

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

Seminars on

PARTIAL

DIFFERENTIAL EQUATIONS

Prof. Dr. J. Boersma

Jaren 60

Inhoudsbeschrijving

Seminars on Partial Differential Equations

J. Boersma
Jaren 60

- 1966 - I Moving source of heat in an infinite plate
- 1966 - II Solution of potential problem by Conformal Mapping
- 1966 - III Solution of Helmholtz problem by the Wiener-Hopf technique
- 1966 - IV A Cauchy-Riemann problem solved by Plemelj's formulae
- 1966 - V The Cauchy problem for a general PDE of 1st in two independent variables
- 1966 - VI Axially symmetric boundary value problems for a potential

- 1968 - III Helmholtz randwaardeprobleem met Wiener-Hopf
- 1968 - IV Randwaardeprobleem opgelost met conforme afbeelding
- 1968 - V Cauchy-Riemann randwaardeprobleem opgelost met theorie Hilbert probleem

- 1970 - I Bewegende warmtebron in oneindige plaat
- 1970 - II Cauchy probleem voor algemene PDV van 1e orde in twee onafhankelijke variabelen

- 1964 - IV Helmholtz probleem op strip opgelost met spiegelen

JdG, 29 Augustus 2005

1. Moving source of heat in an infinite plate

$$\Delta T - T_t = -\delta(x-t)\delta(y), \quad -\infty < x, y < \infty, \quad t > 0.$$

Initial condition: $T(x, y, 0) = 0$

Boundary condition: $T(x, y, t) \rightarrow 0$ voor $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

1.1 Superposition of sources

$$T(x, y, t) = \int_0^t \frac{e^{-[(x-\tau)^2 + y^2]/4(t-\tau)}}{4\pi(t-\tau)} d\tau, \quad t > 0. \quad (1)$$

1.2 Laplace transformation

$$\text{Let } v(x, y, s) = \int_0^\infty e^{-st} T(x, y, t) dt$$

$$\Delta v - sv = -e^{-sx} \delta(y) U(x).$$

$$1.2.1 \quad v(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-s\xi} K_0(\sqrt{s}[(x-\xi)^2 + y^2]) d\xi \quad (2)$$

$$K_0(r\sqrt{s}) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-r^2/4t}}{2t} \right\} dt.$$

By means of the convolution theorem we find (1).

$$1.2.2 \quad \text{Let } w(\lambda, y, s) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} v(x, y, s) dx$$

$$\frac{d^2 w}{dy^2} - (s + \lambda^2)w = -\frac{\delta(y)}{s - i\lambda}.$$

$$w(\lambda, y, s) = \frac{e^{-\sqrt{s+\lambda^2}|y|}}{2(s-i\lambda)\sqrt{s+\lambda^2}}.$$

Remark: We can now transform back with respect to λ and, using the wellknown integral formulae of K_0 , we can find again (2). We shall at first transform back with respect to s .

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{s}|y|}}{\sqrt{s}} \right\} = \frac{e^{-y^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{w\} = \frac{e^{-\lambda^2 t - y^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}} * e^{i\lambda t} = \int_0^t \frac{e^{-\lambda^2 \tau - y^2/4\tau}}{2\sqrt{\pi \tau}} e^{i\lambda(t-\tau)} \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi \tau}}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(x, y, t) &= \int_0^t \frac{e^{-y^2/4\tau}}{2\sqrt{\pi \tau}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau + i\lambda(t-\tau-x)} d\lambda = \\ &= \int_0^t \frac{e^{-[(x+\tau-t)^2 + y^2]/4\tau}}{4\pi \tau} d\tau . \end{aligned}$$

2. Formulae for K_0

$K_0(x)$ satisfies

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0, \quad x > 0.$$

For $x \rightarrow 0$ we have

$$K_0(x) = \log \frac{2}{x} - \gamma + O(x^2 \log x).$$

For $x \rightarrow \infty$ we have

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} (1 + O(x^{-2})).$$

Integral representations

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t} dt, \quad x > 0.$$

$$K_0(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \sinh t - |y| \cosh t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\lambda - |y|\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-|y|\sqrt{1+\lambda^2}}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \cos \lambda x d\lambda .$$

3. Exercises

3.1 Work out the foregoing!

3.2 Determine $T_0(x,y) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t+x,y,t)$.

Find the function which satisfies

$$\Delta T_0 + \frac{\partial T_0}{\partial x} = -\delta(x)\delta(y), \quad T_0 \rightarrow 0 \text{ for } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Show that $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t+x,y,t) = T_0(x,y)$. Give an interpretation of this relation!

Show that

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} [T(t+x,y,t) - T_0(x,y)] = \frac{1}{4\pi} E_1\left(\frac{1}{4}t\right)$$

$$\text{where } E_1(x) = \int_x^\infty e^{-u} \frac{du}{u}, \quad x > 0.$$

How is the behaviour for large and for small t ?

3.3 Solve the following problem by means of reflection:

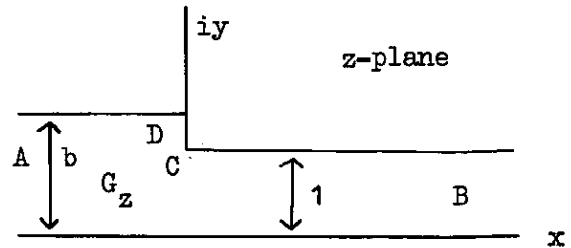
$$\Delta T - T_t = -\delta(x-t)\delta(y), \quad x > 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad t > 0.$$

$$\text{Initial condition : } T(x,y,0) = 0 \quad x > 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

$$\text{Boundary conditions: } T_x(0,y,t) = 0 \quad -\infty < y < \infty, \quad t > 0,$$

$$T(x,y,t) \rightarrow 0 \text{ for } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

1. $\Delta\phi = 0$ in G_z
 $\phi = \pi$ on the upper boundary
 $\phi = 0$ on the lower boundary

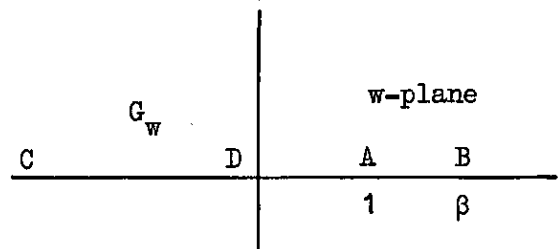


1.1 Solution by means of conformal mapping.

Let $\Omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$.

1.1.1 We map G_z on the upper boundary G_w .

Then we have



$$\frac{dz}{dw} = \frac{C}{\sqrt{w(w-1)}(\beta-w)}$$

C real positive.

Integrating in G_w along a small half part of a circle around $w=1$, we find

$$-\frac{\pi i C}{\beta-1} = -ib \quad \text{or} \quad C = \frac{b}{\pi} (\beta-1).$$

Operating in the same way for $w=\beta$ we find

$$\frac{\pi i C}{\sqrt{\beta(\beta-1)}} = i \quad \text{or} \quad \sqrt{\beta} = b.$$

$$z = \frac{b}{\pi} (b^2 - 1) \int \frac{dw}{\sqrt{w(w-1)}(b^2-w)} = \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}} \right) - \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{b-\sqrt{w}}{b+\sqrt{w}} \right) + C_1 \quad (1)$$

If we take $\sqrt{w} > 0$ and the logarithms real if $1 < w < b^2$ then we have for $0 < w \leq 1$

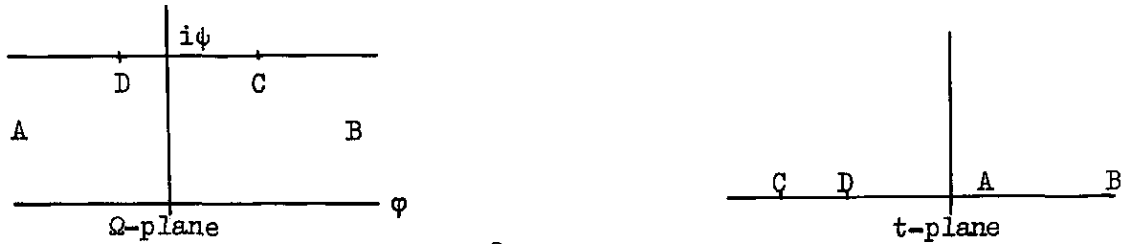
$$z = \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{1-\sqrt{w}}{1+\sqrt{w}} \right) + ib - \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{b-\sqrt{w}}{b+\sqrt{w}} \right) + C_1$$

$w \rightarrow 0$; $z \rightarrow ib$; $C_1 = 0$.

For $-\infty < w < 0$ we find

$$z = -\frac{2ib}{\pi} \arctan(\sqrt{-w}) + ib + \frac{2i}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{-w}}{b}\right).$$

1.1.2 We map G_w on the strip $0 < \text{Im } \Omega < \pi$ in such a way that AB corresponds with $\text{Im } \Omega = 0$ and BCDA with $\text{Im } \Omega = \pi$.



Introducing the variable $t = e^\Omega$ (2)

we find

$$t = \frac{w-1}{b^2-w} \quad (3)$$

Ω is determined as a function of z by (1) (with $C_1 = 0$), (2) and (3).

1.2 Determine $\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} [\varphi(q,y) - \varphi(-p,y) - \frac{\pi}{b}p - \pi q]$

(The change of the resistance caused by the change in width.)

In the neighbourhood of A we have

$$w = 1 + (b^2 - 1)e^\Omega + O(e^{2\Omega})$$

$$\frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}} = \frac{1}{4}(b^2 - 1)e^\Omega + O(e^{2\Omega})$$

$$z = \frac{b}{\pi} \Omega + \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{b^2 - 1}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \log \frac{b+1}{b-1} + O(e^\Omega).$$

$$\Omega = \frac{\pi}{b} z - \log \left(\frac{b^2 - 1}{4} \right) - \frac{1}{b} \log \frac{b+1}{b-1} + O(e^{\pi z/b}).$$

$$\varphi(x,y) = \frac{\pi}{b} x - \log \left(\frac{b^2 - 1}{4} \right) - \frac{1}{b} \log \frac{b+1}{b-1} + O(e^{\pi x/b}), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Analogous in the neighbourhood of B we have

$$\Omega = \pi z + b \log \frac{b+1}{b-1} + \log \left(\frac{b^2 - 1}{4b^2} \right) + O(e^{-\pi z})$$

$$\varphi(x,y) = \pi x + b \log \frac{b+1}{b-1} + \log \left(\frac{b^2 - 1}{4b^2} \right) + O(e^{-\pi x}), \quad x \rightarrow \infty.$$

It follows that

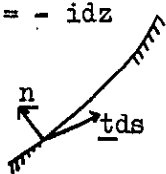
$$\text{Limit} = (b - 2 + \frac{1}{b}) \log \left(\frac{b+1}{b-1} \right) + 2 \log \frac{(b+1)^2}{4b}.$$

1.3 The horizontal force on the upper boundary exerted by a magnetic induction $B = - \text{grad } \phi$.

The force on a part C of the boundary, along which $\phi = \text{const}$, is given by

$$K_x = iK_y = \frac{1}{2} \int_C [(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2] (n_x - in_y) ds = - \frac{i}{2} \int_C |\frac{d\Omega}{dz}|^2 \bar{dz} =$$

$$(n_x - in_y) ds = - i \bar{dz}$$



$$= - \frac{i}{2} \int_C (\frac{d\Omega}{dz})^2 dz \quad (\text{for } d\Omega = \bar{d\Omega} \text{ along } C)$$

$$\int_{ED} \frac{d\Omega}{dz} = - \int_{DABC} \frac{d\Omega}{dz}$$

The integrand is real on horizontal parts.

In the neighbourhood of A: $\frac{dz}{d\Omega} = \frac{b}{\pi} + O(e^{\Omega})$, contribution $\frac{i\pi^2}{b}$.

In the neighbourhood of B: $\frac{dz}{d\Omega} = \frac{1}{\pi} + O(e^{-\Omega})$, contribution $-i\pi^2$.

Hence

$$K_x = -\frac{1}{2} \pi^2 (1 - \frac{1}{b}).$$

2. Exercise

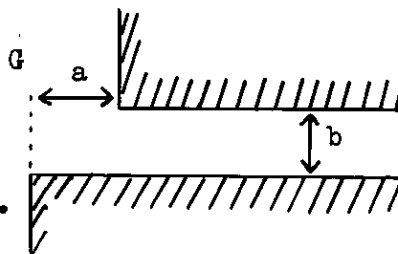
2.1 Solve the following problem by means of conformal mapping:

$$\Delta \phi = 0 \text{ in } G$$

$$\phi = 0 \text{ on the lower boundary}$$

$$\phi = \pi \text{ on the upper boundary}$$

Find the behaviour of ϕ (or Ω) in the neighbourhood of the four edges.



2.2 Let $B = - \text{grad } \phi$ a magnetic induction.

Determine the horizontal forces on the upper and lower boundary.

Determine the difference of this two forces.

1. $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \pi; \quad 0 < k < \frac{1}{2}.$

Boundary conditions: $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$

$\varphi(x, \pi) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$

$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, \pi) = 0, \quad 0 < x < \infty.$

$\varphi = e^{-ikx} + \operatorname{Re} e^{ikx} + O(e^{-\lambda_1 x})$ for $x \rightarrow \infty.$

$\varphi = O(e^{\mu_1 x})$ for $x \rightarrow -\infty$

where $\lambda_1 = \sqrt{1-k^2}, \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{1}{4}-k^2}.$

1.1 Solution by means of the Wiener-Hopf technique

We define:

$$f_1^+(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \varphi(x, \pi) & x > 0 \end{cases}$$

$$f_2^-(x) = \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, \pi) & x < 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

We introduce

$$\Phi(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \varphi(x, y) dx$$

and $F_{1,2}^{+,-}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f_{1,2}^{+,-}(x) dx.$

These transforms exist for $0 < \operatorname{Im} s < \sqrt{\frac{1}{4}-k^2} = \mu_1.$

The problem transforms into

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - (s^2 - k^2)\Phi = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dy}(s, 0) = 0$$

$$\Phi(s, \pi) = F_1^+(s)$$

$$\frac{d\Phi}{dy}(s, \pi) = F_2^-(s)$$

$$\Phi(s, y) = \frac{+i}{s-k} + \frac{Ri}{s+k} + \text{regular in the strip } -\sqrt{1-k^2} < \operatorname{Im} s < \sqrt{\frac{1}{4}-k^2}$$

The last follows from the asymptotic behaviour for $x \rightarrow \pm \infty$.

It follows that

$$\Phi(s, y) = F_1^+(s) \frac{\cosh y \sqrt{s^2 - k^2}}{\cosh \pi \sqrt{s^2 - k^2}}$$

and

$$F_2^-(s) K(s) = F_1^+(s) \quad (2)$$

where

$$K(s) = \frac{\cosh \pi \sqrt{s^2 - k^2}}{\sqrt{s^2 - k^2} \sinh \pi \sqrt{s^2 - k^2}} = \frac{K^*(s)}{s^2 - k^2}.$$

This homogeneous Wiener-Hopf problem has to be solved with the help of the following data

- a. $F_1^+(s)$ is regular for $\text{Im } s > -\lambda_1$ except poles in $\underline{+}k$ with residues given by (1) and $F_1^+(s) = o(1)$ for $|s| \rightarrow \infty$ in this halfplane.
- b. $F_2^-(s)$ is regular for $\text{Im } s < \mu_1$, and $F_2^-(s) = o(1)$ for $|s| \rightarrow \infty$ in this halfplane.

$$\text{Let } M(z) = \sqrt{K^*(0)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + z/\mu_n}{1 + z/\lambda_n} \quad \text{where } \lambda_n = \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \mu_n = \sqrt{(n - \frac{1}{2})^2 - k^2}.$$

This product converges.

$$\text{Then } M(is) M(-is) = K^*(s).$$

Also we have $M(z) = \sqrt{z(1+o(1))}$ for $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \delta$.

Then we can write (2) as follows

$$F_2^-(s) M(is) = (s^2 - k^2) \frac{F_1^+(s)}{M(-is)}$$

The lefthand is analytic for $\text{Im } s < \mu_1$, and the righthand side is analytic for $\text{Im } s > -\lambda_1$.

Further we know the asymptotic behaviour, i.e.

$$\begin{aligned} \text{lefthand side} &= o(s^{\frac{1}{2}}) \quad \text{for } |s| \rightarrow \infty, \quad -\pi \leq \arg s \leq 0, \\ \text{righthand side} &= o(s^{3/2}) \quad \text{for } |s| \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \arg s \leq \pi. \end{aligned}$$

It follows that left and righthand side are equal to a polynomial of zero degree

$$F_2^-(s) = \frac{C}{M(is)}, \quad F_1^+(s) = \frac{CM(-is)}{s^2 - k^2}.$$

From the behaviour of $F_1^+(s)$ at the poles $\underline{+}k$ it follows that

$$C = \frac{2ik}{M(-ik)}$$

$$R = -\frac{M(ik)}{M(-ik)} = -\prod_1^{\infty} \frac{\mu_n + ik}{\mu_n - ik} \cdot \frac{\lambda_n - ik}{\lambda_n + ik} =$$

$$= -\exp\left(2i \sum_1^{\infty} \arctan \frac{\frac{1}{2}k}{n(n-\frac{1}{2}) + k^2}\right).$$

We get

$$\Phi(s, y) = \frac{2ik \cosh y \sqrt{s^2 - k^2}}{M(-ik)M(is) \sqrt{s^2 - k^2} \sinh \pi \sqrt{s^2 - k^2}} \quad (3)$$

$$= \frac{2ik M(-is) \cosh y \sqrt{s^2 - k^2}}{M(-ik)(s^2 - k^2) \cosh \pi \sqrt{s^2 - k^2}} \quad (4)$$

Hence

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} e^{-isx} \Phi(s, y) ds \quad \text{with } 0 < \tau < \mu_1.$$

For $x > 0$ we can shift the path of integration downwards;
(poles $s = \pm k$ and $s = -i\lambda_n$; residues from (3)).

$$\varphi(x, y) = e^{-ikx} + \operatorname{Re} e^{ikx} + \sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos ny.$$

For $x < 0$ we shift the path of integration upwards;
(poles $s = i\mu_n$, residues from (4)).

$$\varphi(x, y) = \sum_1^{\infty} b_n e^{\mu_n x} \cos(n - \frac{1}{2})y.$$

Exercises

1. Work out the foregoing.

Prove the stated properties of $M(z)$.

Determine the coefficients a_n and b_n .

2. a) Consider the case $\frac{1}{2} < k < 1$ and

$$\varphi = e^{-ikx} + R^+ e^{ikx} + O(x^{-\lambda_1 x}) \text{ for } x \rightarrow \infty,$$

$$\varphi = T^- e^{-i|\mu_1|x} \cos \frac{1}{2}y + O(e^{\mu_2 x}) \text{ for } x \rightarrow -\infty.$$

Determine R^+ and T^- .

b) Consider the case $\frac{1}{2} < k < 1$ and

$$\varphi = T^+ e^{ikx} + O(e^{-\lambda_1 x}) \text{ for } x \rightarrow \infty,$$

$$\varphi = (e^{i|\mu_1|x} + R^- e^{-i|\mu_1|x}) \cos \frac{1}{2}y + O(e^{\mu_2 x}) \text{ for } x \rightarrow -\infty.$$

Determine R^- and T^+ .

c) Show that

$$|R^+|^2 + \frac{|\mu_1|}{2k} |T^-|^2 = 1 \text{ and } |R^-|^2 + \frac{2k}{|\mu_1|} |T^+|^2 = 1.$$

Prove these results also by means of Green's theorem:

$$\text{Im} \int_C \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0$$

for every solution of the differentialequation.

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{for } -\infty < x < \infty, \quad y > 0.$$

Boundary conditions:

$$v(x,0) = 0 \quad \text{for } |x| > 1.$$

$$u(x,0) \sin \pi\gamma - v(x,0) \cos \pi\gamma = h(x), \quad \text{for } -1 < x < 1 \\ 0 < \gamma < 1.$$

$$u, v \rightarrow 0 \quad \text{for } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad y \geq 0.$$

$$u, v = O\left(\left((1 \pm x)^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad \text{for } (x, y) \rightarrow (\pm 1, 0), \quad y > 0.$$

1.1. Solution

$\Omega := u - iv$ is an analytic function of $z = x + iy$ in the upper halfplane, for the Cauchy-Riemann relations are satisfied.

Definition:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Omega(z) & \text{for } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \overline{\Omega(\bar{z})} & \text{for } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$$\Phi^+(x) = \Omega(x + i0) = u(x,0) - iv(x,0)$$

$$\Phi^-(x) = \Omega(x + i0) = u(x,0) + iv(x,0).$$

We have $\Phi^+(x) = \Phi(x)$ for $y=0, 1 < |x| < \infty$.

According the reflection principle of Schwarz $\Phi(z)$ is analytic in the whole z -plane with exception of the points $\operatorname{Im} z = 0, -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

From the boundary condition for $|x| < 1$ we get the following Hilbert problem

$$e^{i\pi\gamma} \Phi^+(x) - e^{-i\pi\gamma} \Phi^-(x) = 2ih(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

The following considerations only hold for a set H^* of functions.

$f(x)$ belongs to H^* if and only if $f(x)$ can be written in the following form.

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+x)^{\lambda_1} (1-x)^{\lambda_2}}, \quad 0 \leq \lambda_{1,2} < 1$$

where $\varphi(x)$ is Hölder-continuous on $[-1, 1]$.

If $f(x) \in H^*$ then

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

is a sectionally holomorphic function which satisfies the Plemelj's formulae

$$G^+(x) - G^-(x) = f(x), \quad -1 < x < 1$$

$$G^+(x) + G^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} dt. \quad (2)$$

The homogenous part of equation (1) has a solution

$$X(z) = (z+1)^{-1+\gamma} (z-1)^{-\gamma}.$$

We fix the argument by

$$-\pi \leq \arg(z-1) \leq \pi, \quad -\pi \leq \arg(z+1) \leq \pi.$$

Then we have for $-1 < x < 1$

$$X^+(x) = e^{-i\pi\gamma} (1+x)^{-1+\gamma} (1-x)^{-\gamma}$$

$$X^-(x) = e^{i\pi\gamma} (1+x)^{-1+\gamma} (1-x)^{-\gamma}$$

hence

$$e^{i\pi\gamma} X^+(x) - e^{-i\pi\gamma} X^-(x) = 0.$$

$X(z)$ is also continuous for $z = x < -1$.

Taking

$$\Phi(z) = X(z) \Psi(z),$$

we find from (1)

$$\Psi^+(x) - \Psi^-(x) = \begin{cases} 2ih(x) (1+x)^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma}, & |x| < 1. \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

From Plemelj's formulae it follows that the following function $\Psi(z)$ satisfies the last equation.

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma} (1-t)^{\gamma} 2ih(t)}{t-z} dt +$$

$$+ P(z)(z+1)^n (z-1)^m, \quad n \text{ and } m \text{ integers,}$$

where $P(z)$ is an arbitrary entire function with $P(\pm 1) \neq 0$.

From the boundary conditions it follows that

$$\Phi(z) = o(1) \quad \text{for } z \rightarrow \infty, \text{ hence}$$

$$\Psi(z) = o(z) \quad \text{for } z \rightarrow \infty.$$

From the regularity conditions at $z = \pm 1$ it follows that $n, m \geq 0$.

Then from the behaviour for $z \rightarrow \infty$ it follows that

$$n = m = 0 \quad \text{and} \quad P(z) = \text{constant.}$$

Hence the solution of the Hilbert problem (1) is

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma} (1-t)^{\gamma} h(t)}{t-z} dt + C \right], \quad (3)$$

where C is an arbitrary constant.

The functions u and v can be determined by the relations

$$u(x,y) = \operatorname{Re} \Phi$$

$$v(x,y) = \operatorname{Im} \Phi.$$

1.2. The behaviour of the solution at $z = \pm 1$.

If $h(x)$ is analytic at the points $x = \pm 1$ then we can calculate the behaviour of $\Phi(z)$ in the neighbourhood of these points as follows.

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{1-t} - \frac{z-1}{(1-t)(t-z)}.$$

From (3) it follows that

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{\pi} X(z) \left[C - C_{+1} - (z-1) \int_{-1}^{+1} (1+t)^{1-\gamma} (1-t)^{\gamma-1} \frac{h(t)}{t-z} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} X(z) \left[C - C_{+1} + (z-1)h(1) \int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma} (1-t)^{\gamma-1}}{t-z} dt + \right. \\ &\quad \left. - (z-1) \int_{-1}^{+1} (1+t)^{1-\gamma} (1-t)^{\gamma-1} \frac{h(t)-h(1)}{t-z} dt \right] \end{aligned}$$

where
$$C_{+1} = \int_{-1}^{+1} (1+t)^{1-\gamma} (1-t)^{\gamma-1} h(t) dt.$$

By means of Cauchy's residu theorem we find

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma} (1-t)^{\gamma-1}}{t-z} dt = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma} \{1 - (z+1)^{1-\gamma} (z-1)^{\gamma-1}\},$$

hence

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} (C - C_{+1}) (z+1)^{-1+\gamma} (z-1)^{-\gamma} - \frac{h(1)}{\sin \pi\gamma} + O((z-1)^{1-\gamma}) \text{ for } z \rightarrow +1.$$

In a similar way we find

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} (C + C_{-1}) (z+1)^{-1+\gamma} (z-1)^{-\gamma} + \frac{h(-1)}{\sin \pi\gamma} + O((z+1)^{\gamma}) \text{ for } z \rightarrow -1,$$

with
$$C_{-1} = \int_{-1}^{+1} (1+t)^{-\gamma}(1-t)^{\gamma} h(t) dt.$$

We can make $\Phi(z)$ bounded in one of the points ± 1 by a special choice of C .
If $C = C_{+1}$ then $\Phi(z)$ is bounded in $z = +1$ and the solution can be written as follows.

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1-\gamma} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1-\gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt.$$

If $C = -C_{-1}$ then $\Phi(z)$ is bounded in $z = -1$ and we can write

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\gamma} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt.$$

If

$$\int_{-1}^{+1} (1+t)^{-\gamma}(1-t)^{-1+\gamma} h(t) dt = 0$$

and

$$C = \int_{-1}^{+1} (1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma-1} h(t) dt$$

then $\Phi(z)$ is bounded in both of the points $z = \pm 1$ and

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi} (z-1)^{1-\gamma}(z+1)^{\gamma} \int_{-1}^{+1} (1-t)^{-1+\gamma}(1+t)^{-\gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt.$$

Exercise

u and v satisfy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0.$$

Boundary conditions:

a) $u(x,0) = 0$ for $|x| > 1$,

b) $u(x,0) \sin \pi \gamma - v(x,0) \cos \pi \gamma = h(x)$ for $-1 < x < 1$

where $h(x)$ is Hölder continuous on $[-1,1]$ and analytical in $x = \pm 1$,

c) u and v bounded at $(-1,0)$ and $(1,0)$,

d) u and v bounded for $x^2 + y^2 \rightarrow \infty, y \geq 0$.

1) Determine u and v for $-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$.

2) Which condition $h(x)$ has to satisfy in order that u and v tend to zero for $x^2 + y^2 \rightarrow \infty, y \geq 0$.

Determine two terms of the expansion of $u - iv$ in powers of $(x+iy)^{-1}$.

3) If $\gamma = \pm \frac{1}{2}$, which condition on $h(x)$ has to be satisfied in order that the problem has a solution.

1. The general partial differential equation of first order in two independent variables can be written as

$$(1) \quad F(x, y, u, p, q) = 0 .$$

At each point (x_0, y_0, u_0) the PDE (1) may be considered as a relation between p and q with parametric solution

$$(2) \quad p = p(\lambda), \quad q = q(\lambda), \quad F(x_0, y_0, u_0, p(\lambda), q(\lambda)) = 0 .$$

The vector $(p(\lambda), q(\lambda), -1)$ is normal to the plane

$$(3) \quad u - u_0 = p(\lambda)(x - x_0) + q(\lambda)(y - y_0) ,$$

which plane can be interpreted as the tangent plane of an integral surface. The family of possible tangent planes will envelope a cone, called the Monge cone, with vertex (x_0, y_0, u_0) . Every integral surface has to be tangent to the Monge cone at each of its points.

The generators of the Monge cone are given by

$$(4) \quad \begin{cases} 0 = p'(\lambda)(x - x_0) + q'(\lambda)(y - y_0) \\ u - u_0 = p(\lambda)(x - x_0) + q(\lambda)(y - y_0) \end{cases} .$$

Differentiation of (2) yields

$$(5) \quad F_p p'(\lambda) + F_q q'(\lambda) = 0 ,$$

hence (4) can be written as

$$(6) \quad \frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q} = \frac{u - u_0}{pF_p + qF_q} .$$

It follows that the direction of a generator is given by the vector

$$(7) \quad (F_p, F_q, pF_p + qF_q) .$$

Such a direction is called a characteristic direction.

Let $u = u(x, y)$ be a specific integral surface.

On this surface we introduce a family of characteristic curves which are tangent to a characteristic direction at each of their points,

$$(8) \quad \frac{dx}{ds} = F_p , \quad \frac{dy}{ds} = F_q , \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q .$$

where s is a parameter. Along such a curve we have

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dp}{ds} = p_x \frac{dx}{ds} + p_y \frac{dy}{ds} = p_x F_p + p_y F_q, \\ \frac{dq}{ds} = q_x \frac{dx}{ds} + q_y \frac{dy}{ds} = q_x F_p + q_y F_q. \end{cases}$$

Differentiation of (1) with respect to x and y resp. yields

$$(10) \quad \begin{cases} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q q_x = 0, \\ F_y + F_u q + F_p p_y + F_q q_y = 0, \end{cases}$$

hence (9) can be replaced by

$$(11) \quad \frac{dp}{ds} = -F_x - pF_u, \quad \frac{dq}{ds} = -F_y - qF_u.$$

The set of equations (8), (11) is called the characteristic system of differential equations. Every solution of this system of ordinary differential equations, with $F(x,y,u,p,q) = 0$, is called a characteristic strip consisting of a characteristic curve $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$ together with a set of tangent planes normal to $(p(s), q(s), -1)$. On every integral surface there lies a family of characteristic strips.

Inversely one may start from the characteristic system of differential equations (8), (11). Through each element $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ there will pass one strip $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$, $p = p(s)$, $q = q(s)$.

Theorem. Along every strip $F = \text{constant}$.

Hence, if $F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0$ then $F = 0$ along the whole strip and the strip is again a characteristic strip.

Theorem. If a characteristic strip has one element $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ in common with an integral surface $u = u(x,y)$ then it lies completely on the surface.

2. The Cauchy problem

We want to determine an integral surface $u = u(x,y)$ which pass through the initial curve C ,

$$(12) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad u = u(t).$$

First we extend to an initial strip C_1 , by introducing the functions

$$(13) \quad p = p(t), \quad q = q(t),$$

which have to satisfy the following conditions.

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = p(t) \frac{dx}{dt} + q(t) \frac{dy}{dt} , \\ F(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) = 0 . \end{cases}$$

Through each element of C_1 we draw the characteristic strip.

The set of all characteristic strips is given by

$$(15) \quad x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad u = u(s,t), \quad p = p(s,t), \quad q = q(s,t).$$

The functions (15) will satisfy the characteristic system (8), (11) whereas for $s=0$ these functions reduce to the initial element $x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)$ of C_1 .

Solution of s and t as functions of x and y is possible if the Jacobian

$$(16) \quad J = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = x_s y_t - x_t y_s = F_p y_t - F_q x_t \neq 0$$

along C_1 . Then we obtain

$$(17) \quad u = u(s(x,y), t(x,y)) = u(x,y), \quad p = p(x,y), \quad q = q(x,y).$$

Theorem. $u_x = p, \quad u_y = q.$

Conclusion. In a sufficiently small neighbourhood of C_1 the Cauchy problem has a unique solution.

If $J=0$ along C_1 then

$$(18) \quad F_p y_t - F_q x_t = 0$$

or

$$(19) \quad x_t = F_p, \quad y_t = F_q, \quad u_t = pF_p + qF_q,$$

hence at each of its points C is tangent to a characteristic direction. Two cases must be distinguished:

a) C_1 is a characteristic strip.

Then the Cauchy problem has infinitely many solutions.

b) C_1 is not a characteristic strip.

Then either the Cauchy problem has no solution or it has a solution for which the derivatives of second order are singular at C .

References.

Courant-Hilbert, Methods of Math. Phys.,

Vol II, p. 75-84, p. 88-97

Garabedian, Partial Differential Equations, p. 24-33.

3. Problems

3.1. Determine the solution of the Cauchy problem for the eiconal equation

$$(20) \quad p^2 + q^2 = 1$$

where the initial curve is given by

a) $x = -y, u = 0$;

b) $x^2 + y^2 = 1, u = 0$;

c) $x = 2t, y = t+1, u = t$;

d) $y^2 = 2x+1, u = x$;

e) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{u}{5}$;

f) $x = \cos t, y = \sin t, u = t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$.

Verify that the solution of problem 1.f) has derivatives of second order which are singular at the initial curve.

3.2. Verify that the characteristic curves of the eiconal equation are straight lines. For each of the solutions of problem 1.a), b), c), d) draw a picture of the projections on the x,y -plane of the characteristic curves lying on the integral surface. These projections are called rays. Verify that these rays are orthogonal to the curves $u(x,y) = \text{const.}$ in the x,y -plane. The problem 1.d) will have two solutions leading to two systems of rays. From each point of the parabola $y^2 = 2x+1$ there will emanate two rays, viz. one ray of each system. Verify that these two rays make equal angles with the normal to the parabola at that point.

Consider the Cauchy problem for the eiconal equation where the initial curve is given by

$$(21) \quad x = x(t), y = y(t), u = u(t).$$

Show that the rays are orthogonal to the curves $u(x,y) = \text{const.}$ in the x,y -plane. Show that the distance between two curves $u = C_1 = \text{const.}$ and $u = C_2 = \text{const.}$, measured along a ray, is equal to $|C_1 - C_2|$. Hence, any two curves $u = \text{const.}$ are equidistant.

3.3. Determine the solution of the Cauchy problem for the partial differential equation

$$(22) \quad u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1,$$

where the initial curve is given by

a) $y = u = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

b) $x = \frac{13}{5} \cos \theta$, $y = \frac{13}{5} \sin \theta$, $u = \frac{4}{5}$;

c) $x^2 + y^2 = 4$, $u = 1$.

Show that the characteristic curves are circles with the following properties:

a) the radius of the circle is equal to 1;

b) the center of the circle lies in the x,y -plane;

c) the plane of the circle is orthogonal to the x,y -plane.

Explain why the equation (22) is called the differential equation of tubular surfaces.

1. Axially symmetric boundary value problems

Let r, φ, z be cylindrical coordinates. We consider the boundary value problem:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 ; \\ u(r, \varphi, 0) = f(r) \text{ on the circular disk } r \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi, z = 0 ; \\ u(r, \varphi, z) \rightarrow 0 \text{ when } (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty . \end{cases}$$

From the boundary condition on the disk it is clear that the solution of this problem is independent of φ : the boundary value problem is called axially symmetric with the z -axis as its axis of symmetry.

The solution of the problem is represented by

$$(2) \quad u(r, z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(\rho)}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + z^2}} \rho \, d\rho \, d\theta$$

where the function $\sigma(\rho)$ has to be determined. Application of the boundary condition on the disk leads to the following integral equation for $\sigma(\rho)$,

$$(3) \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^a \sigma(\rho) \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} = f(r), \quad 0 \leq r \leq a .$$

By means of Copson's lemma we will reduce the equation (3) to a repeated Abel's integral equation.

Copson's lemma

$$(4) \quad \int_0^2 \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} = 4 \int_0^{\min(r, \rho)} \frac{dt}{\sqrt{(r^2 - t^2)(\rho^2 - t^2)}} .$$

Substitution of (4) into (3) yields

$$(5) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^a \sigma(\rho) \rho \, d\rho \int_0^{\min(r, \rho)} \frac{dt}{\sqrt{(r^2 - t^2)(\rho^2 - t^2)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_t^a \frac{\sigma(\rho) \rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} d\rho = f(r)$$

$$0 \leq r \leq a .$$

The latter equation can be split into two equations,

$$(6) \quad \begin{cases} \int_t^a \frac{\sigma(\rho)\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} d\rho = S(t), & 0 \leq t \leq a, \\ \int_0^r \frac{S(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = \pi f(r), & 0 \leq r \leq a. \end{cases}$$

The equations (6) are special cases of Abel's integral equation.

Abel's integral equation If $f(x)$ and $f'(x)$ are continuous in the interval $0 \leq x \leq a$, then the solution of Abel's integral equation

$$(7) \quad \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

is given by

$$(8) \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt.$$

By means of some simple substitutions the integral equations (6) can be reduced to the form (7) and the solutions can be shown to be given by

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_t^a \frac{S(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} d\rho, \\ S(r) = 2 \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{tf(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt. \end{cases}$$

2. Problems

2.1. Verify the derivation of form (9) from the solution (7) of Abel's integral equation.

2.2. Show that the solution of the integral equation

$$(10) \quad \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\lambda} dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

where $0 < \lambda < 1$ and $f(x)$, $f'(x)$ are continuous in the interval $0 \leq x \leq a$, is given by

$$(11) \quad g(x) = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\lambda}} dt.$$

N.B. The integral equation (10) is also called Abel's integral equation.

2.3. Determine the solution of the axially symmetric boundary value problem,

$$(12) \quad \begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 ; \\ u(r, 0) = 1 \text{ on the circular disk, } r \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi, z = 0 ; \\ u(r, z) \rightarrow 0 \text{ when } (r^2 + z^2) \rightarrow \infty . \end{cases}$$

The present problem admits the following interpretation: the function $u(r, z)$ is the electrostatic potential due to a charged circular disk. The disk is conducting and kept at potential 1. It can be shown that the surface charge density $q(\rho)$ on the disk is related to the function $\sigma(\rho)$ introduced in (2),

$$(13) \quad q(\rho) = \epsilon_0 \sigma(\rho)$$

where ϵ_0 is the dielectric constant of free space.

Determine $q(\rho)$, the total charge on the disk and the capacity of the disk.

2.4. Prove the following generalization of Copson's lemma,

$$(13) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} d\theta = \\ &= \frac{4}{(r\rho)^n} \int_0^{\min(r, \rho)} \frac{t^{2n}}{\sqrt{(r^2 - t^2)(\rho^2 - t^2)}} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

2.5. Determine the solution of the following boundary value problem,

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 ; \\ u(r, \varphi, 0) = -E_0 r \cos \varphi \text{ on the disk, } r \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi, z = 0 ; \\ u(r, \varphi, z) \rightarrow 0 \text{ when } (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty . \end{cases}$$

The function $u(r, \varphi, z)$ may be considered as the potential due to a grounded conducting disk which is placed in an external electrostatic field. The external field has a strength E_0 parallel to the x -axis (where x, y, z are rectangular coordinates with $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$). The potential of this field is given by $u_{\text{ext.}} = -E_0 x = -E_0 r \cos \varphi$. Hence, the boundary condition on the disk just expresses that $u + u_{\text{ext.}} = 0$ on the disk, in agreement with the disk being grounded. Determine the charge density $q(\rho)$ induced in the disk.

N.B. The solution of this problem may be obtained in a similar way as for the problem treated in section 1. Make use of the generalization (13) of Copson's lemma with $u = 1$.

2.6. Determine an approximate solution (valid for small values of ka) of the axisymmetric boundary value problem,

$$(15) \quad \begin{cases} \Delta u + k^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 ; \\ u(r, 0) = -1 \text{ on the circular disk } r \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi, z = 0 ; \\ u(r, \varphi, z) \sim A \frac{e^{ikR}}{R} \text{ when } R = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty . \end{cases}$$

The problem describes the scattering of a plane normally incident wave $u_i^E = e^{ikz}$ by a circular disk. The function $u(r, z)$ represents the scattered wave. On the disk the total wave has to vanish, hence,

$$(16) \quad u + u^i = 0, \quad u(r, 0) = -1 .$$

The solution of this problem can be represented by

$$(17) \quad u(r, z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma(\rho) \frac{\exp[ik\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + z^2}]}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + z^2}} \rho d\rho d\theta ,$$

(Compare the present representation with (2)) where the function $\sigma(\rho)$ has to be determined. Application of the boundary condition on the disk leads to the integral equation,

$$(18) \quad \int_0^a \rho \sigma(\rho) K(r, \rho) d\rho = -1, \quad 0 \leq r \leq a ,$$

where

$$(19) \quad K(r, \rho) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp[ik\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}]}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} d\theta .$$

The kernel $K(r, \rho)$ and the function $\sigma(\rho)$ are expanded in power-series in powers of (ik) ,

$$(20) \quad \begin{cases} K(r, \rho) = K^{(0)}(r, \rho) + ik K^{(1)}(r, \rho) + (ik)^2 K^{(2)}(r, \rho) + \dots \\ \sigma(\rho) = \sigma^{(0)}(\rho) + ik \sigma^{(1)}(\rho) + (ik)^2 \sigma^{(2)}(\rho) + \dots \end{cases}$$

Substitute these expansions into (18), then we are led to the following system of integral equations,

$$(21) \quad \int_0^a \rho \sigma^{(0)}(\rho) K^{(0)}(r, \rho) d\rho = -1 ,$$

$$\int_0^a \rho \sigma^{(1)}(\rho) K^{(0)}(r, \rho) d\rho = - \int_0^a \rho \sigma^{(0)}(\rho) K^{(1)}(r, \rho) d\rho , \text{ etc.},$$

from which the functions $\sigma^{(0)}(\rho)$, $\sigma^{(1)}(\rho)$, ... may be determined successively by means of the method of section 1.

Determine $\sigma^{(0)}(\rho)$, $\sigma^{(1)}(\rho)$, $\sigma^{(2)}(\rho)$. The corresponding potential function (see (17)) is denoted by $u_{\text{appr.}}$ which is an approximation to the exact solution, valid for small values of ka .

Introduce spherical coordinates R , ψ , φ with

$$(22) \quad r = R \sin \psi , \quad z = R \cos \psi .$$

Show that for large values of R ,

$$u_{\text{appr.}}(R \sin \psi, R \cos \psi) \sim A(\psi) \frac{e^{ikR}}{R}$$

and determine $A(\psi)$ up to and including terms of order $(ka)^2$.

Determine an approximate value for the scattering coefficient

$$(23) \quad \tau = \frac{\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_S |u_{\text{appr.}}|^2 R^2 \sin \psi d\psi d\varphi}{\iint_D |u_i|^2 \rho d\rho d\varphi}$$

where S is a sphere of radius R and D is the circular disk. Physically τ is the ratio between the scattered energy and the energy incident on the disk.

Hint The following integrals will be needed in connection with the problems.

$$(24) \quad \left. \begin{aligned} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} , \\ \int_c^d (x-c)^{p-1} (d-x)^{q-1} dx &= (d-c)^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{valid for } \operatorname{Re} p > 0, \\ \operatorname{Re} q > 0. \end{array}$$

Oplossing van een randwaardeprobleem met behulp van de Wiener-Hopf techniek

1. Formulering van het randwaardeprobleem

Gevraagd wordt de functie $\varphi(x,y)$ te bepalen welke voldoet aan

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi + k^2 \varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \pi; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty; \\ \varphi(x,\pi) = 0, \quad -\infty < x < 0; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\pi) = 0, \quad 0 < x < \infty; \\ \varphi(x,y) = e^{-ikx} + \operatorname{Re} e^{ikx} + O(e^{-\lambda_1 x}) \quad \text{voor } x \rightarrow \infty; \\ \varphi(x,y) = O(e^{\mu_1 x}) \quad \text{voor } x \rightarrow -\infty; \end{array} \right.$$

waarbij $0 < k < \frac{1}{2}$ is, $\lambda_1 = \sqrt{1-k^2}$, $\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{4}-k^2}$.

1.1. Fouriertransformatie van het probleem

Definieer

$$f_1^+(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \varphi(x,\pi) & , \quad x > 0 \end{cases}, \quad f_2^-(x) = \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\pi) & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases}.$$

Pas Fouriertransformatie toe en stel

$$\Phi(s,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) e^{isx} dx,$$

$$F_{1,2}^{+,-}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{1,2}^{+,-}(x) e^{isx} dx.$$

Deze Fourier getransformeerden bestaan voor $0 < \operatorname{Im} s < \mu_1$.

Het randwaardeprobleem (1) gaat na deze Fouriertransformatie over in

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Phi}{dy^2} - (s^2 - k^2)\Phi = 0, \quad 0 < y < \pi, \\ \frac{d\Phi}{dy}(s,0) = 0, \\ \Phi(s,\pi) = F_1^+(s), \quad \frac{d\Phi}{dy}(s,\pi) = F_2^-(s). \end{array} \right.$$

Uit het gedrag van $\varphi(x,y)$ voor $x \rightarrow \pm \infty$ volgt verder nog dat

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi(s,y) = \frac{i}{s-k} + \frac{Ri}{s+k} + \text{functie analytisch in de strook } -\lambda_1 < \text{Im } s < \mu_1; \\ F^+(s) = \frac{i}{s-k} + \frac{Ri}{s+k} + \text{functie analytisch in het halfvlak } \text{Im } s > -\lambda_1; \\ F_2^-(s) = \text{functie analytisch in het halfvlak } \text{Im } s < \mu_1. \end{cases}$$

1.2. Oplossing van het getransformeerde probleem

De oplossing van het getransformeerde probleem luidt

$$(4) \quad \varphi(s,y) = F_1^+(s) \frac{\cosh y\sqrt{s^2-k^2}}{\cosh \pi\sqrt{s^2-k^2}} = F_2^-(s) \frac{\cosh y\sqrt{s^2-k^2}}{\sqrt{s^2-k^2} \sinh \pi\sqrt{s^2-k^2}}.$$

De (nog onbekende) functies $F_1^+(s)$, $F_2^-(s)$ moeten dus voldoen aan de relatie

$$(5) \quad F_2^-(s)K(s) = F_1^+(s)$$

waarin

$$K(s) = \frac{\cosh \pi\sqrt{s^2-k^2}}{\sqrt{s^2-k^2} \sinh \pi\sqrt{s^2-k^2}} = \frac{K^*(s)}{s^2-k^2}.$$

De vergelijking (5) stelt voor een homogeen Wiener-Hopf probleem dat als volgt is op te lossen.

1.2.1. Factorisatie van $K^*(s)$

Voer in de functie $M(z)$ gedefinieerd door

$$(6) \quad M(z) = \sqrt{K^*(0)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+z/\mu_n}{1+z/\lambda_n}$$

waarin

$$\lambda_n = \sqrt{n^2-k^2}, \quad \mu_n = \sqrt{(n-\frac{1}{2})^2-k^2}.$$

De functie $M(z)$ bezit nu de volgende eigenschappen

I. Het oneindig product (6) is convergent.

II. Factorisatie van $K^*(s)$:

$$(7) \quad K^*(s) = M(is)M(-is).$$

III. Voor $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ($\delta > 0$) geldt

$$(8) \quad M(z) = \sqrt{z}[1+o(1)].$$

Opmerking. Het bewijs van eigenschap III laat zich geven met de volgende hulpstelling.

Hulpstelling. Zij a_n reëel, $b_n > 0$ en zij de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n - b_n}{b_n} \right|$ convergent,

dan geldt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z + a_n}{z + b_n} = 1$$

uniform voor $|\arg z| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Literatuur over oneindige producten:

E.T. Copson, Theory of functions of a complex variable, pp. 102-106.

B.A. Fuchs and B.V. Shabat, Functions of a complex variable, Vol I., pp. 333-345.

R.A. Rankin, An introduction to mathematical analysis, pp. 563-582.

1.2.2 Vervolg oplossing van het getransformeerde probleem

Met toepassing van 1.2.1, eigenschap II is (5) te schrijven als

$$(9) \quad F_2^-(s)M(is) = (s^2 - k^2) \frac{F_1^+(s)}{M(-is)}.$$

Merk op dat het linkerlid van (9) analytisch is voor $\text{Im } s < \mu_1$ en het rechterlid analytisch voor $\text{Im } s > -\lambda_1$. Linkerlid en rechterlid zijn dus elkaars analytische voortzetting, samen vormen ze een gehele functie.

Met (8) volgt voor het asymptotische gedrag van linkerlid en rechterlid van (9):

$$\begin{aligned} \text{linkerlid van (9)} &= o(s^{\frac{1}{2}}) \text{ voor } |s| \rightarrow \infty, \text{Im } s < \mu_1. \\ \text{rechterlid van (9)} &= o(s^{3/2}) \text{ voor } |s| \rightarrow \infty, \text{Im } s > -\lambda_1. \end{aligned}$$

Volgens de stelling van Liouville zijn dan linkerlid en rechterlid van (9) gelijk aan een constante, waarna

$$(10) \quad F_2^-(s) = \frac{C}{M(is)}, \quad F_1^+(s) = \frac{CM(-is)}{s^2 - k^2}.$$

Volgens (3) bezit de functie $F_1^+(s)$ polen in de punten $s = \pm k$ met residuen i resp. R . Met behulp van (10) volgt dan

$$(11) \quad C = \frac{2ik}{M(-ik)}, \quad R = -\frac{M(ik)}{M(-ik)}.$$

Tenslotte, de functie $\Phi(s, y)$ wordt gegeven door

$$(12a) \quad \Phi(s, y) = \frac{2ik M(-is) \cosh y \sqrt{s^2 - k^2}}{M(-ik)(s^2 - k^2) \cosh \pi \sqrt{s^2 - k^2}}.$$

$$(12b) \quad = \frac{2ik \cosh y \sqrt{s^2 - k^2}}{M(-ik)M(is) \sqrt{s^2 - k^2} \sinh \pi \sqrt{s^2 - k^2}}$$

1.3 Inverse Fourier transformatie van $\Phi(s, y)$

De oplossing $\varphi(x, y)$ van het oorspronkelijke probleem wordt gegeven door

$$(13) \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\gamma}^{\infty + i\gamma} \Phi(s, y) e^{-isx} ds, \quad 0 < \gamma < \mu,$$

Voor $x > 0$ sluiten we de integratieweg in het beneden-halfvlak $\text{Im } s < \gamma$. In dit halfvlak bezit $\Phi(s, y)$ polen $s = \pm k$ en $s = -i\lambda_n$; de residuen van $\Phi(s, y)$ in deze polen zijn te berekenen uit (12b). Voor $\varphi(x, y)$ volgt dan een reeks van de gedaante

$$(14) \quad \varphi(x, y) = e^{-ikx} + R e^{ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos ny.$$

Voor $x < 0$ sluiten we de integratieweg in het boven-halfvlak $\text{Im } s > \gamma$. In dit halfvlak bezit $\Phi(s, y)$ polen $s = i\mu_n$ met residuen te berekenen uit (12a). Voor $\varphi(x, y)$ volgt dan

$$(15) \quad \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\mu_n x} \cos(n - \frac{1}{2})y.$$

2. Opgaven

2.1. Werk de voorgaande schets uit.

Bewijs de eigenschappen I, II, III en de hulpstelling uit 1.2.1.

Bepaal de coëfficiënten a_n en b_n in (14), (15).

2.2. a) Onderzoek het randwaardeprobleem (1) in geval $\frac{1}{2} < k < 1$ en

$$\varphi(x, y) = e^{-ikx} + R^+ e^{ikx} + O(e^{-\lambda_1 x}) \text{ voor } x \rightarrow \infty,$$

$$\varphi(x, y) = T^- e^{-i\mu_1 x} \cos \frac{1}{2}y + O(e^{\mu_2 x}) \text{ voor } x \rightarrow -\infty.$$

Bepaal R^+ , T^- en $\varphi(x, y)$.

b) Onderzoek het randwaardeprobleem (1) in geval $\frac{1}{2} < k < 1$ en

$$\varphi(x,y) = T^+ e^{ikx} + o(e^{-\lambda_1 x}) \text{ voor } x \rightarrow \infty ;$$

$$\varphi(x,y) = (e^{i|\mu_1|x} + R^- e^{-i|\mu_1|x}) \cos \frac{1}{2}y + o(e^{\mu_2 x}) \text{ voor } x \rightarrow -\infty .$$

Bepaal R^- , T^+ .

c) Laat zien dat

$$|R^+|^2 + \frac{|\mu_1|}{2k} |T^-|^2 = 1, \quad |R^-|^2 + \frac{2k}{|\mu_1|} |T^+|^2 = 1 .$$

Bewijs dit ook a priori met behulp van de eerste identiteit van Green.

Aanwijzing: Toon eerst aan dat

$$\operatorname{Im} \int_C \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0$$

voor elke oplossing φ van de vergelijking $\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$ en voor elke gesloten contour C .

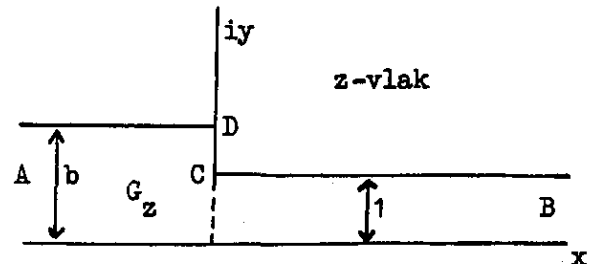
Oplossing van een randwaardeprobleem met behulp van conforme afbeelding

1. Formulering van het randwaardeprobleem

G_z zal een gebied zijn in het complexe z -vlak (zie figuur).

Gevraagd wordt de functie $\psi(x,y)$ te bepalen welke voldoet aan

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta\psi &= 0 \text{ in } G_z \\ \psi &= \pi \text{ op de bovenrand van } G_z \\ \psi &= 0 \text{ op de onderrand van } G_z \end{aligned}$$



1.1 Oplossing door conforme afbeelding

Voer in de functie $\varphi(x,y)$ zodanig dat $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ voldoen aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

De functie $\Omega(z)$ gedefinieerd door

$$(2) \quad \Omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y), \quad z = x + iy$$

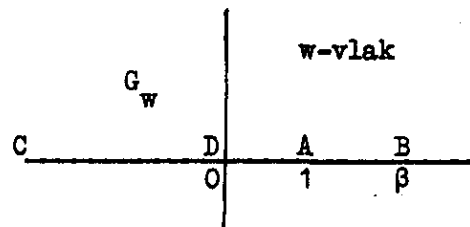
is dan analytisch in G_z

De te bepalen functie $\Omega = \Omega(z)$ beeldt het gebied G_z conform af op het gebied $G_\Omega : 0 < \text{Im } \Omega < \pi$ in het Ω -vlak. De bovenrand (onderrand) van G_z dient daarbij over te gaan in de bovenrand $\text{Im } \Omega = \pi$ (onderrand $\text{Im } \Omega = 0$) van G_Ω .

1.2 Afbeelding van G_z op G_w

We beelden eerst G_z af op het gebied $G_w : \text{Im } w > 0$ in het w -vlak.

De punten A,B,C,D in het z -vlak zullen daarbij overgaan in de punten A,B,C,D in het w -vlak (zie figuur).



Volgens de formule van Schwarz - Christoffel wordt de afbeeldingsfunctie $z = z(w)$ gegeven door

$$(3) \quad \frac{dz}{dw} = \frac{K}{\sqrt{w(w-1)(\beta-w)}}$$

waarin K en β nog nader te bepalen constanten zijn.

Integreer nu $\frac{dz}{dw}$ langs een kleine halve cirkel om $w = 1$, dan volgt

$$(4) \quad -\frac{\pi i K}{\beta-1} = -ib \Rightarrow K = \frac{b}{\pi}(\beta-1).$$

Evenzo volgt na integratie langs een kleine halve cirkel om $w = \beta$,

$$(5) \quad \frac{\pi i K}{\sqrt{\beta(\beta-1)}} = i \Rightarrow \beta = b^2.$$

Substitueer (4), (5) in (3), dan volgt na integratie

$$(6) \quad z = \frac{b}{\pi}(b^2-1) \int \frac{dw}{\sqrt{w}(w-1)(b^2-w)} = \frac{b}{\pi} \log\left(\frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}}\right) - \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{b-\sqrt{w}}{b+\sqrt{w}}\right) + K_1,$$

waarbij K_1 een nog te bepalen integratieconstante is.

We spreken af dat in G_w zal gelden: $0 \leq \arg w \leq \pi$.

In onderstaande tabel is opgenomen het verloop van $\arg(\sqrt{w} \pm 1)$, $\arg(b \pm \sqrt{w})$ langs de reële w -as:

	$w > b^2$	$1 < w < b^2$	$0 < w < 1$	$w < 0$
$\arg(\sqrt{w-1})$	0	0	π	$\pi - \arctg(\sqrt{-w})$
$\arg(\sqrt{w+1})$	0	0	0	$\arctg(\sqrt{-w})$
$\arg(b-\sqrt{w})$	$-\pi$	0	0	$-\arctg\left(\frac{\sqrt{-w}}{b}\right)$
$\arg(b+\sqrt{w})$	0	0	0	$\arctg\left(\frac{\sqrt{-w}}{b}\right)$

Met behulp van deze tabel is de afbeeldingsfunctie (6) langs de reële as als volgt te vereenvoudigen:

a. $w > b^2$. Dan is

$$(7) \quad z = \frac{b}{\pi} \log\left(\frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}}\right) - \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{\sqrt{w-b}}{\sqrt{w+b}}\right) + i + K_1.$$

Controle: $w \rightarrow \infty$, $z \rightarrow i + K_1 = i \Rightarrow K_1 = 0$;

$w \rightarrow b^2$, $z \rightarrow \infty + i$.

b. $1 < w < b^2$. Dan is

$$(8) \quad z = \frac{b}{\pi} \log\left(\frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}}\right) - \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{b-\sqrt{w}}{b+\sqrt{w}}\right).$$

Controle: $w \rightarrow b^2$, $z \rightarrow \infty$; $w \rightarrow 1$, $z = -\infty$.

c. $0 < w < 1$. Dan is

$$(9) \quad z = \frac{b}{\pi} \log\left(\frac{1-\sqrt{w}}{1+\sqrt{w}}\right) - \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{b-\sqrt{w}}{b+\sqrt{w}}\right) + ib.$$

Controle: $w \rightarrow 1$, $z \rightarrow -a + ib$; $w \rightarrow 0$, $z \rightarrow ib$.

d. $w < 0$. Dan is

$$(10) \quad z = -\frac{2ib}{\pi} \operatorname{arctg}(\sqrt{-w}) + ib + \frac{2i}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{-w}}{b}\right).$$

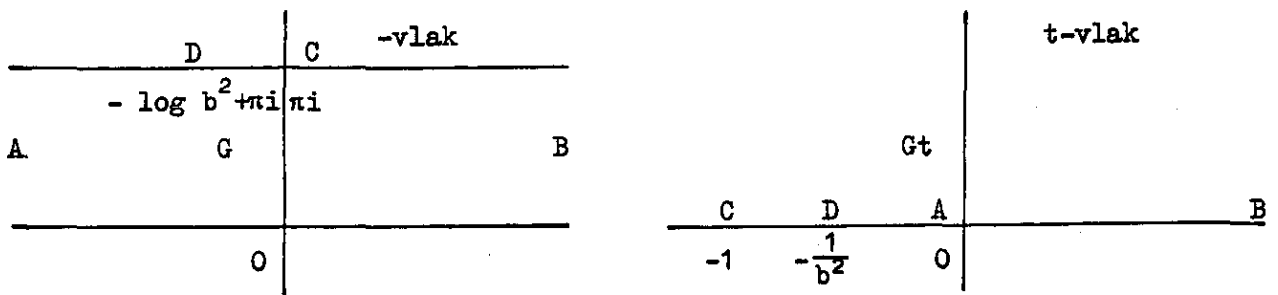
Controle: $w \rightarrow 0$, $z \rightarrow ib$; $w \rightarrow -\infty$, $z \rightarrow i$.

1.3 Afbeelding van G_Ω op G_t

De functie

$$(11) \quad t = e^\Omega, \quad \Omega = \log t$$

beeldt het gebied $G_\Omega : 0 < \operatorname{Im} \Omega < \pi$ af op het gebied $G_t : \operatorname{Im} t > 0$.



De onderrand $\operatorname{Im} \Omega = 0$ gaat daarbij over in de positieve reële t -as; de bovrand $\operatorname{Im} \Omega = \pi$ gaat over in de negatieve reële t -as.

1.4 Afbeelding van G_w op G_t

We zullen nu G_w afbeelden op G_t zodanig dat het interval AB van de reële w -as overgaat in de positieve reële t -as en de rest van de reële w -as overgaat in de negatieve reële t -as. Het punt A moet dus worden afgebeeld in $t = 0$, het punt B in $t = \infty$. Deze afbeelding wordt gerealiseerd door de volgende Möbius - transformatie

$$(12) \quad t = \frac{w-1}{b^2-w}.$$

Door de betrekkingen (6) (met $K_1 = 0$), (11), (12) is nu Ω als functie van z bepaald.

1.5 Bepaling van een limiet

We wensen de volgende limiet te bepalen

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} [\varphi(p, y) - \varphi(-q, y) - \pi p - \frac{\pi}{b} q].$$

Opmerking. Indien we G_z opvatten als een geleidende plaat en $\varphi(x,y)$ als de potentiaal van een in G_z heersend electricch veld, dan zal tengevolge van dit veld in G_z een electriche stroom gaan lopen. Bovenstaande limietuitdrukking laat zich dan interpreteren als een extra weerstand tengevolge van de breedteverandering van de plaat.

a. Onderzoek van $\varphi(x,y)$ voor $x \rightarrow -\infty$ d.i. in de omgeving van $A(z = -\infty, w = 1, t = 0, \Omega = -\infty)$.

Ontwikkel (6) (met $K_1 = 0$) in de omgeving van $w = 1$:

$$(13) \quad z = \frac{b}{\pi} \log(w-1) - \frac{2b}{\pi} \log 2 - \frac{1}{\pi} \log \frac{b-1}{b+1} + O(w-1).$$

Uit (11), (12) volgt

$$(14) \quad w = \frac{b^2 t + 1}{t + 1} = \frac{1 + b^2 e^\Omega}{1 + e^\Omega} = 1 + (b^2 - 1)e^\Omega + O(e^{2\Omega}).$$

Substitueer (14) in (13) dan volgt

$$(15) \quad z = \frac{b}{\pi} \Omega + \frac{b}{\pi} \log \frac{b^2 - 1}{4} - \frac{1}{\pi} \log \frac{b-1}{b+1} + O(e^\Omega).$$

Uit (15) lossen we Ω op als functie van z ,

$$(16) \quad \Omega = \frac{\pi}{b} z - \log \frac{b^2 - 1}{4} + \frac{1}{b} \log \frac{b-1}{b+1} + O(e^{\pi z/b})$$

waarna voor $\varphi(x,y)$ volgt

$$(17) \quad \varphi(x,y) = \frac{\pi}{b} x - \log \frac{b^2 - 1}{4} + \frac{1}{b} \log \frac{b-1}{b+1} + O(e^{\pi x/b}).$$

b. Onderzoek van $\varphi(x,y)$ voor $x \rightarrow \infty$ d.i. in de omgeving van $B(z = \infty, w = b^2, t = \infty, \Omega = \infty)$.

Geheel analoog (controleer dit!) vinden we

$$(18) \quad \Omega = \pi z - b \log \frac{b-1}{b+1} + \log \frac{b^2 - 1}{4b^2} + O(e^{-\pi z}),$$

$$(19) \quad \varphi(x,y) = \pi x - b \log \frac{b-1}{b+1} + \log \frac{b^2 - 1}{4b^2} + O(e^{-\pi x}).$$

Uit (17) en (19) volgt

$$(20) \quad \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} [\varphi(p,y) - \varphi(-q,y) - \pi p - \frac{\pi}{b} q] = 2 \log \frac{(b+1)^2}{4b} - (b + \frac{1}{b} - 2) \log \frac{b-1}{b+1}.$$

1.6 Bepaling van de horizontale kracht op de bovenrand

We vatten $\psi(x,y)$ op als de potentiaal van een magnetisch veld B gegeven door

$$B = - \text{grad } \psi.$$

Voor de kracht door dit veld uitgeoefend op een gedeelte L van de rand van G_z , geldt de volgende formule

$$(21) \quad \underline{K} = \frac{1}{2} \int_L \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] \underline{n} \, ds$$



waarbij de normaal \underline{n} naar het inwendige van G_z gericht is.

Vorm nu de combinatie

$$(22) \quad K_x - iK_y = \frac{1}{2} \int_L \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] (n_x - in_y) ds .$$

Voer in de raakvector \underline{t} aan L (zie fig.) dan zal bij doorlopen van L in de richting van \underline{t} het gebied G_z steeds aan de linkerhand liggen. Dan is

$$(n_x - in_y) ds = -i(t_x - it_y) ds = -i dz ,$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 = \left| \frac{d\Omega}{dz} \right|^2 = \frac{d\Omega}{dz} \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{z}} \quad (\text{N.B. } d\Omega = d\bar{\Omega} \text{ langs } C)$$

waarna

$$(23) \quad K_x - iK_y = -\frac{i}{2} \int_L \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz .$$

De horizontale kracht op het gedeelte CD laat zich nu op twee manieren berekenen:

a. We schrijven

$$(24) \quad K_x = -\frac{i}{2} \int_{CD} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz = -\frac{i}{2} \int_{CD} \left(\frac{d\Omega}{dw} \right)^2 \left(\frac{dz}{dw} \right)^{-1} dw$$

$$= -\frac{\pi i}{2b} (b^2 - 1) \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{w}}{(b^2 - w)(w - 1)} dw = -\frac{\pi^2}{2} \left(1 - \frac{1}{b} \right) .$$

b. We schrijven

$$(25) \quad K_x = \text{Re} \left[-\frac{i}{2} \int_{CD} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right] = \text{Re} \left[\frac{i}{2} \int_{DABC} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right] .$$

Op de horizontale gedeelten van DABC is de integrand reëel.

In de omgeving van A, B geldt (zie (16)),

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{\pi}{b} + O(e^{\pi z/b}) \text{ resp. } \frac{d\Omega}{dz} = \pi + O(e^{-\pi z})$$

waarna volgt

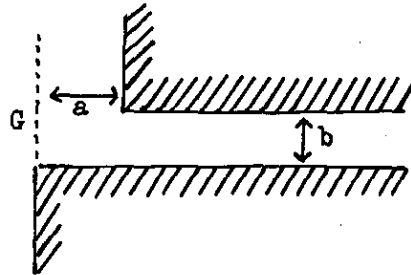
$$(26) \quad K_x = -\frac{\pi^2}{2} \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

2. Opgaven

2.1 Los het volgende randwaardeprobleem op met behulp van conforme afbeelding.
Gevraagd wordt de functie $\phi(x,y)$ te bepalen welke voldoet aan

$$(27) \quad \begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ in } G \text{ (zie figuur)} \\ \phi = \pi \text{ op de bovenrand van } G \\ \phi = 0 \text{ op de onderrand van } G \end{cases}$$

Onderzoek het gedrag van ϕ in de buurt van de vier hoekpunten. Verklaar de uitkomst.



2.2 Laat $\phi(x,y)$ de potentiaal zijn van een magnetisch veld $B = -\text{grad } \phi$.
Bereken de horizontale krachten op bovenrand en onderrand van G .
Bepaal ook het verschil van beide krachten.

Oplossing van een randwaardeprobleem met behulp van de theorie van het Hilbert probleem

1. Formulering van het randwaardeprobleem

Gevraagd wordt de functies $u(x,y)$, $v(x,y)$ te bepalen welke voldoen aan:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} & \text{voor } -\infty < x < \infty, y > 0; \\ v(x,0) = 0 & \text{voor } |x| > 1; \\ u(x,0)\sin \pi\gamma - v(x,0)\cos \pi\gamma = h(x) & \text{voor } |x| < 1; \\ u(x,y), v(x,y) \rightarrow 0 & \text{voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, y \geq 0; \\ u(x,y), v(x,y) = O\left[\left((1 \pm x)^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2} + \epsilon}\right], \epsilon > 0, & \text{voor } (x,y) \rightarrow (\pm 1, 0), y > 0. \end{cases}$$

Hierbij is: $0 < \gamma < 1$; $h(x)$ is Hölder-continu op $[-1, +1]$.

1.1. Herleiding tot een Hilbert probleem

Voer in de functie

$$(2) \quad \Omega(z) = u(x,y) - iv(x,y), \quad z = x + iy, \quad y > 0$$

dan is (differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann) $\Omega(z)$ analytisch voor $\text{Im } z > 0$. Definieer vervolgens

$$(3) \quad \Phi(z) = \begin{cases} \Omega(z), & \text{voor } \text{Im } z > 0, \\ \overline{\Omega(\bar{z})}, & \text{voor } \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

Dan is voor reële x ,

$$(4) \quad \begin{cases} \Phi^+(x) = \Omega(x + i0) = u(x,0) - iv(x,0), \\ \Phi^-(x) = \overline{\Omega(x + i0)} = u(x,0) + iv(x,0). \end{cases}$$

Uit (4) en de randvoorwaarde $v(x,0) = 0$ voor $|x| > 1$ volgt dat $\Phi^+(x) = \Phi^-(x)$ m.a.w. $\Phi(z)$ is continu voor het gedeelte $|x| > 1$ van de reële as.

Volgens een bekende stelling is dan $\Phi(z)$ analytisch in het gehele complexe z -vlak met uitzondering van de snede $-1 \leq z \leq 1$.

Het randwaardeprobleem (1) laat zich nu vertalen tot het volgende Hilbert probleem: Gevraagd wordt de functie $\Phi(z)$ te bepalen welke voldoet aan de volgende voorwaarden:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \Phi(z) \text{ is } \underline{\text{analytisch}} \text{ buiten de snede } -1 \leq z \leq 1; \\ \text{(ii)} \quad e^{i\pi\gamma} \Phi^+(x) - e^{-i\pi\gamma} \Phi^-(x) = 2ih(x) \text{ voor } -1 < x < 1; \\ \text{(iii)} \quad \Phi(z) \rightarrow 0 \text{ voor } |z| \rightarrow \infty; \\ \text{(iv)} \quad \Phi(z) = O(|z \pm 1|^{-1+2\epsilon}) \text{ in de omgeving van } z = \mp 1. \end{array} \right.$$

1.2. Theorie van de Cauchy integraal

De functie $f(x)$ zal op $[-1, +1]$ tot de klasse H^* behoren indien

$$(6) \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+x)^{\lambda_1}(1-x)^{\lambda_2}},$$

met $0 \leq \lambda_{1,2} < 1$ en $\varphi(x)$ Hölder-continu op $[-1, +1]$.

Zij nu $f(x) \in H^*$, voer dan in de Cauchy-integraal

$$(7) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

De functie $F(z)$ bezit nu de volgende eigenschappen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad F(z) \text{ is } \underline{\text{analytisch}} \text{ buiten de snede } -1 \leq z \leq 1; \\ \text{(ii)} \quad \text{voor } -1 < x < 1 \text{ gelden de } \underline{\text{formules}} \text{ van } \underline{\text{Flemelj}} \\ \quad F^+(x) - F^-(x) = f(x), \\ \quad F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt; \\ \text{(iii)} \quad F(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ voor } |z| \rightarrow \infty; \\ \text{(iv)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{indien } \lambda_{1,2} = 0, F(z) = O(\log|z \pm 1|) \\ \text{indien } 0 < \lambda_{1,2} < 1, F(z) = O(|z \pm 1|^{-\lambda_{1,2}}) \end{array} \right\} \text{ in de omgeving van } z = \mp 1. \end{array} \right.$$

Voor de bewijzen van deze eigenschappen, zie bv. N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations, chapters 2 and 4.

1.3. Oplossing van het Hilbert probleem.

1.3.1. Homogene Hilbert probleem

Uitgaande van (5,ii) beschouwen we eerst het homogene Hilbert probleem

$$(9) \quad e^{i\pi\gamma} \Phi^+(x) - e^{-i\pi\gamma} \Phi^-(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door de fundamentele oplossing

$$(10) \quad X(z) = (z+1)^{-1+\gamma}(z-1)^{-\gamma}$$

waarbij we afspreken dat

$$(11) \quad -\pi < \arg(z \pm 1) \leq \pi.$$

Dan geldt voor $-1 < x < 1$:

$$(12) \quad X^{\pm}(x) = e^{\mp i\pi\gamma} (1+x)^{-1+\gamma}(1-x)^{-\gamma}.$$

1.3.2. Inhomogene Hilbert probleem

Substitueer in het inhomogene Hilbert probleem (5)

$$(13) \quad \Phi(z) = X(z)\Psi(z)$$

dan gaat (5,ii) over in

$$(14) \quad \Psi^+(x) - \Psi^-(x) = 2ih(x)(1+x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma}, \quad |x| < 1.$$

Met de formule van Planelj volgt dat aan (14) voldaan wordt door

$$(15) \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma} 2ih(t)}{t-z} dt + P(z)(z+1)^n(z-1)^m$$

waarin n, m geheel zijn en $P(z)$ een willekeurige gehele functie voorstelt.

Met (10), (13) volgt dan voor $\Phi(z)$

$$(16) \quad \Phi(z) = (z+1)^{-1+\gamma}(z-1)^{-\gamma} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma} h(t)}{t-z} dt + P(z)(z+1)^n(z-1)^m \right].$$

Uit de voorwaarde (5.iv) volgt dat $n, m \geq 0$ moeten zijn. Uit het gedrag van $\Phi(z)$ voor $|z| \rightarrow \infty$ (voorwaarde (5,iii)) volgt tenslotte dat

$$(17) \quad n = m = 0, \quad P(z) = C = \text{constant}$$

waarna

$$(18) \quad \Phi(z) = \frac{(z+1)^{-1+\gamma}(z-1)^{-\gamma}}{\pi} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma} h(t)}{t-z} dt + C \right]$$

waarin C een willekeurige constante voorstelt.

De functies u en v zijn te bepalen uit

$$(19) \quad u(x,y) = \text{Re } \Phi(z), \quad v(x,y) = -\text{Im } \Phi(z), \quad y > 0.$$

1.4. Gedrag van de oplossing in de omgeving van $z = \pm 1$

We zullen het gedrag van $\Phi(z)$ in de omgeving van $z = \pm 1$ onderzoeken in de onderstelling dat $h(x)$ analytisch is in $x = \pm 1$.

Schrijf daartoe

$$(20) \quad \frac{1}{t-z} = -\frac{1}{1-t} - \frac{z-1}{(1-t)(t-z)} .$$

De oplossing (18) gaat dan over in

$$(21) \quad \Phi(z) = \frac{(z+1)^{-1+\gamma}(z-1)^{-\gamma}}{\pi} \left[C - \int_{-1}^{+1} (1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma-1} h(t) dt - \right. \\ \left. - (z-1)h(1) \int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma-1}}{t-z} dt - \right. \\ \left. - (z-1) \int_{-1}^{+1} (1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma-1} \frac{h(t)-h(1)}{t-z} dt \right] .$$

Voer in de notatie

$$(22) \quad C_{+1} = \int_{-1}^{+1} (1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma-1} h(t) dt .$$

Verder volgt met de stelling van Cauchy

$$(23) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma-1}}{t-z} dt = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma} [1 - (z+1)^{1-\gamma}(z-1)^{\gamma-1}] .$$

Substitueer dit in (21) dan volgt voor $\Phi(z)$,

$$(24) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi} (C - C_{+1})(z+1)^{-1+\gamma}(z-1)^{-\gamma} + \frac{h(1)}{\sin \pi\gamma} + O((z-1)^{1-\gamma})$$

in de omgeving van $z = 1$.

Op analoge wijze is af te leiden

$$(25) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi} (C + C_{-1})(z+1)^{-1+\gamma}(z-1)^{-\gamma} + \frac{h(-1)}{\sin \pi\gamma} + O((z+1)^{\gamma})$$

in de omgeving van $z = -1$, waarbij

$$(26) \quad C_{-1} = \int_{-1}^{+1} (1+t)^{-\gamma}(1-t)^{\gamma} h(t) dt .$$

Door passende keuze van C kunnen we nu $\Phi(z)$ begrensd maken in de omgeving van één der punten $z = \pm 1$.

Kiezen we $C = C_{+1}$ dan is $\Phi(z)$ begrensd in de omgeving van $z = 1$. De functie $\Phi(z)$ is dan voor te stellen door

$$(27) \quad \Phi(z) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1-\gamma} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1-\gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt .$$

Evenzo, indien we kiezen $C = -C_{-1}$ dan zal de oplossing

$$(28) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\gamma} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt$$

begrensd zijn in de omgeving van $z = -1$.

Tenslotte, indien $C_{+1} = -C_{-1}$ m.a.w. indien $h(t)$ voldoet aan de relatie

$$(29) \quad C_{+1} + C_{-1} = 2 \int_{-1}^{+1} (1+t)^{-\gamma} (1-t)^{\gamma-1} h(t) dt = 0$$

dan is het mogelijk door de keuze $C = C_{+1} = -C_{-1}$ een oplossing $\Phi(z)$ te verkrijgen welke begrensd is in de omgeving van beide punten $z = \pm 1$. Deze oplossing laat zich nog als volgt schrijven

$$(30) \quad \Phi(z) = -\frac{1}{\pi} (z-1)^{1-\gamma} (z+1)^{\gamma} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-1+\gamma} (1+t)^{-\gamma} h(t)}{t-z} dt .$$

2. Opgaven

2.1. Gevraagd wordt de functies $u(x,y)$, $v(x,y)$ te bepalen welke voldoen aan

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{voor } -\infty < x < \infty, y > 0; \\ u(x,0) = 0 \quad \text{voor } |x| > 1; \\ u(x,0)\sin \pi\gamma - v(x,0)\cos \pi\gamma = h(x) \quad \text{voor } |x| < 1; \\ u(x,y), v(x,y) \text{ zijn begrensd in de omgeving van } (\pm 1, 0); \\ u(x,y), v(x,y) \text{ zijn begrensd indien } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, y \geq 0. \end{array} \right.$$

Hierbij is: $-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$; $h(x)$ is Hölder-continu op $[-1, +1]$ en analytisch in $x = \pm 1$. Los dit randwaardeprobleem op. Bepaal ook $u(x,0)$, $v(x,0)$.

- 2.2. Welke voorwaarde moet worden opgelegd aan $h(x)$ opdat $u(x,y), v(x,y) \rightarrow 0$ voor $x^2 + y^2 \rightarrow \infty, y \geq 0$? Bepaal de eerste twee termen van de ontwikkeling van $u - iv$ naar machten van $(x+iy)^{-1}$.
- 2.3. Onderzoek het randwaardeprobleem (31) indien $\gamma = \pm \frac{1}{2}$. Welke voorwaarde moet worden opgelegd aan $h(x)$ opdat het probleem een oplossing heeft? Bepaal deze oplossing.

Stage Partiële Differentiaalvergelijkingen 1970 - I

1. Bewegende warmtebron in oneindige plaat

Geef de oplossing van het volgende warmtegeleidingsprobleem:

$$\begin{aligned}\Delta T - T_t &= -\delta(x-t)\delta(y), & -\infty < x, y < \infty, & t > 0; \\ T(x, y, 0) &= 0 & (\text{beginvoorwaarde}) \\ T(x, y, t) &\rightarrow 0 & \text{voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{1}$$

1.1. Superpositie van warmtebronnen

De fundamentele oplossing van de warmtegeleidingvergelijking, d.i. een oplossing van het probleem

$$\begin{aligned}\Delta T - T_t &= -\delta(x)\delta(y)\delta(t), & -\infty < x, y < \infty, & t > 0, \\ T(x, y, -0) &= 0, \\ T(x, y, t) &\rightarrow 0 & \text{voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

wordt gegeven door

$$T(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}.$$

Toon aan, met behulp van deze fundamentele oplossing, dat de oplossing van het probleem (1) luidt:

$$T(x, y, t) = \int_0^t \frac{e^{-[(x-\tau)^2 + y^2]/4(t-\tau)}}{4\pi(t-\tau)} d\tau.\tag{2}$$

1.2. Laplace transformatie

Los het probleem (1) op door Laplace transformatie naar de tijd t .

Stel

$$v(x, y, s) = \mathcal{L}\{T(x, y, t)\} = \int_0^\infty e^{-st} T(x, y, t) dt$$

dan ontstaat voor v de vergelijking

$$\Delta v - sv = -e^{sx} \delta(y) U(x).\tag{3}$$

1.2.1. Bepaal een oplossing van de vergelijking

$$\begin{aligned}\Delta v - sv &= -\delta(x)\delta(y), \\ v(x, y) &\rightarrow 0 & \text{voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Toon vervolgens aan dat de oplossing van (3) gegeven wordt door

$$v(x,y,s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-s\xi} K_0(\sqrt{s[(x-\xi)^2 + y^2]}) d\xi. \quad (4)$$

Leid af, met behulp van de formules uit punt 2, dat

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-r^2/4t}}{2t}\right\} = K_0(r\sqrt{s}). \quad (5)$$

Verifieer nu, dat inverse Laplace transformatie van (4) voert tot de oplossing (2).

1.2.2. Los de vergelijking (3) op door Fourier transformatie over de variabele x .

Stel

$$w(\lambda, y, s) = \mathcal{F}\{v(x, y, s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} v(x, y, s) dx$$

dan voldoet w aan de vergelijking

$$\frac{d^2 w}{dy^2} - (s + \lambda^2)w = -\frac{\delta(y)}{s - i\lambda}$$

met oplossing

$$w(\lambda, y, s) = \frac{e^{-\sqrt{s+\lambda^2}|y|}}{2(s - i\lambda)\sqrt{s+\lambda^2}}. \quad (6)$$

Toon dit aan.

Laat zien dat inverse Fourier transformatie van (6) tot de oplossing (4) voert.

1.2.3. Toon aan dat

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}|y|}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{-y^2/4t}}{\sqrt{\pi t}},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{w\} = \frac{e^{-\lambda^2 t - y^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}} * e^{i\lambda t} = \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau - y^2/4\tau + i\lambda(t-\tau)} \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi \tau}}.$$

Verifieer dat na inverse Fourier transformatie van de laatste uitkomst weer de oplossing (2) ontstaat.

2. Formules voor $K_0(x)$

Differentiaalvergelijking voor $K_0(x)$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0, \quad x > 0.$$

Gedrag van $K_0(x)$ voor $x \rightarrow 0$ resp. $x \rightarrow \infty$:

$$K_0(x) = \log \frac{2}{x} - \gamma + O(x^2 \log x), \quad (x \rightarrow 0),$$

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-2})], \quad (x \rightarrow \infty).$$

Integraalvoorstellingen voor $K_0(x)$,

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cosh t \, dt,$$

$$K_0(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{ix \sinh t - |y| \cosh t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{ix\lambda - |y| \sqrt{1+\lambda^2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-|y| \sqrt{1+\lambda^2}}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \cos \lambda x \, d\lambda.$$

3. Opgaven

3.1. Werk de voorgaande schets uit.

3.2. Bepaal $T_0(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(x+t, y, t)$.

Laat zien dat $T_0(x, y)$ voldoet aan

$$\Delta T_0 + \frac{\partial T_0}{\partial x} = -\delta(x)\delta(y)$$

en interpreteer dit.

Toon aan dat

$$\lim_{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0} [T(x+t, y, t) - T_0(x, y)] = \frac{1}{4\pi} E_1\left(\frac{t}{4}\right)$$

waarin

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, \quad x > 0.$$

Onderzoek het gedrag van $E_1(x)$ voor kleine x (machtreeksontwikkeling) en voor grote x (asymptotische ontwikkeling):

3.3. Bepaal een oplossing van het warmtegeleidingsprobleem

$$\Delta T - T_t = -\delta(x-t)\delta(y), \quad x > 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad t > 0;$$

$$T(x,y,0) = 0, \quad x > 0, \quad -\infty < y < \infty \quad (\text{beginvoorwaarde});$$

$$T_x(0,y,t) = 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad t > 0 \quad (\text{randvoorwaarde});$$

$$T(x,y,t) \rightarrow 0 \quad \text{voor} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Maak hierbij gebruik van de spiegelingsmethode.

1. De algemene partiële differentiaalvergelijking van de eerste orde in twee onafhankelijke variabelen kan worden geschreven als

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad (1)$$

In elk punt (x_0, y_0, u_0) kan (1) worden beschouwd als een relatie tussen p en q , waarvan de oplossingen in parametervorm luiden

$$p = p(\lambda), \quad q = q(\lambda), \quad F(x_0, y_0, u_0, p(\lambda), q(\lambda)) = 0 \quad (2)$$

De vector $(p(\lambda), q(\lambda), -1)$ staat loodrecht op het vlak

$$u - u_0 = p(\lambda)(x - x_0) + q(\lambda)(y - y_0) \quad (3)$$

dat kan worden geïnterpreteerd als het raakvlak aan het integraaloppervlak. De familie van mogelijke raakvlakken omhult een kegel, de zg. Monge-kegel, met als top (x_0, y_0, u_0) . Elk integraaloppervlak moet in al zijn punten raken aan de Monge-kegel.

De beschrijvende van de Monge-kegel worden gegeven door

$$\left. \begin{aligned} 0 &= p'(\lambda)(x - x_0) + q'(\lambda)(y - y_0) \\ u - u_0 &= p(\lambda)(x - x_0) + q(\lambda)(y - y_0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Differentiatie van (2) geeft

$$F_p p'(\lambda) + F_q q'(\lambda) = 0 \quad (5)$$

(4) kan dus worden geschreven als

$$\frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q} = \frac{u - u_0}{pF_p + qF_q} \quad (6)$$

Hieruit volgt dat de richting van een beschrijvende wordt gegeven door de vector

$$(F_p, F_q, pF_p + qF_q) \quad (7)$$

Zo'n richting wordt een karakteristieke richting genoemd.

Laat $u = u(x, y)$ een bepaald integraaloppervlak zijn.

Op dit oppervlak introduceren we een familie van karakteristieke krommen, die in elk punt raken aan een karakteristieke richting,

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q, \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q \quad (8)$$

waar s een parameter is. Langs zo'n kromme hebben we

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= p_x \frac{dx}{ds} + p_y \frac{dy}{ds} = p_x F_p + p_y F_q \\ \frac{dq}{ds} &= q_x \frac{dx}{ds} + q_y \frac{dy}{ds} = q_x F_p + q_y F_q \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Differentiatie van (1) naar x en y geeft

$$\left. \begin{aligned} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q q_x &= 0 \\ F_y + F_u q + F_p p_y + F_q q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(9) kan dus worden vervangen door

$$\frac{dp}{ds} = -F_x - pF_u ; \quad \frac{dq}{ds} = -F_y - qF_u \quad (11)$$

De vergelijkingen (8), (11) vormen het zg. karacteristiek stelsel differentiaalvergelijkingen. Elke oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen met $F(x,y,u,p,q) = 0$, wordt een karacteristieke strook genoemd en bestaat uit een karakteristieke kromme $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$ tezamen met een stelsel raakvlakken loodrecht op $(p(s), q(s), -1)$. Op elk integraaloppervlak ligt een familie karakteristieke stroken. Omgekeerd kan men uitgaan van het karakteristieke stelsel differentiaalvergelijkingen (8), (11). Door elk element $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ gaat dan een strook $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$, $p = p(s)$, $q = q(s)$.

Stelling. Langs iedere strook is F constant.

Als dus $F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0$ dan is $F = 0$ langs de hele strook en de strook is dan weer een karakteristieke strook.

Stelling. Als een karakteristieke strook een element $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ met een integraaloppervlak gemeen heeft dan ligt zij helemaal op het oppervlak.

2. Het Cauchy-probleem

We willen een integraaloppervlak $u = u(x,y)$ bepalen dat door de beginkromme C gaat. Hierbij wordt C gegeven door de parametervoorstelling

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad u = u(t) \quad (12)$$

Eerst breiden we C uit tot een beginstrook C_1 door functies

$$p = p(t), \quad q = q(t)$$

in te voeren, die moeten voldoen aan de volgende voorwaarden

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= p(t) \frac{dx}{dt} + q(t) \frac{dy}{dt} \\ F(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Door elk element van C_1 trekken we de karakteristieke strook. De verzameling van alle karakteristieke stroken wordt gegeven door

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t), \quad p = p(s, t), \quad q = q(s, t). \quad (15)$$

De functies (15) zullen als functies van s aan het karakteristieke stelsel (8), (11) voldoen, terwijl zij voor $s = 0$ reduceren tot het beginelement $x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)$ van C .

Oplossing van s en t als functies van x en y is mogelijk als de Jacobiaan

$$J = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = x_s y_t - x_t y_s = F_p y_t - F_q x_t \neq 0 \quad (16)$$

langs C_1 . Dan krijgen we:

$$u = u(s(x, y), t(x, y)) = u(x, y), \quad p = p(x, y), \quad q = q(x, y). \quad (17)$$

Stelling. $u_x = p, \quad u_y = q.$

Conclusie. In een voldoende kleine omgeving van C_1 heeft het Cauchy-probleem een eenduidige oplossing.

Als $J = 0$ langs C_1 dan geldt

$$F_p y_t - F_q x_t = 0 \quad (18)$$

of

$$x_t = F_p, \quad y_t = F_q, \quad u_t = p F_p + q F_q. \quad (19)$$

Dan heeft dus in elk punt van C de raaklijn van C de karakteristieke richting. We onderscheiden twee gevallen:

a) C_1 is een karakteristieke strook.

Dan heeft het Cauchy-probleem oneindig veel oplossingen.

b) C_1 is geen karakteristieke strook.

Dan heeft het Cauchy-probleem ofwel geen oplossing of het heeft een oplossing waarvoor de tweede orde afgeleiden singulier zijn op C .

Literatuur

Courant-Hilbert, Methods of Math. Phys. Vol II, p.75-84, p.88-97.

Garabedian, Partial differential Equations, p.24-33.

3. Opgaven

3.1. Bepaal de oplossing van het Cauchy-probleem voor de eikonaalvergelijking

$$p^2 + q^2 = 1 \quad (20)$$

waarbij de beginkromme is gegeven door

a) $x = -y, u = 0$;

b) $x^2 + y^2 = 1, u = 0$;

c) $x = 2t, y = t + 1, u = t$;

d) $y^2 = 2x + 1, u = x$;

e) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{u}{5}$;

f) $x = \cos t, y = \sin t, u = t \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$.

Ga na, dat de oplossing van 1.f) tweede orde afgeleiden heeft, die singulier zijn op de beginkromme.

3.2. Ga na dat de karakteristieke krommen van de eikonaalvergelijking rechte lijnen zijn. Teken voor elk van de oplossingen van 1.a), b), c), d) de projecties op het x, y -vlak van de karakteristieke krommen die op het integraaloppervlak liggen. Deze projecties worden stralen genoemd. Ga na dat deze stralen loodrecht staat op de krommen $u(x, y) = \text{const.}$ in het x, y -vlak. Probleem 1.d) heeft twee oplossingen, wat leidt tot twee stelsels stralen.

Van elk punt van de parabool $y^2 = 2x + 1$ gaan twee ^{alleen} streken uit, nl. één straal van elk stelsel. Laat zien dat deze twee stralen gelijke hoeken maken met de normaal op de parabool in dat punt.

Beschouw het Cauchy-probleem voor de eikonaalvergelijking waarbij de beginkromme is geven door

$$x = x(t), y = y(t), u = u(t) \quad (21)$$

Toon aan dat de stralen loodrecht staan op de krommen $u(x, y) = \text{const.}$ in het x, y -vlak. Laat zien dat de afstand tussen twee krommen $u = C_1 = \text{const.}$ en $u = C_2 = \text{const.}$, gemeten langs een straal gelijk is aan $|C_1 - C_2|$. Elk tweetal krommen $u = \text{const.}$ is dus equidistant.

3.3. Bepaal de oplossing van het Cauchy-probleem voor de partiële differentiaalvergelijking

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1 \quad (22)$$

waarbij de beginkromme is gegeven door

a) $y = u = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

b) $x = \frac{13}{5} \cos \theta$, $y = \frac{13}{5} \sin \theta$, $u = \frac{4}{5}$;

c) $x^2 + y^2 = 4$, $u = 1$.

Laat zien dat de karakteristieke krommen door een beginelement $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ met $u_0^2(p_0^2 + q_0^2 + 1) = 1$ en $u_0 \neq \pm 1$ cirkels zijn met de volgende eigenschappen:

- a) De straal van de cirkel is gelijk aan 1.
- b) Het middelpunt van de cirkel ligt in het x, y -vlak.
- c) Het vlak van de cirkel staat loodrecht op het x, y -vlak.

Verklaar waarom (22) de differentiaalvergelijking van de "buisvormige oppervlakken" wordt genoemd.

Oefeningen partiële differentiaalvergelijkingen 1964 - IV

1. $\Delta\varphi - \lambda^2\varphi = -\delta(x-a)\delta(y)$, $0 < x < b$, $-\infty < y < \infty$, $0 < a < b$.

Randvoorwaarden: $\varphi(0,y) = \varphi(b,y) = 0$.

φ begrensd voor $y \rightarrow \pm \infty$.

1.1. Oplossing

Volgens het spiegelingprincipe is het potentiaalveld voortzetbaar in het hele vlak behoudens

bronnen in $x = a$, $a \pm 2b$, $a \pm 4b$, ... en

putten in $x = -a$, $-a \pm 2b$, $-a \pm 4b$,

1.1.1. Het geval $\lambda = 0$

De potentiaal van een eindige rij van bronnen in

$x = 0, \pm 2b, \pm 4b, \dots, \pm 2Nb$ wordt gevonden door superpositie.

$$f_N(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \log \sqrt{(x-2nb)^2 + y^2} + \text{regulier harmonisch.}$$

Zij $w = \frac{x+iy}{2b}$, dan is

$$f_N(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \left[\log |w \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{w^2}{n^2}\right)| + 2 \log N! - (2N+1) \log 2b \right] + \text{reg.}$$

$$\text{Daar } \lim_{N \rightarrow \infty} \pi w \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{w^2}{n^2}\right) = \sin \pi w,$$

geldt dus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[f_N(x,y) + \frac{1}{\pi} \log N! - \frac{2N+1}{2\pi} \log 2b \right] = \frac{-1}{2\pi} \log |2 \sin \pi w| + \text{reg.}$$

De oplossing van het randwaardeprobleem is

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \lim_{N \rightarrow \infty} [f_N(x-a,y) - f_N(x+a,y)] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{\cosh \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{\pi(x+a)}{b}}{\cosh \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{\pi(x-a)}{b}} \right). \end{aligned}$$

Opgave 1

Ga na, dat deze functie inderdaad aan de randvoorwaarden en de differentiaalvergelijking (ook in (a,0)) voldoet.

$\varphi(x,y)$ is een oneven periodieke functie van x met periode $2b$.

Uit $\log 2(\cosh \alpha - \cos \beta) = \alpha + \log[(1 - e^{i\beta - \alpha})(1 - e^{-i\beta - \alpha})] =$

$$= \alpha - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha m}}{m} \cos \beta m \quad (\alpha > 0) \text{ volgt de Fourier-}$$

ontwikkeling

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \sin \frac{\pi m a}{b} \sin \frac{\pi m x}{b} e^{-\frac{\pi m |y|}{b}} .$$

Opgave 2

Vind deze oplossing door separatie van variabelen in het randwaardeprobleem.

opm.: Voor een oneindige rij van bronnen in $x = 0, \pm 2b, \pm 4b, \dots$ kunnen we als potentiaal nemen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -\frac{1}{2\pi} \log |2 \sin \pi w| = -\frac{1}{4\pi} \log [2(\cosh \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{\pi x}{b})] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi |y|}{2b} + \frac{1}{2} \log \left\{ 1 - 2e^{-\frac{\pi |y|}{b}} \cos \frac{\pi x}{b} + e^{-\frac{2\pi |y|}{b}} \right\} \right]. \end{aligned}$$

De eerste term $-\frac{|y|}{4b}$ is potentiaal van de vervangende enkel-laag.

1.1.2. Het geval $\lambda > 0$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[K_0(\lambda \sqrt{(x-a-2nb)^2 + y^2}) - K_0(\lambda \sqrt{(x+a-2nb)^2 + y^2}) \right].$$

De Fourierontwikkeling luidt:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \lambda^2 b^2}} e^{-\frac{|y|}{b} \sqrt{\pi^2 n^2 + \lambda^2 b^2}} \sin \frac{\pi n a}{b} \sin \frac{\pi n x}{b} .$$

Opgave 3

Los het vraagstuk op m.b.v. separatie van variabelen.

Opgave 4

Laat zien dat de twee formules equivalent zijn; gebruik de formule:

$$K_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt - |y|\sqrt{\lambda^2+t^2}} \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}, \quad \lambda > 0.$$

Opgave 5

De oplossing van het probleem

$$\Delta\varphi - \lambda^2\varphi = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nb)\delta(y), \quad \lambda > 0, \quad \varphi \text{ begrensd voor}$$

$y \rightarrow \pm \infty$, is

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_0(\lambda\sqrt{(x-nb)^2+y^2}) = \\ &= \frac{1}{2b\lambda} e^{-\lambda|y|} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2m^2+\lambda^2b^2}} e^{-\frac{|y|}{b}\sqrt{4\pi^2m^2+\lambda^2b^2}} \cos\frac{2\pi mx}{b}. \end{aligned}$$

Laat zien dat de eerste term oplossing is van

$$\Delta\varphi - \lambda^2\varphi = - \frac{1}{b} \delta(y).$$

Voor kleine λ en $|y| \gg b$ overheerst deze term.

Laat zien dat

$$\frac{1}{2b\lambda} e^{-\lambda|y|} = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}) d\xi$$

de potentiaal is van een enkellaag langs $y = 0$, die gemiddeld dezelfde sterkte heeft als de bronnenrij (equivalente enkellaag).

Opgave 6. Zij $z = x + iy$.

$$\text{Bepaal } \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{b} \int_{-(N+\frac{1}{2})b}^{(N+\frac{1}{2})b} \log|z - \xi| d\xi - \sum_{n=-N}^N \log|z - nb| \right] \quad (1)$$

$$\text{Bepaal } \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{b} \int_0^{Nb} \log |z+\xi| \, d\xi - \sum_{n=1}^N \log |z+(n-\frac{1}{2})b| \right] \quad (2)$$

Leid het resultaat van (1) ook af uit dat van (2).

Formules over de Γ -functie:

$$\frac{1}{\Gamma(w)} = \lim_{N \rightarrow \infty} w N^{-w} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{w}{n}\right) = w e^{\gamma w} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{n}\right) e^{-\frac{w}{n}}.$$

γ = constante van Euler.

$$\log \Gamma(w+1) = \log \sqrt{2\pi} + (w+\frac{1}{2}) \log w - w + O\left(\frac{1}{w}\right), \quad |\arg w| \leq \pi - \delta$$

$$\Gamma(1-w)\Gamma(w) = \frac{\pi}{\sin \pi w}.$$