

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde

PARTIËLE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Syllabus naar het college van
Prof.dr. J. Boersma

Najaarssemester 1976

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

PARTIËLE

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Prof. Dr. J. Boersma

Najaarssemester 1976

Inhoudsopgave

I.	Inleiding	1
II.	PDV's van eerste orde	3
	2.1. Quasi-lineaire PDV van eerste orde in twee onafhankelijke variabelen	3
	2.2. Lineaire PDV van eerste orde in twee onafhankelijke variabelen	9
	2.3. Slotopmerkingen	12
III.	PDV's van tweede orde in twee onafhankelijke variabelen	14
	3.1. Classificatie van PDV's van tweede orde en herleiding tot normaalvorm	14
	3.2. Cauchy probleem voor de semi-lineaire PDV van tweede orde	20
	3.3. Semi-lineaire hyperbolische PDV in twee onafhankelijke variabelen	25
	3.4. Eén-dimensionale golfvergelijking	31
IV.	PDV's van tweede orde in n onafhankelijke variabelen, $n > 2$	40
	4.1. Classificatie van PDV's van tweede orde en herleiding tot normaalvorm	40
	4.2. Cauchy probleem voor de lineaire PDV van tweede orde	44
	4.3. Karakteristieke oppervlakken	46
V.	Correct gestelde problemen	50
VI.	Distributies, zwakke oplossingen van PDV's	55
	6.1. Definitie en eigenschappen van distributies in één variabele	55
	6.2. Distributies in n variabelen	63
	6.3. Zwakke oplossingen van PDV's	66
VII.	Elliptische PDV's: Laplace vergelijking en Helmholtz vergelijking	70
	7.1. Inleiding en recapitulatie	70
	7.2. Maximum-minimum principe voor harmonische functies	72
	7.3. Stelling van Kelvin, uitwendig Dirichlet en Neumann probleem voor de Laplace vergelijking	74
	7.4. Fundamentele oplossing voor de Laplace operator	78
	7.5. Middelwaarde-eigenschap voor harmonische functies	83

7.6.	Funkties van Green en Neumann	84
7.7.	Funkties van Green en Neumann voor een halfruimte	88
7.8.	Funkties van Green en Neumann voor een bolgebied	90
7.9.	Verdere eigenschappen van harmonische funkties	95
7.10.	Dirichlet en Neumann probleem voor de Helmholtz vergelijking	98
7.11.	Eigenwaardeprobleem voor de Laplace operator	102
VIII.	Hyperbolische PDV's: golfvergelijking	110
8.1.	Cauchy probleem voor de golfvergelijking in R_3	110
8.2.	Cauchy probleem voor de golfvergelijking in R_2, R_1	114
8.3.	Principe van Duhamel, Cauchy probleem voor de in- homogene golfvergelijking in R_n	116
8.4.	Stralingsprobleem, fundamentele oplossing van de golfvergelijking	119
8.5.	Eenduidigheidsstellingen	122
IX.	Parabolische PDV's: diffusievergelijking	127
9.1.	Fundamentele oplossing, Cauchy probleem voor de diffusievergelijking	127
9.2.	Maximum-minimum principes, eenduidigheidsstellingen	133
	Literatuur	138

Inhoudsbeschrijving
van de latere aanvullingen bij
PARTIËLE
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
najaarssemesterjaar 1976

AANVULLING THEORIE

7.11 Eigenwaardeprobleem voor de Laplace operator -1-

OPGAVEN

II. PDV's van 1e orde	1
III. PDV's van 2e orde in 2 onafhankelijke variabelen	2
IV. PDV's van 2e orde in n onafhankelijke variabelen, $n > 2$.	6
VI. Distributies, zwakke oplossingen van PDV's	8
VII. Elliptische PDV's: Laplace vergelijking en Helmholtz vergelijking	11
VIII. Hyperbolische PDV's: golfvergelijking	17
IX. Parabolische PDV's: diffusievergelijking	20

I. Inleiding.

Een partiële differentiaalvergelijking (PDV) is een relatie tussen een onbekende functie van twee of meer onafhankelijke variabelen en haar partiële afgeleiden.

Onder de orde van een PDV verstaan we de orde van de hoogste afgeleide die in de PDV voorkomt.

De algemene gedaante van een PDV van eerste resp. tweede orde in twee onafhankelijke variabelen x, y wordt gegeven door resp.

$$(1) \quad F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

$$(2) \quad G(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Hierin is $u = u(x, y)$ de genoemde onbekende functie, terwijl u_x, u_y, \dots de gebruikelijke notatie is voor de partiële afgeleiden $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$. Evenzo wordt de algemene gedaante van een PDV van eerste orde in n onafhankelijke variabelen x_1, x_2, \dots, x_n , gegeven door

$$(3) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0.$$

Zij gegeven een PDV van orde m in de n onafhankelijke variabelen x_1, x_2, \dots, x_n . De functie $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ heet een oplossing van de PDV in een gebied $G \subset R_n$, indien

- a) $u \in C^m(G)$ d.w.z. de functie $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is in G m keer continu differentieerbaar naar elk van haar variabelen,
- b) substitutie van $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en van de partiële afgeleiden van deze functie in de PDV doet deze overgaan in een identiteit.

Een aldus gedefinieerde oplossing heet ook wel klassieke oplossing of sterke oplossing.

In hoofdstuk VI zal het begrip oplossing worden uitgebreid door de eis a) te verzwakken; we spreken dan van een gegeneraliseerde oplossing of zwakke oplossing.

Een PDV bezit in het algemeen meerdere oplossingen. Evenals bij een gewone differentiaalvergelijking (GDV) kan men zoeken naar de algemene oplossing van een PDV. De algemene oplossing van een GDV van orde m bevat m willekeurige integratieconstanten; deze worden bepaald door m begin- of randvoorwaarden. Een soortgelijk resultaat blijkt te gelden voor PDV's: De algemene oplossing van een PDV van orde m in n onafhankelijke variabelen bevat m wil-

lekeurige functies van $(n-1)$ onafhankelijke variabelen. We geven geen bewijs van dit resultaat maar vermelden ter illustratie de volgende voorbeelden:

- 1) De PDV $u_z = 0$ in drie onafhankelijke variabelen x, y, z heeft als algemene oplossing $u = w(x, y)$, waarbij w een willekeurige functie voorstelt.
- 2) De één-dimensionale golfvergelijking

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

heeft de algemene oplossing $u = w_1(x - ct) + w_2(x + ct)$, waarbij w_1, w_2 willekeurige functies voorstellen.

In tegenstelling tot GDV's speelt het begrip algemene oplossing bij PDV's slechts een geringe rol. In de theorie der PDV's onderzoekt men voornamelijk de oplossing van zgn. beginwaardeproblemen resp. randwaardeproblemen, waarbij de PDV en de begin- of randvoorwaarden als een bij elkaar behorend geheel worden beschouwd. We zoeken dan een functie die zowel aan de PDV als aan de begin- of randvoorwaarden voldoet.

In dit college zullen we ons uitsluitend bezighouden met PDV's van eerste en tweede orde. De theorie der PDV's van eerste orde is min of meer afgerond; de behandeling in hoofdstuk II beperkt zich tot de quasi-lineaire en de lineaire PDV van eerste orde. Bij de behandeling van PDV's van tweede orde beperken we ons voornamelijk tot lineaire PDV's, welke worden onderscheiden in drie klassen: elliptische, hyperbolische en parabolische PDV's. Als belangrijkste vertegenwoordigers van deze klassen zijn te beschouwen de Laplace vergelijking en de Helmholtz vergelijking als voorbeelden van elliptische PDV's, de golfvergelijking als voorbeeld van een hyperbolische PDV en de diffusievergelijking of warmtegeleidingsvergelijking als voorbeeld van een parabolische PDV. In de latere hoofdstukken zullen speciaal deze PDV's met hun bijbehorende begin- of randwaardeproblemen onderzocht worden. Daarbij wordt aandacht besteed zowel aan oplossingsmethoden als aan existentie- en eenduidigheidsstellingen; een existentie - resp. eenduidigheidsstelling doet een uitspraak over het bestaan resp. over de eenduidigheid van de oplossing van een begin- of randwaardeprobleem.

II. PDV's van eerste orde.

2.1. Quasi-lineaire PDV van eerste orde in twee onafhankelijke variabelen.

De algemene gedaante van een PDV van eerste orde in twee onafhankelijke variabelen werd reeds gegeven in (I.1). We beperken ons hier tot het onderzoek van enige bijzondere gevallen van (I.1), namelijk

a) quasi-lineaire PDV

$$(1.1) \quad a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u),$$

b) lineaire PDV

$$(1.2) \quad a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y).$$

De lineaire PDV is een bijzonder geval van de quasi-lineaire PDV.

Laat nu de functie $u = u(x,y)$ een oplossing zijn van de quasi-lineaire PDV (1.1). Met deze oplossing correspondeert een zgn. integraaloppervlak in de (x,y,u) -ruimte. De normaal \underline{n} in een punt van dit oppervlak heeft richtingsgetallen $(u_x, u_y, -1)$. Voer nu in het vectorveld

$$(1.3) \quad \underline{d}(x,y,u) = (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)).$$

De PDV (1.1) drukt dan juist uit, $\underline{d} \cdot \underline{n} = 0$ i.e. de vector \underline{d} staat loodrecht op de normaal \underline{n} . Het integraaloppervlak $u = u(x,y)$ raakt daarom in elk van zijn punten aan de vector \underline{d} .

We construeren nu ruimtekrommen die in elk van hun punten raken aan de vector \underline{d} . Een dergelijke kromme heet een karakteristieke kromme of karakteristiek. Zij de karakteristiek K beschreven door de parametervoorstelling $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$ met parameter s . K zal nu in elk van zijn punten raken aan de vector \underline{d} indien geldt

$$(1.4) \quad x_s = \lambda a(x,y,u), \quad y_s = \lambda b(x,y,u), \quad u_s = \lambda c(x,y,u),$$

waarin λ een evenredigheidskonstante is. Kies de parameter s zo dat $\lambda = 1$ wordt. Dan worden de karakteristieken bepaald door het volgende stelsel van drie GDV's,

$$(1.5) \quad x_s = a(x,y,u), \quad y_s = b(x,y,u), \quad u_s = c(x,y,u).$$

De oplossing van dit stelsel ligt in het algemeen eenduidig vast zodra we een drietal beginvoorwaarden voorschrijven, $x(s_0) = x_0$, $y(s_0) = y_0$, $u(s_0) = u_0$.

Dit betekent dat door het punt (x_0, y_0, u_0) precies één karakteristiek gaat.

Elk integraaloppervlak van de PDV wordt nu gegenereerd door een familie van karakteristieken op grond van de volgende stelling:

Stelling. Indien een karakteristiek één punt met een integraaloppervlak gemeen heeft, dan ligt die karakteristiek geheel op het integraaloppervlak.

Bewijs. Zij gegeven een integraaloppervlak $S: u = U(x, y)$, en een karakteristiek $K: x = x(s), y = y(s), u = u(s)$. K en S zullen een punt (x_0, y_0, u_0) gemeen hebben waarbij $x_0 = x(s_0), y_0 = y(s_0), u_0 = u(s_0), u_0 = U(x_0, y_0)$.

De functies $x(s), y(s), u(s)$ worden bepaald door het volgende stelsel van drie GDV's met beginvoorwaarden,

$$(1.6) \quad \begin{cases} x_s = a(x, y, u), & y_s = b(x, y, u), & u_s = c(x, y, u), \\ x(s_0) = x_0, & y(s_0) = y_0, & u(s_0) = u_0. \end{cases}$$

Voer vervolgens in de functies $x^*(s), y^*(s)$ welke oplossing zijn van het stelsel van twee GDV's met beginvoorwaarden

$$(1.7) \quad \begin{cases} x_s^* = a(x^*, y^*, U(x^*, y^*)), & y_s^* = b(x^*, y^*, U(x^*, y^*)), \\ x^*(s_0) = x_0, & y^*(s_0) = y_0. \end{cases}$$

Ten opzichte van (1.6) is in (1.7) de variabele u vervangen door de functie $U(x^*, y^*)$ welke oplossing is van de PDV.

Zij nu K^* de kromme gegeven door de parametervoorstelling

$$(1.8) \quad x = x^*(s), \quad y = y^*(s), \quad u = U(x^*(s), y^*(s)) = u^*(s),$$

dan ligt K^* geheel op het integraaloppervlak S . Langs K^* zal gelden

$$(1.9) \quad u_s^* = U_x x_s^* + U_y y_s^* = a U_x + b U_y = c(x^*, y^*, u^*)$$

omdat de functie $u = U(x, y)$ voldoet aan de PDV. Uit (1.7), (1.9) volgt dat de functies $x^*(s), y^*(s), u^*(s)$ voldoen aan het volgende stelsel van drie GDV's met beginvoorwaarden

$$(1.10) \quad \begin{cases} x_s^* = a(x^*, y^*, u^*), & y_s^* = b(x^*, y^*, u^*), & u_s^* = c(x^*, y^*, u^*), \\ x^*(s_0) = x_0, & y^*(s_0) = y_0, & u^*(s_0) = U(x_0, y_0) = u_0. \end{cases}$$

Aangezien dit stelsel met beginvoorwaarden identiek is met (1.6) zal gelden $x(s) = x^*(s)$, $y(s) = y^*(s)$, $u(s) = u^*(s)$ i.e. K en K^* vallen samen. K ligt dus geheel op S .

Gevolg. Zij S een integraaloppervlak, trek dan door elk punt van S de karakteristiek. De aldus ontstane familie van karakteristieken zal geheel in S liggen en daarmee S genereren.

Omgekeerd: Zij S' een oppervlak dat gegenereerd wordt door een familie van karakteristieken. Dan raakt S' in elk van zijn punten aan de vector $\underline{d}(x,y,u)$ en is daarmee tevens integraaloppervlak.

We formuleren nu het zgn. Cauchy probleem of beginwaardeprobleem voor de quasi-lineaire PDV (1.1): Gevraagd wordt een integraaloppervlak $u = u(x,y)$ van de PDV te bepalen dat gaat door de beginkromme C ,

$$(1.11) \quad x = X(t), y = Y(t), u = U(t).$$

Ter oplossing van het Cauchy probleem trekken we door elk punt t van C de karakteristiek. De aldus gevormde familie van karakteristieken wordt beschreven door de parametervoorstelling

$$(1.12) \quad x = x(s,t), y = y(s,t), u = u(s,t)$$

waarbij s de lopende parameter langs de karakteristiek voorstelt. De functies $x(s,t)$, $y(s,t)$, $u(s,t)$ worden bepaald door oplossing van het volgende stelsel van drie GDV's met beginvoorwaarden,

$$(1.13) \quad \begin{cases} x_s = a(x,y,u), y_s = b(x,y,u), u_s = c(x,y,u), \\ x(0,t) = X(t), y(0,t) = Y(t), u(0,t) = U(t). \end{cases}$$

Langs de beginkromme C is $s = 0$ gesteld.

Een eventueel integraaloppervlak door C zal de familie van karakteristieken (1.12) moeten bevatten. Omgekeerd: Als de familie (1.12) een oppervlak genereert dan is dit oppervlak een integraaloppervlak van de PDV.

Onderstel nu dat we uit $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ de variabelen s,t kunnen "oplossen" als eenwaardige functies van x,y i.e. $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$. Het oppervlak gegeven door

$$(1.14) \quad u = u(s,t) = u(s(x,y), t(x,y))$$

is dan het gevraagde integraaloppervlak door C .

De oplossing van het Cauchy probleem bestaat dus en ligt eenduidig vast. De functies $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$ heten de inverse functies van $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$. Voldoende voorwaarde voor het bestaan van deze inverse functies is dat de Jacobi determinant $J(s,t) \neq 0$ is, i.e.

$$(1.15) \quad J(s,t) = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = x_s y_t - y_s x_t = a y_t - b x_t \neq 0.$$

Beschouw in het bijzonder $J(s,t)$ op de beginkromme C ,

$$(1.16) \quad J(0,t) = a(X(t), Y(t), U(t))Y_t - b(X(t), Y(t), U(t))X_t,$$

en merk op dat deze uitdrukking a priori bekend is zonder dat we de oplossing hoeven te kennen.

We onderscheiden nu de volgende gevallen:

1. $J(0,t) \neq 0$. Op grond van continuïteitsoverwegingen is dan ook $J(s,t) \neq 0$ in een omgeving van $s = 0$. Het Cauchy probleem bezit dan een eenduidige oplossing in een voldoende kleine omgeving van C .
2. $J(0,t) = 0$. We onderzoeken dan de partiële afgeleiden u_x, u_y op C . Deze dienen te voldoen aan het volgende stelsel van twee lineaire vergelijkingen,

$$(1.17) \quad \begin{cases} a(X(t), Y(t), U(t))u_x + b(X(t), Y(t), U(t))u_y = c(X(t), Y(t), U(t)), \\ X_t u_x + Y_t u_y = U_t. \end{cases}$$

De koëfficiëntendeterminant van dit stelsel is juist gelijk aan $J(0,t) = 0$. De oplosbaarheid van het stelsel (1.17) wordt dan bepaald door de rang van de aangevulde matrix

$$(1.18) \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ X_t & Y_t & U_t \end{pmatrix}.$$

Onderscheid nu twee gevallen:

- 2a. Rang $B = 2$. Het stelsel (1.17) is dan strijdig en bezit geen oplossing voor u_x, u_y op C . Ook het Cauchy probleem heeft dan geen oplossing met partiële afgeleiden welke continu zijn op C . Eventueel kan het Cauchy probleem wel een "oplossing" bezitten met partiële afgeleiden welke niet continu zijn

op C; zie het hierna volgende voorbeeld 2.

2b. Rang B = 1. Het stelsel (1.17) is dan afhankelijk en bezit oneindig veel oplossingen. Ook het Cauchy probleem heeft in dat geval oneindig veel oplossingen. Rang B = 1 betekent namelijk dat de rijen van de matrix (1.18) lineair afhankelijk zijn, i.e.

$$(1.19) \quad \begin{aligned} X_t &= \lambda a(X(t), Y(t), U(t)), & Y_t &= \lambda b(X(t), Y(t), U(t)), \\ & & U_t &= \lambda c(X(t), Y(t), U(t)). \end{aligned}$$

Uit (1.19) is af te lezen dat de beginkromme C zelf een karakteristiek is. De constructie van het integraaloppervlak mislukt nu omdat de karakteristiek door een punt t van C met C samenvalt. De familie van karakteristieken bestaat enkel uit de kromme C en genereert geen oppervlak.

Om toch tot een oplossing van het Cauchy probleem te komen trekken we door een punt van C een willekeurige kromme C^* waarop $J(0, t^*) \neq 0$ zal zijn. Het Cauchy probleem voor C^* heeft dan een eenduidige oplossing. Het betreffende integraaloppervlak zal C bevatten zoals volgt uit de constructie. Door nu C^* te variëren kan men willekeurig veel integraaloppervlakken bepalen welke door C gaan.

Conclusie. De oplossing van het Cauchy probleem voor de quasi-lineaire PDV van eerste orde laat zich terugbrengen tot het oplossen van een stelsel van drie GDV's voor de karakteristieken door de beginkromme.

Indien $J(0, t) = aY_t - bX_t \neq 0$ is langs de beginkromme C heeft het Cauchy-probleem een eenduidige oplossing.

Indien $J(0, t) = 0$ en C geen karakteristiek is heeft het Cauchy probleem geen oplossing.

Indien $J(0, t) = 0$ en C een karakteristiek is heeft het Cauchy probleem oneindig veel oplossingen.

Voorbeelden. 1. De karakteristieken van de quasi-lineaire PDV

$$uu_x + u_y = 1$$

worden bepaald door de GDV's

$$x_s = u, \quad y_s = 1, \quad u_s = 1.$$

Zij de beginkromme C gegeven door

$$x = t, y = t, u = \frac{1}{2}t,$$

dan vinden we de volgende familie van karakteristieken door de punten van C

$$x = x(s,t) = t + \frac{1}{2}st + \frac{1}{2}s^2, y = y(s,t) = t+s, u = u(s,t) = \frac{1}{2}t+s.$$

Na eliminatie van s en t volgt de oplossing

$$u = \frac{x - 2y + \frac{1}{2}y^2}{y - 2}, y \neq 2.$$

Merk op dat $J(s,t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s - 1 = \frac{1}{2}y - 1 \neq 0$ is voor $y \neq 2$.

2. Beschouw het Cauchy probleem voor dezelfde PDV met beginkromme C,

$$x = t^2, y = 2t, u = t.$$

Voor de karakteristieken door de punten van C vinden we nu

$$x = t^2 + st + \frac{1}{2}s^2, y = 2t+s, u = t+s.$$

In dit geval is $J(s,t) = s$ en dus $J(0,t) = 0$ langs C. C is evenwel zelf geen karakteristiek. Los s,t op als functie van x,y,

$$s = \bar{+} \sqrt{4x-y^2}, t = \frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2} \sqrt{4x-y^2}, 4x-y^2 > 0,$$

waarna volgt

$$u = \frac{1}{2}y \bar{+} \frac{1}{2} \sqrt{4x-y^2}, 4x-y^2 > 0.$$

Het Cauchy probleem heeft dus twee "oplossingen"; evenwel, de bijbehorende partiële afgeleiden u_x, u_y bestaan niet op C.

3. Beschouw het Cauchy probleem voor dezelfde PDV met beginkromme C,

$$x = \frac{1}{2}t^2, y = t, u = t.$$

De karakteristieken door de punten van C worden nu gegeven door

$$x = \frac{1}{2}(t+s)^2, y = t+s, u = t+s.$$

Deze karakteristieken vallen samen met C, daar C zelf karakteristiek is. Het Cauchy probleem heeft nu oneindig veel oplossingen. Na invoering van een kromme C^* als boven aangegeven zijn b.v. de volgende oplossingen af te leiden,

C^* : $x = t, y = 0, u = 0$ oplossing $u = y$;

C^* : $x = t, y = t, u = \frac{1}{2}t$ oplossing $u = \frac{x - 2y + \frac{1}{2}y^2}{y - 2}, y \neq 2$; etc.

Voor verdere voorbeelden zie Sneddon [9], chapter 2.

Opmerking over karakteristieken. Het begrip karakteristiek speelt een belangrijke rol in de theorie der PDV's. We formuleren nog een aantal eigenschappen van de karakteristieken van een quasi-lineaire PDV van eerste orde. Elk van deze eigenschappen is typisch voor een karakteristiek; men kan een karakteristiek eventueel door elk van deze eigenschappen definiëren.

1. Langs een karakteristieke beginkromme worden de partiële afgeleiden u_x, u_y niet eenduidig bepaald door de PDV; het stelsel (1.17) is afhankelijk. Het Cauchy probleem voor een karakteristieke beginkromme heeft geen eenduidige maar meerdere oplossingen.
2. Indien twee integraaloppervlakken $u = u_1(x,y), u = u_2(x,y)$ elkaar snijden volgens een kromme C , dan is C een karakteristiek.
3. In vervolg op eigenschap 2, laat C_0 de projectie zijn van C op het (x,y) -vlak. Voer dan in de functie $u(x,y)$ met $u(x,y) = u_1(x,y)$ resp. $u(x,y) = u_2(x,y)$ aan weerskanten van C_0 . De functie $u = u(x,y)$ is dan een gegeneraliseerde oplossing van de PDV met afgeleiden u_x, u_y welke discontinu zijn op de karakteristiek C .

2.2. Lineaire PDV van eerste orde in twee onafhankelijke variabelen.

Het Cauchy probleem voor de lineaire PDV (1.2) laat zich uiteraard behandelen volgens de methode van §2.1. We zullen dit Cauchy probleem nog eens vanuit een ander gezichtspunt beschouwen.

We voeren in het begrip grondkarakteristiek (characteristic base curve) d.i. de projectie van een karakteristiek op het (x,y) -vlak. De grondkarakteristieken van een lineaire PDV van eerste orde worden bepaald door het stelsel van twee GDV's,

$$(2.1) \quad x_s = a(x,y), \quad y_s = b(x,y) \quad \text{of} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}.$$

In deze GDV's komt de variabele u niet voor. De grondkarakteristieken zijn daarom a priori te bepalen, zonder dat we de oplossing u hoeven te kennen. In de literatuur wordt de grondkarakteristiek ook vaak karakteristiek genoemd; uit het verband is wel duidelijk wat bedoeld is.

Zij nu gegeven een beginkromme C met projectie C_0 op het (x,y) -vlak,

$$(2.2) \quad C : x = X(t), y = Y(t), u = U(t); C_0 : x = X(t), y = Y(t), u = 0.$$

Het Cauchy probleem voor de lineaire PDV van eerste orde met beginkromme C is dan als volgt te formuleren,

$$(2.3) \quad \begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y), \\ u(X(t), Y(t)) = U(t). \end{cases}$$

Ter oplossing van dit Cauchy probleem trekken we door elk punt t van C_0 de grondkarakteristiek K_0 . K_0 wordt beschreven door de parametervoorstelling

$$(2.4) \quad x = x(s,t), y = y(s,t),$$

waarbij de functies $x(s,t)$, $y(s,t)$ oplossing zijn van het volgende stelsel van twee GDV's met beginvoorwaarden,

$$(2.5) \quad \begin{cases} x_s = a(x,y), y_s = b(x,y), \\ x(0,t) = X(t), y(0,t) = Y(t). \end{cases}$$

Langs K_0 is $u = u(x,y)$ een samengestelde functie van s , $u = u(x(s,t), y(s,t))$, t vast, met afgeleide

$$(2.6) \quad u_s = u_x x_s + u_y y_s = a u_x + b u_y.$$

Langs een grondkarakteristiek geldt dus

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial s} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y},$$

waarbij s de parameter langs K_0 voorstelt. De operator $\partial/\partial s$ heet een inwendige differentiaaloperator (interior differential operator) langs K_0 . Langs een (grond)karakteristiek gaat de operator $a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ over in een inwendige differentiaaloperator.

Opmerking. Deze eigenschap is typerend voor karakteristieken in het algemeen: Zij L een lineaire differentiaaloperator in n onafhankelijke variabelen en Σ een oppervlak in R_n , dan is Σ karakteristiek oppervlak voor L indien langs Σ , L overgaat in een inwendige differentiaaloperator; zie Stakgold [1], Vol. II, p. 72-76.

Langs K_0 gaat de lineaire PDV over in

$$(2.8) \quad u_s = d(x(s,t), y(s,t)) - c(x(s,t), y(s,t))u, \quad t \text{ vast,}$$

d.i. een lineaire GDV voor u als functie van s . De oplossing $u = u(s,t)$ van (2.8) wordt nader vastgelegd door de beginvoorwaarde $u(0,t) = U(t)$ op C_0 . Daarmee is de functie u langs elke grondkarakteristiek bepaald en het Cauchy probleem is in principe opgelost.

De functiewaarde $U(t)$ is bepalend voor de oplossing $u = u(x,y)$ langs de grondkarakteristiek door het punt t van C_0 . Is de functie $U(t)$ b.v. discontinu voor $t = t_0$ dan zal deze discontinuïteit zich "voortplanten" langs de grondkarakteristiek door het punt t_0 van C_0 .

De functiewaarden $U(t)$ langs een boog AB van C_0 zijn bepalend voor de oplossing $u = u(x,y)$ in een gebied D van het (x,y) -vlak dat begrensd wordt door de grondkarakteristieken door A en B . Men noemt D het bepaaldheidsgebied (domain of determinacy) van de boog AB . Omgekeerd: Zij D' een gebied in het (x,y) -vlak, trek dan door elk punt van D' de grondkarakteristiek. Deze grondkarakteristieken snijden in C_0 een boog $A'B'$ uit; men noemt deze boog het afhankelijkheidsgebied (domain of dependence) van D' . De waarden $u = u(x,y)$, $(x,y) \in D'$ zijn slechts afhankelijk van de functiewaarden $U(t)$ op de boog $A'B'$.

Volgens §2.1 heeft het Cauchy probleem voor de lineaire PDV geen of oneindig veel oplossingen indien

$$(2.9) \quad J(0,t) = aY_t - bX_t = 0$$

oftewel indien

$$(2.10) \quad X_t = \lambda a(X(t), Y(t)), \quad Y_t = \lambda b(X(t), Y(t)).$$

Dit betekent dat C_0 een grondkarakteristiek is. De parameter t is zo te kiezen dat $\lambda = 1$ wordt.

Langs C_0 geldt nu overeenkomstig (2.8),

$$(2.11) \quad u_t = d(X(t), Y(t)) - c(X(t), Y(t)) U(t),$$

terwijl anderzijds $u = U(t)$ langs C_0 .

Deze betrekkingen zijn in het algemeen strijdig: het Cauchy probleem heeft dan geen oplossing.

Indien "toevallig" geldt

$$(2.12) \quad d(X(t), Y(t)) - c(X(t), Y(t)) U(t) = U_t,$$

dan zijn de betrekkingen niet strijdig: de oplossing van het Cauchy probleem is dan onbepaald. De voorwaarde (2.12) drukt juist uit dat de beginkromme C een karakteristiek is van de lineaire PDV.

2.3. Slotopmerkingen.

De voorgaande theorie laat zich gemakkelijk uitbreiden tot het geval van de quasi-lineaire PDV van eerste orde in $n (> 2)$ onafhankelijke variabelen x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$(3.1) \quad \sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) u_{x_i} = a(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Ook voor deze PDV kan men karakteristieken

$$(3.2) \quad x_i = x_i(s), \quad u = u(s), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

invoeren, die bepaald worden door het stelsel van $n+1$ GDV's

$$(3.3) \quad \frac{dx_i}{ds} = a_i, \quad \frac{du}{ds} = a, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Men kan voor deze PDV weer het Cauchy probleem formuleren: Gevraagd wordt een integraaloppervlak $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ van de PDV te bepalen dat gaat door de $(n-1)$ -dimensionale variëteit (manifold) C gegeven door de parameter-voorstelling

$$(3.4) \quad x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), \quad u = u(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

waarbij t_1, t_2, \dots, t_{n-1} parameters zijn. De oplossing van dit Cauchy probleem laat zich weer vinden met behulp van karakteristieken. Voor de details zie Courant-Hilbert [2], p. 69-75.

Het Cauchy probleem voor de algemene PDV van eerste orde in twee onafhankelijke variabelen

$$(3.5) \quad F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

laat zich eveneens oplossen met behulp van karakteristieken. De karakteristieken worden in dit geval bepaald door een stelsel van vijf GDV's. Voor de

theorie van de algemene PDV zie Courant-Hilbert [2], p. 75-84.

III. PDV's van tweede orde in twee onafhankelijke variabelen.

3.1. Classificatie van PDV's van tweede orde en herleiding tot normaalvorm.

De algemene gedaante van een PDV van tweede orde in twee onafhankelijke variabelen werd reeds gegeven in (I.2). We beperken ons hier tot het onderzoek van enige bijzondere gevallen van (I.2), namelijk

a) quasi-lineaire PDV

$$(1.1) \quad au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y),$$

waarbij de coëfficiënten a,b,c functies zijn van x,y,u,u_x,u_y ;

b) semi-lineaire PDV

$$(1.2) \quad a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y);$$

c) lineaire PDV

$$(1.3) \quad au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g,$$

waarbij de coëfficiënten a-g functies zijn van x,y .

We beschouwen in eerste instantie de semi-lineaire PDV (1.2), die we kortweg schrijven als

$$(1.4) \quad L[u] = f, \quad L[u] \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}.$$

$L[u]$ heet het hoofddeel (principal part) van de PDV.

We willen nu $L[u]$ herleiden tot een eenvoudiger vorm (de zgn. normaalvorm) door middel van een coördinaten-transformatie

$$(1.5) \quad \xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y).$$

De transformatie zal één-éénduidig zijn met Jacobi determinant

$$(1.6) \quad J = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0.$$

Na toepassing van de transformatie (1.5) gaat de PDV (1.4) over in

$$(1.7) \quad \Lambda[u] \equiv \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} = g(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

met coëfficiënten α,β,γ gegeven door

$$(1.8) \quad \begin{cases} \alpha = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2, \\ \beta = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y, \\ \gamma = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2. \end{cases}$$

Men kan gemakkelijk verifiëren dat

$$(1.9) \quad \beta^2 - \alpha\gamma = (b^2 - ac)(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2.$$

Daaruit blijkt dat het teken van $b^2 - ac$ invariant is onder de transformatie (1.5). Op grond van het teken van $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$ komen we nu tot de volgende classificatie voor de differentiaaloperator L in het punt (x,y) :

1. L heet hyperbolisch indien $b^2 - ac > 0$;
2. L heet parabolisch indien $b^2 - ac = 0$;
3. L heet elliptisch indien $b^2 - ac < 0$.

Ook de semi-lineaire PDV (1.4) heet dan hyperbolisch, parabolisch resp. elliptisch in het punt (x,y) . Het type van de PDV is een functie van x,y .

Laat nu de PDV (1.4) van vast type (hyperbolisch, parabolisch of elliptisch) zijn in een zeker gebied G in het (x,y) -vlak. In G is dan de PDV te herleiden tot haar normaalvorm. Deze herleiding verloopt als volgt voor de drie typen PDV's:

1. PDV is hyperbolisch in G , i.e. $b^2 - ac > 0$ in G .

Kies dan de functies $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ zodanig dat

$$(1.10) \quad \begin{cases} \alpha = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0, \\ \gamma = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 = 0. \end{cases}$$

Wegens $\beta^2 - \alpha\gamma = \beta^2 > 0$ is $\beta \neq 0$, waarna (1.7) te herleiden is tot de normaalvorm voor hyperbolische PDV's,

$$(1.11) \quad u_{\xi\eta} = h(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

We zullen de vergelijkingen (1.10) nader uitwerken. Merk daartoe op dat de vergelijkingen (1.10) van dezelfde vorm zijn als de vierkantsvergelijking

$$(1.12) \quad a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0.$$

Wegens $b^2 - ac > 0$ heeft (1.12) twee verschillende reële wortels λ_1, λ_2 gegeven door

$$(1.13) \quad \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(x,y) = \frac{-b(x,y) \pm \sqrt{b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)}}{a(x,y)},$$

aangenomen dat $a(x,y) \neq 0$ is. Aan de vergelijkingen (1.10) wordt nu voldaan indien

$$(1.14) \quad \varphi_x - \lambda_1(x,y)\varphi_y = 0, \quad \psi_x - \lambda_2(x,y)\psi_y = 0.$$

We hebben daarmee voor $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ een tweetal lineaire PDV's van eerste orde verkregen.

Beschouw nu de niveaukrommen

$$(1.15) \quad \xi = \varphi(x,y) = \text{konst.}, \quad \eta = \psi(x,y) = \text{konst.}$$

Langs een niveaukromme is y te beschouwen als een functie van x met afgeleide

$$(1.16) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\lambda_1(x,y), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y} = -\lambda_2(x,y).$$

De niveaukrommen (1.15) heten de karakteristieken van de PDV. Ze worden bepaald door de twee GDV's (1.16) welke eventueel zijn samen te nemen tot één GDV van de tweede graad,

$$(1.17) \quad a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0.$$

Opmerking. Uit (1.16) blijkt dat de niveaukrommen (1.15) juist de grondkarakteristieken zijn van de lineaire PDV's (1.14). Eigenlijk zou de benaming grondkarakteristieken voor de krommen (1.15) dus meer op zijn plaats zijn.

Een hyperbolische PDV bezit twee families van karakteristieken; door elk punt van het (x,y) -vlak gaat in het algemeen één karakteristiek van elk der families. De coördinaten ξ, η heten karakteristieke coördinaten; met deze coördinaten als onafhankelijke variabelen neemt de PDV de normaalvorm (1.11) aan.

Door de verdere transformatie

$$(1.18) \quad \xi^* = \xi + \eta, \quad \eta^* = \xi - \eta$$

gaat (1.11) nog over in

$$(1.19) \quad u_{\xi^*\xi^*} - u_{\eta^*\eta^*} = h^*(\xi^*, \eta^*, u, u_{\xi^*}, u_{\eta^*}).$$

Ook deze vergelijking heet wel de normaalvorm voor hyperbolische PDV's.

2. PDV is parabolisch in G, i.e. $b^2 - ac = 0$ in G.

Kies dan $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ zodanig dat

$$(1.20) \quad \alpha = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$$

en $\gamma \neq 0$ wordt. Wegens $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ is dan ook $\beta = 0$, waarna (1.7) te herleiden is tot de normaalvorm voor parabolische PDV's

$$(1.21) \quad u_{\eta\eta} = h(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

De vergelijking (1.20) laat zich nader uitwerken. Wegens $b^2 - ac = 0$ heeft de vierkantsvergelijking (1.12) twee gelijke reële wortels, $\lambda_1 = \lambda_2$, gegeven door

$$(1.22) \quad \lambda_1 = \lambda_1(x,y) = -\frac{b(x,y)}{a(x,y)}.$$

De vergelijking (1.20) is nu te herleiden tot

$$(1.23) \quad \varphi_x - \lambda_1(x,y)\varphi_y = 0.$$

De niveaokrommen $\xi = \varphi(x,y) = \text{konst.}$ worden dan bepaald door de GDV

$$(1.24) \quad \frac{dy}{dx} = -\lambda_1(x,y).$$

Deze krommen heten weer karakteristieken; een parabolische PDV bezit slechts één familie van karakteristieken.

De functie $\psi(x,y)$ is willekeurig te kiezen mits voldaan is aan de voorwaarde $\gamma \neq 0$ oftewel $\psi_x - \lambda_1(x,y)\psi_y \neq 0$.

3. PDV is elliptisch in G, i.e. $b^2 - ac < 0$ in G.

Kies weer $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ zodanig dat $\alpha = \gamma = 0$ wordt. Wegens $\beta^2 - \alpha\gamma = \beta^2 < 0$ is dan $\beta \neq 0$, waarna de PDV (1.7) overgaat in

$$(1.25) \quad u_{\xi\eta} = h(u, \xi, \eta, u_\xi, u_\eta).$$

Analoog als onder 1. moeten de functies $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ voldoen aan de PDV's

$$(1.26) \quad \varphi_x - \lambda_1(x,y)\varphi_y = 0, \quad \psi_x - \lambda_2(x,y)\psi_y = 0.$$

Wegens $b^2 - ac < 0$ zijn nu echter de wortels λ_1, λ_2 van de vierkantsvergelijking (1.12) toegevoegd complex,

$$(1.27) \quad \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(x,y) = \frac{-b(x,y) \pm i\sqrt{a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y)}}{a(x,y)}, \quad \bar{\lambda}_1 = \lambda_2.$$

De niveaokrommen $\xi = \varphi(x,y) = \text{konst.}$, $\eta = \psi(x,y) = \text{konst.}$ worden bepaald door de (complexe)GDV's (1.16); dit betekent dat een elliptische PDV geen reële karakteristieken heeft.

Onderstel nu dat de coëfficiënten $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ analytische functies zijn van x,y , dan zijn ook λ_1 , λ_2 analytische functies van x,y . Men kan bewijzen dat de vergelijkingen (1.26) dan een analytische oplossing

$$(1.28) \quad \xi = \varphi(x,y) = \varphi_0(x,y), \quad \eta = \psi(x,y) = \bar{\varphi}_0(x,y)$$

bezitten. Voer nu in de reële coördinaten

$$(1.29) \quad \rho = \frac{\xi+\eta}{2} = \text{Re}[\varphi_0(x,y)], \quad \sigma = \frac{\xi-\eta}{2i} = \text{Im}[\varphi_0(x,y)].$$

Transformatie naar de coördinaten ρ, σ doet (1.25) overgaan in de normaalvorm voor elliptische PDV's

$$(1.30) \quad u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} = h^*(\rho, \sigma, u, u_\rho, u_\sigma).$$

Ook in het geval dat de coëfficiënten niet analytisch zijn is de elliptische PDV te herleiden tot de normaalvorm (1.30); zie Garabedian [3], p. 66-67.

Voorbeelden. 1. De belangrijkste representanten van de drie klassen van PDV's van tweede orde zijn:

a) één-dimensionale golfvergelijking

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

als voorbeeld van een hyperbolische PDV. Invoering van de karakteristieke coördinaten $\xi = x-ct$, $\eta = x+ct$ doet de golfvergelijking overgaan in de normaalvorm $u_{\xi\eta} = 0$.

b) diffusievergelijking of warmtegeleidingsvergelijking

$$u_{xx} = u_t$$

als voorbeeld van een parabolische PDV. De PDV is reeds in de normaalvorm.

c) potentiaalvergelijking of Laplace vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

als voorbeeld van een elliptische PDV. De PDV is reeds in de normaalvorm.

2. Voor de semi-lineaire PDV

$$u_{xx} + xu_{xy} - (x+1)u_{yy} = 0$$

is $b^2 - ac = \frac{1}{4}(x+2)^2$, i.e. de PDV is hyperbolisch voor $x \neq -2$ en parabolisch voor $x = -2$.

De karakteristieken van de PDV worden bepaald door de GDV

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x \frac{dy}{dx} - (x+1) = \left(\frac{dy}{dx} - x - 1\right)\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = 0,$$

met als oplossing

$$y - \frac{1}{2}x^2 - x = C_1, \quad y + x = C_2.$$

Identificeer de integratiekonstanten C_1, C_2 met de karakteristieke coördinaten ξ, η ,

$$\xi = y - \frac{1}{2}x^2 - x, \quad \eta = y+x.$$

Transformatie naar deze coördinaten doet de PDV overgaan in de normaalvorm

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4 - 2\xi + 2\eta} u_{\xi} = 0.$$

Teken de karakteristieken $\xi = \text{konst.}$ (parabolen), $\eta = \text{konst.}$ (rechten) en merk op dat op de parabolische lijn $x = -2$ steeds een parabool $\xi = \text{konst.}$ raakt aan een rechte $\eta = \text{konst.}$

Voor verdere voorbeelden zie Tychonoff-Samarski [12], p. 25-26.

3. De Tricomi vergelijking

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

is hyperbolisch voor $y < 0$, parabolisch voor $y = 0$ en elliptisch voor $y > 0$. Deze PDV speelt een belangrijke rol in de theorie van de transsone stroming. Bepaal de karakteristieken in het gebied $y < 0$; herleid de PDV tot haar normaalvorm.

Opmerking. De voorgaande classificatie en herleiding tot normaalvorm blijft onveranderd doorgaan voor de lineaire PDV (1.3). De normaalvorm zal ook weer een lineaire PDV zijn.

Voor de quasi-lineaire PDV (1.1) laat zich een zelfde classificatie invoeren gebaseerd op het teken van $b^2 - ac$.

Omdat $b^2 - ac$ nu een functie is van x, y, u, u_x, u_y zal het type van de PDV o.m. afhangen van de oplossing u . Ook de eventuele karakteristieken zullen van u afhangen, ze zijn daarom niet meer a priori te introduceren. De herleiding van de PDV tot een normaalvorm is nu veel gecompliceerder, zie Courant-Hilbert [2], p. 163-166, Garabedian [3], p. 85-90.

3.2. Cauchy probleem voor de semi-lineaire PDV van tweede orde.

Laat C_0 een kromme zijn in het (x, y) -vlak gegeven door

$$(2.1) \quad x = X(t), \quad y = Y(t).$$

Voor de semi-lineaire PDV (1.2) laat zich nu het volgende Cauchy probleem of beginwaardeprobleem formuleren,

$$(2.2) \quad \begin{cases} L[u] \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \\ u(X(t), Y(t)) = U(t), \quad u_x(X(t), Y(t)) = P(t), \quad u_y(X(t), Y(t)) = Q(t). \end{cases}$$

Op C_0 zijn dus de waarden van u, u_x, u_y voorgeschreven.

Meetkundige interpretatie: Met de oplossing $u = u(x, y)$ correspondeert een integraaloppervlak in de (x, y, u) -ruimte. Dit oppervlak moet gaan door de ruimtekromme C ,

$$(2.3) \quad x = X(t), \quad y = Y(t), \quad u = U(t).$$

De normaal \underline{n} in een punt van het integraaloppervlak heeft richtingsgetallen $(u_x, u_y, -1)$. Op C zal daarom gelden $\underline{n} = \underline{n}(t) = (P(t), Q(t), -1)$. Door elk punt t van C brengen we nu een vlak aan loodrecht op de vector $\underline{n}(t)$. Het geheel van kromme C plus vlakken wordt een strook (strip) genoemd: de strook C_1 . Het gezochte integraaloppervlak moet nu de beginstrook C_1 bevatten d.w.z. het integraaloppervlak moet door C gaan en raken aan de vlakken van de strook. De functies $U(t), P(t), Q(t)$ zijn niet onafhankelijk van elkaar. Langs C_0 moet namelijk gelden

$$(2.4) \quad \frac{du}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt}, \quad U_t = P(t)X_t + Q(t)Y_t$$

d.i. de zgn. strookrelatie. Van de drie functies $U(t), P(t), Q(t)$ zijn er slechts twee willekeurig te kiezen, waarna de derde functie vastligt. De beginvoorwaarden (2.2) met strookrelatie (2.4) kunnen eventueel worden vervangen door de equivalenten voorwaarden

$$(2.5) \quad u(X(t), Y(t)) = U(t), \quad u_{\underline{\nu}}(X(t), Y(t)) = N(t),$$

waarbij $u_{\underline{\nu}}$ de afgeleide in de richting van de normaal $\underline{\nu}$ op C_0 voorstelt (verifieer dit). De functies $U(t)$, $N(t)$ zijn nu wel onafhankelijk van elkaar. De beginvoorwaarden (2.5) worden wel Cauchy beginvoorwaarden (Cauchy data) genoemd.

We stellen nu de vraag naar de oplosbaarheid van het Cauchy probleem. In eerste instantie vervangen we deze vraag door de eenvoudiger vraag: Is het mogelijk om uit PDV en beginvoorwaarden (2.2) de partiële afgeleiden van tweede orde u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} op C_0 te bepalen?

De partiële afgeleiden u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} op C_0 voldoen aan een stelsel van drie lineaire vergelijkingen

$$(2.6) \quad \begin{cases} a(X(t), Y(t))u_{xx} + 2b(X(t), Y(t))u_{xy} + c(X(t), Y(t))u_{yy} = \\ \hspace{15em} = f(X(t), Y(t), U(t), P(t), Q(t)), \\ X_t u_{xx} + Y_t u_{xy} = P_t, \\ X_t u_{xy} + Y_t u_{yy} = Q_t. \end{cases}$$

De koëfficiëntendeterminant van dit stelsel wordt gegeven door

$$(2.7) \quad D(t) = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ X_t & Y_t & 0 \\ 0 & X_t & Y_t \end{vmatrix} = aY_t^2 - 2bX_tY_t + cX_t^2.$$

Indien nu $D(t) \neq 0$ is heeft het stelsel (2.6) een eenduidige oplossing.

Opmerking. Indien de koëfficiënten a, b, c, f van de PDV en de functies X, Y, U, P, Q analytisch zijn, kan men op analoge wijze de partiële afgeleiden van u van hogere orde op C_0 bepalen. Voor de partiële afgeleiden van derde orde op C_0 laat zich door de differentiatie van (2.6) afleiden een stelsel van vier lineaire vergelijkingen

$$(2.8) \quad \begin{cases} au_{xxx} + 2bu_{xxy} + cu_{xyy} = f_x + f_u u_x + f_{u_x} u_{xx} + f_{u_y} u_{xy} - \\ \hspace{15em} - a_x u_{xx} - 2b_x u_{xy} - c_x u_{yy}, \\ au_{xxy} + 2bu_{xyy} + cu_{yyy} = f_y + f_u u_y + f_{u_x} u_{xy} + f_{u_y} u_{yy} - \\ \hspace{15em} - a_y u_{xx} - 2b_y u_{xy} - c_y u_{yy}, \\ X_t^2 u_{xxx} + 2X_t Y_t u_{xxy} + Y_t^2 u_{xyy} = P_{tt} - X_{tt} u_{xx} - Y_{tt} u_{xy}, \\ X_t^2 u_{xxy} + 2X_t Y_t u_{xyy} + Y_t^2 u_{yyy} = Q_{tt} - X_{tt} u_{xy} - Y_{tt} u_{yy}. \end{cases}$$

De rechterleden van het stelsel (2.8) bevatten enkel bekende functies, terwijl de coëfficiëntendeterminant van het stelsel gelijk aan $D^2(t)$ blijkt te zijn (verifieer dit). Verdere differentiatie van (2.8) leidt algemeen tot een stelsel van $n+1$ lineaire vergelijkingen voor de afgeleiden van u van orde n op C_0 ; de coëfficiëntendeterminant van dit stelsel is gelijk aan $[D(t)]^{n-1}$. Indien dus $D(t) \neq 0$ is zijn de partiële afgeleiden van u van tweede en hogere orde op C_0 eenduidig te bepalen.

De oplossing van het Cauchy probleem kan nu worden voorgesteld door de Taylorreeks

$$(2.9) \quad u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}}(x_0, y_0) (x-x_0)^m (y-y_0)^{n-m},$$

welke convergent is in voldoende kleine omgeving van het punt $(x_0, y_0) \in C_0$ (stelling van Cauchy-Kowalewski, zie Garabedian [3], p. 6-17). Het Cauchy probleem bezit dus een eenduidige oplossing in voldoende kleine omgeving van C_0 .

We onderzoeken nu het geval $D(t) = 0$ langs C_0 ,

$$(2.10) \quad D(t) = aY_t^2 - 2bX_t Y_t + cX_t^2 = 0.$$

De betrekking (2.10) is te herleiden tot de GDV

$$(2.11) \quad a \left(\frac{dY}{dX} \right)^2 - 2b \frac{dY}{dX} + c = 0,$$

welke overeenstemt met de vergelijking (1.17) voor de karakteristieken.

$D(t) = 0$ betekent dat C_0 een karakteristiek is.

De oplosbaarheid van het stelsel (2.6) wordt nu bepaald door de rang van de aangevulde matrix

$$(2.12) \quad B = \begin{pmatrix} a & 2b & c & f \\ X_t & Y_t & 0 & P_t \\ 0 & X_t & Y_t & Q_t \end{pmatrix}$$

Onderscheid twee gevallen:

1. Rang $B = 3$. Het stelsel (2.6) is dan strijdig en bezit geen oplossing voor u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} op C_0 . Ook het Cauchy probleem heeft dan geen oplossing.
2. Rang $B = 2$. Het stelsel (2.6) is nu afhankelijk en bezit oneindig veel oplossingen voor u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} op C_0 .

Te verwachten is dat ook het Cauchy probleem dan oneindig veel oplossingen bezit.

De voorwaarde "rang B = 2" betekent dat behalve de determinant D(t) nog één andere onderdeterminant van B gelijk aan nul moet zijn b.v.

$$(2.13) \quad \begin{vmatrix} a & 2b & f \\ X_t & Y_t & P_t \\ 0 & X_t & Q_t \end{vmatrix} = aQ_t Y_t - (aP_t + 2bQ_t)X_t + fX_t^2 = 0.$$

De strook C_1 ,

$$(2.14) \quad x = X(t), y = Y(t), u = U(t), u_x = P(t), u_y = Q(t)$$

heet een karakteristieke strook, indien de functies X,Y,U,P,Q voldoen aan de strookrelatie (2.4), aan de voorwaarde $D(t) = 0$ en aan (2.13).

Conclusie. Indien C_0 geen karakteristiek is worden de partiële afgeleiden u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} op C_0 eenduidig bepaald door PDV en beginvoorwaarden.

Indien C_0 een karakteristiek is bezit het stelsel vergelijkingen voor u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} op C_0 alleen dan een oplossing als voldaan is aan (2.13) oftewel als C_1 een karakteristieke strook is; de oplossing is in dat geval niet eenduidig.

Opmerking over karakteristieken. Voor de karakteristieken van een semi-lineaire PDV van tweede orde kan men analoge kenmerkende eigenschappen formuleren als in §2.1:

1. Langs een karakteristiek worden de partiële afgeleiden u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} niet eenduidig bepaald door PDV en beginvoorwaarden; het stelsel (2.6) is strijdig of afhankelijk.
2. Indien twee integraaloppervlakken $u = u_1(x,y)$, $u = u_2(x,y)$ aan elkaar raken langs een ruimtekromme C m.a.w. een strook C_1 gemeen hebben, dan is C_1 een karakteristieke strook. Voorts is de projectie C_0 van C op het (x,y)-vlak een karakteristiek.
3. In vervolg op eigenschap 2, voer in de functie $u(x,y)$ met $u(x,y) = u_1(x,y)$ resp. $u(x,y) = u_2(x,y)$ aan weerskanten van C_0 . De functie $u = u(x,y)$ is dan een gegeneraliseerde oplossing van de PDV met afgeleiden u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} welke discontinu zijn op C_0 ; zie ook Courant-Hilbert [2], p. 416-418.

We zullen het Cauchy probleem (2.2) voor de semi-lineaire PDV nog eens vanuit een ander gezichtspunt beschouwen, analoog aan §2.2. De beginvoorwaarden zullen herleid zijn tot de vorm (2.5).

We voeren in coördinaten ξ, η gegeven door

$$(2.15) \quad \xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y).$$

Daarbij worden $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ zo gekozen dat langs de kromme $C_0: x = X(t), y = Y(t)$ geldt $\xi = 0, \eta = t, \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial \xi}$. Transformatie naar de coördinaten ξ, η doet het Cauchy probleem volgens (1.7) overgaan in

$$(2.16) \quad \begin{cases} \Lambda[u] \equiv \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \\ u(0, \eta) = U(\eta), \quad u_\xi(0, \eta) = N(\eta), \end{cases}$$

waarin de koëfficiënten α, β, γ worden gegeven door (1.8).

Uit de beginvoorwaarden op $C_0: \xi = 0$, zijn nu alle partiële afgeleiden van eerste en tweede orde op C_0 te berekenen behalve $u_{\xi\xi}$,

$$(2.17) \quad \begin{aligned} u(0, \eta) &= U(\eta), \quad u_\xi(0, \eta) = N(\eta), \quad u_\eta(0, \eta) = U_\eta, \quad u_{\xi\eta}(0, \eta) = N_\eta, \\ u_{\eta\eta}(0, \eta) &= U_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

De afgeleide $u_{\xi\xi}$ op C_0 is eenduidig te bepalen uit de PDV mits $\alpha \neq 0$ is,

$$(2.18) \quad u_{\xi\xi}(0, \eta) = \frac{1}{\alpha} [g(0, \eta, U(\eta), N(\eta), U_\eta) - 2\beta N_\eta - \gamma U_{\eta\eta}].$$

Beschouw nu het geval

$$(2.19) \quad \alpha = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$$

op C_0 . Overeenkomstig §3.1 is dan de kromme $C_0: \xi = \varphi(x, y) = 0$, een karakteristiek.

Langs C_0 gaat $\Lambda[u]$ over in

$$(2.20) \quad \Lambda[u] = 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} = 2\beta N_\eta + \gamma U_{\eta\eta},$$

i.e. de waarde van $\Lambda[u]$ langs C_0 wordt geheel bepaald door de Cauchy data $u(0, \eta) = U(\eta), u_\xi(0, \eta) = N(\eta)$. De operator Λ heet in dit geval een inwendige differentiaaloperator. Langs de karakteristiek C_0 gaat de differentiaaloperator L over in een inwendige differentiaaloperator; vergelijk met de opmerking uit §2.2.

Uit de PDV (2.16) volgt anderzijds dat langs C_0 moet gelden

$$(2.21) \quad \Lambda[u] = g(0, \eta, U(\eta), N(\eta), U_\eta).$$

De betrekkingen (2.20), (2.21) zijn in het algemeen strijdig: het Cauchy probleem heeft dan geen oplossing.

Indien voldaan is aan de extra voorwaarde

$$(2.22) \quad 2\beta N_\eta + \gamma U_{\eta\eta} = g(0, \eta, U(\eta), N(\eta), U_\eta),$$

zijn (2.20), (2.21) niet strijdig. Evenwel, de afgeleide $u_{\xi\xi}$ op C_0 is dan onbepaald.

Deze uitkomsten zijn in overeenstemming met de conclusie van p. 23. Men kan verifiëren dat de voorwaarde (2.22) equivalent is met de eerdere voorwaarde (2.13).

3.3. Semi-lineaire hyperbolische PDV in twee onafhankelijke variabelen.

Overeenkomstig (1.11) is de semi-lineaire hyperbolische PDV in twee onafhankelijke variabelen te herleiden tot een normaalvorm

$$(3.1) \quad u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y).$$

Hierbij zijn x, y karakteristieke coördinaten, terwijl de lijnen $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ de karakteristieken van de PDV zijn. We onderzoeken nu een drietal beginwaardeproblemen voor de PDV (3.1).

1. Cauchy probleem. Laat C_0 een kromme zijn in het (x, y) -vlak welke geen karakteristiek is en ook nergens raakt aan een karakteristiek. De kromme C_0 is dan voor te stellen door

$$(3.2) \quad y = g(x) \text{ of } x = h(y).$$

We beschouwen nu eerst het Cauchy probleem voor de meer eenvoudige PDV

$$(3.3) \quad u_{xy} = f(x, y),$$

waarbij de waarden van u, u_x, u_y gegeven zijn op C_0 .

De oplossing van dit Cauchy probleem laat zich expliciet bepalen. Zij $P(x_0, y_0)$ een willekeurig punt. Trek dan de twee karakteristieken $x = x_0$, $y = y_0$ door P . Deze karakteristieken zullen C_0 snijden in de punten $Q(h(y_0), y_0)$, $R(x_0, g(x_0))$.

Met C_0 begrenzen de karakteristieken een "driehoekig" gebied D . Integreer nu de PDV (3.3) over D ,

$$(3.4) \quad \iint_D u_{xy}(x,y) dx dy = \iint_D f(x,y) dx dy.$$

De integraal in het linkerlid van (3.4) is op twee manieren uit te werken,

$$(3.5) \quad \iint_D u_{xy}(x,y) dx dy = \int_{h(y_0)}^{x_0} dx \int_{g(x)}^{y_0} u_{xy}(x,y) dy$$

$$= u(x_0, y_0) - u(h(y_0), y_0) - \int_{h(y_0)}^{x_0} u_x(x, g(x)) dx,$$

en

$$(3.6) \quad \iint_D u_{xy}(x,y) dx dy = \int_{g(x_0)}^{y_0} dy \int_{h(y)}^{x_0} u_{xy}(x,y) dx$$

$$= u(x_0, y_0) - u(x_0, g(x_0)) - \int_{g(x_0)}^{y_0} u_y(h(y), y) dy.$$

Teneinde tot een symmetrische uitkomst te komen vervangen we het linkerlid van (3.4) door het gemiddelde van (3.5) en (3.6), waarna volgt

$$(3.7) \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2} u(h(y_0), y_0) + \frac{1}{2} u(x_0, g(x_0)) + \frac{1}{2} \int_{h(y_0)}^{x_0} u_x(x, g(x)) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{g(x_0)}^{y_0} u_y(h(y), y) dy + \iint_D f(x,y) dx dy.$$

Het rechterlid van (3.7) bevat enkel bekende grootheden nl. de functie f en de beginwaarden van u, u_x, u_y op C_0 ; (3.7) stelt voor de oplossing van het Cauchy probleem. Met behulp van de notaties

$$(3.8) \quad u_x(x, g(x)) = p(x), \quad u_y(h(y), y) = q(y),$$

is de oplossing (3.7) nog als volgt kort te schrijven

$$(3.9) \quad u(P) = \frac{1}{2}u(Q) + \frac{1}{2}u(R) + \frac{1}{2} \int_Q^R [p(x)dx - q(y)dy] + \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Uit (3.7), (3.9) blijkt dat de oplossing u in P slechts afhangt van

(i) de waarden van f in het gebied D ,

(ii) de beginwaarden van u, u_x, u_y op de boog QR van C_0 .

Gebied D plus boog QR heet het afhankelijkheidsgebied van $P(x_0, y_0)$. Dit afhankelijkheidsgebied wordt begrensd door de kromme C_0 en de karakteristieken door P .

Indien de PDV homogeen is i.e. $f \equiv 0$, bestaat het afhankelijkheidsgebied van P slechts uit de boog QR . Omgekeerd kan men invoeren het begrip bepaaldheidsgebied van een boog Q^*R^* van C_0 . Het bepaaldheidsgebied van de boog Q^*R^* is het rechthoekig gebied dat begrensd wordt door de karakteristieken door Q^*, R^* . De oplossing u in dit gebied wordt eenduidig bepaald door de beginwaarden van u, u_x, u_y op de boog Q^*R^* .

Tenslotte, indien de beginwaarden u, u_x of u_y op C_0 discontinu zijn in een punt Q van C_0 , dan zal deze discontinuïteit zich "voortplanten" langs de karakteristieken door Q .

We beschouwen vervolgens het Cauchy probleem voor de PDV

$$(3.10) \quad u_{xy} = f(x,y,u),$$

waarbij weer u, u_x, u_y gegeven zullen zijn op C_0 . Analoog als boven volgt na integratie van de PDV over het gebied D , begrensd door C_0 en de karakteristieken door $P(x_0, y_0)$,

$$(3.11) \quad u(x_0, y_0) = U(x_0, y_0) + \iint_D f(x,y,u(x,y))dxdy,$$

waarin

$$(3.12) \quad U(x_0, y_0) = \frac{1}{2}u(h(y_0), y_0) + \frac{1}{2}u(x_0, g(x_0)) + \frac{1}{2} \int_{h(y_0)}^{x_0} u_x(x, g(x))dx + \frac{1}{2} \int_{g(x_0)}^{y_0} u_y(h(y), y)dy$$

een bekende functie voorstelt.

De betrekking (3.11) moet worden beschouwd als een integraalvergelijking voor de functie $u(x,y)$. Onder bepaalde voorwaarden is deze integraalvergelijking op te lossen door iteratie. De te gebruiken iteratiemethode is in principe dezelfde als de methode van Picard voor het bewijs van de existentie van de oplossing van een GDV. We construeren een rij van functies $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, ... met behulp van de iteratieformule

$$(3.13) \quad \begin{cases} u_0(x_0, y_0) = U(x_0, y_0), \\ u_{n+1}(x_0, y_0) = U(x_0, y_0) + \int\int_D f(x, y, u_n(x, y)) dx dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Onder bepaalde voorwaarden voor de functie f zal dit iteratieproces convergeren, i.e. $u_n(x,y) \rightarrow u(x,y)$ voor $n \rightarrow \infty$, en de limiet $u(x,y)$ is de oplossing van het Cauchy probleem.

Opmerking. Het Cauchy probleem voor de algemene semi-lineaire PDV (3.1) is te herleiden tot een stelsel van drie integraalvergelijkingen voor de functies $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$. Met behulp van een analoge iteratiemethode is te bewijzen dat deze integraalvergelijkingen een eenduidige oplossing bezitten in een omgeving van C_0 . Voor de details zij verwezen naar Garabedian [3], p. 110-117; zie ook Smirnov [8], p. 50-56 voor de behandeling van het Cauchy probleem voor de lineaire hyperbolische PDV op normaalvorm.

2. Karakteristiek beginwaardeprobleem. Bij het karakteristiek beginwaardeprobleem zijn de beginvoorwaarden voorgeschreven langs twee karakteristieken.

Als voorbeeld beschouwen we het karakteristiek beginwaardeprobleem voor de PDV (3.3),

$$(3.14) \quad \begin{cases} u_{xy} = f(x, y), \\ u(x, 0) = U_1(x) \quad (x \geq 0), \quad u(0, y) = U_2(y) \quad (y \geq 0), \quad U_1(0) = U_2(0). \end{cases}$$

Vergeleken met het Cauchy probleem wordt nu alleen de waarde van u voorgeschreven langs de karakteristieken $x = 0$, $y = 0$. De functie u langs $x = 0$, $y = 0$ bepaalt eenduidig de waarde van de afgeleiden u_x, u_y langs $x = 0$, $y = 0$. Immers, uit de beginvoorwaarden (3.14) volgt direct

$$(3.15) \quad u_x(x, 0) = U_1'(x), \quad u_y(0, y) = U_2'(y).$$

Voorts, langs de x-as gaat de PDV (3.14) over in de GDV

$$(3.16) \quad \frac{d}{dx} u_y(x,0) = f(x,0),$$

welke samen met de beginvoorwaarde $u_y(0,0) = U_2'(0)$ de afgeleide $u_y(x,0)$ vastlegt. Evenzo is de afgeleide $u_x(0,y)$ te bepalen.

We geven nu de oplossing van het karakteristiek beginwaardeprobleem (3.14). Zij (x_0, y_0) een willekeurig punt in het eerste kwadrant van het (x,y) -vlak. De karakteristieken door het punt (x_0, y_0) begrenzen met de x- en y-as een rechthoekig gebied D. Integreer nu de PDV over het gebied D, dan volgt gemakkelijk

$$(3.17) \quad u(x_0, y_0) = u(x_0, 0) + u(0, y_0) - u(0, 0) + \iint_D f(x, y) dx dy \\ = U_1(x_0) + U_2(y_0) - U_1(0) + \iint_D f(x, y) dx dy,$$

d.i. de oplossing van het karakteristiek beginwaardeprobleem. Deze oplossing is bepaald in het gehele eerste kwadrant. Het gebied D heet weer het afhankelijkheidsgebied van het punt (x_0, y_0) .

Opmerking. Het karakteristiek beginwaardeprobleem voor de PDV (3.10) resp. (3.1) is te herleiden tot een integraalvergelijking voor de functie $u(x, y)$ resp. tot een stelsel van drie integraalvergelijkingen voor de functies $u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$. Deze integraalvergelijkingen zijn op te lossen met de iteratiemethode; zie Tychonoff-Samarski [12], p. 119-123 voor een behandeling van het karakteristiek beginwaardeprobleem voor de lineaire PDV op normaalvorm.

Opgave. Herleid het karakteristiek beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u_{xy} + \lambda u = 0, \\ u(x, 0) = 1 \quad (x \geq 0), \quad u(0, y) = 1 \quad (y \geq 0) \end{cases}$$

tot een integraalvergelijking voor de functie $u(x, y)$ en toon aan dat de oplossing gegeven wordt door

$$u(x, y) = J_0(2\sqrt{\lambda xy}),$$

waarin J_0 de Bessel functie van eerste soort en orde nul voorstelt.

3. Goursat probleem. Bij het Goursat probleem zijn de beginvoorwaarden voorgeschreven langs een karakteristiek en langs een kromme die geen karakteristiek is.

We behandelen het volgende voorbeeld van een Goursat probleem: Laat C_0 een kromme zijn in het (x,y) -vlak welke verloopt in het eerste kwadrant en door de oorsprong gaat. C_0 wordt beschreven door de vergelijking

$$(3.18) \quad y = g(x) \text{ of } x = h(y),$$

waarbij de functies $g(x)$, $h(y)$ monotoon zullen zijn. De kromme C_0 verdeelt het eerste kwadrant in een gebied I tussen C_0 en de x -as, en een gebied II tussen C_0 en de y -as.

We stellen nu het Goursat probleem

$$(3.19) \quad \begin{cases} u_{xy} = f(x,y), \\ u(x,0) = U_1(x) \quad (x \geq 0), \quad u(h(y), y) = U_2(y) \quad (y \geq 0), \quad U_1(0) = U_2(0). \end{cases}$$

Ook bij dit probleem is alleen de waarde van u (en niet die van u_x, u_y) voorgeschreven langs de karakteristiek $y = 0$ en langs C_0 . De functie u langs $y = 0$ bepaalt eenduidig de waarde van de afgeleiden u_x, u_y langs $y = 0$, vergelijk (3.15), (3.16). Evenzo, indien we langs C_0 zowel de waarde van u als van u_x, u_y zouden voorschrijven, ontstaat er een gewoon Cauchy probleem met C_0 als beginkromme. De oplossing $u(x,y)$ van dit probleem laat zich bepalen in het gehele eerste kwadrant. Evenwel, deze oplossing zal in het algemeen niet voldoen aan de voorwaarde $u(x,0) = U_1(x)$. Langs C_0 kunnen daarom de afgeleiden u_x, u_y niet worden voorgeschreven.

We geven nu de oplossing van het Goursat probleem (3.19). Zij $P(x_0, y_0)$ een willekeurig punt in het gebied I. Trek dan de twee karakteristieken $x = x_0$, $y = y_0$ door P . De karakteristiek $y = y_0$ zal C_0 snijden in het punt $Q(h(y_0), y_0)$. Laat D het rechthoekig gebied zijn met hoekpunten P , Q , $R(x_0, 0)$, $S(h(y_0), 0)$ i.e. D wordt begrensd door de karakteristieken $x = x_0$, $x = h(y_0)$, $y = y_0$, $y = 0$. Integratie van de PDV over het gebied D leidt nu tot de oplossing van het Goursat probleem,

$$(3.20) \quad \begin{aligned} u(x_0, y_0) &= u(x_0, 0) + u(h(y_0), y_0) - u(h(y_0), 0) + \iint_D f(x,y) dx dy \\ &= U_1(x_0) + U_2(y_0) - U_1(h(y_0)) + \iint_D f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

oftewel in korte notatie

$$(3.21) \quad u(P) = u(Q) + U(R) - u(S) + \iint_D f(x,y) dx dy.$$

De oplossing (3.20) is geldig in het gebied I.

Voor een punt (x_0, y_0) in het gebied II kan men op analoge wijze het bijbehorende gebied D construeren. Na integratie van de PDV over D volgt voor de oplossing in het gebied II,

$$(3.22) \quad u(x_0, y_0) = U_1(x_0) + U_2(y_0) - U_1(h(y_0)) - \iint_D f(x,y) dx dy.$$

3.4. Eén-dimensionale golfvergelijking.

Als toepassing van de voorgaande theorie zullen we in deze paragraaf een aantal beginwaardeproblemen behandelen voor de inhomogene één-dimensionale golfvergelijking

$$(4.1) \quad u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t).$$

Deze vergelijking beschrijft onder meer de beweging van een trillende snaar onder invloed van een uitwendige kracht. c heeft de dimensie van een snelheid.

De golfvergelijking (4.1) is van het hyperbolische type met karakteristieken bepaald door de GDV

$$(4.2) \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Uit (4.2) volgt dat de karakteristieken rechte lijnen zijn beschreven door $x \mp ct = \text{konst.}$ Na transformatie naar de karakteristieke coördinaten,

$$(4.3) \quad \xi = x-ct, \quad \eta = x+ct$$

gaat de golfvergelijking (4.1) over in de normaalvorm

$$(4.4) \quad u_{\xi\eta} = -\frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right).$$

We bespreken nu een aantal beginwaardeproblemen voor de golfvergelijking (4.1).

1. Golfvergelijking op het oneindige interval $-\infty < x < \infty$.

We formuleren het volgende Cauchy probleem,

$$(4.5) \quad \begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

De oplossing van dit probleem laat zich vinden met de methode van §3.3. Laat $P(x_0, t_0)$, $t_0 > 0$, een willekeurig punt zijn in het (x,t) -vlak. Teken in het (x,t) -vlak de karakteristieken door P. Deze snijden de x-as in de punten $Q(x_0 + ct_0, 0)$, $R(x_0 - ct_0, 0)$. De driehoek PQR vormt dan het afhankelijkheidsgebied D van het punt P. Integreer nu de golfvergelijking over D,

$$(4.6) \quad \iint_D \left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right) dxdt = - \iint_D f(x,t) dxdt.$$

De integraal in het linkerlid van (4.6) laat zich uitwerken door transformatie naar de karakteristieke coördinaten ξ, η . Daarbij zal $u(x,t)$ overgaan in $v(\xi, \eta)$ (definitie), terwijl we tevens stellen $\xi_0 = x_0 - ct_0$, $\eta_0 = x_0 + ct_0$. Uitwerking van de integraal (4.6) leidt nu tot

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \iint_D \left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right) dxdt &= \frac{2}{c} \iint_D v_{\xi\eta} d\xi d\eta \\ &= \frac{2}{c} \int_{\xi_0}^{\eta_0} d\xi \int_{\xi}^{\eta_0} v_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{c} \left[v(\eta_0, \eta_0) - v(\xi_0, \eta_0) - \int_{\xi_0}^{\eta_0} v_{\xi}(\xi, \xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Met de beginvoorwaarden (4.5) volgt

$$(4.8) \quad \begin{cases} v(\eta_0, \eta_0) = u(x_0 + ct_0, 0) = \varphi(x_0 + ct_0), \\ v_{\xi}(\xi, \xi) = \frac{1}{2} u_x(\xi, 0) - \frac{1}{2c} u_t(\xi, 0) = \frac{1}{2} \varphi'(\xi) - \frac{1}{2c} \psi(\xi), \end{cases}$$

waarna (4.7) te herleiden is tot

$$(4.9) \quad \iint_D \left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right) dxdt = \frac{2}{c} \left\{ \varphi(x_0 + ct_0) - u(x_0, t_0) - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \left[\frac{1}{2} \varphi'(\xi) - \frac{1}{2c} \psi(\xi) \right] d\xi \right\}$$

$$= \frac{2}{c} \left\{ \frac{1}{2} \varphi(x_0 - ct_0) + \frac{1}{2} \varphi(x_0 + ct_0) - u(x_0, t_0) + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(x) dx \right\}.$$

Substitutie van (4.9) in (4.6) leidt nu onmiddellijk tot de oplossing van het Cauchy probleem (4.5),

$$(4.10) \quad u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 - ct_0) + \frac{1}{2} \varphi(x_0 + ct_0) + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(x) dx + \frac{c}{2} \iint_D f(x, t) dx dt.$$

Methode van d'Alembert. Indien de golfvergelijking (4.1) homogeen is i.e. $f(x, t) \equiv 0$, wordt de normaalvorm gegeven door $u_{\xi\eta} = 0$. De algemene oplossing van de homogene golfvergelijking laat zich dan eenvoudig vinden,

$$(4.11) \quad u(x, t) = w_1(\xi) + w_2(\eta) = w_1(x-ct) + w_2(x+ct),$$

waarin w_1, w_2 willekeurige functies zijn. Voor het Cauchy probleem (4.5) worden de functies w_1, w_2 bepaald door de beginvoorwaarden

$$(4.12) \quad \begin{cases} u(x, 0) = w_1(x) + w_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = -c w_1'(x) + c w_2'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Verdere uitwerking leidt dan gemakkelijk tot de oplossing van het Cauchy probleem (4.5),

$$(4.13) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \varphi(x-ct) + \frac{1}{2} \varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Deze zgn. d'Alembert oplossing stemt overeen met (4.10) met $f = 0$ gesteld. Uit (4.13) is af te lezen dat het afhankelijkheidsgebied van het punt (x, t) nu gevormd wordt door het interval $[x-ct, x+ct]$ van de x -as. Dit interval wordt uitgesneden door de karakteristieken vanuit het punt (x, t) . Omgekeerd kan men weer invoeren het bepaaldheidsgebied van een interval $[a, b]$ van de x -as, d.i. het driehoekig gebied dat begrensd wordt door de x -as en de karakteristieken $x-ct = a$, $x+ct = b$. De oplossing u in dit gebied wordt eenduidig bepaald door de beginwaarden $\varphi(x)$, $\psi(x)$ op $[a, b]$.

2. Golfvergelijking op het half-oneindig interval $x > 0$.

We formuleren het volgende probleem voor de golfvergelijking (4.1) op het interval $x > 0$,

$$(4.14) \quad \begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t), & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u(0,t) = g(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Het gestelde probleem is een zgn. gemengd probleem; de functie $u(x,t)$ moet voldoen aan twee beginvoorwaarden voor $t = 0$ en aan de randvoorwaarde $u(0,t) = g(t)$ in $x = 0$. In plaats van de laatste voorwaarde hadden we bv. ook $u_x(0,t) = h(t)$ kunnen voorschrijven.

We zullen het probleem (4.14) weer oplossen met een karakteristiekenmethode. Verdeel daartoe het eerste kwadrant van het (x,t) -vlak in een gebied I: $x-ct > 0$ en een gebied II: $x-ct < 0$, gescheiden door de karakteristiek $x-ct = 0$ door de oorsprong (fig. 1). Voor een punt $P(x_0, t_0)$ in gebied I zal het bijbehorende afhankelijkheidsgebied D worden begrensd door de x -as en de karakteristieken door P. D zal geen punten gemeen hebben met de t -as. Integratie van de PDV over het gebied D leidt weer tot de uitkomst (4.10) voor $u(x_0, t_0)$ i.e.

$$(4.15) \quad u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 - ct_0) + \frac{1}{2} \varphi(x_0 + ct_0) + \\ + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(x) dx + \frac{c}{2} \iint_D f(x,t) dx dt,$$

geldig in het gebied I: $x_0 - ct_0 \geq 0$. Merk op dat de randvoorwaarde $u(0,t) = g(t)$ niet meespeelt in (4.15).

Door (4.15) wordt ook de waarde van $u(x,t)$ langs de karakteristiek $x-ct = 0$ bepaald. De functie $u(x,t)$ in het gebied II is dan oplossing van een Goursat probleem: langs de karakteristiek $x-ct = 0$ en langs de t -as is de waarde van u gegeven. We lossen dit Goursat probleem op met de methode van §3.3. Laat $P(x_0, t_0)$ een punt in het gebied II zijn. Teken dan in het (x,t) -vlak de karakteristieken PQ, PR, RS, zie fig. 1. In karakteristieke coördinaten worden deze karakteristieken beschreven door

$$(4.16) \quad PQ: \eta = \eta_0, \quad PR: \xi = \xi_0, \quad RS: \eta = -\xi_0,$$

waarbij $\xi_0 = x_0 - ct_0$, $\eta_0 = x_0 + ct_0$.

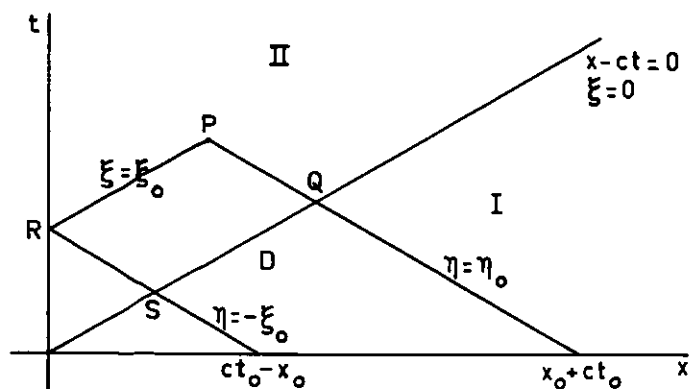


fig. 1.

Integreer nu de golfvergelijking over het gebied D^* begrensd door het parallellogram PQSR,

$$(4.17) \quad \iint_{D^*} \left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right) dxdt = - \iint_{D^*} f(x,t) dxdt.$$

De integraal in het linkerlid van (4.17) is uit te werken door transformatie naar karakteristieke coördinaten ξ, η , waarbij $u(x,t)$ zal overgaan in $v(\xi, \eta)$,

$$\begin{aligned} (4.18) \quad \iint_{D^*} \left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right) dxdt &= \frac{2}{c} \iint_{D^*} v_{\xi\eta} d\xi d\eta \\ &= \frac{2}{c} \int_{\xi_0}^0 d\xi \int_{-\xi_0}^{\eta_0} v_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{c} [v(0, \eta_0) - v(\xi_0, \eta_0) - v(0, -\xi_0) + v(\xi_0, -\xi_0)] \\ &= \frac{2}{c} [u(Q) - u(P) - u(S) + u(R)]. \end{aligned}$$

Uit (4.17), (4.18) volgt voor $u(P) = u(x_0, t_0)$,

$$(4.19) \quad u(x_0, t_0) = u(Q) + u(R) - u(S) + \frac{c}{2} \iint_{D^*} f(x,t) dxdt.$$

Substitueer voor $u(Q)$, $u(S)$ de waarden gegeven door (4.15) en stel

$$(4.20) \quad u(R) = u(0, t_0 - x_0/c) = g(t_0 - x_0/c)$$

overeenkomstig de randvoorwaarde. We vinden dan voor de oplossing van het probleem (4.14) in het gebied II: $x_0 - ct_0 \leq 0$,

$$(4.21) \quad u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 + ct_0) - \frac{1}{2} \varphi(ct_0 - x_0) + \frac{1}{2c} \int_{ct_0 - x_0}^{x_0 + ct_0} \psi(x) dx \\ + g(t_0 - x_0/c) + \frac{c}{2} \int \int_D f(x, t) dx dt.$$

Daarbij is D het gebied begrensd door de x-as, de karakteristieken door $P(x_0, t_0)$ en de "gereflekteerde" karakteristiek door $R(0, t_0 - x_0/c)$, zie fig. 1.

Opgaven. 1. Leid de oplossing (4.21) rechtstreeks af door integratie van de golfvergelijking over het gebied D.

2. Bepaal de oplossing van het gemengde probleem (4.14) met $f(x, t) \equiv 0$ (homogene golfvergelijking), met behulp van de methode van d'Alembert.

Methode van spiegeling. In het geval van een homogene randvoorwaarde $u(0, t) = 0$ is het gemengde probleem (4.14) ook op te lossen met de methode van spiegeling. Daartoe zetten we de functies $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ voort als oneven functies van x , d.w.z. we definiëren voor $x < 0$,

$$(4.22) \quad f(x, t) = -f(-x, t), \quad \varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

Vervolgens beschouwen we het Cauchy probleem op het interval $-\infty < x < \infty$,

$$(4.23) \quad \begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Overeenkomstig (4.10) wordt de oplossing van dit probleem gegeven door

$$(4.24) \quad u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 - ct_0) + \frac{1}{2} \varphi(x_0 + ct_0) + \\ + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(x) dx + \frac{c}{2} \int \int_D f(x, t) dx dt,$$

waarbij D het afhankelijkheidsgebied van het punt (x_0, t_0) is, begrensd door de x-as en de karakteristieken door (x_0, t_0) . Uit de eigenschappen (4.22) volgt dat de oplossing (4.24) automatisch voldoet aan de randvoorwaarde $u(0, t) = 0$.

Men kan gemakkelijk verifiëren dat de oplossing (4.24) overeenstemt met de eerdere oplossing (4.15), (4.21) met $g = 0$ gesteld.

Opmerking. De methode van spiegeling kan ook worden toegepast in het geval van een gemengd probleem met randvoorwaarde $u_x(0,t) = 0$. De functies $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ dienen dan te worden voortgezet als even functies van x .

3. Golfvergelijking op het eindig interval $0 < x < \ell$.

We formuleren het volgende gemengde probleem voor de golfvergelijking (4.1) op het interval $0 < x < \ell$,

$$(4.25) \quad \begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t), & 0 < x < \ell, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ u(0,t) = g(t), u(\ell,t) = h(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

We zullen dit probleem oplossen met een karakteristiekenmethode. Beschouw in het (x,t) -vlak de strook $0 < x < \ell$, $t > 0$. Teken nu de karakteristieken door de punten $(0,0)$, $(\ell,0)$ en hun "reflekties" aan de randen $x = 0$, $x = \ell$. Deze karakteristieken verdelen de strook in een aantal gebieden I, II, III, etc., zie fig. 2.

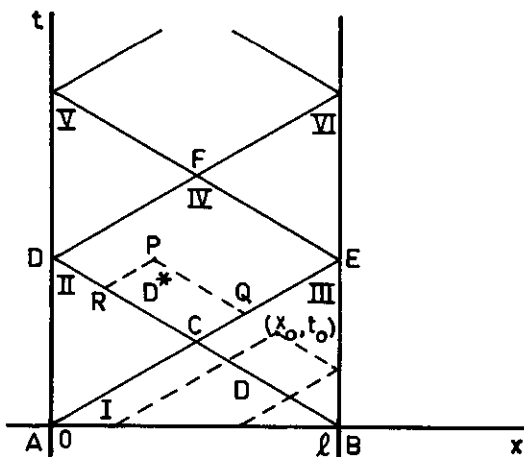


fig. 2.

Voor een punt (x_0, t_0) in gebied I wordt het bijbehorende afhankelijkheidsgebied begrensd door de x -as en de karakteristieken door (x_0, t_0) . D heeft geen punten gemeen met de randen $x = 0$, $x = \ell$. Als onder 1. wordt de oplossing $u(x_0, t_0)$ in gebied I nu gegeven door (4.10). De randvoorwaarden $u(0,t) = g(t)$, $u(\ell,t) = h(t)$ zijn nog niet "merkbaar" in deze oplossing. In het gebied II is de functie $u(x,t)$ oplossing van een Goursat probleem met u gegeven langs de karakteristiek AC en langs AD. Als onder 2. wordt de oplossing $u(x_0, t_0)$ in gebied II gegeven door (4.21). In deze oplossing is de randvoorwaarde $u(\ell,t) = h(t)$ nog niet "merkbaar". Ook in het gebied III is de functie $u(x,t)$ oplossing van een Goursat probleem met u gegeven langs de karakteristiek BC en langs BE. Analoog aan

(4.21) wordt de oplossing $u(x_0, t_0)$ in gebied III gegeven door

$$(4.26) \quad u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 - ct_0) - \frac{1}{2} \varphi(2\ell - x_0 - ct_0) + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{2\ell - x_0 - ct_0} \psi(x) dx \\ + h(t_0 + (x_0 - \ell)/c) + \frac{c}{2} \int \int_D f(x, t) dx dt,$$

waarbij D het gebied is als aangegeven in fig. 2.

Door (4.21), (4.26) wordt ook de waarde van $u(x, t)$ langs CD, CE bepaald. In het gebied IV is de functie $u(x, t)$ dan oplossing van een karakteristiek beginwaardeprobleem met u gegeven langs de karakteristieken CD, CE. Zij nu $P(x_0, t_0)$ een punt in gebied IV, teken dan het parallellogram van karakteristieken PQCR dat de rand van een gebied D^* vormt, zie fig. 2. Integratie van de golfvergelijking over het gebied D^* leidt nu tot de oplossing

$$(4.27) \quad u(x_0, t_0) = u(P) = u(Q) + u(R) - u(C) + \frac{c}{2} \int \int_{D^*} f(x, t) dx dt.$$

Hierin zijn voor $u(Q)$, $u(R)$, $u(C)$ de reeds bekende functiewaarden te substitueren. De oplossing is voort te zetten voor de gebieden V, VI, etc. De functie $u(x, t)$ is steeds oplossing van of een Goursat probleem of een karakteristiek beginwaardeprobleem.

Methode van spiegeling. In het geval van homogene randvoorwaarden $u(0, t) = 0$, $u(\ell, t) = 0$ is het gemengde probleem (4.25) ook op te lossen met de methode van spiegeling. Daartoe dienen de functies $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ te worden voortgezet als functies van x welke oneven zijn t.o.v. $x = 0$ en t.o.v. $x = \ell$. Deze voortzetting is te realiseren via de definitie

$$(4.28) \quad f(x, t) = -f(-x, t), \quad -\ell < x < 0,$$

waarna de functie $f(x, t)$ periodiek (in x) wordt voortgezet met periode 2ℓ .

De functies $\varphi(x)$, $\psi(x)$ worden op dezelfde wijze voortgezet.

Beschouw vervolgens het Cauchy probleem op het interval $-\infty < x < \infty$,

$$(4.29) \quad \begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

De oplossing (4.10) van dit probleem voldoet automatisch aan de randvoorwaarden $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ en is daarmee tevens oplossing van het gemengde probleem (4.25) met homogene randvoorwaarden.

Voor een uitvoerige behandeling van beginwaardeproblemen en gemengde problemen voor de golfvergelijking, zie ook Tychonoff-Samarski [12], Kap. II.

IV. PDV's van tweede orde in n onafhankelijke variabelen, n > 2.

4.1. Classificatie van PDV's van tweede orde en herleiding tot normaalvorm.

We beperken ons hier tot het onderzoek van de lineaire PDV van tweede orde in n onafhankelijke variabelen x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$(1.1) \quad L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x)u = f(x).$$

Hierbij is de volgende korte notatie gebruikt,

$$(1.2) \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

De som $\sum a_{ij}(x) u_{x_i x_j}$ heet weer het hoofddeel van de PDV. Zonder verlies aan algemeenheid kunnen we stellen $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. De matrix $A = A(x)$ gevormd door de coëfficiënten $a_{ij}(x)$, is dan symmetrisch.

We trachten de PDV weer te herleiden tot een eenvoudige normaalvorm door middel van een coördinaten-transformatie

$$(1.3) \quad \xi_i = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Onder deze transformatie zal de PDV (1.1) overgaan in

$$(1.4) \quad \Lambda[u] \equiv \sum_{k,\ell=1}^n \alpha_{k\ell} u_{\xi_k \xi_\ell} + \sum_{k=1}^n \beta_k u_{\xi_k} + cu = f$$

met coëfficiënten $\alpha_{k\ell}$, β_k gegeven door

$$(1.5) \quad \begin{cases} \alpha_{k\ell} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}, \\ \beta_k = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}. \end{cases}$$

Analoog als voor de PDV van tweede orde in twee onafhankelijke variabelen verlangen we nu dat de normaalvorm geen gemengde afgeleiden $u_{\xi_k \xi_\ell}$, $k \neq \ell$ bevat, i.e. $\alpha_{k\ell} = 0$ voor $k \neq \ell$. De laatste conditie geeft aanleiding tot een stelsel van $\frac{1}{2}n(n-1)$ vergelijkingen voor de n functies $\varphi_i(x)$. Voor $n > 3$ is $\frac{1}{2}n(n-1) > n$ en het stelsel zal in het algemeen geen oplossing bezitten. In geval $n = 3$ is het mogelijk de functies $\varphi_i(x)$ zo te bepalen dat $\alpha_{k\ell} = 0$ wordt voor $k \neq \ell$.

Evenwel, de resterende coëfficiënten α_{11} , α_{22} , α_{33} liggen dan ook vast en we hebben geen vrijheid om nog te eisen dat deze coëfficiënten gelijk zullen zijn. Het blijkt dus in het algemeen niet mogelijk om de PDV (1.1) te herleiden tot een eenvoudige normaalvorm geldig in een zeker gebied in de (x_1, x_2, \dots, x_n) -ruimte.

We beschouwen nu de PDV (1.1) in een vast punt $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$. De coëfficiënten a_{ij} en de matrix A zijn dan als konstant op te vatten, $a_{ij} = a_{ij}(x_0)$, $A = A(x_0)$. Het blijkt nu wèl mogelijk om de PDV (1.1) lokaal d.w.z. in het punt x_0 , tot een normaalvorm te herleiden. Deze herleiding is te realiseren door een lineaire transformatie van de coördinaten x_1, x_2, \dots, x_n . We geven nu de details van de herleiding.

Laat $S = (s_{ij})$ een orthogonale $(n \times n)$ -matrix zijn, i.e. $S^{-1} = S^T$. Onder de coördinatentransformatie

$$(1.6) \quad x = S\xi, \quad \xi = S^T x, \quad \xi_i = \sum_{j=1}^n s_{ji} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

zal de PDV (1.1) overgaan in (1.4) met coëfficiënten α_{kl} , β_k gegeven door

$$(1.7) \quad \alpha_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} s_{ik} s_{jl}, \quad \beta_k = \sum_{i=1}^n b_i s_{ik}.$$

Uit (1.7) blijkt dat de coëfficiënten a_{ij} op dezelfde wijze transformeren als de coëfficiënten van de kwadratische vorm

$$(1.8) \quad Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j = (Ay, y), \quad y \in R_n,$$

onder de transformatie $y = S\xi$; vergelijk Collegedictaat Wiskunde 30, 1975, p. 38-40. Door passende keuze van de matrix S is nu de kwadratische vorm (1.8) op diagonaalvorm te brengen i.e.

$$(1.9) \quad Q = (Ay, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \eta_k^2 = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \dots + \lambda_n \eta_n^2,$$

waarin de (reële) eigenwaarden λ_k van de matrix A als coëfficiënten optreden. Onder de transformatie (1.6), met de aldus gekozen matrix S , gaat de PDV (1.1) in het punt x_0 over in

$$(1.10) \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{\xi_k \xi_k} + \sum_{k=1}^n \beta_k u_{\xi_k} + cu = f.$$

In geval $\lambda_k \neq 0$ is vervangen we ξ_k door $\xi_k \sqrt{|\lambda_k|}$. Na deze extra lineaire transformatie zal de PDV (1.1) in het punt x_0 tenslotte overgaan in

$$(1.11) \quad \sum_{k=1}^n \epsilon_k u_{\xi_k \xi_k} + \sum_{k=1}^n \beta_k^* u_{\xi_k} + cu = f, \quad \epsilon_k = \text{sgn}(\lambda_k),$$

d.i. de normaalvorm van de PDV in het punt x_0 .

Op basis van de kwadratische vorm (1.8), (1.9) komen we voorts tot de volgende classificatie van lineaire PDV's van tweede orde in n onafhankelijke variabelen:

1. De PDV (1.1) heet elliptisch in het punt x_0 indien de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ van de matrix $A(x_0)$ alle ongelijk nul en van hetzelfde teken zijn. Door eventuele vermenigvuldiging van de PDV met -1 kunnen we zorgen dat $\lambda_k > 0$, $\epsilon_k = +1$ is voor $k = 1, 2, \dots, n$. De kwadratische vorm (Ay, y) is dan positief definitief d.w.z. $(Ay, y) > 0$ voor elke vector $y \neq 0$. De Laplace vergelijking in R_n

$$(1.12) \quad \Delta u \equiv u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0$$

is een voorbeeld van een elliptische PDV.

2. De PDV (1.1) heet hyperbolisch in het punt x_0 indien de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ van de matrix $A(x_0)$ alle ongelijk nul zijn, n-1 eigenwaarden hetzelfde teken hebben en één eigenwaarde het tegengestelde teken heeft. De variabelen ξ_k zijn dan zo te rangschikken dat $\lambda_k > 0$, $\epsilon_k = +1$ is voor $k = 1, 2, \dots, n-1$, terwijl $\lambda_n < 0$, $\epsilon_n = -1$ is. De golfvergelijking in R_{n-1}

$$(1.13) \quad \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} \equiv u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_{n-1} x_{n-1}} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

is een voorbeeld van een hyperbolische PDV.

3. De PDV (1.1) heet ultra-hyperbolisch in het punt x_0 indien de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ van de matrix $A(x_0)$ alle ongelijk nul zijn, m eigenwaarden hetzelfde teken en n-m eigenwaarden het tegengestelde teken hebben, waarbij $m \geq 2$, $n-m \geq 2$.

Voorbeeld van een ultrahyperbolische PDV is de vergelijking

$$(1.14) \quad u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} - u_{x_4 x_4} = 0.$$

Voorzover bekend zijn er geen problemen uit de mathematische fysica die tot ultrahyperbolische PDV's voeren.

4. De PDV (1.1) heet parabolisch in het punt x_0 indien één of meer der eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ van de matrix $A(x_0)$ gelijk aan nul zijn.

De diffusievergelijking of warmtegeleidingsvergelijking in R_{n-1}

$$(1.15) \quad u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_{n-1} x_{n-1}} - u_t = 0$$

is een voorbeeld van een parabolische PDV.

Zoals reeds opgemerkt kan de lineaire PDV (1.1) in het algemeen niet worden herleid tot een normaalvorm geldig in een zeker gebied in de (x_1, x_2, \dots, x_n) -ruimte. Een uitzondering hierop vormen de lineaire PDV's met konstante koëfficiënten. Indien de koëfficiënten a_{ij} in (1.1) konstant zijn is ook de matrix A konstant. Onder de transformatie (1.6) gaat dan de PDV (1.1) over in de normaalvorm (1.11) welke geldig is in de gehele $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ -ruimte. De PDV is voorts in de gehele ruimte van hetzelfde type.

Indien de koëfficiënten b_i, c in (1.1) konstant zijn zullen de koëfficiënten β_k^*, c in (1.11) eveneens konstant zijn. De normaalvorm (1.11) is dan nog verder te vereenvoudigen. Neem daartoe aan dat alle eigenwaarden λ_k van de matrix A ongelijk nul zijn m.a.w. we sluiten het parabolische geval uit. Substitueer nu in (1.11)

$$(1.16) \quad u = v \exp \left[- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \epsilon_k \beta_k^* \xi_k \right],$$

dan ontstaat voor v de vergelijking

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k v_{\xi_k \xi_k} + \left[c - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \epsilon_k \beta_k^{*2} \right] v = f \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \epsilon_k \beta_k^* \xi_k \right]$$

oftewel

$$(1.17) \quad \sum_{k=1}^n \epsilon_k v_{\xi_k \xi_k} + \lambda v = f^*(\xi),$$

waarin λ een konstante voorstelt.

Op deze wijze is een lineaire elliptische PDV met konstante koëfficiënten te herleiden tot de vorm

$$(1.18) \quad \Delta v + \lambda v = f^*(\xi),$$

terwijl een lineaire hyperbolische PDV met konstante koëfficiënten te herleiden is tot de vorm

$$(1.19) \quad \Delta v - v_{\xi_n \xi_n} + \lambda v = f^*(\xi).$$

4.2. Cauchy probleem voor de lineaire PDV van tweede orde.

Laat C_0 een oppervlak zijn in de (x_1, x_2, \dots, x_n) -ruimte, gegeven door de vergelijking

$$(2.1) \quad \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

We stellen nu het Cauchy probleem of beginwaardeprobleem voor de lineaire PDV (1.1) en het beginoppervlak C_0 : Gevraagd wordt een oplossing $u = u(x)$ van de PDV te bepalen, zodanig dat $u(x)$ en de normaalafgeleide $u_{\underline{v}}(x)$ (\underline{v} is de normaal op C_0) op C_0 voorgeschreven waarden aannemen.

De vraag naar de oplosbaarheid van dit Cauchy probleem vervangen we weer door de eenvoudiger vraag: Is het mogelijk om uit PDV en beginvoorwaarden de partiële afgeleiden van $u(x)$ van tweede orde op C_0 te bepalen?

Om deze vraag te beantwoorden passen we een coördinaten-transformatie toe,

$$(2.2) \quad \xi_i = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

met $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, terwijl de overige functies $\varphi_i(x)$ willekeurig gekozen kunnen worden. In de nieuwe coördinaten wordt het oppervlak C_0 gegeven door $\xi_1 = 0$. Onder de transformatie (2.2) zal het Cauchy probleem overgaan in

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Lambda[u] \equiv \sum_{k, \ell=1}^n \alpha_{k\ell} u_{\xi_k \xi_\ell} + \sum_{k=1}^n \beta_k u_{\xi_k} + cu = f, \\ u(0, \bar{\xi}) = U(\bar{\xi}), \quad u_{\xi_1}(0, \bar{\xi}) = N(\bar{\xi}). \end{cases}$$

Hierbij zijn $U(\bar{\xi})$, $N(\bar{\xi})$ de voorgeschreven beginwaarden van u en van de normaalafgeleide u_{ξ_1} op C_0 ; $\bar{\xi}$ is een korte notatie voor $(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$. De coëfficiënten $\alpha_{k\ell}, \beta_k$ in (2.3) worden gegeven door (1.5).

Uit de beginvoorwaarden op C_0 : $\xi_1 = 0$, zijn nu alle partiële afgeleiden van eerste en tweede orde op C_0 te berekenen behalve $u_{\xi_1 \xi_1}$,

$$(2.4) \quad \begin{cases} u_{\xi_1}(0, \bar{\xi}) = N(\bar{\xi}), & u_{\xi_k}(0, \bar{\xi}) = U_{\xi_k}, \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ u_{\xi_1 \xi_k}(0, \bar{\xi}) = N_{\xi_k}, & u_{\xi_k \xi_\ell}(0, \bar{\xi}) = U_{\xi_k \xi_\ell}, \quad k, \ell = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Beschouw vervolgens de PDV (2.3) op C_0 en substitueer de waarden (2.4). De PDV bevat dan nog één onbekende term nl. $\alpha_{11} u_{\xi_1 \xi_1}$. Indien $\alpha_{11} \neq 0$ is kan de afgeleide $u_{\xi_1 \xi_1}$ eenduidig worden bepaald uit de PDV.

Beschouw nu het geval

$$(2.5) \quad \alpha_{11} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} = 0$$

op C_0 . Indien de functie $\varphi(x)$ op C_0 voldoet aan de betrekking (2.5), dan heet het oppervlak C_0 : $\varphi(x) = 0$ een karakteristiek oppervlak of karakteristiek.

Langs een karakteristiek oppervlak C_0 gaat de differentiaaloperator $\Lambda[u]$ over in

$$(2.6) \quad \Lambda[u] = 2 \sum_{k=2}^n \alpha_{1k} N_{\xi_k} + \sum_{k,\ell=2}^n \alpha_{k\ell} U_{\xi_k \xi_\ell} + \beta_1 N + \sum_{k=2}^n \beta_k U_{\xi_k} + cU,$$

waarbij het rechterlid geheel bepaald is door de Cauchy data $u(0, \bar{\xi}) = U(\bar{\xi})$, $u_{\xi_1}(0, \bar{\xi}) = N(\bar{\xi})$. Langs C_0 is de operator Λ een inwendige differentiaaloperator; deze eigenschap is typerend voor een karakteristiek oppervlak zoals we reeds opmerkten in §2.2.

Uit de PDV (2.3) volgt anderzijds dat langs C_0 moet gelden

$$(2.7) \quad \Lambda[u] = f.$$

De betrekkingen (2.6), (2.7) zijn in het algemeen strijdig: het Cauchy probleem heeft dan geen oplossing.

Slechts indien voldaan is aan de extra voorwaarde

$$(2.8) \quad 2 \sum_{k=2}^n \alpha_{1k} N_{\xi_k} + \sum_{k,\ell=2}^n \alpha_{k\ell} U_{\xi_k \xi_\ell} + \beta_1 N + \sum_{k=2}^n \beta_k U_{\xi_k} + cU = f$$

op C_0 , zijn (2.6), (2.7) niet strijdig. Evenwel, de afgeleide $u_{\xi_1 \xi_1}$ op C_0 is dan onbepaald.

Conclusie. Indien C_0 niet een karakteristiek oppervlak is worden de partiële afgeleiden van $u(x)$ van tweede orde op C_0 eenduidig bepaald door PDV en beginvoorwaarden.

Indien C_0 karakteristiek oppervlak is heeft het Cauchy probleem in het algemeen geen oplossing, tenzij voldaan is aan de voorwaarde (2.8). In dat geval zijn echter de afgeleiden van $u(x)$ van tweede orde op C_0 niet eenduidig bepaald.

4.3. Karakteristieke oppervlakken.

Een oppervlak $C_0: \varphi(x) = 0$ is karakteristiek oppervlak van de lineaire PDV (1.1) indien de functie $\varphi(x)$ op C_0 voldoet aan de betrekking

$$(3.1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} = 0.$$

Merk op de functie $\varphi(x)$ aan (3.1) moet voldoen alleen op C_0 d.i. voor $\varphi(x) = 0$. Indien de functie $\varphi(x)$ identiek voldoet aan (3.1), beschouwd als PDV, dan is elk oppervlak $\varphi(x) = \text{konst.}$ karakteristiek oppervlak.

Vergelijk (3.1) met de in (1.8) ingevoerde kwadratische vorm

$$(3.2) \quad Q = (Ay, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) y_i y_j.$$

Voor een elliptische PDV is deze kwadratische vorm positief definitief d.w.z. $(Ay, y) > 0$ voor elke vector $y \neq 0$. De betrekking (3.1) kan in dat geval geen reële "oplossing" $\varphi(x)$ bezitten. Een elliptische PDV heeft dus geen reële karakteristieken.

Karakteristieken spelen een belangrijke rol in de theorie der hyperbolische

PDV's in n onafhankelijke variabelen. We zullen de eigenschappen van karakteristieke oppervlakken nader onderzoeken voor het geval van de hyperbolische PDV (1.1) met konstante coëfficiënten a_{ij} .

Laat het oppervlak $C_0: \varphi(x) = 0$ karakteristiek oppervlak zijn dan voldoet $\varphi(x)$ op C_0 aan de betrekking (3.1). Deze betrekking laat zich als volgt meetkundig interpreteren.

Zij $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ een willekeurig punt van C_0 , voer dan in de kegel K met top x_0 gegeven door de vergelijking

$$(3.3) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - x_{0i}) (x_j - x_{0j}) = 0.$$

De kegel K wordt gegenereerd door vectoren $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ welke "aangrijpen" in het punt x_0 en voldoen aan

$$(3.4) \quad (Ap, p) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j = 0.$$

Hierbij is A de matrix gevormd door de coëfficiënten a_{ij} .

Uit (3.1), (3.4) volgt nu dat de vector

$$(3.5) \quad \nabla\varphi(x_0) = \{\varphi_{x_1}(x_0), \varphi_{x_2}(x_0), \dots, \varphi_{x_n}(x_0)\}$$

op K ligt. Aangezien de vector $\nabla\varphi(x_0)$ dezelfde richting heeft als de normaal \underline{v} op C_0 in x_0 , zal ook de normaal \underline{v} langs de kegel K vallen.

Construeer nu bij elk van de vectoren p die K genereren, een hypervlak door het punt x_0 loodrecht op p ; de vergelijking van dit hypervlak wordt gegeven door

$$(3.6) \quad (p, x - x_0) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - x_{0i}) = 0.$$

Op deze wijze verkrijgen we een verzameling van hypervlakken door het punt x_0 . Deze hypervlakken omhullen nu een tweede kegel K_0 met top x_0 . Met de standaard techniek voor het bepalen van de omhullende is af te leiden dat de kegel K_0 gegeven wordt door de vergelijking

$$(3.7) \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (x_i - x_{0i}) (x_j - x_{0j}) = 0,$$

waarbij A_{ij} het i,j -de element is van de inverse matrix A^{-1} ; verifieer zo mogelijk deze uitkomst.

Aangezien de normaal \underline{v} op C_0 in x_0 valt langs de kegel K , zal het karakteristiek oppervlak C_0 een raakvlak gemeen hebben met de kegel K_0 oftewel C_0 raakt aan de kegel K_0 in het punt x_0 . We zullen aanstonds bewijzen dat K_0 zelf ook karakteristiek oppervlak is: de kegel K_0 heet daarom de karakteristieke kegel met top x_0 . In elk punt van de (x_1, x_2, \dots, x_n) -ruimte kan men een dergelijke karakteristieke kegel aanbrengen. Een karakteristiek oppervlak zal dan in elk van zijn punten raken aan de karakteristieke kegel met dat punt als top.

De kegel K_0 is zelf ook karakteristiek oppervlak. Schrijf daartoe de vergelijking (3.7) in de volgende vorm

$$(3.8) \quad \varphi(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (x_i - x_{0i}) (x_j - x_{0j}) = (A^{-1}q, q) = 0,$$

waarbij $x - x_0 = q$ gesteld is. De gradient van $\varphi(x)$ in een punt van K_0 wordt dan gegeven door

$$(3.9) \quad \varphi_{x_i} = 2 \sum_{j=1}^n A_{ij} (x_j - x_{0j}), \quad \nabla\varphi = 2A^{-1}q.$$

Substitueer deze uitkomst in (3.1) dan volgt

$$(3.10) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} = (A\nabla\varphi, \nabla\varphi) = 4(AA^{-1}q, A^{-1}q) = 4(A^{-1}q, q) = 0$$

op K_0 m.a.w. de kegel K_0 is karakteristiek oppervlak.

In de theorie van de hyperbolische PDV's in n variabelen speelt de karakteristieke kegel een soortgelijke rol als de karakteristieken in de theorie der hyperbolische PDV's in twee variabelen. Zo blijkt b.v. dat het afhankelijkheidsgebied van een punt $P(x_0)$ begrensd wordt door de karakteristieke kegel met P als top. We komen op dit punt terug in hoofdstuk VIII bij de behandeling van de golfvergelijking in R_3, R_2 . Voor de golfvergelijking in R_n

$$(3.11) \quad u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

wordt de karakteristieke kegel met top (x_0, t_0) gegeven door de vergelijking

$$(3.12) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0, \quad |x - x_0|^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0,$$

zoals eenvoudig volgt uit (3.7).

V. Correct gestelde problemen.

PDV's welke uit praktische problemen voortkomen, worden vrijwel altijd vergezeld door zekere additionele voorwaarden waaraan de oplossing dient te voldoen. Deze voorwaarden kunnen van verschillende soort zijn:

1. Beginvoorwaarden. Laat b.v. de PDV van tweede orde $L[u] = f$ de tijd t als onafhankelijke variabele bevatten; indien nu de waarden van u , u_t voor $t = 0$ (beginsituatie) zijn voorgeschreven dan spreken we van beginvoorwaarden. Algemeen spreken we van beginvoorwaarden indien de onbekende functie en een aantal van zijn partiële afgeleiden zijn voorgeschreven op een kromme in het (x,y) -vlak resp. op een $(n-1)$ -dimensionaal oppervlak in de (x_1, x_2, \dots, x_n) -ruimte. Het geheel van PDV plus beginvoorwaarden heet een beginwaardeprobleem (initial value problem) of Cauchy probleem. Essentieel voor beginvoorwaarden en voor een beginwaardeprobleem is dat de PDV in principe gedefinieerd is aan "weerskanten" van de kromme of het oppervlak waarop de beginvoorwaarden gegeven zijn.
2. Randvoorwaarden. Laat een PDV slechts gedefinieerd zijn in een zeker gebied in het (x,y) -vlak resp. in de (x_1, x_2, \dots, x_n) -ruimte; indien nu de waarde van u of van de normaalafgeleide u_ν op de rand van dit gebied zijn voorgeschreven dan spreken we van randvoorwaarden. Het geheel van PDV plus randvoorwaarden heet een randwaardeprobleem (boundary value problem). Problemen waarbij de oplossing van een PDV zowel aan randvoorwaarden als aan beginvoorwaarden moet voldoen, heten gemengde problemen (mixed problems), Men kan b.v. denken aan een PDV $L[u] = f$ in de onafhankelijke variabelen x_1, x_2, \dots, x_n, t welke gedefinieerd is in een gebied G in de (x_1, x_2, \dots, x_n) -ruimte en voor elke t . We zoeken dan een oplossing $u = u(x, t)$ die voor $t = 0$ voldoet aan zekere beginvoorwaarden en die op de rand Γ van G voldoet aan zekere randvoorwaarden.

Diverse problemen uit de mathematische fysica voeren tot PDV's van tweede orde met bijbehorende voorwaarden. De ervaring leert dat PDV's en voorwaarden steeds in bepaalde combinaties voorkomen; bij PDV's van een bepaald type (hyperbolisch, parabolisch, elliptisch) treedt steeds een bepaald soort voorwaarden op (begin- en/of randvoorwaarden). Meer uitgewerkt komen we tot het volgende ervaringsprincipe:

Randwaardeproblemen zijn geassocieerd met elliptische PDV's; beginwaardeproblemen en gemengde problemen treden op in verband met hyperbolische en parabolische PDV's.

Ter illustratie van dit principe geven we de volgende voorbeelden:

1. De Laplace vergelijking in R_n

$$(1) \quad \Delta u \equiv u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0$$

is voorbeeld van een elliptische PDV. Speciaal voor $n = 2$, $n = 3$ zijn uit de stromingsleer en de electrostatica bekend de volgende randwaardeproblemen: Gevraagd een oplossing van de Laplace vergelijking $\Delta u = 0$ in een gebied G welke op de rand Γ van G voldoet aan de randvoorwaarde $u = f$ (Dirichlet probleem) of $u_\nu = g$ (Neumann probleem).

2. De diffusievergelijking in R_1

$$(2) \quad u_{xx} - u_t = 0$$

is voorbeeld van een parabolische PDV. Additionele voorwaarden voor deze PDV zijn b.v.

$$(3) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

resp.

$$(4) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = g(t), \quad u_x(l, t) = h(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

corresponderend met een beginwaardeprobleem resp. met een gemengd probleem.

3. Voorbeeld van een hyperbolische PDV is de golfvergelijking in R_1 ,

$$(5) \quad u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x, t).$$

In §3.4 zijn reeds een aantal beginwaardeproblemen en gemengde problemen voor deze PDV besproken.

We willen nu het boven geformuleerde ervaringsprincipe ook mathematisch doorzien. Daartoe voeren we in het begrip correct gesteld probleem (well posed problem). Een mathematisch probleem heet correct gesteld indien aan de volgende eisen voldaan is:

- (i) De oplossing van het probleem bestaat.
- (ii) De oplossing is eenduidig.
- (iii) De oplossing hangt continu af van begin- en randvoorwaarden d.w.z.

een "kleine" verandering in deze voorwaarden heeft slechts een "kleine" verandering van de oplossing tot gevolg.

De naam correct gesteld probleem is afkomstig van Hadamard. Elk probleem (begin- of randwaardeprobleem, gemengd probleem) dat een fysisch verschijnsel beschrijft behoort correct gesteld te zijn i.e. dient aan de drie eisen te voldoen. De eisen (i), (ii) spreken voor zichzelf. De eis (iii) is ingegeven door de idee dat de rand- en beginwaarden voor een fysisch probleem meestal verkregen zijn door metingen. Deze metingen zijn altijd behept met fouten. Het mathematisch model is nu alleen realistisch indien deze kleine fouten slechts een kleine verandering in de oplossing tot gevolg hebben. De achtergrond van het ervaringsprincipe is nu dat juist die combinaties van PDV en voorwaarden voorkomen welke aanleiding geven tot correct gestelde problemen. Een groot deel van de theorie der PDV's is gewijd aan de vraag of bepaalde klassen van problemen correct gesteld zijn. Bij de behandeling van elliptische, hyperbolische, parabolische PDV's in de navolgende hoofdstukken zal deze vraag een belangrijke rol spelen.

Voorbeeld van een correct gesteld probleem is het Cauchy probleem voor de golfvergelijking in R_1 ,

$$(6) \quad \begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

De oplossing van dit probleem wordt volgens (III. 4.13) gegeven door

$$(7) \quad u(x,t) = \frac{1}{2} \varphi(x-ct) + \frac{1}{2} \varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Het is duidelijk dat de oplossing bestaat en eenduidig is. De functie $u(x,t)$ is voorts continu afhankelijk van de beginwaarden $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Indien we namelijk de functies $\varphi(x)$, $\psi(x)$ op het interval $[a,b]$ veranderen in $\varphi(x) + \varepsilon \varphi_1(x)$, $\psi(x) + \varepsilon \psi_1(x)$ met $|\varphi_1(x)| \leq 1$, $|\psi_1(x)| \leq 1$, zal daardoor de oplossing $u(x,t)$ veranderen met een bedrag hoogstens gelijk aan $\varepsilon \left(1 + \frac{b-a}{2c}\right)$.

We zullen tenslotte nog aan de hand van enige voorbeelden verifiëren dat de niet in het ervaringsprincipe genoemde combinaties aanleiding geven tot niet-correct gestelde problemen:

1. Cauchy probleem voor elliptische PDV. We beschouwen het volgende voorbeeld afkomstig van Hadamard,

$$(8) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x, y < \infty, \\ u(x,0) = 0, & u_y(x,0) = \frac{\sin nx}{n}, \end{cases}$$

waarin $n = 1, 2, \dots$. De oplossing van dit probleem luidt

$$(9) \quad u = u_n(x,y) = \frac{\sin nx \sinh ny}{n^2}.$$

Deze oplossing hangt niet continu af van de beginvoorwaarden. Immers voor $n \rightarrow \infty$ is $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) \rightarrow 0$ terwijl de oplossing $u_n(x,y)$ niet tot nul nadert. Het Cauchy probleem (8) is dus niet correct gesteld omdat niet aan de eis (iii) voldaan is.

2. Dirichlet probleem voor hyperbolische PDV. Als voorbeeld beschouwen we het Dirichlet probleem voor een gebied $G: 0 < x < a, 0 < y < b$,

$$(10) \quad \begin{cases} u_{xy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u \text{ gegeven op de rand van } G. \end{cases}$$

Dit probleem is niet correct gesteld omdat de oplossing $u(x,y)$ in het algemeen niet bestaat. De oplossing $u(x,y)$ wordt in G namelijk reeds eenduidig bepaald door de waarden van u langs $x = 0$ en $y = 0$ (karakteristiek beginwaardeprobleem). Deze functie $u(x,y)$ zal dan in het algemeen niet voldoen aan de randvoorwaarden langs $x = a$ en $y = b$.

3. Parabolische PDV. In hoofdstuk IX wordt aangetoond dat het Cauchy probleem voor de diffusievergelijking

$$(11) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases}$$

correct gesteld is. Het Cauchy probleem (11) met $t < 0$ is evenwel niet correct gesteld zoals blijkt uit het volgende voorbeeld afkomstig van Rothe: Zij $\varphi(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, dan luidt de oplossing van het Cauchy probleem (11),

$$(12) \quad u = u_n(x,t) = \frac{1}{n} \sin nx e^{-n^2 t}.$$

Indien $n \rightarrow \infty$ volgt $\varphi(x) \rightarrow 0$, maar de oplossing $u_n(x,t)$ nadert niet tot nul als $t < 0$ is. Voor $t < 0$ voldoet de oplossing (12) dus niet aan de eis (iii) voor een correct gesteld probleem.

VI. Distributies, zwakke oplossingen van PDV's.

In dit hoofdstuk geven we een beknopte inleiding tot de theorie der distributies of gegeneraliseerde functies. Voor een meer uitvoerige behandeling zij verwezen naar b.v. Stakgold [11], chapters 1,5, Gelfand-Schilow [4]; zie ook Collegedictaat Lineaire Analyse II, 1969, hoofdstuk 12.

6.1. Definitie en eigenschappen van distributies in één variabele.

Distributies zijn voor het eerst ingevoerd door Schwartz in 1950. De theorie der distributies bedoelt een uitbreiding van het functiebegrip te geven zodanig dat ook "singuliere functies" als de δ -functie van Dirac worden omvat. Deze δ -functie werd reeds lang toegepast in de fysica en daarbij gedefinieerd door de volgende eigenschappen

$$(1.1) \quad \delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Voor elke continue functie $f(x)$ geldt voorts de "zeefeigenschap"

$$(1.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

De uitbreiding van het functiebegrip komt in essentie neer op het volgende. Laat $y = f(x)$ een reëelwaardige continue functie zijn, gedefinieerd op $-\infty < x < \infty$. Volgens klassieke betekenis is deze functie een afbeelding van de x -as in de y -as i.e. een afbeelding van R_1 in R_1 . Men kan de functie beschreven denken door de verzameling van functiewaarden. In de theorie der distributies definieert men een klasse K van testfuncties $\varphi(x)$ en vormt voor elke $\varphi(x) \in K$ de integraal

$$(1.3) \quad (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

Men kan dan de functie f beschreven denken door de verzameling van waarden (f, φ) . Aan elke $\varphi(x) \in K$ is een reëel getal (f, φ) toegevoegd, i.e. f is nu een afbeelding van K in R_1 . Een dergelijke afbeelding heet een functionaal. Onder een distributie of gegeneraliseerde functie verstaan we nu een functionaal welke gedefinieerd is op een zekere klasse van testfuncties.

We zullen nu de bovenstaande schets nader uitwerken. We specificeren eerst de klasse K van testfuncties $\varphi(x)$:

Definitie I. Een testfunctie $\varphi(x)$ is een reëelwaardige functie gedefinieerd voor $x \in R_1$, welke aan de volgende eisen voldoet:

- (i) $\varphi(x) \in C^\infty(R_1)$ d.w.z. $\varphi(x)$ is oneindig vaak differentieerbaar,
- (ii) $\varphi(x)$ heeft een begrensde drager.

De drager (support) van $\varphi(x)$ is de afsluiting van de verzameling der punten x waarvoor $\varphi(x) \neq 0$ is.

Voorbeeld van een testfunctie is de functie

$$(1.4) \quad \varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

De klasse K van testfuncties is een lineaire ruimte.

Op K definiëren we het volgende convergentiebegrip:

Definitie II. De rij van testfuncties $\{\varphi_n(x)\} \subset K$ is convergent naar 0, i.e. $\varphi_n \rightarrow 0$ in K , indien geldt:

- (i) De dragers van $\varphi_n(x)$ liggen alle binnen een zelfde begrensde interval.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^k \varphi_n(x)}{dx^k} = 0$, ($k = 1, 2, \dots$) uniform op $-\infty < x < \infty$.

We komen nu tot de invoering van het begrip distributie:

Definitie III. Een continue lineaire functionaal f op K is een afbeelding welke aan elke functie $\varphi \in K$ een reëel getal (f, φ) toevoegt, met de eigenschappen:

- (i) $(f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)$ voor elke reële c_1, c_2 en $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ (lineariteit).
- (ii) Indien $\varphi_n \rightarrow 0$ in K , dan is ook $(f, \varphi_n) \rightarrow 0$ (continuïteit).

Definitie IV. Een distributie is een continue lineaire functionaal op K .

Voorbeelden 1. Zij de functie $f(x)$ lokaal integreerbaar d.w.z. absoluut integreerbaar over elk eindig deelinterval van R_1 , dan behoort bij $f(x)$ de distributie

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in K.$$

Men identificeert nu veelal de functie $f(x)$ met de bijbehorende distributie (f, φ) en spreekt dan over de distributie $f(x)$. Elke lokaal integreerbare functie is dan tevens een distributie. Een distributie die voortkomt uit een lokaal integreerbare functie, heet een reguliere distributie.

2. De " δ -functie" is de distributie gedefinieerd door

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in K.$$

Men kan gemakkelijk bewijzen dat (δ, φ) geen reguliere distributie is i.e. er bestaat geen lokaal integreerbare functie $f(x)$ met

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \varphi \in K,$$

zie Stakgold [11], Vol. I, p. 33. Toch schrijft men vaak naar analogie met 1.,

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

De "functie" $\delta(x)$ en ook de integraal hebben dan alleen symbolische betekenis.

Rekenregels voor distributies:

1. We noemen twee distributies f, g identiek indien $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ voor elke $\varphi \in K$.

Evenzo definiëren we: Twee distributies f, g zijn gelijk op het interval $a < x < b$ indien $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ voor elke $\varphi \in K$ met drager binnen dat interval.

Uit deze definitie volgt b.v. $\delta(x) = 0$ voor $x < 0$ en voor $x > 0$.

2. Translatie. Zij $f(x)$ een distributie dan definiëren we de "verschoven" distributie $f(x-x_0)$ door

$$(1.5) \quad (f(x-x_0), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+x_0)), \quad \varphi \in K.$$

Voor de verschoven δ -functie $\delta(x-x_0)$ zal daarom gelden

$$(1.6) \quad (\delta(x-x_0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0), \quad \varphi \in K.$$

3. Optelling en vermenigvuldiging met konstante. Zijn c_1, c_2 reële konstanten dan wordt de lineaire combinatie $c_1 f_1 + c_2 f_2$ van twee distributies f_1, f_2 gedefinieerd door

$$(1.7) \quad (c_1 f_1 + c_2 f_2, \varphi) = c_1 (f_1, \varphi) + c_2 (f_2, \varphi), \quad \varphi \in K.$$

Deze lineaire combinatie is opnieuw een distributie. Distributies vormen daarom een lineaire ruimte K' te noemen.

4. Vermenigvuldiging met een functie. Zij f een distributie en $a(x)$ een oneindig vaak differentieerbare functie dan definiëren we het product af door

$$(1.8) \quad (af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in K.$$

Merk op dat $a\varphi \in K$ is zodat $(f, a\varphi)$ betekenis heeft. Het product af is opnieuw een distributie.

Uit deze definitie volgt b.v.

$$(x\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), x\varphi(x)) = 0, \quad \varphi \in K,$$

oftewel $x\delta(x) = 0$.

N.B. Het is niet mogelijk om het product van twee willekeurige distributies te definiëren.

Opmerking. Voor reguliere distributies zijn deze rekenregels gelijkwaardig met de overeenkomstige regels voor "gewone" functies.

Differentiatie van distributies. We wensen het begrip afgeleide van een distributie zodanig te definiëren dat voor een functie differentieerbaar in de gewone zin, de distributie-afgeleide samenvalt met de gewone afgeleide.

Ga daartoe uit van een functie $f(x)$ welke differentieerbaar is in de gewone zin. De afgeleide $f'(x)$ definieert de distributie

$$(1.9) \quad (f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in K.$$

Met partiële integratie volgt dan

$$(1.10) \quad (f', \varphi) = f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -(f, \varphi').$$

Geleid door dit resultaat geven we nu de volgende definitie:

Definitie V. De afgeleide f' van een distributie f wordt gegeven door

$$(1.11) \quad (f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in K.$$

Merk op dat $\varphi' \in K$ is zodat (f, φ') betekenis heeft. Men kan gemakkelijk verifiëren dat de afgeleide f' eveneens een distributie is welke dus opnieuw differentieerbaar is.

Gevolg. Een distributie is willekeurig vaak differentieerbaar; de n-de afgeleide $f^{(n)}$ van een distributie f wordt gegeven door

$$(1.11a) \quad (f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad \varphi \in K.$$

Voorbeeld. De eenheidsfunctie van Heaviside $H(x)$ wordt gedefinieerd door

$$H(x) = 0, \quad x < 0, \quad H(x) = 1, \quad x > 0,$$

De bijbehorende distributie wordt gegeven door

$$(H, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in K.$$

Voor de afgeleide H' vinden we nu

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0),$$

waaruit volgt $H'(x) = \delta(x)$.

Evenzo wordt de afgeleide van $\delta(x)$ gegeven door de distributie

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

Convergentie van distributies. In de ruimte K' van distributies voeren we het volgende convergentiebegrip in:

Definitie VI. De rij van distributies $\{f_n\} \subset K'$ convergeert naar de distributie f , i.e. $f_n \rightarrow f$ in K' , indien voor elke $\varphi \in K$ geldt

$$(1.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Opmerking. Voldoende voor de convergentie van de rij van distributies $\{f_n\}$ is dat voor elke $\varphi \in K$ de getallenrij (f_n, φ) , $n = 1, 2, \dots$, convergent is. Noemen we de limiet van de getallenrij (f, φ) dan is het duidelijk dat f een lineaire functionaal op K is. Men kan voorts bewijzen (Gelfand-Schilow [4], p. 354-355) dat de functionaal f continu is i.e. f is een distributie en $f_n \rightarrow f$ in K' .

Op analoge wijze kan men definiëren de convergentie van een verzameling van distributies f_t welke afhangen van een continue parameter t :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_t = f \text{ in } K' \text{ als } \lim_{t \rightarrow t_0} (f_t, \varphi) = (f, \varphi) \text{ voor elke } \varphi \in K.$$

Evenzo, een reeks van distributies $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heet convergent met som s indien voor de partiële sommen $s_k = \sum_{n=1}^k f_n$ geldt, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$ in K' .

Stelling. Indien $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in K' , dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$ in K' .

Bewijs. Merk op dat de afgeleiden f'_n, f' bestaan omdat een distributie differentieerbaar is. Voor elke $\varphi \in K$ geldt nu

$$(1.13) \quad (f'_n, \varphi) = -(f_n, \varphi') \rightarrow -(f, \varphi') = (f', \varphi)$$

indien $n \rightarrow \infty$. Daaruit volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$ in K' .

Gevolg. Een convergente rij of reeks van distributies kan willekeurig vaak termsgewijs worden gedifferentieerd.

Voorbeelden. 1. De rij van functies $f_n(x) = -n^{-1} \cos nx$ convergeert uniform naar 0 op $-\infty < x < \infty$. Voor elke functie $\varphi \in K$ geldt dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \cos nx \varphi(x) dx = 0,$$

i.e. $f_n \rightarrow 0$ in K' . Volgens de stelling is dan tevens

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0 \text{ in } K'.$$

Merk op dat deze limiet niet bestaat in klassieke zin.

2. Uit de theorie der Fourierreeksen is bekend de reeksontwikkeling

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\pi|x| + \frac{\pi^2}{6}, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

welke reeks uniform convergent is; zie Collegedictaat Wiskunde 30, 1975, p. 83. De reeks is tevens convergent in distributiezijn (verifieer dit) zodat na termgewijze differentiatie volgt

$$(1.14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi + \pi H(x), \quad -\pi < x < \pi,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \delta(x), \quad -\pi < x < \pi.$$

Merk op dat de laatste reeks divergent is in klassieke zin. De betekenis van de betrekking (1.14) is: Voor elke functie $\varphi \in K$ met drager binnen het interval $(-\pi, \pi)$ geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \varphi(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx + \pi \varphi(0) .$$

Opmerking. Men kan gemakkelijk verdere voorbeelden geven van Fourierreeksen welke divergent zijn in klassieke zin doch convergent in K' zijn. Algemeen is te bewijzen dat de Fourierreeks van een periodieke, lokaal integreerbare functie $f(x)$ convergent in K' is met som $f(x)$; zie Gelfand-Schilow [4], p. 39,40.

3. Beschouw de verzameling van functies

$$(1.15) \quad f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

waarbij t een positieve parameter voorstelt. Men kan gemakkelijk afleiden dat

$$(1.15a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x) dx = 1, \quad t > 0; \quad \lim_{t \downarrow 0} f_t(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

We zullen nu aantonen dat

$$(1.16) \quad \lim_{t \downarrow 0} f_t(x) = \delta(x) \text{ in } K'$$

oftewel

$$(1.17) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

voor elke $\varphi \in K$.

Bewijs. We geven het bewijs in de onderstelling dat $\varphi(x)$ continu is in $x = 0$ en begrensd is voor $-\infty < x < \infty$ i.e. $|\varphi(x)| \leq M$ voor elke x . Een functie $\varphi \in K$ zal zeker aan deze onderstellingen voldoen.

Vorm nu het verschil

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \varphi(x) dx - \varphi(0) = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx, \quad t > 0.
 \end{aligned}$$

Daar $\varphi(x)$ continu is in $x = 0$ laat zich bij $\epsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ vinden zodat

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{1}{3}\epsilon \quad \text{voor } |x| < \delta.$$

Splitst nu de integraal I in drie stukken,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx.$$

De drie integralen zijn als volgt af te schatten:

$$(i) \quad |I_2| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \frac{\epsilon}{3} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dx = \frac{1}{3}\epsilon,$$

$$(ii) \quad |I_3| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\delta}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-y^2) dy,$$

$$(iii) \quad |I_1| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{-\delta} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\delta/2\sqrt{t}} \exp(-y^2) dy.$$

Uit (ii), (iii) volgt $I_{1,3} \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow 0$; er bestaat daarom een getal t_0 zodanig dat $|I_1| < \frac{1}{3}\epsilon$, $|I_3| < \frac{1}{3}\epsilon$ voor $0 < t < t_0$. Combineer deze resultaten met (i) dan volgt

$$|I| = \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| < \epsilon \quad \text{voor } 0 < t < t_0.$$

Daarmee is (1.17) bewezen.

Opgaven. 1. Zij gegeven de verzameling van functies

$$f_t(x) = \frac{t}{\pi} \frac{1}{x^2+t^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Toon aan dat $\lim_{t \downarrow 0} f_t(x) = \delta(x)$ in K' .

2. Zij gegeven een verzameling van lokaal integreerbare functies $f_t(x)$ $-\infty < x < \infty, t > 0$, met de volgende eigenschappen,

$$f_t(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x) dx = 1, \quad t > 0;$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_a^b f_t(x) dx = 1 \text{ indien } a < 0, \quad b > 0.$$

Toon aan dat $\lim_{t \downarrow 0} f_t(x) = \delta(x)$ in K' .

Voor verdere voorbeelden en opgaven zie Stakgold [11], Vol. I, chapter 1, Gelfand-Schilow [4], Kap. I, §§1,2.

6.2. Distributies in n variabelen.

We zullen nu de voorgaande theorie uitbreiden tot het geval van distributies in n variabelen x_1, x_2, \dots, x_n . Daarbij maken we gebruik van de volgende korte notaties

$$(2.1) \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad |x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \int_{R_n} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{cases}$$

We voeren weer in een klasse K_n van testfuncties $\varphi(x)$:

Definitie I. Een testfunctie $\varphi(x)$ is een reëelwaardige functie gedefinieerd voor $x \in R_n$, welke aan de volgende eisen voldoet:

- (i) $\varphi(x) \in C^\infty(R_n)$ d.w.z. $\varphi(x)$ is oneindig vaak continu differentieerbaar naar elk der variabelen x_i ,
- (ii) $\varphi(x)$ heeft een begrensde drager.

Op de lineaire ruimte K_n van testfuncties definieren we weer een convergentiebegrrip op de bekende wijze:

Definitie II. De rij van testfuncties $\{\varphi_m(x)\} \subset K_n$ is convergent naar 0, i.e. $\varphi_m \rightarrow 0$ in K_n , indien geldt:

- (i) De dragers van $\varphi_m(x)$ liggen alle binnen een zelfde begrensde gebied.
- (ii) De rij $\{\varphi_m(x)\}$ en elke rij van partiële afgeleiden convergeren in R_n uniform naar 0.

Het begrip distributie is dan analoog als voren in te voeren:

Definitie III. Een distributie is een continue lineaire functionaal op K_n .

Voorbeelden. 1. Zij de functie $f(x)$ lokaal integreerbaar dan behoort bij $f(x)$ de distributie

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in K_n.$$

Men identificeert weer veelal de functie $f(x)$ met de bijbehorende distributie (f, φ) en spreekt van een reguliere distributie $f(x)$.

2. De " δ -functie" is de distributie gedefinieerd door

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in K_n.$$

Symbolisch schrijft men vaak

$$(\delta, \varphi) = \int_{R_n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

waarbij echter te bedenken is dat $\delta(x)$ niet een reguliere distributie is.

De in §6.1 geformuleerde rekenregels voor distributies blijven onveranderd doorgaan. De distributies in n variabelen vormen weer een lineaire ruimte K'_n te noemen. In K'_n introduceren we het volgende convergentiebegrip (vergeleijk met §6.1):

Definitie IV. De rij van distributies $\{f_m\} \subset K'_n$ convergeert naar de distributie f , i.e. $f_m \rightarrow f$ in K'_n , indien voor elke $\varphi \in K_n$ geldt

$$(2.2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (f_m, \varphi) = (f, \varphi).$$

Voorbeeld. Zij gegeven de verzameling van functies

$$(2.2a) \quad f_t(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad x \in R_n, \quad t > 0.$$

Dan geldt $\lim_{t \downarrow 0} f_t(x) = \delta(x)$ in K_n' ; verifieer dit resultaat.

We definiëren voorts het begrip direct product van twee distributies: Zijn b.v. $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ distributies in één variabele dan wordt het direct product $f_1(x_1) f_2(x_2)$ gedefinieerd door

$$(2.3) \quad (f_1(x_1) f_2(x_2), \varphi(x_1, x_2)) = (f_1(x_1), (f_2(x_2), \varphi(x_1, x_2))), \varphi(x_1, x_2) \in K_2.$$

Het direct product is hier een distributie in twee variabelen. Voor reguliere distributies valt het direct product samen met het gewone product. Uit de definitie (2.3) volgt voor de δ -functie in R_2 resp. R_n ,

$$(2.4) \quad \delta(x) = \delta(x_1) \delta(x_2), \text{ resp. } \delta(x) = \delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_n).$$

Differentiatie van distributies. Analoog aan §6.1 geven we de volgende definitie:

Definitie V. De afgeleide f_{x_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) van een distributie f wordt gegeven door

$$(2.5) \quad (f_{x_i}, \varphi) = -(f, \varphi_{x_i}), \varphi \in K_n.$$

Deze afgeleide is eveneens een distributie en daarom opnieuw differentieerbaar. Distributies in n variabelen zijn willekeurig vaak differentieerbaar naar elke combinatie van variabelen x_1, x_2, \dots, x_n .

Zij nu L een lineaire differentiaaloperator van tweede orde, gegeven door

$$(2.6) \quad L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x)u$$

met coëfficiënten $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x) \in C^\infty(R_n)$. Indien $u(x)$ een distributie is dan heeft (2.6) betekenis en $L[u]$ is opnieuw een distributie. Met behulp van de definitie (2.5) volgt dat de distributie $L[u]$ gegeven wordt door

$$(2.7) \quad (L[u], \varphi) = (u, L^*[\varphi]), \varphi \in K_n,$$

waarbij de differentiaaloperator L^* gedefinieerd is door

$$(2.8) \quad L^*[\varphi] = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)\varphi)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n (b_i(x)\varphi)_{x_i} + c(x)\varphi.$$

Merk op dat $L^*[\varphi] \in K_n$ is zodat $(u, L^*[\varphi])$ betekenis heeft.

De operator L^* heet de geadjungeerde (adjoint) van L . Indien $L = L^*$ heet de operator L zelf-geadjungeerd. De Laplace operator

$$(2.9) \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

is een voorbeeld van een zelf-geadjungeerde operator.

Addendum. De operator L en zijn geadjungeerde L^* bezitten nog de volgende eigenschap: Zij $u(x), v(x) \in C^2(R_n)$ d.w.z. de functies $u(x), v(x)$ zijn twee keer continu differentieerbaar in R_n , dan geldt

$$(2.10) \quad vL[u] - uL^*[v] = \operatorname{div} \underline{P} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i},$$

waarbij de vector-functie $\underline{P}(x) = \{P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)\}$ gegeven wordt door

$$(2.11) \quad P_i(x) = \sum_{j=1}^n \left[a_{ij}(x) u_{x_j} v - u (a_{ij}(x) v)_{x_j} \right] + b_i(x) uv;$$

verifieer deze resultaten. De vector-functie $\underline{P}(x)$ is bilineair in u en v . Integreer nu de identiteit (2.10) over een begrensde gebied $G \subset R_n$ met rand Γ welke stuksgewijs glad en orienteerbaar zal zijn. Onder toepassing van de divergentiestelling van Gauss volgt dan de zgn. formule van Green

$$(2.12) \quad \int_G \{vL[u] - uL^*[v]\} dx = \int_{\Gamma} \underline{P} \cdot \underline{v} d\sigma,$$

waarbij \underline{v} de naar buiten gerichte normaal op Γ is en $d\sigma$ het oppervlakte-element van Γ voorstelt.

In geval $L = L^* = \Delta$ (Laplace operator) gaat de formule van Green (2.12) juist over in de tweede identiteit van Green.

6.3. Zwakke oplossingen van PDV's.

Zij gegeven de lineaire PDV van tweede orde in n variabelen

$$(3.1) \quad L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x).$$

Zoals gedefinieerd in hoofdstuk I heet de functie $u(x)$ een klassieke oplossing of sterke oplossing van de PDV (3.1) in een gebied $G \subset \mathbb{R}_n$, indien

(i) $u(x) \in C^2(G)$,

(ii) $u(x)$ voldoet in G aan $L[u] = f$.

We zullen nu dit begrip oplossing uitbreiden. Beschouw daartoe nogmaals de PDV (3.1) en onderstel dat de koëfficiënten $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$ zijn. Het rechterlid $f(x)$ van (3.1) mag eventueel een distributie zijn.

De distributie $u(x)$ heet nu een gegeneraliseerde oplossing of zwakke oplossing van de PDV (3.1) indien $L[u] = f$ in distributie-zin d.w.z.

$$(3.2) \quad (L[u], \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in K_n.$$

Met behulp van (2.7) is deze voorwaarde te herleiden tot

$$(3.3) \quad (u, L^*[\varphi]) = (f, \varphi), \quad \varphi \in K_n,$$

waarbij de operator L^* de geadjungeerde van L voorstelt.

Analoog: De distributie $u(x)$ is een gegeneraliseerde of zwakke oplossing van de PDV (3.1) in het gebied G indien

$$(3.4) \quad (u, L^*[\varphi]) = (f, \varphi)$$

voor elke functie $\varphi \in K_n$, waarvan de drager geheel binnen G ligt.

Het begrip zwakke oplossing vormt een uitbreiding van het eerdere begrip sterke oplossing zoals blijkt uit de volgende twee stellingen:

Stelling I. Elke sterke oplossing van (3.1) in G is tevens zwakke oplossing in G .

Bewijs. Zij de functie $u(x)$ sterke oplossing van (3.1) in G dan is $u(x) \in C^2(G)$ en $L[u] = f$. Laat nu $\varphi \in K_n$ een testfunctie zijn met drager binnen G . Dan is volgens de formule van Green (2.12),

$$(3.5) \quad \int_G \{\varphi L[u] - u L^*[\varphi]\} dx = \int_\Gamma \underline{P} \cdot \underline{\nu} d\sigma = 0,$$

omdat $\varphi(x) = 0$, $\underline{P}(x) = \underline{0}$ op de rand Γ van G . Daaruit volgt

$$(3.6) \quad (u, L^*[\varphi]) = \int_G u L^*[\varphi] dx = \int_G \varphi L[u] dx = \int_G \varphi f dx = (f, \varphi),$$

m.a.w. $u(x)$ is tevens zwakke oplossing van de PDV in G .

Stelling II. Zij de functie $u(x) \in C^2(G)$ zwakke oplossing in G van de PDV $L[u] = f$ met $f \in C^0(G)$. Dan is $u(x)$ tevens sterke oplossing in G .

Bewijs. Laat $\varphi \in K_n$ een testfunctie zijn met drager binnen G dan volgt met behulp van de formule van Green (2.12),

$$(3.7) \quad \int_G \varphi L[u] dx = \int_G u L^*[\varphi] dx = (u, L^*[\varphi]) = (f, \varphi) = \int_G \varphi f dx$$

oftewel

$$(3.8) \quad \int_G \varphi \{L[u] - f\} dx = 0.$$

Omdat $L[u] - f \in C^0(G)$ is volgt uit (3.8) $L[u] = f$ in G i.e. $u(x)$ is sterke oplossing van de PDV in G .

Opmerking. De lineaire PDV (3.1) kan ook zwakke oplossingen bezitten welke niet tevens sterke oplossing zijn. In Stakgold [11], Vol. II, p. 44-47 wordt een voorbeeld gegeven van een dergelijke zwakke oplossing voor de één-dimensionale golfvergelijking; deze zwakke oplossing blijkt discontinu te zijn over een karakteristiek.

Fundamentele oplossing. Laat L weer de lineaire differentiaaloperator van tweede orde zijn als gedefinieerd in (3.1).

De distributie $S(x;y)$ heet nu een fundamentele oplossing voor de operator L met singulariteit in $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, indien $S(x;y)$ zwakke oplossing is van de PDV

$$(3.9) \quad L[S(x;y)] = \delta(x-y).$$

Volgens de definitie (3.3) moet dan gelden

$$(3.10) \quad (S(x;y), L^*[\varphi(x)]) = (\delta(x-y), \varphi(x)) = \varphi(y), \varphi \in K_n.$$

Uiteraard is de fundamentele oplossing niet eenduidig bepaald; men kan nog een willekeurige oplossing van de homogene PDV $L[u] = 0$ toevoegen. Bij toepassingen voor een concrete PDV wordt de fundamentele oplossing meestal nader vastgelegd door het opleggen van zekere begin- of randvoorwaarden of van bepaalde symmetrie-eigenschappen.

In het geval dat L een differentiaaloperator is met konstante koëfficiënten, volgt $S(x;y)$ door translatie uit een fundamentele oplossing $S(x;0)$ met sin-

gulariteit in 0,

$$(3.11) \quad S(x;y) = S(x-y;0).$$

Met behulp van de fundamentele oplossing $S(x;y)$ kan men zeer eenvoudig een oplossing bepalen van de inhomogene PDV $L[u] = f(x)$. Schrijf daartoe het rechterlid $f(x)$ als een superpositie van δ -functies,

$$(3.12) \quad f(x) = \int_{R_n} \delta(x-y) f(y) dy.$$

Men noemt deze integraal de convolutie (convolution, Faltung) van δ en f ; voor definitie en eigenschappen van het convolutie product zie Stakgold [11], Vol. II, p.18-20, Gelfand-Schilow [4], p. 104-117. Vorm nu analoog aan (3.12) de integraal

$$(3.13) \quad u(x) = \int_{R_n} S(x;y) f(y) dy,$$

dan is (onder zekere voorwaarden) $u(x)$ een oplossing van de PDV $L[u] = f(x)$. Deze afleiding van de oplossing is zuiver formeel en voornamelijk bedoeld om de betekenis van het begrip fundamentele oplossing aan te geven. In de navolgende hoofdstukken zullen we dit punt nader uitwerken voor een aantal speciale PDV's.

VII. Elliptische PDV's: Laplace vergelijking en Helmholtz vergelijking.

7.1. Inleiding en recapitulatie.

Het eenvoudigste voorbeeld van een elliptische PDV is de Laplace vergelijking

$$(1.1) \quad \Delta u \equiv u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0.$$

Diverse problemen uit de mathematische fysica worden beschreven door de Laplace vergelijking met $n = 2$, $n = 3$. Het onderzoek van de Laplace vergelijking is daarom van belang voor de toepassingen in de fysica. Daarnaast is de Laplace vergelijking tevens representatief voor de klasse van elliptische PDV's als geheel: vele resultaten voor de Laplace vergelijking zijn te generaliseren tot algemenere elliptische PDV's.

Behalve de Laplace vergelijking onderzoeken we in dit hoofdstuk nog de Poisson vergelijking

$$(1.2) \quad \Delta u = -f(x),$$

Helmholtz vergelijking

$$(1.3) \quad \Delta u + \lambda u = 0,$$

waarbij λ een konstante voorstelt.

Het onderzoek richt zich zo veel mogelijk op de PDV's in n onafhankelijke variabelen x_1, x_2, \dots, x_n ; in een aantal situaties beperken we ons tot de praktisch belangrijke gevallen $n = 2$, $n = 3$.

Notatie. Analooq aan (VI. 2.1) gebruiken we weer de korte notatie

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad |x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\int_G f(x) dx = \iiint_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

G zal steeds een begrensde, enkelvoudig samenhangend gebied in R_n zijn. Γ is de rand van G ; waar nodig wordt Γ stuksgewijs glad en orienteerbaar verondersteld zodat de divergentiestelling van Gauss kan worden toegepast. \underline{v} is de naar buiten gerichte normaal op Γ .

\bar{G} is de afsluiting van G i.e. $\bar{G} = G + \Gamma$. G_1 is het complement van \bar{G} ten opzichte van R_n . Voor de rand Γ is G het binnengebied en G_1 het buitengebied.

$u(x) \in C^m(G)$ betekent dat de functie $u(x)$ in G m keer continu differentieerbaar is naar elke combinatie van de variabelen x_1, x_2, \dots, x_n .

Recapitulatie. We recapituleren een aantal resultaten uit het Collegedictaat Wiskunde 40, 1976, § 2.4. Tevens vertalen we deze resultaten naar het geval van n variabelen.

Eerste identiteit van Green

$$(1.4) \quad \int_G (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\Gamma} uv_{\nu} d\sigma,$$

geldig onder de voldoende voorwaarden $u(x) \in C^0(\bar{G}), C^1(G), v(x) \in C^1(\bar{G}), C^2(G)$. v_{ν} is de normaalafgeleide van v , $d\sigma$ is het oppervlakteelement van Γ .

Tweede identiteit van Green

$$(1.5) \quad \int_G (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\Gamma} (uv_{\nu} - vu_{\nu}) d\sigma,$$

geldig onder de voldoende voorwaarden $u(x), v(x) \in C^1(\bar{G}), C^2(G)$.

Definitie. De functie $u(x)$ heet harmonisch in G indien $u(x) \in C^0(\bar{G}), C^2(G)$ en $\Delta u = 0$ in G .

Voor een harmonische functie $u(x) \in C^1(\bar{G})$ gelden de volgende integraalbetrekkingen

$$(1.6) \quad \text{a) } \int_G |\nabla u|^2 dx = \int_{\Gamma} uu_{\nu} d\sigma, \quad \text{b) } \int_{\Gamma} u_{\nu} d\sigma = 0,$$

af te leiden uit (1.4), (1.5).

Met behulp van (1.6a) laat zich bewijzen de stelling:

Stelling I. Zij $u(x)$ harmonisch in G met $u(x) = 0$ op Γ , dan is $u(x) = 0$ in \bar{G} .
Zij $u(x)$ harmonisch in G met $u_{\nu}(x) = 0$ op Γ , dan is $u(x) = \text{konst.}$ in \bar{G} .

Met de Laplace vergelijking zijn de volgende randwaardeproblemen geassocieerd:

(i) Dirichlet probleem,

$$(1.7) \quad \Delta u = 0, x \in G; u(x) = g(x), x \in \Gamma.$$

(ii) Neumann probleem,

$$(1.8) \quad \Delta u = 0, x \in G; u_{\nu}(x) = h(x), x \in \Gamma.$$

Uit stelling I volgt gemakkelijk:

Stelling II. De oplossing van het (inwendig) Dirichlet probleem is eenduidig.

De oplossing van het (inwendig) Neumann probleem is eenduidig op een kon-
stante na.

Uit (1.6b) volgt nog een nodige voorwaarde voor het bestaan van de oplossing van het Neumann probleem (1.8), namelijk

$$(1.9) \quad \int_{\Gamma} h(x) d\sigma = 0.$$

7.2. Maximum-minimum principe voor harmonische functies.

Maximum-minimum principe. Zij de functie $u(x)$ harmonisch in G , dan neemt $u(x)$ haar maximum en minimum aan op de rand Γ van G .

Bewijs. Voer in $M = \max_{x \in \Gamma} u(x)$, $m = \min_{x \in \Gamma} u(x)$ dan is te bewijzen

$$(2.1) \quad m \leq u(x) \leq M, \quad x \in G.$$

We bewijzen alleen de rechterhelft van de ongelijkheid (2.1).

Stel daartoe dat er een punt $x_0 \in G$ bestaat met $u(x_0) = M + \eta$, $\eta > 0$. Voer dan in een functie $v(x)$ gegeven door

$$(2.2) \quad v(x) = u(x) + \delta |x - x_0|^2, \quad \delta > 0.$$

Op de rand Γ geldt nu

$$(2.3) \quad v(x) \leq M + \delta \max_{x \in \Gamma} |x - x_0|^2 = M + \delta r^2, \quad x \in \Gamma,$$

terwijl $v(x_0) = u(x_0)$ is. Kies nu δ zo klein dat geldt

$$(2.4) \quad M + \delta r^2 < M + \eta = u(x_0) = v(x_0).$$

De continue functie $v(x)$ zal dan op \bar{G} zijn maximum aannemen in het inwendige van \bar{G} i.e. in een punt $x_0^* \in G$. In dat punt x_0^* zal gelden

$$(2.5) \quad v_{x_i x_i}(x_0^*) \leq 0, \quad \Delta v(x_0^*) \leq 0.$$

Anderzijds is echter

$$(2.6) \quad \Delta v = \Delta u + \delta \Delta \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2 \right] = 2n\delta > 0,$$

zodat we tot een tegenspraak komen.

Daarmee is bewezen $u(x) \leq M$ voor $x \in G$.

Opmerking. In §7.5 zullen we een tweede bewijs geven van dit maximum-minimum principe met nog de volgende toevoeging: Indien de functie $u(x)$ haar maximum of minimum (tevens) aanneemt in het inwendige van G , dan is $u(x) = \text{konst.}$ in \bar{G} .

Opgave. Toon aan dat een analoog maximum-minimum principe geldt voor oplossingen van de Helmholtz vergelijking:

Zij de functie $u(x) \in C^0(\bar{G})$ in G oplossing van de Helmholtz vergelijking $\Delta u + \lambda u = 0$ met $\lambda < 0$, dan neemt $u(x)$ haar positief maximum en negatief minimum (indien aanwezig) uitsluitend aan op de rand Γ van G .

Met behulp van het maximum-minimum principe bewijzen we nogmaals het eerste deel van stelling II uit §7.1 in de volgende uitgebreidere vorm:

Stelling. De oplossing van het Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking i.e.

$$(2.7) \quad \Delta u = 0, \quad x \in G; \quad u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma,$$

is eenduidig en hangt continu af van de randwaarde $g(x)$.

Bewijs. (i) Eenduidigheid. Onderstel dat het probleem (2.7) twee oplossingen $u_1(x)$, $u_2(x)$ bezit. Vorm dan het verschil $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$, dan is $v(x)$ harmonisch in G en $v(x) = 0$, $x \in \Gamma$. Ook het maximum en minimum van $v(x)$ op Γ zijn dan 0, waarna met het maximum-minimum principe volgt $v(x) = 0$ i.e. $u_1(x) = u_2(x)$, $x \in \bar{G}$.

Opmerking. Bij het bovenstaande eenduidigheidsbewijs wordt verondersteld $u(x) \in C^0(\bar{G})$. Het bewijs van stelling II uit §7.1 is gebaseerd op de identiteit (1.6a) en veronderstelt daarom $u(x) \in C^1(\bar{G})$.

(ii) Continue afhankelijkheid. Beschouw het Dirichlet probleem (2.7) met randwaarde $g(x) = g_1(x)$ resp. $g(x) = g_2(x)$ en noem de bijbehorende oplossing $u_1(x)$ resp. $u_2(x)$. Zij nu $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \epsilon$, $x \in \Gamma$, dan is te bewijzen $|u_1(x) - u_2(x)| \leq \epsilon$, $x \in \bar{G}$. Vorm daartoe het verschil $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$, dan is $v(x)$ harmonisch in G en $v(x) = g_1(x) - g_2(x)$, $x \in \Gamma$. Er zal nu gelden

$$(2.8) \quad -\epsilon \leq \min_{x \in \Gamma} [g_1(x) - g_2(x)] \leq \max_{x \in \Gamma} [g_1(x) - g_2(x)] \leq \epsilon.$$

Met het maximum-minimum principe volgt dan $-\varepsilon \leq v(x) \leq \varepsilon$ i.e.

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \varepsilon, x \in \bar{G}.$$

Opmerking. Het Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking voldoet aan twee van de drie eisen voor een correct gesteld probleem.

Opgave. Bewijs ook dat de oplossing van het Dirichlet probleem voor de Helmholtz vergelijking $\Delta u + \lambda u = 0$ met $\lambda < 0$, eenduidig is en continu afhangt van de randvoorwaarde. Maak gebruik van het maximum-minimum principe voor oplossingen van de Helmholtz vergelijking.

Bewijs de eenduidigheid ook met behulp van de eerste identiteit van Green.

7.3. Stelling van Kelvin, uitwendig Dirichlet en Neumann probleem voor de Laplace vergelijking.

Inversie t.o.v. een bol. Laat B een bol in R_n zijn gegeven door $|x|^2 = a^2$. We noemen nu de afbeelding

$$(3.1) \quad y = \frac{a^2}{|x|^2} x, \quad y_i = \frac{a^2}{\sum_{k=1}^n x_k^2} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

inversie t.o.v. de bol B. Het punt y heet de inverse van x t.o.v. B. Opgevat als vectoren hebben x en y dezelfde richting, terwijl voorts geldt $|x||y| = a^2$.

Eigenschappen van de inversie:

- a) Indien x wordt afgebeeld op y, dan wordt y afgebeeld op x; de punten x en y zijn dus elkaars inverse.
- b) De punten van de bol B worden op zichzelf afgebeeld. Het binnengebied van B gaat over in het buitengebied en omgekeerd.
- c) Voeg aan R_n een punt ∞ toe dan wordt (definitie) $x = 0$ afgebeeld op $y = \infty$ en omgekeerd.

Stelling van Kelvin (1847). Zij de funktie u(x) harmonisch in G, dan is de funktie

$$(3.2) \quad v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{a^2}{|x|^2} x\right)$$

harmonisch in het gebied G^* ontstaan uit G door inversie t.o.v. de bol $|x|^2 = a^2$.

Bewijs. Voer in de notatie

$$(3.3) \quad y = \frac{a^2}{|x|^2} x, \quad v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u(y), \quad x \in G^*, \quad y \in G.$$

Met elementair rekenwerk is de afgeleide $v_{x_i x_i}$ uit te drukken in de functie u en haar afgeleiden van eerste en tweede orde. Sommatie van de aldus berekende afgeleiden $v_{x_i x_i}$ blijkt nu te leiden tot

$$(3.4) \quad \Delta v = \frac{a^4}{|x|^{n+2}} \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} = \frac{a^4}{|x|^{n+2}} \Delta u = 0,$$

i.e. $v(x)$ is harmonisch in G^* .

Regulariteit in het punt ∞ . Zij G_1 een buitengebied inwendig begrensd door de rand Γ , en zij de functie $u(x)$ harmonisch in G_1 . Onderstel dat het punt $x = 0$ binnen Γ ligt. Inversie t.o.v. de bol $|x|^2 = a^2$ doet dan Γ, G_1 overgaan in Γ^*, G_1^* ; G_1^* zal het gebied binnen Γ^* zijn met uitzondering van het punt $x = 0$. Volgens de stelling van Kelvin is de functie

$$(3.5) \quad v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{a^2}{|x|^2} x\right)$$

harmonisch in G_1^* .

Definitie. Zij de functie $u(x)$ harmonisch in een buitengebied G_1 . Dan heet $u(x)$ regulier in het punt ∞ indien de functie $v(x)$ gegeven door (3.5), harmonisch is in G_1^* aangevuld met het punt $x = 0$.

Voorbeeld. De functie $u(x) \equiv 1$ is harmonisch in ieder buitengebied G_1 . Evenwel de functie is regulier in ∞ alleen in R_2 en niet in $R_n, n \geq 3$.

We geven nog de volgende stellingen over het gedrag voor $|x| \rightarrow \infty$ van een harmonische functie regulier in ∞ :

Stelling I. Zij de functie $u(x)$ harmonisch in een buitengebied $G_1 \subset R_n$ en regulier in het punt ∞ . Dan geldt voor $r = |x| \rightarrow \infty$,

$$(3.6) \quad u(x) = o\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right), \quad |\nabla u(x)| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{r^2}\right), & n = 2, \\ o\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right), & n \geq 3. \end{cases}$$

Bewijs. Overeenkomstig (3.5) is de functie $u(x)$ als volgt voor te stellen

$$(3.7) \quad u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} v(y), \quad y = \frac{a^2}{|x|^2} x, \quad x \in G_1, \quad y \in G_1^*.$$

Volgens definitie is dan $v(y)$ harmonisch in G_1^* aangevuld met het punt $y = 0$. Kies nu een getal R zodanig dat de omgeving $|y| < a^2/R$ van $y = 0$, in G_1^* ligt. Op deze omgeving zijn $v(y)$, $\nabla v(y)$ begrensd i.e.

$$(3.8) \quad |v(y)| \leq M_1, \quad |\nabla v(y)| \leq M_2, \quad |y| < a^2/R.$$

Met (3.7) volgt nu onmiddellijk

$$(3.9) \quad |u(x)| \leq \frac{M_1}{|x|^{n-2}}, \quad |x| > R \text{ i.e. } u(x) = O\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right).$$

Evenzo volgt na differentiatie van (3.7),

$$u_{x_i} = - \frac{(n-2)x_i}{|x|^n} v + \frac{a^2}{|x|^n} v_{y_i} - \frac{2a^2 x_i}{|x|^{n+2}} \sum_{j=1}^n v_{y_j} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

en vervolgens met (3.8)

$$(3.10) \quad |\nabla u(x)| \leq \frac{(n-2)M_1}{r^{n-1}} + \frac{3a^2 M_2}{r^n}, \quad |x| = r > R.$$

Stelling II. Zij de functie $u(x)$ harmonisch in een buitengebied $G_1 \subset R_n$. Indien $u(x)$ begrensd is (in geval $n = 2$) resp. $u(x) \rightarrow 0$ (in geval $n \geq 3$) voor $|x| \rightarrow \infty$, dan is $u(x)$ regulier in het punt ∞ .

Voor het bewijs van deze stelling zij verwezen naar Petrowski [7], p. 201-202, 210-213, Tychonoff-Samarski [12], p. 287-288.

Integraalbetrekkingen. Zij de functie $u(x) \in C^1(\bar{G}_1)$ harmonisch in G_1 en regulier in het punt ∞ , dan geldt

$$(3.11) \quad \text{a) } \int_{G_1} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Gamma} u u_{\nu} d\sigma, \quad \text{b) } \int_{\Gamma} u_{\nu} d\sigma = 0 \text{ alleen in } R_2.$$

Bewijs. Kies een getal R zodanig dat de bol $B: |x| = R$ de rand Γ van G_1 omsluit. Laat D het gebied zijn begrensd door Γ en B dan volgt uit (1.6a),

$$(3.12) \quad \int_D |\nabla u|^2 dx = \int_B uu_\nu d\sigma - \int_\Gamma uu_\nu d\sigma.$$

Met behulp van stelling I is eenvoudig in te zien dat $\int_B uu_\nu d\sigma \rightarrow 0$ indien $R \rightarrow \infty$. In de limiet voor $R \rightarrow \infty$ zal (3.12) dan overgaan in (3.11a). Evenzo volgt uit (1.6b),

$$(3.13) \quad \int_\Gamma u_\nu d\sigma = \int_B u_\nu d\sigma.$$

Voor $R \rightarrow \infty$ geldt weer $\int_B u_\nu d\sigma \rightarrow 0$, echter alleen in R_2 en niet in R_n , $n \geq 3$ (zie stelling I). Daarmee is (3.11b) bewezen.

Stelling III. Zij $u(x)$ harmonisch in G_1 , regulier in het punt ∞ en zij $u(x) = 0$ op Γ , dan is $u(x) = 0$ in \bar{G}_1 . Zij $u(x)$ harmonisch in $G_1 \subset R_n$, regulier in het punt ∞ en zij $u_\nu(x) = 0$ op Γ , dan is $u(x) = \text{konst.}$ (in geval $n = 2$) resp. $u(x) = 0$ (in geval $n \geq 3$) in \bar{G}_1 .

Bewijs. Indien $u = 0$ of $u_\nu = 0$ op Γ volgt uit (3.11a)

$$(3.14) \quad \int_{G_1} |\nabla u|^2 dx = 0$$

oftewel $u(x) = C = \text{konst.}$ in \bar{G}_1 . Indien $u(x) = 0$ op Γ zal $C = 0$ zijn. In geval $u_\nu(x) = 0$ op Γ en $n \geq 3$ geldt eveneens $C = 0$ omdat $u(x)$ regulier is in het punt ∞ . Slechts in het geval $u_\nu(x) = 0$ op Γ en $n = 2$ kan de konstante C niet nader worden vastgelegd.

Voor het buitengebied G_1 kan men nu de volgende randwaardeproblemen stellen:

(i) Uitwendig Dirichlet probleem,

$$(3.15) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & x \in G_1; & u(x) \text{ regulier in } \infty; \\ u(x) = g_1(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

(ii) Uitwendig Neumann probleem

$$(3.16) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & x \in G_1; & u(x) \text{ regulier in } \infty; \\ u_\nu(x) = h_1(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Uit stelling III volgt dan gemakkelijk:

Stelling IV. De oplossing van het uitwendig Dirichlet probleem is eenduidig. De oplossing van het uitwendig Neumann probleem is eenduidig op een konstante na in R_2 resp. eenduidig in R_n , $n \geq 3$.

Uit (3.11b) volgt nog een nodige voorwaarde voor het bestaan van de oplossing van het uitwendig Neumann probleem (3.16) in R_2 , namelijk

$$(3.17) \quad \int_{\Gamma} h_1(x) d\sigma = 0.$$

Opgave. Bewijs het eerste deel van stelling IV ook met behulp van het maximum-minimum principe voor harmonische functies.

7.4. Fundamentele oplossing voor de Laplace operator.

Een fundamentele oplossing $S(x;y)$ voor de Laplace operator $-\Delta$ met singulariteit in y voldoet volgens definitie (VI. 3.9) aan de PDV

$$(4.1) \quad \Delta S(x;y) = -\delta(x-y).$$

$S(x;y)$ volgt door translatie uit een fundamentele oplossing $S(x;0)$ met singulariteit in 0 ,

$$(4.2) \quad S(x;y) = S(x-y;0).$$

We bepalen nu een speciale fundamentele oplossing $S(x;0) = S(x)$ welke alleen afhangt van $r = |x|$. Voor $r > 0$ voldoet S aan de PDV $\Delta S = 0$ welke vergelijking nu overgaat in

$$(4.3) \quad S_{rr} + \frac{n-1}{r} S_r = 0.$$

De algemene oplossing van deze GDV luidt

$$(4.4) \quad S(x) = C_2 \log r + D_2, \quad n = 2; \quad S(x) = \frac{C_n}{r^{n-2}} + D_n, \quad n \geq 3.$$

Hierbij zijn C_n, D_n willekeurige integratiekonstanten.

In het vervolg stellen we $D_n = 0$ terwijl C_n wordt bepaald op de volgende heuristische wijze. Integreer de PDV $\Delta S = -\delta(x)$ over het gebied $G_\epsilon: |x| < \epsilon$ begrensd door de bol $B_\epsilon: |x| = \epsilon$. Dan volgt onder formele toepassing van de divergentiestelling van Gauss,

$$(4.5) \quad \int_{G_\epsilon} \Delta S \, dx = \int_{B_\epsilon} S_{,V} d\sigma = \int_{B_\epsilon} S_r d\sigma = - \int_{G_\epsilon} \delta(x) dx = -1.$$

Substitueer voor S_r op B_ϵ de waarde volgens (4.4) dan vinden we

$$(4.6) \quad \begin{cases} \int_{B_\epsilon} S_r d\sigma = \frac{C_2}{\epsilon} \int_{B_\epsilon} d\sigma = 2\pi C_2 = -1, \quad n = 2; \\ \int_{B_\epsilon} S_r d\sigma = -\frac{(n-2)C_n}{\epsilon^{n-1}} \int_{B_\epsilon} d\sigma = -(n-2)\sigma_n C_n = -1, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Hierbij is gesteld

$$(4.7) \quad \int_{B_\epsilon} d\sigma = \text{oppervlakte bol } B_\epsilon = \sigma_n \epsilon^{n-1};$$

de konstante σ_n is de oppervlakte van de eenheidsbol in R_n .

Uit (4.6) zijn de konstanten C_n eenvoudig af te lezen waarna de fundamentele oplossing $S(x)$ gegeven wordt door

$$(4.8) \quad S(x) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}, \quad n = 2; \quad S(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Lemma. Voor een n -dimensionale bol met straal r worden volume $V_n(r)$ en oppervlakte $O_n(r)$ gegeven door de formules

$$(4.9) \quad V_n(r) = \tau_n r^n, \quad O_n(r) = \sigma_n r^{n-1},$$

met

$$(4.10) \quad \tau_n = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}, \quad \sigma_n = n\tau_n = \frac{n\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}.$$

Het bewijs van dit lemma wordt aan de lezer overgelaten; zie eventueel Stakgold [11], Vol. II, p. 14,15.

Voorbeeld. $\tau_2 = \pi$, $\sigma_2 = 2\pi$; $\tau_3 = 4\pi/3$, $\sigma_3 = 4\pi$.

Verificatie der fundamentele oplossing. We zullen nog verifiëren dat de functie (4.8) inderdaad zwakke oplossing is van de PDV $\Delta S = -\delta(x)$. Daartoe is te bewijzen dat

$$(4.11) \quad (S(x), \Delta\varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi(x)) = -\varphi(0), \quad \varphi \in K_n.$$

We geven het bewijs alleen voor het geval $n \geq 3$. Aangezien $S(x)$ een reguliere distributie is gaat de te bewijzen betrekking (4.11) over in

$$(4.12) \quad \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{R_n} \frac{\Delta\varphi(x)}{r^{n-2}} dx = -\varphi(0), \quad \varphi \in K_n,$$

waarbij weer $|x| = r$ gesteld is.

Voer weer in het gebied $G_\varepsilon : |x| < \varepsilon$ met rand $B_\varepsilon : |x| = \varepsilon$. Met behulp van de tweede identiteit van Green (1.5) is nu af te leiden

$$\begin{aligned} (4.13) \quad \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{R_n - G_\varepsilon} \frac{\Delta\varphi(x)}{r^{n-2}} dx &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{R_n - G_\varepsilon} \left[\frac{\Delta\varphi}{r^{n-2}} - \varphi \Delta \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) \right] dx \\ &= - \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{B_\varepsilon} \left[\frac{1}{r^{n-2}} \varphi_r - \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) \right] d\sigma \\ &= - \frac{1}{(n-2)\sigma_n \varepsilon^{n-2}} \int_{B_\varepsilon} \varphi_r d\sigma - \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{B_\varepsilon} \varphi d\sigma. \end{aligned}$$

Hierbij is te bedenken dat $\varphi(x)$ een begrensde drager heeft. Uit de continuïteit van $\varphi(x)$ in $x = 0$ en uit de begrensde van φ_r volgt nu gemakkelijk

$$(4.14) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(n-2)\sigma_n \varepsilon^{n-2}} \int_{B_\varepsilon} \varphi_r d\sigma = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{B_\varepsilon} \varphi d\sigma = \varphi(0).$$

Na een limietovergang $\varepsilon \rightarrow 0$ zal dan (4.13) overgaan in de te bewijzen betrekking (4.12).

De fundamentele oplossing $S(x;y)$ met singulariteit in y wordt overeenkomstig (4.2), (4.8) gegeven door

$$(4.15) \quad S(x;y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|}, \quad n = 2; \quad S(x;y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

In R_2, R_3 is $S(x;y)$ te interpreteren als de electrostatische potentiaal in x tengevolge van een positieve eenheidslading in het punt y .

Opgave. Toon aan dat een analoge fundamentele oplossing voor de Helmholtz operator $-\Delta - k^2$ gegeven wordt door

$$(4.16) \quad S(x;y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad n = 2; \quad S(x;y) = \frac{\exp[ik|x-y|]}{4\pi|x-y|}, \quad n = 3.$$

Hierbij is $H_0^{(1)}$ de Hankelfunctie van eerste soort en orde 0.

Verifieer dat $S(x;y)$ zwakke oplossing is van de PDV $\Delta S + k^2 S = -\delta(x-y)$.

Met behulp van de fundamentele oplossing (4.15) kan men eenvoudig een oplossing bepalen van de Poisson vergelijking

$$(4.17) \quad \Delta u = -f(x), \quad x \in G.$$

Schrijf daartoe $f(x)$ als een superpositie van δ -functies,

$$(4.18) \quad f(x) = \int_G \delta(x-y) f(y) dy, \quad x \in G,$$

dan volgt formeel dat

$$(4.19) \quad u(x) = \int_G S(x;y) f(y) dy$$

oplossing is van (4.17).

Voor $n = 3$ b.v. gaat (4.19) over in

$$(4.20) \quad u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{f(y)}{|x-y|} dy,$$

te interpreteren als de potentiaal van een ladingsverdeling in G met dichtheid $f(x)$.

Met klassieke analyse is te bewijzen dat onder zekere voorwaarden voor f de functie $u(x)$ inderdaad oplossing is van de Poisson vergelijking:

Stelling. Zij $f(x) \in C^1(\bar{G})$ dan is $u(x) \in C^1(\bar{G})$, $C^2(G)$ en $u(x)$ voldoet aan de Poisson vergelijking $\Delta u = -f(x)$, $x \in G$.

Voor het bewijs van deze stelling zij verwezen naar Courant-Hilbert [2], p. 246-248, Hellwig [5], p. 173-176.

Opmerking. In het buitengebied G_1 is $u(x)$ continu en willekeurig vaak differentieerbaar, terwijl voorts geldt $\Delta u = 0$ in G_1 .

Derde identiteit van Green. Zij de functie $u(x) \in C^1(\bar{G})$, $C^2(G)$. Uit de tweede identiteit van Green (1.5) met $v(x) = S(x;y)$ gesteld, volgt nu

$$(4.21) \quad \int_G [u(x) \Delta S(x;y) - S(x;y) \Delta u] dx = \int_{\Gamma} [u(x) S_{\nu}(x;y) - S(x;y) u_{\nu}(x)] d\sigma_x$$

waarbij $d\sigma_x$ aangeeft dat x de integratievariabele is. Met de formele herleiding

$$(4.22) \quad \int_G u(x) \Delta S(x;y) dx = - \int_G u(x) \delta(x-y) dx = \begin{cases} -u(y), & y \in G, \\ 0 & , y \in G_1, \end{cases}$$

gaat (4.21) over in de volgende representatie voor $u(y)$,

$$(4.23) \quad u(y) = - \int_G S(x;y) \Delta u dx + \int_{\Gamma} [S(x;y) u_{\nu}(x) - u(x) S_{\nu}(x;y)] d\sigma_x, \quad y \in G.$$

Voor $y \in G_1$ is het rechterlid van (4.23) gelijk aan nul. Men noemt (4.23) wel de derde identiteit van Green. Voor een klassieke afleiding van (4.23) in het geval $n = 3$ zij verwezen naar Tychonoff-Samarski [12], p. 277-278.

Merk op dat de identiteit (4.23) ook geldig blijft indien $S(x;y)$ een willekeurige fundamentele oplossing is niet noodzakelijk gelijk aan de fundamentele oplossing (4.15).

Opgaven. 1. Zij de functie $u(x) \in C^1(\bar{G}_1), C^2(G_1)$ regulier in het punt ∞ d.w.z. het gedrag van $u(x)$ voor $|x| \rightarrow \infty$ wordt beschreven door (3.6). Leid af de derde identiteit van Green voor het buitengebied G_1 ,

$$(4.24) \quad u(y) = - \int_{G_1} S(x;y) \Delta u dx - \int_{\Gamma} [S(x;y) u_{\nu}(x) - u(x) S_{\nu}(x;y)] d\sigma_x, \quad y \in G_1.$$

2. Zij de functie $u(x) \in C^1(\bar{G}), C^2(G)$ in $G \subset R_n$ oplossing van de Helmholtz vergelijking $\Delta u + k^2 u = 0$. Leid af voor $n = 2$ resp. $n = 3$ de integraalformule van Weber (1869)

$$(4.25) \quad u(y) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} [H_0^{(1)}(k|x-y|) u_{\nu}(x) - u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} H_0^{(1)}(k|x-y|)] d\sigma_x, \quad y \in G,$$

resp. de integraalformule van Helmholtz (1859)

$$(4.26) \quad u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\exp[ik|x-y|]}{|x-y|} u_{\nu}(x) - u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\exp[ik|x-y|]}{|x-y|} \right] d\sigma_x, \quad y \in G.$$

Maak gebruik van de in (4.16) gegeven fundamentele oplossing voor de Helmholtz operator.

7.5. Middelwaarde-eigenschap voor harmonische functies.

Middelwaarde-eigenschap. Zij de functie $u(x)$ harmonisch in $G \subset \mathbb{R}_n$. Voor elk boloppervlak B met middelpunt y en straal R dat geheel binnen G ligt, geldt dan

$$(5.1) \quad u(y) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_B u(x) d\sigma,$$

i.e. $u(y)$ is gelijk aan de gemiddelde waarde van $u(x)$ over B .

Bewijs. We geven het bewijs alleen voor het geval $n \geq 3$. Ga uit van de derde identiteit van Green (4.23) en neem voor Γ het boloppervlak B , dan is

$$\begin{aligned} (5.2) \quad u(y) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_B \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} u_\nu(x) - u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right\} \right] d\sigma \\ &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n R^{n-2}} \int_B u_\nu(x) d\sigma - \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_B u(x) \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R^{n-2}} \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_B u(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Hierbij is nog gebruik gemaakt van de integraalbetrekking (1.6b).

Maximum-minimum principe. Zij $u(x) \in C^0(\bar{G})$ en laat $u(x)$ in G de middelwaarde-eigenschap bezitten. Dan neemt $u(x)$ haar maximum en minimum aan op de rand Γ van G . Indien $u(x)$ haar maximum of minimum (tevens) aanneemt in het inwendige van G , dan is $u(x) = \text{konst.}$ in \bar{G} .

Bewijs. We geven het bewijs alleen voor het maximum. Zij $M = \max_{x \in \bar{G}} u(x)$, voer dan in de verzamelingen

$$(5.3) \quad S = \{x \mid x \in G, u(x) = M\}, T = \{x \mid x \in G, u(x) < M\}.$$

Dan zijn S en T disjunct i.e. $S \cap T = \emptyset$, terwijl $S \cup T = G$.

We tonen nu aan dat S en T open zijn:

(i) Zij $y_1 \in S$, dan is $u(y_1) = M$. Laat B_1 een boloppervlak zijn met middelpunt y_1 en straal R_1 dat geheel binnen G ligt.

Voor elke bol B met middelpunt y_1 en straal $R \leq R_1$ geldt dan de middelwaarde-eigenschap

$$(5.4) \quad u(y_1) = M = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_B u(x) d\sigma.$$

Uit (5.4) volgt noodzakelijk $u(x) = M$, $x \in B$ oftewel $u(x) = M$, $|x-y_1| \leq R_1$. De omgeving $|x-y_1| \leq R_1$ van y_1 behoort dus geheel tot S .

(ii) Zij $y_2 \in T$, dan is $u(y_2) < M$. Wegens $u(x) \in C^0(\bar{G})$ bestaat er een omgeving van y_2 , waarbinnen eveneens $u(x) < M$ is. Deze omgeving behoort dus geheel tot T .

G is hiermee de vereniging van twee disjuncte, open verzamelingen. Anderzijds: G is een gebied d.w.z. G is niet de vereniging van twee disjuncte, niet-lege, open verzamelingen (Ackermans-Van Lint [1], p. 260). Daaruit volgt:

- a) Of $S = \emptyset$, i.e. $u(x) < M$, $x \in G$; $u(x)$ neemt haar maximum aan op Γ .
- b) Of $T = \emptyset$, i.e. $u(x) = M$, $x \in G$; dan is $u(x) = M = \text{konst.}$ in \bar{G} .

Gevolg. Harmonische functies bezitten de middelwaarde-eigenschap. Hetzelfde maximum-minimum principe geldt daarom ook voor harmonische functies.

De middelwaarde-eigenschap laat de volgende omkering toe:

Stelling. Zij $u(x) \in C^0(\bar{G})$ en laat $u(x)$ in G de middelwaarde-eigenschap bezitten, dan is $u(x)$ harmonisch in G .

Bewijs. Laat B een boloppervlak zijn dat geheel binnen G ligt. Voer dan in de functie $v(x)$ welke harmonisch is binnen B met $v(x) = u(x)$, $x \in B$; de functie $v(x)$ is expliciet te bepalen met (8.8), (8.26).

De verschilfunctie $u(x) - v(x)$ bezit nu in B de middelwaarde-eigenschap, terwijl $u(x) - v(x) = 0$, $x \in B$. Volgens het maximum-minimum principe is dan $u(x) - v(x) = 0$ oftewel $u(x) = v(x)$ binnen en op B . De functie $u(x)$ is dus harmonisch binnen elke bol B in G , i.e. $u(x)$ is harmonisch in G .

7.6. Functies van Green en Neumann.

Definitie I. De functie van Green $G(x;y)$, $x \in \bar{G}$, $y \in G$ wordt gedefinieerd door de volgende eigenschappen:

- (i) $G(x;y)$ is een fundamentele oplossing voor de Laplace operator $-\Delta$ met singulariteit in y , i.e. $\Delta G(x;y) = -\delta(x-y)$;
- (ii) $G(x;y) = 0$, $x \in \Gamma$.

Uit (i) volgt dat $G(x;y)$ is voor te stellen door

$$(6.1) \quad G(x;y) = S(x;y) + g(x;y),$$

met $S(x;y)$ gegeven door (4.15). De functie $g(x;y)$ is vervolgens oplossing van het Dirichlet probleem

$$(6.2) \quad \Delta g(x;y) = 0, \quad x \in G; \quad g(x;y) = -S(x;y), \quad x \in \Gamma.$$

De oplossing van het probleem (6.2) is eenduidig zodat $G(x;y)$ door de definitie I eenduidig wordt vastgelegd.

Opmerkingen. 1. De volledige naam van de functie $G(x;y)$ luidt "functie van Green (van de eerste soort) voor de Laplace operator in het gebied G ".

2. In R_3 is te schrijven

$$(6.3) \quad G(x;y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + g(x;y).$$

De functie $G(x;y)$ is dan te interpreteren als de potentiaal in x van een eenheidslading in het punt y binnen de geaarde geleider Γ (Green, 1828).

3. In R_2 bestaat er een nauw verband tussen de functie van Green $G(x;y)$ en de afbeeldingsstelling van Riemann uit de funktietheorie; zie Hellwig [5], p. 35-36.

Definitie II. De functie van Neumann $N(x;y)$, $x \in \bar{G}$, $y \in G$ wordt gedefinieerd door de volgende eigenschappen:

(i) $N(x;y)$ is een fundamentele oplossing voor de Laplace operator $-\Delta$ met singulariteit in y , i.e. $\Delta N(x;y) = -\delta(x-y)$;

(ii) $N_{\nu}(x;y) = -1/\Omega$, $x \in \Gamma$, waarbij $\Omega =$ oppervlakte van Γ ;

(iii) $\int_{\Gamma} N(x;y) d\sigma_x = 0$.

Uit (i) volgt

$$(6.4) \quad \int_{\Gamma} N_{\nu}(x;y) d\sigma_x = \int_G \Delta N(x;y) dx = - \int_G \delta(x-y) dx = -1.$$

Deze relatie verklaart de eigenschap (ii). $N(x;y)$ is weer voor te stellen door

$$(6.5) \quad N(x;y) = S(x;y) + n(x;y),$$

met $S(x;y)$ gegeven door (4.15). De functie $n(x;y)$ is dan oplossing van het Neumann probleem

$$(6.6) \quad \Delta n(x;y) = 0, \quad x \in G; \quad n_{\nu}(x;y) = -S_{\nu}(x;y) - 1/\Omega, \quad x \in \Gamma.$$

De oplossing van dit probleem is eenduidig op een konstante na. Genoemde konstante wordt bepaald door de eigenschap (iii) zodat $N(x;y)$ door de definitie II eenduidig wordt vastgelegd.

Opmerking. De volledige naam van de functie $N(x;y)$ luidt "functie van Neumann of functie van Green van de tweede soort voor de Laplace operator in het gebied G ".

Addendum. Men kan op analoge wijze invoeren de functies van Green en Neumann voor een buitengebied G_1 . Aan de definities I, II dient dan te worden toegevoegd de eigenschap dat $G(x;y)$, $N(x;y)$ als functies van x regulier zijn in het punt ∞ .

Symmetrie-eigenschap. De functies van Green en Neumann zijn symmetrisch in de argumenten x en y , d.w.z. $G(x;y) = G(y;x)$, $N(x;y) = N(y;x)$.

Bewijs. We geven het bewijs alleen voor de functie van Green. Ga daartoe uit van de tweede identiteit van Green (1.5) met $u = G(x;y_1)$, $v = G(x;y_2)$ gesteld,

$$(6.7) \quad \int_G [G(x;y_1) \Delta G(x;y_2) - G(x;y_2) \Delta G(x;y_1)] dx = \\ = \int_{\Gamma} [G(x;y_1) G_{\nu}(x;y_2) - G(x;y_2) G_{\nu}(x;y_1)] d\sigma_x.$$

Met behulp van de definiërende eigenschappen van de functie van Green gaat (6.7) juist over in

$$(6.8) \quad G(y_2;y_1) = G(y_1;y_2).$$

Opmerking. Men kan de symmetrie-eigenschap ook op klassieke manier bewijzen zonder gebruik van δ -functies; ga dit na, zie eventueel Tychonoff-Samarski [12], p. 305-306.

Opgave. Bewijs de volgende ongelijkheden voor de functie van Green $G(x;y)$:

$$(6.8a) \quad \begin{cases} 0 < G(x;y) < S(x;y) + \text{konst.}, & x, y \in G \subset R_2; \\ 0 < G(x;y) < S(x;y), & x, y \in G \subset R_n, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

De functies van Green en Neumann zijn van bijzonder veel nut voor de oplossing van het Dirichlet probleem en Neumann probleem voor de Laplace vergelijking of Poisson vergelijking. Vervang daartoe in de derde identiteit van Green (4.23) de functie $S(x;y)$ door $G(x;y)$ resp. $N(x;y)$ dan komen we tot de volgende representaties voor $u(y)$,

$$(6.9) \quad u(y) = - \int_G G(x;y) \Delta u dx - \int_{\Gamma} u(x) G_{\nu}(x;y) d\sigma_x, \quad y \in G,$$

$$(6.10) \quad u(y) = - \int_G N(x;y) \Delta u dx + \int_{\Gamma} N(x;y) u_{\nu}(x) d\sigma_x + \frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} u(x) d\sigma, \quad y \in G,$$

geldig indien $u(x) \in C^1(\bar{G}), C^2(G)$.

Beschouw nu de bekende randwaardeproblemen voor de Poisson vergelijking:

(i) Dirichlet probleem,

$$(6.11) \quad \Delta u = -f(x), \quad x \in G; \quad u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma.$$

(ii) Neumann probleem,

$$(6.12) \quad \Delta u = -f(x), \quad x \in G; \quad u_{\nu}(x) = h(x), \quad x \in \Gamma.$$

Neem aan dat de functies van Green en Neumann $G(x;y)$, $N(x;y)$ voor het gebied G bekend zijn.

Indien nu de oplossing $u(x)$ van het Dirichlet probleem bestaat met $u(x) \in C^1(\bar{G}), C^2(G)$, dan volgt uit (6.9), (6.11) dat deze oplossing voor te stellen is door

$$(6.13) \quad u(y) = \int_G G(x;y) f(x) dx - \int_{\Gamma} g(x) G_{\nu}(x;y) d\sigma_x, \quad y \in G.$$

Evenzo, indien de oplossing $u(x)$ van het Neumann probleem bestaat met $u(x) \in C^1(\bar{G}), C^2(G)$, dan volgt uit (6.10), (6.12) dat deze oplossing voor te stellen is door

$$(6.14) \quad u(y) = \int_G N(x;y) f(x) dx + \int_{\Gamma} h(x) N(x;y) d\sigma_x + \frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} u(x) d\sigma, \quad y \in G.$$

Merk op dat (6.13), (6.14) nog steeds representaties voor de oplossing zijn, alleen geldig indien de oplossing $u(x)$ bestaat met $u(x) \in C^1(\bar{G}), C^2(G)$.

De rechterleden van (6.13), (6.14) bevatten enkel bekende functies, afgezien van de laatste term in (6.14) welke evenwel konstant is.

We verwachten nu dat (6.13) resp. (6.14) (met weglating van de konstante term) tevens de oplossing zal zijn van het Dirichlet probleem resp. Neumann probleem. Daartoe moet worden bewezen dat de functie $u(y)$ als gegeven door (6.13), (6.14) inderdaad voldoet aan de Poisson vergelijking in G en aan de randvoorwaarde op Γ . Zodra deze punten geverifieerd zijn is de existentie van de oplossing van Dirichlet en Neumann probleem aangetoond; de oplossing wordt gegeven door (6.13) resp. (6.14). In §7.8 zullen we dit programma uitwerken voor het Dirichlet probleem voor het binnengebied van een bol.

Met behulp van de functies van Green en Neumann kan dus in principe de existentie van de oplossing van Dirichlet en Neumann probleem worden bewezen. De verkregen oplossingen (6.13), (6.14) zijn evenwel alleen bruikbaar indien de functies van Green en Neumann expliciet bekend zijn. Een expliciete bepaling van de functies van Green en Neumann is alleen mogelijk voor een aantal eenvoudige gebieden zoals b.v. de halfruimte en het binnengebied van een bol; zie §§7.7, 7.8. Voor gebieden van meer gecompliceerde vorm is de bepaling van $G(x;y)$, $N(x;y)$ zelf weer een Dirichlet probleem resp. Neumann probleem (zie (6.2), (6.6)), waarvoor de existentie van de oplossing in eerste instantie nog dubieus is. Men heeft daarom in de potentiaaltheorie verschillende andere methoden ontwikkeld om de existentie van de oplossing van Dirichlet en Neumann probleem te bewijzen. Met deze methoden zijn diverse stellingen af te leiden waaruit blijkt dat onder zekere voorwaarden voor de rand Γ en voor de randwaarden $g(x)$ resp. $h(x)$, de oplossing van het Dirichlet probleem resp. Neumann probleem inderdaad bestaat. Voor de details van methoden en resultaten zij verwezen naar Garabedian [3], chapters 8-10, Courant-Hilbert [2], p. 290-312.

7.7. Functies van Green en Neumann voor een halfruimte.

De functies van Green en Neumann voor een n -dimensionale halfruimte zijn expliciet te bepalen met de methode van spiegeling. We beperken ons gemakshalve tot het geval $n = 3$ en beschouwen de halfruimte $G : x_3 > 0$ met rand $\Gamma : x_3 = 0$. Overeenkomstig (4.15) wordt de fundamentele oplossing voor de Laplace operator in R_3 gegeven door

$$(7.1) \quad S(x;y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} .$$

Zij nu $y = (y_1, y_2, y_3) \in G$ i.e. $y_3 > 0$, voer dan in het gespiegelde punt $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$. Men kan nu gemakkelijk inzien dat de functies van Green en Neumann voor de halfruimte G worden gegeven door

$$(7.2) \quad G(x;y) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y^*|} \right], \quad N(x;y) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{|x-y^*|} \right], \quad x \in \bar{G},$$

$y \in G.$

We stellen weer de bekende randwaardeproblemen voor de Laplace vergelijking in G :

(i) Dirichlet probleem,

$$(7.3) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & x \in G; \quad u(x) \text{ begrensd in } G; \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

(ii) Neumann probleem,

$$(7.4) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & x \in G; \quad u(x) \text{ begrensd in } G; \\ u_{\nu}(x) = -u_{x_3}(x) = h(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Opmerking. De halfruimte G is niet een begrensd gebied en ook niet het complement van een begrensd gebied. De eerder bewezen eenduidigheidsstellingen voor de oplossing van Dirichlet en Neumann probleem, zijn daarom niet geldig. Men kan evenwel langs andere weg aantonen dat ook in dit geval de oplossing van het Dirichlet probleem eenduidig is, terwijl de oplossing van het Neumann probleem eenduidig is op een konstante na; zie Sobolev [10], p. 180-182. Met behulp van de representatie (6.13) komen we nu tot de volgende "oplossing" van het Dirichlet probleem (7.3),

$$(7.5) \quad u(y) = - \int_{\Gamma} g(x) G_{\nu}(x;y) d\sigma_x = \frac{y_3}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{g(x)}{|x-y|^3} d\sigma_x, \quad y \in G,$$

of uitgeschreven

$$(7.6) \quad u(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x_1, x_2)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + y_3^2]^{3/2}} dx_1 dx_2, \quad y_3 > 0.$$

De functie $u(y)$ is inderdaad oplossing van het Dirichlet probleem (7.3) indien de functie $g(x)$ continu en begrensd is op Γ (voldoende voorwaarde); toon dit aan, zie eventueel Sobolev [10], p. 184-187.

Evenzo volgt de oplossing van het Neumann probleem (7.4) uit de representatie (6.14),

$$(7.7) \quad u(y) = u(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x_1, x_2)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + y_3^2]^{1/2}} dx_1 dx_2, \quad y_3 > 0.$$

De functie $u(y)$ is inderdaad oplossing van het Neumann probleem (7.4) indien b.v. de functie $h(x_1, x_2)$ continu is met

$$(7.8) \quad |h(x_1, x_2)| \leq \frac{M}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2} + \delta}},$$

voor zekere konstante M , $\delta > 0$; zie Sobolev [10], p. 184-187.

Analoge resultaten zijn af te leiden voor de functies van Green en Neumann voor een halfruimte $G : x_n > 0$, in R_n . Deze functies vinden weer toepassing bij de oplossing van het Dirichlet en Neumann probleem voor de Laplace vergelijking in G . Zo kan men b.v. gemakkelijk afleiden dat de oplossing van het Dirichlet probleem (7.3) gegeven wordt door

$$(7.9) \quad u(y) = u(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{2y_n}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}{[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + y_n^2]^{\frac{1}{2}n}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

7.8. Functies van Green en Neumann voor een bolgebied.

Zij gegeven in R_n een boloppervlak $B : |x| = R$ met binnengebied $G : |x| < R$ en buitengebied $G_1 : |x| > R$. De functies van Green en Neumann voor de gebieden G, G_1 zijn weer expliciet te bepalen met behulp van de methode van "spiegeling"; onder spiegeling verstaan we in dit geval inversie t.o.v. de bol B . Vooraf bewijzen we het volgende lemma:

Lemma. Zij $y \in G$ en $y^* = (R^2/|y|^2)y$ het t.o.v. de bol B inverse punt van y , dan geldt

$$(8.1) \quad \frac{|x-y|}{|x-y^*|} = \frac{|y|}{R}, \quad x \in B.$$

Bewijs. We geven het volgende "rekenbewijs",

$$(8.2) \quad |x-y|^2 = |x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 = R^2 - 2(x,y) + |y|^2, \quad x \in B,$$

$$(8.3) \quad |x-y^*|^2 = R^2 - 2(x,y^*) + |y^*|^2 = R^2 - \frac{2R^2}{|y|^2} (x,y) + \frac{R^4}{|y|^2}$$

$$= \frac{R^2}{|y|^2} [R^2 - 2(x,y) + |y|^2], \quad x \in B,$$

waarbij (x,y) het scalair produkt van x en y opgevat als vectoren, voorstelt. Uit (8.2), (8.3) volgt onmiddellijk (8.1).

Beschouw in eerste instantie het geval $n = 2$. Overeenkomstig (4.15) wordt de fundamentele oplossing voor de Laplace operator in R_2 gegeven door

$$(8.4) \quad S(x;y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|}.$$

Met behulp van het lemma is nu gemakkelijk te verifiëren dat de funktie van Green voor het gebied G gegeven wordt door

$$(8.5) \quad G(x;y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{|y||x-y^*|},$$

waarbij $x \in \bar{G}$, $y \in G$, $y^* = (R^2/|y|^2)y \in G_1$. De normaalafgeleide $G_\nu(x;y)$, $x \in B$ volgt door eenvoudige berekening,

$$(8.6) \quad G_\nu(x;y) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^2}, \quad x \in B;$$

verifieer dit resultaat.

We stellen nu het Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking in G ,

$$(8.7) \quad \Delta u = 0, \quad x \in G; \quad u(x) = g(x), \quad x \in B.$$

Overeenkomstig (6.13) is de oplossing van dit Dirichlet probleem (indien ze bestaat) voor te stellen door

$$(8.8) \quad u(y) = - \int_B g(x) G_\nu(x;y) d\sigma_x = \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_B \frac{g(x)}{|x-y|^2} d\sigma_x, \quad y \in G.$$

De betrekking (8.8) heet de integraalformule van Poisson.

Verificatie van de oplossing (8.8). We zullen nog aantonen dat de functie $u(y)$ gegeven door (8.8), inderdaad oplossing is van het Dirichlet probleem (8.7). Daartoe onderstellen we (voldoende voorwaarde) dat de functie $g(x)$ continu en daarmee begrensd is op B , $|g(x)| \leq M$, $x \in B$.

(i) Bepaal $\Delta u(y)$, waarbij de Laplace operator onder het integraalteken mag worden toegepast indien $y \in G$,

$$(8.9) \quad \Delta u(y) = \frac{1}{2\pi R} \int_B g(x) \Delta_y \left[\frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^2} \right] d\sigma_x, \quad y \in G.$$

Een eenvoudige berekening leert

$$(8.10) \quad \Delta_y \left[\frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^2} \right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left[\frac{R^2 - y_1^2 - y_2^2}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \right] = 0,$$

zodat inderdaad $\Delta u(y) = 0$, $y \in G$.

(ii) Zij $y_0 \in B$, dan is te bewijzen

$$(8.11) \quad \lim_{y \rightarrow y_0, y \in G} u(y) = g(y_0).$$

Als voorbereiding beschouwen we eerst het speciale Dirichlet probleem met randwaarde $g(x) \equiv 1$. De oplossing van dit probleem wordt gegeven door $u(y) \equiv 1$, zodat uit (8.8) volgt

$$(8.12) \quad 1 = \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_B \frac{1}{|x-y|^2} d\sigma_x, \quad y \in G.$$

Met behulp van (8.12) is nu het verschil $u(y) - g(y_0)$ voor te stellen door de integraal

$$(8.13) \quad I = u(y) - g(y_0) = \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_B \frac{g(x) - g(y_0)}{|x-y|^2} d\sigma_x, \quad y \in G.$$

Daar $g(x)$ continu is in y_0 laat zich bij $\varepsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ vinden zodat

$$(8.14) \quad |g(x) - g(y_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{voor} \quad |x-y_0| < \delta.$$

Zij nu Σ het gedeelte van B dat ligt binnen de bol $|x-y_0| = \delta$. Splits dan de integraal I in twee stukken,

$$(8.15) \quad I = I_1 + I_2 = \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \left(\int_{\Sigma} + \int_{B-\Sigma} \right) \frac{g(x) - g(y_0)}{|x-y|^2} d\sigma_x.$$

De twee integralen zijn als volgt af te schatten:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad |I_1| &\leq \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_{\Sigma} \frac{|g(x) - g(y_0)|}{|x-y|^2} d\sigma_x \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_B \frac{1}{|x-y|^2} d\sigma_x = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

b) Zij $|y-y_0| < \frac{1}{2}\delta$, dan is

$$|x-y| > \frac{1}{2}\delta, \quad |g(x) - g(y_0)| \leq 2M, \quad x \in B-\Sigma,$$

waarna volgt

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_{B-\Sigma} \frac{|g(x) - g(y_0)|}{|x-y|^2} d\sigma_x \leq \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \frac{2M}{(\frac{1}{2}\delta)^2} \int_B d\sigma = \\ &= \frac{8M}{\delta^2} (R^2 - |y|^2). \end{aligned}$$

Er bestaat nu zeker een getal $\eta > 0$ zodat $|I_2| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor $R - \eta < |y| < R$.
 Combineer de voorgaande resultaten dan volgt

$$(8.16) \quad |I| = |u(y) - g(y_0)| < \varepsilon \text{ voor } |y-y_0| < \frac{1}{2}\delta, \quad R - \eta < |y| < R.$$

Daarmee is (8.11) bewezen.

Opgave. Toon aan dat de funktie van Neumann voor het gebied G gegeven wordt door

$$(8.17) \quad N(x;y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{|y||x-y^*|},$$

waarbij $x \in \bar{G}$, $y \in G$, $y^* = (R^2/|y|^2)y \in G_1$.

De oplossing van het Neumann probleem

$$(8.18) \quad \Delta u = 0, \quad x \in G; \quad u_\nu(x) = h(x), \quad x \in B,$$

is overeenkomstig (6.14) voor te stellen door

$$(8.19) \quad u(y) = \frac{1}{\pi} \int_B h(x) \log \frac{1}{|x-y|} d\sigma_x, \quad y \in G.$$

Verifieer dat (8.19) inderdaad oplossing is van het probleem (8.18). Onderstel daartoe dat $\int_B h(x) d\sigma = 0$ (nodige voorwaarde (1.9)) en dat $h(x)$ continu is op B .

De funktie van Green voor het buitengebied $G_1 (\subset R_2)$ wordt gegeven door

$$(8.20) \quad G(x;y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{|y||x-y^*|},$$

waarbij $x \in \bar{G}_1$, $y \in G_1$, $y^* = (R^2/|y|^2)y \in G$; vergelijk met (8.5). We stellen nu het uitwendig Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking in G_1 ,

$$(8.21) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & x \in G_1; & u \text{ regulier in } \infty; \\ u(x) = g_1(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

De oplossing van dit probleem laat zich bepalen met behulp van de funktie van Green (8.20),

$$(8.22) \quad u(y) = \frac{|y|^2 - R^2}{2\pi R} \int_B \frac{g_1(x)}{|x-y|^2} d\sigma_x, \quad y \in G_1.$$

Merk op dat de oplossingen (8.22) en (8.8) juist elkaars tegengestelde zijn. Opgave. Toon aan dat de funktie van Neumann voor het buitengebied G_1 gegeven wordt door

$$(8.23) \quad N(x;y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{|y||x-y^*|} - \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{|x|},$$

waarbij $x \in \bar{G}_1$, $y \in G_1$, $y^* = (R^2/|y|^2)y \in G$.

Beschouw vervolgens het geval $n \geq 3$. Overeenkomstig (4.15) wordt de fundamentele oplossing voor de Laplace operator in R_n gegeven door

$$(8.24) \quad S(x;y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}.$$

Met behulp van het lemma is dan weer te verifiëren dat de funktie van Green voor het gebied G gegeven wordt door

$$(8.25) \quad G(x;y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2} |x-y^*|^{n-2}} \right],$$

waarbij $x \in \bar{G}$, $y \in G$, $y^* = (R^2/|y|^2)y \in G_1$. Ook de funktie van Green voor het buitengebied G_1 wordt gegeven door (8.25), maar dan is $x \in \bar{G}_1$, $y \in G_1$.

Na berekening van $G_v(x;y)$, $x \in B$ volgt voor de oplossing van het inwendig Dirichlet probleem (8.7),

$$(8.26) \quad u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{\sigma_n R} \int_B \frac{g(x)}{|x-y|^n} d\sigma_x, \quad y \in G.$$

De betrekking (8.26) heet weer de integraalformule van Poisson.

Voor de oplossing van het uitwendig Dirichlet probleem (8.21) vinden we weer het tegengestelde resultaat

$$(8.27) \quad u(y) = \frac{|y|^2 - R^2}{\sigma_n R} \int_B \frac{g_1(x)}{|x-y|^n} d\sigma_x, \quad y \in G_1.$$

Opmerking. Stellen we $y = 0$ in (8.26) dan volgt

$$(8.28) \quad u(0) = \frac{R}{\sigma_n} \int_B \frac{g(x)}{|x|^n} d\sigma = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_B u(x) d\sigma,$$

d.i. juist de middelwaarde-eigenschap voor harmonische funkties.

7.9. Verdere eigenschappen van harmonische funkties.

Bij de afleiding van de hierna volgende eigenschappen van harmonische funkties speelt de integraalformule van Poisson (8.8), (8.26) een belangrijke rol.

1. Analyticiteit. Zij de funktie $u(x)$ harmonisch in G , dan is $u(x)$ tevens analytisch in G , d.w.z. voor elk punt $x_0 \in G$ is $u(x)$ te ontwikkelen in een machtreeks naar machten van $x_i - x_{0i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, welke absoluut convergent is in een omgeving van x_0 .

Bewijs. Neem gemakshalve $x_0 = 0$. Laat de bol $B : |x| = R$ geheel binnen G liggen, dan volgt uit de integraalformule van Poisson (8.26) met x en y verwisseld,

$$(9.1) \quad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_B \frac{u(y)}{|y-x|^n} d\sigma_y, \quad |x| < R, \quad |y| = R.$$

Voor $y \in B$ is de faktor $|y-x|^{-n}$ te ontwikkelen in een machtreeks,

$$(9.2) \quad |y-x|^{-n} = [R^2 - 2(x,y) + |x|^2]^{-\frac{1}{2}n} = R^{-n}(1+w)^{-\frac{1}{2}n} = R^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}n}{k} w^k,$$

waarbij

$$(9.3) \quad w = \frac{|x|^2 - 2(x,y)}{R^2}.$$

De machtreeks (9.2) is absoluut convergent voor $|w| < 1$. Aan de laatste ongelijkheid is zeker voldaan indien

$$(9.4) \quad \frac{||x|^2 - 2(x,y)|}{R^2} \leq \frac{|x|^2 + 2R|x|}{R^2} < 1, \text{ i.e. } |x| < R(\sqrt{2}-1).$$

Substitueer de machtreeks (9.2) in (9.1) en integreer termsgewijs dan volgt

$$(9.5) \quad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}n}{k} R^{-2k} \int_B u(y) [|x|^2 - 2(x,y)]^k d\sigma_y$$

$$= \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}n}{k} R^{-2k} P_k(x), \quad |x| < R(\sqrt{2}-1),$$

waarbij $P_k(x)$ een polynoom in x_1, x_2, \dots, x_n voorstelt. Rangschik nu de reeks (9.5) naar opklimmende machten van x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) en vermenigvuldig nog met $R^2 - |x|^2$. Er ontstaat dan voor $u(x)$ een machtreeks van de volgende gedaante

$$(9.6) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n \\ = k}} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad |x| < R(\sqrt{2}-1).$$

Deze machtreeks is absoluut convergent voor $|x| < R(\sqrt{2}-1)$.

2. Ongelijkheid van Harnack (1887). Zij de funktie $u(x)$ harmonisch en niet-negatief voor $|x| \leq R$, dan geldt de ongelijkheid

$$(9.7) \quad \frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0), \quad |x| < R.$$

Bewijs. Ga uit van de integraalformule van Poisson (8.26),

$$(9.8) \quad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_B \frac{u(y)}{|y-x|^n} d\sigma_y, \quad |x| < R, \quad B : |y| = R.$$

Voor $|x| < R$, $|y| = R$ geldt de ongelijkheid

$$(9.9) \quad R - |x| \leq |y-x| \leq R + |x|.$$

Met behulp van (9.9) en het gegeven $u(y) \geq 0$ volgt nu voor de integraal (9.8),

$$(9.10) \quad \frac{R - |x|}{\sigma_n R(R + |x|)^{n-1}} \int_B u(y) d\sigma \leq u(x) \leq \frac{R + |x|}{\sigma_n R(R - |x|)^{n-1}} \int_B u(y) d\sigma, \quad |x| < R.$$

Onder toepassing van de middelwaarde-eigenschap (5.1) gaat (9.10) over in (9.7).

3. Stelling van Liouville. Zij de functie $u(x)$ harmonisch in R_n en begrensd naar boven of naar beneden, dan is $u(x) = \text{konst.}$ in R_n .

Bewijs. Zij $u(x)$ begrensd naar beneden vorm dan de functie $v(x) = u(x) + \delta$, zodanig dat $v(x) \geq 0$ is in R_n . Toepassing van de ongelijkheid van Harnack (9.7) op $v(x)$ geeft dan

$$(9.11) \quad \frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} v(0) \leq v(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} v(0), \quad |x| < R.$$

Laat nu x vast zijn en neem $R \rightarrow \infty$ in (9.11), dan volgt $v(x) = v(0)$ i.e. $v(x) = \text{konst.}$ in R_n . Ook de functie $u(x)$ is dan konstant in R_n .

Indien $u(x)$ naar boven begrensd is kan het voorgaande bewijs worden toegepast op de functie $-u(x)$.

Opmerking. Vergelijk deze stelling met de stelling van Liouville uit de funktietheorie; zie Ackermans-Van Lint [1], p. 444.

4. Spiegelingsprincipe van Schwarz. Zij de functie $u(x)$ harmonisch in G . Indien $u(x) = 0$ op een vlak gedeelte Γ_1 van de rand Γ , dan kan $u(x)$ harmonisch worden voortgezet over Γ_1 door middel van spiegeling.

Bewijs. Laat het gedeelte Γ_1 van de rand behoren tot het vlak $x_n = 0$. Voer in het gebied G^* dat ontstaat door spiegeling van G t.o.v. $x_n = 0$. De functie $u(x)$ wordt nu voortgezet in G^* volgens

$$(9.12) \quad u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), \quad (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in G^*.$$

De functie $u(x)$ met voortzetting is dan harmonisch in het gebied $G + G^* + \Gamma_1$. We bewijzen alleen het niet-triviale gedeelte van deze bewering. Zij $x_0 \in \Gamma_1$ en laat de bol $B : |x-x_0| = R$ geheel binnen $G + G^* + \Gamma_1$ liggen. Voer dan in de functie $v(x)$ welke harmonisch is binnen B met $v(x) = u(x)$, $x \in B$; de functie $v(x)$ is expliciet te bepalen met de integraalformule van Poisson (8.26),

$$(9.13) \quad v(x) = \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{\sigma_n R} \int_B \frac{u(y)}{|y-x|^n} d\sigma_y, \quad |x-x_0| < R.$$

Uit (9.13) volgt, $v(x) = 0$, $x \in \Gamma_1$; immers voor $x \in \Gamma_1$ is de integrand on-even in de variabele y_n .

Het gebied binnen B wordt door Γ_1 in twee helften verdeeld, D_1 en D_2 te noemen. In de gebieden D_1, D_2 zijn $u(x), v(x)$ harmonisch, terwijl langs de rand van D_1, D_2 geldt $u(x) = v(x)$. Daaruit volgt, $u(x) = v(x)$ in \bar{D}_1, \bar{D}_2 oftewel $u(x) = v(x)$ binnen en op B . De functie $u(x)$ is dus harmonisch binnen de bol B . In het bijzonder is $u(x)$ dan harmonisch op Γ_1 .

Opmerking. Vergelijk het hier gegeven principe met het overeenkomstige spiegelsprincipe uit de funktietheorie; zie Collegedictaat Voortgezette Funktietheorie, 1973, p. 25-27.

7.10. Dirichlet en Neumann probleem voor de Helmholtz vergelijking.

De Helmholtz vergelijking in R_n wordt gegeven door

$$(10.1) \quad \Delta u + \lambda u = 0,$$

waarbij λ een konstante voorstelt. Verschillende problemen uit de mathematische fysica worden beschreven door deze vergelijking met $n = 2, n = 3$. Als belangrijkste voorbeeld noemen we golfvoortplantingsproblemen met harmonische tijdsafhankelijkheid. Deze problemen worden in eerste instantie beschreven door de golfvergelijking in R_n ,

$$(10.2) \quad \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0.$$

Beschouw nu oplossingen $u(x,t)$ met harmonische tijdsafhankelijkheid i.e. stel

$$(10.3) \quad u(x,t) = u(x) \exp(-i\omega t),$$

waarbij ω de frequentie voorstelt.

De functie $u(x)$ moet dan voldoen aan de Helmholtz vergelijking

$$(10.4) \quad \Delta u + k^2 u = 0, \quad k = \omega/c.$$

Men noemt (10.4) ook wel de gereduceerde golfvergelijking.

Zoals eerder opgemerkt (zie de opgave uit §7.2) is de oplossing van het inwendig Dirichlet probleem voor de Helmholtz vergelijking (10.1) eenduidig indien $\lambda < 0$ is. Indien $\lambda > 0$ is (zoals in het geval van de gereduceerde golfvergelijking (10.4)), is de oplossing van het Dirichlet probleem in het algemeen niet eenduidig. Zo heeft b.v. het Dirichlet probleem in R_3 ,

$$(10.5) \quad \Delta u + k^2 u = 0, \quad |x| < \pi/k; \quad u(x) = 0, \quad |x| = \pi/k,$$

de oplossing $u(x) = A(\sin k|x|)/|x|$. Hierbij is A een willekeurige konstante, zodat de oplossing niet eenduidig is.

Van groot praktisch belang zijn vooral het uitwendig Dirichlet en Neumann probleem voor de gereduceerde golfvergelijking in een buitengebied G_1 ,

$$(10.6) \quad \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in G_1, \\ u(x) = g_1(x) \text{ resp. } u_\nu(x) = h_1(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Het probleem (10.6) beschrijft de verstrooiing van een gegeven "invallende" golf $u_0(x)$ aan een obstakel met oppervlak Γ ; de functie $u(x)$ zal de verstrooide golf voorstellen. Indien nu de totale golf $U(x) = u_0(x) + u(x)$ voldoet aan één der randvoorwaarden $U(x) = 0$ of $U_\nu(x) = 0$, $x \in \Gamma$, dan ontstaat voor $u(x)$ een probleem van de gedaante (10.6).

Ook de oplossing van het probleem (10.6) is in het algemeen niet eenduidig. De niet-eenduidigheid is opnieuw te illustreren aan het probleem (10.5) nu beschouwd in het gebied $|x| > \pi/k$.

We zullen aanstonds bewijzen dat de oplossing van het probleem (10.6) wel eenduidig is indien een additionele voorwaarde wordt opgelegd aan de functie $u(x)$, namelijk de uitstralingsvoorwaarde van Rellich-Sommerfeld,

$$(10.7) \quad u_r(x) - iku(x) = o\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}\right) \text{ voor } r = |x| \rightarrow \infty,$$

oftewel

$$(10.8) \quad \lim_{r=|x| \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} |u_r(x) - iku(x)| = 0.$$

Voorbeeld. De gereduceerde golfvergelijking (10.4) in R_3 heeft o.m. de oplossingen

$$(10.9) \quad u_1(x) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \quad u_2(x) = \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r}, \quad r = |x|;$$

vergelijk met (4.16). Men kan gemakkelijk verifiëren dat de oplossing $u_1(x)$ resp. $u_2(x)$ wèl resp. niet voldoet aan de uitstralingsvoorwaarde (10.7) in R_3 .

Vermenigvuldig nu $u_1(x)$, $u_2(x)$ met de tijdfactor $\exp(-i\omega t)$ (zie (10.3)) dan zijn de functies

$$(10.10) \quad u_1(x,t) = \frac{\exp[ikr-i\omega t]}{4\pi r}, \quad u_2(x,t) = \frac{\exp[-ikr-i\omega t]}{4\pi r}, \quad r = |x|,$$

oplossingen van de golfvergelijking (10.2) in R_3 . De functie $u_1(x,t)$ stelt voor een naar buiten lopende sferische golf, terwijl de functie $u_2(x,t)$ correspondeert met een naar binnen lopende sferische golf.

Aan de hand van dit voorbeeld kan men de volgende interpretatie geven voor de voorwaarde (10.7): De uitstralingsvoorwaarde van Rellich-Sommerfeld drukt uit dat de functie $u(x)$ voor $r = |x| \rightarrow \infty$ het karakter heeft van een naar buiten lopende golf. Deze interpretatie maakt de voorwaarde ook fysisch acceptabel.

Opgave. Zij de functie $u(x) \in C^1(\bar{G}_1), C^2(G_1)$ in het buitengebied G_1 oplossing van de vergelijking $\Delta u + k^2 u = 0$ en laat $u(x)$ voldoen aan de uitstralingsvoorwaarde. Toon dan aan dat de in (4.25), (4.26) gegeven integraalformules van Weber, Helmholtz ook geldig blijven voor $y \in G_1$, mits de rechterleden van deze formules worden voorzien van een min-teken.

Als voorbereiding op de eenduidigheidsstelling voor het probleem (10.6) bewijzen we eerst de volgende twee lemma's:

Lemma I. Zij de functie $u(x) \in C^1(\bar{G}_1), C^2(G_1)$ in G_1 oplossing van de vergelijking $\Delta u + k^2 u = 0$, dan geldt

$$(10.11) \quad \int_B [\bar{u} u_r - u \bar{u}_r] d\sigma = \int_\Gamma [\bar{u} u_\nu - u \bar{u}_\nu] d\sigma,$$

voor elke bol $B : |x| = r$, welke Γ omsluit. Hierbij is $\bar{u}(x)$ de toegevoegd complexe waarde van $u(x)$.

Bewijs. Pas de tweede identiteit van Green (1.5) toe op de functies $u(x)$, $\bar{u}(x)$ in het gebied D tussen Γ en de bol B ,

$$(10.12) \quad \int_D [\bar{u}\Delta u - u\Delta\bar{u}]dx = - \int_{\Gamma} [\bar{u}u_{\nu} - u\bar{u}_{\nu}]d\sigma + \int_B [\bar{u}u_r - u\bar{u}_r]d\sigma.$$

De integraal over D is nu gelijk aan 0 wegens $\Delta u + k^2 u = 0$, $\Delta\bar{u} + k^2\bar{u} = 0$. Daarna volgt onmiddellijk (10.11).

Opmerking. De integraal $\int_B [\bar{u}u_r - u\bar{u}_r]d\sigma$ is te interpreteren als de energie welke gemiddeld per tijdseenheid door de bol B naar buiten stroomt.

Lemma II (lemma van Rellich). Zij de functie $u(x) \in C^2$ oplossing van de vergelijking $\Delta u + k^2 u = 0$, $|x| > r_0$. Indien nu geldt

$$(10.13) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_B |u(x)|^2 d\sigma = 0, \quad B : |x| = r,$$

dan is $u(x) \equiv 0$ voor $|x| > r_0$.

Voor het bewijs van dit lemma zij verwezen naar Hellwig [5], p. 110-113; F. Rellich, Jber. Deutsch. Math.-Verein 53, 57-65 (1943).

Het lemma drukt uit dat elke oplossing van de gereduceerde golfvergelijking, welke voor $r = |x| \rightarrow \infty$ "sneller" tot nul nadert dan $1/r^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}$, identiek gelijk aan nul is. Merk op dat dit resultaat niet geldt voor oplossingen van de Laplace vergelijking.

Eenduidigheidsstelling. Onder toepassing van de uitstralingsvoorwaarde van Rellich-Sommerfeld is de oplossing van het uitwendig Dirichlet probleem resp. Neumann probleem voor de gereduceerde golfvergelijking eenduidig.

Bewijs. Onderstel dat het probleem (10.6), (10.7) twee oplossingen $u_1(x)$, $u_2(x)$ bezit. Vorm dan het verschil $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$, dan is $v(x) = 0$ resp. $v_{\nu}(x) = 0$, $x \in \Gamma$.

Pas nu lemma I toe op de functie $v(x)$, dan volgt

$$(10.14) \quad \int_B [\bar{v}v_r - v\bar{v}_r]d\sigma = \int_{\Gamma} [\bar{v}v_{\nu} - v\bar{v}_{\nu}]d\sigma = 0,$$

voor elke bol $B : |x| = r$, welke Γ omsluit.

De functie $v(x)$ voldoet tevens aan de uitstralingsvoorwaarde (10.7) of (10.8). Uit (10.8) is eenvoudig af te leiden dat

$$(10.15) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_B |v_r - ikv|^2 d\sigma = 0, \quad B : |x| = r.$$

Werk deze integraal nader uit,

$$(10.16) \quad \int_B |\mathbf{v}_r - ikv|^2 d\sigma = \int_B [|\mathbf{v}_r|^2 + k^2|v|^2 + ik(\bar{v}\mathbf{v}_r - v\bar{\mathbf{v}}_r)]d\sigma$$

$$= \int_B [|\mathbf{v}_r|^2 + k^2|v|^2]d\sigma,$$

op grond van (10.14).

Uit (10.15), (10.16) volgt nu in het bijzonder dat

$$(10.17) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_B |v(\mathbf{x})|^2 d\sigma = 0, \quad B : |\mathbf{x}| = r.$$

Volgens het lemma van Rellich is dan $v(\mathbf{x}) \equiv 0$ voor $|\mathbf{x}| > r_0$, waarbij $B_0 : |\mathbf{x}| = r_0$ de kleinste bol is die het oppervlak Γ omsluit. Men kan nu bewijzen dat de functie $v(\mathbf{x})$, als oplossing van de gereduceerde golfvergelijking in G_1 , tevens analytisch is in G_1 (vergelijk met de analoge stelling voor harmonische functies uit §7.9). Uit $v(\mathbf{x}) \equiv 0$ voor $|\mathbf{x}| > r_0$ en $v(\mathbf{x})$ analytisch in G_1 , volgt tenslotte: $v(\mathbf{x}) \equiv 0$ in \bar{G}_1 oftewel $u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{G}_1$. Daarmee is bewezen dat de oplossing van het Dirichlet probleem resp. Neumann probleem eenduidig is.

7.11. Eigenwaardeprobleem voor de Laplace operator.

We formuleren het volgende eigenwaardeprobleem voor de Laplace operator in een gebied $G \subset \mathbb{R}_n$,

$$(11.1) \quad \Delta u + \lambda u = 0, \quad \mathbf{x} \in G; \quad u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

waarbij de konstante λ en de functie $u(\mathbf{x})$ te bepalen zijn.

Het is duidelijk dat de functie $u(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\mathbf{x} \in \bar{G}$ (triviale) oplossing is van (11.1). Daarnaast bezit het probleem (11.1) voor bepaalde waarden van λ ook niet-triviale oplossingen $u(\mathbf{x}) \neq 0$ in \bar{G} . Deze waarden van λ heten eigenwaarden van de (negatieve) Laplace operator in G ; de bijbehorende oplossing $u(\mathbf{x}) \in C^0(\bar{G})$, $C^2(G)$, $u(\mathbf{x}) \neq 0$ in \bar{G} , heet een eigenfunctie. We zullen nu deze eigenwaarden en eigenfuncties nader onderzoeken. Daarbij beperken we ons tot de praktisch belangrijke gevallen $n = 2$, $n = 3$ i.e. $G \subset \mathbb{R}_2$ of $G \subset \mathbb{R}_3$.

Het eigenwaardeprobleem (11.1) in R_2 treedt o.a. op bij het onderzoek van de eigentrillingen van een membraan dat langs de rand Γ is ingeklemd. In R_3 beschrijft het probleem (11.1) b.v. de eigentrillingen van een akoestische resonator begrensd door het oppervlak Γ , waarbij op Γ de randvoorwaarde $u(x) = 0$ zal gelden. De eigenfrequenties van membraan resp. resonator hangen eenvoudig samen met de eigenwaarden λ van (11.1).

Stelling I. Het eigenwaardeprobleem (11.1) bezit geen eigenwaarden $\lambda \leq 0$.

Bewijs. Volgens de in §7.2 bewezen eenduidigheidsstellingen heeft het probleem (11.1) voor $\lambda \leq 0$ enkel de triviale oplossing $u(x) \equiv 0, x \in \bar{G}$. Daaruit volgt dat $\lambda \leq 0$ geen eigenwaarde is.

Onderstel nu dat de functie van Green $G(x;y)$ voor de Laplace operator in het gebied G , bestaat. Het eigenwaardeprobleem (11.1) is dan te herleiden tot een homogene Fredholm integraalvergelijking voor $u(x)$, met kern $G(x;y)$. Deze integraalvergelijking is gedefinieerd in de ruimte $L_2(G)$, d.i. de verzameling der functies welke kwadratisch Lebesgue-integreerbaar zijn over G .*)

Stelling II (equivalentiestelling). Het eigenwaardeprobleem

$$(11.2) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, x \in G; u(x) \in C^0(\bar{G}), C^2(G), u(x) \neq 0; \\ u(x) = 0, x \in \Gamma, \end{cases}$$

is equivalent met het eigenwaardeprobleem

$$(11.3) \quad \begin{cases} \int_G G(x;y) u(y) dy = \mu u(x), x \in G; \\ \mu = 1/\lambda, u(x) \in L_2(G), u(x) \neq 0. \end{cases}$$

Bewijs. (i) Zij de functie $u(x)$ oplossing van (11.2) behorend bij de eigenwaarde λ . Onderstel voorlopig $u(x) \in C^1(\bar{G}), C^2(G)$, dan volgt met behulp van de representatie (6.9),

$$(11.4) \quad \begin{aligned} u(y) &= - \int_G G(x;y) \Delta u(x) dx - \int_{\Gamma} u(x) G_{\nu}(x;y) d\sigma_x \\ &= \lambda \int_G G(x;y) u(x) dx, y \in G. \end{aligned}$$

*) Zie het Collegedictaat Maattheorie en Lebesgue-integratie, 1976, hoofdstuk 10.

Men kan bewijzen dat de representatie (11.4) ook geldig blijft indien slechts $u(x) \in C^0(\bar{G}), C^2(G)$; zie Hellwig [5], p. 223-225. Verwissel nu in (11.4) de variabelen x en y en bedenk dat $G(x;y)$ symmetrisch is in x en y (zie §7.6). De functie $u(x)$ is dan oplossing van de Fredholm-integraalvergelijking

$$(11.5) \quad \int_G G(x;y) u(y) dy = \mu u(x), \quad x \in G; \quad \mu = 1/\lambda.$$

Daarmee is aangetoond dat elke oplossing van (11.2) tevens oplossing is van (11.3).

(ii) Zij de functie $u(x) \in L_2(G)$ oplossing van (11.3) behorend bij de eigenwaarde μ . Dan is te bewijzen: $u(x) \in C^0(\bar{G}), C^2(G)$ en $u(x)$ is oplossing van (11.2) met $\lambda = 1/\mu$. Het bewijs berust op een diepliggend resultaat uit de theorie der elliptische PDV's (lemma van Weyl) en wordt daarom hier niet gegeven; zie Hellwig [5], p. 225-226.

We schrijven de integraalvergelijking (11.3) in operator-notatie

$$(11.6) \quad Tu = \mu u, \quad u \in L_2(G),$$

waarbij de integraaloperator T gedefinieerd is door

$$(11.7) \quad (Tu)(x) = \int_G G(x;y) u(y) dy.$$

T is een lineaire operator in $L_2(G)$. Het is bekend dat $L_2(G)$ een separabele Hilbertruimte is na invoering van inwendig produkt en norm volgens

$$(11.8) \quad (u,v) = \int_G u(x) v(x) dx, \quad \|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_G u^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}};$$

zie Helmborg [6], p. 27-35, Collegedictaat Maattheorie en Lebesgue-integratie, 1976, p. 31-34.

Stelling III. De operator T is kompakt en hermitisch.

Bewijs. Overeenkomstig (6.8a) gelden de volgende ongelijkheden voor de functie van Green $G(x;y)$ in R_2, R_3 ,

$$(11.9) \quad \begin{cases} R_2 : 0 < G(x;y) < \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} + \text{konst.}, \\ R_3 : 0 < G(x;y) < \frac{1}{4\pi|x-y|}. \end{cases}$$

Met behulp van (11.9) is gemakkelijk in te zien, dat

$$(11.10) \quad \int_G \int_G G^2(x;y) dx dy < \infty$$

is, i.e. $G(x;y)$ is kwadratisch integreerbaar over $G \times G$. De integraaloperator T is dan een Hilbert-Schmidt operator en dus kompakt; zie eventueel Helmborg [6], p. 85-87, 182, LAI^{*)}, stellingen 6.4.8, 6.1.4.

Volgens de in §7.6 afgeleide symmetrie-eigenschap is $G(x;y) = G(y;x)$. Daaruit volgt dat de operator T zelf-geadjungeerd of hermitisch is; zie eventueel Helmborg [6], p. 99, LAI, 4.5.11, 4.5.12.

Stelling IV. De operator T is positief definitief.

Bewijs. T is positief definitief, betekent

$$(11.11) \quad (Tu, u) > 0, \quad u \in L_2(G), \quad u \neq 0.$$

Voer in de klasse Φ van functies $\varphi(x)$, met $\varphi(x) \in C^1(\bar{G})$, $C^2(G)$, $\Delta\varphi$ begrensd op G , $\varphi(x) = 0$ voor $x \in \Gamma$. Overeenkomstig (6.9) is een functie $\varphi \in \Phi$ voor te stellen door

$$(11.12) \quad \varphi(x) = - \int_G G(x;y) \Delta\varphi(y) dy, \quad x \in G, \quad \text{i.e. } \varphi = -T(\Delta\varphi).$$

Met behulp van de eerste identiteit van Green (1.4) volgt dan onmiddellijk,

$$(11.13) \quad (T(\Delta\varphi), \Delta\varphi) = -(\varphi, \Delta\varphi) = - \int_G \varphi(x) \Delta\varphi(x) dx = \int_G |\nabla\varphi|^2 dx \geq 0, \quad \varphi \in \Phi.$$

Een functie $u(x) \in L_2(G)$ is nu te benaderen door functies van de gedaante $\Delta\varphi$, $\varphi \in \Phi$. Na een limietovergang volgt dan

$$(11.14) \quad (Tu, u) \geq 0, \quad u \in L_2(G).$$

Onderstel nu dat $(Tu_0, u_0) = 0$ voor zekere $u_0 \in L_2(G)$. Voor elke reële δ en elke $v \in L_2(G)$ moet dan gelden

$$(11.15) \quad (T(u_0 + \delta v), u_0 + \delta v) = 2\delta(Tu_0, v) + \delta^2(Tv, v) \geq 0.$$

Aan deze ongelijkheid is alleen voldaan indien

$$(11.16) \quad (Tu_0, v) = 0, \quad v \in L_2(G).$$

^{*)} LAI verwijst naar het Collegedictaat Lineaire Analyse I, 1975.

Neem nu in het bijzonder $v = -\Delta\varphi$, $\varphi \in \Phi$ dan volgt met (11.12),

$$(11.17) \quad -(Tu_0, \Delta\varphi) = -(u_0, T(\Delta\varphi)) = (u_0, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \Phi.$$

Omdat de klasse Φ dicht ligt in $L_2(G)$ volgt uit (11.17) $u_0 = 0$.
Daarmee is (11.11) bewezen.

Stelling V (existentiestelling). Het eigenwaardeprobleem

$$(11.18) \quad \Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in G; \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

bezit af telbaar veel positieve eigenwaarden λ_j met bijbehorende eigenfuncties $u_j(x) \in C^0(\bar{G}), C^2(G)$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

De eigenwaarden λ_j zijn te rangschikken volgens

$$(11.19) \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty.$$

De eigenfuncties $u_j(x)$ vormen een totaal orthonormaalstelsel in $L_2(G)$, i.e.

$$(11.20) \quad (u_i, u_j) = \int_G u_i(x) u_j(x) dx = \delta_{ij},$$

$$(11.21) \quad u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, u_j) u_j \quad \text{voor elke } u \in L_2(G).$$

Bewijs. Overeenkomstig stelling II is het eigenwaardeprobleem (11.18) equivalent met het eigenwaardeprobleem

$$(11.22) \quad Tu = \mu u, \quad \mu = 1/\lambda, \quad u \in L_2(G),$$

voor de kompakte, hermitische operator T .

Met behulp van de spectraalstelling voor kompakte, hermitische operatoren (zie LAI, stellingen 6.2.4, 6.2.5, 6.2.6) volgt nu:

T bezit hoogstens af telbaar veel reële eigenwaarden $\mu_j \neq 0$ met

$$(11.23) \quad |\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_j| \geq \dots;$$

de bijbehorende eigenfuncties $u_j(x) \in L_2(G)$ vormen een totaal orthonormaalstelsel in $T(L_2(G))$.

T is tevens positief definitief: De eigenwaarden μ_j zijn dan alle positief, $\mu_j > 0$, en $\mu = 0$ is geen eigenwaarde van T ; de eigenfuncties $u_j(x)$ vormen dan een totaal orthonormaalstelsel in $L_2(G)$; zie LAI, stelling 6.2.10.

Omdat $L_2(G)$ oneindig-dimensionaal is zal het orthonormaalstelsel der functies $u_j(x)$ aftelbaar zijn. T bezit daarom aftelbaar veel positieve eigenwaarden μ_j met

$$(11.24) \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_j \geq \dots > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = 0;$$

zie nogmaals LAI, stelling 6.2.5.

Met behulp van stelling II zijn nu de voorgaande resultaten te vertalen naar het equivalente eigenwaardeprobleem (11.18). Na invoering van $\lambda_j = 1/\mu_j$ volgt dat het probleem (11.18) aftelbaar veel positieve eigenwaarden λ_j bezit, te rangschikken volgens (11.19). Voor de bijbehorende eigenfuncties $u_j(x)$ zal gelden $u_j(x) \in C^0(\bar{G}), C^2(G)$. Voor $\lambda = \lambda_j$ is de functie $u_j(x)$ oplossing van (11.18).

Opmerkingen. 1. In de rangschikking (11.19) kunnen gelijke tekens optreden. De eigenwaarde λ_j heeft multipliciteit r indien λ_j gelijk is aan $(r-1)$ van de overige eigenwaarden. Uit $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$ volgt dat elke eigenwaarde een eindige multipliciteit heeft.

2. Voor een aantal gebieden G van eenvoudige vorm zijn de eigenwaarden en eigenfuncties expliciet te bepalen met de methode van separatie van variabelen; zie Collegedictaat Toegepaste Analyse I, 1973, §5.5.

Opgave. Toon aan dat de eigenwaarde λ_1 multipliciteit 1 heeft en dat $u_1(x) \geq 0$ is in \bar{G} . Aanwijzing: Toon aan dat $\lambda_1^{-1} = \max\{(Tu, u) \mid u \in L_2(G), \|u\| = 1\}$ waarbij het maximum wordt aangenomen voor $u = u_1(x)$; maak voorts gebruik van de eigenschap $G(x, y) > 0, x, y \in G$.

Elke functie $u(x) \in L_2(G)$ is te ontwikkelen in een reeks naar de eigenfuncties $u_j(x)$, zie (11.21).

De reeksontwikkeling (11.21) is convergent in de $L_2(G)$ -norm, d.w.z.

$$(11.25) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{j=1}^m (u, u_j) u_j \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_G \left[u(x) - \sum_{j=1}^m (u, u_j) u_j(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

De reeksontwikkeling voor $u(x)$ is in het algemeen niet puntsgewijs convergent of uniform convergent in G , tenzij voldaan is aan zekere extra voorwaarden. Deze extra voorwaarden komen erop neer dat $u(x)$ te schrijven is als $u = Tv, v \in L_2(G)$ (zie stelling VI).

Voor de coëfficiënten (u, u_j) van de reeks (11.21) geldt de gelijkheid van Bessel (zie LAI, stelling 4.3.16),

$$(11.26) \quad \sum_{j=1}^{\infty} (u, u_j)^2 = \|u\|^2 = \int_G u^2(x) dx.$$

Ook voor de funktie van Green $G(x;y)$ kan men een reeksontwikkeling afleiden. Met behulp van de ongelijkheden (11.9) volgt namelijk $G(x;y) \in L_2(G)$ voor vaste $x \in \bar{G}$. Bereken nu de koëfficiënten

$$(11.27) \quad (G(x;y), u_j(y)) = \int_G G(x;y) u_j(y) dy = \frac{u_j(x)}{\lambda_j},$$

dan volgt voor $G(x;y)$ de reeksontwikkeling

$$(11.28) \quad G(x;y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j(x) u_j(y)}{\lambda_j},$$

welke weer convergent is in de $L_2(G)$ -norm.

De gelijkheid van Bessel geeft in dit geval

$$(11.29) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^2(x)}{\lambda_j^2} = \int_G G^2(x;y) dy \leq A, \quad x \in \bar{G},$$

waarbij A een konstante is.

Voor de Hilbert-Schmidt operator T kan men nog berekenen de dubbelnorm $\|T\|$ (zie LAI, 4.5.18, stelling 6.4.8) gegeven door

$$(11.30) \quad \|T\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|Tu_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \int_G \int_G G^2(x;y) dx dy.$$

Opmerking. Uit de convergentie van de reeks $\sum 1/\lambda_j^2$ volgt nogmaals dat elke eigenwaarde een eindige multipliciteit heeft.

Stelling VI (ontwikkelingsstelling). Zij $u(x) \in C^1(\bar{G})$, $C^2(G)$, Δu begrensd op G en $u(x) = 0$ voor $x \in \Gamma$. Dan is $u(x)$ te ontwikkelen in een absoluut en uniform convergente reeks naar de eigenfunkties $u_j(x)$,

$$(11.31) \quad u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (u, u_j) u_j(x), \quad x \in \bar{G}.$$

Bewijs. Merk op dat de voorwaarden voor $u(x)$ overeenstemmen met die voor de funkties van de klasse ϕ ingevoerd bij het bewijs van stelling IV. Overeenkomstig (11.12) is $u(x)$ daarom voor te stellen door

$$(11.32) \quad u = -T(\Delta u) = Tv,$$

waarbij $v = -\Delta u$ gesteld is.

Volgens het gegeven is $v(x) \in C^0(G)$, $v(x)$ begrensd op G , dus zeker $v(x) \in L_2(G)$.
Bereken nu de koëfficiënten

$$(11.33) \quad (u, u_j) = (Tv, u_j) = (v, Tu_j) = \frac{1}{\lambda_j} (v, u_j),$$

dan volgt voor $u(x)$ de reeksontwikkeling

$$(11.34) \quad u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (u, u_j) u_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(v, u_j)}{\lambda_j} u_j(x), \quad x \in \bar{G},$$

welke convergent is in de $L_2(G)$ -norm.

De reeks (11.34) is nu tevens absoluut en uniform convergent in \bar{G} . Daartoe passen we de ongelijkheid van Schwarz toe op de som

$$(11.35) \quad \left[\sum_{j=m}^n \left| \frac{(v, u_j)}{\lambda_j} u_j(x) \right| \right]^2 \leq \sum_{j=m}^n (v, u_j)^2 \sum_{j=m}^n \frac{u_j^2(x)}{\lambda_j^2}.$$

Nu is

$$(11.36) \quad \sum_{j=m}^n \frac{u_j^2(x)}{\lambda_j^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^2(x)}{\lambda_j^2} \leq A, \quad x \in \bar{G},$$

overeenkomstig (11.29).

Voorts volgt uit de convergentie van de reeks $\sum (v, u_j)^2$ dat bij $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ bestaat zodat

$$(11.37) \quad \sum_{j=m}^n (v, u_j)^2 < \varepsilon^2 \quad \text{voor } n \geq m \geq N(\varepsilon).$$

Met behulp van (11.36), (11.37) gaat (11.35) over in

$$(11.38) \quad \sum_{j=m}^n \left| \frac{(v, u_j)}{\lambda_j} u_j(x) \right| < \varepsilon A^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \bar{G}, \quad n \geq m \geq N(\varepsilon).$$

De reeks (11.34) is dan absoluut en uniform convergent in \bar{G} met som $u(x)$.

Opmerking. De in stelling VI genoemde voorwaarden voor $u(x)$ hebben het karakter van voldoende voorwaarden. Hellwig ([5], p. 229) bewijst de ontwikkelingsstelling onder de alternatieve voorwaarden: $u(x) \in C^0(\bar{G})$, $C^3(G)$, Δu begrensd op G en $u(x) = 0$ voor $x \in \Gamma$.

VIII. Hyperbolisch PDV's: golfvergelijking.

8.1. Cauchy probleem voor de golfvergelijking in R_3 .

We formuleren het volgende Cauchy probleem voor de homogene golfvergelijking in R_3 ,

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & x \in R_3, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

waarbij de functie $u(x,t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$ te bepalen is.

De oplossing van (1.1) wordt afgeleid met de methode der "sferische gemiddelden".

Afleiding van de oplossing. 1. Zij $x_0 \in R_3$ een vast punt, voer dan in de functie

$$(1.2) \quad \bar{u}(r,t;x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B_r} u(x,t) d\sigma, \quad B_r : |x-x_0| = r,$$

i.e. $\bar{u}(r,t;x_0)$ is het gemiddelde van $u(x,t)$ over het boloppervlak B_r . Voor $r = 0$ zal gelden

$$(1.3) \quad \bar{u}(0,t;x_0) = u(x_0,t).$$

De punten $x \in B_r$ zijn voor te stellen door $x = x_0 + rv$, waarbij v de naar buiten gerichte eenheidsnormaal op B_r is. Met behulp van deze notatie gaat (1.2) over in

$$(1.4) \quad \bar{u}(r,t;x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{|v|=1} u(x_0 + rv, t) d\Omega,$$

waarbij $d\Omega = d\sigma/r^2$ het oppervlakteelement van de eenheidsbol $|v| = 1$ voorstelt.

We zullen nu verifiëren dat $\bar{u}(r,t;x_0)$ voldoet aan de bolsymmetrische golfvergelijking,

$$(1.5) \quad \frac{1}{r^2} (r^2 \bar{u}_r)_r - \frac{1}{c^2} \bar{u}_{tt} = 0.$$

Bereken daartoe de afgeleide

$$(1.6) \quad r^2 \bar{u}_r = \frac{r^2}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \nabla u(x_0 + r\nu, t) \cdot \nu \, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{B_r} \nabla u(x, t) \cdot \nu \, d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{G_r} \Delta u(x, t) \, dx, \quad G_r : |x - x_0| \leq r,$$

op grond van de divergentiestelling van Gauss. Schrijf nu de integraal over G_r als een herhaalde integraal

$$(1.7) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{G_r} \Delta u(x, t) \, dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^r d\rho \int_{B_\rho} \Delta u(x, t) \, d\sigma, \quad B_\rho : |x - x_0| = \rho,$$

dan volgt onmiddellijk

$$(1.8) \quad \frac{1}{r^2} (r^2 \bar{u}_r)_r = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B_r} \Delta u(x, t) \, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \Delta u(x_0 + r\nu, t) \, d\Omega.$$

Evenzo is af te leiden uit (1.4),

$$(1.9) \quad \frac{1}{c^2} \bar{u}_{tt} = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|\nu|=1} u_{tt}(x_0 + r\nu, t) \, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \Delta u(x_0 + r\nu, t) \, d\Omega,$$

daar $u(x, t)$ voldoet aan de golfvergelijking. Uit (1.8), (1.9) volgt dat $\bar{u}(r, t; x_0)$ voldoet aan de bolsymmetrische golfvergelijking (1.5).

2. Men kan eenvoudig narekenen dat de vergelijking (1.5) ook te schrijven is als

$$(1.10) \quad (r\bar{u})_{rr} - \frac{1}{c^2} (r\bar{u})_{tt} = 0,$$

i.e. $\bar{r}\bar{u}$ voldoet aan de homogene golfvergelijking in R_1 . Overeenkomstig (III. 4.11) wordt de algemene oplossing van (1.10) gegeven door

$$(1.11) \quad \bar{r}\bar{u}(r, t; x_0) = w_1(r-ct) + w_2(r+ct),$$

waarin w_1, w_2 willekeurige functies voorstellen. Stel in (1.11) $r = 0$ dan volgt $w_1(-ct) = -w_2(ct)$, waarna de functie w_1 te elimineren is,

$$(1.12) \quad \bar{r}\bar{u}(r, t; x_0) = w_2(r+ct) - w_2(ct-r).$$

Differentieer (1.12) naar r en stel $r = 0$ dan volgt

$$(1.13) \quad \bar{u}(0,t;x_0) = 2w_2'(ct).$$

Met het oog op (1.3) is het nu voldoende om alleen $w_2'(ct)$ te bepalen.

3. De functie w_2' wordt bepaald door de beginvoorwaarden van het Cauchy probleem. Differentieer daartoe (1.12) naar r en naar t en stel $t = 0$,

$$(1.14) \quad [\bar{r}\bar{u}(r,0;x_0)]_r = w_2'(r) + w_2'(-r), \quad \bar{r}\bar{u}_t(r,0;x_0) = cw_2'(r) - cw_2'(-r).$$

Elimineer $w_2'(-r)$, dan volgt

$$(1.15) \quad 2w_2'(r) = [\bar{r}\bar{u}(r,0;x_0)]_r + \frac{r}{c} \bar{u}_t(r,0;x_0)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{4\pi} \int_{|\nu|=1} u(x_0+r\nu,0) d\Omega \right] + \frac{r}{4\pi c} \int_{|\nu|=1} u_t(x_0+r\nu,0) d\Omega$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \varphi(x_0+r\nu) d\Omega \right] + \frac{r}{4\pi c} \int_{|\nu|=1} \psi(x_0+r\nu) d\Omega,$$

op grond van de beginvoorwaarden. Vervang r door ct dan wordt de oplossing van het Cauchy probleem (1.1), overeenkomstig (1.3), (1.13) gegeven door

$$(1.16) \quad u(x_0,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \varphi(x_0+ct\nu) d\Omega \right] + \frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \psi(x_0+ct\nu) d\Omega$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{B_{ct}} \varphi(x) d\sigma \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{B_{ct}} \psi(x) d\sigma.$$

Men noemt deze uitkomst wel de formule van Poisson (1819). In korte notatie is te schrijven

$$(1.17) \quad u(x_0,t) = \frac{\partial}{\partial t} [t \bar{\varphi}(x_0+ct\nu)] + t \bar{\psi}(x_0+ct\nu),$$

waarbij $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ het gemiddelde voorstelt van de functies φ, ψ over het boloppervlak $B_{ct} : |x-x_0| = ct$.

Afhankelijkheidsgebied. Uit de formule van Poisson (1.16) blijkt dat de oplossing $u(x_0,t_0)$ slechts afhangt van de waarden van φ en ψ op het boloppervlak $B_{ct_0} : |x-x_0| = ct_0$. Men noemt dit boloppervlak daarom het afhankelijkheidsgebied van (x_0,t_0) .

Dit afhankelijkheidsgebied wordt ook verkregen als de doorsnede van de karakteristieke kegel K_0 met top (x_0, t_0) , met het hypervlak $t = 0$; volgens (IV.3.12) wordt namelijk K_0 beschreven door de vergelijking

$$(1.18) \quad |x-x_0|^2 - c^2(t-t_0)^2 = 0.$$

Omgekeerd, zij $G_{ct_0} : |x-x_0| \leq ct_0$ een bolgebied in R_3 dan zijn de waarden van φ, ψ bepalend voor de oplossing in het gebied \bar{S} gegeven door

$$(1.19) \quad \bar{S} = \{(x,t) \mid |x-x_0| \leq c(t_0-t), 0 \leq t \leq t_0\}.$$

Het gebied \bar{S} wordt begrensd door de karakteristieke kegel K_0 en het hypervlak $t = 0$; \bar{S} heet het bepaaldheidsgebied van G_{ct_0} .

De aldus ingevoerde begrippen afhankelijkheidsgebied en bepaaldheidsgebied zijn te vergelijken met de overeenkomstige begrippen voor hyperbolische PDV's in twee variabelen (zie hoofdstuk III). Het blijkt dan dat de rol van de karakteristieken hier wordt overgenomen door de karakteristieke kegel.

Merk op dat het afhankelijkheidsgebied van (x_0, t_0) de doorsnede is van enkel de mantel van de kegel K_0 met het hypervlak $t = 0$. Men noemt dit verschijnsel het principe van Huygens. Voor de golfvergelijking in R_3 geldt het principe van Huygens.

Dit principe van Huygens is nog als volgt te interpreteren. Laat de functie $u(x,t)$ een "verstoring" zijn tengevolge van b.v. een geluidsgolf. Neem aan dat voor $t = 0$ de verstoring gelokaliseerd is in een begrensd gebied $D \subset R_3$, i.e. $\varphi, \psi = 0$ buiten D . Voor een punt x_0 buiten D volgt dan uit (1.16),

$$(1.20) \quad \begin{cases} u(x_0, t) = 0, & ct < r_1 \text{ of } ct > r_2, \\ u(x_0, t) \neq 0, & r_1 < ct < r_2, \end{cases}$$

waarbij r_1, r_2 de kleinste resp. grootste afstand van x_0 tot D voorstelt. Uit (1.20) is af te lezen dat de verstoring het punt x_0 bereikt op het tijdstip $t_1 = r_1/c$, terwijl op het tijdstip $t_2 = r_2/c$ de verstoring het punt x_0 gepasseerd is. De voortplantingssnelheid van de verstoring is gelijk aan c . We concluderen nu dat een verstoring welke voor $t = 0$ gelokaliseerd is in een begrensd gebied D , in x_0 wordt "waargenomen" gedurende een begrensd tijdsinterval $t_1 < t < t_2$. Deze conclusie is te beschouwen als de fysische versie van het principe van Huygens.

8.2. Cauchy probleem voor de golfvergelijking in R_2, R_1 .

We formuleren het volgende Cauchy probleem voor de homogene golfvergelijking in R_2 ,

$$(2.1) \quad \begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & x \in R_2, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases}$$

waarbij de functie $u(x, t) = u(x_1, x_2, t)$ te bepalen is.

De oplossing van het probleem (2.1) is af te leiden uit de oplossing van het Cauchy probleem (1.1) in R_3 met behulp van de "method of descent" (afdalingsmethode) van Hadamard. Het Cauchy probleem (2.1) is namelijk te beschouwen als bijzonder geval van het probleem (1.1), met beginwaarden $\varphi(x)$, $\psi(x)$ die onafhankelijk zijn van x_3 i.e.

$$(2.2) \quad \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2), \quad \psi(x) = \psi(x_1, x_2).$$

Bereken nu voor deze functies de gemiddelden $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ over het boloppervlak

$B_{ct} : |x-x_0| = ct$; uitgeschreven met behulp van bolcoördinaten θ, φ vinden we

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}(x_0+ctv) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi(x_{01}+ct \sin\theta \cos\varphi, x_{02}+ct \sin\theta \sin\varphi) \sin\theta \, d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \psi(x_{01}+ct \sin\theta \cos\varphi, x_{02}+ct \sin\theta \sin\varphi) \sin\theta \, d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

terwijl een analoog resultaat geldt voor $\bar{\varphi}(x_0+ctv)$. Na de substitutie $\rho = ct \sin\theta$ gaat (2.3) over in

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}(x_0+ctv) &= \frac{1}{2\pi ct} \int_0^{ct} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(x_{01}+\rho \cos\varphi, x_{02}+\rho \sin\varphi)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi ct} \int_{G_{ct}} \frac{\psi(x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-x_0|^2}} dx, \quad G_{ct} : |x-x_0| \leq ct. \end{aligned}$$

Overeenkomstig (1.17) wordt nu de oplossing van het Cauchy probleem (2.1) gegeven door

$$(2.5) \quad u(x_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi c} \int_{G_{ct}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-x_0|^2}} dx \right] + \frac{1}{2\pi c} \int_{G_{ct}} \frac{\psi(x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-x_0|^2}} dx.$$

Deze uitkomst werd voor het eerst gegeven door Volterra, 1892.

Afhankelijkheidsgebied. Uit (2.5) blijkt dat de oplossing $u(x_0, t_0)$ slechts afhangt van de waarden van φ, ψ in het cirkelgebied $G_{ct_0} : |x-x_0| \leq ct_0$.

G_{ct_0} heet weer het afhankelijkheidsgebied van (x_0, t_0) . G_{ct_0} is tevens het gebied dat door de karakteristieke kegel K_0 met top (x_0, t_0) (zie (1.18)) wordt uitgesneden in het vlak $t = 0$. In afwijking van de situatie in R_3 is nu het afhankelijkheidsgebied van (x_0, t_0) doorsnede van kegel K_0 plus "inwendige", met het vlak $t = 0$. Het principe van Huygens geldt daarom niet voor de golfvergelijking in R_2 . Het bepaaldheidsgebied van G_{ct_0} is weer het gebied \bar{S} gegeven door (1.19).

De niet-geldigheid van het principe van Huygens is nog als volgt te interpreteren. Laat $u(x, t)$ weer een verstoring zijn die voor $t = 0$ gelokaliseerd is in een begrensde gebied $D \subset R_2$, i.e. $\varphi, \psi = 0$ buiten D . Voor een punt x_0 buiten D volgt dan uit (2.5),

$$(2.6) \quad \begin{cases} u(x_0, t) = 0, & ct < r_1, \\ u(x_0, t) \neq 0, & ct > r_1, \end{cases}$$

waarbij r_1 de kleinste afstand van x_0 tot D voorstelt. De verstoring bereikt dus het punt x_0 op het tijdstip $t_1 = r_1/c$ en de voortplantingssnelheid is weer gelijk aan c . Na het tijdstip $t_1 = r_1/c$ blijft echter $u(x_0, t) \neq 0$ d.w.z. de verstoring blijft oneindig lang nawerken. Dit bevestigt nog eens dat het principe van Huygens niet geldt voor de golfvergelijking in R_2 .

Opgaven. 1. Bepaal met de method of descent de oplossing van het Cauchy probleem voor de golfvergelijking in R_1 ,

$$(2.7) \quad \begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Ga daarbij uit van het Cauchy probleem voor de golfvergelijking in R_3 resp. in R_2 .

Verifieer dat de uitkomst overeenstemt met de d'Alembert oplossing (III.4.13). Merk op dat het principe van Huygens in het algemeen niet geldt voor de golfvergelijking in R_1 , tenzij $\psi(x) \equiv 0$ is.

2. Bepaal met de method of descent de oplossing van het Cauchy probleem

$$(2.8) \quad \begin{cases} \Delta u + k^2 u - u_{tt} = 0, & x \in R_2, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Ga daartoe uit van het Cauchy probleem voor de golfvergelijking in R_3 .

8.3. Principe van Duhamel, Cauchy probleem voor de inhomogene golfvergelijking in R_n .

Principe van Duhamel. Zij de functie $v(x,t;\tau)$ oplossing van het Cauchy probleem voor de homogene golfvergelijking in R_n ,

$$(3.1) \quad \begin{cases} \Delta v - \frac{1}{c^2} v_{tt} = 0, & x \in R_n, t > \tau, \\ v(x,\tau;\tau) = 0, & v_t(x,\tau;\tau) = c^2 f(x,\tau). \end{cases}$$

Dan wordt de oplossing $u(x,t)$ van het Cauchy probleem voor de inhomogene golfvergelijking

$$(3.2) \quad \begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t), & x \in R_n, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

gegeven door de Duhamel integraal

$$(3.3) \quad u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau) d\tau.$$

Bewijs. Het bewijs volgt door een eenvoudige verificatie. Bereken de afgeleiden van (3.3),

$$\begin{aligned}
 u_t(x,t) &= v(x,t;t) + \int_0^t v_t(x,t;\tau) d\tau = \int_0^t v_t(x,t;\tau) d\tau, \\
 u_{tt}(x,t) &= v_{tt}(x,t;t) + \int_0^t v_{tt}(x,t;\tau) d\tau \\
 (3.4) \quad &= c^2 f(x,t) + \int_0^t v_{tt}(x,t;\tau) d\tau, \\
 \Delta u(x,t) &= \int_0^t \Delta v(x,t;\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

dan volgt onmiddellijk dat $u(x,t)$ oplossing is van (3.2).

Opmerking. Het principe van Duhamel is algemeen van toepassing bij de oplossing van het Cauchy probleem voor inhomogene lineaire PDV's. Het principe van Duhamel is te beschouwen als het analogon van de methode van variatie van konstanten voor de oplossing van inhomogene lineaire GDV's.

We zullen de oplossing (3.3) van het Cauchy probleem (3.2) nog nader uitwerken in de gevallen $n = 3$, $n = 2$.

Geval $n = 3$. Overeenkomstig (1.16) wordt de hulpfunctie $v(x_0, t; \tau)$ nu gegeven door

$$(3.5) \quad v(x_0, t; \tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{B_{ct-c\tau}} f(x, \tau) d\sigma, \quad B_{ct-c\tau}: |x-x_0| = ct-c\tau.$$

Met (3.3) volgt dan voor de oplossing $u(x_0, t)$ van (3.2),

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad u(x_0, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{B_{ct-c\tau}} f(x, \tau) d\sigma \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{ct} \frac{d\tau}{\tau} \int_{B_\tau} f(x, t-\tau/c) d\sigma \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{G_{ct}} \frac{f(x, t - |x-x_0|/c)}{|x-x_0|} dx, \quad G_{ct}: |x-x_0| \leq ct.
 \end{aligned}$$

Vanwege de analogie van (3.6) met de oplossing (VII.4.20) van de Poisson vergelijking noemt men $u(x_0, t)$ wel een geretardeerde potentiaal; $f(x, t - |x-x_0|/c)$ heet de geretardeerde waarde van $f(x, t)$. De vertraging $|x-x_0|/c$ is te interpreteren als de tijd die nodig is om met snelheid c van x naar x_0 te lopen.

Uit (3.6) blijkt dat de oplossing $u(x_0, t_0)$ slechts afhangt van de waarden van $f(x, t)$ in de punten (x, t) gegeven door

$$(3.7) \quad |x-x_0| \leq ct_0, \quad t = t_0 - |x-x_0|/c$$

oftewel

$$(3.8) \quad |x-x_0|^2 - c^2(t-t_0)^2 = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Uit (3.8) is duidelijk dat het afhankelijkheidsgebied van (x_0, t_0) gevormd wordt door (enkel) de mantel van de karakteristieke kegel met top (x_0, t_0) . Geval $n = 2$. Overeenkomstig (2.5) wordt de hulpfunctie $v(x_0, t; \tau)$ nu gegeven door

$$(3.9) \quad v(x_0, t; \tau) = \frac{c}{2\pi} \int_{G_{ct-c\tau}} \frac{f(x, \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |x-x_0|^2}} dx, \quad G_{ct-c\tau}: |x-x_0| \leq ct-c\tau.$$

De oplossing $u(x_0, t)$ van (3.2) volgt door integratie van (3.9),

$$(3.10) \quad u(x_0, t) = \frac{c}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{G_{ct-c\tau}} \frac{f(x, \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |x-x_0|^2}} dx,$$

oftewel

$$(3.11) \quad u(x_0, t_0) = \frac{c}{2\pi} \int_K \frac{f(x, t)}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2 - |x-x_0|^2}} dx dt,$$

waarbij K het gebied is in de (x, t) -ruimte beschreven door

$$(3.12) \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad |x-x_0| \leq c(t_0-t).$$

K wordt begrensd door de karakteristieke kegel met top (x_0, t_0) en het vlak $t = 0$. K is tevens het afhankelijkheidsgebied van (x_0, t_0) .

Opgave. Bepaal met het principe van Duhamel nogmaals de oplossing van het Cauchy probleem (III.4.5) voor de golfvergelijking in R_1 .

Het Cauchy probleem voor de (in)homogene golfvergelijking in R_n is op analoge wijze op te lossen weer met gebruikmaking van de methode der sferische gemiddelden, method of descent en principe van Duhamel; zie Courant-Hilbert [2], p. 681-706. Uit de oplossing blijkt dat voor de golfvergelijking in R_n het principe van Huygens wel geldig is indien n oneven, ≥ 3 is, niet geldig is indien n even is.

Naast de hier onderzochte Cauchy problemen kan men ook gemengde problemen beschouwen, bestaande uit golfvergelijking plus begin- en randvoorwaarden.

We geven het volgende voorbeeld,

$$(3.13) \quad \begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t), & x \in G, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \bar{G}, \\ u(x,t) = g(x,t), & x \in \Gamma, t \geq 0, \end{cases}$$

waarbij G een gebied in R_n is met rand Γ . In §8.5 zullen we een eenduidigheidsstelling voor het probleem (3.13) bewijzen.

Gemengde problemen als boven zijn slechts in bepaalde gevallen in gesloten vorm op te lossen. Als mogelijke oplossingsmethoden noemen we in dit verband:

(i) Methode van separatie van variabelen. Deze methode is van toepassing indien het gebied G van eenvoudige vorm is b.v. cirkelgebied in R_2 , bolgebied in R_3 ; zie Colledge-dictaat Toegepaste Analyse I, 1973, hoofdstuk V.

(ii) Methode van spiegeling. Deze methode is van toepassing indien b.v. G een halfruimte is en de randvoorwaarde op Γ luidt: $u(x,t) = 0$ of $u_\nu(x,t) = 0$, $x \in \Gamma$; vergelijk met §3.4.

8.4. Stralingsprobleem, fundamentele oplossing van de golfvergelijking.

Een bijzonder geval van het Cauchy probleem voor de inhomogene golfvergelijking wordt gevormd door het zgn. stralingsprobleem,

$$(4.1) \quad \begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -g(t) \delta(x), & x \in R_n, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

De oplossing $u(x,t)$ is te interpreteren als een "verstoring" veroorzaakt door een "bron" met "sterkte" $g(t)$, gelokaliseerd in $x = 0$.

In R_3, R_2 volgt de oplossing van het stralingsprobleem onmiddellijk uit (3.6), (3.11) na substitutie van $f(x,t) = g(t) \delta(x)$. De resulterende integralen zijn nog te vereenvoudigen door formele toepassing van de rekenregels voor de δ -functie.

We vinden dan voor de oplossing van het stralingsprobleem in R_3 ,

$$(4.2) \quad u(x,t) = \begin{cases} 0, & t < |x|/c, \\ \frac{g(t-|x|/c)}{4\pi|x|}, & t > |x|/c. \end{cases}$$

Merk op dat de functie $g(t-|x|/c)/|x|$ oplossing is van de bolsymmetrische golfvergelijking, zie (1.5), (1.11); $u(x,t)$ is te interpreteren als een naar buiten lopende sferische golf.

Evenzo volgt uit (3.11) de oplossing van het stralingsprobleem in R_2 ,

$$(4.3) \quad u(x,t) = \begin{cases} 0, & t < |x|/c, \\ \frac{c}{2\pi} \int_0^{t-|x|/c} \frac{g(\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |x|^2}} d\tau, & t > |x|/c. \end{cases}$$

In de oplossingen (4.2), (4.3) manifesteert zich opnieuw het wel resp. niet geldig zijn van het principe van Huygens. Indien we $u(x,t)$ weer opvatten als een "verstoring" dan zal zowel in R_3 als in R_2 deze verstoring een punt x voor het eerst bereiken op het tijdstip $t = |x|/c$, i.e. de voortplantings-snelheid van de verstoring is gelijk aan c . Voor $t > |x|/c$ zijn de interpretaties van (4.2), (4.3) wezenlijk verschillend. In R_3 wordt de in x waargenomen verstoring $u(x,t)$ enkel bepaald door de bronsterkte op het tijdstip $t - |x|/c$; de vertraging $|x|/c$ correspondeert weer met de looptijd van de verstoring. Daarnaast ondergaat de verstoring bij haar voortplanting een verzwakking tengevolge van de faktor $1/|x|$. In R_2 daarentegen wordt de in x waargenomen verstoring $u(x,t)$ bepaald door de bronsterkte $g(\tau)$ over het tijdsinterval $0 \leq \tau \leq t - |x|/c$, i.e. $u(x,t)$ wordt bepaald door de hele "voorgeschiedenis" van de bron tot aan het tijdstip $t - |x|/c$. Indien de bron op zeker moment gedoofd zou worden zou de waarnemer in x dit niet merken!

Opgaven. 1. Leid de oplossing van het stralingsprobleem in R_2 af uit de oplossing van het stralingsprobleem in R_3 met behulp van de method of descent.
2. Toon aan dat de oplossing van het stralingsprobleem in R_1 gegeven wordt door

$$(4.4) \quad u(x,t) = \begin{cases} 0, & t < |x|/c, \\ \frac{c}{2} \int_0^{t-|x|/c} g(\tau) d\tau, & t > |x|/c. \end{cases}$$

Merk op dat het principe van Huygens niet geldt in dit geval.

Fundamentele oplossing. De causale fundamentele oplossing $C(x,t) = C_n(x,t)$ voor de golfvergelijking in R_n is per definitie oplossing van het probleem

$$(4.5) \quad \begin{cases} \Delta C - \frac{1}{c^2} C_{tt} = -\delta(x) \delta(t), & x \in R_n, -\infty < t < \infty, \\ C(x,t) \equiv 0, & t < 0. \end{cases}$$

Het probleem (4.5) is te beschouwen als een bijzonder geval van het stralingsprobleem (4.1). In de gevallen $n = 3, 2, 1$ is $C_n(x,t)$ eenvoudig te bepalen met behulp van (4.2), (4.3), (4.4) na substitutie van $g(t) = \delta(t)$,

$$(4.6) \quad \begin{cases} C_3(x,t) = \frac{\delta(t-|x|/c)}{4\pi|x|}, & C_2(x,t) = \frac{c}{2\pi} \frac{H(t-|x|/c)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}}, \\ C_1(x,t) = \frac{c}{2} H(t-|x|/c), \end{cases}$$

waarin $H(s)$ de eenheidsfunctie van Heaviside voorstelt: $H(s) = 0, s < 0$;
 $H(s) = 1, s > 0$.

Voor een rechtstreekse bepaling van $C_n(x,t)$ (voor algemene n) met behulp van Laplace transformatie, zij verwezen naar Stakgold [11], Vol II, p. 61-65. Stakgold verifieert tevens dat de gevonden fundamentele oplossing $C(x,t)$ inderdaad zwakke oplossing is van de PDV

$$(4.7) \quad \Delta C - \frac{1}{c^2} C_{tt} = -\delta(x) \delta(t).$$

De causale fundamentele oplossing $C(x,t;y,\tau)$ met singulariteit in (y,τ) is per definitie oplossing van het probleem

$$(4.8) \quad \begin{cases} \Delta C - \frac{1}{c^2} C_{tt} = -\delta(x-y) \delta(t-\tau), & x \in R_n, -\infty < t < \infty, \\ C(x,t;y,\tau) \equiv 0, & t < \tau. \end{cases}$$

$C(x,t;y,\tau)$ volgt uit $C(x,t)$ door translatie,

$$(4.9) \quad C(x,t;y,\tau) = C(x-y,t-\tau).$$

Opgaven. 1. Zij $v(x,t)$ oplossing van het volgende Cauchy probleem voor de homogene golfvergelijking,

$$(4.10) \quad \begin{cases} \Delta v - \frac{1}{c^2} v_{tt} = 0, & x \in R_n, t > 0, \\ v(x,0) = 0, & v_t(x,0) = c^2 \delta(x). \end{cases}$$

Toon dan aan dat $C(x,t) = v(x,t) H(t)$.

Blijkens dit resultaat is voor $t > 0$ $C(x,t) = v(x,t)$ i.e. $C(x,t)$ is oplossing van een Cauchy probleem voor de homogene golfvergelijking.

2. Toon aan dat de oplossing van het Cauchy probleem voor de homogene golfvergelijking in R_n ,

$$(4.11) \quad \begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & x \in R_n, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

gegeven wordt door

$$(4.12) \quad u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \int_{R_n} C_n(x-y,t) \varphi(y) dy \right] + \frac{1}{c^2} \int_{R_n} C_n(x-y,t) \psi(y) dy.$$

Maak gebruik van het resultaat van opgave 1. Verifieer dat voor b.v. $n = 3$ de uitkomst (4.12) overeenstemt met de formule van Poisson (1.16).

8.5. Eenduidigheidsstellingen.

In deze paragraaf bewijzen we een tweetal eenduidigheidsstellingen resp. voor het Cauchy probleem voor de inhomogene golfvergelijking in R_n en voor het gemengde probleem (3.13). Deze stellingen spreken uit dat de oplossing $u(x,t)$ van het betreffende probleem, aangenomen dat ze bestaat, eenduidig is. Het bewijs van de eenduidigheid laat zich voeren op de bekende wijze: Onderstel

dat het betreffende probleem twee oplossingen $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ bezit. Vorm dan het verschil $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, dan voldoet $v(x,t)$ aan de homogene golfvergelijking en aan homogene begin- en randvoorwaarden. Te bewijzen is nu dat dit homogene probleem enkel de oplossing $v(x,t) \equiv 0$ bezit. De eenduidigheidsstellingen voor het Cauchy probleem en het gemengde probleem zijn daarom terug te brengen tot de hierna te formuleren stellingen I en II.

Stelling I. Zij de funktie $u(x,t) \in C^2$ voor $x \in R_n$, $t > 0$, $u(x,t) \in C^1$ voor $x \in R_n$, $t \geq 0$ en zij $u(x,t)$ oplossing van het homogene Cauchy probleem

$$(5.1) \quad \begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & x \in R_n, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Dan is $u(x,t) \equiv 0$ voor $x \in R_n$, $t \geq 0$.

Bewijs. We geven het bewijs gemakshalve voor het geval $n = 2$; bij de beschrijving kunnen we dan namelijk refereren aan ruimtelijke voorstellingen in de drie-dimensionale (x,t) -ruimte.

Laat (x_0, t_0) een willekeurig punt zijn met $x_0 \in R_2$, $t_0 > 0$. Het punt (x_0, t_0) is top van de karakteristieke kegel K_0 beschreven door

$$(5.2) \quad |x-x_0|^2 - c^2(t-t_0)^2 = 0.$$

Zij nu D het gebied in de (x,t) -ruimte dat begrensd wordt door de kegel K_0 en de vlakken $t = 0$, $t = t_1$, waarbij $0 < t_1 < t_0$. De kegel K_0 zal in de vlakken $t = 0$, $t = t_1$ cirkelvormige gebieden G_0, G_1 "uitsnijden". Het gedeelte van de kegelmantel tussen de vlakken $t = 0$, $t = t_1$ wordt M genoemd. G_0, G_1, M vormen dan samen de rand van D .

Het bewijs is nu verder gebaseerd op de identiteit

$$(5.3) \quad \begin{aligned} u_t (\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt}) &= u_t (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - \frac{1}{c^2} u_{tt}) \\ &= (u_t u_{x_1})_{x_1} + (u_t u_{x_2})_{x_2} - \frac{1}{2} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \frac{1}{c^2} u_t^2)_t. \end{aligned}$$

Merk op dat het laatste lid van (5.3) de vorm heeft van een divergentie. Integreer (5.3) over het gebied D dan volgt met de divergentiestelling van Gauss,

$$(5.4) \quad 0 = \int_D u_t (\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt}) dx dt$$

$$= \int_{G_0 + G_1 + M} \left[u_t u_{x_1} v_1 + u_t u_{x_2} v_2 - \frac{1}{2} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \frac{1}{c^2} u_t^2) v_3 \right] d\sigma,$$

waarbij (v_1, v_2, v_3) de componenten van de naar buiten gerichte normaal op de rand voorstellen. We herleiden nu de oppervlakteintegraal (5.4) als volgt:

(i) Op G_0 is $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = -1$, waarna volgt

$$(5.5) \quad \int_{G_0} [\dots] d\sigma = \frac{1}{2} \int_{G_0} [u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \frac{1}{c^2} u_t^2] dx_1 dx_2 = 0$$

op grond van de beginvoorwaarde (5.1).

(ii) Op G_1 is $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = 1$, waaruit volgt

$$(5.6) \quad \int_{G_1} [\dots] d\sigma = -\frac{1}{2} \int_{G_1} [u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \frac{1}{c^2} u_t^2] dx_1 dx_2.$$

(iii) De kegel K_0 is een karakteristiek oppervlak voor de golfvergelijking. Schrijf nu de vergelijking (5.2) voor K_0 in de vorm

$$(5.7) \quad \varphi(x, t) \equiv |x - x_0|^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0,$$

dan voldoet $\varphi(x, t)$ aan de betrekking (zie (IV.3.1))

$$(5.8) \quad \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 - \frac{1}{c^2} \varphi_t^2 = 0, \quad (x, t) \in K_0.$$

De vektor $\nabla\varphi = (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_t)$ heeft dezelfde richting als de normaal op K_0 .

Voor de componenten (v_1, v_2, v_3) zal daarom gelden

$$(5.9) \quad v_1^2 + v_2^2 - v_3^2/c^2 = 0.$$

Met behulp van (5.9) is nu de oppervlakteintegraal (5.4) over M te herleiden tot

$$(5.10) \quad \int_M [\dots] d\sigma = -\frac{1}{2} \int_M \frac{1}{v_3} [(u_{x_1} v_3 - u_t v_1)^2 + (u_{x_2} v_3 - u_t v_2)^2] d\sigma.$$

Substitueer nu (5.5), (5.6), (5.10) in (5.4) dan volgt

$$(5.11) \quad \int_{G_1} [u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \frac{1}{c^2} u_t^2] dx_1 dx_2 + \int_M \frac{1}{v_3} [(u_{x_1} v_3 - u_t v_1)^2 + (u_{x_2} v_3 - u_t v_2)^2] d\sigma = 0.$$

Beide integralen in (5.11) zijn niet negatief en daarom noodzakelijk gelijk aan nul. Daaruit volgt

$$(5.12) \quad u_{x_1} = u_{x_2} = u_t = 0, (x,t) \in G_1.$$

Varieer nu t_1 dan zal (5.12) gelden in het hele gesloten gebied begrensd door de kegel K_0 en het vlak $t = 0$. In het genoemde gebied is dan $u(x,t) = \text{konst.} = 0$ vanwege de beginvoorwaarde $u(x,0) = 0$.

Daar het punt (x_0, t_0) (als top van de kegel K_0) willekeurig gekozen is zal ook algemeen gelden $u(x,t) \equiv 0$ voor $x \in R_2, t \geq 0$.

Opmerkingen. 1. Uit het bewijs blijkt nog: Indien slechts geldt

$$(5.13) \quad u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, x \in G_0 : |x-x_0| \leq ct_0,$$

dan is $u(x,t) \equiv 0$ in het gesloten gebied begrensd door de kegel K_0 en het vlak $t = 0$. Dit gebied is juist het bepaaldheidsgebied van G_0 .

2. Men noemt de integraal (5.6) (zonder het min-teken) een energie-integraal; de integraal is namelijk te interpreteren als een energie. De methode der energie-integralen vindt veelvuldig toepassing bij de afleiding van eenduidigheidsstellingen voor hyperbolische PDV's.

Stelling II. Laat G een begrensd gebied in R_n zijn met rand Γ . Zij de functie $u(x,t) \in C^2$ voor $x \in G, t > 0, u(x,t) \in C^1$ voor $x \in \bar{G}, t \geq 0$ en zij $u(x,t)$ oplossing van het homogene gemengde probleem

$$(5.14) \quad \begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, x \in G, t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, x \in \bar{G}, \\ u(x,t) = 0, x \in \Gamma, t \geq 0. \end{cases}$$

Dan is $u(x,t) \equiv 0$ voor $x \in \bar{G}, t \geq 0$.

Bewijs. Ook hier geven we het bewijs alleen voor het geval $n = 2$.

Laat D een cilindrisch gebied in de (x,t) -ruimte zijn, gegeven door

$$(5.15) \quad D = \{(x,t) \mid x \in G, 0 < t < t_1\}.$$

D wordt begrensd door de cylindermantel M en de eindvlakken G_0, G_1 ,

$$(5.16) \quad M = \{(x,t) \mid x \in \Gamma, 0 \leq t \leq t_1\}, \quad G_0 = \{(x,0) \mid x \in \bar{G}\},$$

$$G_1 = \{(x,t_1) \mid x \in \bar{G}\}.$$

Voor de functie $u(x,t)$ in het gebied \bar{D} geldt nu weer de betrekking (5.4).

De oppervlakteintegralen over G_0, G_1 zijn weer te herleiden volgens (5.5),

(5.6). Op de mantel M is $v_3 = 0$; de oppervlakteintegraal (5.4) over M zal dan overgaan in

$$(5.17) \quad \int_M [\dots] d\sigma = \int_M u_t [u_{x_1} v_1 + u_{x_2} v_2] d\sigma = 0,$$

wegens $u_t = 0$ op M, zie de randvoorwaarde (5.14).

Substitutie van (5.5), (5.6), (5.17) in (5.4) leidt nu tot

$$(5.18) \quad \int_{G_1} [u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \frac{1}{c^2} u_t^2] dx_1 dx_2 = 0,$$

waaruit volgt

$$(5.19) \quad u_{x_1} = u_{x_2} = u_t = 0, \quad (x,t) \in G_1.$$

Varieer t_1 dan zal (5.19) gelden in elk punt (x,t) met $x \in \bar{G}$, $t \geq 0$. Met de beginvoorwaarde $u(x,0) = 0$, $x \in \bar{G}$ volgt dan onmiddellijk: $u(x,t) \equiv 0$, $x \in \bar{G}$, $t \geq 0$.

Opgave. Toon aan dat stelling II ook geldig blijft indien de randvoorwaarde $u(x,t) = 0$, $x \in \Gamma$ wordt vervangen door één der volgende randvoorwaarden,

$$(5.20) \quad u_\nu(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0,$$

resp.

$$(5.21) \quad u_\nu(x,t) + \theta(x)u(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0; \quad \theta(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma.$$

Hierbij is ν de naar buiten gerichte normaal op Γ .

IX. Parabolische PDV's: diffusievergelijking.

9.1. Fundamentele oplossing, Cauchy probleem voor de diffusievergelijking.

Als belangrijkste voorbeeld van een parabolische PDV bespreken we in dit hoofdstuk de warmtegeleidingsvergelijking of diffusievergelijking in R_n ,

$$(1.1) \quad \Delta u - u_t = -f(x,t), \quad x \in R_n.$$

Indien $f(x,t) \equiv 0$ is heet de vergelijking homogeen. Diverse transportverschijnselen uit de fysica worden beschreven door de diffusievergelijking, b.v. de diffusie van een gas waarbij $u(x,t)$ de concentratie voorstelt; warmtegeleiding in een medium waarbij $u(x,t)$ de temperatuur voorstelt. Het rechterlid in (1.1) correspondeert met een "bronverdeling" met "sterkte" $f(x,t)$.

Voor de diffusievergelijking (1.1) laat zich formuleren het beginwaardeprobleem of Cauchy probleem,

$$(1.2) \quad \begin{cases} \Delta u - u_t = -f(x,t), & x \in R_n, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Merk op dat nu alleen de beginwaarde $u(x,0)$ is voorgeschreven.

We zullen het Cauchy probleem (1.2) oplossen met behulp van een geschikte fundamentele oplossing.

Definitie I. De causale fundamentele oplossing $C(x,t) = C_n(x,t)$ voor de diffusievergelijking in R_n is oplossing van het probleem

$$(1.3) \quad \begin{cases} \Delta C - C_t = -\delta(x) \delta(t), & x \in R_n, -\infty < t < \infty, \\ C(x,t) \equiv 0, & t < 0. \end{cases}$$

$C(x,t)$ is te interpreteren als de temperatuursverdeling in een medium onder invloed van een warmtebron, die gelokaliseerd is in $x = 0$ en op het tijdstip $t = 0$ een "eenheid van warmte" ontwikkelt.

$C(x,t)$ is tevens oplossing van een Cauchy probleem voor de homogene diffusievergelijking.

Stelling. Zij $v(x,t)$ oplossing van het volgende Cauchy probleem voor de homogene diffusievergelijking,

$$(1.4) \quad \begin{cases} \Delta v - v_t = 0, & x \in R_n, t > 0, \\ v(x,0) = \delta(x). \end{cases}$$

Dan is $C(x,t) = v(x,t) H(t)$, waarbij $H(t)$ de eenheidsfunctie van Heaviside voorstelt.

Bewijs. Voor $t < 0$ is $C(x,t) = v(x,t) H(t) = 0$ in overeenstemming met (1.3).
Bereken nu de afgeleiden van $C(x,t)$,

$$(1.5) \quad \begin{cases} \Delta C = \Delta[v(x,t) H(t)] = \Delta v H(t) \\ C_t = v_t H(t) + v(x,t) \delta(t) = v_t H(t) + v(x,0) \delta(t) = v_t H(t) + \delta(x) \delta(t). \end{cases}$$

Daaruit volgt

$$\Delta C - C_t = (\Delta v - v_t) H(t) - \delta(x) \delta(t) = -\delta(x) \delta(t),$$

in overeenstemming met (1.3).

Gevolg. Voor $t > 0$ is $C(x,t)$ tevens oplossing van het Cauchy probleem voor de homogene diffusievergelijking,

$$(1.6) \quad \begin{cases} \Delta C - C_t = 0, \quad x \in R_n, \quad t > 0, \\ C(x,0) = \delta(x). \end{cases}$$

De fundamentele oplossing $C(x,t)$ is expliciet te bepalen met behulp van Fourier transformatie,

$$(1.7) \quad C(x,t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^n \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) H(t),$$

zie b.v. Stakgold [11], Vol. II, p. 60.

Men kan gemakkelijk verifiëren dat de functie (1.7) oplossing is van het probleem (1.6). Voor $t > 0$ volgt door eenvoudig differentieren dat $\Delta C - C_t = 0$ is. Voorts is in (VI.2.2a) afgeleid dat

$$(1.8) \quad \lim_{t \downarrow 0} C(x,t) = \lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^n \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) = \delta(x)$$

in distributie-zin.

Definitie II. De causale fundamentele oplossing $C(x,t;y,\tau)$ met singulariteit in (y,τ) is oplossing van het probleem

$$(1.9) \quad \begin{cases} \Delta C - C_t = -\delta(x-y) \delta(t-\tau), \quad x \in R_n, \quad -\infty < t < \infty, \\ C(x,t;y,\tau) \equiv 0, \quad t < \tau. \end{cases}$$

Voor $t > \tau$ is $C(x,t;y,\tau)$ tevens oplossing van het Cauchy probleem voor de homogene diffusievergelijking,

$$(1.10) \quad \begin{cases} \Delta C - C_t = 0, & x \in R_n, t > \tau, \\ C(x,\tau;y,\tau) = \delta(x-y). \end{cases}$$

$C(x,t;y,\tau)$ volgt uit $C(x,t)$ door translatie,

$$(1.11) \quad C(x,t;y,\tau) = C(x-y,t-\tau).$$

Met behulp van de causale fundamentele oplossing is het Cauchy probleem voor de diffusievergelijking expliciet op te lossen.

1. Cauchy probleem voor de homogene diffusievergelijking in R_n ,

$$(1.12) \quad \begin{cases} \Delta u - u_t = 0, & x \in R_n, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Schrijf de functie $\varphi(x)$ als een superpositie van δ -functies,

$$(1.13) \quad \varphi(x) = \int_{R_n} \delta(x-y) \varphi(y) dy.$$

Met behulp van (1.10), (1.11) vinden we dan formeel de volgende oplossing van het probleem (1.12),

$$(1.14) \quad u(x,t) = \int_{R_n} C(x-y,t) \varphi(y) dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^n \int_{R_n} \exp \left[- \frac{|x-y|^2}{4t} \right] \varphi(y) dy.$$

Verificatie van de oplossing (1.14). We zullen nog aantonen dat (1.14) inderdaad oplossing is van het Cauchy probleem (1.12). Daartoe onderstellen we (voldoende voorwaarde) dat de functie $\varphi(x)$ continu en begrensd is in R_n , i.e. $|\varphi(x)| \leq M, x \in R_n$.

(i) Voor $|x| \leq A, 0 < t_1 \leq t \leq t_2$ geldt de volgende afschatting voor de integrand (1.14),

$$(1.15) \quad \left| \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^n \exp \left[- \frac{|x-y|^2}{4t} \right] \varphi(y) \right| \leq \frac{M}{(2\sqrt{\pi t_1})^n} \exp \left[- \frac{|y|^2 - 2A|y|}{4t_2} \right].$$

Omdat het rechterlid van (1.15) integreerbaar is over R_n , is de integraal (1.14) uniform convergent voor $|x| \leq A$, $0 < t_1 \leq t \leq t_2$, A, t_1, t_2 willekeurig (criterium van Weierstrass).

Op analoge wijze kan men aantonen dat de integralen

$$(1.16) \quad \int_{R_n} C_t(x-y, t) \varphi(y) dy, \quad \int_{R_n} \Delta C(x-y, t) \varphi(y) dy$$

uniform convergent zijn voor $|x| \leq A$, $0 < t_1 \leq t \leq t_2$. Volgens een bekende stelling zijn nu de afgeleiden $\Delta u, u_t$ van (1.14) te bepalen door differentiatie onder het integraalteken indien $x \in R_n$, $t > 0$. Er volgt dan onmiddellijk

$$(1.17) \quad \Delta u - u_t = \int_{R_n} [\Delta C - C_t] \varphi(y) dy = 0, \quad x \in R_n, \quad t > 0.$$

(ii) Zij $x_0 \in R_n$, dan is te bewijzen

$$(1.18) \quad \lim_{x \rightarrow x_0, t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

We maken gebruik van het volgende hulpresultaat (vergelijk met (VI.1.15a)),

$$(1.19) \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^n \int_{R_n} \exp \left[- \frac{|x-y|^2}{4t} \right] dy = 1.$$

Met (1.19) is nu het verschil $u(x, t) - \varphi(x_0)$ voor te stellen door de integraal

$$(1.20) \quad I = u(x, t) - \varphi(x_0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^n \int_{R_n} \exp \left[- \frac{|x-y|^2}{4t} \right] [\varphi(y) - \varphi(x_0)] dy.$$

Daar $\varphi(y)$ continu is in x_0 laat zich bij $\varepsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ vinden zodat

$$(1.21) \quad |\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{voor} \quad |y-x_0| < \delta.$$

Splits nu de integraal I in een integraal I_1 over het gebied $G_1 : |y-x_0| \leq \delta$, en een integraal I_2 over het gebied $G_2 : |y-x_0| \geq \delta$. De twee integralen zijn als volgt af te schatten:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad |I_1| &\leq \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \int_{G_1} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4t}\right] |\varphi(y) - \varphi(x_0)| dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \int_{R_n} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4t}\right] dy = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad |I_2| &\leq \frac{2M}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{G_2} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4t}\right] dy \\ &= \frac{2M}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{|y| \geq \delta} \exp\left[-\frac{|x-x_0-y|^2}{4t}\right] dy. \end{aligned}$$

Zij nu $|x-x_0| < \frac{1}{2}\delta$ dan is

$$(1.22) \quad |x-x_0-y| \geq \frac{1}{2}|y| \text{ indien } |y| \geq \delta,$$

waarna volgt

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{2M}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{|y| \geq \delta} \exp\left(-\frac{|y|^2}{16t}\right) dy \\ &= \frac{2M}{\pi^{\frac{1}{2}n}} \int_{|z| \geq \delta/2\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{1}{4}|z|^2\right) dz. \end{aligned}$$

Er bestaat nu zeker een getal η zodat $|I_2| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor $0 < t < \eta$.
 Combineer de voorgaande resultaten dan volgt

$$(1.23) \quad |I| = |u(x,t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \text{ voor } |x-x_0| < \frac{1}{2}\delta, 0 < t < \eta.$$

Daarmee is (1.18) bewezen.

2. Cauchy probleem voor de inhomogene diffusievergelijking in R_n ,

$$(1.24) \quad \begin{cases} \Delta u - u_t = -f(x,t), & x \in R_n, t > 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Schrijf de functie $f(x,t)$ als een superpositie van δ -functies,

$$(1.25) \quad f(x,t) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{R_n} \delta(x-y) \delta(t-\tau) f(y,\tau) dy.$$

Met behulp van (1.9), (1.11) vinden we dan formeel de volgende oplossing van het probleem (1.24),

$$(1.26) \quad \begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^{\infty} d\tau \int_{R_n} C(x-y,t-\tau) f(y,\tau) dy \\ &= \int_0^t d\tau \int_{R_n} \frac{1}{[2\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right] f(y,\tau) dy. \end{aligned}$$

Opgave. Leid de oplossing van het Cauchy probleem (1.24) ook af met behulp van het principe van Duhamel.

Naast deze Cauchy problemen kan men ook gemengde problemen beschouwen, bestaande uit diffusievergelijking plus begin- en randvoorwaarden. We geven het volgende voorbeeld,

$$(1.27) \quad \begin{cases} \Delta u - u_t = -f(x,t), & x \in G, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \bar{G}, \\ u(x,t) = g(x,t), & x \in \Gamma, t \geq 0, \end{cases}$$

waarbij G een gebied in R_n is met rand Γ . Voor het probleem (1.27) zal in §9.2 een eenduidigheidsstelling worden afgeleid. Als mogelijke oplossingsmethoden voor gemengde problemen noemen we weer de methode van separatie van variabelen en de methode van spiegeling; zie het slot van §8.3.

Opgaven. 1. Bepaal de oplossing van het gemengde probleem,

$$(1.28) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0; u(0,t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

2. Bepaal de oplossing van het gemengde probleem,

$$(1.29) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0; u(0,t) = g(t), t \geq 0. \end{cases}$$

Aanwijzing: Bepaal eerst de oplossing van (1.29) in het geval $g(t) = H(t)$. Leid daaruit af de oplossing van (1.29) voor algemene $g(t)$, met behulp van een soort principe van Duhamel; zie eventueel Tychonoff-Samarski [12], p. 227-230.

9.2. Maximum-minimum principes, eenduidigheidsstellingen

Maximum-minimum principe I. Laat G een begrensde gebied in R_n zijn met rand Γ . Zij de functie $u(x,t)$ continu voor $x \in \bar{G}$, $0 \leq t \leq t_1$ en zij $u(x,t)$ oplossing van de homogene diffusievergelijking

$$(2.1) \quad \Delta u - u_t = 0, \quad x \in G, \quad 0 < t \leq t_1.$$

Dan neemt $u(x,t)$ haar maximum en minimum aan òf op het tijdstip $t = 0$ òf op de rand Γ .

Bewijs. Laat D een cilindrisch gebied in de (x,t) -ruimte zijn, gegeven door

$$(2.2) \quad D = \{(x,t) \mid x \in G, \quad 0 < t < t_1\}.$$

Onderscheid de rand van D in twee gedeelten,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x,t) \mid x \in \bar{G}, \quad t = 0 \vee x \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq t_1\}, \\ \Gamma_2 &= \{(x,t_1) \mid x \in G\}. \end{aligned}$$

Γ_1 is dus gesloten, terwijl Γ_2 open is.

Voer nu in

$$(2.4) \quad M = \max_{(x,t) \in \Gamma_1} u(x,t), \quad m = \min_{(x,t) \in \Gamma_1} u(x,t),$$

dan is te bewijzen

$$(2.5) \quad m \leq u(x,t) \leq M, \quad (x,t) \in D + \Gamma_2.$$

We bewijzen alleen de rechterhelft van de ongelijkheid (2.5). Het bewijs vertoont grote overeenkomst met het bewijs van het maximum-minimum principe voor harmonische functies; zie §7.2.

Stel dat er een punt $(x_0, t_0) \in D + \Gamma_2$ bestaat met $u(x_0, t_0) = M + \eta$, $\eta > 0$.

Voer dan in een functie $v(x,t)$ gegeven door

$$(2.6) \quad v(x,t) = u(x,t) + \delta |x - x_0|^2, \quad \delta > 0.$$

Op het randgedeelte Γ_1 geldt nu

$$(2.7) \quad v(x,t) \leq M + \delta \max_{x \in \Gamma} |x-x_0|^2 = M + \delta r^2, \quad (x,t) \in \Gamma_1,$$

terwijl $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0)$ is. Kies nu δ zo klein dat geldt

$$(2.8) \quad M + \delta r^2 < M + \eta = u(x_0, t_0) = v(x_0, t_0).$$

De continue functie $v(x,t)$ zal dan op \bar{D} zijn maximum aannemen in een punt $(x_0^*, t_0^*) \in D + \Gamma_2$. In dat punt zal gelden

$$(2.9) \quad \Delta v(x_0^*, t_0^*) \leq 0, \quad v_t(x_0^*, t_0^*) \geq 0,$$

waaruit volgt

$$(2.10) \quad \Delta v - v_t \leq 0 \text{ in } (x_0^*, t_0^*).$$

Anderzijds is echter

$$(2.11) \quad \Delta v - v_t = \Delta u - u_t + \delta \Delta \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2 \right] = 2n\delta > 0,$$

zodat we tot een tegenspraak komen.

Daarmee is bewezen $u(x,t) \leq M$ voor $(x,t) \in D + \Gamma_2$.

Maximum-minimum principe II. Zij de functie $u(x,t)$ continu en begrensd voor $x \in R_n$, $0 \leq t \leq t_1$ en zij $u(x,t)$ oplossing van de homogene diffusievergelijking

$$(2.12) \quad \Delta u - u_t = 0, \quad x \in R_n, \quad 0 < t \leq t_1.$$

Dan geldt

$$(2.13) \quad m = \inf_{x \in R_n} u(x,0) \leq u(x,t) \leq \sup_{x \in R_n} u(x,0) = M, \quad x \in R_n, \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Bewijs. We bewijzen alleen de rechterhelft van de ongelijkheid (2.13).

De functie $u(x,t)$ is begrensd, i.e. $|u(x,t)| \leq K$ voor $x \in R_n$, $0 \leq t \leq t_1$.

Voer nu in een functie $v(x,t)$ gegeven door

$$(2.14) \quad v(x,t) = u(x,t) - M - \alpha(|x|^2 + 2nt), \quad \alpha \geq 0,$$

en merk op dat $v(x,t)$ voldoet aan de homogene diffusievergelijking.

Laat D het gebied zijn gegeven door

$$(2.15) \quad D = \{(x,t) \mid |x| < A, 0 < t < t_1\}.$$

Volgens het maximum-minimum principe I neemt $v(x,t)$ op \bar{D} haar maximum en minimum aan òf op het tijdstip $t = 0$ òf op de rand $|x| = A$. Nu is voor $t = 0$,

$$(2.16) \quad v(x,0) = u(x,0) - M - \alpha|x|^2 \leq 0.$$

Evenzo geldt voor $|x| = A$,

$$(2.17) \quad v(x,t) = u(x,t) - M - \alpha(A^2 + 2nt) \leq K - M - \alpha A^2 = 0,$$

indien we stellen $\alpha = (K-M)/A^2$.

Uit (2.16), (2.17) volgt met het maximum-minimum principe I,

$$(2.18) \quad v(x,t) \leq 0, \quad (x,t) \in \bar{D}$$

oftewel

$$(2.19) \quad u(x,t) \leq M + \frac{K-M}{A^2} (|x|^2 + 2nt), \quad |x| \leq A, 0 \leq t \leq t_1.$$

Zij nu (x,t) vast dan volgt na een limietovergang $A \rightarrow \infty$,

$$(2.20) \quad u(x,t) \leq M, \quad x \in R_n, 0 \leq t \leq t_1.$$

Stelling I. Zij G een begrensde gebied in R_n met rand Γ . De oplossing $u(x,t)$ van het gemengde probleem voor de diffusievergelijking

$$(2.21) \quad \begin{cases} \Delta u - u_t = -f(x,t), & x \in G, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \bar{G}, \\ u(x,t) = g(x,t), & x \in \Gamma, t \geq 0, \end{cases}$$

is eenduidig en hangt continu af van de beginwaarde $\varphi(x)$ en de randwaarde $g(x,t)$.

Bewijs. Het bewijs berust op het maximum-minimum principe I; vergelijk met het bewijs van de overeenkomstige stelling uit §7.2 voor het Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking. De verdere uitwerking wordt aan de lezer overgelaten.

Stelling II. Zij de functie $u(x,t)$ oplossing van het Cauchy probleem voor de diffusievergelijking

$$(2.22) \quad \begin{cases} \Delta u - u_t = -f(x,t), & x \in R_n, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases}$$

en zij $u(x,t)$ begrensd voor $x \in R_n, t \geq 0$. Dan is de oplossing $u(x,t)$ eenduidig en continu afhankelijk van de beginwaarde $\varphi(x)$.

Bewijs. Het bewijs berust op het maximum-minimum principe II; dit verklaart ook de extra voorwaarde, $u(x,t)$ begrensd voor $x \in R_n, t \geq 0$. De uitwerking wordt weer aan de lezer overgelaten.

Het eenduidigheids gedeelte van stelling I laat zich ook bewijzen met de methode der energie-integralen. Zoals opgemerkt in §8.5 is het daarbij voldoende om de stelling te formuleren voor de homogene diffusievergelijking onder homogene begin- en randvoorwaarden.

Stelling III. Laat G een begrensd gebied in R_n zijn met rand Γ . Zij de functie $u(x,t) \in C^2$ voor $x \in G, t > 0$, $u(x,t) \in C^1$ voor $x \in \bar{G}, t \geq 0$ en zij $u(x,t)$ oplossing van het homogene gemengde probleem

$$(2.23) \quad \begin{cases} \Delta u - u_t = 0, & x \in G, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \bar{G}, \\ u(x,t) = 0, & x \in \Gamma, t \geq 0. \end{cases}$$

Dan is $u(x,t) \equiv 0$ voor $x \in \bar{G}, t \geq 0$.

Bewijs. Vermenigvuldig de diffusievergelijking met u en integreer over het gebied G bij vaste $t > 0$, dan volgt

$$(2.24) \quad \int_G uu_t dx = \int_G u\Delta u dx.$$

Het rechterlid van (2.24) is te herleiden met de eerste identiteit van Green (VII.1.4),

$$(2.25) \quad \int_G u\Delta u dx = - \int_G |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma} uu_\nu d\sigma = - \int_G |\nabla u|^2 dx,$$

op grond van de randvoorwaarde (2.23).

Uit (2.24), (2.25) volgt nu

$$(2.26) \quad \int_G uu_t dx = - \int_G |\nabla u|^2 dx \leq 0$$

oftewel

$$(2.27) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_G u^2(x,t) dx \right] \leq 0, \quad t > 0.$$

Blijkens (2.27) is de energie-integraal $\frac{1}{2} \int_G u^2(x,t) dx$ een monotoon niet-toenemende functie van t voor $t > 0$. Voor $t = 0$ is de integraal gelijk aan 0 op grond van de beginvoorwaarde (2.23). Daar de energie-integraal niet-negatief is, moet dan gelden

$$(2.28) \quad \frac{1}{2} \int_G u^2(x,t) dx = 0, \quad t \geq 0,$$

waaruit volgt, $u(x,t) \equiv 0$ voor $x \in \bar{G}$, $t \geq 0$.

Opgave. Toon aan dat de stelling III ook geldig blijft indien de randvoorwaarde $u(x,t) = 0$, $x \in \Gamma$ wordt vervangen door één der volgende randvoorwaarden,

$$(2.29) \quad u_\nu(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0,$$

resp.

$$(2.30) \quad u_\nu(x,t) + \theta(x,t) u(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0; \quad \theta(x,t) \geq 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0.$$

Hierbij is ν de naar buiten gerichte normaal op Γ .

Literatuur

(De vermelde lettercombinatie is die van de catalogus van de wiskunde-
bibliotheek van de T.H. Eindhoven.)

- [1] S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint, Algebra en analyse, Academic Service ,
Den Haag, 1976 (CAB) .
- [2] R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Vol. II,
Partial differential equations, Interscience, New York, 1962
(CNB) .
- [3] P.R. Garabedian, Partial differential equations, Wiley, New York, 1964
(CNH) .
- [4] I.M. Gelfand und G.E. Schilow, Verallgemeinerte Funktionen, Band I,
VEB Verlag, Berlin, 1960 (CSF) .
- [5] G. Hellwig, Partial differential equations, Blaisdell, New York, 1964 (CNH) .
- [6] G. Helmbert, Introduction to spectral theory in Hilbert space,
North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1969 (CSK) .
- [7] I.G. Petrowski, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen,
Teubner, Leipzig, 1955 (CNH) .
- [8] M.M. Smirnov, Second-order partial differential equations, Noordhoff,
Groningen, 1966 (CNM) .
- [9] I.N. Sneddon, Elements of partial differential equations, McGraw-Hill,
New York, 1957 (CNH) .
- [10] S.L. Sobolev, Partial differential equations of mathematical physics,
Pergamon Press, Oxford, 1964 (CNM)
- [11] I. Stakgold, Boundary value problems of mathematical physics, Vols. I,
II, Macmillan, New York, 1967/68 (CNL) .
- [12] A.N. Tychonoff und A.A. Samarski, Differentialgleichungen der mathema-
tischen Physik, VEB Verlag, Berlin, 1959 (CNM) .

Collegedictaat Partiële Differentiaalvergelijkingen: aanvullingen en wijzigingen

7.11. Eigenwaardeprobleem voor de Laplace operator

De verwijzingen naar het collegedicaat Lineaire Analyse I (LAI) worden vervangen door verwijzingen naar

E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, New York, 1978.

Aanvulling op stelling I, p. 103:

Stelling Ia. Alle eigenwaarden (indien aanwezig) zijn *reëel* en *positief*.

Bewijs. Zij λ eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $u(x) \neq 0$. Toepassing van de eerste identiteit van Green op de functies $u(x)$ en $\bar{u}(x)$ levert

$$\int_G (\bar{u} \Delta u + \nabla \bar{u} \cdot \nabla u) dx = \int_{\Gamma} \bar{u} u_\nu d\sigma = 0,$$

en dus

$$\int_G (-\lambda |u|^2 + |\nabla u|^2) dx = 0, \quad \lambda = \frac{\int_G |\nabla u|^2 dx}{\int_G |u|^2 dx} > 0.$$

Opmerking. Ook alle eigenfuncties zijn als reële functies te nemen.

Stelling Ib. Eigenfuncties behorend bij *verschillende* eigenwaarden, zijn orthogonaal.

Bewijs. Laat λ_1 en λ_2 , met $\lambda_1 \neq \lambda_2$, eigenwaarden zijn met bijbehorende eigenfuncties $u_1(x)$ resp. $u_2(x)$. Pas de tweede identiteit van Green toe op de functies $u_1(x)$ en $u_2(x)$, dan volgt

$$\int_G (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dx = \int_{\Gamma} (u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}) d\sigma = 0,$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_G u_1 u_2 dx = 0, \quad \int_G u_1(x) u_2(x) dx = (u_1, u_2) = 0.$$

Opmerking. Bij eenzelfde eigenwaarde λ kunnen meerdere lineair onafhankelijke eigenfuncties behoren. In dat geval heet de eigenwaarde λ *ontaard*. Laat bij λ bijv. twee eigenfuncties behoren, $u_1(x)$ en $u_2(x)$, dan is ook de lineaire combinatie $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ eigenfunctie bij λ . Vervang nu $u_2(x)$ door $u_2^*(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ met c_1 en c_2 zo gekozen dat $(u_1, u_2^*) = 0$. Voor meer eigenfuncties is deze constructie systematisch voort te zetten met het Gram-Schmidt proces; zie Kreyszig, pp. 157-158. De eigenfuncties zijn vervolgens te normeren: $\|u_j\| = (u_j, u_j)^{1/2} = 1$. Algemeen geldt dan dat de eigenfuncties een *orthonormaal stelsel* (Kreyszig, p. 152) vormen, met $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$.

Op p. 103 wordt de ruimte $L_2(G)$ gedefinieerd als de verzameling der functies welke kwadratische Lebesgue-integreerbaar zijn over G . Analoog aan Kreyszig, pp. 62, 132, geldt ook: $L_2(G)$ is de completering van $C^0(\bar{G})$ onder de norm (11.8). Met het inwendig product (11.8) is $L_2(G)$ een separabele Hilbertruimte; zie p. 104, en vergelijk met Kreyszig, p. 180.

Het bewijs van stelling III (pp. 104-105) is als volgt te wijzigen:

Bewijs. Overeenkomstig (6.8a) gelden de volgende ongelijkheden voor de functie van Green $G(x; y)$ in R_2, R_3 ,

$$R_2 : 0 < G(x; y) < \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} + \text{konst.} , \quad (11.9)$$

$$R_3 : 0 < G(x; y) < \frac{1}{4\pi|x-y|} .$$

Met behulp van (11.9) is gemakkelijk in te zien, dat

$$(11.10) \quad \int_G \int_G G^2(x; y) dx dy < \infty$$

is, i.e. $G(x; y)$ is kwadratisch integreerbaar over $G \times G$, oftewel $G(x; y) \in L_2(G \times G)$. Analooq aan Kreyszig, p. 454, is dan de integraaloperator T kompakt; zie eventueel ook Helmberg [6], pp. 85-87, 182.

Met gebruik van de symmetrie-eigenschap $G(x; y) = G(y; x)$ (zie § 7.6) is af te leiden dat

$$\begin{aligned} (Tu, v) &= \int_G \left[\int_G G(x; y) u(y) dy \right] v(x) dx = \int_G \left[\int_G G(y; x) u(x) dx \right] v(y) dy \\ &= \int_G u(x) \left[\int_G G(x; y) v(y) dy \right] dx = (u, Tv) . \end{aligned}$$

Daaruit volgt met Kreyszig, p. 201, dat de operator T zelf-geadjungeerd of hermitisch is; zie eventueel ook Helmberg [6], p. 99.

Het bewijs van stelling V (pp. 106-107) is als volgt te wijzigen:

Bewijs. Overeenkomstig stelling II is het eigenwaardeprobleem (11.18) equivalent met het eigenwaardeprobleem

$$(11.22) \quad Tu = \mu u , \quad \mu = 1/\lambda , \quad u \in L_2(G) , \quad u \neq 0 .$$

Hierin is de operator T hermitisch, kompakt en positief defniet.

Uit T hermitisch volgt op grond van Kreyszig, p. 461, theorem 9.1-1:

- (i) Alle eigenwaarden van T (indien aanwezig) zijn reëel; vergelijk met stelling Ia.
- (ii) Eigenfuncties behorend bij verschillende eigenwaarden zijn orthogonaal; vergelijk met stelling Ib.

Uit T kompakt volgt op grond van Kreyszig, pp. 421-423, theorems 8.3-1, 8.3-3:

- (i) De verzameling van eigenwaarden van T is hoogstens aftelbaar (eventueel eindig of leeg), met $\mu = 0$ als enig mogelijk verdichtingspunt. Voor elke $k > 0$ zijn er eindig veel eigenwaarden μ met $|\mu| \geq k$.
- (ii) Voor elke eigenwaarde $\mu \neq 0$ is de nulruimte $N(T_\mu) = N(T - \mu I)$ eindig dimensionaal, i.e. bij elke eigenwaarde $\mu \neq 0$ behoren eindig veel, zeg r , lineair onafhankelijke eigenfuncties. De eigenwaarde μ wordt dan r keer geteld, en in $N(T_\mu)$ voeren we in een orthonormale basis van r eigenfuncties $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}$.

Door combinatie van de voorgaande resultaten vinden we:

de operator T bezit hoogstens aftelbaar veel reële eigenwaarden $\mu_j \neq 0$ te rangschikken volgens

$$(11.23) \quad |\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_j| \geq \dots;$$

de bijbehorende eigenfuncties $u_j(x) \in L_2(G)$ vormen een orthonormaal stelsel, d.w.z. $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$; tenzij dit orthonormale stelsel eindig is, geldt $\mu_j \rightarrow 0$ voor $j \rightarrow \infty$.

De eigenfuncties $u_j(x)$ vormen voorts een totaal orthonormaalstelsel (voor de definitie, zie Kreyszig, p. 168) in $T(L_2(G))$; voor het bewijs wordt verwezen naar Helmsberg [6], pp. 200-202.

De operator T is positief definit met de volgende consequenties:

- (i) Alle eigenwaarden μ_j zijn positief. Immers $(Tu_j, u_j) = \mu_j(u_j, u_j) > 0$, zodat $\mu_j > 0$.
- (ii) $\mu = 0$ is geen eigenwaarde van T . Immers voor de bijbehorende eigenfunctie v zou gelden $(Tv, v) > 0$ en $(Tv, v) = 0 \cdot (v, v) = 0$.
- (iii) $T(L_2(G)) = L_2(G)$. Immers stel dat $T(L_2(G)) \subsetneq L_2(G)$ en $T(L_2(G))$ niet dicht in $L_2(G)$, dan bestaat er een functie $u \in L_2(G)$ met $u \neq 0$, en $u \perp T(L_2(G))$. Daaruit volgt $(Tu, u) = (u, Tu) = 0$, terwijl anderzijds $(Tu, u) > 0$ is wegens T positief definit.

Met (iii) volgt dat de functies $u_j(x)$ een totaal orthonormaalstelsel vormen in $L_2(G)$. Omdat $L_2(G)$ oneindig-dimensionaal is, zal het orthonormaalstelsel der functies $u_j(x)$ aftelbaar zijn. T bezit daarom aftelbaar veel positieve eigenwaarden μ_j met

$$(11.24) \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_j \geq \dots > 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = 0.$$

Met behulp van stelling II zijn nu de voorgaande resultaten te vertalen naar het equivalente eigenwaardeprobleem (11.18). Na invoering van $\lambda_j = 1/\mu_j$ volgt dat het probleem (11.18) aftelbaar veel positieve eigenwaarden bezit, te rangschikken volgens (11.19). Voor de bijbehorende eigenfuncties $u_j(x)$ zal gelden $u_j(x) \in C^0(\bar{G}), C^2(G)$. Voor $\lambda = \lambda_j$ is de functie $u_j(x)$ oplossing van (11.18).

Toevoegen aan de opgave op p. 107:

Zie Kreyszig, p. 467, theorem 9.2-3.

Tekst onderaan p. 107 wijzigen:

Voor de koëfficiënten (u, u_j) van de reeks (11.21) geldt de *gelijkheid van Parseval* (zie Kreyszig, p. 170),

$$(11.26) \quad \sum_{j=1}^{\infty} (u, u_j)^2 = \|u\|^2 = \int_G u^2(x) dx .$$

II. PDV's van eerste orde

2.1. Bepaal de oplossing $u = u(x, y)$ van de PDV $yu_x + xu_y = u$, waarvan het integraaloppervlak gaat door de rechte $y = 0$, $u = 1$.

Bepaal het definitiegebied van de (reële) oplossing.

Bepaal het definitiegebied ook met behulp van grondkarakteristieken.

III. PDV's van tweede orde in twee onafhankelijke variabelen

3.1. Op p. 14, 15: Verifieer de formules (1.7) en (1.8).

Laat zien dat (1.8) als volgt in een matrix notatie te schrijven is,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{bmatrix}.$$

Verifieer nogmaals (1.9), met gebruik van dit laatste resultaat.

3.2. Gegeven is de kwadratische vorm $Q(s, t) = as^2 + 2bst + ct^2$.

De vergelijking $Q(s, t) = C = \text{konstant}$ beschrijft een kwadratische kromme (= kegelsnede) in het (s, t) -vlak. Bepaal het type van deze kromme (ellips, hyperbool of parabool) afhankelijk van de coëfficiënten a, b, c .

3.3. Op p. 16 bovenaan: Hoe verloopt de herleiding tot de normaalvorm indien $a(x, y) \equiv 0$?

3.4. Op p. 18: Verifieer (1.30).

Bepaal de karakteristieken van de één-dimensionale golfvergelijking $u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$. Herleid de golfvergelijking tot de normaalvorm en bepaal de algemene oplossing van de golfvergelijking.

3.5. Op p. 19: Werk voorbeeld 3 uit. Bepaal en *teken* de karakteristieken in het gebied $y < 0$. Herleid de Tricomi vergelijking tot haar normaalvorm, zowel in het gebied $y < 0$ als in het gebied $y > 0$.

3.6. Op p. 20, 21: Wat is de meetkundige betekenis van de strookrelatie (2.4)?

Verifieer dat de voorwaarden (2.5) equivalent zijn met de beginvoorwaarden (2.2) en

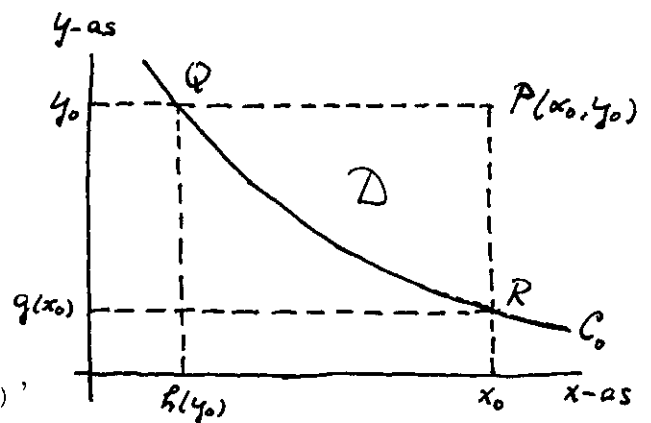
de strookrelatie (2.4).

- 3.7. Op p. 21, 22: Bereken de coëfficiëntendeterminant van het stelsel (2.8).
Leid af een stelsel van vijf lineaire vergelijkingen voor de partiële afgeleiden van u van vierde orde op C_0 .
- 3.8. Op p. 25: Verifieer dat de voorwaarde (2.22) equivalent is met de eerdere voorwaarde (2.13).

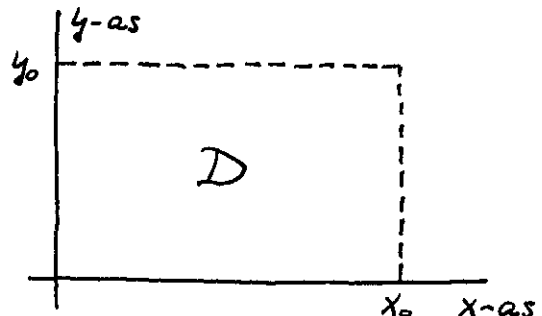
- 3.9. Op p. 26 dient de hiernaast getekende figuur te worden toegevoegd.
In (3.5) en (3.6) is het verleidelijk te schrijven:

$$\int_{h(y_0)}^{x_0} u_x(x, g(x)) dx = u(x, g(x)) \Big|_{h(y_0)}^{x_0},$$

$$\int_{g(x_0)}^{y_0} u_y(h(y), y) dy = u(h(y), y) \Big|_{g(x_0)}^{y_0}; \text{ waarom is dit fout?}$$



- 3.10. Op p. 28, 29: Bepaal, uitgaande van het karakteristiek beginwaardeprobleem (3.14), de partiële afgeleiden $u_x(x, 0)$, $u_y(x, 0)$ voor $x \geq 0$, en $u_x(0, y)$, $u_y(0, y)$ voor $y \geq 0$.
Op p. 29 dient de hiernaast getekende figuur te worden toegevoegd.

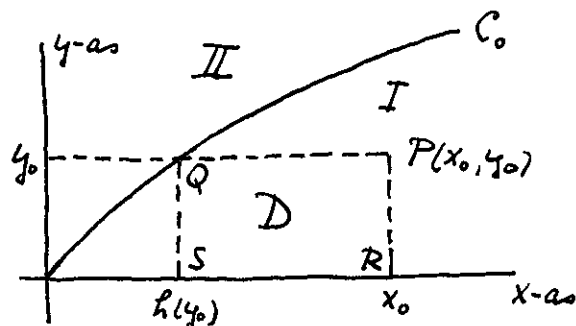


3.11. Werk de opgave op p. 29 uit. De Bessel functie J_0 wordt gedefinieerd door

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

3.12. Op p. 30 dient de hiernaast getekende figuur te worden toegevoegd.

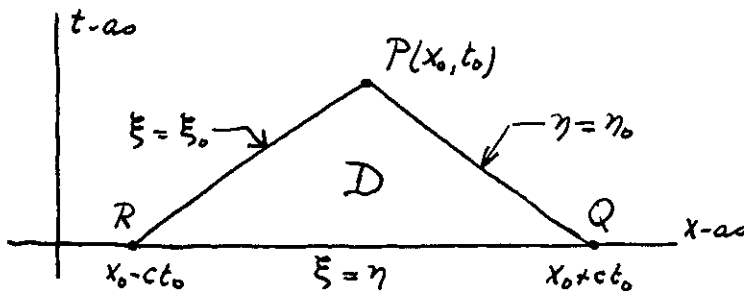
Op p. 31: Leid af de oplossing (3.22) van het Goursat probleem in het gebied II; teken zelf een bijpassende figuur.



3.13. Op p. 32 dient de hiernaast getekende figuur te worden toegevoegd.

De punten P, Q, R hebben karakteristieke coördinaten $P(\xi_0, \eta_0), Q(\eta_0, \eta_0), R(\xi_0, \xi_0)$.

De zijden van de driehoek PQR worden in karakteristieke coördinaten beschreven door de vergelijkingen $\xi = \xi_0$ voor PR ; $\eta = \eta_0$ voor PQ ; $\xi = \eta$ voor QR .



3.14. Op p. 35: Bepaal de karakteristieke coördinaten van de punten P, Q, R, S in fig. 1. Beschrijf de diverse rechten in fig. 1 door vergelijkingen in karakteristieke coördinaten. Deze resultaten zijn van nut in (4.18).

3.15. Op p. 36: Werk de opgaven 1 en 2 uit.

3.16. Na de opmerking op p. 37: Bepaal de oplossing $u(x, t)$ van het volgende gemengde

probleem voor de golfvergelijking op het interval $x > 0$,

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x, t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u_x(0, t) = h(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Vergeleken met het probleem (4.14) op p. 34 is de randvoorwaarde $u(0, t) = g(t)$ hier vervangen door $u_x(0, t) = h(t)$.

IV. PDV's van tweede orde in n onafhankelijke variabelen, $n > 2$

- 4.1. Op p. 40 is te lezen "Zonder verlies aan algemeenheid kunnen we stellen $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$." Waarom is dit zo?
 Verifieer de formules (1.4) en (1.5).

- 4.2. Tekst op p. 41 na (1.7) als volgt wijzigen:
 "De betrekking (1.7) is in matrix notatie kort te schrijven als

$$[\alpha_{kl}] = S^T A S = S^{-1} A S ,$$

waarin $[\alpha_{kl}]$ de matrix is gevormd door de coëfficiënten α_{kl} .

De matrix S wordt nu als volgt gekozen. Bedenk dat de matrix A symmetrisch en dus diagonaliseerbaar is. Er bestaat dan een orthogonale matrix S , zo dat $S^{-1} A S$ een diagonaalmatrix is,

$$S^{-1} A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Hierin zijn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de (reële) eigenwaarden van de matrix A . Met de aldus gekozen matrix S is

$$\alpha_{kk} = \lambda_k , \quad \alpha_{kl} = 0 \quad \text{voor } k \neq l ,$$

en gaat de PDV (1.1) in het punt x_0 over in " (verder op p. 42).

- 4.3. Verifieer dat de classificatie op p. 42 in het geval $n = 2$ tot hetzelfde resultaat voert als de classificatie op p. 15.

- 4.4. Op p. 46 onder (3.1): "Indien de functie $\varphi(x)$ identiek voldoet aan (3.1), beschouwd als PDV, dan is elk oppervlak $\varphi(x) = \text{konst.}$ karakteristiek oppervlak."

Verifieer dit.

- 4.5. Op p. 47 onderaan: Probeer met de standaard techniek voor het bepalen van de omhullende af te leiden dat de kegel K_0 gegeven wordt door de vergelijking (3.7).

- 4.6. Op p. 48: Laat het oppervlak $C_0: \varphi(x, y, z, t) = 0$ karakteristiek oppervlak zijn van de golfvergelijking in R_3 ,

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 .$$

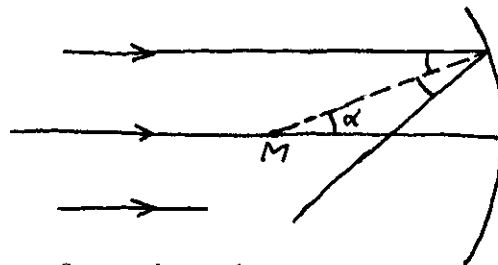
Aan welke conditie moet de functie $\varphi(x, y, z, t)$ voldoen?

Geef voorbeelden van karakteristieke oppervlakken van de golfvergelijking.

- 4.7. Bepaal de omhullende van de familie van krommen beschreven door de vergelijking

a) $y = 2Cx - C^2$, b) $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

- 4.8. Een evenwijdige lichtbundel valt in op een holle cilindrische spiegel en wordt daar gereflecteerd; zie de figuur hiernaast.



Geef een parametervoorstelling voor de gereflecteerde stralen.

Bepaal de omhullende van de gereflecteerde stralen. Deze omhullende is de zgn. brandlijn of kaustiek van de holle spiegel; geef een schets van de brandlijn.

VI. Distributies, zwakke oplossingen van PDV's

- 6.1. Op p. 56: Verifieer dat de klasse K van testfuncties een lineaire ruimte is. Zij $\varphi(x) \in K$ en $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_1)$; laat zien dat $a(x)\varphi(x) \in K$ en $\varphi^{(n)}(x) \in K$ voor $n \in \mathbb{N}$.
- 6.2. Op p. 56, 57: Verifieer dat (f, φ) en (δ, φ) uit de voorbeelden 1 en 2 inderdaad distributies zijn. Laat zien dat (δ, φ) geen reguliere distributie is door een berekening van $\lim_{a \downarrow 0} (\delta, \varphi_a)$ op twee manieren; hierbij is $\varphi_a(x) = \exp\left(\frac{a^2}{x^2 - a^2}\right)$ voor $|x| < a$, en $\varphi_a(x) = 0$ voor $|x| \geq a$, met $a > 0$.
- 6.3. Op p. 58: Verifieer dat af en f' , als gedefinieerd door (1.8) en (1.11), distributies zijn. Toon aan dat $a(x) \delta(x - x_0) = a(x_0) \delta(x - x_0)$; $a(x) \delta'(x) = a(0) \delta'(x) - a'(0) \delta(x)$, voor $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_1)$.
- 6.4. Op p. 60: Laat zien dat een reeks van distributies $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ convergent is in K' met som s , als de (getallen)reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n, \varphi)$ convergent is met $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n, \varphi) = (s, \varphi)$ voor elke $\varphi \in K$. Dit resultaat wordt gebruikt in de bovenste vier regels van p. 61.
- 6.5. Op p. 60, 61: Het resultaat van voorbeeld 1 betekent in klassieke zin dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(nx) \varphi(x) dx = 0 \quad \text{voor elke } \varphi \in K.$$

Is dit laatste resultaat nieuw? Evenzo, is het uitgewerkte resultaat in de vierde regel van p. 61, nieuw?

- 6.6. Op p. 63: Werk de opgaven 1 en 2 uit.

- 6.7. Op p. 63: Geef voorbeelden van testfuncties $\varphi(x) \in K_n$.
- 6.8. Op p. 64, 65: Werk het voorbeeld onderaan p. 64 verder uit, i.e. verifieer dat $\lim_{t \downarrow 0} f_t(x) = \delta(x)$ in distributiezin.
- 6.9. Op p. 65: Wat is het moeilijke punt in de definitie (2.3) van direct product? Toon aan dat voor de δ -functie in R_2 (genoteerd als $\delta(x_1, x_2)$) geldt $\delta(x_1, x_2) = \delta(x_1) \delta(x_2)$.
- 6.10. Op p. 65, 66: Geef de afleiding van form. (2.8). Onder welke voorwaarden voor de coëfficiënten a_{ij} , b_i , c is de operator L zelf-geadjungeerd? Verifieer de formules (2.10) en (2.11).
- 6.11. Op p. 67: Voor de duidelijkheid zij opgemerkt dat de betrekking (3.3) als de definitie van gegeneraliseerde of zwakke oplossing beschouwd moet worden. Dus "de distributie $u(x)$ heet gegeneraliseerde of zwakke oplossing van de PDV (3.1) indien $(u, L^*[\varphi]) = (f, \varphi)$ voor elke $\varphi \in K_n$ ". Verzoek dit erbij te schrijven.
- 6.12. Bij de opmerking op p. 68: De één-dimensionale golfvergelijking $u_{xx} - u_{tt} = 0$ heeft o.m. de oplossing $u(x, t) = f(x - t)$, waarin f een willekeurige functie is. Deze oplossing is sterke oplossing indien $f \in C^2$. Een zwakke oplossing is bijv. $u(x, t) = H(t - x)$, waarin H de eenheidsfunctie van Heaviside is; verifieer dit laatste resultaat. Merk op dat eventuele discontinuïteiten van zwakke oplossingen optreden langs karakteristieken $x \pm t = \text{konstant}$.

6.13. Op p. 69: Verifieer de formule (3.11).

De fundamentele oplossing $S(x; y)$ is te interpreteren als de “responsie” in x veroorzaakt door de “eenheidsbron” in y . Het resultaat in (3.11) is dan te begrijpen door te bedenken dat de operator L (met konstante coëfficiënten) invariant is voor translaties.

VII. Elliptische PDV's: Laplace vergelijking en Helmholtz vergelijking

7.1. Op p. 73 dient de opgave als volgt te worden gewijzigd en aangevuld:

Zij de functie $u(x) \in C^0(\bar{G})$ in G oplossing van de Helmholtz vergelijking $\Delta u + \lambda u = 0$ met $\lambda < 0$. Bewijs dat $u(x)$ niet een positief maximum en niet een negatief minimum kan aannemen in het inwendige van G .

Voer in de notaties $M = \max_{x \in \Gamma} u(x)$ en $m = \min_{x \in \Gamma} u(x)$, waarin Γ de rand van G is.

Leid uit het voorgaande resultaat het volgende maximum-minimum principe af: Zij $M > 0$ en $m < 0$, dan geldt $m < u(x) < M$ voor $x \in G$. Wat valt er van de functie $u(x)$ te zeggen indien $M \leq 0$ of $m \geq 0$?

Combineer de resultaten in een eenvoudige ongelijkheid voor $u(x)$, $x \in G$. Gebruik deze ongelijkheid voor de oplossing van de opgave op p. 74.

7.2. Op p. 75: Laat zien dat de functie $u(x) = \frac{1}{|x|}$ harmonisch is in $R_3 \setminus \{0\}$ en regulier is in het punt ∞ . Geef een analoog voorbeeld van een functie harmonisch in $R_n \setminus \{0\}$ en regulier in ∞ .

7.3. Op p. 76: Check de berekening van de afgeleide u_{x_i} (midden p. 76). Formuleer het resultaat, in termen van een vector-notatie, voor ∇u .

7.4. Op p. 76: Onderzoek stelling II in het geval $n = 2$ – welk resultaat uit de functietheorie komt hiermee overeen? Bedenk dat er een eenvoudig verband bestaat tussen harmonische functies in R_2 en analytische functies uit de functietheorie – welk verband?

Combineer stelling II met stelling I en stel vast dat er een aanzienlijke verscherping van het gedrag op ∞ verkregen wordt.

- 7.5. Op p. 78: Beschouw het uitwendig Dirichlet probleem in R_3 ,

$$\Delta u = 0, |x| > 1; \quad u(x) = 1, |x| = 1.$$

Laat zien dat de eis van regulariteit in ∞ essentieel is voor de eenduidigheid van de oplossing van het probleem.

- 7.6. Op p. 78: Verifieer de formules (4.3) en (4.4).

- 7.7. Op p. 80 bovenaan: Waarom is $S(x)$ een reguliere distributie? Onderzoek algemene convergentie van de integraal $\int_G |x|^\alpha dx$ voor een begrensde gebied $G \subset \mathbb{R}_n$.

- 7.8. Op p. 80, 81: Werk de opgave uit in het geval $n = 3$.

- 7.9. Op p. 81: In de Poisson vergelijking $\Delta u = -f(x)$, $x \in G$, is het rechterlid $f(x)$ te interpreteren als de dichtheid van een ruimtelading in $G \subset R_3$. Geef een "fysische" afleiding van de oplossing (4.20) voor de potentiaal $u(x)$.

- 7.10. Op p. 82: Werk de opgaven 1 en 2 uit, de opgave 2 alleen in het geval $n = 3$.

- 7.11. Op p. 83: Bewijs ook de volgende versie van de middelwaarde-eigenschap: Zij de functie $u(x)$ harmonisch in $G \subset R_n$. Laat $G_R = \{x \mid |x - y| < R\}$ een bolgebied zijn met middelpunt y en straal R dat geheel binnen G ligt. Dan geldt

$$u(y) = \frac{1}{\tau_n R^n} \int_{G_R} u(x) dx,$$

i.e. $u(y)$ is gelijk aan de gemiddelde waarde van $u(x)$ over G_R .

- 7.12. Op p. 83: Laat de functie $u(x)$ in $G \subset R_3$ voldoen aan de Helmholtz vergelijking $\Delta u + k^2 u = 0$. Zij B een boloppervlak met middelpunt y en straal R , dat met zijn inwendige geheel in G ligt. Dan geldt de middelwaarde-eigenschap

$$\frac{\sin(kR)}{kR} u(y) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_B u(x) d\sigma .$$

- 7.13. Op p. 85: In definitie II is eigenschap (iii) $\int_{\Gamma} N(x; y) d\sigma_x = 0$ als facultatief te beschouwen, enkel nodig opdat de functie van Neumann $N(x; y)$ eenduidig vastligt. In de literatuur en ook verderop in deze syllabus wordt de eigenschap (iii) vaak weggelaten, met het gevolg dat de functie van Neumann dan eenduidig is op een konstante na.

- 7.14. Op p. 86: Bewijs dat de functie van Neumann symmetrisch is in de argumenten x en y , i.e. $N(x; y) = N(y; x)$.

- 7.15. Op p. 86 ouderaan: Werk de opgave uit.

- 7.16. Op p. 87: Leid de representaties (6.9) en (6.10) af uit de tweede identiteit van Green.

- 7.17. Op p. 87: Laat G een begrensd gebied in R_n zijn met rand Γ . Deze rand bestaat uit twee gedeelten, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, met $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Beschouw het volgende randwaardeprobleem:

$$\Delta u = 0, x \in G ; \quad u(x) = g(x), x \in \Gamma_1 ; \quad u_\nu(x) = h(x), x \in \Gamma_2 ,$$

dat is op te vatten als een gemengd Dirichlet-Neumann probleem.

Toon aan dat de oplossing van het randwaardeprobleem eenduidig is. Introduceer een bij het probleem passende functie van Green en geef een representatie voor de oplossing $u(x)$, uitgedrukt in deze Greense functie.

- 7.18. Op p. 89: Werk de afgeleide $G_\nu(x; y)$ in (7.5) uit.
Toon aan dat voor de oplossing (7.6) geldt $\lim_{y_3 \downarrow 0} u(y_1, y_2, y_3) = g(y_1, y_2)$; neem hierbij aan dat de functie $g(x)$ continu en begrensd is op Γ .
- 7.19. Op p. 90: Bepaal de functie van Green voor het kwartvlak $G = \{x \in R_2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Welke generalisering is mogelijk, m.a.w. voor welke andere gebieden in R_2 is de functie van Green expliciet te bepalen?
- 7.20. Op p. 92: Verifieer (8.10).
Controleer (8.12) door een rechtstreekse berekening van de integraal.
- 7.21. Op p. 93, 94: Werk de opgave (onderaan p. 93, bovenaan p. 94) uit.
- 7.22. Op p. 94: Laat G het half-cirkelvormige gebied in R_2 zijn gegeven door $G = \{x \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_2 > 0\}$. De rand van G bestaat uit de twee gedeelten $\Gamma_1 = \{x \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_2 \geq 0\}$ en $\Gamma_2 = \{x \in R_2 \mid -R < x_1 < R, x_2 = 0\}$.
Beschouw het volgende randwaardeprobleem:
- $$\Delta u = 0, x \in G; \quad u(x) = g(x), x \in \Gamma_1; \quad u_\nu(x) = h(x), x \in \Gamma_2.$$
- Bepaal de bij dit probleem passende functie van Green; zie ook opgave 7.17.
- 7.23. Op p. 94: Werk de opgave uit.
- 7.24. Op p. 95, derde regel: Voer de berekening van $G_\nu(x; y)$, $x \in B$, uit.
Aanwijzing:

$$G_\nu(x; y) \Big|_{x \in B} = \sum_{i=1}^n G_{x_i}(x; y) \frac{x_i}{R} \Big|_{x \in B}.$$

7.25. Op p. 97: Gebruik het spiegelsprincipe van Schwarz en de stelling van Liouville om aan te tonen dat de oplossing van het Dirichlet probleem (7.3) (zie p. 89) voor de Laplace vergelijking in een halfruimte eenduidig is. Toon evenzo aan dat de oplossing van het Neumann probleem (7.4) eenduidig is op een konstante na.

7.26. Op p. 99: Laat G het vierkante gebied in \mathbb{R}_2 zijn gegeven door $G = \{x \in \mathbb{R}_2 \mid 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi\}$; de rand van G heet Γ . Bepaal de oplossing van het Dirichlet probleem

$$\Delta u + 2u = 0, x \in G; \quad u(x) = 0, x \in \Gamma,$$

en stel vast dat deze oplossing niet eenduidig is.

7.27. Op p. 100: Verifieer het wèl resp. nièt voldoen aan de uitstralingsvoorwaarde van de oplossingen (10.9). De functies $u_1(x, t)$ en $u_2(x, t)$ uit (10.10) beschrijven een naar buiten resp. naar binnen lopende sferische golf – waarom?

7.28. Op p. 100: Werk de opgave uit in het geval $n = 3$ (integraalformule van Helmholtz).

7.29. Bij §7.11: Op p. 99 is gesteld dat de oplossing van het inwendig Dirichlet probleem voor de Helmholtz vergelijking,

$$\Delta u + \lambda u = 0, x \in G; \quad u(x) = g(x), x \in \Gamma,$$

in het algemeen niet eenduidig is, indien $\lambda > 0$ is. Nuanceer deze uitspraak en onderzoek of de oplossing nooit eenduidig is, dan wel niet eenduidig is in bepaalde aan te geven gevallen.

- 7.30. Op p. 107 bij opmerkingen 1 en 2: Bepaal de eigenwaarden en eigenfuncties van de Laplace operator in het gebied $G = \{x \in R_2 \mid 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi\}$. Geef een voorbeeld van een eigenwaarde met multipliciteit 4.
- Bepaal evenzo de eigenwaarden en eigenfuncties van de Laplace operator in het gebied $G = \{x \in R_3 \mid 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$.
- 7.31. Op p. 107 na stelling V: Voer in de klasse K van functies $u(x) \in C^1(\bar{G})$ met $u(x) = 0$ voor $x \in \Gamma$. Toon aan dat voor de kleinste eigenwaarde λ_1 geldt $\lambda_1 = \min_{u \in K, u \neq 0} Q(u)$, waarin $Q(u) = \int_G |\nabla u|^2 dx / \int_G |u|^2 dx$ (Rayleigh quotient).
- Formuleer een analoog minimum-principe voor de eigenwaarden $\lambda_2, \lambda_3, \dots$.
- 7.32. Op p. 108, tweede regel: Verifieer dat $G(x; y) \in L_2(G)$ voor vaste $x \in \bar{G} \subset R_3$. Bepaal een mogelijke waarde voor de konstante A in (11.29), eveneens voor het geval $G \subset R_3$.

VIII. Hyperbolische PDV's: golfvergelijking

8.1. Op pp. 110–112: Verifieer de formules (1.5) en (1.10).

Geef een alternatieve afleiding van de oplossing van het Cauchy probleem, te beginnen na (1.10). Voer in de functie $v(r, t) = r\bar{u}(r, t; x_0)$, dan is $v(r, t)$ oplossing van het volgende probleem voor de één-dimensionale golfvergelijking:

$$\begin{cases} v_{rr} - \frac{1}{c^2} v_{tt} = 0, & r > 0, t > 0; \\ v(r, 0) = r\bar{\varphi}(r), v_t(r, 0) = r\bar{\psi}(r), & r \geq 0; \\ v(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Hierin is

$$\bar{\varphi}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \varphi(x_0 + r\nu) d\Omega, \quad \bar{\psi}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \psi(x_0 + r\nu) d\Omega.$$

Los het probleem voor $v(r, t)$ op met gebruik van de theorie van pp. 34–36. Leid hieruit af de oplossing van het Cauchy probleem

$$u(x_0, t) = \bar{u}(0, t; x_0) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{v(r, t)}{r}$$

en stel vast dat deze overeenstemt met (1.16) op p. 112.

8.2. Op p. 114: Werk (2.4) uit.

8.3. Op p. 115: De niet-geldigheid van het principe van Huygens voor de golfvergelijking in R_2 manifesteert zich als volgt. Een verstoring $u(x, t)$ die op het tijdstip $t = 0$ gelokaliseerd is in een begrensde gebied $D \subset R_2$, blijft in principe oneindig lang nawerken in elk punt x_0 buiten D .

Verklaar dit enigszins paradoxale resultaat door het Cauchy probleem in R_2 te vergelijken met het (volgens de “method of descent”) overeenkomstige Cauchy probleem in R_3 .

- 8.4. Op p. 115: Werk opgave 1 uit door rechtstreekse “afdaling” van R_3 naar R_1 .
- 8.5. Op p. 116: Werk opgave 2 uit.
- 8.6. Op p. 116: Merk op dat het Cauchy probleem voor de inhomogene golfvergelijking in R_n met inhomogene beginvoorwaarden, te splitsen is in een Cauchy probleem voor de homogene golfvergelijking met inhomogene beginvoorwaarden (als behandeld in §§8.1, 8.2 voor $n = 3$, $n = 2$), en een Cauchy probleem voor de inhomogene golfvergelijking met homogene beginvoorwaarden; werk dit uit.
Dit verklaart waarom in het Cauchy probleem (3.2) de beginvoorwaarden homogeen genomen mogen worden.
- 8.7. Op pp. 116–117: Het bewijs van het principe van Duhamel volgt door verificatie; niet duidelijk is waar de Duhamel integraal vandaan komt. Meer inzicht biedt de volgende heuristische afleiding. Schrijf de bronterm $f(x, t)$ als een superpositie van δ -functies,

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} f(x, \tau) \delta(t - \tau) d\tau .$$

Beschouw het volgende probleem voor de functie $w(x, t)$:

$$\begin{cases} \Delta w - \frac{1}{c^2} w_{tt} = -f(x, \tau) \delta(t - \tau) , & x \in R_n, t > 0 , \\ w(x, 0) = 0 , & w_t(x, 0) = 0 , \end{cases}$$

met bronterm $f(x, \tau) \delta(t - \tau)$. Laat zien dat $w(x, t) = v(x, t; \tau) H(t - \tau)$, waarin $H(\cdot)$ de eenheidsfunctie van Heaviside is. Superponeer de oplossingen $w(x, t)$, dan volgt de

Duhamel integraal (3.3).

Werk deze schets van de afleiding verder uit.

- 8.8. Op p. 118: Verifieer de formule (3.11).
- 8.9. Op p. 119 bovenaan: Werk de opgave uit.
- 8.10. Op p. 120: Verklaar het toch wat paradoxale resultaat onderaan p. 120 door het stralingsprobleem in R_2 te vergelijken met het (volgens de “method of descent”) overeenkomstige probleem in R_3 .
- 8.11. Op p. 121: Werk de opgaven 1 en 2 uit.
Bepaal de causale fundamentele oplossing $C_3(x, t)$ rechtstreeks met behulp van Laplace transformatie naar de tijd t .
- 8.12. Op p. 122: Werk de opgaven 1 en 2 uit.
- 8.13. Bij §8.5: Maak een figuur bij het bewijs van de stellingen I en II.
Werk de opgave op p. 126 uit.

IX. Parabolische PDV's: diffusievergelijking

- 9.1. Op p. 127: Merk op dat het algemene Cauchy probleem (1.2) te splitsen is in het Cauchy probleem (1.12) voor de homogene diffusievergelijking met inhomogene beginvoorwaarde, en het Cauchy probleem (1.24) voor de inhomogene diffusievergelijking met homogene beginvoorwaarde.

Waarom wordt in het probleem (1.2) alleen de beginwaarde $u(x, 0) = \varphi(x)$ voorgeschreven, en niet tevens $u_t(x, 0)$?

- 9.2. Op pp. 127, 128: Het bewijs van de stelling volgt door verificatie en biedt aldus weinig inzicht in de herkomst van het resultaat.

Geef een eenvoudige heuristische afleiding van de stelling.

Aanwijzing: Integreer de inhomogene diffusievergelijking (1.3) naar t van $t = -\varepsilon$ naar $t = +\varepsilon$, en neem de limiet voor $\varepsilon \downarrow 0$.

- 9.3. Op pp. 128, 129: Verifieer dat $C(x, t)$ uit (1.7) oplossing is van het probleem (1.6). Check de ongelijkheid (1.15).

- 9.4. Op p. 132: Werk de opgaven 1 en 2 uit. Probeer bij opgave 2 de algemene $g(t)$ voor te stellen door een superpositie van eenheidsfuncties $H(t - \tau)$ (van Heaviside). De oplossing $u(x, t)$ wordt vervolgens verkregen door analoge superpositie van oplossingen met randwaarde $H(t - \tau)$.

- 9.5. Op p. 134: De functie $V(x, t)$ is oplossing van het volgende gemengde probleem,

$$\begin{cases} V_{xx} = a^2(x)V_t, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ V(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = g(t), & t \geq 0; \end{cases}$$

hierin zijn $a^2(x)$ en $g(t)$ gegeven functies met $a^2(x) > 0$, $g(t) \geq 0$.
Toon aan dat $V(x, t) \geq 0$ is voor $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$.

9.6. Op p. 135: Werk het bewijs van stelling I uit.

9.7. Op p. 137: Werk de opgave uit.

VERIFICATION METHOD OF CHARACTERISTICS

If $\begin{cases} x = X(s,t) \\ y = Y(s,t) \\ u = U(s,t) \end{cases}$ satisfies $\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x,y,u) \\ \frac{dy}{ds} = b(x,y,u) \\ \frac{du}{ds} = c(x,y,u) \end{cases}$

AND

if $\begin{cases} s = S(x,y) \\ t = T(x,y) \end{cases}$ satisfies $\begin{cases} x = X(S(x,y), T(x,y)) \\ y = Y(S(x,y), T(x,y)) \end{cases}$

THEN

$u(x,y) = U(S(x,y), T(x,y))$

satisfies $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$

INDEED

Implicit differentiation leads to

$$\begin{array}{l|l} 1 = X_s S_x + X_t T_x & 0 = X_s S_y + X_t T_y \\ 0 = Y_s S_x + Y_t T_x & 1 = Y_s S_y + Y_t T_y \end{array}$$

$X_s(s,t) = a(X(s,t), Y(s,t), U(s,t))$, etc

$S_x = \frac{Y_t}{a Y_t - b X_t}$, $T_x = \frac{-b}{N}$, $S_y = \frac{-X_t}{N}$, $T_y = \frac{a}{N}$

with $S_x(X(s,t), Y(s,t))$, etc

At $x = X(s,t)$, $y = Y(s,t)$ we have

$$\begin{aligned} a u_x + b u_y &= a u_s S_x + a u_t T_x + b u_s S_y + b u_t T_y \\ &= c \underbrace{(a S_x + b S_y)}_{=1} + u_t \underbrace{(a T_x + b T_y)}_{=0} \end{aligned}$$

GENERAL NON-LINEAR 1st order PDE II 6

$$H(\underline{x}, u, \nabla u) = 0$$

$H: 2n+1$ variables

Problem Find solution $\underline{x} \mapsto u(\underline{x})$ such that its graph passes through $(n-1)$ dim surface S'

$$S: \mathbb{R}^{n-1} \supset D \ni \underline{\xi} \mapsto \begin{cases} \underline{X}(\underline{\xi}) \\ \underline{U}(\underline{\xi}) \end{cases} \text{ in } \underline{x}-u \text{-space}$$

In short $u(\underline{X}(\underline{\xi})) = \underline{U}(\underline{\xi})$

For this problem to be solvable it is necessary:

$$(*) \quad \forall \underline{\xi} \in D \exists \underline{P}(\underline{\xi}) : \begin{cases} H(\underline{X}(\underline{\xi}), \underline{U}(\underline{\xi}), \underline{P}(\underline{\xi})) = 0 \\ \partial_{\underline{\xi}_i} \underline{U} = \underline{P}^T \partial_{\underline{\xi}_i} \underline{X} \end{cases} \quad \boxed{u_{\underline{\xi}_i} = u_{\underline{x}_i} \frac{\underline{x}_i}{\underline{\xi}_i}}$$

Solve the system of ODE with initial conditions

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{ds} = \lambda(\underline{x}, u, \underline{p}) \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \\ \frac{d\underline{p}}{ds} = -\lambda(\underline{x}, u, \underline{p}) \left\{ \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} + \underline{p} \frac{\partial H}{\partial u} \right\} \\ \frac{du}{ds} = \lambda(\underline{x}, u, \underline{p}) \underline{p} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \underline{x}(\underline{\xi}, 0) = \underline{X}(\underline{\xi}) \\ \underline{p}(\underline{\xi}, 0) = \underline{P}(\underline{\xi}) \\ u(\underline{\xi}, 0) = \underline{U}(\underline{\xi}) \end{array} \right.$$

where $\underline{X}, \underline{P}, \underline{U}$ satisfy $(*)$ and

$$\det \begin{bmatrix} \partial_{\underline{\xi}_1} \underline{X} & \partial_{\underline{\xi}_2} \underline{X} & \dots & \partial_{\underline{\xi}_{n-1}} \underline{X} & \partial_{\underline{p}_1} H \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \partial_{\underline{p}_n} H \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{at } S'$$

$$\hookrightarrow \underline{x} = \underline{X}(\underline{\xi}, s) \quad \underline{p} = \underline{P}(\underline{\xi}, s) \quad u = \underline{U}(\underline{\xi}, s)$$

GENERAL NON-LINEAR 1st order PDE II.7

Lemma $H(\underline{x}(\underline{\xi}, s), u(\underline{\xi}, s), \underline{p}(\underline{\xi}, s)) = 0$

Proof: Calculate $\frac{d}{ds} H$

Now 'solve' $\underline{\xi} = \underline{\Xi}(x)$, $s = \underline{S}(x)$ from
 $\underline{x} = \underline{X}(\underline{\xi}, s)$

Note that $D\underline{X}(\underline{\xi}, 0) = \left| \begin{array}{c} \partial_{\xi_1} \underline{X} \\ \vdots \\ \partial_{\xi_n} \underline{X} \end{array} \right| \partial_s \underline{X}$

is invertible. At $s=0$.

Theorem After coordinate change $(\underline{\xi}, s) \mapsto \underline{x}$,
 the function $u(\underline{\Xi}(x), \underline{S}(x))$ satisfies the PDE.

Proof We show that $(\nabla_{\underline{x}} u)(\underline{\xi}, t) = \underline{p}(\underline{\xi}, t)$ and
 then apply the Lemma.

• Because of $\dot{u} = \underline{p} \cdot \dot{\underline{x}}$

$$u(\underline{\xi}, s) = \int_0^s \underline{p}(\underline{\xi}, \tau) \dot{\underline{x}}(\underline{\xi}, \tau) d\tau + u(\underline{\xi}, 0)$$

$$\partial_{\xi_i} u = \int_0^s \left\{ \partial_{\xi_i} \underline{p} \cdot \dot{\underline{x}} + \underline{p} \cdot \partial_{\xi_i} \dot{\underline{x}} \right\} d\tau + \partial_{\xi_i} u(\underline{\xi}, 0)$$

$$= \int_0^s \left\{ \lambda \partial_{\xi_i} \underline{p} \cdot \partial_{\underline{p}} H - \dot{\underline{p}} \cdot \partial_{\xi_i} \dot{\underline{x}} \right\} d\tau + \underbrace{\underline{p} \cdot \partial_{\xi_i} \dot{\underline{x}}(s) + \underline{p} \cdot \partial_{\xi_i} \dot{\underline{x}}(0) + \partial_{\xi_i} u(\underline{\xi}, 0)}_{=0} + \text{Assumption}$$

$$\partial_{\underline{x}} u = \int_0^s \lambda \left\{ \partial_{\underline{x}} \underline{p} \cdot \partial_{\underline{p}} H + \partial_{\underline{x}} H \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{x} + \partial_{\underline{u}} H \cdot \partial_{\underline{x}} u + \underline{p} \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{x} \partial_{\underline{u}} H - \partial_{\underline{u}} H \partial_{\underline{x}} u \right\} d\tau + \underline{p} \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{x}$$

$$\left\{ \underline{p} \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{x}(s) - \partial_{\underline{x}} u(s) \right\} = \int_0^s \lambda H_{\underline{u}} \left\{ \underline{p} \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{x} - \partial_{\underline{x}} u \right\} d\tau$$

$$\frac{d}{ds} \{ \dots \} = \lambda H_{\underline{u}} \{ \dots \}, \quad \{ \dots \} = 0 \text{ at } s=0$$

Conclusion $\partial_{\underline{x}} u = \underline{p} \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{x}$ "Frönwal"

- Note that $\partial_{\underline{x}} u = \partial_{\underline{x}} u \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{x}$
- From $\underline{p} \cdot \underline{\dot{x}} = \dot{u}$: $\underline{p} \cdot \partial_s \underline{x} - \partial_{\underline{x}} u \cdot \partial_s \underline{x} = 0$
- We gather

$$(\underline{p} - \partial_{\underline{x}} u) [\partial_{\underline{x}} \underline{x}; \underline{x}_s] = 0$$

[] is invertable Hence

$$\partial_{\underline{x}} u(\underline{x}(\underline{x}, s)) = \underline{p}(\underline{x}, s) \text{ for } \underline{x} \in D, s \text{ sufficied small}$$

Alternative Approach to (1) II.9

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (*)$$

Solution: 'Solve' $(x, y) \mapsto z(x, y)$ from

$$u(x, y, z(x, y)) = 0, \quad (\text{Just Check!})$$

with

$$P(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (**)$$

"Linearization"

Note: If u_1 and u_2 solve $(**)$ then also $(x, y, z) \mapsto H(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z))$ solves $(**)$ (works for any number of u_i !!)

Procedure: " $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ "

could mean the system of ODE (if $P \neq 0$)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Solution} \\ \rightsquigarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} y = \eta(x, C, D) \\ z = \xi(x, C, D) \\ C, D \text{ constants} \end{array}$$

CLAIM

If we can solve C, D from

$$y - \eta(x, C(x, y, z), D(x, y, z)) = 0 \quad (\square)$$

$$z - \xi(x, C(x, y, z), D(x, y, z)) = 0$$

Then $(x, y, z) \mapsto C(x, y, z)$ both satisfy $(**)$
 $(x, y, z) \mapsto D(x, y, z)$

Proof of the CLAIMDifferentiate $\textcircled{1}$ to x, y, z respectively

$$\begin{pmatrix} C_x \\ D_x \end{pmatrix} P = - \begin{pmatrix} \eta_c & \eta_D \\ \xi_c & \xi_D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \xi_x \end{pmatrix} P$$

$$\begin{pmatrix} C_y \\ D_y \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \eta_c & \eta_D \\ \xi_c & \xi_D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} Q$$

$$\begin{pmatrix} C_z \\ D_z \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} \eta_c & \eta_D \\ \xi_c & \xi_D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} R$$

$$P C_x + Q C_y + R C_z = 0$$

Since

$$P D_x + Q D_y + R D_z = 0$$

$$\eta_x P = \frac{Q}{P} P, \dots$$

NOTE Simplification occurs if, e.g.

$$\frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \text{ depends only on } (x, y)$$

$$\text{THEN } \begin{cases} y = \eta(x, C) \\ z = \xi(x, C, D) \end{cases}$$

EXAMPLE The 'Shock wave eqn'

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \left| \quad \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \right| \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{0}$$

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} z &= \xi(x, C) = C \\ y &= \eta(x, C, D) = Cx + D \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow C(x, y, z) = z$$

$$D(x, y, z) = y - zx \quad u(x, y, z) = H(z, y - zx)$$

Now solve $z(x, y)$ from $H(z, y - zx) = 0$ If, in particular $H(\alpha, \beta) = \alpha - f(\beta)$,then solve $(x, y) \mapsto z(x, y)$ from $z = f(y - zx)$

Remark