frac{z}{n}$.

5. Schrijf $\cos \pi z$ als een oneindig product.

6. Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{x + k}{y + k} , \quad 0 \le x < y .$$

7. Bereken

$$\int_0^1 (\log \frac{1}{x})^{z-1} dx, \qquad \mathrm{Re}\ z > 0 .$$

8. Toon aan

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt = \gamma .$$

9. Toon aan:

a) $$B(p,q) = B(q,p) ;$$

b) $$B(p,q+1) = \frac{q}{p} B(p+1,q) ;$$

c) $$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q} B(p,q) ;$$

d) $$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt .$$

10. Bewijs dat

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n z}{n}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\frac{1}{2}z)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z)} .$$

11. Toon aan dat

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2}\alpha) \qquad (\alpha > 0) .$$

12. Bewijs dat $\psi(1) - \psi(\frac{1}{2}) = 2 \log 2$.

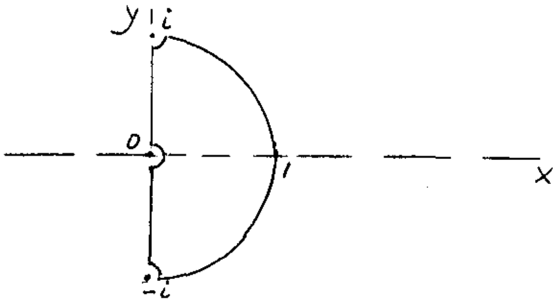
13. Toon aan

$$\int_0^{\pi/2} \cos^a \varphi \cos b\varphi \, d\varphi = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma(\frac{a+b}{2}+1)\Gamma(\frac{a-b}{2}+1)} \qquad (b > a > -1)$$

door te beschouwen

$$\int_C (z + \frac{1}{z})^a z^{b-1} dz ,$$

waarbij C de contour is voorgesteld in onderstaande figuur.



14. a) Bereken

$$\int_0^\infty \sin(x^p) dx, \quad p > 1 .$$

b) Bereken

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x^p} dx, \quad p \geq 1 .$$

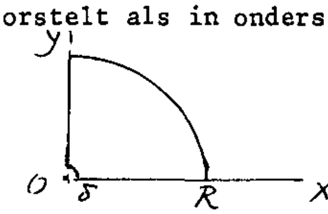
15. Bereken

$$\int_0^\infty x^{p-1} \cos ax \, dx \quad (a > 0;\ 0 < p < 1) .$$

N.B. Bereken

$$\int_C z^{p-1} e^{-az} dz$$

als C de contour voorstelt als in onderstaande figuur getekend.



waarbij $\delta \downarrow 0$ en $R \to \infty$.

Bereken de onderstaande integralen

16. $\int_0^1 |\log x|^p x^q dx$.

17. $\int_a^b (x - a)^{p-1}(b - x)^{q-1} dx$.

18. $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1 - x^\beta)^{\gamma-1} dx$.

19. $\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{y + 1} dy$.

20. $\int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1} \log t \, dt$.

21. $\int_0^1 \log t \log(1 - t) dt$.

22. Toon aan dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + a)(n + b)} = \frac{\psi(a) - \psi(b)}{a - b} \qquad a \neq b .$$

23. Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ met behulp van de ψ-functie .

24. Toon aan dat

$$\int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1 - t} dt = \psi(z) + \gamma .$$

Tentamenopgaven juni 1967 - juni 1976

1. a) Formuleer het maximum principe voor analytische functies

   b) Bewijs met behulp van het maximum principe het lemma van Schwarz:
   Zij $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$.
   Zij hier $|f(z)| < 1$. Zij $f(0) = 0$.
   Dan geldt
   óf $f(z) = ze^{i\alpha}$ (α reëel)
   óf $|f(z)| < |z|$ voor $0 < |z| < 1$.

2. Beschouw de conforme afbeelding die gegeven wordt door

$$w = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} ,$$

waarbij het teken van de wortel wordt vastgelegd door

$$\lim_{z \to +i\infty} w = 1 .$$

Beschrijf het beeld in het w-vlak van het gebied $\operatorname{Im} z > 0$ uit het z-vlak.

3. Zij

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{z}{2n-1}\right)\left(1 + \frac{z}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)} .$$

   a) Voor welke z convergeert het product?
   b) Waar heeft $f(z)$ singulariteiten?
   c) Bewijs dat, overal waar het product convergeert, $f(z) = 2^z$.
   d) Bewijs dat f voortgezet kan worden tot een gehele functie.

4. Bewijs de volgende stelling:

   Zij $f(z)$ analytisch in z_0 en zij $f'(z_0) \neq 0$.

   Dan beeldt f een omgeving van z_0 eeneenduidig af op een omgeving van $f(z_0)$.

5. Zij $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^3}\right)$.

a) Bewijs de convergentie van het product.

b) Druk $f(z)$ uit met behulp van de Γ-functie.

c) Druk voor reële x

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^6}{n^6}\right)$$

uit in elementaire functies.

6. Construeer een meromorfe functie $f_0(z)$ die polen heeft in

$$z = \sqrt{n} \cdot \log n \,, \quad n = 1,2,\ldots$$

met alle residuën gelijk aan 1.

7. Bepaal de conforme afbeelding

$$w = f(z)$$

die het gebied bepaald door

$$\operatorname{Re} z > 0\,, \quad \operatorname{Im} z > 0\,, \quad |z| > 1$$

afbeeldt op het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} w > 0$.
Wat is het beeld van de cirkelboog

$$|z| = 2\,, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \quad .$$

8. a) Zij $f(z)$ analytisch in het eerste kwadrant $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ en continu in $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Zij $g(z)$ analytisch in het vierde kwadrant $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ en continu in $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$.
Wat wordt bedoeld met de uitspraak: f en g zijn elkaars analytische voortzetting? Bewijs deze uitspraak.

b) Zij $f(z)$ analytisch in het eerste kwadrant $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ en continu in $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Zij $f(x)$ reëel voor x reëel en $x > 0$.
Zet $f(z)$ analytisch voort in het vierde kwadrant.

c) Zij $f(z)$ analytisch in het eerste kwadrant $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ en continu in $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Zij $\arg(f(x)) = \alpha$ (vast) voor x reëel en $x > 0$.
Zet $f(z)$ analytisch voort in het vierde kwadrant.

9. Bepaal de conforme afbeelding $w = w(z)$ die het bovenhalfvlak $\mathrm{Im}\, z > 0$ afbeeldt op het gebied $|\mathrm{Im}\, w| < \pi$, waarin een snede is aangebracht langs $\mathrm{Im}\, w = 0$, $\mathrm{Re}\, w < 0$.
Gegeven is nog

$$\lim_{z \to \pm 1} \mathrm{Re}\, w(z) = -\infty$$

$$\lim_{|z| \to \infty} \mathrm{Re}\, w(z) = +\infty \quad .$$

Bepaal ook $\lim\limits_{r \downarrow 0} w(1 + re^{i\alpha})$ voor $0 < \alpha < \pi$.
Hint: stel $t = e^w$.

10. Zij $f(z) = \dfrac{\tan \pi z}{z}$.

   a) Bepaal de polen van $f(z)$ met hun multipliciteiten, residuen en hoofdbestanddelen.

   b) Bepaal de partieelbreuksplitsing van $f(z)$.

11. Beschouw het gebied G_z, bestaande uit het bovenhalfvlak $\mathrm{Im}\, z > 0$ met daarvan uitgezonderd de halfrechte $\mathrm{Im}\, z = \pi$, $-\infty < \mathrm{Re}\, z < 0$.
Beeld G_z conform af op het halfvlak G_w: $\mathrm{Im}\, w > 0$, en wel zo dat $\mathrm{Im}\, z = 0$, $\mathrm{Re}\, z = +\infty$ correspondeert met $w = \infty$ en $\mathrm{Im}\, z = 0$, $\mathrm{Re}\, z = -\infty$ met $w = 0$.

12. a) Formuleer het lemma van Schwarz.
   b) Zij a een complex getal met $|a| < 1$ en α een reëel getal. Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van $|z| < 1$ op $|w| < 1$ zo, dat $f(a) = 0$ en $\arg(f'(a)) = \alpha$.
   c) Bewijs met behulp van het lemma van Schwarz dat het vraagstuk b) slechts één oplossing heeft.

13. Veronderstel dat de getallen a_1, a_2, a_3,... positief zijn en dat de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$$

convergeert.

a) Bewijs dat de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k + z}$$

convergeert voor Re $z \geqslant 0$

Noem de som $f(z)$

b) Bewijs dat

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \text{Re } z \geqslant 0}} f(z) = 0 \ . \qquad (1)$$

c) Zij $a_k = k^2$ $(k = 1,2,3,\ldots)$.

Druk $f(z)$ uit in elementaire functies (suggestie: kijk eerst naar $f(-w^2)$).

Verifieer formule (1).

14. Zij $f(z)$ analytisch in een gebied G en continu in de afsluiting $\overline{G}$ van G.
Zij m reëel.
Als gegeven is dat in $\overline{G}$

$$\text{Re}(f(z)) + \text{Im}(f(z)) \leqslant m \ ,$$

bewijs dan dat in G zelfs

$$\text{Re}(f(z)) + \text{Im}(f(z)) < m \ ,$$

tenzij $f(z)$ = constant. Vermeld de gebruikte stelling(en).

15. Zij $z \to w := f(z)$ een conforme afbeelding van $|z| < 1$ op Re $w > 1$ met $f(0) = 3$, $\arg(f'(0)) = \frac{\pi}{2}$.
a) Bepaal een $f(z)$ die deze eigenschappen heeft.
b) Bewijs dat er slechts één $f(z)$ is met deze eigenschappen.

16. Zij G_z het bovenhalfvlak Im $z > 0$ verminderd met het kwartvlak Re $z < 0$, Im $z > \pi$. Bepaal een afbeelding $z \to w := f(z)$ die G_z afbeeldt op Im $w > 0$ en wel zo dat $z = \pi i$ afgebeeld wordt op $w = -1$. In hoeverre is de afbeelding door deze eis bepaald?

17. a) Bewijs de volgende stelling:

Zij $f(z)$ meromorf met uitsluitend enkelvoudige polen in $a_1, a_2, \dots$ met residuen $r_1, r_2, \dots$.

Zij $a_j \neq 0$ voor alle j.

Zij $C_1, C_2, \dots$ een rij enkelvoudige gesloten wegen zodanig dat

1. $\forall_z \, \exists_N \, \forall_{n > N}$ (z binnen C_n);
2. er is een geheel getal $m \geqslant 0$ zodanig dat

$$\lim_{n \to \infty} \oint_{C_n} \frac{|f(z)|}{|z^{m+1}|} |dz| = 0 .$$

Dan geldt (uniform in ieder compact gebied dat geen der polen bevat)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} z^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_j}\right)^m \frac{r_j}{z - a_j} .$$

b) Bepaal (door toepassing van bovengenoemde stelling of op andere wijze) de partieelbreuksplitsing van de functie

$$f(z) = \frac{1}{\cos \pi z} .$$

18. a) Noem het lemma van Schwarz.

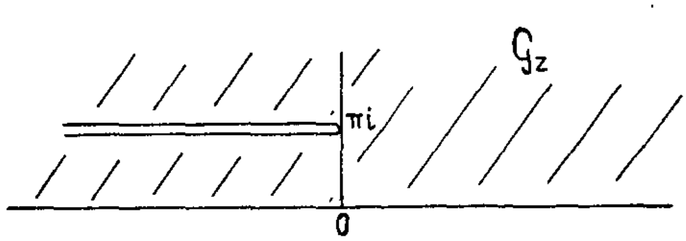
b) Bewijs de volgende uitspraak:

Als $f(z)$ regulier is in $\mathrm{Re}\, z > 0$ en hier $|f(z)| \leqslant 1$ en als $f(1) = 0$, dan is voor $\mathrm{Re}\, z > 0$

$$|f(z)| \leqslant \left|\frac{z-1}{z+1}\right| .$$

c) Kan de uitspraak ad b) nog verscherpt worden?

19. Bepaal een conforme afbeelding die het in onderstaande figuur gegeven gebied G_z afbeeldt op $\mathrm{Im}\, w > 0$.



20. Zij $f(z) = z \coth z$.
   a) Bepaal de polen van $f(z)$ met hun multipliciteiten, hun residuen en hoofdbestanddelen.
   b) Bepaal het gedrag van $f(z)$ voor $\operatorname{Re} z \to +\infty$, resp. $\operatorname{Re} z \to -\infty$.
   c) Bepaal en bewijs de partieelbreuksplitsing van $f(z)$.

21. Zij G een gebied in het z-vlak met rand C. Zij $f(z)$ en $g(z)$ analytisch in G en continu in $G+C$. Zij $g(z) \neq 0$ in $G+C$.
   a) Stel dat
   $$|f(z)| \leqslant |g(z)| \quad \text{op } C\,. \tag{1}$$
   Bewijs dat dan (1) ook geldt in G.
   b) Kan de uitspraak ad a) nog verscherpt worden?
   c) Zij G nu het inwendige van de cirkel $|z| = 1$. Zij $|z_0| < 1$. Veronderstel dat $g(z)$ in z_0 een enkelvoudig nulpunt heeft en dat $g(z) \neq 0$ voor $z \in G+C$, $z \neq z_0$.
   Bewijs dat (1) nu impliceert dat voor z in G en $z \neq z_0$
   $$|f(z)| \leqslant |1 - z\bar{z}_0| \left|\frac{g(z)}{z - z_0}\right| \,.$$
   Geef ook een ongelijkheid voor $f(z_0)$.

22. Stel dat $p(z)$ en $q(z)$ polynomen zijn.
   Stel dat $p(z_0) = 0$, $p'(z_0) \neq 0$, $q(z_0) \neq 0$.
   Bewijs dat er $\delta > 0$ en $\varepsilon > 0$ zijn zodanig dat voor $|w| < \varepsilon$ het polynoom
   $$P(z;w) := p(z) + wq(z)$$
   precies één nulpunt heeft in de cirkel $|z - z_0| < \delta$.
   N.B. Als Uw bewijs berust op een stelling uit het dictaat, bewijs dan ook deze stelling.

23. Zij G_z het gebied bepaald door
   $$\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z - \tfrac{1}{2}| > \tfrac{1}{2}\,.$$
   Beeld G_z conform af op het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} w > 0$, zo dat de punten $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$ corresponderen met resp. $w = \infty$, $w = -1$, $w = 1$.

24. Bepaal polynomen $p_n(z)$ $(n = 1,2,\ldots)$ zo dat

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)e^{p_n(z)}$$

convergeert voor alle z. Wat is het geslacht van de aldus geconstrueerde gehele functie?

25. a) Noem en bewijs het zogenaamde maximumprincipe voor analytische functies.

b) $f(z)$ en $g(z)$ zijn polynomen met complexe coëfficiënten.
Gegeven is dat voor alle reële waarden van x geldt $|f(x)| \le |g(x)|$.
Bewijs dat de graad van $f(x)$ niet groter is dan die van $g(x)$.

c) Indien bovendien gegeven is dat $g(z)$ geen nulpunten heeft in $\operatorname{Im} z > 0$, toon dan aan dat voor $\operatorname{Im} z > 0$ geldt $|f(z)| < |g(z)|$ tenzij

$f(z) = e^{i\alpha} g(z)$ (α reëel).

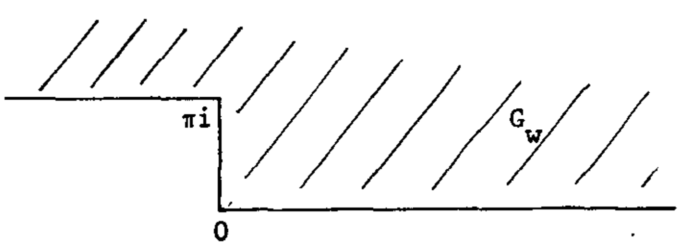
26. Gegeven het gebied $G_z \begin{cases} \operatorname{Re} z > 0 \\ |\operatorname{Im} z| < \pi \end{cases}$.

Bepaal het gebied G_w vastgelegd door

$$w = \log(\coth \tfrac{1}{2}z)\ , \quad z \in G_z\ ,$$

als w reëel is voor z reëel en $z > 0$.

27. Bepaal een conforme afbeelding $w = f(z)$, die $\operatorname{Im} z > 0$ afbeeldt op het getekende gebied G_w. Hierbij is $f(0) = 0$ en $f(-1) = \pi i$



28. Ontwikkel de functie $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z - 1}$ in partieelbreuken.

29. Beschouw de functie

$$w = z + 2\sqrt{e^z + 1} - 2\log(\sqrt{e^z + 1} + 1)$$

in de strook G_z: $|\mathrm{Im}\, z| < \pi$. (Wortel positief en logarithme reëel als z reëel is.)

a) Bepaal het gedrag van $s := e^z$ in de strook.
Bepaal het gedrag van $t := \sqrt{e^z + 1}$ in de strook.

b) Bepaal $\frac{dw}{dz}$ (in zo eenvoudig mogelijke vorm) en onderzoek het gedrag van het argument van $\frac{dw}{dz}$ als z langs de rand van G_z loopt.

c) Bepaal het beeld G_w van G_z.

30. Zij $f(z)$ analytisch in $\mathrm{Im}\, z > 0$, continu in $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ en reëel als z reëel is. Bewijs dat

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \mathrm{Im}\, z \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \mathrm{Im}\, z < 0 \end{cases}$$

de analytische voortzetting van $f(z)$ in het gehele complexe vlak is.
(Bewijs met name:

a. $F(z)$ is analytisch voor $\mathrm{Im}\, z \neq 0$,

b. $F(z)$ is analytisch voor $\mathrm{Im}\, z = 0$,

c. er is geen andere analytische voortzetting.)

31. Leid uit beschouwing van de integralen

$$\int_{C_N} \frac{1}{e^{it} + 1} \frac{dt}{(t - z)t}, \qquad (N = 1,2,\ldots)$$

waarin C_N de cirkel $|t| = 2\pi N$ is, de partieel breuksplitsing af van de functie

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} + 1}.$$

32. Beschouw de functie

$$w = \log(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

in het gebied G_z bepaald door Re $z > 0$ (hoofdwaarde van logarithme en wortel in de buurt van Im $z = 0$).

a) Ga na hoe de rand van G_z door deze functie afgebeeld wordt.

b) Bepaal het beeldgebied G_w.

c) De functie $\varphi(x,y)$ is harmonisch in G_z $(z = x + iy)$ en voldoet aan de randvoorwaarden

$$\varphi(0,y) = 1 \quad \text{als } y > 1$$

$$\varphi(0,y) = -1 \quad \text{als } y < -1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = 0 \text{ voor } -1 < y < 1 .$$

Bewijs dat de functie

$$\varphi(x,y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} w(z)$$

aan deze eisen voldoet.

d) De functie $\varphi(x,y)$ uit c) is de enige functie die aan de genoemde eisen voldoet en tevens begrensd is in G_z. Zoek andere (niet begrensde) functies die aan de eisen uit c) voldoen.

33. a) Noem en bewijs het maximum principe voor analytische functies.

b) Zij $f(z)$ analytisch in de halve cirkel

$$G_z : |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0$$

en continu in de afsluiting van dit gebied. Zij Im $f(z) = 0$ voor Im $z = 0$, $-1 <$ Re $z < 1$. Bewijs dat voor alle z uit G_z

$$|f(z)| \le \max_{0 \le \theta \le \pi} |f(e^{i\theta})| .$$

34. Zij $\qquad f(z) = \dfrac{1}{1 - \tan(\pi z/4)}$.

a) Bewijs dat $f(z)$ meromorf is.

b) Bepaal de polen van $f(z)$ met hun hoofddelen.

c) Bepaal de partieelbreuksplitsing van $f(z)$.

35. a) Definieer het begrip conforme afbeelding.

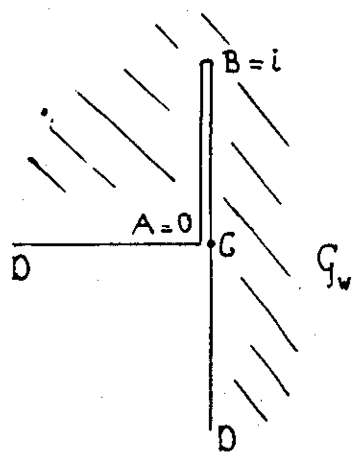
b) Bewijs dat $f'(z) \neq 0$ nodig is opdat de afbeelding $w = f(z)$ conform is.

c) Toon aan dat een conforme afbeelding hoektrouw is.

36. Bepaal de functie $w = w(z)$, die het gebied G_z gegeven door $\begin{cases} |z| > 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$

conform op $\operatorname{Im} w > 0$ afbeeldt zo dat $w(2i) = i$ en $\arg(w'(2i)) = \frac{\pi}{2}$.

37. a) Beeld het gebied $\operatorname{Im} z > 0$ conform af op het gebied G_w in het complexe w-vlak bestaande uit de sector $-\frac{\pi}{2} < \arg w < \pi$ verminderd met de snede $\operatorname{Re} w = 0$, $0 \leq \operatorname{Im} w \leq 1$ (zie figuur), zodanig dat $z = 0$ correspondeert met $w = 0$, $z = 1$ met $w = i$ en $z = \infty$ met $w = \infty$.



b) Bepaal ook de andere waarde van z waarvoor $w = 0$.

c) Voor welke waarde van z is $w = -2$?

38. Gegeven zij $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} z\right)$.

a) Voor welke waarden van z convergeert het product?

b) Bewijs dat $f(z)$ een gehele functie is.

c) Wat zijn de nulpunten van $f(z)$?

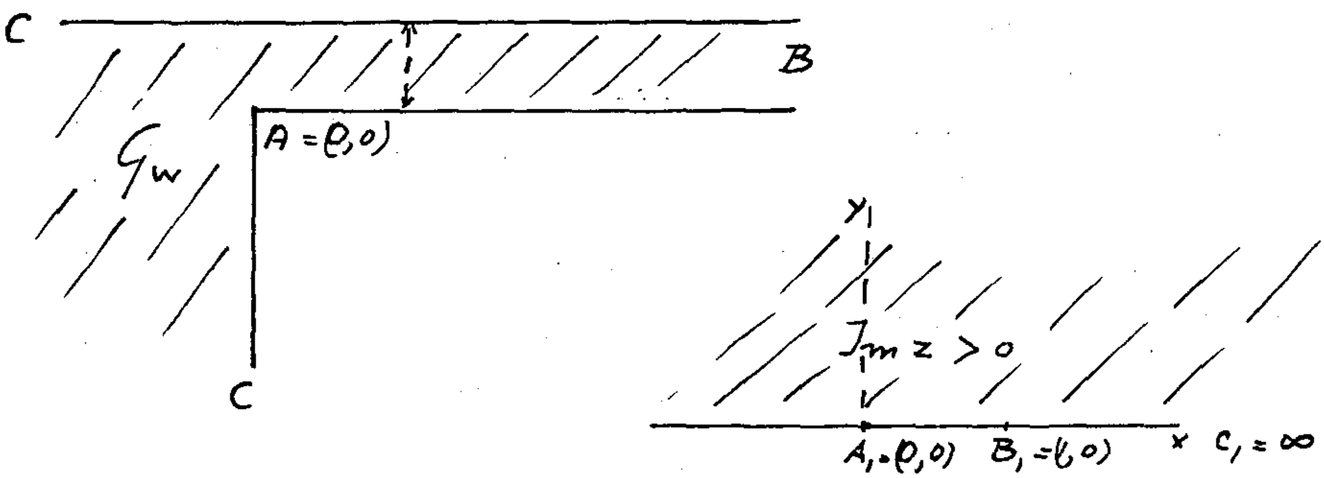
d) Druk $f(z)$ uit met behulp van de Γ-functie.
(Men mag gebruik maken van de formules die op de aan de achterzijde afgedrukte pagina van de syllabus vermeld zijn.)

39. Noem en bewijs het lemma van Schwarz.

40. Beschouw de transformatie $w = e^{-\frac{\pi i}{z}}$ $(z = x + iy)$ en bepaal het beeld van

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x^2 + y^2 > x \ . \end{cases}$$

41. Beeld Im $z > 0$ af op het gebied G_w in het w-vlak gegeven door



zodat

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \qquad (A_1 \to A) \\ w(1) &= +\infty \qquad (B_1 \to B) \\ w(\infty) &= -\infty \qquad (C_1 \to C) \ . \end{aligned}$$

De afstand tussen BC en AB is gelijk aan 1.

42. Bereken, uitgaande van

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} \, du \qquad (\mathrm{Re}\ z > 0) \ ,$$

door keuze van een geschikte contour

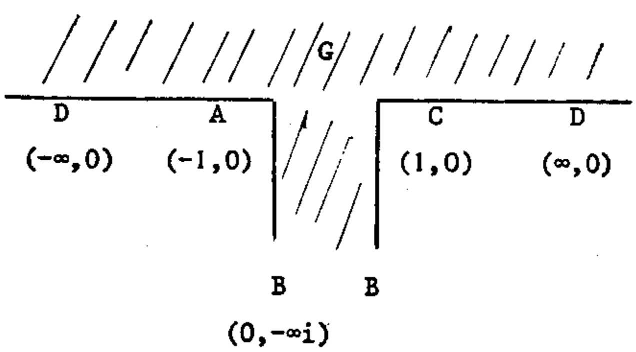
$$\int_0^\infty t^{z-1} \cos t \, dt \ .$$

43. a) Noem en bewijs het maximum principe voor analytische functies.

    b) Zij $f(z)$ analytisch in een gebied G.
    Als Re $f(z)$ constant is in G, dan is ook $f(z)$ constant in G.
    Bewijs dat.

44. Beeld Im $z > 0$ af op het onderstaande gebied G in het complexe w-vlak, met dien verstande dat

$$\begin{array}{lll} w(-1) = -1 & & (A) \\ w(0) = -\infty i & & (B) \\ w(1) = 1 & & (C) \\ w(\infty) = \infty & & (D) \end{array}$$



45. Zij $f(z) = \dfrac{1}{\cos \pi z - \cos \pi\alpha}$ (α complex, niet geheel).

    a) Bepaal de polen en de residuen van $f(z)$.

    b) Bepaal de partieelbreuksplitsing van $f(z)$.

46. Zij n een geheel getal ≥ 2.
    Beschouw de transformatie $w = f(z) = (2 \cos \frac{\pi}{n} - z)^{-1}$ (1)

    a) Toon aan dat voor $\alpha := e^{\frac{\pi i}{n}}$ geldt $f(\alpha) = \alpha$.

    b) Toon aan, dat (1) te schrijven is als $\dfrac{w - \alpha}{w - \alpha^{-1}} = e^{\frac{2\pi i}{n}} \dfrac{z - \alpha}{z - \alpha^{-1}}$.

    c) Bepaal het beeld van Im $z > 0$ onder de transformatie (1) bij vaste n.

    d) Als $f_k(z) = f(f_{k-1}(z))$ $(k \geq 1)$, met $f_0(z) \equiv z$, toon dan aan $f_n(z) = z$.

47. Zij

$$h(x) = \int_x^{x+1} \log \Gamma(t)dt .$$

a) Bereken $h'(x)$.

b) Toon aan dat $h(x) = x \log x - x + h(0)$.

c) Laat zien, door gebruik te maken van de asymptotische formule voor $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}(1 + 0(\tfrac{1}{x})) \qquad (x \to \infty)$$

dat

$$h(x) = x \log x - x + \tfrac{1}{2} \log 2\pi .$$

48. Zij $f(z)$ analytisch voor $0 < \mathrm{Im}\, z < b$ en continu voor $0 \le \mathrm{Im}\, z \le b$.
Zij verder

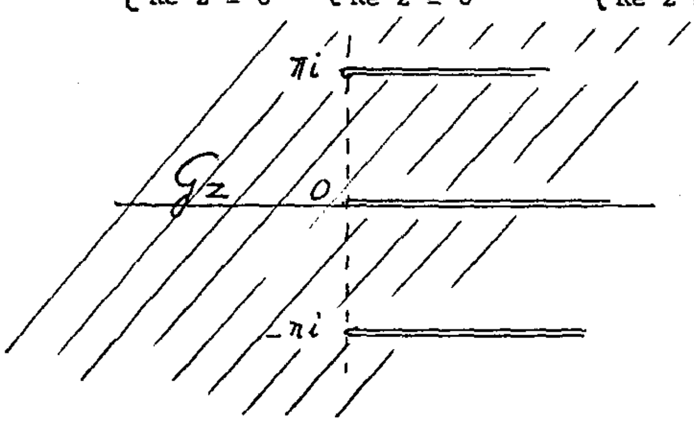
$$f(z) = 0(e^{a|z|}) \quad \text{in } 0 \le \mathrm{Im}\, z \le b , \quad (a > 0) .$$

a) Bewijs dat $e^{-\varepsilon z^2} f(z)$ begrensd is voor elke $\varepsilon > 0$.

b) Als $f(z)$ begrensd is op de rechten $\mathrm{Im}\, z = 0$ en $\mathrm{Im}\, z = b$, bewijs dan dat $f(z)$ begrensd is voor $0 \le \mathrm{Im}\, z \le b$.

49. Zij G_z het complexe z-vlak met uitzondering van de snedes

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\, z = 0 \\ \mathrm{Re}\, z \ge 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \mathrm{Im}\, z = \pi \\ \mathrm{Re}\, z \ge 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} \mathrm{Im}\, z = -\pi \\ \mathrm{Re}\, z \ge 0 \end{cases} \qquad \text{(zie figuur)} .$$



Geef een conforme afbeelding van het bovenhalfvlak in het complexe w-vlak op G_z.

50. Bepaal

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^4}) .$$

51. Zij $C := \{z \mid |z| < 1\}$; $\bar{C} := \{z \mid |z| \le 1\}$ en zij f een functie, die op C analytisch is en voldoet aan $|f(z)| < 1$.

a) Als $a \in C$ laat dan zien, dat $B(z) = \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ analytisch is op $\bar{C}$ en $|B(z)| = 1$ voor $|z| = 1$.
Als verder $f(a) = 0$, bewijs dan dat

$$\left|\frac{f(z)}{B(z)}\right| < 1 \qquad \text{voor } |z| < 1 .$$

Laat zien dat dit resultaat het lemma van Schwarz als speciaal geval heeft.

b) Als $a_1, a_2, \ldots, a_n$ punten zijn in C met $f(a_k) = 0$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ en

$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}$, bewijs dan dat

$$\left|\frac{f(z)}{B_n(z)}\right| < 1 \qquad \text{voor } z \in C .$$

c) Als $a_1, a_2, \ldots$ een oneindige rij van in C gelegen nulpunten is van f en $f(0) \neq 0$, bewijs dan dat $\prod_{k=1}^{\infty} |a_k|$ convergeert.

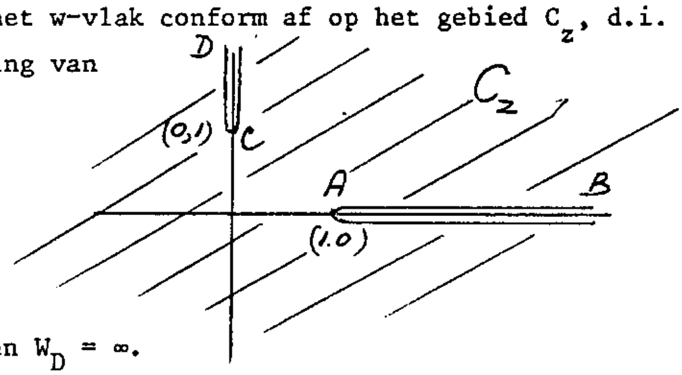
(Aanwijzing: Beschouw $B_n(0)$ in b)

52. Laat zien dat

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = (1 - z)^{-1} \qquad \text{voor } |z| < 1 .$$

53. Beeld het bovenhalfvlak in het w-vlak conform af op het gebied C_z, d.i. het gehele z-vlak met uitzondering van de snedes

$$\begin{cases} x \ge 1, \ y = 0 \\ y \ge 1, \ x = 0 \end{cases}$$



en wel zodanig dat

$$w_A = -1 \ ; \ w_B = 0 \text{ en } W_D = \infty.$$

54. Beeld het gebied G_z gevormd door

$$|z| < 2$$

$$|z - 1| > 1$$

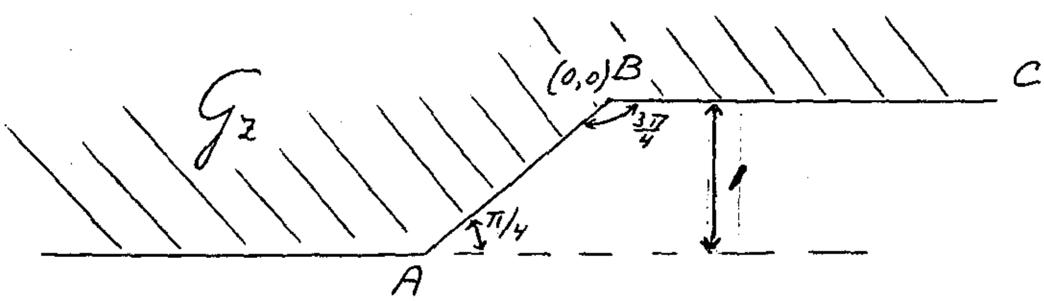
conform af op $\operatorname{Im} w > 0$.

55. Bewijs de volgende stelling:
Zij gegeven het gebied G_z, dat door $w = f(z)$ conform wordt afgebeeld op G_w. Als $z_0 \in G_z$ en $f'(z_0) \neq 0$, dan is in z_0 de afbeelding hoektrouw.

56. Bepaal een functie $f(z)$, die het gebied $\begin{cases} \operatorname{Im} z < 1 \\ |z| > 1 \end{cases}$ conform afbeeldt op $\operatorname{Im} w > 0$.

57. Beeld het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} w > 0$ conform af op het gebied G_z van de vorm als gegeven is in onderstaande figuur, met dien verstande dat

$$w_A = 0 \;;\quad w_B = 1 \;;\quad w_{C=\infty} = \infty \,.$$



58. a) Bewijs dat het produkt $A := \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$ convergeert.

b) Laat zien dat $A = e^{\gamma}$, waarbij $\gamma := \lim_{n\to\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \}$.

59. **Laat s, α, β reële getallen zijn, $s > 0$, $\alpha > 0$.**
Bereken

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, f(x)dx$$

waar $f(x) = x^{\alpha-1} \sin \beta x \qquad (x > 0)$.

60. Laat $f(z)$ analytisch zijn en laat $|f(z)| \le M$ gelden voor $|z| < 1$.
Als $f(z)$ in $z = 0$ een n-voudig nulpunt heeft, dan geldt

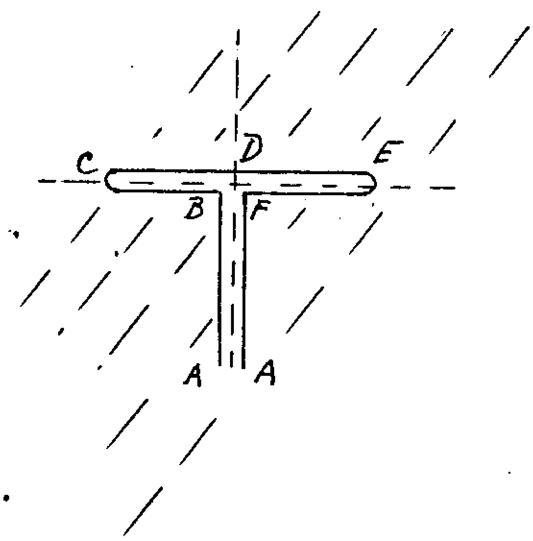
$$|f(z)| \le M|z|^n \qquad (|z| < 1).$$

Bewijs dit.

61. Bepaal de conforme afbeelding $g(w)$ die het bovenhalfvlak $\mathrm{Im}\, w > 0$ conform afbeeldt op het gebied G_z gegeven door de figuur, d.w.z. het gehele z-vlak met uitzondering van de snedes:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\ z = 0,\ \mathrm{Im}\ z \le 0 \\ \mathrm{Im}\ z = 0,\ -1 \le \mathrm{Re}\ z \le 1\ , \end{cases}$$

zodanig dat $w_A = \infty$, $w_D = 0$, $w_F = 1$.



62. Bewijs

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right).$$

Aanwijzing: Integreer de functie $\dfrac{\cot \pi z}{z^2+z+1}$ over een grote rechthoek met middelpunt (0,0).

63. **Noem en bewijs het maximumprincipe en toon aan:**
Als $|f(z)|$ constant is in G, dan is ook $f(z)$ constant in G.

64. Toon aan dat het product $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^z + n + 1}{n^z + n - 1}$ convergeert voor Re $z > 1$ en divergeert voor Re $z < 1$.

65. Bepaal de transformatie, die het binnengebied van de cirkel $|z| = 1$ verminderd met een snede van -1 tot $-a$ $(0 < a < 1)$ overvoert in het binnengebied van $|w| = 1$ zodanig dat $w(0) = 0$ en arg $w'(0) = 0$.

66. a) Bewijs dat er een getal $\delta > 0$ bestaat zodat

$$|\log(1 + x) - x| \le x^2$$

voor alle reële x met $|x| < \delta$.

b) Laat $a_1, a_2, \ldots$ een rij reële getallen zijn zodat Σa_n en Σa_n^2 convergeren. Bewijs dat $\Pi(1 + a_n)$ convergeert.

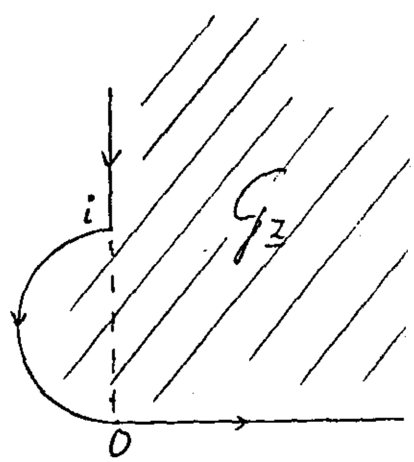
67. a) Bepaal een conforme afbeelding van $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re } w > 0, \text{Im } w > 0\}$ (het eerste kwadrant) op $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (de eenheidscirkel), zodat de punten $0, 1, \infty$ afgebeeld worden op resp. $1, i, -1$.

b) Zij $f : G_z \to G_w$ analytisch en $f(0) = e^{\pi i/4}$. Bewijs dat

$$|1 + if^2(z)| \le |z|\,|1 - if^2(z)|$$

voor alle $z \in G_z$.

68. Geef een conforme afbeelding van het bovenhalfvlak in het w-vlak op de verzameling G_z die de vereniging is van het eerste kwadrant en de cirkelschijf met middelpunt $\frac{1}{2}i$ en straal $\frac{1}{2}$. (zie figuur), zodanig dat ∞, i, 0 worden afgebeeld op resp. ∞, 0, 1.



69. Bereken

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}$$

voor alle reële $a \neq 0$.

70. a) **Formuleer het maximumprincipe voor analytische functies.**

b) Zij $f(z)$ analytisch en niet constant in een begrensd gebied G met rand C en zij $f(z)$ continu in $G+C$. Als $|f(z)|$ constant is op C, dan heeft $f(z)$ tenminste één nulpunt in G; toon dit aan.

71. Bepaal de partieelbreuksplitsing van $f(z) = \dfrac{1}{2\cos \pi z - 1}$.

72. Het gebied G_z in het complexe z-vlak wordt gevormd door het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} z > 0$ verminderd met de snede $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z \geq 1$.
Bepaal, zonder gebruik te maken van de formule van Schwarz-Christoffel, de conforme afbeelding $w = g(z)$ van G_z op $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$ zodanig dat $g(0) = i$, $g(1) = 1$ en $g(i) = -1$.

73. De temperatuurverdeling $T(x,y)$ in het eerste kwadrant van het (x,y)-vlak voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking en voorwaarden:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{voor } x > 0,\ y > 0\ ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \text{voor } 0 < x < 1, \quad T(x,0) = 1 \quad \text{voor } x > 1\ ;$$

$$T(0,y) = 0 \quad \text{voor } y > 0\ ;$$

$$T(x,y) \text{ is begrensd voor } x \geq 0,\ y \geq 0\,.$$

a) Zij $z = x + iy$. Bepaal een conforme afbeelding van het eerste kwadrant $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ op de strook $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w < \tfrac{1}{2}\pi, \operatorname{Im} w > 0\}$.

b) Bepaal, met gebruikmaking van het onder a) gevonden resultaat, de temperatuurverdeling $T(x,y)$. Bepaal in het bijzonder $T(x,0)$ voor $0 < x < 1$, en $T(x,y)$ voor $x^2 + y^2 \to \infty$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

74. Zij de functie $f(z)$ meromorf met polen $a_1,a_2,\ldots$ en bijbehorende hoofddelen $h_1(z),h_2(z),\ldots$. Zij $C_1,C_2,\ldots$ een rij van cirkels met middelpunt 0 en straal $R_1,R_2,\ldots$, zodanig dat

1. $R_n \to \infty$ als $n \to \infty$;

2. op C_n liggen geen polen van $f(z)$;

3. $$\lim_{n\to\infty} \oint_{C_n} \frac{|f(z)|}{|z|}|dz| = 0.$$

Bewijs dan dat

$$f(z) = \sum h_j(z)$$

uniform in ieder compact gebied dat geen polen bevat.

75. De gamma-functie wordt gedefinieerd door

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z}z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1+\tfrac{z}{n})^{-1}\, e^{z/n} ,$$

terwijl $\Psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$.

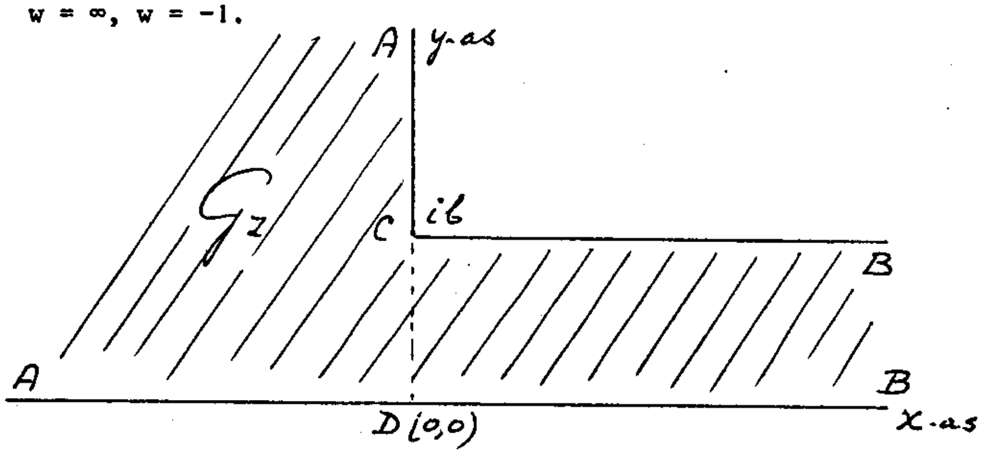
a) Toon aan dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \Psi'(z) .$$

b) Bepaal $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}$ door berekening van $\Psi'(\frac{1}{2})$.

76. Zij $G_z := \{z \in C \mid |z| < 1\}$ en zij G_w het complexe w-vlak verminderd met de snede $\mathrm{Re}\, w \le -\frac{1}{4}$, $\mathrm{Im}\, w = 0$.
Bepaal, zonder gebruik te maken van de formule van Schwarz-Christoffel, de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op G_w zodanig dat $f(-1) = -\frac{1}{4}$, $f(1) = \infty$ en $f(0) = 0$.

77. a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ op het hieronder getekende gebied G_z, zodanig dat de punten A, B, C op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = 0$, $w = \infty$, $w = -1$.



b) Zij $z = x + iy$. Bepaal, met gebruikmaking van het onder a) gevonden resultaat, de functie $\Psi(x,y)$ welke voldoet aan

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \text{ in } G_z ,$$

$\Psi = 0$ op de onderrand ADB van G_z,

$\Psi = \pi$ op de bovenrand ACB van G_z.

Bepaal tevens $\lim_{x\to\infty} \Psi(x,y)$ voor $0 \le y \le b$.

78. **Bewijs het lemma van Schwarz:**

Zij $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$, zij $|f(z)| \le 1$ voor $|z| < 1$ en zij $f(0) = 0$.

Dan is óf $f(z) = ze^{i\theta}$ voor $|z| < 1$, met θ reëel,

óf $|f(z)| < |z|$ voor $0 < |z| < 1$ en $|f'(0)| < 1$.

79. a) Zij de functie $f(z)$ meromorf met eindig veel polen $a_1, a_2, \ldots, a_m$, niet samenvallend met $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Zij C_n het vierkant met hoekpunten $\pm (n + \frac{1}{2}) \pm (n + \frac{1}{2})i$, n geheel positief, en zij

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{\sin \pi z}\, dz = 0$$

Toon dan aan dat

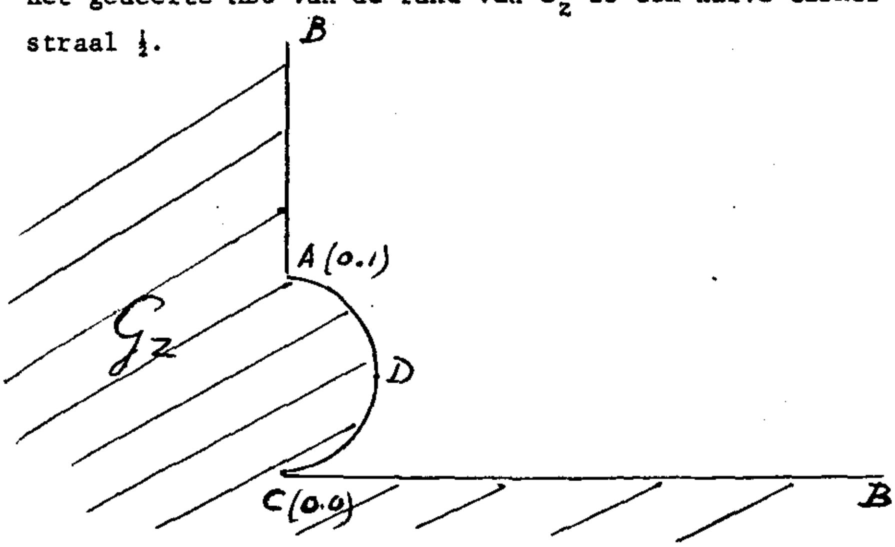
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \left[\operatorname{Res} \frac{f(z)}{\sin \pi z}\right]_{z=a_k} .$$

b) Bereken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} .$$

80. Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ welke het gebied $|z - 2| < 1$ afbeeldt op het gebied $|w - 2i| < 2$, zodanig dat $f(2) = i$ en $\arg f'(2) = \frac{\pi}{2}$.

81. Bepaal de conforme afbeelding van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ op het hieronder getekende gebied G_z, zodanig dat de punten A, B, C op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$.
Het gedeelte ADC van de rand van G_z is een halve cirkel met middelpunt $\frac{1}{2}i$ en straal $\frac{1}{2}$.

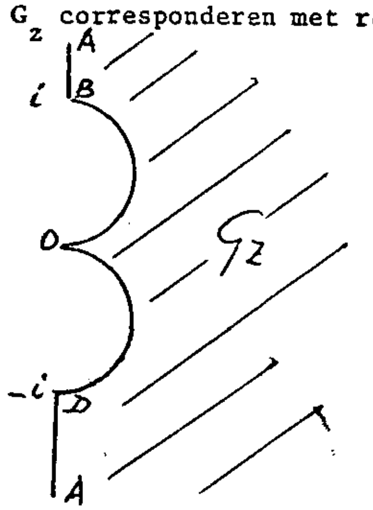


82. Zij $u_j \geq 0$ voor $j = 1,2,3,\ldots$; bewijs dat de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ en de oneindige producten $\prod_{j=1}^{\infty} (1+u_j)$, $\prod_{j=1}^{\infty} (1-u_j)$ alle convergent òf alle divergent zijn.

83. Toon aan dat

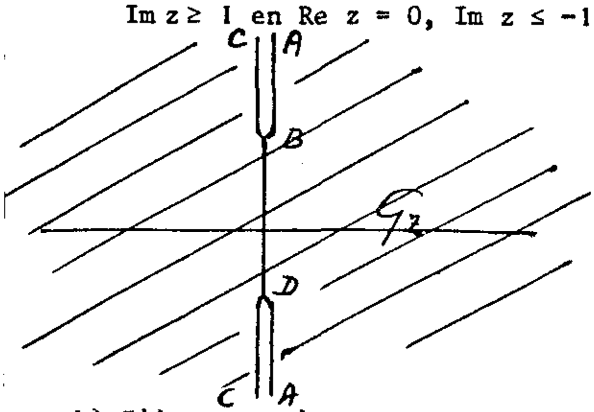
$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(3-\cos x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4\sqrt{\pi}} .$$

84. Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ welke het hieronder getekende gebied G_z afbeeldt op het gebied G_w: $|w| > 1$, zodanig dat de punten A, B, D op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = i$, $w = 1$, $w = -1$.



De gedeelten AB en DA van de rand van G_z vallen langs de imaginaire as; de gedeelten BC en CD van de rand van G_z zijn halve cirkels met middelpunt resp. $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}i$ en straal $\frac{1}{2}$.

85. a) Zij G_z het gehele complexe z-vlak met uitzondering van de sneden $\mathrm{Re}\, z = 0$, $\mathrm{Im}\, z \geq 1$ en $\mathrm{Re}\, z = 0$, $\mathrm{Im}\, z \leq -1$; zie figuur. Bepaal de conforme afbeelding



$z = g(w)$ die het bovenhalfvlak $\mathrm{Im}\, w > 0$ afbeeldt op G_z, zodanig dat de punten A, B, C op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$. Bepaal tevens de inverse van deze conforme afbeelding.

b) Zij $z = x + iy$. Bepaal, met gebruikmaking het onder a) gevonden resultaat, de functie $\Phi(x,y)$ welke harmonisch en begrensd is in G_z en voldoet aan $\Phi(0,y) = 0$ voor $y \geq 1$, $\Phi(0,y) = \pi$ voor $y \leq -1$.
Bepaal tevens $\Phi(0,y)$ voor $-1 \leq y \leq 1$.

86. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$ en zij $f'(z_0) \neq 0$. Bewijs dat de functie $w = f(z)$ in een omgeving van $w_0 := f(z_0)$ een inverse functie $z = g(w)$ heeft, en dat $g(w)$ analytisch is in die omgeving.

87. Toon aan dat

$$\int_0^1 \frac{x^{-\alpha} + x^{\alpha-1}}{1 + x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha},$$

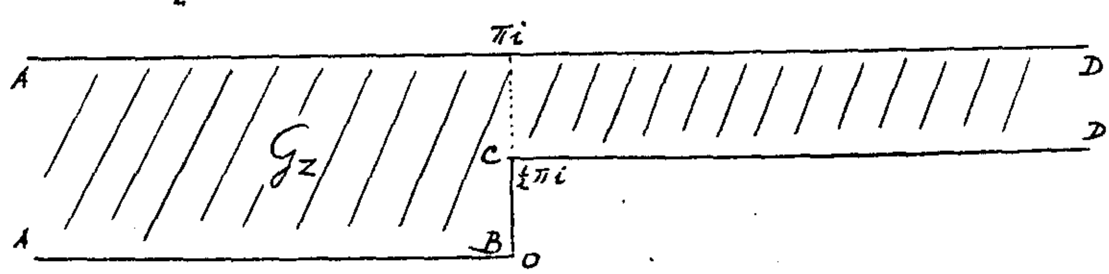
waarbij $0 < \alpha < 1$.

88. Zij $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1,\ |z - 1| < \frac{5}{2}\}$, d.w.z. G_z is het gebied tussen de cirkels C_1: $|z| = 1$ en C_2: $|z - 1| = \frac{5}{2}$.

a) Bepaal een conforme afbeelding $w = f(z)$ welke G_z afbeeldt op een ringvormig gebied $1 < |w| < R$; bepaal tevens de waarde van R.
Aanwijzing: Bepaal eerst een puntenpaar z_1, z_2 dat gespiegeld ligt zowel t.o.v. C_1 als t.o.v. C_2.

b) Zij $z = x + iy$. Bepaal, met gebruikmaking van het onder a) gevonden resultaat, de functie $\varphi(x,y)$ die harmonisch is in G_z en voldoet aan $\varphi = 0$ op C_1, $\varphi = 1$ op C_2.

89. a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $C_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$ op het hieronder getekende gebied G_z, zodanig dat de punten B, C, D op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = \infty$, $w = 0$, $w = 1$.



b) Werk de afbeeldingsfunctie $g(w)$ nader uit op de reële as van het w-vlak.

90. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van het halfvlak $\text{Im } z > 0$ op de cirkelschijf $|w| < 1$, zodanig dat $f(i) = 0$ en $f'(i) > 0$.

a) Bepaal een $f(z)$ die deze eigenschappen heeft.

b) Bewijs dat er slechts één $f(z)$ is met deze eigenschappen.

91. a) Bepaal de partieelbreuksplitsing van de functie $\dfrac{e^z}{e^z - 1}$.

b) Bepaal de productontwikkeling van de functie $e^z - 1$.

92. Zij $G_z = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

a) Bepaal een conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op het halfvlak $G_w = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, w > 0\}$, zodanig dat de punten $z = -1$, $z = 1$ corresponderen met resp. $w = \infty$, $w = 0$.

b) Zij $z = x + iy$. Bepaal, met gebruikmaking van het onder a) gevonden resultaat, de oplossing $V(x,y)$ van het volgende potentiaalprobleem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \text{ in } G_z\ , \\ V(x,y) = 1 \quad \text{voor } x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\ , \\ V(x,0) = 0 \quad \text{voor } |x| > 1\ , \\ V(x,y) \text{ is begrensd in } G_z\ . \end{cases}$$

93. De conforme afbeelding $z = g(w)$ beeldt het halfvlak $\mathrm{Im}\, w > 0$ af op het gebied G_z in het complexe z-vlak. Van de functie $g(w)$ is gegeven

$$g(0) = 0,\ g'(w) = \frac{1}{\sqrt{w}\sqrt{1 - w^2}}\ ,$$

waarin $\sqrt{w}$, $\sqrt{1 - w^2}$ de hoofdwaarde van de betreffende wortelvorm voorstelt. Bepaal G_z.

94. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met eindig veel polen $z = a_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, en zij $h_j(z)$ het hoofddeel van $f(z)$ in a_j. Dan is $f(z)$ voor te stellen door

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{n} h_j(z),$$

waarbij $g(z)$ een gehele functie is.

a) Toon aan dat

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

waarbij C een enkelvoudige gesloten weg is die de punten z en a_j, $j = 1,2,\ldots,n$, omsluit.

b) Toon aan dat $g(z)$ een polynoom is dan en slechts dan als $f(z)$ rationaal is.

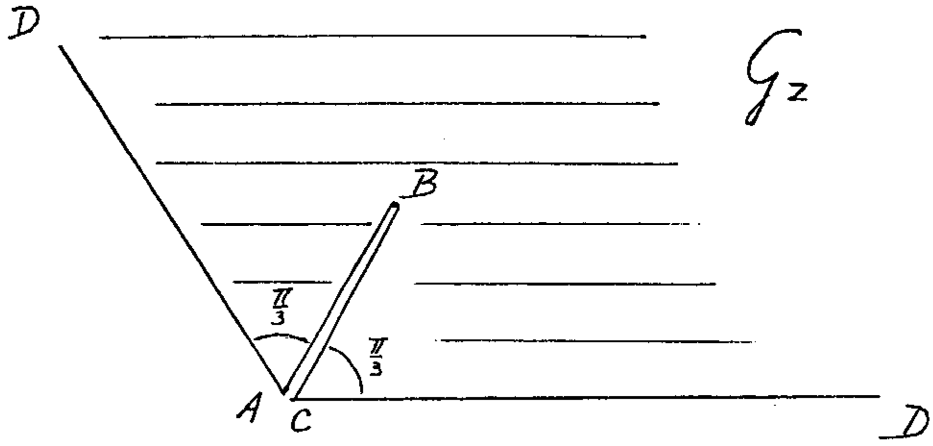
95. Toon aan dat

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(a-x)^{p+q}}\,dx = \frac{B(p,q)}{a^q(a-1)^p},$$

waarbij $a > 1$, $p > 0$, $q > 0$.

96. Zij $G_z = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1,\ \text{Im } z < 1\}$.
Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op het halfvlak $G_w = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0$
zodanig dat $f(-3i) = 1 + i$, $\arg f'(-3i) = \pi$.

97. Laat G_z het gebied in het complexe z-vlak zijn gevormd door de sector $0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}$, met uitzondering van de snede $z = re^{\pi i/3}$, $0 \le r \le 1$; zie onderstaande figuur.



De punten A, B, C, D worden gegeven door resp. $z = 0$; $z = e^{\pi i/3}$; $z = 0$; $z = \infty$.

a) Bepaal de conforme afbeelding van G_z op $G_w = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$, zodanig dat de punten A, C, D op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = -1$, $w = 1$, $w = \infty$.

b) Zij $z = x + iy$. Bepaal de functie $\varphi(x,y)$ welke voldoet aan

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \text{ in } G_z,$$

φ is begrensd in G_z,

$\varphi = 0$ op AD en op CD,

$\varphi = 1$ op ABC.

Bepaal in het bijzonder $\varphi(x,y)$ voor $x + iy = re^{\pi i/3}$, $r > 1$, d.i. op het verlengde van AB.

98. Bepaal de partieelbreuksplitsing van de functie $f(z) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$.

99. Zij de functie $h(z)$ gedefinieerd door

$$h(x) = \int_x^{x+1} \log \Gamma(t)dt, \ x \geq 0 .$$

a) Bereken $h'(x)$.

b) Toon aan dat

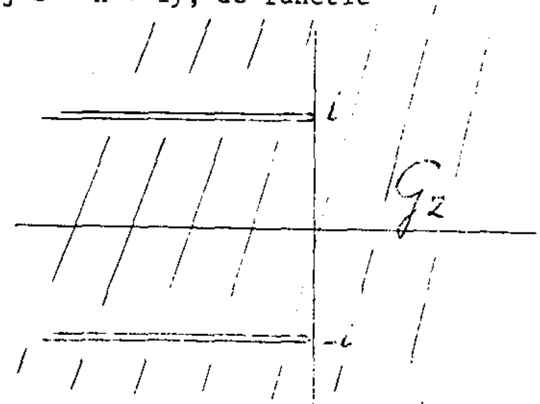
$$h(x) = h(0) + x \log x - x .$$

c) Bepaal $h(0)$, door gebruik te maken van de asymptotische ontwikkeling voor $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}[1 + O(x^{-1})], \ (x \to \infty) .$$

100. Zij $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$, zodanig dat de punten $z = 1$, $z = i$, $z = -1$ corresponderen met resp. $w = 1$, $w = i$, $w = -1$.

101. Zij G_z het gehele complexe z-vlak met uitzondering van de snedes $\operatorname{Re} z \leq 0$, $\operatorname{Im} z = 1$ en $\operatorname{Re} z \leq 0$, $\operatorname{Im} z = -1$; zie figuur. Zij $z = x + iy$; de functie $\Phi(x,y)$ is harmonisch en begrensd in G_z en voldoet aan $\Phi(x,1) = 1$ voor $x \leq 0$, $\Phi(x,-1) = -1$ voor $x \leq 0$.



a) Bepaal een conforme afbeelding $z = g(w)$ die het complexe w-vlak met snede $\operatorname{Re} w \leq 0$, $\operatorname{Im} w = 0$ afbeeldt op G_z, zodanig dat de rechte $\operatorname{Im} z = 0$ correspondeert met de halfrechte $\operatorname{Re} w \geq 0$, $\operatorname{Im} w = 0$.

b) Bepaal $\Phi(x,y)$, met gebruikmaking van het onder a) gevonden resultaat.

c) Laat r, θ poolcoördinaten zijn t.o.v. het punt $z = i$, d.w.z. $x = r \cos \theta$, $y = 1 + r \sin \theta$, $-\pi < \theta < \pi$. Toon aan dat in een omgeving van $z = i$ geldt

$$\Phi(x,y) = 1 + Cr^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2}\theta + O(r), \ (r \to 0)$$

en bepaal de constante C.

102. Toon aan dat iedere conforme afbeelding $w = f(z)$ van de cirkelschijf $|z| < 1$ op de cirkelschijf $|w| < 1$ gebroken lineair is.

103. a) Leid af dat

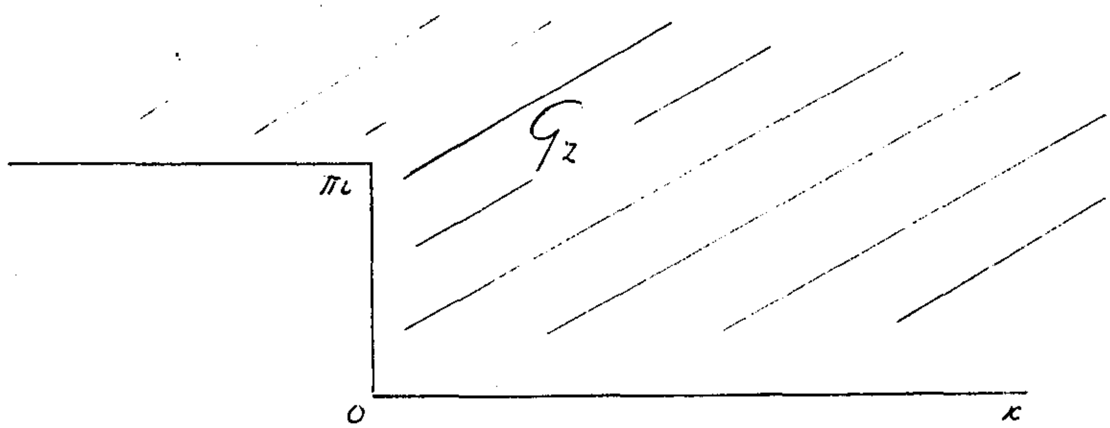
$$\psi(\tfrac{1}{2}) = -\gamma - 2\log 2 \,.$$

b) Bereken de integraal

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin\varphi)d\varphi \,.$$

104. Zij $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < \frac{\pi}{2}\}$ en zij G_w de cirkelschijf $|w| < 1$ verminderd met de snede $-1 \le \mathrm{Re}\, w \le 0$, $\mathrm{Im}\, w = 0$. Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op G_w, zodanig dat $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f(\infty) = -1$.

105. Zij $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid (\mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0) \vee (\mathrm{Re}\, z \le 0, \mathrm{Im}\, z > \pi)\}$; zie figuur.



a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, w$ op G_z, zodanig dat de punten $z = \pi i$, $z = 0$, $z = \infty$ corresponderen met resp. $w = -1$, $w = 1$, $w = \infty$.

b) Geef speciale voorstellingen voor de functie $g(w)$ op de verschillende delen van de reële as van het w-vlak.

c) Bepaal het gedrag van de afbeelding $z = g(w)$ en van de inverse afbeelding $w = f(z)$ in de omgeving van $w = 1$ resp. van $z = 0$.

106. Zij $f(z)$ analytisch voor Re $z > 0$, zij $|f(z)| \le 1$ voor Re $z > 0$ en zij $f(1) = 0$.

Toon aan dat

$$|f(z)| \le \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \text{ voor Re } z > 0.$$

107. Voor de gamma-functie geldt de eigenschap

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

a) Bewijs de multiplicatieve formule

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{3})\Gamma(z+\tfrac{2}{3}) = 2\pi\ 3^{\frac{1}{2}-3z}\ \Gamma(3z).$$

b) Geef de overeenkomstige formule voor $\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z)$.

108. a) Zij G_z het gehele complexe z-vlak met uitzondering van het rechte lijnsegment van $z = -1$ naar $z = 1$. Zij G_w het gehele complexe w-vlak met uitzondering van het rechte lijnsegment van $w = -i$ naar $w = i$. Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op G_w, zodanig dat $f(\infty) = \infty$ en $\arg(f'(\infty)) = \pi - \alpha$; hierbij is $0 < \alpha < \pi$.

Aanwijzing: Beeld eerst G_z conform af op het gebied $|s| > 1$ en G_w op het gebied $|t| > 1$.

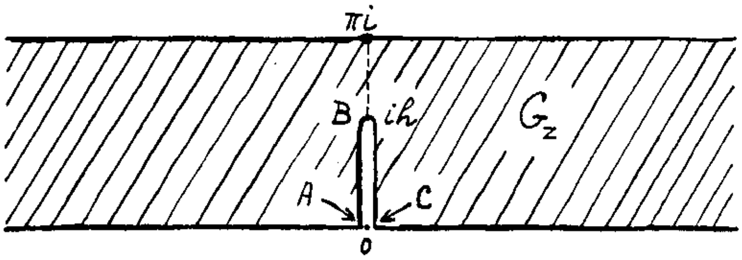
b) Zij $z = x+iy$. Een geaarde geleidende plaat, geplaatst langs het lijnsegment $-1 \le x \le 1$, $y = 0$, bevindt zich in een homogeen electrostatisch veld met veldsterkte E_0 en gericht onder de hoek α met de positieve x-as. De potentiaal $\Phi(x,y)$ van het totale electrostatische veld is dan oplossing van het volgende probleem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \text{ buiten de plaat, i.e., in } G_z, \\ \Phi(x,0) = 0 \text{ voor } -1 \le x \le 1, \\ \Phi(x,y) \sim \Phi_0(x,y) = -E_0(\,x\cos\alpha + y\sin\alpha) \text{ voor } x^2+y^2 \to \infty; \end{cases}$$

hierin is $\Phi_0(x,y)$ de potentiaal van het homogene electrostatische veld.

Verifieer dat $\Phi(x,y) = E_0 \text{ Re } f(z)$.

109. Zij G_z de strook $0 < \text{Im } z < \pi$ in het complexe z-vlak, verminderd met de snede $\text{Re } z = 0$, $0 \le \text{Im } z \le h$, waarbij $0 < h < \pi$; zie figuur.



a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$ op G_z, zodanig dat de punten A,B,C op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = -1$, $w = 0$, $w = 1$.

b) Werk de afbeeldingsfunctie $g(w)$ nader uit op de verschillende delen van de reële as van het w-vlak.

110. Bewijs de volgende variant van het lemma van Schwarz:
Zij $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$, zij $|f(z)| \le 1$ voor $|z| < 1$, en zij $f(a) = 0$ voor zekere a met $|a| < 1$. Dan geldt

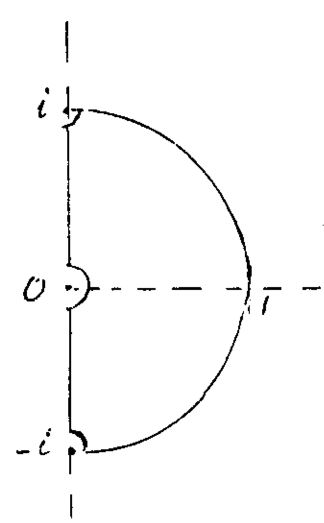
$$|f(z)| \le \left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| \quad \text{voor } |z| < 1 \ .$$

111. Toon aan dat

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^a \cos(b\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{2^{a+1}} \frac{\Gamma(1 + a)}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)\Gamma(1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)} \ , \text{ Re } a > -$$

Aanwijzing: Beschouw de integraal

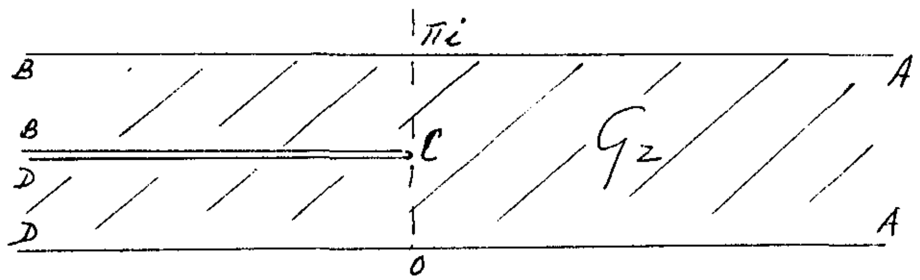
$$\int_C (z + \frac{1}{z})^a z^{b-1} dz \ , \qquad b > a > -1 \ ,$$



waarbij de contour C bestaat uit de halve cirkel $|z| = 1$ in het halfvlak $\text{Re } z \ge 0$ en het lijnstuk $[i,-i]$ langs de imaginaire as, onderbroken door cirkelboogjes met straal δ om de punten $0,i,-i$; zie figuur.
Werk de integraal uit en neem de limiet voor $\delta \to 0$.

112. Zij $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid (|z-i| > \sqrt{2},\ \text{Im } z \geq 0) \vee (|z+i| > \sqrt{2},\ \text{Im } z < 0)\}$, en zij G_w het gehele complexe w-vlak met uitzondering van de snede $-1 \leq \text{Re } w \leq 1$, $\text{Im } w = 0$. Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op G_w, zodanig dat $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

113. Zij G_z de strook $0 < \text{Im } z < \pi$ in het complexe z-vlak, verminderd met de snede $\text{Re } z \leq 0$, $\text{Im } z = \frac{\pi}{2}$; zie onderstaande figuur.



De punten A,B,C,D worden gegeven door resp. $z = \infty$, $z = \infty$, $z = \pi i/2$, $z = \infty$.

a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$ op G_z, zodanig dat de punten A,B,D op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = \infty$, $w = -1$, $w = 0$. Bepaal tevens de inverse van deze conforme afbeelding.

b) Zij $z = x + iy$. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking en randvoorwaarden:

$$\begin{cases} \Delta T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ in het gebied } G_z\ ; \\ T(x,y) \text{ is begrensd in } G_z; \\ T(x,\pi) = 0 \text{ voor } -\infty < x < \infty; \\ T(x,\frac{\pi}{2}) = 1 \text{ voor } x \leq 0, \text{ i.e. langs de snede BCD;} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 \text{ voor } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Bepaal $T(x,0)$ en geef de eerste term van de ontwikkeling van $T(x,0)$ voor $x \to +\infty$.

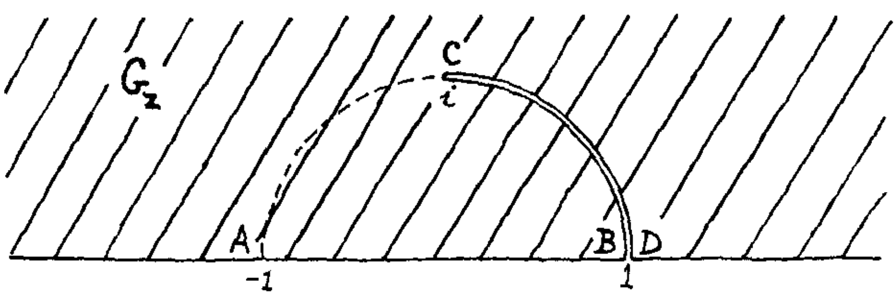
114. Zij $u_n \geq 0$ voor $n = 1,2,3,\ldots$; bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ en het oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ òf beide convergent òf beide divergent zijn.

115. Onderzoek de convergentie van de integraal

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} \log|1-x|\,dx, \quad s \text{ complex},$$

en bereken deze integraal.

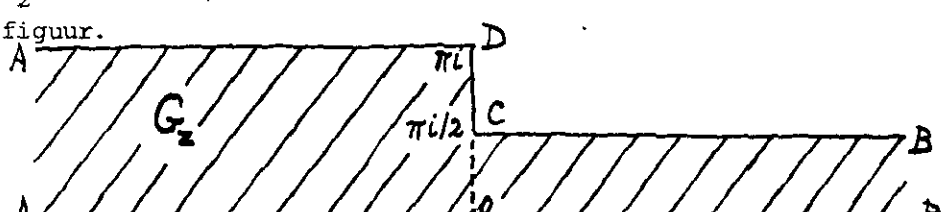
116. Zij G_z het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} z > 0$ met uitzondering van de cirkelboog $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$; zie figuur.



a) Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$, zodanig dat de punten A,C,D op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = -1$, $w = 0$, $w = 1$.
Aanwijzing: Inverteer eerst ten opzichte van $z = -1$.

b) Bepaal het beeld van het punt B en van de cirkelboog CA: $z = e^{i\theta}$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, onder de afbeelding $w = f(z)$.

117. Zij $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re} z \geq 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2) \vee (\operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi)\}$; zie figuur.



a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ op G_z, zodanig dat de punten A,C,D op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = 1$, $w = \infty$, $w = 0$.

b) Werk de afbeeldingsfunctie $g(w)$ nader uit op de reële as van het w-vlak.

118. a) Leid af dat

$$\psi(\tfrac{1}{2}) = -\gamma - 2\log 2 \ .$$

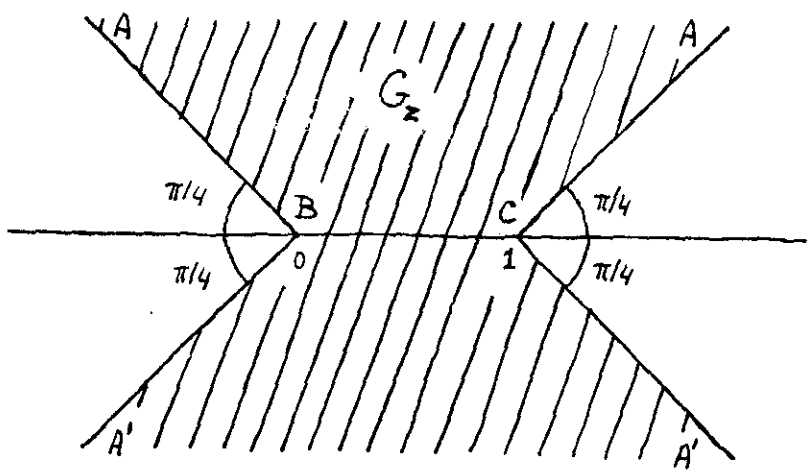
b) Bereken de integraal

$$\int_0^\infty xe^{-ax}\left(1 - e^{-2x}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

voor $a = 1$.

119. Zij $G_z = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \tfrac{1}{2}i| > \tfrac{1}{2},\ |z + \tfrac{1}{2}i| > \tfrac{1}{2}\}$.
Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op $G_w = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$, zodanig dat $f(\infty) = \infty$ en $\arg f'(\infty) = \alpha$; geef voor $f(z)$ een expliciete voorstelling van zo eenvoudig mogelijke vorm.
Bepaal het beeld van de punten $z = i$, $z = -i$, $z = 0$ op de rand van G_z, onder deze afbeelding.

.20. Zij $G_z = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < 3\pi/4,\ |\arg(1 - z)| < 3\pi/4\}$; zie figuur.



De punten A, A', B, C worden gegeven door resp. $z = \infty$, $z = \infty$, $z = 0$, $z = 1$.
Zij G_w het gehele complexe w-vlak met uitzondering van de snedes $\mathrm{Re}\, w \le 0$, $\mathrm{Im}\, w = 0$ en $\mathrm{Re}\, w \ge 1$, $\mathrm{Im}\, w = 0$.

a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van G_w op G_z, zodanig dat de punten A,B,C op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = \infty$, $w = 0$, $w = 1$.

b) Zij $z = x + iy$. De potentiaal $\varphi(x,y)$ van een electrostatisch veld voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking en randvoorwaarden:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \text{ in } G_z \ ;$$

$\varphi(x,y)$ is begrensd in G_z ;

$\varphi = -1$ op ABA' ;

$\varphi = 1$ op ACA' .

Stel $\varphi(x,y) = \operatorname{Re} \Omega(z)$ en bepaal de complexe potentiaal $\Omega(z)$.

c) De veldsterkte $\underline{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ hangt eenvoudig samen met de afgeleide $d\Omega/dz$. Toon aan dat in een omgeving van $z = 0$ geldt

$$\frac{d\Omega}{dz} = Kz^{-1/3} + O(z), \qquad (z \to 0)$$

en bepaal de constante K.

121. a) Bewijs de volgende stelling:

Zij $f(z)$ een meromorfe functie met aftelbaar veel enkelvoudige polen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, alle $\neq 0$, met bijbehorende residuen $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Zij $C_1, C_2, C_3, \ldots$ een rij van Jordankrommen zodanig dat op C_n geen polen van $f(z)$ liggen, en dat $R_n = \min_{z \in C_n} |z| \to \infty$ als $n \to \infty$. Zij voorts

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{|f(t)|}{|t|^2} |dt| = 0 \ .$$

Dan geldt

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n} \frac{r_n}{z - a_n} \ .$$

b) Bepaal, door toepassing van de stelling onder a) of op andere wijze, de partieelbreuksplitsing van de functie

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \ .$$

122. De hypergeometrische functie $F(a,b;c;z)$ wordt gedefinieerd door de machtreeks

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\ n!} z^n .$$

a) Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.

b) Toon aan dat

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt = F(a,b;c;z) ,$$

geldig voor $\mathrm{Re}\ c > \mathrm{Re}\ b > 0$, $|z| < 1$.

c) Bepaal met gebruikmaking van het resultaat onder b), de waarde van $F(a,b;c;1)$.

123. Bewijs de volgende stelling:
Zij $f(z)$ analytisch voor $|z-z_0| < \Delta$, zij $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z-z_0| < \Delta$, zij $f(z_0) = w_0$, en zij $f'(z_0) \neq 0$. Dan is er een $\varepsilon > 0$, zo dat in $|w-w_0| < \varepsilon$ een analytische functie $g(w)$ bestaat die de inverse is van $f(z)$, d.w.z. $f(g(w)) = w$.

124. Zij $G_z := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0,\ |z-i| > a\}$ waarbij $0 < a < 1$.

a) Bepaal een conforme afbeelding $w = f(z)$ welke G_z afbeeldt op een ringvormig gebied $R < |w| < 1$; bepaal tevens de waarde van R.
Aanwijzing: Bepaal eerst een puntenpaar z_1, z_2 dat gespiegeld ligt zowel t.o.v. $\mathrm{Im}\ z = 0$ als t.o.v. $|z-i| = a$.

b) Zij $z = x+iy$. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking en randvoorwaarden:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ in het gebied } G_z;$$

$T(x,y)$ is begrensd in G_z;

$T = 0$ voor $\mathrm{Im}\ z = 0$;

$T = 1$ voor $|z-i| = a$.

Bepaal $T(x,y)$.

125. De conforme afbeelding $z = g(w)$ beeldt het halfvlak $\operatorname{Im} w > 0$ af op het gebied G_z in het complexe z-vlak. Van de functie $g(w)$ is gegeven

$$g(0) = \pi i, \quad g'(w) = \frac{1}{2} \frac{w+1}{(w-1)\sqrt{w}},$$

waarin $\sqrt{w}$ de hoofdwaarde van de wortel voorstelt.

a) Bepaal het gebied G_z en de functie $g(w)$.

b) Werk de functie $g(w)$ nader uit op de reële as van het w-vlak.

126. De integraal $I(p,q)$ wordt gegeven door

$$I(p,q) = \int_1^{\infty} t^{-p}(t-1)^{q-1} \log t \, dt, \qquad p \text{ en } q \text{ reëel.}$$

a) Voor welke waarden van p en q convergeert de integraal $I(p,q)$?

b) Druk $I(p,q)$ uit in Γ- en ψ-functies.

c) Bereken $I(p,0)$.

127. a) Zij $f(z)$ een meromorfe functie met een eindig aantal polen $a_1, a_2, \ldots, a_m$, niet samenvallend met $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Laat C_n het vierkant zijn met hoekpunten $\pm(n + \frac{1}{2}) \pm (n + \frac{1}{2})i$, $n \in \mathbb{N}$, en zij voorts

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f(z)\cot(\pi z)\, dz = 0 .$$

Toon aan dat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=a_k} [f(z)\cot(\pi z)] .$$

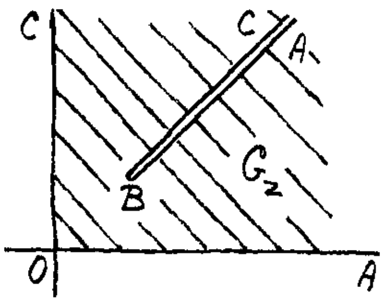
b) Bereken met gebruikmaking van het resultaat onder a), de som van de reeks

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}, \quad a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

c) Leid uit het voorgaande resultaat af dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

128. Zij G_z het eerste kwadrant van het z-vlak, verminderd met de snede $z = re^{i\pi/4}$, $r \geq 1$; zie figuur.
De punten O, A, B, C worden gegeven door resp. $z = 0$, $z = \infty$, $z = e^{i\pi/4}$, $z = \infty$.



a) Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$, zodanig dat de punten A, B, C op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = -1$, $w = 0$, $w = 1$.
Aanwijzing: Pas eerst een afbeelding $t = z^4$ toe op G_z.

b) Zij $z = x + iy$. De stationaire temperatuursverdeling $T(x,y)$ voldoet aan

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ in } G_z ,$$

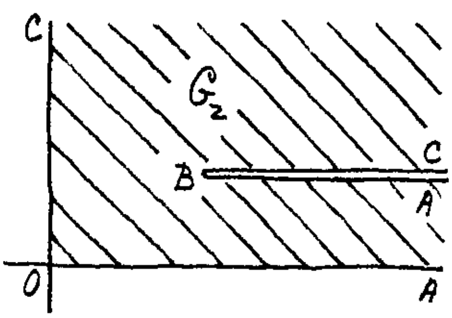
T is begrensd in G_z ,

T = 0 op OA en op OC ,

T = 1 op ABC .

Bepaal in het bijzonder $T(x,y)$ voor $x + iy = re^{i\pi/4}$, $0 \leq r \leq 1$, d.i. op het lijnstuk OB.

129. Zij G_z het eerste kwadrant van het z-vlak, verminderd met de snede $\text{Re } z \geq a$, $\text{Im } z = b\pi$, waarbij $a > 0$, $b > 0$; zie figuur.
De punten O, A, B, C worden gegeven door resp. $z = 0$, $z = \infty$, $z = a + ib\pi$, $z = \infty$.



a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$ op G_z, zodanig dat de punten O, A, C op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$.

b) Kies a en b zodanig dat het punt B op de rand van G_z correspondeert met $w = 4$, en werk de afbeeldingsfunctie $g(w)$ nader uit op de reële as van het w-vlak.

130. a) Leid af dat

$$\psi(\tfrac{1}{2}) = -\gamma - 2\log 2 .$$

b) Bereken de integraal

$$\int_0^{\pi} \log(1+\cos\,\theta)\, d\theta .$$

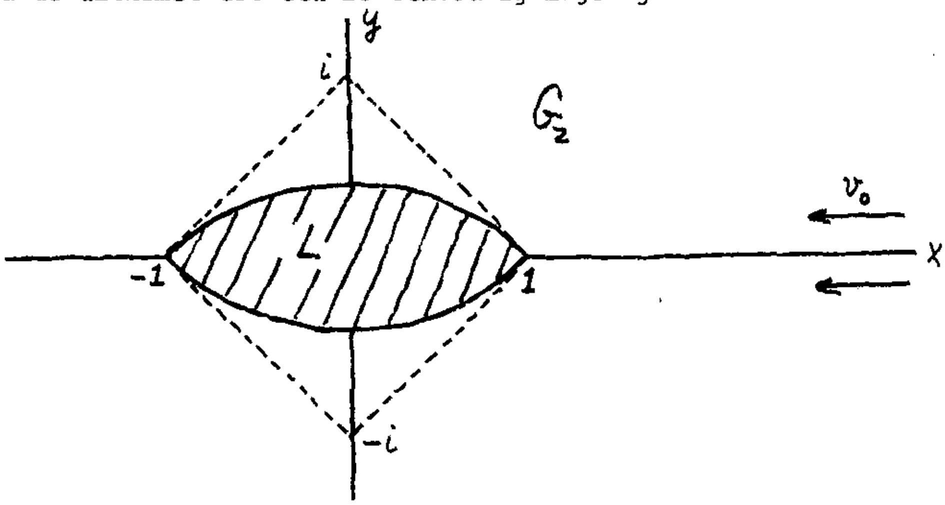
131. a) Formuleer het lemma van Schwarz.

b) Bewijs de volgende stelling:
Zij $f(z)$ analytisch voor $\mathrm{Re}\, z > 0$, zij $|f(z)| \le 1$ voor $\mathrm{Re}\, z > 0$, en zij $f(a) = 0$ voor zekere a met $\mathrm{Re}\, a > 0$. Dan geldt

$$|f(z)| \le \left|\frac{z-a}{z+\bar{a}}\right| \text{ voor } \mathrm{Re}\, z > 0.$$

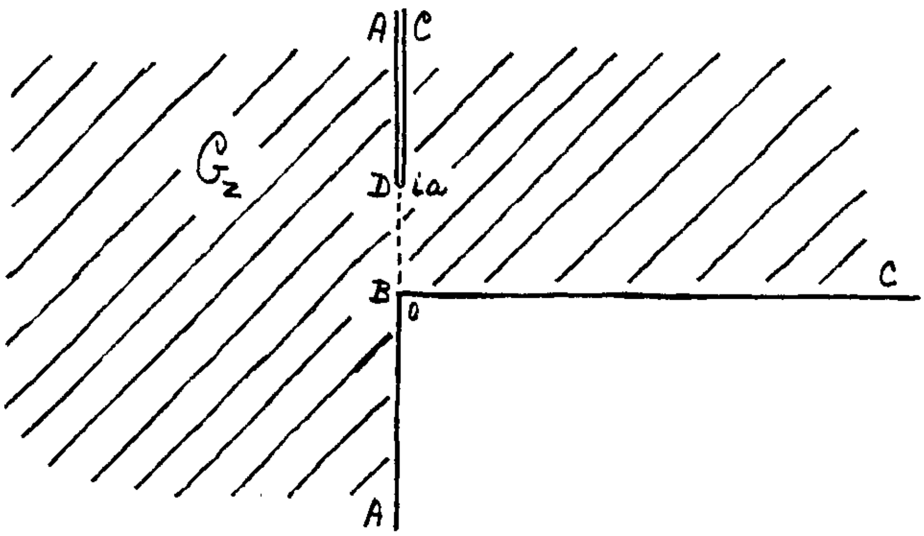
c) Kan de stelling onder b) nog verscherpt worden?

132. a) Zij L een lensvormig gebied in het complexe z-vlak, begrensd door de cirkelbogen $|z-i| = \sqrt{2}$ en $|z+i| = \sqrt{2}$ tussen de punten $z = 1$ en $z = -1$; zie onderstaande figuur. Zij G_z het gebied buiten de rand van L. Zij G_w het gehele complexe w-vlak met uitzondering van de snede $-1 \le \mathrm{Re}\, w \le 1$; $\mathrm{Im}\, w = 0$. Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op G_w, zodanig dat de punten $z = -1$, $z = 1$, $z = \infty$ corresponderen met resp. $w = -1$, $w = 1$, $w = \infty$. Herleid de uitkomst tot een zo eenvoudig mogelijke vorm.



b) De "lens" L wordt geplaatst in een rotatievrije incompressibele stroming. Zij $z = x + iy$, dan wordt de stroomsnelheid $\underline{v} = \underline{v}(x,y)$ afgeleid uit een snelheidspotentiaal $\varphi(x,y)$ volgens $\underline{v} = -\operatorname{grad} \varphi$. Deze snelheidspotentiaal φ is op te vatten als het reële deel van een complexe potentiaal $\Omega(z)$. Ver van L heerst de ongestoorde stroming met snelheid v_0 evenwijdig aan de negatieve x-as, i.e. $\underline{v} \approx (-v_0, 0)$ als $x^2 + y^2 \to \infty$; zie figuur aan ommezijde. Bepaal de complexe potentiaal $\Omega(z)$ en bereken de stroomsnelheid $\underline{v}$ in het punt $z = i(\sqrt{2} - 1)$.

133. Zij G_z de sector $0 < \arg z < 3\pi/2$ in het complexe z-vlak, verminderd met de snede $\operatorname{Re} z = 0; \operatorname{Im} z \geq a$, waarbij $a > 0$; zie onderstaande figuur.



De punten A,B,C,D worden gegeven door resp. $z = \infty$, $z = 0$, $z = \infty$, $z = ia$. Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ op G_z, zodanig dat de punten A,B,C op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = -1$, $w = 0$, $w = \infty$.

Werk de functie $g(w)$ nader uit op de reële as van het w-vlak.

134\. a) Formuleer en bewijs het maximum-modulus principe voor analytische functies.

b) Formuleer en bewijs een soortgelijk principe voor het minimum van $|f(z)|$ als $f(z)$ analytisch en niet constant is in een gebied G.

135\. a) Toon aan dat

$$\int_0^\infty e^{-t}(t - x)t^{x-1}\log t\, dt = \Gamma(x) \quad , \; x > 0.$$

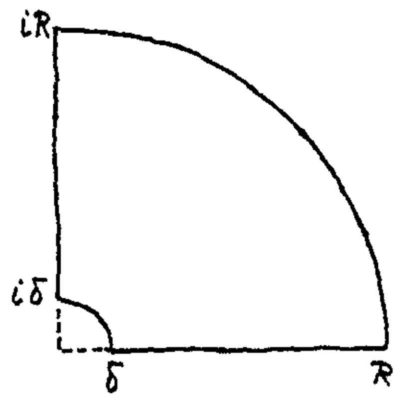
b) Toon aan dat

$$\int_0^\infty t^{p-1}\sin t\, dt = \Gamma(p)\sin(\tfrac{\pi p}{2}) \quad , \; 0 \le p < 1 \; .$$

Aanwijzing: Beschouw de integraal

$$\int_C z^{p-1}e^{-z}dz \; ,$$

waarbij de contour C bestaat uit de kwartcirkels $|z| = \delta$ en $|z| = R$ in het eerste kwadrant, en de lijnstukken $[\delta,R]$ en $[i\delta,iR]$ langs de reële resp. imaginaire as; zie nevenstaande figuur.

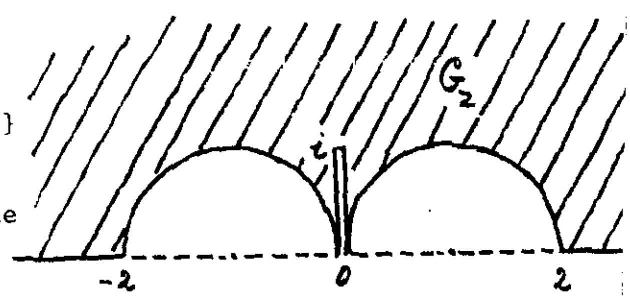


Werk de integraal uit en neem de limiet voor $\delta \downarrow 0$ en $R \to \infty$.

c) Bereken de integraal

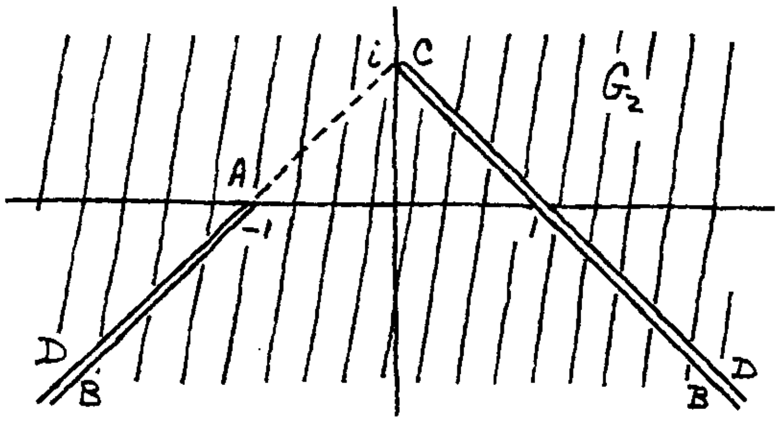
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\log t\, dt.$$

136\. Zij G_z het gebied gevormd door $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0, \; |z + 1| > 1, \; |z - 1| > 1\}$ met uitzondering van de snede $\operatorname{Re} z = 0, \; 0 \le \operatorname{Im} z \le 1$; zie nevenstaande figuur.



Bepaal de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_z op het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$, zodanig dat $f(2) = -1, \; f(-2) = 1, \; f(\infty) = 0.$ Geef voor $f(z)$ een expliciete voorstelling van zo eenvoudig mogelijke vorm.

137. Zij G_z het gehele complexe z-vlak met uitzondering van de snedes $z = -1 + re^{-3\pi i/4}$, $r \geq 0$ en $z = i + re^{-\pi i/4}$, $r \geq 0$; zie figuur.



De punten A,B,C,D worden gegeven door resp. $z = -1$, $z = \infty$, $z = i$, $z = \infty$.

a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ op G_z, zodanig dat de punten A,B,D op de rand van G_z corresponderen met resp. $w = 0$, $w = \frac{1}{4}$, $w = \infty$.

b) Zij $z = x + iy$. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ voldoet aan

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ in } G_z,$$

T is begrensd in G_z,

$T = 0$ op BCD,

$T = 1$ op DAB.

Bepaal $T(x,y)$.

c) Bepaal voorts $\lim\limits_{r\to\infty} T(r\cos\theta, r\sin\theta)$ voor $-3\pi/4 \leq \theta \leq -\pi/4$.