

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

VOORTGEZETTE
FUNCTIETHEORIE

manuscript van

Prof. Dr. J. Boersma

1978 - 1984

Inhoudsbeschrijving

VOORTGEZETTE FUNCTIETHEORIE

J. Boersma

1978-1984

Ten behoeve van onderstaande inhoudsbeschrijving zijn de bladzijden van het manuscript (boven midden) hernummerd met de natuurlijke getallen 1. - 148. De oorspronkelijke nummering is ook zichtbaar gebleven: De paginanummers die daarbij optreden zijn van type 55, 64a, 64b, 64c, 56^A. De kleine letters a, b, c, ... duiden op tussenvoegingen van Prof. Boersma zelf. Het superscript A duidt op een met potlood beschreven achterkant van, bijvoorbeeld, bladzijde 56.

Sectie	titel	blz
	LITERATUUR	0.
1	GAMMAFUNCTIE	2.
	1.1 Definitie en eigenschappen van de gammafunctie	2.
	1.2 Betafunctie, verdere eigenschappen van de gammafunctie	7.
	1.3 Psifunctie	10.
	1.4 Asymptotiek van de gammafunctie	14.
	1.5 Toepassingen van de gamma-, beta- en psi-functies	22.
2	INVERSE VAN EEN ANALYTISCHE FUNCTIE, CONFORME AFBEELDING	24.
	2.1 Inverse van een analytische functie	24.
	2.2 Maximum-modulus principe, lemma van Schwarz	28.
	2.3 Conforme afbeelding	31.
	2.4 Afbeeldingsstelling van Riemann	37.
	2.5 Spiegelingsprincipe van Schwarz	41.
3	CONFORME AFBEELDING DOOR ELEMENTAIRE FUNCTIES	45.
	3.1 Gebroken lineaire afbeelding	45.
	3.2 Voorbeelden en toepassingen van de gebroken lineaire afbeelding	48.
	3.3 De afbeeldingen $w = z^2$ en $w = \sqrt{z^2 - 1}$	53.
	3.4 De Joukowski-afbeelding $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$	60.
	3.5 Afbeeldingen door exponentiële, hyperbolische en goniometrische functies	63.

Sectie	titel	blz
4	AFBEELDINGSFUNCTIE VAN SCHWARZ-CHRISTOFFEL	66.
	4.1 Formule van Schwarz-Christoffel	66.
	4.2 Bewijs van de formule van Schwarz-Christoffel	71.
	4.3 Voorbeelden van afbeeldingen bepaald via Schwarz-Christoffel	76.
5	TOEPASSINGEN VAN CONFORME AFBEELDINGEN OP POTENTIAALPROBLEMEN	92.
	5.1 Twee-dimensionale potentiaalproblemen, harmonische functies	92.
	5.2 Voorbeelden potentiaalproblemen opgelost met conforme afbeelding	98.
6	MEROMORFE GEHELE FUNCTIES	112.
	6.1 Meromorfe functies	112.
	6.2 Oneindige producten	125.
	6.3 Gehele functies	132.
	VRAAGSTUKKEN	138-148.

JdG, 21 November 2005

1978: wo. 8.30-10.30, 2e ed 15

1979: wo. 8.30-10.30, 2e ed 15

1980: do. 10.30-12.30, 2e ed 15

1981: do. 10.30-12.30, 2e ed 15

1982: ma. 10.30-12.30, 2e ed 16

1983: ma. 10.30-12.30, 2e ed 11

1984: ma. 10.30-12.30, 2e ed 12

0

College Voortgezette Functietheorie

J. Boersma

College gegeven: voorj. 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984

<u>Inhoudsopgave</u>	pag.
Literatuur	1
1. Gamma functie	2
1.1. Definitie en eigenschappen van de gamma functie	2
1.2. Beta functie, verdere eigenschappen van de gamma functie	6
1.3. Psi functie	9
1.4. Asymptotiek van de gamma functie	12
1.5. Toepassingen van de gamma-, beta- en psi-functies	17
2. Inversen van een analytische functie, conforme afbeelding	19
2.1. Inversen van een analytische functie	19
2.2. Maximum-modulus principe, lemma van Schwarz	22
2.3. Conforme afbeelding	24
2.4. Afbeeldingsstelling van Riemann	29
2.5. Spiegelingsprincipe van Schwarz	33
3. Conforme afbeelding door elementaire functies	37
3.1. Gebroken lineaire afbeelding	37
3.2. Voorbeelden en toepassingen van de gebroken lineaire afbeelding	40
3.3. De afbeeldingen $w = z^2$ en $w = \sqrt{z^2 - 1}$	44
3.4. De afbeelding $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ [Touhowski]	48
3.5. Afbeeldingen door exponentiële, hyperbolische en trigonometrische functies	51
4. Afbeeldingsfunctie van Schwarz-Christoffel	54
4.1. Formule van Schwarz-Christoffel	54
4.2. Bewijs van de formule van Schwarz-Christoffel	57
4.3. Voorbeelden van afbeeldingen bepaald met de formule van Schwarz-Christoffel	61
5. Toepassingen van conforme afbeelding op potentiaalproblemen	72
5.1. Twee-dimensionale potentiaalproblemen, harmonische functies	72
5.2. Voorbeelden van potentiaalproblemen opgelost met conforme afbeelding	76
6. Meromorfe en gehele functies	83
6.1. Meromorfe functies	83
6.2. Oneindige producten	94
6.3. Gehele functies	100

College Voortgezette Functietheorie.

Literatuur

S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint, Algebra en analyse, Academic Service, Den Haag, 1976 (CAB).

L.V. Ahlfors, Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, McGraw-Hill, New York, 1953 (CMA).

E.T. Copson, An introduction to the theory of functions of a complex variable, Clarendon Press, Oxford, 1935 (CMA).

B.A. Fuchs and B.V. Shabat, Functions of a complex variable and some of their applications, Vol. I, Pergamon Press, Oxford, 1964 (CMA).

P. Henrici, Applied and computational complex analysis, Vol. I, II, John Wiley, New York, 1974, 1977 (CMA).

Z. Nehari, Conformal mapping, McGraw-Hill, New York, 1952 (CMM).

E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1958 (CKB).

De drie-letter-combinatie verwijst naar de rubriek van de wiskunde bibliotheek der T.H. Eindhoven, waaronder het boek is opgenomen.

Colleg. Voortgezette Functietheorie

Literatuur

S. T. H. Ackermans en J. H. van Lint, Algebra en analyse, Academic Service, Den Haag, 1976 (CAB)

L. V. Ahlfors, Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, Mc Graw-Hill, New York, 1953 (CMA)

E. T. Copson, An introduction to the theory of functions of a complex variable, Clarendon Press, Oxford, 1935 (CMA)

B. A. Fuels and B. V. Shabat, Functions of a complex variable and some of their applications, Vol. I, Pergamon Press, Oxford, 1964 (CMA)

P. Henrici, Applied and computational complex analysis, Vol. I, II, John Wiley, New York, 1974, 1977 (CMA)

Z. Nehari, Conformal mapping, Mc Graw-Hill, New York, 1952 (CMA)

E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1958 (CKB)

De drie-letter-combinatie verwijst naar de rubriek van de wiskunde bibliotheek der T.H. Eindhoven, waaronder het boek is opgenomen.

1. Gamma functie.

1.1. Definitie en eigenschappen van de gamma functie.

Literatuur: Algebra en Analyse p. 374-377, p. 465-467. (7.6.24-7.6.33, 2.6.12-13) [1]

De faculteit-functie wordt gedefinieerd door

$$n! = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 \text{ voor } n \text{ geheel, } > 0; 0! = 1.$$

De gamma functie is een continue generalisering van de faculteit-functie, ook gedefinieerd voor reëel en complex argument.

Notatie: $\Gamma(z)$, z complex; aanstands blijkt $\Gamma(n+1) = n!$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$.

Definitie. $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$, Euler, 1729.

De integraal is convergent voor $\operatorname{Re} z > 0$; $\Gamma(z)$ is analytisch voor $\operatorname{Re} z > 0$; $\Gamma(z)$ leest zich analytisch voortzetten over het hele complexe z -vlak (eigenschap 2).

Eigenschap 1. $\Gamma(n+1) = n!$,

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (n-\frac{1}{2}) \sqrt{\pi}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

Bewijs. Door partiële integratie volgt

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = -e^{-t} t^n \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = n \Gamma(n) \text{ voor } n > 0,$$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}-1} dt = -e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}} \Big|_0^{\infty} + (n-\frac{1}{2}) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-\frac{3}{2}} dt = (n-\frac{1}{2}) \Gamma(n-\frac{1}{2}) \text{ voor } n > \frac{1}{2}.$$

Herhaeld toepassen van deze betrekkingen levert

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \Gamma(1) = n! \Gamma(1),$$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{-2n} (2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1 \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma(\frac{1}{2}).$$

Bepaal $\Gamma(1)$ en $\Gamma(\frac{1}{2})$ rechtstreeks met de definitie:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1,$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}, \text{ zie College Wiskunde 20, 4.6.3, Voorb. 4. } \square$$

Eigenschap 2. $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt;$

$\Gamma(z)$ is analytisch in het hele complexe vlak met uitzondering van de enkelvoudige polen $z = 0, -1, -2, \dots$; $\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Bewijs. Voor $\operatorname{Re} z > 0$ is te schrijven

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt =: \Phi_1(z) + \Phi_2(z).$$

Beschouw eerst $\Phi_2(z)$. Voor $\operatorname{Re} z \leq a$ geldt $|e^{-t} t^{z-1}| \leq e^{-t} t^{a-1}$ voor $t \geq 1$. Aangezien $\int_1^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$ convergent is, is integraal $\Phi_2(z)$ absoluut en uniform convergent voor $\operatorname{Re} z \leq a$. De integrand $e^{-t} t^{z-1}$ is een analytische functie van z en een continue functie van t voor $z \in \mathbb{C}$, $t \geq 1$. Dan volgt: $\Phi_2(z)$ is analytisch voor $\operatorname{Re} z \leq a$. Bedenk dat a willekeurig is, zodat $\Phi_2(z)$ analytisch is in \mathbb{C} : $\Phi_2(z)$ is een gehele functie.

In de integraal $\Phi_1(z)$ ontwikkelen we e^{-t} in een (uniform convergente) machtrek. Na termsgewijze integratie volgt dan

$$\Phi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Beschouw nu de reeks op een willekeurig begrensd ~~gebied~~ gebied $G \subset \mathbb{C}$; laat G liggen binnen de cirkel $|z| = R$. Voor $z \in G$ en $n > R$ geldt dan

$$\left| \frac{1}{z+n} \right| \leq \frac{1}{n-R}, \quad \left| \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \right| \leq \frac{1}{n!(n-R)}$$

Mit de convergentie van $\sum_{n \geq R} \frac{1}{n!(n-R)}$ volgt nu dat de reeks $\sum_{n \geq R} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ uniform convergent is op G ; - de som van de reeks is dan een op G analytische functie. Voeg hieraan toe een eindig aantal bijtermen $\sum_{n \leq R} \frac{1}{n!(z+n)}$. Dan volgt: $\Phi_1(z)$ is analytisch op G behalve in de punten $z=0, -1, -2, \dots$, voorzover in G gelegen. Bedenk dat G willekeurig is, zodat $\Phi_1(z)$ analytisch is in \mathbb{C} met uitzondering van de punten $z=0, -1, -2, \dots$; in die punten heeft $\Phi_1(z)$ enkelvoudige polen.

De finieren nu voor $z \in \mathbb{C}$: $\Gamma(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$. Daarmee is $\Gamma(z)$ analytisch voortgezet vanuit $\operatorname{Re} z > 0$ naar \mathbb{C} . $\Gamma(z)$ heeft enkelvoudige polen in $z=0, -1, -2, \dots$.

Het residu van $\Gamma(z)$ in $z=-n$ is de coëfficiënt van $\frac{1}{z+n}$ in de reeks $\Phi_1(z)$:

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad \square$$

Eigenschap 3. $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ (functionaalbetrekking)

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z \Gamma(z), \quad n \text{ geheel en } \geq 0.$$

Bewijs. Zij $\operatorname{Re} z > 0$, dan volgt door partiële integratie

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z).$$

De geldigheid in \mathbb{C} volgt daarna met de identiteitstelling (analytische voortzetting). De breukbetrekking volgt door herhaald toepassen van de eerste. \square

Eigenschap 4. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$, $x > 0$, n geheel; Euler, 1729.

Bewijs. Geleid door $e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$, zullen we eerst bewijzen dat

$$(1) \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

Daarvoor maken we gebruik van de ongelijkheid

$$(2) \quad 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \frac{t^2}{n}, \quad 0 \leq t \leq n,$$

die als volgt is af te leiden uit elementaire ongelijkheden:

$$n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t,$$

$$n \log\left(1 + \frac{t}{n}\right) \leq t,$$

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left[n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right] \leq e^{-t},$$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left[n \log\left(1 + \frac{t}{n}\right)\right] \leq e^t,$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0;$$

$$e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n;$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left[1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right] \leq e^{-t} \frac{t^2}{n}.$$

Met behulp van (2) is nu te schrijven:

$$\begin{aligned} \left| \Gamma(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \right| &\leq \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\ &\leq \int_0^n e^{-t} \frac{t^2}{n} t^{x-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n} + \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \end{aligned}$$

Het laatste lid nadert tot 0 als $n \rightarrow \infty$. Daarmee is (1) bewezen.

Bereken nu de integraal in (1) door n keer partiële integreren waarbij de stektermen alle wegvallen:

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n! n^{-n}}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \int_0^n t^{x+n-1} dt = \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Na substitutie van dit resultaat in (1) volgt de te bewijzen betrekking. \square

Opmerkingen. 1. Voor $x = m$, m geheel en > 0 , is het bewijs van eigenschap 4 simpel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^m}{m(m+1) \dots (m+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m-1)! n! n^m}{(m+n)!} = (m-1)! \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{(n+1)(n+2) \dots (n+m)} = (m-1)! = \Gamma(m).$$

Euler (1729) gebruikte vervolgens eigenschap 4 als definitie van $\Gamma(x)$ voor $x > 0$. Uit deze definitie leidde hij af de eigenschap $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, wat hier als definitie van $\Gamma(x)$ is gekozen.

2. Eigenschap 4 geldt ook voor complex argument:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}, \quad z \text{ complex, } z \neq -n \text{ met } n=0,1,2,\dots$$

Men kan bewijzen dat de limiet bestaat voor complexe z , $z \neq -n$, en een analytische functie van z is. Het resultaat voor complexe z volgt dan met behulp van de identiteitsstelling (analytische voortzetting). Eigenschap 4 voor complex argument wordt niet verder gebruikt.

Constante van Euler (Algebra en Analyse, 7.5.15).

Beschouw de rij $\{u_n\}$ met

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De rij $\{u_n\}$ is monotoon dalend, want

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} + \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 0.$$

De rij $\{u_n\}$ is naar beneden begrensd:

$$u_n > \int_1^n \frac{dt}{t} - \log n = 0.$$

Dus bestaat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right] =: \gamma;$$

γ heet de constante van Euler, $\gamma = 0.577215 \dots$

Eigenschap 5 $\Gamma(z) = e^{-z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$, z complex, $z \neq m$ met $m = 0, 1, 2, \dots$
Weierstrass, 1856.

(Notatie $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ betekent $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} a_1 a_2 \dots a_N$.)

Bewijs. Neem eerst $z=x$, $x > 0$, en ga uit van eigenschap 4:

$$\frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = x^{-1} n^x \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} = x^{-1} \exp\left[\left(\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x\right)\right] \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{x/k}.$$

Neem nu de limiet voor $n \rightarrow \infty$, dan volgt

$$\Gamma(x) = e^{-x} x^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{x/k}.$$

(p. 99-100)

Vervang x door z . Men kan bewijzen (zie b.2, voorbeeld 2) dat het oneindig product een analytische functie van z is in het hele complexe z -vlak met uitzondering van de enkelvoudige polen $z = 0, -1, -2, \dots$. Volgens eigenschap 2 is $\Gamma(z)$ eveneens analytisch in het hele z -vlak met uitzondering van dezelfde polen. Voor $z=x$, $x > 0$, is $\Gamma(z)$ gelijk aan het oneindig product. Op grond van de identiteitstelling geldt dan gelijkheid in het hele z -vlak met uitzondering van $z = 0, -1, -2, \dots$. \square

Eigenschap 6 $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$; verdubbelingsformule van Legendre,

Bewijs. Neem eerst $z=x$, $x > 0$, en ~~bereken~~ ~~de~~ ~~limiet~~ ~~en~~ ~~schrijf~~ met behulp van eigenschap 4:

$$\Gamma(2x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! (2x)^{2x}}{(2x)(2x+1)(2x+2)\dots(2x+2n)}$$

Herleid deze limiet volgens

Nevenresultaat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! n^{\frac{1}{2}}}{2^{2n} (n!)^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right] = L.$

$$\Gamma(2x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \cdot \frac{n! n^{x+\frac{1}{2}}}{(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2}) \dots (x+n+\frac{1}{2})} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{2^{2x} (x+n+\frac{1}{2})}{2^{2n+1} n^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma(x+\frac{1}{2}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! n^{\frac{1}{2}}}{2^{2n} (n!)^2}$$

eveneens met gebruik van eigenschap 4. De laatste limiet is onafhankelijk van x .
Noem deze L , dan is L te bepalen door substitutie van bijv. $x = \frac{1}{2}$:

$$\Gamma(1) = \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1) L, \quad L = 1/\Gamma(\frac{1}{2}) = 1/\sqrt{\pi}.$$

Aldus vinden we

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma(x+\frac{1}{2}), \quad x > 0.$$

Voor complexe z volgt de formule met behulp van de identiteitsstelling: linker-
lid en rechterlid zijn namelijk analytische functies van z of gesien van polen. \square

Opgaven. 1. Bewijs de multiplicatieve formule

$$\Gamma(3z) = \frac{3^{3z-\frac{1}{2}}}{2\pi} \Gamma(z) \Gamma(z+\frac{1}{3}) \Gamma(z+\frac{2}{3}) \quad (\text{bestaan Januari 1978})$$

2. Bewijs de multiplicatieve formule van Gauss

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}} \Gamma(z) \Gamma(z+\frac{1}{m}) \dots \Gamma(z+\frac{m-1}{m}); \quad m=1, 2, 3, \dots$$

De verdubbelingsformule komt overeen met het geval $m=2$.

8-2-1978

12. Beta functie, verdere eigenschappen van de gamma functie.

Definitie. $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$, Euler, 1772.

De integraal is convergent voor $\text{Re } p > 0$, $\text{Re } q > 0$; $B(p, q)$ is een analytische
functie van p voor $\text{Re } p > 0$, en een analytische functie van q voor $\text{Re } q > 0$.

Eigenschap 7. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Bewijs. We geven het bewijs alleen voor het geval van reële $p > 0$, $q > 0$. Voor
complexe p, q volgt het resultaat dan met behulp van de identiteitsstelling.

We gaan uit van de convolutie

$$t^{p-1} * t^{q-1} = \int_0^t \tau^{p-1} (t-\tau)^{q-1} d\tau = t^{p+q-1} \int_0^1 \sigma^{p-1} (1-\sigma)^{q-1} d\sigma = B(p, q) t^{p+q-1}$$

Pas nu Laplace transformatie toe en gebruik

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{s^{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Met de convolutiestelling voor Laplace transformatie (College Wiskunde 30, 4.2.5) volgt dan

$$\mathcal{L}\{t^{p-1}\} \cdot \mathcal{L}\{t^{q-1}\} = \mathcal{B}(p, q) \mathcal{L}\{t^{p+q-1}\},$$

$$\frac{\Gamma(p)}{s^p} \frac{\Gamma(q)}{s^q} = \mathcal{B}(p, q) \frac{\Gamma(p+q)}{s^{p+q}} \implies \mathcal{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \square$$

We geven nog een tweetal eigenschappen van de gammafunctie.

Eigenschap 8. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Bewijs. We geven het bewijs alleen voor $z=p$, $0 < p < 1$. Voor complexe z volgt het resultaat dan met behulp van de identiteitsstelling.

Ga uit van de integraal

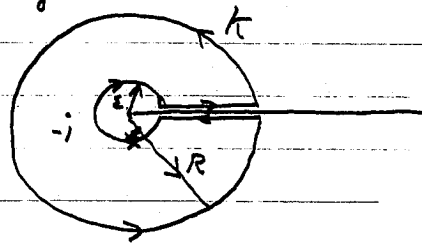
$$I(p) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{-p} dt = \mathcal{B}(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p).$$

Onder de substitutie $\frac{t}{1-t} = s$, $t = \frac{s}{1+s}$, gaat $I(p)$ over in

$$I(p) = \int_0^\infty \frac{s^{p-1}}{1+s} ds.$$

De laatste integraal is berekend in Algebra en Analyse, 8.6.14. We geven hier een iets andere afleiding. Beschouw de contour integraal

$$J(p) = \int_K \frac{w^{p-1}}{w+1} dw \text{ met } K \text{ als getekend.}$$



Hierin is w^{p-1} eenvaardig door de afspraak

$$w^{p-1} = |w|^{p-1} \exp[i(p-1)\arg w], \quad 0 < \arg w < 2\pi,$$

overeenkomend met een draai langs de positieve reële as.

De integraal heeft een pool in $w = -1 = e^{\pi i}$, zodat volgens de residuustelling geldt: $J(p) = 2\pi i (e^{\pi i})^{p-1} = -2\pi i e^{\pi i p}$

Beschouw nu de bijdrage tot de integraal van van de vier stukken van K :

(a) $\left| \int_{\epsilon, R} \frac{w^{p-1}}{w+1} dw \right| \leq \frac{R^{p-1}}{R-1} \cdot 2\pi R = O(R^{p-1}) \rightarrow 0$ als $R \rightarrow \infty$.

(b) $\left| \int_{\epsilon, \epsilon} \frac{w^{p-1}}{w+1} dw \right| \leq \frac{\epsilon^{p-1}}{1-\epsilon} \cdot 2\pi \epsilon = O(\epsilon^p) \rightarrow 0$ als $\epsilon \rightarrow 0$.

(c) Langs de bovenkant van de reële as is $\arg w = 0$. Stellen we $w = \frac{s}{1+s}$, dan gaat de integraal over in $\int_{\epsilon}^R \frac{s^{p-1}}{1+s} ds$.

(d) Langs de onderkant van de reële as in $\arg w = 2\pi$. Stellen we $w = se^{2\pi i}$, dan gaat de integraal over in

$$\int_R^\varepsilon \frac{(se^{2\pi i})^{p-1}}{1+s} ds = -e^{2\pi ip} \int_\varepsilon^R \frac{s^{p-1}}{1+s} ds.$$

Tel deze bijdragen bij elkaar en neem de limiet voor $R \rightarrow \infty$ en $\varepsilon \rightarrow 0$, dan volgt

$$J(p) = (1 - e^{2\pi ip}) \int_0^\infty \frac{s^{p-1}}{1+s} ds = (1 - e^{2\pi ip}) \Gamma(p) = -2\pi i e^{\pi ip},$$

$$\Gamma(p) = \frac{2\pi i e^{\pi ip}}{-2\pi i e^{2\pi ip} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{\pi ip} - e^{-\pi ip}} = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

Hiermee is aangetoond: $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$ □

Gevolg. Aangezien $\frac{\pi}{\sin \pi z} \neq 0$ voor z complex, $z \neq$ geheel, volgt dat $\Gamma(z)$ geen nulpunten heeft. Ook $z =$ geheel kan geen nulpunt zijn: $\Gamma(n+1) = n!$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$; $\Gamma(z)$ heeft enkelvoudige polen in $z = 0, -1, -2, \dots$. Dat $\Gamma(z)$ geen nulpunten heeft volgt ook uit eigenschap 5.

Opmerking. Stel $z = \frac{1}{2}$ in eigenschap 8, dan volgt nogmaals: $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Stellen we $z = \frac{1}{2} - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, dan volgt

$$\Gamma(\frac{1}{2} - n) = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2} - n)\pi} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + n)} = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (n + \frac{1}{2})} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}$$

met behulp van eigenschap 1.

Opgave. Bereken de integraal $\int_0^1 (1-t^2)^{z-1} dt$, $\operatorname{Re} z > 0$, op twee manieren en bewijs aldus nogmaals eigenschap 6.

7-2-198
Eigenschap 9. $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-z} dt$, $z \in \mathbb{C}$; Hankel's contour integraal, 1864.

Hierin is de contour C een lus om de negatieve reële as als getekend.



De functie t^{-z} staat voor de hoofdwaaarde:

$$t^{-z} = e^{-z \log t}, \quad \log t = \log|t| + i \arg t, \quad |\arg t| < \pi,$$

overeenkomend met een trefde langs de negatieve reële as.

Bewijs. Noem de integraal $I(z)$ en verform C tot een kromme, die bestaat

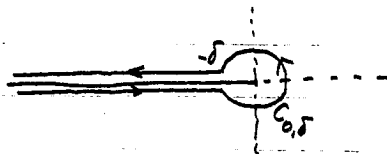
uit een lijnstuk van $-a$ naar $-\delta$ langs de

onderkant van de trefde, de cirkel C_{δ} met

middelpunt 0 en straal δ , en een lijnstuk

van $-\delta$ naar $-a$ langs de bovenkant van de trefde; zie figuur.

Stel op de lijnstukken $t = -s$, dan is langs de bovenkant van de trefde



$$\text{-arg } t = \pi, \quad t^{-2} = e^{-2 \log t} = \exp[-2(\log s + \pi i)] = e^{-\pi i 2} s^{-2},$$

en langs de onderkant van de sneede

$$\text{arg } t = -\pi, \quad t^{-2} = e^{-2 \log t} = \exp[-2(\log s - \pi i)] = e^{\pi i 2} s^{-2}.$$

De integraal $I(z)$ gaat nu over in

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{e^{\pi i 2}}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-2} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,\delta}} e^t t^{-2} dt - \frac{e^{-\pi i 2}}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-2} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,\delta}} e^t t^{-2} dt + \frac{\sin(\pi 2)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-2} ds. \end{aligned}$$

Volgens een bekende stelling uit de functietheorie is de integraal over $C_{0,\delta}$ een gehele functie van z , i.e., analytisch in het hele z -vlak. Beschouw de tweede integraal voor $\text{Re } z > a$. Wegens $|e^{-s} s^{-z}| \leq e^{-s} s^{-a}$ voor $s \geq 1$, en $\int_1^{\infty} e^{-s} s^{-a} ds$ convergeert, is $\int_0^{\infty} e^{-s} s^{-z} ds$ uniform convergeert voor $\text{Re } z > a$ en stelt daar een analytische functie voor. Daer a willekeurig is, zal $\int_0^{\infty} e^{-s} s^{-z} ds$ een gehele functie van z zijn. Totaal vinden we dat $I(z)$ een gehele functie van z is.

Zij nu $\text{Re } z < 1$, dan is

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,\delta}} e^t t^{-z} dt \right| = \left| \frac{\delta^{-1-z}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\delta e^{i\varphi}) e^{i\varphi(1-z)} d\varphi \right| = O(\delta^{1-\text{Re } z}) \rightarrow 0 \text{ als } \delta \rightarrow 0.$$

Na limietovergang $\delta \rightarrow 0$ volgt dan

$$I(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-z} ds = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \Gamma(1-z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \text{ voor } \text{Re } z < 1,$$

waarbij gebruik gemaakt is van de definitie van de Γ -functie en van eigenschap 8. De functies $I(z)$ en $1/\Gamma(z)$ zijn nu beide gehele functies van z (voor $1/\Gamma(z)$ volgt dit uit eigenschap 2), terwijl $I(z) = 1/\Gamma(z)$ voor $\text{Re } z < 1$. Volgens de identiteitsstelling is dan $I(z) = 1/\Gamma(z)$ voor elke $z \in \mathbb{C}$. \square

Opgave. Leid met behulp van eigenschap 9 af: $\frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n!}$, $\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$

7-2-1979

13. Psi functie.

Definitie. $\Psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, d.i. zgn. logaritmische afgeleide van $\Gamma(z)$.

Eigenschap 10. $\Psi(z)$ is analytisch in het hele complexe vlak met uitzondering van de enkelvoudige polen $z = 0, -1, -2, \dots$; $\text{Res}_{z=-n} \Psi(z) = -1$.

Bewijs. $\Gamma(z)$, en dan ook $\Gamma'(z)$, is analytisch in \mathbb{C} met uitzondering van de punten $z = 0, -1, -2, \dots$ (eigenschap 2). Voorts is $\Gamma(z) \neq 0$ in \mathbb{C} (gevolg van eigenschap 8). Dus is $\Psi(z)$ analytisch in \mathbb{C} met uitzondering van de punten $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

In de omgeving van $z = -n$ geldt voor $\Gamma(z)$, $\Gamma'(z)$ de Laurent-ontwikkeling

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + c_0 + c_1(z+n) + \dots, \quad \Gamma'(z) = -\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z+n)^2} + c_1 + \dots$$

Daaruit volgt voor $\psi(z)$,

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{-\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z+n)^2} + c_1 + \dots}{\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + c_0 + c_1(z+n) + \dots} = -\frac{1}{z+n} - (-1)^n n! c_0 + (\dots)(z+n) + \dots,$$

Zodat $\psi(z)$ een enkelvoudige pool heeft in $z = -n$ met $\operatorname{Res}_{z=-n} \psi(z) = -1$. \square

Opgave. Bepaal de eerste twee termen van de Laurent-ontwikkeling van $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ in de omgeving van $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

1-2-1982 / 13-2-1983

Eigenschap 11. $\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -m$ met $m = 0, 1, 2, \dots$

Bewijs. Ga uit van eigenschap 4 en neem de logaritme:

$$\begin{aligned} (1) \quad \log \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\frac{n^x}{x(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2}) \dots (1+\frac{x}{n})} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x \log n - \log x - \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x(\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}) - \log x + \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \log \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) \right] \\ &= -\gamma x - \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right], \quad x > 0. \end{aligned}$$

(Dit resultaat is ook af te leiden uit eigenschap 5 door de logaritme te nemen.)

Differentieer deze betrekking naar x :

$$(2) \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right), \quad x > 0.$$

De termgewijze differentiatie van de reeks is geoorloofd omdat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$ uniform convergeert in op $0 \leq x \leq a$ voor elke $a > 0$. Immers

$$0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{a+n} = \frac{a}{n(a+n)} \quad \text{voor } 0 \leq x \leq a,$$

en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n(a+n)}$ is convergent.

Op grond van de identiteitsstelling geldt de betrekking (2) ook bij vervanging van x door z :

$$(3) \quad \psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq -m \text{ met } m = 0, 1, 2, \dots$$

Daarvoor moet nog worden bewezen dat de reeks in het ~~rechterlid~~ ^{rechterlid} van (3) een analytische functie voorstelt in \mathbb{C} met uitzondering van polen in $z = -m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Laat G een willekeurig begrensd gebied in \mathbb{C} zijn, gelegen binnen de cirkel $|z| = R$. Voor

$z \in G$ en $n > R$ geldt dan

$$\left| \frac{z}{n(z+n)} \right| \leq \frac{R}{n(n-R)}$$

Daar de reeks $\sum_{n \geq R} \frac{R}{n(n-R)}$ convergent is, zal de reeks $\sum_{n \geq R} \frac{z}{n(z+n)}$ uniform convergent zijn op G ; de som van de reeks is dan een analytische functie op G . Voeg hieraan toe een eindig aantal begintermen $\sum_{n \leq R} \frac{z}{n(z+n)}$. Dan volgt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}$ is analytisch op G behalve in de punten $z = -1, -2, \dots$, voorzover in G gelegen. Bedenk dat G willekeurig is, zodat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}$ een analytische functie is in \mathbb{C} met uitzondering van de punten $z = -1, -2, -3, \dots$ □

De nu volgende eigenschappen van $\psi(z)$ volgen eenvoudig door logaritmisch differentieren van de overeenkomstige eigenschappen van $\Gamma(z)$.

Eigenschap 12. (a) $\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)$;

(b) $\psi(z+n) = \frac{1}{z+n-1} + \frac{1}{z+n-2} + \dots + \frac{1}{z} + \psi(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;

(c) $\psi(2z) = \frac{1}{2} \psi(z) + \frac{1}{2} \psi(z + \frac{1}{2}) + \log 2$, verdubbelingsformule;

(d) $\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \cot(\pi z)$.

Bewijs. (a) Ga uit van $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ (eigenschap 3) en differentieer logaritmisch: $\log \Gamma(z+1) = \log z + \log \Gamma(z)$; $\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)$.

(b) Volgt door n keer toepassen van (a).

(c) Ga uit van eigenschap 6 en differentieer logaritmisch:

$$\log \Gamma(2z) = -\log \sqrt{\pi} + (2z-1) \log 2 + \log \Gamma(z) + \log \Gamma(z + \frac{1}{2})$$

$$2\psi(2z) = 2 \log 2 + \psi(z) + \psi(z + \frac{1}{2})$$

(d) Ga uit van eigenschap 8 en differentieer logaritmisch:

$$\log \Gamma(z) + \log \Gamma(1-z) = \log \pi - \log \sin(\pi z)$$

$$\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = -\pi \cot(\pi z)$$
 □

Speciale waarden. $\psi(1) = -\gamma$; $\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$;

$$\psi(\frac{1}{2}) = -\gamma - 2 \log 2$$
; $\psi(n + \frac{1}{2}) = -\gamma - 2 \log 2 + 2 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{2n-1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Afliding. Met eigenschap 11 volgt

$$\psi(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\gamma$$

Mit de verdubbelingsformule (eigenschap 12(c)) met $z = \frac{1}{2}$ volgt:

$$\psi(1) = \frac{1}{2} \psi(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \psi(1) + \log 2, \quad \psi(\frac{1}{2}) = \psi(1) - 2 \log 2 = -\gamma - 2 \log 2$$

De waarden van $\psi(n+1)$, $\psi(n + \frac{1}{2})$, volgen hieruit met eigenschap 12(b).

(a) Beter: $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$; integraal is uniform convergent op $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < b\}$, zie AA.7.6.27.
 Stelling van Weierstrass (p. 52-18): $\Gamma(z)$ is analytisch voor $\operatorname{Re} z < b$, met $\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \log t dt$.
 a en b willekeurig, dus geldig voor $\operatorname{Re} z > 0$.

(b) Beter: Reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right)$ uniform convergent op gebied G , binnen cirkel $|z| = R$.
 Termgewijs differentiatie is dan geoorloofd, met resultaat

$$\psi'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \quad \text{voor } z \in \mathbb{C}, z \neq 0, -1, -2, \dots$$

~~Volg~~

Literatuur: Algebra en Analyse 7.5, in het bijzonder 7.5.16, waar de asymptotische ontwikkeling van $\log(n!)$ en $n!$, $n \rightarrow \infty$, wordt afgeleid.
 De behandeling hier van de asymptotiek van $\log \Gamma(z)$ loopt daaraan parallel.

Eigenschap 13. (a) $\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \log t \, dt$, $\operatorname{Re} z > 0$.

$$(b) \psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}, \quad \left[\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0 \text{ met } m=0,1,2,\dots \right]$$

Beweis (a) Ga uit van de definitie van $\Gamma(z)$ en differentieer onder het integraalteken:

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \log t \, dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

De differentiatie onder het integraalteken is geoorloofd omdat de resulterende integraal uniform convergeert in voor $0 < a \leq \operatorname{Re} z \leq b$, voor elke a en b ; zie ook Algebra en Analyse, 7.6.27.

(b) Ga uit van eigenschap 11 en differentieer de reeks termgewijs:

$$\psi'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0 \text{ met } m=0,1,2,\dots$$

De termgewijze differentiatie is geoorloofd omdat de reeks $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$ uniform convergeert in elk begrensd gebied G , gelegen binnen de cirkel $|z| = R$. Voor $z=1$ komt er

$$\psi'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

Gevolg. $\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \log t \, dt = \psi'(1) = -\gamma$.

15.2.1978

14. Asymptotiek van de gamma functie.

We onderzoeken het asymptotisch gedrag van $\Gamma(z)$ voor $z \rightarrow \infty$. Bedoeling is om een egw. asymptotische ontwikkeling voor $\Gamma(z)$ af te leiden, d.i., een benaderingsformule voor $\Gamma(z)$ welke bruikbaar is voor grote waarden van $|z|$.

We gaan uit van eigenschap 4 en nemen de logaritme:

$$(1) \quad \log \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(n!) + x \log n - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) \right], \quad x > 0.$$

We herleiden de laatste som tot een integraal met behulp van (in essentie) de somformule van Euler-Maclaurin (zie Algebra en Analyse, 7.5.12).

Vorbereitung (Algebra en Analyse, 7.5.2): Zij de functie $f(t)$ tweemaal continu differentieerbaar op $[0,1]$, dan volgt door twee keer partieel integreren

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) \, dt &= (t+A) f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 (t+A) f'(t) \, dt = \\ &= (t+A) f(t) \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{2} t^2 + At + B \right) f'(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} t^2 + At + B \right) f''(t) \, dt \end{aligned}$$

waarin A en B nog vrij te kiezen constanten zijn. We kiezen $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{12}$, dan ontstaat er

$$(2) \quad \int_0^1 f(t) \, dt = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] - \frac{1}{12} [f'(0) - f'(1)] + \int_0^1 p(t) f''(t) \, dt,$$

waarin $p(t) = \frac{1}{2} [t^2 - t + \frac{1}{6}]$; merk op dat $p(t) = \frac{1}{2} B_2(t)$, waarbij $B_2(t)$ het tweede Bernoulli polynoom is (Algebra en Analyse, 7.5.2, 7.5.3)

Als nevenresultaat in het bewijs van eigenschap ^{b)} gevonden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! n^{\frac{1}{2}}}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}};$$

- dan volgt $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$.

Zij vervolgens $f(t)$ tweemaal continue differentieerbaar op $[k, k+1]$, dan geldt analog
 (3) $\int_k^{k+1} f(t) dt = \frac{1}{2} [f(k) + f(k+1)] - \frac{1}{12} [f'(k+1) - f'(k)] + \int_k^{k+1} \frac{1}{2} (t-k) f''(t) dt$.

Sommeer (3) voor $k=0, 1, \dots, n-1$, dan volgt

$$(4) \int_0^n f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2} [f(k) + f(k+1)] - \frac{1}{12} [f'(k+1) - f'(k)] + \int_k^{k+1} \frac{1}{2} (t-k) f''(t) dt \right]$$

waarin $[t] =$ entier van t , d.i. grootste gehele getal $\leq t$.

Pas (4) toe op de functie $f(t) = \log(x+t)$, dan vinden we

$$(5) \sum_{k=0}^n \log(x+k) = \int_0^n \log(x+t) dt + \frac{1}{2} [\log x + \log(x+n)] - \frac{1}{12} \left[\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x} \right] + \int_0^n \frac{1}{2} \frac{t-[t]}{(x+t)^2} dt = \\ = (x+n+\frac{1}{2}) \log(x+n) - (x-\frac{1}{2}) \log x - n + \frac{1}{12} \left[\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x} \right] + \int_0^n \frac{1}{2} \frac{t-[t]}{(x+t)^2} dt$$

Substitueer (5) in (1), dan komt er

$$(6) \log \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(n!) + x \log n - (x+n+\frac{1}{2}) \log(x+n) + (x-\frac{1}{2}) \log x + n - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x} \right) - \int_0^n \frac{1}{2} \frac{t-[t]}{(x+t)^2} dt \right] = \\ = (x-\frac{1}{2}) \log x + \frac{1}{12x} - \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{t-[t]}{(x+t)^2} dt + \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(n!) + x \log n - (x+n+\frac{1}{2}) \log n - (x+n+\frac{1}{2}) \left\{ \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} + n \right] = \\ = (x-\frac{1}{2}) \log x - x + C + \frac{1}{12x} - \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{t-[t]}{(x+t)^2} dt, \quad x > 0.$$

waarin C een constante is gegeven door

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(n!) - (n+\frac{1}{2}) \log n + n \right].$$

De laatste limiet zal bestaan omdat de oorspronkelijke limiet in (1) bestaat. Merk op dat de integraal $\int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{t-[t]}{(x+t)^2} dt$ convergent is daar $t-[t]$ begrensd is: $|t-[t]| \leq \frac{1}{2}$.

We bepalen nu de constante C . Schrijf daartoe

$$e^C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}$$

Combineer deze twee limieten tot

$$e^C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \right)^2 \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)! e^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}} (n!)^2}{n^{\frac{1}{2}} (2n)!} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}} (n!)^2}{n^{\frac{1}{2}} 2^{2n} n! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (n-\frac{1}{2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{2}} n! n^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (n-\frac{1}{2})} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (n-\frac{1}{2})} \frac{2^{\frac{1}{2}} (n-\frac{1}{2})}{n} = 2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{eq. 4n1})$$

N.B. De analytische voortzetting van $\log \Gamma(z)$ is zeker niet overal de hoofdwert van de logaritme.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{2}} (n+1)! (n+1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2}} \frac{n! n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2} + n)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi},$$

waarbij gebruik gemaakt is van de eigenschappen 4 en 1. We vinden op deze wijze $C = \frac{1}{2} \log(2\pi)$. Voor een andere afleiding van dit resultaat, zie Algebra en Analyse 7.5.16.

Vervang in het laatste lid van (6) x door z , complex, en noem de ontstane functie $F(z)$:

$$(7) \quad F(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{12z} - \int_0^{\infty} \frac{\rho(t - [t])}{(z+t)^2} dt.$$

Hierin zal met $\log z$ de hoofdwert beduidt worden; de term $(z - \frac{1}{2}) \log z$ is dan een analytische functie in het z -vlak minus de negatieve reële as (mede). Ook de integraal in (7) is een analytische functie in het z -vlak minus de negatieve reële as. Laat namelijk G een begrensde gebied zijn dat geen punten van de negatieve reële as bevat, en laat G gelijgen zijn binnen de cirkel $|z| = R$. Voor $z \in G$ en $t \geq 2R$ geldt dan

$$|z+t| \geq t - |z| \geq t - R \geq t - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t; \quad \left| \frac{\rho(t - [t])}{(z+t)^2} \right| \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}t^2} = \frac{1}{2t^2}.$$

Uit de convergentie van $\int_{2R}^{\infty} \frac{dt}{2t^2}$ volgt dan dat $\int_{2R}^{\infty} \frac{\rho(t - [t])}{(z+t)^2} dt$ uniform convergeert op G . De laatste integraal is dan een analytische functie op G . Voeg hieraan toe de eindige integraal $\int_0^{2R} \frac{\rho(t - [t])}{(z+t)^2} dt$ welke eveneens analytisch op G . Daarmee is de totale integraal in (7) analytisch op G .

Samenvat: de functie $F(z)$ uit (7) is analytisch in \mathbb{C} minus de negatieve reële as. In hetzelfde gebied is $\Gamma(z)$ analytisch en $\neq 0$, dus $\log \Gamma(z)$ kan gedefinieerd worden als een door analytische voortzetting vanaf de positieve reële as. De twee analytische functies $\log \Gamma(z)$ en $F(z)$ zijn gelijk voor $z = x$, $x > 0$. Op grond van de identiteitsstelling geldt dan

$$(8) \quad \log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{12z} - \int_0^{\infty} \frac{\rho(t - [t])}{(z+t)^2} dt$$

voor $z \in \mathbb{C}$ minus de negatieve reële as.

Differentiatie van (8) levert nog de volgende betrekking voor $\psi(z)$:

$$(9) \quad \psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\rho(t - [t])}{(z+t)^2} dt$$

voor $z \in \mathbb{C}$ minus de negatieve reële as. De differentiatie onder het integraalteken is op de bekende manier te verantwoorden.

Met behulp van (8) en (9) bepalen we nu het asymptotisch gedrag van $\log \Gamma(z)$ en $\psi(z)$ voor $z \rightarrow \infty$, $-\pi < \arg z < \pi$. Schrijf $z = re^{i\theta}$ met $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$. De integralen in (8) en (9) zijn dan af te tellen met behulp van $|\rho(t - [t])| \leq \frac{1}{2}$ en de substitutie ~~$t =$~~

$$t = rs:$$

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{\rho(t-|t|)}{(z+t)^2} dt \right| \leq \frac{1}{12} \int_0^{\infty} \frac{dt}{|t+ze^{i\theta}|^2} = \frac{1}{12z} \int_0^{\infty} \frac{ds}{|s+e^{i\theta}|^2} =$$

$$= \frac{1}{12z} \int_0^{\infty} \frac{-ds}{(s+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{1}{12z} \frac{1}{|\sin\theta|} \arctan \left(\frac{s+\cos\theta}{|\sin\theta|} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{12z} \frac{\theta}{\sin\theta};$$

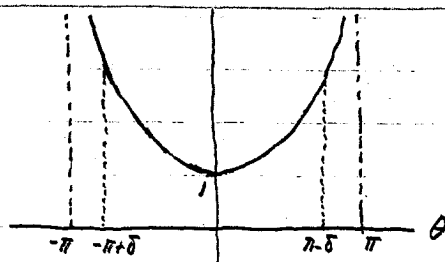
$$\left| \int_0^{\infty} \frac{\rho(t-[t])}{(z+t)^3} dt \right| \leq \frac{1}{12z^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{|s+e^{i\theta}|^3} = \frac{1}{12z^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{[(s+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{12z^2} \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{s+\cos\theta}{[(s+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]^{3/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{12z^2} \frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{12z^2} \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}.$$

Als $\theta \rightarrow \pm\pi$ is $\frac{\theta}{\sin\theta} \rightarrow \infty$, $\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta} \rightarrow \infty$;

de grafieken van deze functies hebben een verloop als geschiedt in nevenstaande figuren.

We beperken nu θ tot $|\theta| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$, willekeurig.



Dan is

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{\rho(t-[t])}{(z+t)^2} dt \right| \leq \frac{1}{12|z|} \frac{\pi-\delta}{\sin\delta}, \quad \left| \int_0^{\infty} \frac{\rho(t-[t])}{(z+t)^3} dt \right| \leq \frac{1}{12|z|^2} \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\delta}.$$

Ofwel, de eerste integraal is $O(z^{-1})$, de tweede integraal is $O(z^{-2})$, als $z \rightarrow \infty$, beide uniform voor $|\arg z| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$; uniform betekent hier dat de constante in het O -symbool niet afhangt van z . N.B. Ook in de open sector $|\arg z| < \pi$ geldt: eerste integraal is $O(z^{-1})$, tweede integraal is $O(z^{-2})$ als $z \rightarrow \infty$, maar dan niet uniform; de constante in het O -symbool hangt van z af en moet steeds groter worden gekozen naarmate $\arg z \rightarrow \pm\pi$, i.e. nadring tot negatieve reële as.

Substitueer de voorgaande resultaten in (8) en (9), en neem de termen $\frac{1}{12z}$ en $-\frac{1}{12z^2}$ af in $O(z^{-1})$ en $O(z^{-2})$. We vinden dan de asymptotische relaties:

$$(I) \quad \log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty, \text{ uniform voor } |\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0$$

$$(II) \quad \Psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty, \text{ uniform voor } |\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0.$$

Neem de e -macht van (I) dan volgt

$$(10) \quad \Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} [1 + O(z^{-1})], \quad z \rightarrow \infty, \text{ uniform voor } |\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0.$$

Als speciaal geval van (10) hebben we

$$(11) \quad n! = \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} [1 + O(n^{-1})], \quad n \rightarrow \infty.$$

De betrekkingen (10) en (11) staan bekend onder de naam formule van Stirling, 1730;

de formule (11) is ook afgeleid in Algebra en Analyse, 7.5.16.

Mit (I) leiden we nog een tweetal verdere asymptotische relaties af:

$$\begin{aligned}\log \Gamma(z+a) &= (z+a-\frac{1}{2}) \log(z+a) - (z+a) + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(z^{-1}) = \\ &= (z+a-\frac{1}{2}) [\log z + \frac{a}{z} + O(z^{-2})] - (z+a) + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(z^{-1}) = \\ &= (z+a-\frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty, \text{ uniform voor } |\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} &= \exp[\log \Gamma(z+a) - \log \Gamma(z+b)] = \\ &= \exp[(z+a-\frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) - (z+b-\frac{1}{2}) \log z + z - \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(z^{-1})] = \\ &= \exp[(a-b) \log z + O(z^{-1})] = z^{a-b} [1 + O(z^{-1})], \quad z \rightarrow \infty, \text{ uniform voor } |\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0\end{aligned}$$

Opmerking. In Algebra en Analyse, 7.5, zijn ingevoerd en uitvoerig behandeld de Bernoulli polynomen $B_n(t)$ en de Bernoulli getallen $B_n := B_n(0)$. In termen van Bernoulli polynomen en Bernoulli getallen is de betrekking (8) als volgt te schrijven:

$$\log \Gamma(z) = (z-\frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{B_2}{22} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{B_2(t-[t])}{(z+t)^2} dt.$$

Door herhaald partiël integreren van de laatste integraal, onder gebruikmaking van de eigenschappen van Bernoulli polynomen en Bernoulli getallen, is de betrekking te herleiden tot

$$\log \Gamma(z) = (z-\frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)} \frac{1}{z^{2k-1}} - \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} \frac{B_{2m}(t-[t])}{(z+t)^{2m}} dt.$$

De laatste term is af te schatten op $O(z^{-2m+1})$ als $z \rightarrow \infty$, uniform voor $|\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0$. We vinden dan

$$\log \Gamma(z) = (z-\frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)} \frac{1}{z^{2k-1}} + O(z^{-2m+1}),$$

als $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0$, waarin $m=1, 2, 3, \dots$. Het voorgaande resultaat wordt kort genoteerd als

$$\log \Gamma(z) \sim (z-\frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)} \frac{1}{z^{2k-1}}, \quad z \rightarrow \infty, |\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0,$$

waarbij het rechterlid de reeks van Stirling (1730) genoemd wordt. Deze reeks vormt de zgn. asymptotische ontwikkeling van $\log \Gamma(z)$. Een speciaal geval van deze asymptotische ontwikkeling, namelijk $\log(n!) = \log n + \log \Gamma(n) = \dots$ werd behandeld in Algebra en Analyse 7.5.16. Asymptotische ontwikkelingen voor $\Psi(z)$ en voor $\Gamma(z)$ zelf, zijn op analoge wijze af te leiden.

1.5. Toepassingen van de gamma-, beta-, en psi-functie

Hieronder volgen een aantal voorbeelden van integralen, reeksen en producten, die kunnen worden uitgedrukt in de Γ -, B - of ψ -functie.

Enkele van deze voorbeelden zullen in het college worden behandeld, de rest op de instructie.

$$1) \int_0^{\infty} \exp(-t^{\beta}) t^{z-1} dt, \quad \beta > 0, \operatorname{Re} z > 0$$

$$2) \int_1^{\infty} (\log x)^{\beta} x^{-\alpha} dx, \quad \beta > -1, \alpha > 1.$$

$$3) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \log t dt$$

$$4) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx, \quad 0 < \alpha < 1; \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx, \quad 0 < \alpha < 2$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+n)}{n!} z^n, \quad |z| < 1$$

$$6) \int_a^b (x-a)^{\beta-1} (b-x)^{\alpha-1} dx, \quad \beta > 0, \alpha > 0$$

$$7) \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{\beta} (\sin \varphi)^{\alpha} d\varphi, \quad \beta > -1, \alpha > -1$$

$$8) \int_0^1 t^{-1} \log(1-t) dt$$

$$9) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^2 - n^2}$$

$$10) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)}$$

15. Toepassingen van de gamma, beta-, en psi-functie.

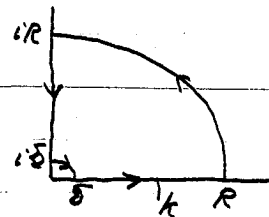
Wij geven een aantal voorbeelden van integralen, producten en reeksen, die kunnen worden uitgedrukt in Γ -, B -, ψ -functies.

$$(1) \int_0^{\infty} \exp(-t^{\beta}) t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-s} (s^{\frac{1}{\beta}})^{z-1} \frac{1}{\beta} s^{\frac{1}{\beta}-1} ds = \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\frac{z}{\beta}-1} ds = \frac{\Gamma(z/\beta)}{\beta}, \quad \beta > 0, \operatorname{Re} z > 0.$$

$$(2) \int_1^{\infty} (\log x)^{\beta} x^{-\rho} dx = \int_0^{\infty} t^{\beta} e^{-qt} e^t dt = \int_0^{\infty} e^{-(q-1)t} t^{\beta} dt = \int_0^{\infty} e^{-s} \left(\frac{s}{q-1}\right)^{\beta} \frac{ds}{q-1} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{(q-1)^{\beta+1}}, \quad \beta > -1, q > 1.$$

$$(3) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \log t dt = \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \Gamma'(\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}) \psi(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} (-\gamma - 2 \log 2).$$

$$(4) \text{Ga uit van } \int_K \frac{e^{iz}}{z^{\alpha}} dz = 0, \text{ waarbij}$$



te de hiernaast getekende contour is.

Neem $\delta \rightarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$. De bijdrage van de kwartcirkel

$C_{\delta, R}$ nadert tot 0 als $R \rightarrow \infty$, mits $\alpha > 0$; te bewijzen met behulp van Algebra en Analyse, 8.5.20.

Voor de bijdrage van de kwartcirkel $C_{\delta, \delta}$ geldt

$$\left| \int_{C_{\delta, \delta}} \frac{e^{iz}}{z^{\alpha}} dz \right| = \left| \delta^{1-\alpha} \int_0^{\pi/2} \exp(i\delta e^{i\varphi}) e^{i\varphi(1-\alpha)} d\varphi \right| = O(\delta^{1-\alpha}) \rightarrow 0 \text{ als } \delta \rightarrow 0, \text{ mits } \alpha < 1.$$

Zijn $0 < \alpha < 1$, dan vinden we

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\alpha z}}{z^{\alpha}} dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(te^{i\pi/2})^{\alpha}} i dt = i e^{-\pi\alpha/2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = i e^{-\pi\alpha/2} \Gamma(1-\alpha).$$

Neem links en rechts het reële resp. imaginair deel, dan volgt

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx = \Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx = \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Met behulp van de identiteitsstelling zijn de geldigheidsgebieden nog uit te breiden tot $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, resp. $0 < \operatorname{Re} \alpha < 2$.

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+n)}{n!} z^n = \Gamma(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!} z^n = \Gamma(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\beta-1)\dots(-\beta-n+1)}{n!} (-1)^n z^n = \Gamma(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} (-1)^n z^n = \Gamma(\beta) (1-z)^{-\beta}, \quad |z| < 1, \text{ binomiaalreken.}$$

$$(6) \int_a^b (x-a)^{\beta-1} (b-x)^{\rho-1} dx = \left(\text{stel } t = \frac{x-a}{b-a}, 1-t = \frac{b-x}{b-a}, dt = \frac{dx}{b-a} \right) \\ = (b-a)^{\beta+\rho-1} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\rho-1} dt = (b-a)^{\beta+\rho-1} B(\beta, \rho) = (b-a)^{\beta+\rho-1} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\beta+\rho)}, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \rho > 0.$$

$$(7) \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{\beta} (\sin \varphi)^{\rho} d\varphi = \int_0^1 t^{\beta} (1-t)^{\rho-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 s^{\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{2}} ds \\ = \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\rho+1)}, \quad \operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re} \rho > -1.$$

$$\begin{aligned}
 (8) \int_0^1 t^{-p} \log(1-t) dt &= \frac{d}{dq} \int_0^1 t^{p+q} (1-t)^{q-1} dt \Big|_{p=0, q=1} = \frac{d}{dq} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \Big|_{p=0, q=1} = \\
 &= \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} [\psi(q) - \psi(p+q)] \Big|_{p=0, q=1} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+1)} [\psi(1) - \psi(p+1)] = \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{\psi(p+1) - \psi(1)}{p} = -\psi'(1) = -\frac{\pi^2}{6} \text{ (eigenschap 13(b)).}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{a-b} \left[-\sum_{n=0}^N \frac{1}{n+a} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+b} \right] = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{a-b} \left[-\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \dots - \frac{1}{a+N} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+N} \right] = \text{(met eigenschap 12(c))} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{a-b} [\psi(a) - \psi(a+N+1) + \psi(b+N+1) - \psi(b)] = \text{(met asymptotiek van } \psi\text{-functie)} \\
 &= \frac{\psi(a) - \psi(b)}{a-b} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{a-b} [-\log(a+N+1) + \log(b+N+1) + O(N^{-1})] = \frac{\psi(a) - \psi(b)}{a-b}, \quad a \neq b;
 \end{aligned}$$

Voor $a=b$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \psi'(a)$, volgt ook uit eigenschap 13(b).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{22}{2^2 - n^2} = -22 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-2)} = -\psi(2) + \psi(-2) = -\psi(2) + \psi(1-2) + \frac{1}{2} =$$

$= \pi \cot(\pi z) + \frac{1}{z}$, onder gebruikmaking van eigenschap 12(a)(d);

$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$; de partiëlebreuksplitsing van $\pi \cot(\pi z)$ wordt in

b.i. voorbeeld II nog eens op een andere manier afgeleid.

$$\begin{aligned}
 (10) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)} = \lim_{N \rightarrow \infty} N! \frac{\Gamma(N+a+b+1)}{\Gamma(a+b+1)} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(N+a+1)} \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(N+b+1)} = \\
 &= \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+a+1)} \frac{\Gamma(N+a+b+1)}{\Gamma(N+b+1)} = \text{(met asymptotiek van } \Gamma\text{-functie)} \\
 &= \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-a} [1 + O(N^{-1})] N^a [1 + O(N^{-1})] = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.
 \end{aligned}$$

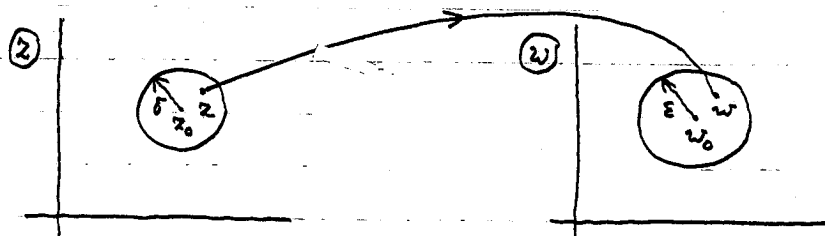
2. Inverse van een analytische functie, conforme afbeelding.

2.1. Inverse van een analytische functie.

Zij de functie $f(z)$ analytisch in een gebied G_z in het complexe z -vlak. Door de afbeelding $w = f(z)$ wordt dan G_z afgebeeld op de beeldverzameling $G_w := f(G_z)$ in het complexe w -vlak. We willen deze afbeelding en haar inverse nader onderzoeken. Indien $f(z)$ constant is, bestaat G_w uit slechts één punt. Dit triviaal geval sluiten we verder uit. Gevolg: Bij elke $z_0 \in G_z$ is er een $\Delta > 0$ zodat $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, zie Algebra en Analyse 8.4.10, 8.4.11.

Zij $z_0 \in G_z$, en $w_0 = f(z_0)$. Daar $f(z)$ tevens continu is in z_0 wordt een omgeving van z_0 afgebeeld in een omgeving van w_0 :

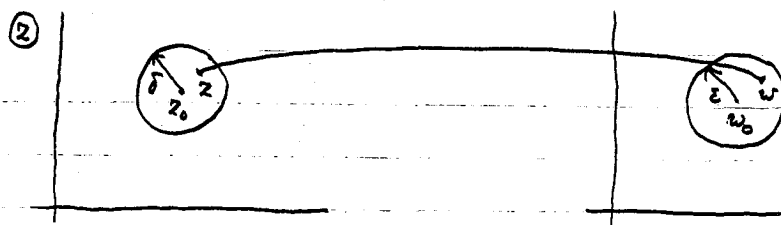
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |w - w_0| = |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)$$



Vraag is of deze afbeelding tevens $o.p.$ is, d.w.z. breekt ieder punt w uit een voldoende kleine omgeving van w_0 op als beeld van een punt z uit een voorgeschreven omgeving van z_0 .

Stelling 2.1. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, zij $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, en zij $f(z_0) = w_0$. Dan geldt

$$\forall 0 < \varepsilon < \Delta \exists \delta > 0 (|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists z (|z - z_0| < \delta \wedge f(z) = w))$$

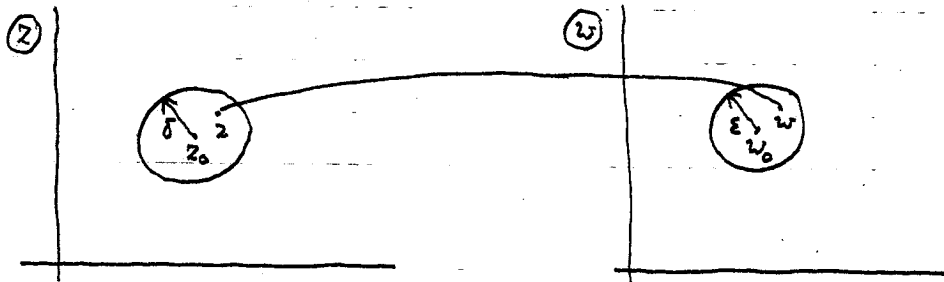


Bewijs: Kies een δ met $0 < \delta < \Delta$, en stel $\varepsilon := \min_{|z - z_0| = \delta} |f(z) - f(z_0)|$; het laatste minimum wordt aangenomen zodat $\varepsilon > 0$ wegens $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$.

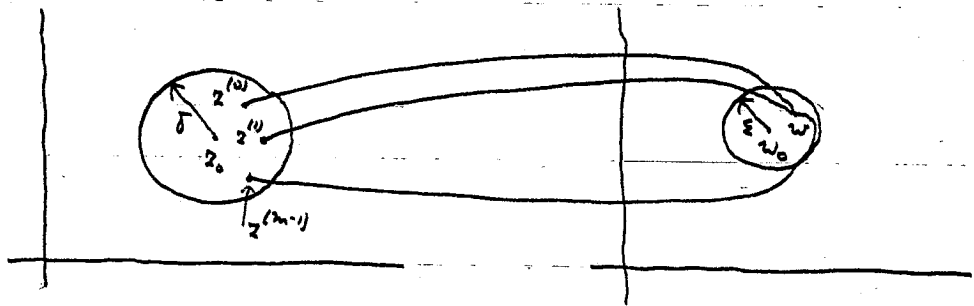
Door in de functie

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{z_0, \delta}} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz, \quad |w - w_0| < \varepsilon. \quad (C_{z_0, \delta}: |z - z_0| = \delta)$$

a)



b)



Merk op dat de integraal betekenis heeft, want voor $z \in C_{r_0, \delta}$ geldt

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - f(z_0)| - |z - f(z_0)| \geq \varepsilon - |z - z_0| > 0.$$

Volgens een stelling uit de functietheorie (zie Algebra en Analyse, 8.5.1) is $N(w)$ gelijk aan het aantal nulpunten van de functie $f(z) - w$ binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$, waarbij meervoudige nulpunten meervoudig geteld worden.

Bedenk nu dat $N(w)$ continue is (zelf analytisch) en alleen geheel waarden aanneemt.

Daaruit volgt $N(w) = \text{Constante} = N(w_0)$ voor $|w - w_0| < \varepsilon$.

Wegens $f(z_0) = w_0$ heeft de functie $f(z) - w_0$ een nulpunt $z = z_0$, eventueel meervoudig.

Wij vinden dus $N(w_0) \geq 1$ en vervolgens $N(w) \geq 1$, d.w.z. bij elke w met $|w - w_0| < \varepsilon$ is er een z (misschien meer) met $|z - z_0| < \delta$ en $f(z) - w = 0$, $f(z) = w$. \square

De volgende stelling geeft een verfyning van het voorgaande resultaat.

Stelling 2.2. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, zij $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, en zij $f(z_0) = w_0$.

a) Zij $f'(z_0) \neq 0$, dan geldt

$$\forall \varepsilon < \Delta \exists \delta > 0 (|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists! z (|z - z_0| < \delta \wedge f(z) = w)).$$

b) Zij m geheel en > 1 , zij $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, en zij $f(z) \neq w_0$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$. Dan geldt

$$\forall \varepsilon < \Delta \exists \delta > 0 (0 < |w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \text{er bestaan precies } m \text{ onderling verschillende getallen } z^{(k)}, \dots, z^{(m-1)} \text{ met } |z^{(k)} - z_0| < \delta \wedge f(z^{(k)}) = w \text{ voor } k=0, 1, \dots, m-1).$$

Bewijs. Net als in het bewijs van stelling 2.1 voeren we in de functie $N(w)$, $N(w)$ is gelijk aan het aantal nulpunten van $f(z) - w$ binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$ (ε en δ zijn dezelfde als in het bewijs van stelling 2.1). Dan geldt weer $N(w) = N(w_0)$ voor $|w - w_0| < \varepsilon$.

a) Uit $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) \neq 0$, $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, volgt dat $f(z) - w_0$ een enkelvoudig nulpunt $z = z_0$ heeft binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$; dus $N(w_0) = 1$.

Dan is ook $N(w) = 1$, d.w.z. bij elke w met $|w - w_0| < \varepsilon$ is er precies één z met $|z - z_0| < \delta$ en $f(z) - w = 0$, $f(z) = w$.

b) Uit $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, volgt dat $f(z) - w_0$ een m -voudig nulpunt $z = z_0$ heeft binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$; dus $N(w_0) = m$. Dan is ook $N(w) = m$, d.w.z. voor $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ heeft de functie

$f(z) - w$ totaal m nulpunten binnen de cirkel $|z - z_0| < \delta$; z_0 kan geen nulpunt zijn. De m nulpunten zijn enkelvoudig wegens $f'(z) \neq 0$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$. Daaruit volgt:

bij elke w met $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ zijn er precies m onderling verschillende getallen $z^{(k)}$, $k=0, 1, \dots, m-1$, met $0 < |z^{(k)} - z_0| < \delta$ en $f(z^{(k)}) - w = 0$, dus $f(z^{(k)}) = w$. \square

$z^{(k)}$, $k=0,1,\dots,m-1$, met $|z^{(k)} - z_0| < \delta$ en $f(z^{(k)}) = w$, $f(z^{(0)}) = w_0$. \square

In het geval van stelling 2.2a behoort er bij elke w met $|w - w_0| < \varepsilon$ precies één z met $|z - z_0| < \delta$, zodat $w = f(z)$. De functie $w = f(z)$ besit dan een inverse functie $z = g(w)$ gedefinieerd voor $|w - w_0| < \varepsilon$. Uit stelling 2.2a blijkt dan:

$$|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow |g(w) - z_0| < \delta \text{ en } f(g(w)) = w.$$

We tonen nu aan dat de inverse functie $g(w)$ analytisch is in een omgeving van w_0 .

Stelling 2.3. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, zij $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$, zij $f(z_0) = w_0$, en zij $f'(z_0) \neq 0$. Dan is er een $\varepsilon > 0$, zo dat in $|w - w_0| < \varepsilon$ een analytische functie $g(w)$ bestaat die de inverse is van $f(z)$, i.e.

$$|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow |g(w) - z_0| < \Delta \text{ en } f(g(w)) = w.$$

Bewijs. Kies een δ met $0 < \delta < \Delta$, en neem $\varepsilon = \min_{|z - z_0| = \delta} |f(z) - f(z_0)|$ (zie bewijs van stelling 2.1).

Zij voort weer $N(w) =$ aantal nulpunten van $f(z) - w$ binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$. Uit het bewijs van stelling 2.2a citeren we: $N(w) = 1$ voor $|w - w_0| < \varepsilon$, d.w.z. voor elke w met $|w - w_0| < \varepsilon$ heeft $f(z) - w$ precies één nulpunt binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$. Noem dit nulpunt $z = g(w)$, dan is $|g(w) - z_0| < \delta < \Delta$ en $f(g(w)) = w$, i.e. $g(w)$ is de inverse functie van $f(z)$. Volgens een stelling uit de functietheorie (Algebra en Analyse 8.5.3) is het nulpunt $z = g(w)$ voor h stellen door

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{z_0, \delta}} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz, \quad |w - w_0| < \varepsilon.$$

Met een bekende stelling over het analytisch zijn van integralen (zie Algebra en Analyse 8.3.19) volgt nu: $g(w)$ is analytisch voor $|w - w_0| < \varepsilon$. \square

Toevoeging. In het geval van stelling 2.2b bestaan er bij elke w met $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ precies m onderling verschillende getallen $z^{(k)}$, $k=0,1,\dots,m-1$, met $|z^{(k)} - z_0| < \delta$, zodat $f(z^{(k)}) = w$. De functie $w = f(z)$ besit dan m inverse functies $z^{(k)} = g_k(w)$, gedefinieerd voor $|w - w_0| < \varepsilon$. Uit stelling 2.2b blijkt dan

$$|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow |g_k(w) - z_0| < \delta \text{ en } f(g_k(w)) = w \text{ voor } k=0,1,\dots,m-1.$$

Men kan bewijzen dat de functies $g_k(w)$ analytisch zijn voor $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ met een snede vanuit w_0 evenwijdig aan de negatieve reële as; het punt w_0 is namelijk vertakkingpunt van $g_k(w)$.

Beschouw als voorbeeld de functie $w = f(z) = z^m$, m geheel en > 1 , in een omgeving van $z_0 = 0$. In een omgeving van $w_0 = 0$ besit $w = z^m$ de inverse functies

$$z = g_k(w) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{m}\right) w^{\frac{1}{m}}, \quad k=0,1,\dots,m-1.$$

Hierbij wordt onder $w^{\frac{1}{m}}$ de hoofdwertde verstaan: $w^{\frac{1}{m}} = |w|^{\frac{1}{m}} \exp\left(\frac{i}{m} \arg w\right)$ met $-\pi < \arg w \leq \pi$.

De inverse functies $g_f(w)$ zijn dan analytisch in het complexe w -vlak met uitzondering van de negatieve reële as.

Formule van Bürmann-Lagrange. We gaan uit van stelling 2.3 en nemen daarin gemakshalve $z_0 = 0$, $w_0 = 0$. Over de functie $f(z)$ wordt dus verondersteld: $f(z)$ is analytisch voor $|z| < \delta$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $f(z) \neq 0$ voor $0 < |z| < \delta$. De functie $w = f(z)$ besit dan de inverse functie $z = g(w)$, analytisch voor $|w| < \varepsilon$, en gegeven door

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,\delta}} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,\delta}} \frac{z f'(z)}{f(z)} \left[1 - \frac{w}{f(z)}\right]^{-1} dz, \quad |w| < \varepsilon.$$

Voor $z \in C_{0,\delta}$ is $|f(z)| \geq \varepsilon$ (zie de definitie van ε in het bewijs van stelling 2.3), waarna $|\frac{w}{f(z)}| < 1$ voor $z \in C_{0,\delta}$, $|w| < \varepsilon$. De factor $[1 - w/f(z)]^{-1}$ is dan te ontwikkelen in een uniform convergente machtsreeks, waarna door termgewijze integratie volgt

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} w^n \int_{C_{0,\delta}} \frac{z f'(z)}{[f(z)]^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$$

met

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,\delta}} \frac{z f'(z)}{[f(z)]^{n+1}} dz.$$

Hiermee is $g(w)$ ontwikkeld in een Taylorreeks rond $w=0$ met coëfficiënten b_n . De formule voor b_n is nuq als volgt te herleiden. Voor $n=0$ is

$$b_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,\delta}} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

doer de integrand analytisch is binnen $C_{0,\delta}$ (de pool $z=0$ wordt opgeheven); dit klopt met $b_0 = g(0) = 0$.

Voor $n > 0$ volgt door partiële integratie

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{2\pi i n} \int_{C_{0,\delta}} z d[(f(z))^{-n}] = \frac{1}{2\pi i n} \int_{C_{0,\delta}} \frac{dz}{[f(z)]^n} = \\ &= \frac{1}{2\pi i n} \int_{C_{0,\delta}} \left[\frac{z}{f(z)}\right]^n \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{z}{f(z)}\right] \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

De laatste overgang volgt uit Algebra en Analyse 8.3.20. De uitkomst voor b_n staat bekend onder de naam formule van Bürmann-Lagrange, 1770.

22. Maximum-modulus principe, lemma van Schwarz.

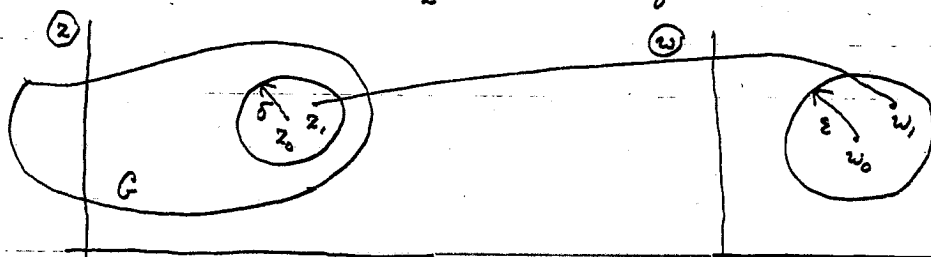
Maximum-modulus principe (I) Zij $f(z)$ analytisch en niet constant in een gebied G , en zij $|f(z)| \leq M$ in G . Dan geldt $|f(z)| < M$ in G .

Bewijs (alternatief). We geven een bewijs uit het ongerijmde. Stel er is een punt $z_0 \in G$ met $|f(z_0)| = |w_0| = M$. Laat dan $|z - z_0| < \delta$ een omgeving van z_0 zijn geheel binnen G . Volgens stelling 2.1 bestaat er bij δ een $\varepsilon > 0$ zodat

$$|w - w_0| < \varepsilon \implies \exists z (|z - z_0| < \delta \wedge f(z) = w).$$

Kies nu een punt w_1 met $|w_1 - w_0| < \varepsilon$ en $|w_1| > |w_0| = M$. Bij dit punt w_1 bestaat een punt z_1 met $|z_1 - z_0| < \delta$ en $f(z_1) = w_1$. Er geldt dan $z_1 \in G$ en $|f(z_1)| = |w_1| > M$, in tegenspraak met het gegeven $|f(z)| \leq M$ in G . Dus de beginonderstelling is onjuist en er geldt $|f(z)| < M$ in G . \square

Bewijs. Zij $z_0 \in G$, $f(z_0) = w_0$, en laat $|z - z_0| < \delta$ een omgeving van z_0 zijn geheel binnen G . Volgens stelling 2.1 bestaat er bij δ een $\varepsilon > 0$ zodat

$$|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists z (|z - z_0| < \delta \wedge f(z) = w).$$


Kies nu een punt w , met $|w - w_0| < \varepsilon$ en $|w_0| > |w|$. Bij dit punt w , bestaat een punt z , met $|z - z_0| < \delta$ en $f(z) = w$. Er geldt dan $z \in G$ en $|f(z_0)| < |f(z)|$. Uit het laatste volgt $|f(z_0)| < \sup_{z \in G} |f(z)| \leq M$, $|f(z_0)| < M$ voor elke $z_0 \in G$. \square

Opmerking. Voor een ander bewijs van het maximum-modulus principe, zie Algebra en Analyse p. 4.13.

Men kan het maximum-modulus principe ook op de volgende wijze formuleren:
 I. Laat $f(z)$ analytisch zijn in een gebied G , dan neemt $|f(z)|$ geen maximum aan in G , tenzij $f(z)$ constant is.

III. Zij $f(z)$ analytisch in een begrensd gebied G met rand C , en zij $f(z)$ continu in $\bar{G} = G \cup C$. Dan geldt

$$\max_{z \in \bar{G}} |f(z)| = \max_{z \in C} |f(z)|,$$

i.e. $|f(z)|$ neemt zijn maximum aan op de rand C .

Als $f(z)$ niet constant is in G , dan geldt

$$|f(z_0)| < \max_{z \in C} |f(z)| \text{ voor } z_0 \in G,$$

i.e. $|f(z)|$ neemt zijn maximum niet aan in G .

Lemma van Schwarz, 1869. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$, zij $|f(z)| \leq 1$ voor $|z| < 1$, en zij $f(0) = 0$. Dan is

$$\text{of } |f(z)| < |z| \text{ voor } 0 < |z| < 1, \quad |f'(0)| < 1,$$

$$\text{of } f(z) = z e^{i\alpha} \text{ voor } |z| < 1, \text{ met } \alpha \text{ reëel (zodat } |f(z)| = |z|).$$

Bewijs. Voor in de functie

$$g(z) = \begin{cases} f'(0) & \text{voor } z=0, \\ f(z)/z & \text{voor } 0 < |z| < 1. \end{cases}$$

Dan is $g(z)$ analytisch voor $|z| < 1$; bedenkt dat de singulariteit in $z=0$ ophefbaar is

wegens $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z = f'(0)$. Pas het maximum-modulus principe (in de formulering III) toe op $g(z)$ voor $|z_0| < \rho < 1$, geldt

$$|g(z_0)| \leq \max_{|z|=\rho} |g(z)| = \frac{1}{\rho} \max_{|z|=\rho} |f(z)| \leq \frac{1}{\rho}.$$

Neem hierin $\rho \rightarrow 1$, dan volgt $|g(z_0)| \leq 1$ voor $|z_0| < 1$. Pas nu nogmaals het maximum-modulus principe (in de formulering I) toe, dan vinden we

$$\text{of } |g(z)| < 1 \Rightarrow |f(z)| < |z| \text{ voor } 0 < |z| < 1, |f'(0)| < 1,$$

$$\text{of } g(z) = a (= \text{constant}) \text{ met } |a| \leq 1.$$

Het laatste geval valt nog in tweeën uiteen:

$$\text{of } |a| < 1 \Rightarrow |f(z)| = |az| < |z| \text{ voor } 0 < |z| < 1, |f'(0)| = |a| < 1,$$

$$\text{of } |a| = 1 \Rightarrow a = e^{i\alpha} \text{ met } \alpha \text{ reëel, } f(z) = ze^{i\alpha} \text{ voor } |z| < 1. \quad \square$$

23. Conforme afbeelding.

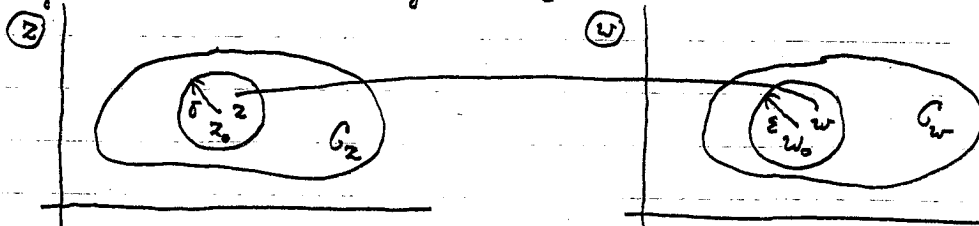
zij de functie $f(z)$ analytisch en niet constant in een gebied G_z in het complexe z -vlak. Door de afbeelding $w = f(z)$ wordt G_z afgebeeld op de beeldverzameling $G_w := f(G_z)$ in het complexe w -vlak.

Stelling 2.4. G_w is een gebied.

Bewijs. Zij $w_0 \in G_w$ en $w_0 = f(z_0)$ met $z_0 \in G_z$. Laat $|z - z_0| < \delta$ een omgeving van z_0 zijn geheel binnen G_z . Volgens stelling 2.1 bestaat er bij δ een $\varepsilon > 0$ zodat

$$|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists z (|z - z_0| < \delta \wedge f(z) = w).$$

De omgeving $|w - w_0| < \varepsilon$ van w_0 ligt dus geheel in G_w . G_w is derhalve open.



Neem twee punten $w_1 \in G_w, w_2 \in G_w$ met originele $z_1 \in G_z, z_2 \in G_z$. Daar G_z samenhangend is, zijn z_1 en z_2 te verbinden door een continue kromme k in G_z . Het beeld van k onder $w = f(z)$ is een continue kromme in G_w die w_1 en w_2 verbindt. G_w is dus samenhangend.

Definitie. Een functie $f(z)$ heet univalent (eng. simple, du.: schlicht) in G_z als

$$\forall z_1 \in G_z \forall z_2 \in G_z (f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2)$$

ofewel als

$$\forall z_1 \in G_z \forall z_2 \in G_z (z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)).$$

Definitie. De afbeelding van G_2 op G_w door de functie $w = f(z)$ heet conform als $f(z)$ in G_2 analytisch en univalent is.

Stelling 2.5. Zij $f(z)$ analytisch voor $|z - z_0| < \Delta$, en zij $f'(z_0) \neq 0$. Dan bestaat er een δ met $0 < \delta < \Delta$, zodat ieder gebied G_2 binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$ door $f(z)$ conform afgebeeld wordt.

$$\text{Zij } f(z_0) = w_0.$$

Bewijs. Uit $f'(z_0) \neq 0$ volgt dat $f(z)$ niet constant is. Er is dan een Δ' met $0 < \Delta' < \Delta$, zodat $f(z) \neq f(z_0)$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta'$. Pas nu stelling 2.2a toe: kies een δ' met $0 < \delta' < \Delta'$, dan bestaat daarbij een $\varepsilon > 0$ zodat

$$|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists! z \text{ (} |z - z_0| < \delta' \wedge f(z) = w \text{)}.$$

Omdat $f(z)$ continu is in z_0 bestaat er bij deze ε een δ met $0 < \delta < \delta'$ zodat

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| = |w - w_0| < \varepsilon.$$

Laat nu G_2 een gebied zijn binnen de cirkel $|z - z_0| = \delta$. Door $w = f(z)$ wordt G_2 afgebeeld op een gebied G_w binnen de cirkel $|w - w_0| = \varepsilon$. Bij elke $w \in G_w$ bestaat er precies één $z \in G_2$ zodat $w = f(z)$, m.a.w. $f(z)$ is univalent in G_2 . De functie $f(z)$ is ook analytisch in G_2 . Dus de afbeelding van G_2 op G_w door $w = f(z)$ is conform. \square

Stelling 2.6. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van G_2 op G_w , dan is $f'(z) \neq 0$ in G_2 .

Bewijs. We geven een bewijs uit het ongerijnde. Stel er is een punt $z_0 \in G_2$ met $f'(z_0) = 0$ en ook $f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, maar $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ voor zekere gehele $m > 1$. Kies Δ zo dat $f(z) \neq f(z_0)$ en $f'(z) \neq 0$ voor $0 < |z - z_0| < \Delta$. Zij $f(z_0) = w_0$. Pas nu stelling 2.2b toe: kies een δ met $0 < \delta < \Delta$, dan bestaat daarbij een $\varepsilon > 0$ zodat

$$0 < |w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \text{er bestaan } m \text{ verschillende getallen } z^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1 \\ \text{met } |z^{(k)} - z_0| < \delta \text{ en } f(z^{(k)}) = w, k = 0, 1, \dots, m-1.$$

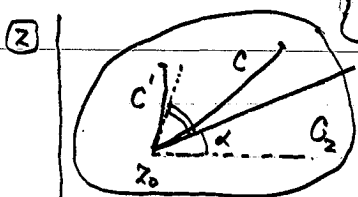
De waarde w wordt dus door de functie f in m verschillende punten $z^{(k)}$ aangenomen. Dit betekent dat $f(z)$ niet univalent is, zodat de afbeelding niet conform is. Hiermee is een tegenspraak bereikt, dus $f'(z) \neq 0$ in G_2 . \square

Uit stelling 2.6 volgt: $f'(z) \neq 0$ in G_2 is een nodige voorwaarde opdat $w = f(z)$ een conforme afbeelding is van G_2 op G_w . Uit stelling 2.5 volgt dat deze voorwaarde lokaal (in het klein) tevens voldoende is. Globaal (in het groot) is de voorwaarde echter niet voldoende, zoals blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld: Zij $w = f(z) = z^4$ en $G_2 = \{z \mid |\arg z| < \pi/3\}$, dan is $f'(z) \neq 0$ in G_2 ; de afbeelding is echter niet conform.

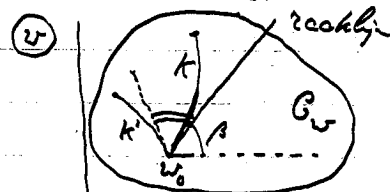
omdat $f(z) = z^2$ niet univalent is in G_2 , immers $f(ae^{i\pi/4}) = f(ae^{-i\pi/4}) = -a^2$ voor $a > 0$.

De naam conforme afbeelding komt van de meetkundige eigenschap dat de afbeelding "gelijkvormig" of (rechtstreeks) hoektrouw of isogonaal is, d.w.z. twee elkaar snijdende krommen in het z -vlak worden afgebeeld op twee krommen in het w -vlak die elkaar onder dezelfde hoek snijden.

Laat $w = f(z)$ een conforme afbeelding zijn van G_2 op G_w , dan is $f'(z) \neq 0$ in G_2 (stelling 2.6). Zij $z_0 \in G_2$ en laat $C: z = z(t), t_0 \leq t \leq t_1$, een boog in G_2 zijn met beginpunt z_0 , i.e. $z(t_0) = z_0$. De raaklijn in z_0 aan C wordt gegeven door $z = z_0 + z'(t_0)\tau, \tau \geq 0$; deze maakt een hoek α met de positieve reële as.



$\alpha = \arg(z'(t_0))$



Onder $w = f(z)$ wordt C afgebeeld op de boog $K: w = f(z(t)),$ in G_w met beginpunt $w_0 = f(z_0)$. De raaklijn in w_0 aan K wordt gegeven door $w = w_0 + f'(z_0)z'(t_0)\tau, \tau \geq 0$; deze maakt een hoek $\beta = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$ met de positieve reële as. Nu is $\beta - \alpha = \arg f'(z_0)$, i.e. bij de afbeelding is de raaklijn over een vaste hoek $\arg f'(z_0)$ gedraaid. Beschouw nu tweebogen C en C' vanuit z_0 met als beeld de tweebogen K en K' vanuit w_0 . De raaklijnen aan K en K' in w_0 zijn t.o.v. de raaklijnen aan C en C' in z_0 over een zelfde hoek $\arg f'(z_0)$ gedraaid. Daaruit volgt dat K en K' elkaar snijden onder dezelfde hoek als C en C' .

In het voorgaande is essentieel dat $f'(z_0) \neq 0$ is. Neem als voorbeeld: $w = f(z) = z^2, z_0 = 0, w_0 = 0$. De positieve reële z -as wordt dan afgebeeld op de positieve reële w -as, en de positieve imaginair z -as op de negatieve reële w -as. De betreffende hoek, $\frac{\pi}{2}$ in het z -vlak en π in het w -vlak, wordt bij deze afbeelding verdubbeld. Dit laatste hangt samen met $f'(z_0) = 0, f''(z_0) \neq 0$. Algemeen geldt: indien $f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$, dan wordt de hoek tussen twee krommen die elkaar snijden in z_0 , onder de afbeelding $w = f(z)$ vermenigvuldigd met n .

Uit het college Wiskunde 50, hfdst. VIII, §2 citeren we: Een conforme afbeelding $w = f(z)$ is lokaal, d.w.z. in een omgeving van z_0 , een combinatie van een vermenigvuldiging vanuit z_0 met de factor $|f'(z_0)|$ en een draaiing over de hoek $\arg f'(z_0)$. Een klein driehoekje met hoekpunt z_0 en zijden l_1, l_2 , wordt afgebeeld op een gelijkvormig driehoekje met hoekpunt $w_0 = f(z_0)$ en zijden $|f'(z_0)|l_1, |f'(z_0)|l_2$, gedraaid t.o.v. het eerste driehoekje over de hoek $\arg f'(z_0)$.

Opmerking. De afbeelding door een analytische, univalente functie is rechtstreeks hoektrouw. Omgekeerd geldt:

Stelling. Als de continue differentieerbare afbeelding $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ met Jacobiaan $\neq 0$ rechtstreeks hoektrouw is, dan is $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ een analytische functie van $z = x + iy$.

Zie L. Nehari, Conformal mapping, Mc Graw-Hill, 1952, p. 150-152, voor een bewijs van deze stelling.

Stelling 2.7. Een conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op G_w heeft een invers afbeelding $z = g(w)$ van G_w op G_2 die ook conform is.

Bewijs. Uit de univalentie van $f(z)$ volgt dat er bij iedere $w \in G_w$ precies één $z \in G_2$ bestaat zodat $f(z) = w$. Noem deze $z = g(w)$, dan is $z = g(w)$ de inverse functie van $w = f(z)$. Daar $f'(z) \neq 0$ is in G_2 (stelling 2.6), volgt met stelling 2.3 dat $g(w)$ analytisch is in G_w . De functie $g(w)$ is voort univalent, immers

$$g(w_1) = g(w_2) \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow w_1 = w_2.$$

De afbeelding $z = g(w)$ is dan conform. □

Stelling 2.8. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van G_2 op G_w , en zij $t = g(w)$ een conforme afbeelding van G_w op G_t , dan is de samengestelde afbeelding $t = g \circ f(z)$ een conforme afbeelding van G_2 op G_t .

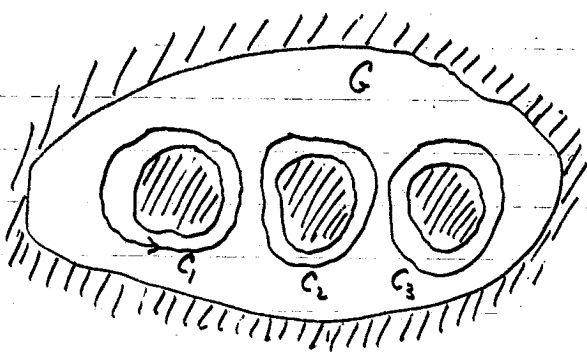
Bewijs. Triviaal. □

Een afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op G_w is conform indien $f(z)$ analytisch en univalent is in G_2 . Speciaal de laatste voorwaarde is soms moeilijk te verifiëren: er moet vastgesteld worden dat voor alle $z_1, z_2 \in G_2$: $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$. In de nu volgende stelling wordt de univalentie van $f(z)$ in G_2 teruggebracht tot de univalentie van $f(z)$ op de rand van G_2 , mits deze rand een Jordankromme is, d.i. een enkelvoudige gesloten kromme (zie Algebra en Analyse, p. 1.3).

Stelling 2.9. Zij C_2 een Jordankromme in het z -vlak met binnengebied G_2 , zij $f(z)$ analytisch in $G_2 \cup C_2$, en zij $f(z)$ univalent op C_2 . Dan is $w = f(z)$ een conforme afbeelding van G_2 op het binnengebied G_w van de Jordankromme $C_w := f(C_2)$ in het w -vlak. Als z de kromme C_2 in positieve zin doorloopt, dan doorloopt $w = f(z)$ de kromme C_w ook in positieve zin.

Bewijs. Het is duidelijk dat $C_w = f(C_2)$ een gesloten kromme is. Uit $f(z)$ univalent op C_2 volgt dat C_w enkelvoudig is: C_w is dus een Jordankromme. Als z C_2 doorloopt, dan doorloopt $w = f(z)$ de kromme C_w precies één keer.

F. Zwaegen: Hieruit volgt dat G_2 wordt afgebeeld in $G_{20} \cup G_{21}$. Evenwel volgens stelling 2.4 is het
 beeld $f(G_2)$ een gebied, dus G_2 wordt afgebeeld in G_{20} .



voorbeeld van een m -voudig
 samenhangend gebied met $m=4$;
 Jordankrommen G_1, G_2, G_3 .

Voer in de functies

$$N_1(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} \frac{dw}{w-w_0}, \quad N_2(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)-w_0} dz, \quad w_0 \notin C_w,$$

waarbij C_2 en C_w in positieve zin doorlopen worden. Onder de substitutie $w = f(z)$ gaat de eerste integraal over in de tweede zodat

$$(*) \quad N_1(w_0) = \pm N_2(w_0);$$

hierbij geldt het plusteken als een positieve omloop van z langs C_2 een positieve omloop van $w = f(z)$ langs C_w impliceert, en anders het minteken.

Nu is $N_1(w_0) = 0$ als w_0 buiten C_w ligt, en $N_1(w_0) = 1$ voor $w_0 \in C_w$. Volgens een stelling uit de functietheorie (Algebra en Analyse d.S.1) is $N_2(w_0)$ gelijk aan het aantal nulpunten van $f(z) - w_0$ binnen C_2 , oftewel $N_2(w_0)$ is gelijk aan het aantal punten $z \in C_2$ met $f(z) = w_0$.

Met (*) volgt nu $N_2(w_0) = 0$ als w_0 buiten C_w ligt, d.w.z. er zijn geen punten $z \in C_2$ met $f(z) = w_0$. Evenzo, voor $w_0 \in C_w$ is $N_1(w_0) = 1 = \pm N_2(w_0)$, d.w.z. er is precies één punt $z \in C_2$ met $f(z) = w_0$. Daarmee is aangetoond dat C_2 wordt afgebeeld op C_w en dat $f(z)$ univalent is op C_2 . De afbeelding $w = f(z)$ van C_2 op C_w is dan conform. Tevens is aangetoond dat in (*) het plusteken geldt, waaruit de bewering over de omloopzin volgt. \square

Stelling 2.10. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van een enkelvoudig samenhangend gebied G_2 op een gebied G_w , dan is G_w ook enkelvoudig samenhangend.

Bewijs. Zij C_w een willekeurige Jordankromme in G_w . Noem het origineel van C_w C_2 , dan is C_2 ook een Jordankromme, die binnen G_2 verloopt; immers de inverse afbeelding van C_w op C_2 is ook conform, en de inverse functie $z = g(w)$ is analytisch en univalent in G_w . Daar G_2 enkelvoudig samenhangend is, behoort het binnengebied van C_2 geheel tot G_2 (zie de definitie van enkelvoudig samenhangend in het college Wiskunde 50, hfdst. I, §3). Volgens stelling 2.9 beeldt $w = f(z)$ het binnengebied van C_2 conform af op het binnengebied van C_w . Dit laatste binnengebied behoort dus geheel tot G_w . Daarmee volgt (met definitie van enkelvoudig samenhangend zijn), dat G_w enkelvoudig samenhangend is. \square

Opmerking. Een gebied G heet m -voudig samenhangend als er $m-1$ Jordankrommen in G bestaan waarvan de binnengebieden geen punten gemeen hebben, terwijl elk van de binnengebieden een punt bevat dat niet tot G behoort. Zo is bijv. het ringvormig gebied $G := \{z \mid 1 < |z| < 2\}$ tweevoudig samenhangend. Inbreit is een m -voudig samenhangend gebied te omschrijven als een enkelvoudig samenhangend gebied met $m-1$ "gaten", zie figuur. Men kan bewijzen dat het beeld van een

(F) Invoege: Hieruit volgt dat G_2 wordt afgebeeld in $G_w \cup C_w$. Evenwel volgens stelling 2.4 is het beeld $f(G_2)$ een gebied, dus G_2 wordt afgebeeld in G_w .

n -voudig samenhangend gebied onder conforme afbeelding weer een n -voudig samenhangend gebied is.

24. Afbeeldingsstelling van Riemann

Laat G_2 resp. G_w gebieden zijn in het complexe z -vlak resp. w -vlak. Bestaat er dan een conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op G_w ? Volgens stelling 2.10 en de daaropvolgende opmerking moeten daartoe G_2 en G_w dezelfde samenhang hebben. We beperken de vraag nu verder tot enkelvoudig samenhangende gebieden G_2 en G_w . Ook dan is er niet altijd een conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op G_w zoals blijkt uit het volgende voorbeeld. Laat G_2 het hele z -vlak zijn en laat G_w een begreemd gebied in het w -vlak zijn, dan zou $f(z)$ begrensd en analytisch moeten zijn in het hele z -vlak, i.e. $f(z)$ is een begrensd gehele functie. Volgens de stelling van Liouville (Algebra en Analyse, D. 4.20) is dan $f(z) = \text{constant}$, welke uiteraard niet voldoet als afbeeldingsfunctie. Sluiten we gevallen als in dit voorbeeld uit, dan geldt de afbeeldingsstelling van Riemann (1851): Laat G_2 resp. G_w enkelvoudig samenhangende gebieden zijn welke niet het hele z -vlak resp. het hele w -vlak zijn, dan bestaat er een conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op G_w .

Ter voorbereiding behandelen we eerst het volgende lemma.

Lemma 2.11. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van de cirkelschijf $|z| < 1$ op de cirkelschijf $|w| < 1$, en zij $f(1) = 0$, $f'(1) > 0$, dan is $f(z) = z$ (identieke afbeelding).

Beweis. De functie $f(z)$ voldoet aan de voorwaarden uit het lemma van Schwarz, zodat of (i) $|f'(1)| < 1$, of (ii) $f(z) = ze^{i\alpha}$ voor $|z| < 1$ met $\alpha \in \mathbb{R}$, $|f'(1)| = 1$.

Laat $w = f(z)$ de inverse functie $z = g(w)$ bezitten. Dan voldoet $g(w)$ eveneens aan de voorwaarden uit het lemma van Schwarz, zodat

of (i) $|g'(0)| < 1$, of (ii) $g(w) = we^{i\beta}$ voor $|w| < 1$ met $\beta \in \mathbb{R}$, $|g'(0)| = 1$.

Wegens $f'(1)g'(0) = 1$, moet in beide gevallen alternatief (ii) worden genomen: $f(z) = ze^{i\alpha}$, $g(w) = we^{i\beta}$. Uit $f'(1) > 0$ volgt dan tenslotte $f(z) = z$, en ook $g(w) = w$. \square

Afbeeldingsstelling van Riemann (2). Zij G_2 een enkelvoudig samenhangend gebied dat niet het hele z -vlak is, en zij $z_0 \in G_2$. Dan is er een éénzijdig bepaalde conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op de cirkelschijf $|w| < 1$, zodanig dat $f(z_0) = 0$ en $f'(z_0) > 0$.

Opmerking. De laatste voorwaarden zijn equivalent met drie "reële" voorwaarden:

$\operatorname{Re} f(z_0) = 0$, $\operatorname{Im} f(z_0) = 0$, $\arg f'(z_0) = 0$. Zonder deze voorwaarden zijn er meêndig veel conforme afbeeldingen van G_2 op $|w| < 1$, waarbij nog over drie vrijheidsgraden beschikt kan worden.

Bewijs. Het bewijs van het existentiegedeelte is tamelijk diepzinmig en wordt hier achterwege gelaten; zie bijv.

Z. Nehari, Conformal mapping, Mc Graw-Hill, New York, 1952, p. 173-178;

L.V. Ahlfors, Complex analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1953, p. 172-174.

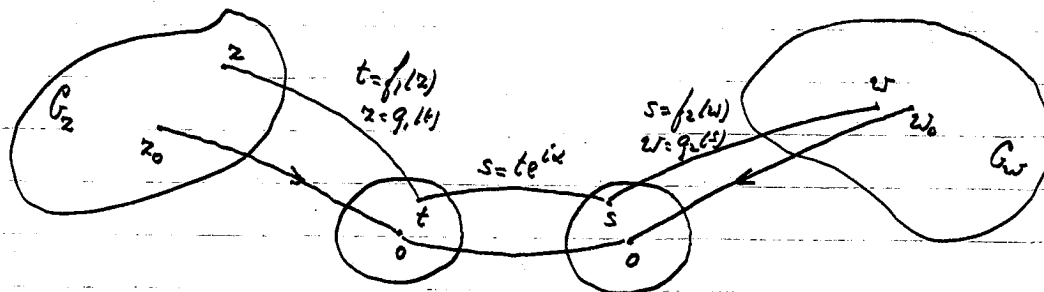
Om de eenduidigheid te bewijzen onderstellen we dat er twee conforme afbeeldingen $w = f_1(z)$, $w = f_2(z)$ van G_2 op $|w| < 1$ bestaan, met $f_k(z_0) = 0$, $f_k'(z_0) > 0$, $k=1,2$.
 Zij $z = g_2(w)$ de inverse functie behorend bij $w = f_2(z)$. Voer dan de samengestelde functie $h(w) = f_1(g_2(w))$, $|w| < 1$. Deze functie beeltd de cirkelschijf $|w| < 1$ conform af op zichzelf, terwijl $h(0) = f_1(g_2(0)) = f_1(z_0) = 0$, $h'(0) = f_1'(g_2(0)) g_2'(0) = f_1'(z_0) / f_2'(z_0) > 0$.
 Met het lemma 2.11 volgt dan $h(w) = w$, oftewel $f_1(g_2(w)) = w$ voor $|w| < 1$,
 $f_1(g_2(f_2(z))) = f_2(z)$ voor $z \in G_2$, $f_1(z) = f_2(z)$ voor $z \in G_2$. □

We geven nog een tweede, algemenere formulering van de afbeeldingstelling van Riemann.

Afbeeldingstelling van Riemann (II). Laat G_2 resp. G_w enkelvoudig samenhangende gebieden zijn welke niet het hele z -vlak resp. het hele w -vlak zijn, en zij $z_0 \in G_2$, $w_0 \in G_w$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. Dan is er een eenduidig bepaalde conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op G_w , zodanig dat $f(z_0) = w_0$ en $\arg f'(z_0) = \alpha$.

Opmerking. Ook hier wordt de conforme afbeelding eenduidig vastgelegd door een drietal reële voorwaarden: $\operatorname{Re} f(z_0) = \operatorname{Re} w_0$, $\operatorname{Im} f(z_0) = \operatorname{Im} w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$.

Bewijs. Zij $t = f_1(z)$ de conforme afbeelding van G_2 op $|t| < 1$ zodanig dat $f_1(z_0) = 0$, $f_1'(z_0) > 0$. Zij $s = g_2(w)$ de conforme afbeelding van G_w op $|s| < 1$ zodanig dat $f_2(w_0) = 0$, $f_2'(w_0) > 0$. Volgens de eerste versie van de afbeeldingstelling van Riemann bestaan deze conforme afbeeldingen en ze zijn eenduidig bepaald.



Noem de inverse functies van $t = f_1(z)$, $s = f_2(w)$, resp. $z = g_1(t)$, $w = g_2(s)$.

Voer nu de samengestelde afbeelding

$$t = f_1(z), \quad s = t e^{i\alpha}, \quad w = g_2(s) \implies w = g_2(e^{i\alpha} f_1(z)) =: f(z).$$

De aldus gevonden afbeelding $w = f(z)$ is een conforme afbeelding van G_2 op G_w .

Voorts geldt:

$$f(z_0) = g_2(e^{i\alpha} f_1(z_0)) = g_2(0) = w_0,$$

$$f'(z_0) = g_2'(e^{i\alpha} f_1(z_0)) e^{i\alpha} f_1'(z_0) = g_2'(0) e^{i\alpha} f_1'(z_0) = e^{i\alpha} \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(w_0)}, \quad \arg f'(z_0) = \alpha.$$

We tonen nog aan dat de gevonden conforme afbeelding eenduidig is. Stel daartoe dat er een tweede conforme afbeelding $w = \tilde{f}(z)$ van G_2 op G_w bestaat met eveneens

$$\tilde{f}(z_0) = w_0, \arg \tilde{f}'(z_0) = \alpha. \text{ Vorm dan de samengestelde afbeelding}$$

$$z = g_1(t), w = \tilde{f}(z), s = f_2(w), t' = s e^{-i\alpha} \Rightarrow t' = e^{-i\alpha} f_2(\tilde{f}(g_1(t))) =: h(t),$$

van $|t| < 1$ op $|t'| < 1$. Voor de functie $h(t)$ geldt

$$h(1) = e^{-i\alpha} f_2(\tilde{f}(g_1(1))) = e^{-i\alpha} f_2(\tilde{f}(z_0)) = e^{-i\alpha} f_2(w_0) = 0,$$

$$h'(1) = e^{-i\alpha} f_2'(\tilde{f}(g_1(1))) \tilde{f}'(g_1(1)) g_1'(1) = e^{-i\alpha} f_2'(w_0) \tilde{f}'(z_0) / f_1'(z_0), \quad h'(1) > 0.$$

Op grond van het lemma 2.11 is dan $h(t) = t$ voor $|t| < 1$, oftewel

$$e^{-i\alpha} f_2(\tilde{f}(g_1(t))) = t \text{ voor } |t| < 1, \quad f_2(\tilde{f}(g_1(t))) = t e^{i\alpha} \text{ voor } |t| < 1,$$

$$\tilde{f}(g_1(t)) = g_2(t e^{i\alpha}) \text{ voor } |t| < 1, \quad \tilde{f}(g_1(f_1(z))) = g_2(e^{i\alpha} f_1(z)) \text{ voor } z \in G_2,$$

$$\tilde{f}(z) = g_2(e^{i\alpha} f_1(z)) = f(z) \text{ voor } z \in G_2. \quad \square$$

De voorgaande stellingen hebben betrekking op de conforme afbeelding van een gebied G_2 op een gebied G_w ; hierbij is een gebied een open samenhangende verzameling (zie Algebra en Analyse 5.7.12). De afbeeldingsfunctie $f(z)$ is slechts gedefinieerd in het inwendige van G_2 en in het algemeen is er niet veel te zeggen over het gedrag van $f(z)$ als z nadert tot de rand C_2 van G_2 . Het name hoeft voor $z_0 \in C_2$, $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in G_2} f(z)$ niet te bestaan.

Voorbeelden: (i) $f(z) = \frac{1}{z}$, $G_2 = \{z \mid |z-1| < 1\}$, $G_w = \{w \mid \operatorname{Re} w > \frac{1}{2}\}$, $\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}, z \in G_2} f(z)$ bestaat niet.

(ii) $w = f(z) = \sqrt{z}$, G_2 is cirkelschijf $|z| < 1$ minus deede $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$, $\operatorname{Im} z = 0$,
 $G_w = \{w \mid |w| < 1 \wedge \operatorname{Re} w > 0\}$, $\lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}, z \in G_2} f(z)$ bestaat niet (limiet = $\pm \frac{1}{2} i \sqrt{2}$).

Indien $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in G_2} f(z) =: w_0$ wel bestaat, dan ligt w_0 op de rand C_w van G_w .

Zumers voor $z \in G_2$ is $f(z) \in G_w$, zodat $w_0 \in G_w$ of $w_0 \in C_w$. Stel $w_0 \in G_w$, dan volgt uit de continuïteit van de inverse afbeelding $z = g(w)$ in w_0 dat

$$g(w_0) = \lim_{w \rightarrow w_0, w \in G_w} g(w) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in G_2} g(f(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in G_2} z = z_0.$$

Aangezien echter $g(w_0) \in G_2$, $z_0 \in C_2$, vinden we een tegenspraak; dus $w_0 \notin G_w$, $w_0 \in C_w$.

Als de randen C_2 en C_w Jordankrommen zijn, dan bestaat de limiet als boven voor elke $z_0 \in C_2$.

Stelling 2.12. Laat G_2 resp. G_w gebieden zijn met rand C_2 resp. C_w , welke Jordankrommen zijn, en zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van G_2 op G_w . Dan bestaat voor elke $z_0 \in C_2$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in G_2} f(z) =: w_0 \text{ en } w_0 \in C_w.$$

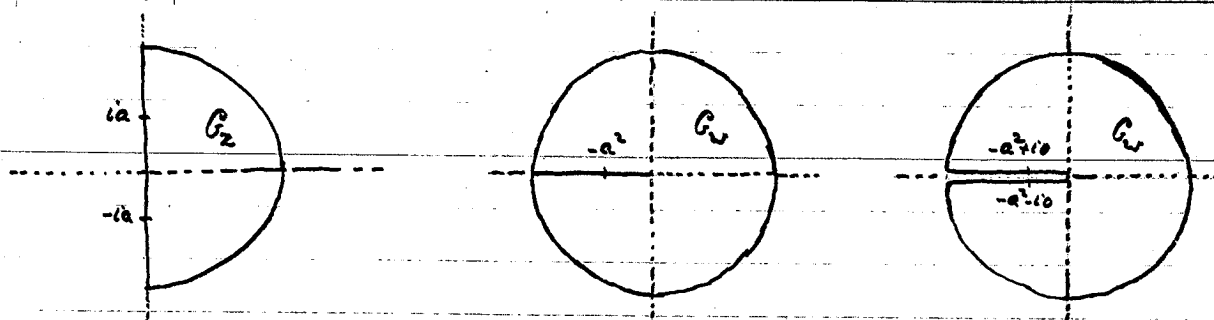
Definieer $f(z_0) = w_0$ voor $z_0 \in C_2$, dan is de aldus uitgebreide functie $f(z)$ continu op $G_2 \cup C_2$, en $w = f(z)$ beeldt $G_2 \cup C_2$ e n-eenduidig af op $G_w \cup C_w$. Als z de rand C_2

doorloopt in positieve zin, dan doorloopt $w=f(z)$ de rand C_w in positieve zin.

Voor het bewijs van deze stelling wordt verwezen naar

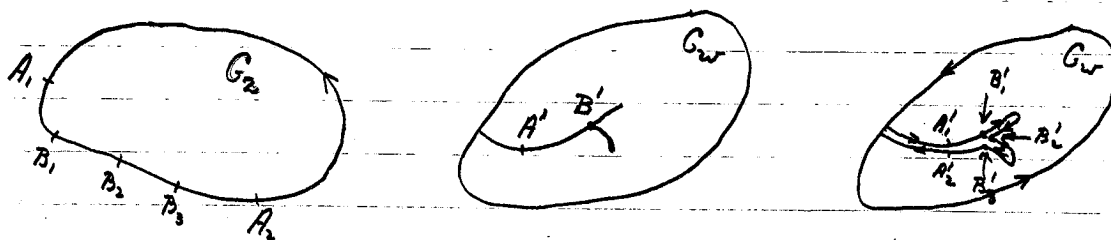
Z. Nehari, Conformal mapping, McGraw-Hill, 1952, p. 179-181.

We bespreken nog een voorbeeld van een conforme afbeelding van G_2 op G_w waarbij de rand C_w niet een Jordankromme is. Beschouw de conforme afbeelding $w=f(z)$ van $G_2 = \{z \mid |z| < 1 \wedge \operatorname{Re} z > 0\}$ op G_w , d.i. de cirkelschijf $|w| < 1$ minus de sneed $\boxed{= z^2}$ $-1 < \operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w = 0$.



Merkt op dat de punten $z = \pm ia$ op C_2 worden afgebeeld op hetzelfde punt $w = -a^2$ op C_w . De functie $w = z^2$ is niet univalent op G_2 . We zullen nu het punt $w = -a^2$ tellen als twee verschillende punten, zoals aangegeven in de recht vierfiguur: $w = -a^2 + i0$ op de bovenkant van de sneed correspondeert met $z = ia$; $w = -a^2 - i0$ op de onderkant van de sneed correspondeert met $z = -ia$. Met de sneed als dubbel geteld gebied dan weer stelling 2.12: $w=f(z) = z^2$ beeldt $G_2 \cup C_2$ een-eenduidig af op $G_w \cup C_w$.

Ook voor gebieden met meer gecompliceerde medes blijft de stelling 2.12 gelden, mits de punten van de sneed op een geschikte manier meervoudig geteld worden; zie het navolgende voorbeeld.



Het punt $A' \in C_w$ is beeld van twee punten A_1, A_2 op C_2 ; tel daarom A' als twee verschillende punten A'_1 en A'_2 . Het punt $B' \in C_w$ is beeld van drie punten B_1, B_2, B_3 op C_2 ; tel daarom B' als drie verschillende punten B'_1, B'_2 en B'_3 . De positieve omloopzin langs C_2 gaat over in een positieve omloopzin langs C_w (bij een positieve omloop ligt het gebied steeds aan de linkerhand).

2.5. Spiegelingsprincipe van Schwarz.

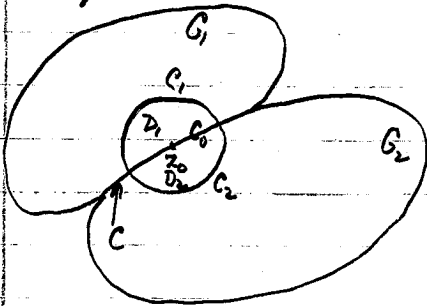
Stelling 2.13. Laat G_1 en G_2 disjuncte gebieden zijn waarvan de randen een gladde boog C gemeen hebben. Laat de functies $f_k(z)$ analytisch zijn in G_k en continu in $G_k \cup C$, $k=1,2$, en zij $f_1(z) = f_2(z)$ voor $z \in C$. Dan is de functie $f(z)$ gedefinieerd door

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1, \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in C, \\ f_2(z), & z \in G_2, \end{cases}$$

analytisch in $G_1 \cup C \cup G_2$.

Opmerking. De stelling drukt uit: Als twee analytische functies $f_1(z)$ en $f_2(z)$ continu aansluiten over een boog C , dan zijn ze elkaars analytische voortzetting.

Bewijs. We volstaan met te bewijzen dat $f(z)$ analytisch is op C .



Neem $z_0 \in C$ en teken een cirkel met middelpunt z_0 en straal ρ , zo klein dat $C_\rho: |z - z_0| = \rho$ geheel binnen $G_1 \cup C \cup G_2$ ligt. Over verder in de notaties:

$$G_1 = C_\rho \cap G_1, \quad G_2 = C_\rho \cap G_2;$$

$$D: |z - z_0| < \rho, \quad D_1 = D \cap G_1, \quad D_2 = D \cap G_2; \quad C_0 = C \cap D.$$

Op grond van de integraalformule van Cauchy [Algebra en Analyse 8.3.14] geldt nu:

voor $z \in D_1$ is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + C_0} \frac{f_1(t)}{t-z} dt = f_1(z), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2 + C_0} \frac{f_2(t)}{t-z} dt = 0;$$

voor $z \in D_2$ is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + C_0} \frac{f_1(t)}{t-z} dt = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2 + C_0} \frac{f_2(t)}{t-z} dt = f_2(z).$$

Hierbij worden de integratiecontouren in positieve zin doorlopen.

[N.B. In Algebra en Analyse 8.3.14 wordt de integraalformule van Cauchy bewezen onder de voorwaarde dat $f_{1,2}(z)$ analytisch is binnen en op de integratiecontour; de formule geldt echter ook onder de zwakker voorwaarde dat $f_{1,2}(z)$ analytisch is binnen de integratiecontour en continu is binnen en op de integratiecontour.]

Tel de voorgaande resultaten op:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + C_0} \frac{f_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2 + C_0} \frac{f_2(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2, \end{cases}$$

en bedenk dat de integraal langs C_0 wegvalt omdat $f_1(t) = f_2(t)$ op C_0 , en C_0 in tegengestelde richting doorlopen wordt. Er volgt dan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f_2(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(t)}{t-z} dt = f(z), \quad z \in D_1 \cup D_2.$$

De laatste betrekking zal ook gelden voor $z \in \mathbb{C}_0$, daar $f(z)$ en \int_C continu zijn in z . We vinden dus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt = f(z), \quad z \in D.$$

Met een bekende stelling over het analytisch zijn van integralen (zie Algebra en Analyse 8.3.19) volgt nu: $f(z)$ is analytisch in D , dus $f(z)$ is analytisch in z_0 . \square

Spiegelingsprincipe van Schwarz (I), 1869. Zij G een gebied boven de reële as, waarvan de rand een open interval C van de reële as bevat. Zij $f(z)$ analytisch in G , continu in $G \cup C$, en zij $f(z)$ reëel voor $z \in C$. Zij $G^* = \{z \mid \bar{z} \in G\}$, i.e. G^* is het gespiegelde van G t.o.v. de reële as. Dan is de functie $\bar{f}(z)$ gedefinieerd door

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup C, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in G^*, \end{cases}$$

analytisch in $G \cup C \cup G^*$.

Opmerking. Het spiegelingsprincipe drukt uit: De functie $f(z)$ laat zich door spiegeling analytisch voortzetten tot het gebied $G \cup C \cup G^*$.

Bewijs. We tonen eerst aan dat $\bar{f}(\bar{z})$ analytisch is in G^* . Schrijf daar toe

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad z = x + iy \in G,$$

dan voldoen $u(x, y)$ en $v(x, y)$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen:

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

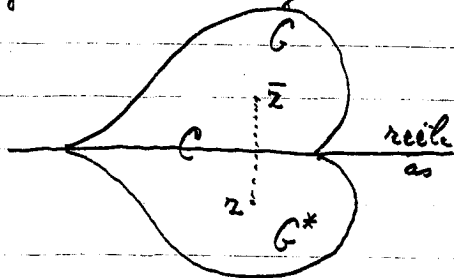
Voorts is

$$\bar{f}(\bar{z}) = u(x, -y) - i v(x, -y), \quad z \in G^*$$

Mit (*) volgt dat ook de functies $u(x, -y)$, $-v(x, -y)$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen:

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(x, -y)] = \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) = \frac{\partial}{\partial y} [-v(x, -y)]; \quad \frac{\partial}{\partial y} [u(x, -y)] = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, -y) = -\frac{\partial}{\partial x} [-v(x, -y)].$$

Daaruit volgt dat $\bar{f}(\bar{z})$ analytisch is in G^* . Zie Algebra en Analyse 6.7.6 voor de hier gebruikte stellingen over de Cauchy-Riemann vergelijkingen.

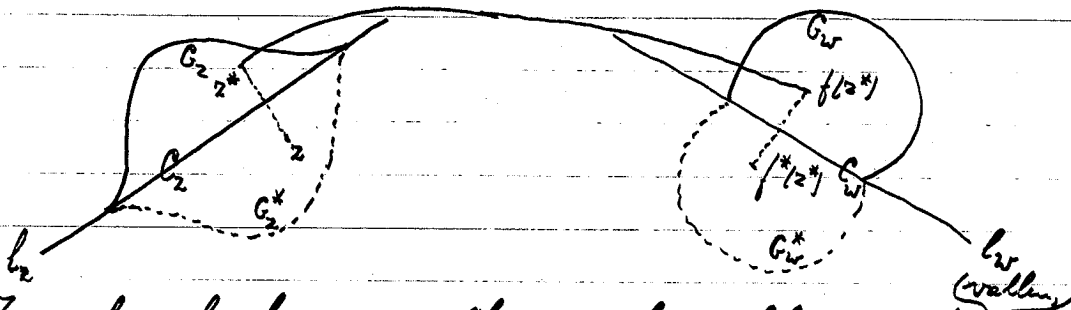


Het spiegelingsprincipe volgt nu uit de voorgaande stelling 2.13 toegepast op de functies $f_1(z) = f(z)$ analytisch in $G_1 = G$, en $f_2(z) = \bar{f}(\bar{z})$ analytisch in $G_2 = G^*$. Te verifiëren is nog dat $f(z)$ en $\bar{f}(\bar{z})$ continu aansluiten op C . Dit laatste volgt uit het gegeven dat $f(z)$ reëel is voor $z \in C$:

$$f(z) = \overline{f(z)} = \bar{f}(\bar{z}) \quad \text{voor } z \in C. \quad \square$$

We geven nu een tweede, algemenere formulering van het spiegelingprincipe van Schwarz in termen van conforme afbeeldingen.

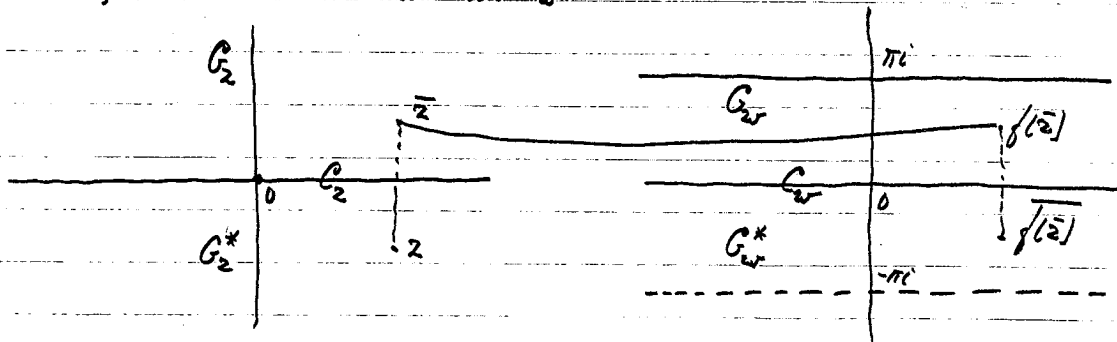
Spiegelingprincipe van Schwarz (II). Zij G_2 resp. G_w een gebied dat geheel aan een zijde van een rechte l_2 resp. l_w ligt en waarvan de rand een open interval C_2 resp. C_w met l_2 resp. l_w gemeen heeft. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van G_2 op G_w , zij $f(z)$ continu in $G_2 \cup C_2$, en zij $C_w = f(C_2)$. Zij G_2^* resp. G_w^* het gebied verkregen door spiegeling van G_2 resp. G_w aan l_2 resp. l_w . Definieer voor $z \in G_2^*$: $f(z) = \overline{f(z^*)}$, waarin z^* wordt verkregen uit z door spiegeling aan l_2 en $f^*(z^*)$ uit $f(z^*)$ door spiegeling aan l_w . Dan is de aldus voortgezte functie $w = f(z)$ een conforme afbeelding van $G_2 \cup C_2 \cup G_2^*$ op $G_w \cup C_w \cup G_w^*$; zie onderstaande figuur.



Indien l_2 en l_w langs de reële as van het z -vlak resp. w -vlak is de formulering (II) van het spiegelingprincipe in wezen dezelfde als de formulering (I). Het geval van algemene l_2, l_w kan hier toe teruggebracht worden door draaiingen en translaties.

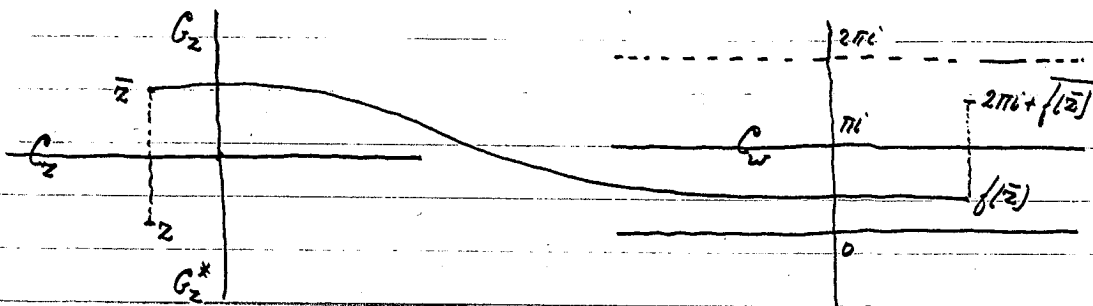
(hoofdwaaarden van de Logarithme)

Voorbeeld. De functie $w = f(z) = \log z$ beeldt het bovenhalfvlak G_2 : $\text{Im } z > 0$ conform af op de strook G_w : $0 < \text{Im } w < \pi$. De positieve reële z -as wordt daarbij afgebeeld op $\text{Im } w = 0$, d.i. de onderend van G_w ; de negatieve reële z -as wordt afgebeeld op $\text{Im } w = \pi$, d.i. de bovenzijde van G_w .



We kunnen nu op twee manieren spiegelen. Neem eerst voor C_2 de positieve reële z -as, dan is C_w : $\text{Im } w = 0$, G_2^* : $\text{Im } z < 0$, G_w^* : $-\pi < \text{Im } w < 0$. Voor $z \in G_2^*$ definiëren we nu: $f(z) = \overline{f(\bar{z})} = \log \bar{z} = \log |\bar{z}| - i \arg(\bar{z}) = \log |z| + i \arg z = \log z$ (hoofdwaaarden). De functie $w = f(z) = \log z$ beeldt dan $G_2 \cup C_2 \cup G_2^*$ (d.i. het hele z -vlak met een snede langs de negatieve reële as) conform af op $G_w \cup C_w \cup G_w^*$ (d.i. de strook $-\pi < \text{Im } w < \pi$).

Als tweede mogelijkheid is voor C_2 de negatieve reële z -as te nemen, dan is
 $C_w: \text{Im } w = \pi$, $G_2^*: \text{Im } z < 0$, $G_w: \pi < \text{Im } w < 2\pi$.



Voor $z \in G_2^*$ definiëren we dan:

$$f(z) = 2\pi i + \sqrt{|z|} = 2\pi i + \log \bar{z} = 2\pi i + \log |z| - i \arg \bar{z} = 2\pi i + \log z + i \arg z = 2\pi i + \log z$$

(hoofdwaarde). Voor de functie

$$w = f(z) = \begin{cases} \log z, & z \in G_2 \cup C_2, \text{ (hoofdwaarde van de logaritme)} \\ 2\pi i + \log z, & z \in G_2^*, \end{cases}$$

wordt $G_2 \cup C_2 \cup G_2^*$ (d.i. het hele z -vlak met een snede langs de positieve reële as) conform afgebeeld op $G_w \cup C_w \cup G_w^*$ (d.i. de strook $0 < \text{Im } w < 2\pi$). Deze afbeeldingsfunctie is kort te schrijven als

$$w = f(z) = \log z = \log |z| + i \arg z, \quad z \in G_2 \cup C_2 \cup G_2^*.$$

onder de afspraak $0 < \arg z < 2\pi$. Uiteraard is dit argument en de bijbehorende logaritme niet meer de hoofdwaarde.

3. Conforme afbeelding door elementaire functies.

3.1. Gebroken lineaire afbeelding.

Een gebroken lineaire afbeelding (GLA) of Möbius transformatie is een afbeelding van de vorm

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

met a, b, c, d complex, en $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. Merk op dat $ad - bc = 0$ zou betekenen $f(z) = \text{constant}$.

De functie $f(z)$ is analytisch voor $z \neq -d/c$ met afgeleide

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

De functie $w = f(z)$ bezit de inverse functie $z = g(w)$ als volgt te bepalen:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad czw + dw = az + b, \quad dw - b = z(-cw + a), \quad z = g(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

De inverse functie $g(w)$ is analytisch voor $w \neq a/c$ en de inverse afbeelding $z = g(w)$ is eveneens gebroken lineair. Het feit bestaan van de inverse functie $g(w)$ volgt dat $f(z)$ univalent is. De GLA $w = f(z)$ is dan een conforme afbeelding van het complexe z -vlak minus $z = -d/c$ op het complexe w -vlak minus $w = a/c$.

We breiden nu het complexe z -vlak en w -vlak uit met de punten $z = \infty$ en $w = \infty$, en stellen

$$f(-d/c) = \infty, \quad f(\infty) = a/c; \quad g(a/c) = \infty, \quad g(\infty) = -d/c.$$

De GLA $w = f(z)$ is dan een conforme afbeelding van het uitgebreide z -vlak op het uitgebreide w -vlak.

Opmerking. Het begrip conforme afbeelding is hiermee als volgt verruimd:

- (i) Het gebied G_z in het z -vlak mag het punt $z = \infty$ bevatten.
- (ii) De functie $f(z)$ mag in G_z één pool van eerste orde bezitten (dus wordt door $w = f(z)$ afgebeeld op $w = \infty$).

De samengestelde afbeelding van twee GLA's is eveneens gebroken lineair: zij namelijk

$$w = f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad t = f_2(w) = \frac{a_2 w + b_2}{c_2 w + d_2}$$

dan is gemakkelijk af te leiden dat

$$t = f_2(f_1(z)) = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad \text{met} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

De gebroken lineaire afbeeldingen vormen dus een groep.

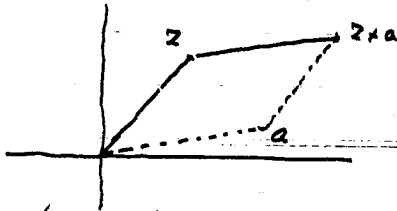
We voeren in de elementaire GLA's:

$w = z + a$ translatie,

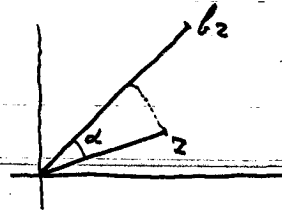
$w = bz$ draaistrekking,

$w = 1/z$ inversie,

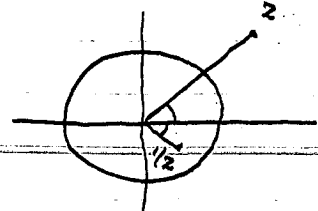
zie de navolgende figuren.



translatie



draaistrekking



inversie.

Elke GLA is op te bouwen door samenstelling van elementaire GLA's. Indien namelijk $c \neq 0$ is, dan is te schrijven

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{z+d/c},$$

d.i. een samenstelling van translatie, inversie, draaistrekking, translatie.

Indien $c=0$ (en dus $a \neq 0, d \neq 0$), is te schrijven

$$w = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d} \left(z + \frac{b}{a} \right),$$

d.i. een samenstelling van translatie, draaistrekking.

Een "cirkel" in het uitgebreide complexe vlak is een gewone cirkel of een rechte; een rechte wordt hierbij opgevat als een ontwaarde cirkel door het punt a . De algemene vergelijking van een "cirkel" in het z -vlak luidt:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \text{ A en C reëel, } B\bar{B} - AC > 0.$$

Zimmers voor $A \neq 0$ is de vergelijking te herleiden tot

$$A \left(z + \frac{\bar{B}}{A} \right) \left(\bar{z} + \frac{B}{A} \right) - \frac{B\bar{B}}{A} + C = 0, \quad \left| z + \frac{\bar{B}}{A} \right|^2 = \frac{B\bar{B} - AC}{A^2},$$

d.i. een gewone cirkel met middelpunt $z = -\bar{B}/A$ en straal $\sqrt{(B\bar{B} - AC)/A^2} > 0$.

Voor $A=0$ is de vergelijking te schrijven als

$$2 \operatorname{Re}[B(x+iy)] + C = 0, \quad (\operatorname{Re} B)x - (\operatorname{Im} B)y + \frac{1}{2}C = 0,$$

d.i. een rechte.

Stelling 3.1. Bij een GLA $w = f(z)$ wordt iedere "cirkel" in het z -vlak afgebeeld op een "cirkel" in het w -vlak.

Bewijs. Het is voldoende de stelling te bewijzen voor elementaire GLA's. Voor een translatie is het resultaat triviaal. Beschouw nu een "cirkel" met vergelijking

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0.$$

Onder een draaibekking $w = bz$, $z = w/b$ gaat deze vergelijking over in

$$A w \bar{w} + B \bar{w} + \bar{B} w + C b \bar{b} = 0,$$

en onder de inversie $w = 1/z$, $z = 1/w$ gaat de vergelijking over in

$$C w \bar{w} + \bar{B} w + B \bar{w} + A = 0.$$

Beide vergelijkingen stellen "cirkels" voor in het w -vlak. □

Definitie Twee punten z_1 en z_2 liggen gespiegeld t.o.v. de "cirkel"

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \text{ A en C reëel, } B\bar{B} - AC > 0.$$

indien $Az_1\bar{z}_2 + Bz_2 + \bar{B}\bar{z}_1 + C = 0.$

Men kan gemakkelijk inzien dat deze relatie reflexief is.

Meetkundige betekenis. In geval $A=0$, is de "cirkel" een rechte met vergelijking

$$Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0.$$

Trek hiervan af de betrekking

$$Bz_1 + \bar{B}\bar{z}_2 + C = 0,$$

dan volgt

$$B(z - z_1) = -\bar{B}(\bar{z} - \bar{z}_2), \quad |z - z_1| = |\bar{z} - \bar{z}_2|.$$

De rechte is dan de middelloodlijn van de verbindingslijn van z_1 en z_2 ; z_1 en z_2 liggen ook meetkundig gespiegeld t.o.v. de rechte.

In geval $A \neq 0$, is de "cirkel" een gewone cirkel waarvan de vergelijking te herleiden is tot

$$|z - m|^2 = R^2 \text{ met } m = -\bar{B}/A \text{ (middelpunt) en } R = \sqrt{(B\bar{B} - AC)/A^2} \text{ (straal).}$$

De punten z_1 en z_2 liggen gespiegeld t.o.v. deze cirkel indien

$$(z_1 - m)(\bar{z}_2 - \bar{m}) = R^2.$$

Hieruit volgt

$$|z_1 - m| |z_2 - m| = R^2,$$

$$z_1 - m = \frac{R^2}{\bar{z}_2 - \bar{m}} = \frac{R^2}{|z_2 - m|} (z_2 - m).$$

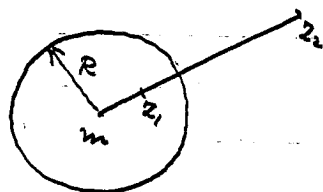
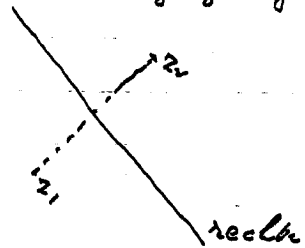
d.w.z. z_1 en z_2 liggen op dezelfde voorstraal vanuit m , en het product van hun afstand tot m is gelijk aan R^2 . Als $z_1 \rightarrow m$ dan is $z_2 \rightarrow \infty$: daarom spreken we af dat het middelpunt $z_1 = m$ en het punt $z_2 = \infty$ gespiegeld liggen.

Stelling 3.2. Laat z_1 en z_2 gespiegeld liggen t.o.v. de "cirkel" C_2 , en zij $w = f(z)$ een GLA.

Dan liggen de beeldpunten $w_1 = f(z_1)$ en $w_2 = f(z_2)$ gespiegeld t.o.v. de "cirkel" $C_w = f(C_2)$.

Bewijs. Het resultaat is triviaal als de GLA een translatie is. Voor de overige elementaire GLA's geven we het bewijs alleen in het geval van de inversie $w = 1/z$. Onder de inversie gaat de "cirkel" C_2 met vergelijking

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$$



over in de "cirkel" C_w met vergelijking

$$C_w \bar{w} + \bar{B} w + B \bar{w} + A = 0.$$

Laat nu z_1 en z_2 gespiegeld liggen t.o.v. C_2 dan is

$$A z_1 \bar{z}_2 + \bar{B} z_2 + B \bar{z}_1 + C = 0.$$

Substitueer hierin $z_1 = 1/\bar{w}_1$, $z_2 = 1/w_2$, dan volgt

$$C w_1 \bar{w}_2 + \bar{B} w_1 + B \bar{w}_2 + A = 0,$$

d.w.z. w_1 en w_2 liggen gespiegeld t.o.v. C_w . □

3.2. Voorbeelden en toepassingen van de gebroken lineaire afbeelding.

1) Onder de afbeelding $w = 1/(e^{i\alpha} - z)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

$$z = e^{i\alpha} \rightarrow w = \infty; \quad z = 0 \rightarrow w = e^{-i\alpha}; \quad z = \infty \rightarrow w = 0.$$

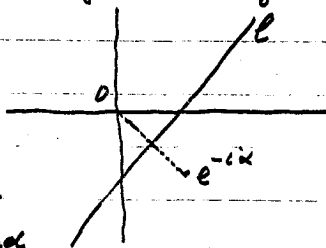
De eenheidscirkel $|z|=1$ bevat $z = e^{i\alpha}$ en wordt dan (volgens stelling 3.1) afgebeeld op een "cirkel" door $w = \infty$, d.i. een rechte l .

Aangesien $z = 0$ en $z = \infty$ gespiegeld liggen t.o.v.

$|z|=1$, liggen (volgens stelling 3.2) $w = e^{-i\alpha}$ en $w = 0$

gespiegeld t.o.v. l . De rechte l is dan de middelloodlijn van de verbindingslijn van 0 en $e^{-i\alpha}$. Het binnengebied

van de cirkel, $|z| < 1$, wordt \bar{k} afgebeeld op het halfvlak met l als rand dat het punt $w = e^{-i\alpha}$ bevat.



2) We zoeken een GLA $w = f(z)$ welke $|z| < 1$ afbeeldt op $|w| < 1$. Uit de continuïteit van $f(z)$ volgt dat dan $|z|=1$ wordt afgebeeld op $|w|=1$. Daar $f(z)$ univalent is op $|z| < 1$, is er precies één punt $z = a$ met $|a| < 1$ en $z = a \rightarrow w = 0$. Volgens stelling 3.2 wordt dan $z = 1/\bar{a}$ (gespiegeld van $z = a$ t.o.v. $|z|=1$) afgebeeld op $w = \infty$ (gespiegeld van $w = 0$ t.o.v. $|w|=1$). De afbeeldingsfunctie $f(z)$ moet dan van de volgende vorm zijn:

$$w = f(z) = k' \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = k \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

met een nog onbekende constante k . Bedenk nu dat $z=1$ wordt afgebeeld op een punt van $|w|=1$, dan volgt

$$|w| = |k| \left| \frac{1-a}{1-\bar{a}} \right| = 1 \Rightarrow |k| = 1 \Rightarrow k = e^{i\alpha} \text{ met } \alpha \in \mathbb{R}.$$

We vinden op deze wijze de algemene GLA van $|z| < 1$ op $|w| < 1$:

$$w = f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

De afbeeldingsfunctie bevat drie (reële) vrijheidsgraden, namelijk $\text{Re } a$, $\text{Im } a$ en α .

Na keuze van a en α ligt de afbeeldingsfunctie volledig vast, en er geldt

$$f(a) = 0, \quad \arg f'(a) = \arg \left[e^{i\alpha} \frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2} \Big|_{z=a} \right] = \arg \left[\frac{e^{i\alpha}}{1-|a|^2} \right] = \alpha.$$

We verifiëren nog dat $w = f(z)$ als boven, inderdaad $|z|=1$ afbeeldt op $|w|=1$:

$$z = e^{i\varphi} \rightarrow w = e^{i\alpha} \frac{e^{i\varphi} - a}{1 - \bar{a}e^{i\varphi}} = e^{i(\alpha-\varphi)} \frac{e^{i\varphi} - a}{e^{-i\varphi} - \bar{a}} \Rightarrow |w| = 1.$$

Stelling 3.3. Tedere conforme afbeelding van $|z| < 1$ op $|w| < 1$ is gebroken lineair.

Bewijs. Zij $w = f(z)$ een conforme afbeelding van $|z| < 1$ op $|w| < 1$. Dan is er precies één punt a met $|a| < 1$ zodat $f(a) = 0$; zij voort $\arg f'(a) = \alpha$. Volgens de afbeeldingsstelling van Riemann wordt de afbeelding $w = f(z)$ eënduidig vastgelegd door de voorwaarden $f(a) = 0, \arg f'(a) = \alpha$.

De GLA

$$w = f_1(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

beeldt eveneens $|z| < 1$ conform af op $|w| < 1$; voort is gelte $f_1(a) = 0, \arg f_1'(a) = \alpha$. Op grond van de bovengenoemde eenduidigheid moet dan $f(z) = f_1(z)$ zijn, d.w.z. de afbeelding $w = f(z)$ is gebroken lineair. \square

3) We zoeken een GLA $w = f(z)$ welke $\Im z > 0$ afbeeldt op $|w| < 1$; de rand $\Im z = 0$ wordt dan afgebeeld op de rand $|w| = 1$. Daar $f(z)$ univalent is voor $\Im z > 0$, is er precies één punt $z = a$ met $\Im a > 0$ en $z = a \rightarrow w = 0$. Volgens stelling 3.2 wordt dan het gespiegelde punt $z = \bar{a}$ afgebeeld op het gespiegelde punt $w = \bar{a}$. De afbeeldingsfunctie heeft daarom de volgende vorm:

$$w = f(z) = k \frac{z-a}{z-\bar{a}},$$

met een nog onbekende constante k . De laatste wordt bepaald met de voorwaarde dat $\Im z = 0$ wordt afgebeeld op $|w| = 1$:

$$z = x \in \mathbb{R} \rightarrow w = k \frac{x-a}{x-\bar{a}}, \quad |w| = |k| \left| \frac{x-a}{x-\bar{a}} \right| = 1, \quad |k| = 1 \Rightarrow k = e^{i\alpha} \text{ met } \alpha \in \mathbb{R}.$$

De algemene GLA van $\Im z > 0$ op $|w| < 1$ wordt dus gegeven door

$$w = f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \quad \Im a > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

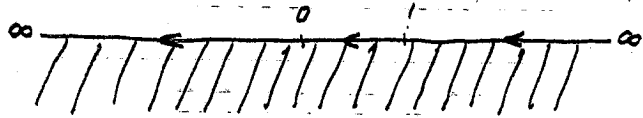
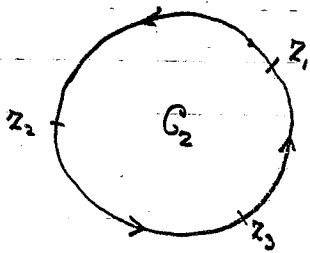
Deze afbeeldingsfunctie bevat weer drie (reële) vrijheidsgraden: $\text{Re } a, \Im a$ en α .

Na keuze van a en α ligt de afbeeldingsfunctie volledig vast, en er geldt

$$f(a) = 0, \quad \arg f'(a) = \arg \left[e^{i\alpha} \frac{a-\bar{a}}{(z-\bar{a})^2} \Big|_{z=a} \right] = \arg \left[\frac{e^{i\alpha}}{a-\bar{a}} \right] = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Stelling 3.4. Tedere conforme afbeelding van $\Im z > 0$ op $|w| < 1$ is gebroken lineair.

Bewijs. Analoog aan het bewijs van stelling 3.3. \square



4) Laat z_1, z_2, z_3 drie verschillende punten in het complexe z -vlak zijn, waarbij één der punten ∞ mag zijn. Door z_1, z_2, z_3 gaat precies één "cirkel" C_z . We wensen C_z af te beelden op de reële as van het w -vlak. Dit is te realiseren door h.v. de GLA

$$w = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}$$

Ten eerste onder deze GLA geldt $z=z_1 \rightarrow w=0$, $z=z_2 \rightarrow w=\infty$, $z=z_3 \rightarrow w=1$, zodat de "cirkel" C_z overgaat in de "cirkel" door $0, \infty, 1$, d.i. de reële as van het w -vlak.

N.B. Als $z_1 = \infty$, dient bovenaande afbeeldingsfunctie te worden vervangen door

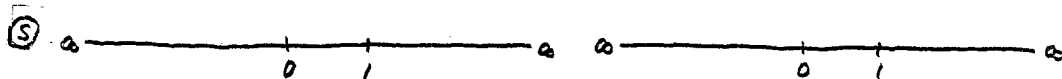
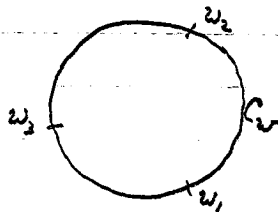
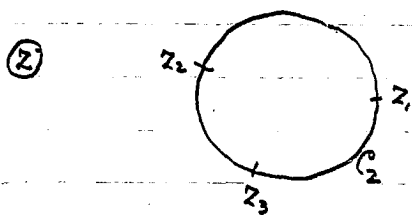
$$w = (z_3 - z_2) / (z - z_2); \text{ evenzo als } z_3 = \infty \text{ door } w = (z - z_1) / (z - z_2).$$

We vragen naar het beeld van het binnengebied G_z van C_z . Veronderstel dat z_1, z_2, z_3 in positieve volgorde op C_z liggen d.w.z. de omloopsrichting van $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow z_1$ is de positieve richting langs C_z , ofwel, als C_z wordt doorlopen van $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow z_1$, ligt G_z aan de linkerhand. Volgens stelling 2.12 blijft de omloopsrichting behouden bij de afbeelding: de punten $0, \infty, 1$ liggen dus in positieve volgorde op de reële as van het w -vlak. Doorlopen we de reële as van $0 \rightarrow \infty \rightarrow 1 \rightarrow 0$, dan ligt het beneden-halfrak $\text{Im } w < 0$ aan de linkerhand. Het beeld van G_z onder de GLA is dus het halfrak $\text{Im } w < 0$. Evenzo, indien z_1, z_2, z_3 in negatieve volgorde op C_z liggen, wordt G_z afgebeeld op het boven-halfrak $\text{Im } w > 0$.

Laat z_1, z_2, z_3 drie verschillende punten zijn op een cirkel C_z in het z -vlak en w_1, w_2, w_3 drie verschillende punten op een cirkel C_w in het w -vlak. We zoeken een conforme afbeelding $w = f(z)$ van C_z op C_w zodanig dat $f(z_k) = w_k$, $k=1,2,3$. Uit stelling 3.3 volgt dat de afbeelding gebroken lineair is. Deze GLA wordt eenduidig bepaald door de drie voorwaarden $f(z_k) = w_k$, $k=1,2,3$. Ten eerste, een GLA bevat vier vrije constanten a, b, c, d , maar één van deze constanten mag gelijk aan 1 worden genomen; we beschikken dus over drie vrijheidsgraden. Ter bepaling van de GLA, beelden we C_z en C_w af op de reële as van resp. het s -vlak en het t -vlak door de GLA's

$$s = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}, \quad t = \frac{(w-w_1)(w_3-w_2)}{(w-w_2)(w_3-w_1)}$$

Onder deze GLA's is $z_1, z_2, z_3 \rightarrow s = 0, \infty, 1$; $w_1, w_2, w_3 \rightarrow t = 0, \infty, 1$.



Stel nu $t = s$ ofwel

$$\frac{(w-w_1)(w_3-w_2)}{(w-w_2)(w_3-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)},$$

dan volgt door oplossen van w , de gevoolte GLA $w = f(z)$. Indien z_1, z_2, z_3 en w_1, w_2, w_3 in dezelfde volgorde op C_2 resp. C_w liggen, wordt het binnengebied van C_2 van C_w afgebeeld op het binnengebied G_w van C_w . Liggen de punten driepels in tegengestelde volgorde, dan wordt C_2 afgebeeld op het buitengebied van C_w .

Laat $w = f(z)$ een GLA zijn welke de reële-as van het z -vlak afbeeldt op de reële-as van het w -vlak. Dan bestaan er drie verschillende punten α, β, γ op de reële z -as zodat $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 1, f(\gamma) = \infty$; een der punten α, β, γ kan eventueel ∞ zijn. De genoemde GLA wordt dan gegeven door

$$w = f(z) = \frac{(z-\alpha)(\beta-\gamma)}{(z-\gamma)(\beta-\alpha)},$$

d.i. tevens de algemene GLA van \mathbb{R}^2 op \mathbb{R}^2 . Deze afbeeldingsfunctie bevat drie reële vrijheidsgraden: α, β en γ . Analoog aan stellingen 3.3 en 3.4 geldt dat deze GLA ook de algemene conforme afbeelding is van \mathbb{R}^2 op \mathbb{R}^2 . Onder de afbeelding gaat de nuloprichting $z = \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$ over in $w = 0 \rightarrow 1 \rightarrow \infty \rightarrow 0$. Hieruit volgt dat het boven-halvlak \mathbb{R}^2 wordt afgebeeld op het boven-halvlak \mathbb{R}^2 indien of $-\infty < \alpha < \beta < \gamma < \infty$, of $-\infty < \gamma < \alpha < \beta < \infty$, of $-\infty < \beta < \gamma < \alpha < \infty$.

5) Afbeeldingsstelling van Riemann (III). Zij G_2 een gebied waarvan de rand C_2 een Jordankromme is. Laat z_1, z_2, z_3 resp. w_1, w_2, w_3 verschillende punten zijn welke in positieve volgorde op C_2 resp. $|w| = 1$ liggen. Dan is er een eenduidig bepaalde continue afbeelding $w = f(z)$ van $G_2 \cup C_2$ op $|w| \leq 1$ welke G_2 conform afbeeldt op $|w| < 1$, zodanig dat $f(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$.

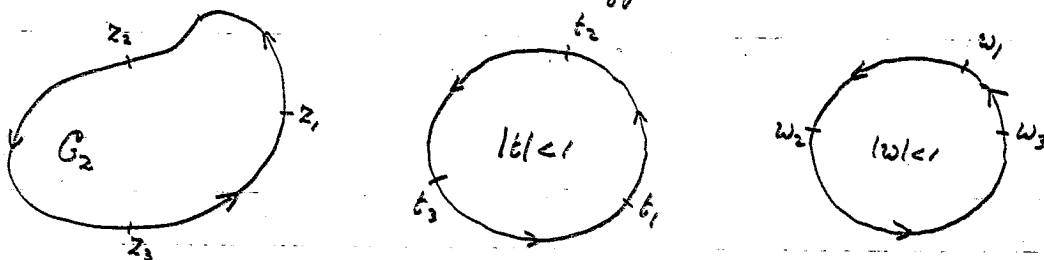
Opmerking. Ook hier wordt de afbeelding eenduidig vastgelegd door een drietal voorwaarden: $f(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$. Zonder deze voorwaarden zijn er oneindig veel continue afbeeldingen van $G_2 \cup C_2$ op $|w| \leq 1$, conform van G_2 op $|w| < 1$, waarbij nog over drie vrijheidsgraden beschikt kan worden.

De stelling geldt ook voor een gebied met ∞ randpunten, zmits de punten van de reeds op een geschikte manier als meervoudige randpunten geteld worden (zie p. 32).

Berijp. Op grond van de afbeeldingsstelling van Riemann (I) is er een conforme afbeelding $t = f(z)$ van G_2 op $|t| < 1$, welke eenduidig wordt vastgelegd door de voorwaarden $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$; hierbij is z_0 een willekeurig te kiezen punt in G_2 .

Volgens stelling 2.12 is $t = f(z)$ uit te breiden tot een continue afbeelding van $G_2 \cup C_2$ op $|t| \leq 1$. Noem $f(z_k) = t_k, k = 1, 2, 3$, dan liggen t_1, t_2, t_3 in positieve volgorde

op $|t|=1$, daar de omloopzin behouden blijft.



Beeld nu $|t| \leq 1$ conform af op $|w| \leq 1$ zodanig dat $t_k \rightarrow w_k$, $k=1,2,3$. Dit is te realiseren door een GLA zoek gebied onder 4), en we vinden

$$\frac{(w-w_1)(w_3-w_2)}{(w-w_2)(w_3-w_1)} = \frac{(t-t_1)(t_3-t_2)}{(t-t_2)(t_3-t_1)} = \frac{[f_1(t_2)-f_1(t_1)][f_1(t_3)-f_1(t_2)]}{[f_1(t_2)-f_1(t_1)][f_1(t_3)-f_1(t_2)]}$$

Hieruit is w op te lossen als functie van z : $w = f(z)$, d.i. de gevraagde afbeelding.

We tonen nog aan dat de gevonden afbeelding eenduidig is. Stel daartoe dat er een tweede afbeelding $w = \tilde{f}(z)$ bestaat, continu van $G_2 \cup C_2$ op $|w| \leq 1$, conform van G_2 op $|w| < 1$, zodanig dat $\tilde{f}(z_k) = w_k$, $k=1,2,3$. Zij $z = g(w)$ de inverse functie behorende bij $w = f(z)$. Vorm dan de samengestelde afbeelding

$$z = g(w), \quad w' = \tilde{f}(z) \Rightarrow w' = \tilde{f}(g(w)) =: h(w),$$

continu van $|w| \leq 1$ op $|w'| \leq 1$, conform van $|w| < 1$ op $|w'| < 1$, en met $h(w_k) = w_k$, $k=1,2,3$.

Onder 4) is afgeleid dat de afbeelding $w' = h(w)$ gebroken lineair is en gegeven wordt door

$$\frac{(w'-w_1)(w_3-w_2)}{(w'-w_2)(w_3-w_1)} = \frac{[h(w)-w_1][w_3-w_2]}{[h(w)-w_2][w_3-w_1]} = \frac{(w-w_1)(w_3-w_2)}{(w-w_2)(w_3-w_1)}$$

Hieruit volgt: $h(w) = w$ voor $|w| \leq 1$; $\tilde{f}(g(w)) = w$ voor $|w| \leq 1$; $\tilde{f}(g(f(z))) = f(z)$ voor $z \in G_2 \cup C_2$; $\tilde{f}(z) = f(z)$ voor $z \in G_2 \cup C_2$. \square

3.3. De afbeeldingen $w = z^2$ en $w = \sqrt{z^2 - 1}$.

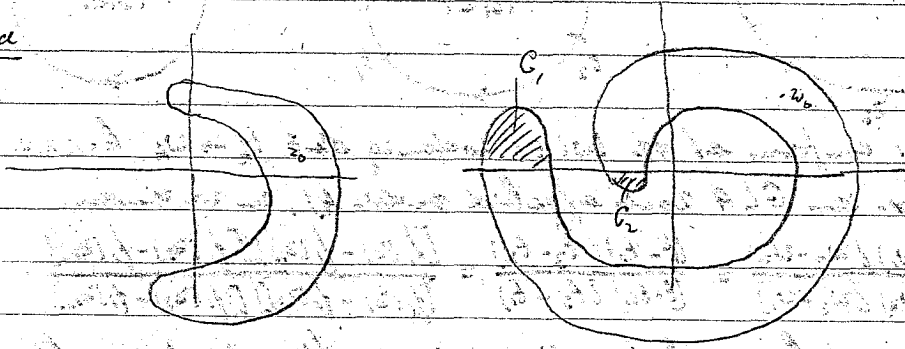
De functie $f(z) = z^2$ is analytisch in \mathbb{C} en $f'(z) \neq 0$ voor $z \neq 0$. Uit $f(z_1) = z_1^2 = z_2^2 = f(z_2)$ volgt $z_1 = z_2$ of $z_1 = -z_2$. De functie $f(z) = z^2$ is dus univalent in elk gebied G_2 met de eigenschap: $z \in G_2 \Rightarrow -z \notin G_2$; met name is $0 \notin G_2$. Een dergelijk gebied G_2 wordt door $w = f(z) = z^2$ conform afgebeeld op een gebied G_w in het w -vlak.

We onderzoeken nu de inverse afbeelding $z = g(w)$ van G_w op G_2 . Uit $w = z^2$ volgt $z = \pm \sqrt{w}$, waarbij met \sqrt{w} de hoofdwaaarde bedoeld wordt:

$$\sqrt{w} = |w|^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}i \arg w\right], \quad -\pi < \arg w \leq \pi.$$

Deze hoofdwaaarde is analytisch in het w -vlak met uitzondering langs de negatieve reële as. Veronderstel nu dat G_2 een punt z_0 bevat met $\operatorname{Re} z_0 > 0$, en zij $w_0 = z_0^2$. In $w = w_0$ wordt dan de inverse functie gegeven door $g(w_0) = z_0 = \sqrt{w_0}$ (hoofdwaaarde). Vanuit w_0 wordt

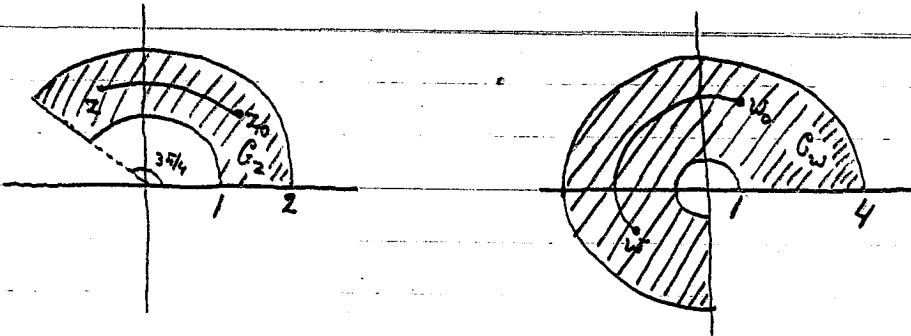
Winkel



$$\int_{C_1} g(z) dz = -\sqrt{r} \quad \text{and} \quad \int_{C_2} g(z) dz = \sqrt{r}$$

$g(w)$ analytisch voortgezet langs krommen in G_w . Deze voortzetting is eenduidig en onafhankelijk van de gekozen kromme, omdat G_w geen Jordankrommen bevat die $w=0$ omsluiten (zo'n kromme zou beeld zijn van een Jordankromme in G_z die $z=0$ omsluit). Zolang de kromme de negatieve reële as van het w -vlak niet snijdt, geldt $g(w) = \sqrt{w}$. Passeren we bij de voortzetting de negatieve reële as, dan gaat \sqrt{w} over in $-\sqrt{w}$, en er geldt $g(w) = -\sqrt{w}$.

Voorbeeld 1. Zij $G_z = \{z \mid 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/4\}$, dan is $G_w = \{w \mid 1 < |w| < 4, 0 < \arg w < 3\pi/2\}$



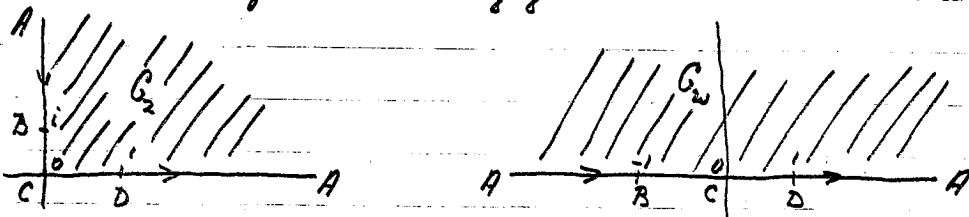
De inverse functie $z = g(w)$ wordt nu gegeven door:

$$g(w) = \sqrt{w} \text{ in } G_w \cap \{w \mid \operatorname{Im} w > 0\}; \quad g(w) = -\sqrt{w} \text{ in } G_w \cap \{w \mid \operatorname{Im} w < 0\};$$

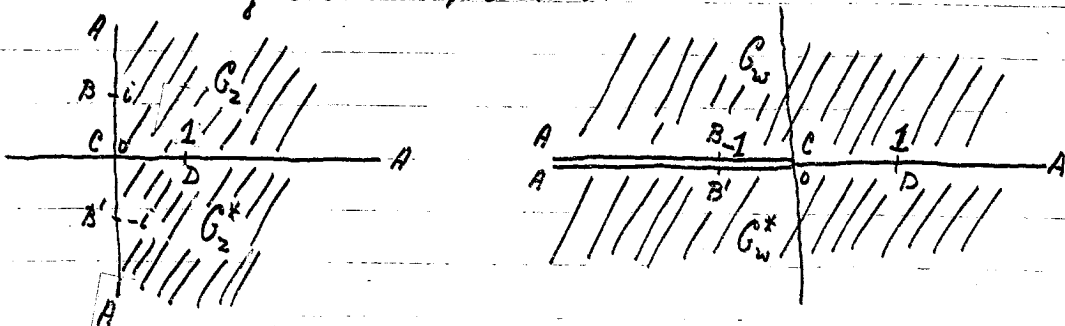
hierbij is \sqrt{w} de hoofdwaaarde

Eventueel is ook: $g(w) = \sqrt{w} = |w|^{1/2} \exp[i \frac{1}{2} \arg w]$ in G_w onder de afspraak $0 < \arg w < 2\pi$; deze afspraak voor \sqrt{w} komt niet overal overeen met de hoofdwaaarde.

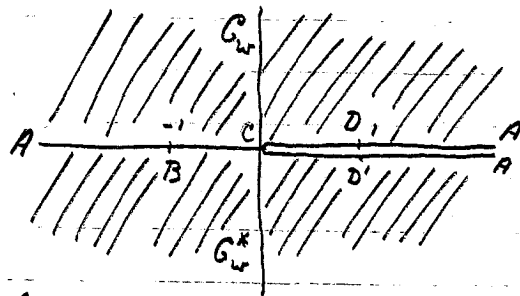
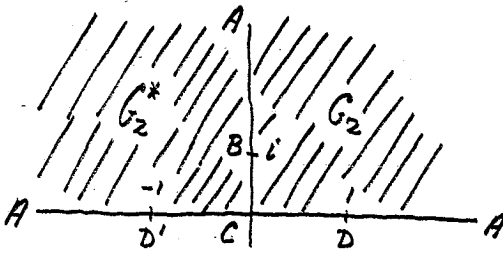
Voorbeeld 2. De functie $w = f(z) = z^2$ beeldt $G_z = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$ conform af op $G_w = \{w \mid \operatorname{Im} w > 0\}$. Overeenkomstige punten op de randen van G_z en G_w zijn in onderstaande figuur met dezelfde letters aangegeven.



We passen nu het spiegelingprincipe van Schwarz toe. Door spiegeling aan CDA resp. aan ABC vinden we de volgende correspondenties:



afbeelding $w = f(z) = z^2$ van $\operatorname{Re} z > 0$ op w -vlak met de w -as langs negatieve reële as;
inverse afbeelding $z = g(w) = \sqrt{w}$ (hoofdwaaarde);



afbeelding $w = f(z) = z^2$ van $\text{Im } z > 0$

op w-vlak met rechte lange positieve reële as;

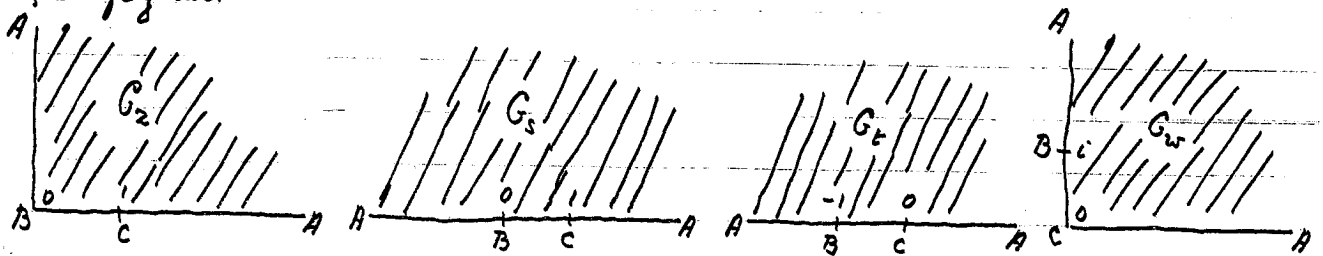
inversa afbeelding $z = g(w) = \sqrt{w} = |w|^{1/2} \exp\left[\frac{1}{2} i \arg w\right]$ met $0 < \arg w < 2\pi$ (niet hoofdwaarde).

De functie $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ is analytisch voor $z \neq \pm 1$ en $f'(z) \neq 0$ voor $z \neq 0$. De univalente van $f(z)$ ligt wat moeilijker: uit $f^2(z_1) = z_1^2 - 1 = z_2^2 - 1 = f^2(z_2)$ volgt $z_1 = z_2$ of $z_1 = -z_2$; anderzijds volgt uit $z_1 = -z_2$ niet altijd $f(z_1) = f(z_2)$, dit hangt af van het "teken" van $\sqrt{z^2 - 1}$. In elk geval is $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ univalent in elk gebied G_2 met de eigenschap: $z \in G_2 \Rightarrow -z \notin G_2$.

We spreken af: voor z reëel en > 1 is $\sqrt{z^2 - 1}$ de gewone positieve wortel. Zij $G_2 = \{z \mid \text{Re } z > 0 \wedge \text{Im } z > 0\}$, dan is het beeldgebied G_w onder $w = \sqrt{z^2 - 1}$ als volgt te bepalen.

(i) Ontbind de afbeelding $w = \sqrt{z^2 - 1}$ in elementaire afbeeldingen
 $s = z^2, t = s - 1, w = \sqrt{t}$.

Uitgaande van G_2 , zijn dan de opeenvolgende beeldgebieden G_s, G_t, G_w eenvoudig te bepalen; zie figuren.



(ii) Het beeld van de rand van G_2 is de rand van G_w . Schrijf nu de afbeeldingsfunctie als volgt: $w = f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = |z^2 - 1|^{1/2} \exp\left[\frac{1}{2} i \{\arg(z-1) + \arg(z+1)\}\right]$,

dan is volgens de afbreuk boven,

$$\arg(z-1) = \arg(z+1) = 0 \text{ voor } z \text{ reëel en } > 1.$$

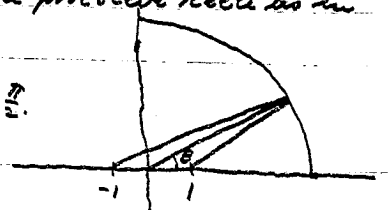
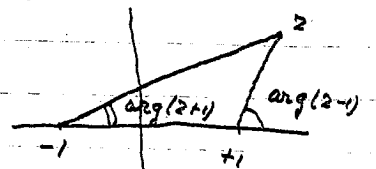
Vandaaruit wordt $\arg(z+1), \arg(z-1)$ continu voortgezet in G_2 .

We bepalen nu het beeld van de rand van G_2 .

Op het gedeelte CA is $z = x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, en $\arg(z-1) = \arg(z+1) = 0$. Daarmee volgt $w = |x^2 - 1|^{1/2} = \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$: het gedeelte CA wordt afgebeeld op de positieve reële as in het w-vlak.

Beschouw vervolgens de kwartcirkel $z = R e^{i\theta}$ met $R \rightarrow \infty, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Op deze cirkel is $\arg(z-1) \approx \arg(z+1) \approx \theta = \arg z$ en $|z^2 - 1|^{1/2} = |R^2 e^{2i\theta} - 1|^{1/2} = R |1 - R^{-2} e^{-2i\theta}|^{1/2} = R + O(R^{-1}), R \rightarrow \infty$.



Merks op dat bij A de afbeelding conform is, terwijl bij B en C de afbeelding niet hoektrouw resp. wegens $f'(z) = 0$ in B en $f(z)$ niet analytisch in C.

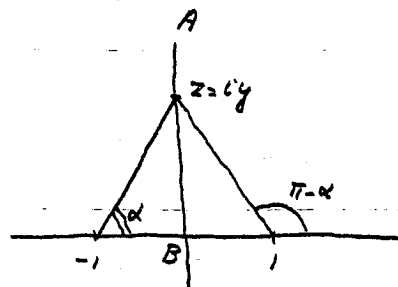
Daaruit volgt $w = Re^{i\alpha} + O(R^{-1}) = z + O(z^{-1})$, $z \rightarrow \infty$. Het beeld is dus bij benadering een zelfde kwartcirkel in het eerste kwadrant met straal $R \rightarrow \infty$.

Op het gedeelte AB van de rand is $z = iy$, $y \geq 0$,

en $\arg(z-1) = \pi - \alpha$, $\arg(z+1) = \alpha$ (zie figuur).

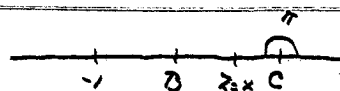
Daaruit volgt $w = |y^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{i\pi/2} = i\sqrt{y^2 - 1}$: het gedeelte

AB wordt afgebeeld op het stuk $[i, i\infty)$ van de positieve imaginaire as.



Tenslotte, op het gedeelte BC is $z = x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 1$,

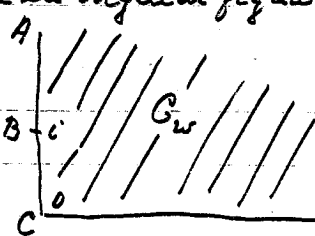
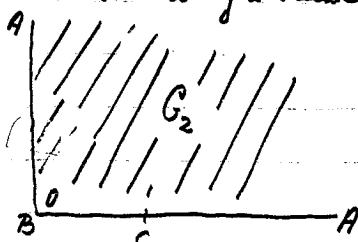
en $\arg(z-1) = \pi$, $\arg(z+1) = 0$ (zie figuur). Daaruit



volgt $w = |x^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{i\pi/2} = i\sqrt{1-x^2}$: het gedeelte BC

wordt afgebeeld op het stuk $[0, i]$ van de positieve imaginaire as.

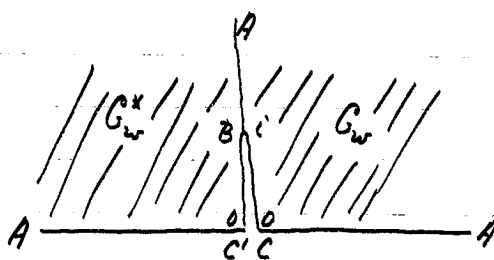
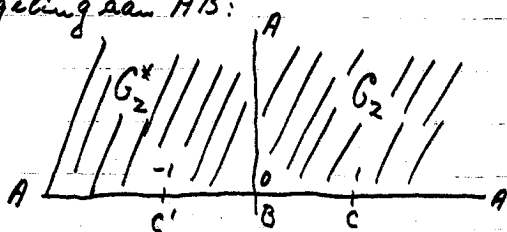
De voorgaande resultaten zijn samengevat in de volgende figuur. De afbeelding is



niet hoektrouw in B en C, wegens $f'(z) = 0$ in B en $f(z)$ niet analytisch in C.

We passen nog het spiegelingprincipe van Schwarz toe. Aangezien de rand van G_2 uit drie rechte lijnstukken bestaat die worden afgebeeld op rechte lijnstukken, kunnen we op drie manieren spiegelen.

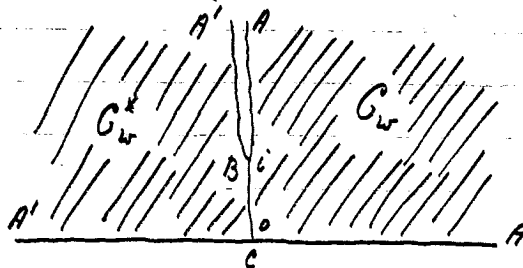
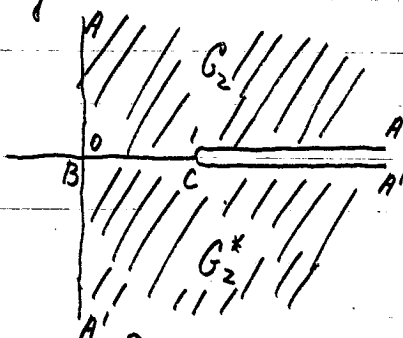
Spiegeling aan AB:



afbeelding van $\text{Im } z > 0$ op $\text{Im } w > 0$ met sneed $[0, i]$ langs de imaginaire as.

Merk op dat $z = x \in \mathbb{R}$, $x < -1$ wordt afgebeeld op $w = -\sqrt{x^2 - 1}$; dit volgt ook uit de eerdere voorstelling van $\sqrt{z^2 - 1}$ aangezien $\arg(z-1) = \arg(z+1) = \pi$.

Spiegeling aan BC:



afbeelding van $\text{Re } z > 0$ met sneed $[1, \infty)$ langs de reële as, op $\text{Im } w > 0$ met sneed $[i, i\infty)$ langs de imaginaire as.

Eventueel toelichten met stereografische projectie.

Zwaegen op p. 48:

De bij $w = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ behorende inverse functie $z = g(w)$ wordt verkregen door oplossing van de vierkantsvergelijking

$$z^2 - 2wz + 1 = 0.$$

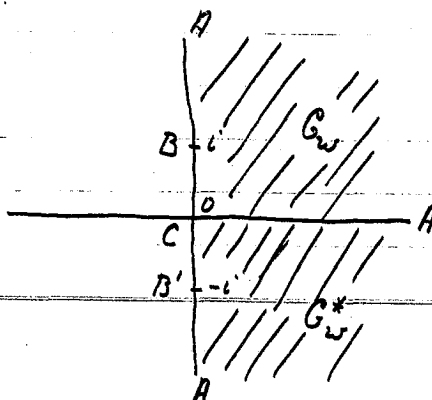
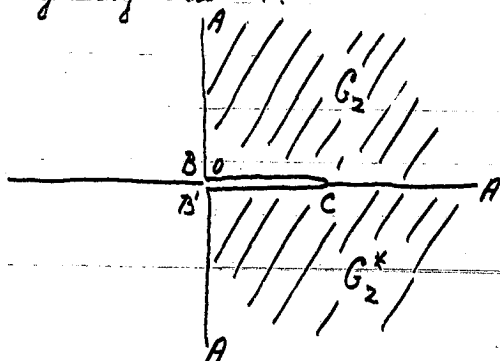
We vinden dan

$$z = g(w) = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

waarin het "teken" van de wortel nog nader vastgelegd moet worden.

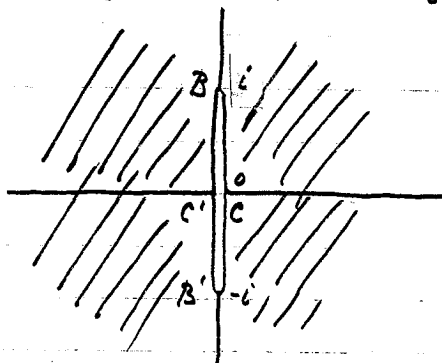
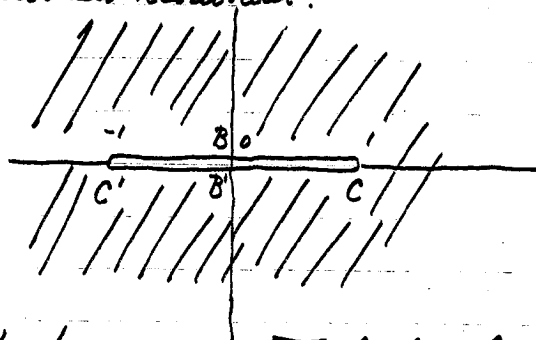
Merk op dat A en A' hier als twee verschillende punten geteld moeten worden zowel in het z -vlak als in het w -vlak.

Spiegeling aan CA :



afbeelding van $\text{Re } z > 0$ met sneed $[0, 1]$ langs de reële as, op $\text{Re } w > 0$.

In het laatste geval kunnen we nog eens spiegelen aan het randgedeelte BAB' met als resultaat:



De functie $v = \sqrt{z^2 - 1}$ beeldt het z -vlak met sneed $[-1, 1]$ langs de reële as, af op het w -vlak met sneed $[-i, i]$ langs de imaginaire as.

3.4. De Joukowski afbeelding $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$

De functie $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ is analytisch voor $z \neq 0$ met afgeleide $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2})$; $f'(z) = 0$ voor $z = \pm 1$. We onderzoeken de univalentie van $f(z)$:

$$f(z_1) = \frac{1}{2}(z_1 + \frac{1}{z_1}) = \frac{1}{2}(z_2 + \frac{1}{z_2}) = f(z_2) \Rightarrow z_1 - z_2 = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \Rightarrow z_1 = z_2 \text{ of } z_1 z_2 = 1.$$

De functie $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ is dus univalent in elk gebied G_2 met de eigenschap: $z \in G_2 \Rightarrow \frac{1}{z} \notin G_2$. Voorbeelden van zulke gebieden G_2 zijn: $|z| > 1$; $|z| < 1$; $\text{Im } z > 0$; $\text{Im } z < 0$. We onderzoeken nu eerst de afbeelding van cirkels $|z| = r$ onder $w = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

Stel $z = r e^{i\varphi}$, dan is

$$w = f(z) = \frac{1}{2}(r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi}) =: u + iv,$$

$$u = \text{Re } w = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \cos \varphi, \quad v = \text{Im } w = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \sin \varphi.$$

Elimineer hieruit φ resp. r dan volgt

$$\frac{u^2}{[\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})]^2} + \frac{v^2}{[\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})]^2} = 1,$$

d.i. de vergelijking van een ellips met halve assen $\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$, $\frac{1}{2}|r-\frac{1}{r}|$ en brandpunten $(\pm 1, 0)$;

resp.

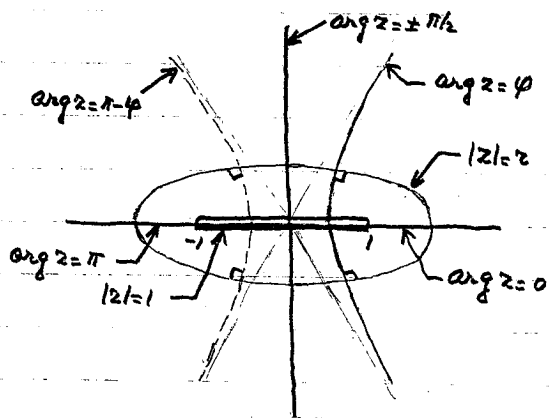
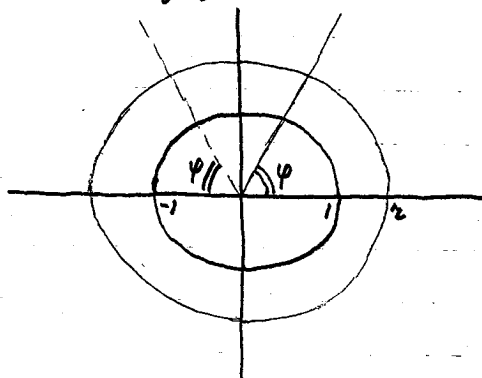
$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1,$$

d.i. de vergelijking van een hyperbool met halve as $|\cos \varphi|$ en brandpunten $(\pm 1, 0)$.

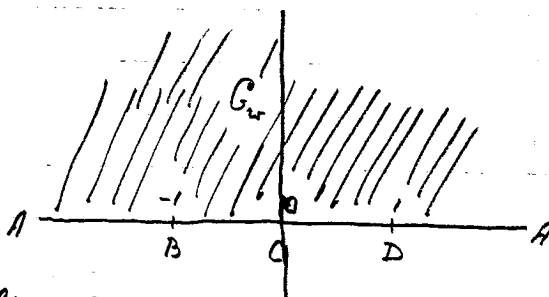
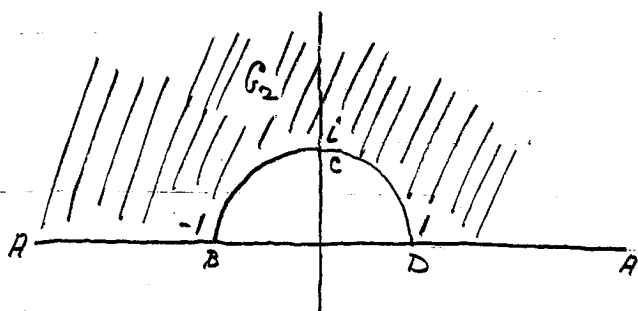
De cirkel $|z|=r$ wordt dus afgebeeld op een ellips. Voor $r=1$ is deze ellips samengetrokken tot het lijnsegment $-1 \leq u \leq 1$, $v=0$, dubbel doorlopen. De cirkels $|z|=r$ en $|z|=\frac{1}{r}$ worden afgebeeld op dezelfde ellips.

De voorstraal $\arg z = \varphi$ wordt afgebeeld op een hyperbool en wel op de rechter (linker) tak van de hyperbool als $\cos \varphi > 0$ ($\cos \varphi < 0$). Interessant zijn nog de grensgevallen: $\arg z = 0$, beeld is de halfrechte $u \geq 1$, $v=0$; $\arg z = \pm \pi/2$, beeld is de imaginaire as $u=0$; $\arg z = \pi$, beeld is de halfrechte $u \leq -1$, $v=0$. De voorstralen $\arg z = \varphi$ en $\arg z = -\varphi$ worden afgebeeld op dezelfde hyperbooltak.

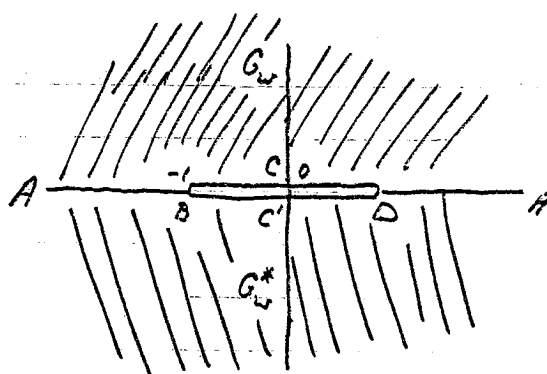
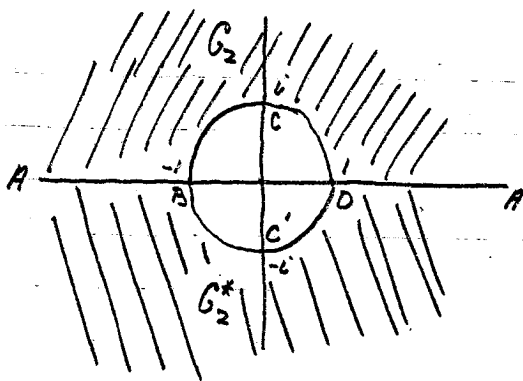
De ellipsen en hyperbolen snijden elkaar loodrecht in overeenstemming met de hoektrouwheid van de afbeelding. De voorgaande resultaten zijn nog samengevat in onderstaande figuur.



We bepalen nu de beelden van de gebieden $|z| > 1$ en $\text{Im } z > 0$ onder de afbeelding $(w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$. Als voorbereiding beschouwen we eerst de afbeelding van gebied $G_z = \{z \mid \text{Im } z > 0 \wedge |z| > 1\}$. Met de resultaten hierboven volgt dat G_z conform wordt afgebeeld op G_w : $\text{Im } w > 0$, terwijl de randpunten $z = -1, i, 1, \infty$ overgaan in de randpunten $w = -1, 0, 1, \infty$.



We spiegelen nu aan de rechte randgedeelten DAB.



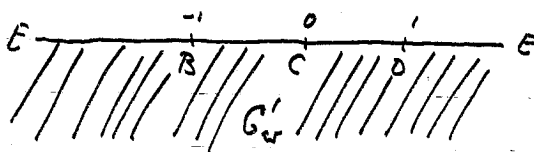
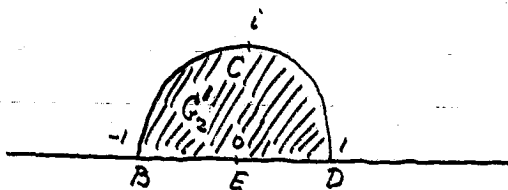
Onder $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ wordt het gebied $|z| > 1$ afgebeeld op het w -vlak met reede $[-1, 1]$ langs de reële as. De inverse functie wordt gegeven door $z = q(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}$; hierbij dient het teken van $\sqrt{w^2 - 1}$ zo te worden gekozen dat bijv. DA wordt afgebeeld op DA, d.w.z. voor w reëel en > 1 is $\sqrt{w^2 - 1}$ de gewone positieve wortel. Voortrekking van $\sqrt{w^2 - 1}$ vanuit DA leidt tot de volgende afspraak:

$$\sqrt{w^2 - 1} = |w^2 - 1|^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}i(\arg(w-1) + \arg(w+1))\right], \quad -\pi < \arg(w \pm 1) < \pi \text{ (hoofdwaaardes)}.$$

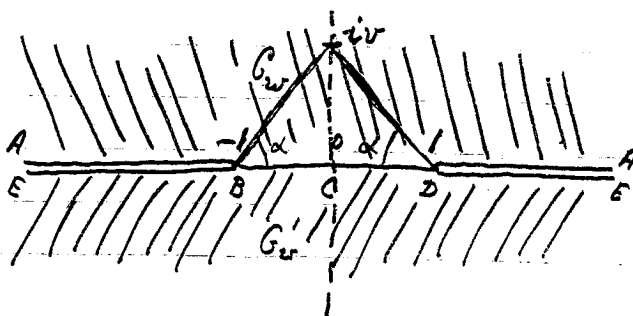
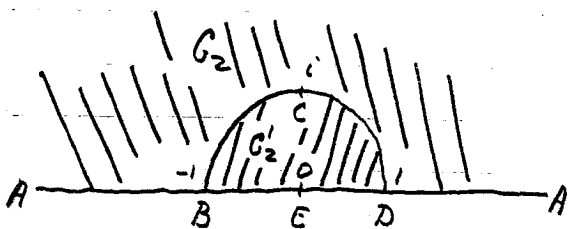
Voor bijv. het punt C in dan: $\arg(w-1) = \pi, \arg(w+1) = 0, \sqrt{w^2 - 1} = i, z = w + \sqrt{w^2 - 1} = i,$
 en evenzo voor het punt C': $\arg(w-1) = -\pi, \arg(w+1) = 0, \sqrt{w^2 - 1} = -i, z = w + \sqrt{w^2 - 1} = -i,$
 in overeenstemming met bovenstaande figuur.

Voor een punt w op AB treedt er schijnbaar een discontinuïteit op: $\arg(w-1) = \pm\pi,$
 $\arg(w+1) = \pm\pi$ bij nadering van boven. Evenwel de bijbehorende waarden $\sqrt{w^2 - 1} = |w^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\pm i\pi}$
 zijn gelijk, zodat er continue aansluiting is. Volgens stelling 2.13 is dan $\sqrt{w^2 - 1}$
 analytisch op AB en daarmee analytisch in het hele w -vlak met reede $[-1, 1]$.

Beschouw vervolgens het gebied $G'_2 = \{z \mid \Im z > 0 \wedge |z| < 1\}$; de functie $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ beeldt G'_2 conform af op G'_w : $\Im w < 0$, terwijl de randpunten $z = -1, 0, 1, i$ overgaan in de randpunten $w = -1, \infty, 1, 0$.



Combineer nu deze afbeelding met die van G_2 op G_w en bedenk dat de afbeeldingsfunctie continu aansluit over BCD (zodat stelling 2.13 van toepassing is).



Onder $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ wordt dan het gebied $\text{Im } z > 0$ afgebeeld op het w -vlak met de deel $(-\infty, -1] langs de reële as. De inverse functie wordt gegeven door $z = g(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}$; hierbij dient het teken van $\sqrt{w^2 - 1}$ zo te worden gekozen dat bijv. DA wordt afgebeeld op DA, d.w.z. voor w reëel en > 1 en op de bovenkant van de snede is $\sqrt{w^2 - 1}$ de gewone positieve wortel (voor $w > 1$ op de onderkant van de snede moet voor $\sqrt{w^2 - 1}$ de negatieve wortel worden genomen). Voortzetting van $\sqrt{w^2 - 1}$ vanuit DA leidt tot de volgende afspraak:$

$$\sqrt{w^2 - 1} = |w^2 - 1|^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{2}(\arg(w-1) + \arg(w+1))\right], \quad 0 < \arg(w-1) < 2\pi, \quad -\pi < \arg(w+1) < \pi.$$

Voor bijv. het punt C is dan: $\arg(w-1) = \pi, \arg(w+1) = 0, \sqrt{w^2 - 1} = 0, z = w + \sqrt{w^2 - 1} = 0$.

Voor een punt $w = iv$ op de imaginair as is: $\arg(w-1) = \pi - \alpha, \arg(w+1) = \alpha$, zodat $\sqrt{w^2 - 1} = |w^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{v^2 + 1}, z = iv + i\sqrt{v^2 + 1}$; dit beeldpunt beschrijft de positieve imaginair as van het z -vlak.

35. Afbeeldingen door exponentiële, hyperbolische en trigonometrische functies.

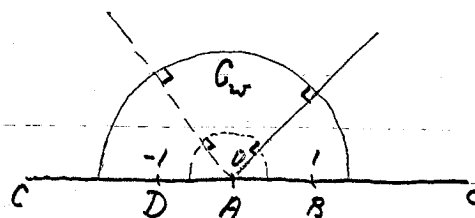
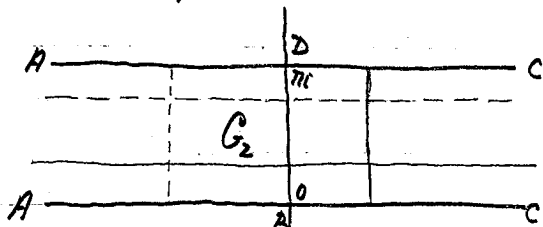
De functie $f(z) = e^z$ is analytisch in \mathbb{C} met afgeleide $f'(z) = e^z \neq 0$. De functie $f(z) = e^z$ is periodiek met periode $2\pi i$: $e^z = e^{z + 2\pi i}$. Daarmee volgt: $f(z) = e^z$ is univalent in een gebied G_z mits $z \in G_z \Rightarrow z + 2k\pi i \notin G_z$ voor elke geheel $k \neq 0$.

Stellen we $z = x + iy$, dan volgt

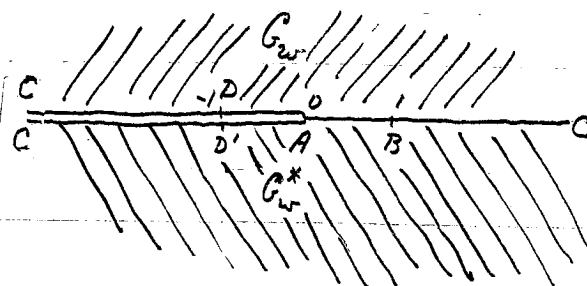
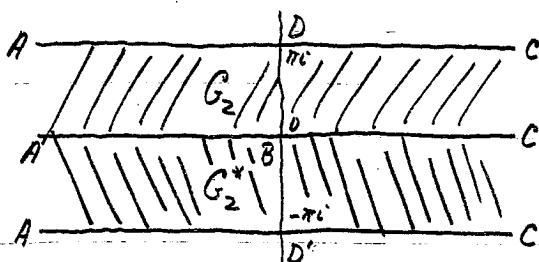
$$w = e^z = e^{x+iy}, \quad |w| = e^x, \quad \arg w = y.$$

Een rechte $x = x_0$ wordt dus afgebeeld op de cirkel $|w| = e^{x_0}$; een rechte $y = y_0$ wordt afgebeeld op de voorstreek $\arg w = y_0$.

Als voorbeeld bepalen we het beeld van de strook $G_z: 0 < \text{Im } z < \pi$ onder de afbeelding $w = e^z$. G_z wordt conform afgebeeld op $G_w: \text{Im } w > 0$, waarbij gelijknamige punten met elkaar corresponderen.



De afbeelding is voort te zetten door spiegeling aan ABC.

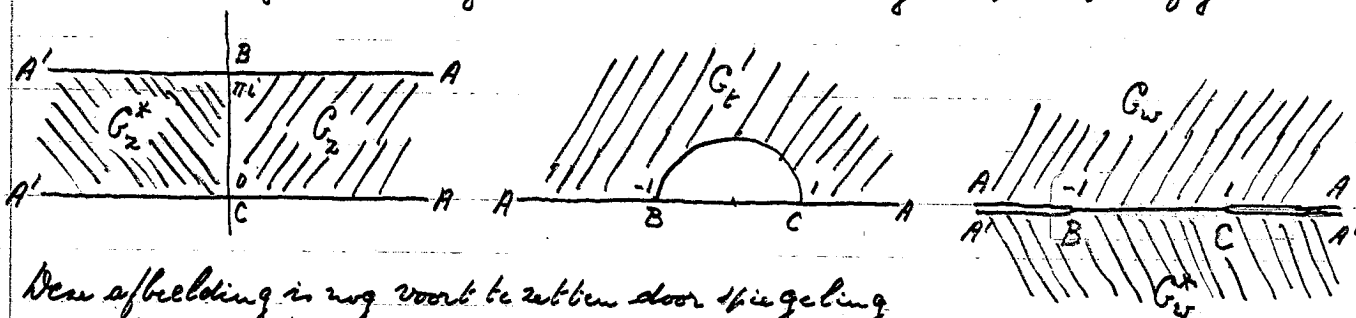


De functie $w = f(z) = e^z$ beeldt dan de strook $-\pi < \text{Im } z < \pi$ conform af op het w -vlak met twee lange de negatieve reële as. De inverse functie wordt gegeven door $z = g(w) = \log w$, waarbij de hoofdwaaarde van de logarithme te nemen is.

De hyperbolische functies $\cosh z, \sinh z$ zijn uit te drukken in de exponentiële functie e^z : $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$.

Als voorbeeld beschouwen we de afbeelding van de halve strook

$G_z = \{z \mid \text{Re } z > 0, 0 < \text{Im } z < \pi\}$ onder $w = \cosh z$. Ontbind deze afbeelding in elementaire afbeeldingen: $t = e^z, w = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$. Uitgaande van G_z , zijn dan de opvolgende beeldgebieden G_t, G_w eenvoudig te bepalen; zie figuur.



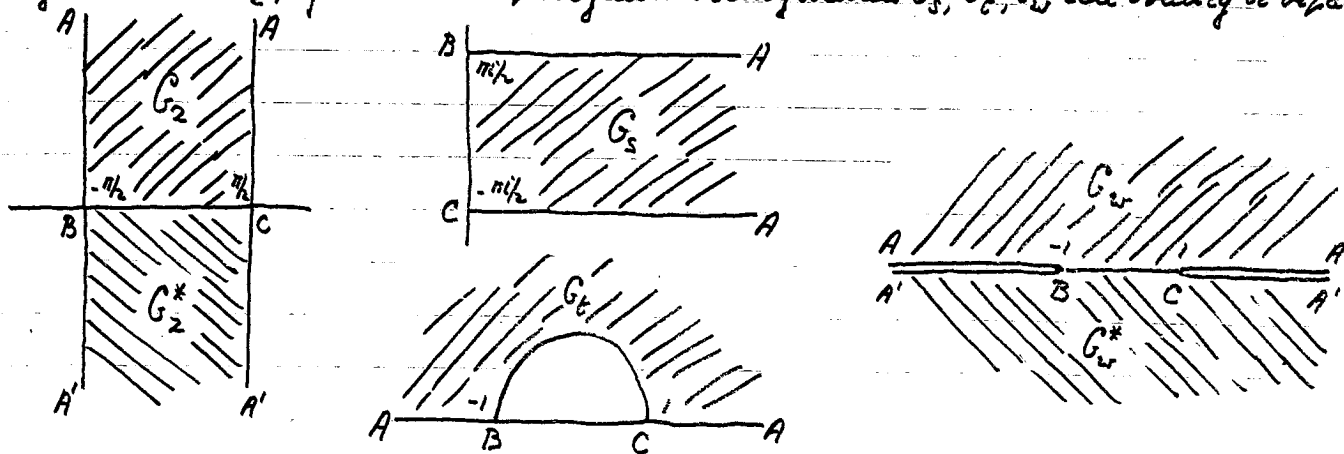
Deze afbeelding is nog voort te zetten door spiegeling aan b.v. BC. De volledige strook $0 < \text{Im } z < \pi$ wordt dan afgebeeld op het w -vlak met twee lange $[-1, -i]$ en $[1, i]$ langs de reële as. De inverse functie wordt gegeven door $z = g(w) = \log(w + \sqrt{w^2 - 1})$ met hoofdwaaarde van de logarithme en $\sqrt{w^2 - 1} = |w^2 - 1|^{1/2} \exp\{\frac{1}{2}i(\arg(w-1) + \arg(w+1))\}$, $0 < \arg(w-1) < 2\pi, -\pi < \arg(w+1) < \pi$.

De trigonometrische functies $\sin z, \cos z$ zijn eveneens uit te drukken in de exponentiële functie: $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

Als voorbeeld bepalen we het beeld van de halve strook $G_z = \{z \mid -\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2, \text{Im } z > 0\}$ onder de afbeelding $w = \sin z$. Ontbind daartoe in elementaire afbeeldingen:

$$s = -iz, \quad t = +ie^s, \quad w = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}).$$

Uitgaande van G_z , zijn dan de opvolgende beeldgebieden G_s, G_t, G_w eenvoudig te bepalen.



Deze afbeelding is nog voort te zetten door spiegeling aan lijn BC. De strook $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ wordt dan door $w = \sin z$ conform afgebeeld op het w -vlak met tusschen $(-1, 1]$ en $[1, \infty)$ langs de reële as. De inverse functie wordt gegeven door $z = g(w) = \arcsin w = i \log(w + \sqrt{w^2 - 1}) + \frac{\pi}{2}$ met hoofdwaaarden van de logaritme, en $\sqrt{w^2 - 1} = |w^2 - 1|^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} i \{\arg(w-1) + \arg(w+1)\}\right]$, $0 < \arg(w-1) < 2\pi$, $-\pi < \arg(w+1) < \pi$. Men kan de afbeelding ook onderzoeken door eerst het beeld van de rand van G_2 te bepalen. Schrijf daartoe

$$w = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

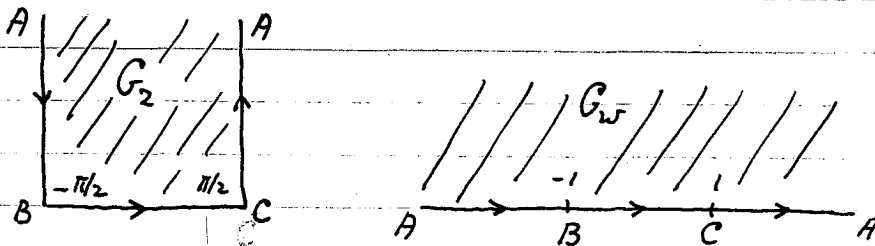
dan volgt dat

$$BC: z = x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \text{ wordt afgebeeld op } w = \sin x, -1 \leq \sin x \leq 1;$$

$$CA: z = \pi/2 + iy, y \geq 0 \text{ wordt afgebeeld op } w = \cosh y \geq 1;$$

$$AB: z = -\pi/2 + iy, y \geq 0 \text{ wordt afgebeeld op } w = -\cosh y \leq -1.$$

De rand van G_2 wordt dus afgebeeld op de reële as van het complexe w -vlak.



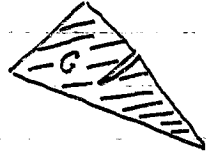
Merkt nu op dat een positieve omloop ABC in het z -vlak (aangegeven door de pijlen) overgaat in een positieve omloop ABC in het w -vlak, conform stelling 2.9. Verder wordt G_2 afgebeeld op $G_w: \operatorname{Im} w > 0$.

4. Afbeeldingsfunctie van Schwarz-Christoffel

4.1. Formule van Schwarz-Christoffel

Een polygoon gebied is een enkelvoudig samenhangend gebied waarvan de rand bestaat uit een eindig aantal rechte lijnstukken.

Het gebied mag medes hebben: de twee kanten van de sneed worden dan geteld als twee zijden van het rand polygoon.

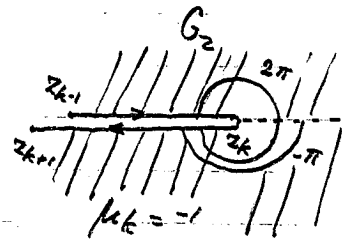
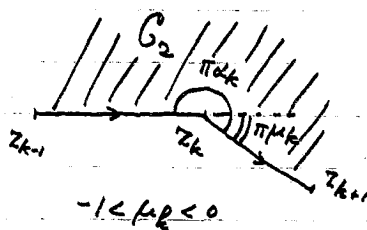
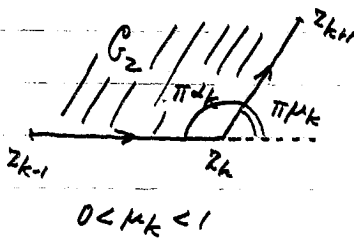


We zoeken nu een conforme afbeelding van een polygoon gebied G_2 in het z -vlak op het boven-halvlak $\text{Im } w > 0$. Het blijkt daarbij gemakkelijker de inverse afbeelding te beschouwen, d.i. de conforme afbeelding $z = g(w)$ van $\text{Im } w > 0$ op G_2 .

Volgens de afbeeldingsstelling van Riemann bestaat er een w 's afbeelding voort is volgens stelling 2.12 $g(w)$ continu voort te zetten tot op $\text{Im } w = 0$, welke dan wordt afgebeeld op de rand C_2 van G_2 .

Noem de hoekpunten van C_2 achtereen volgens z_1, z_2, \dots, z_n , genummerd in positieve volgorde, d.w.z. bij doorlopen van C_2 van $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n \rightarrow z_1$, ligt G_2 aan de linkerhand. Voorlopig nemen we aan dat z_1, z_2, \dots, z_n eindig zijn: het gebied G_2 is dan begrensd.

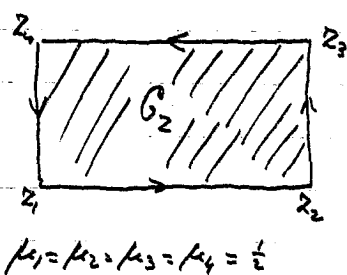
In het hoekpunt $z_k, k=1, 2, \dots, n$, vormt C_2 een "binnenhoek" $\pi \alpha_k$ te noemen. Definieer verder de "buitenhoek" $\pi \mu_k := \pi - \pi \alpha_k$. Kennelijk geldt $-1 \leq \mu_k < 1$, waarbij $0 < \mu_k < 1$ correspondeert met een inspringende hoek van G_2 , $-1 < \mu_k < 0$ met een uit springende hoek en $\mu_k = -1$ met $z_k =$ uiteinde van een sneed; zie figuur.



Meetkundig is in te zien dat

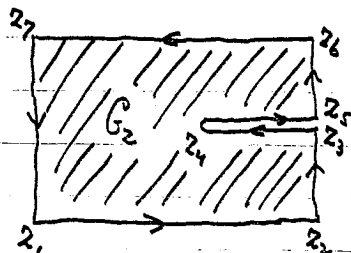
$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \pi = (n-2)\pi, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k \pi = 2\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k \pi = 2\pi, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k = 2.$$

Voorbeelden



$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \frac{1}{2}$$

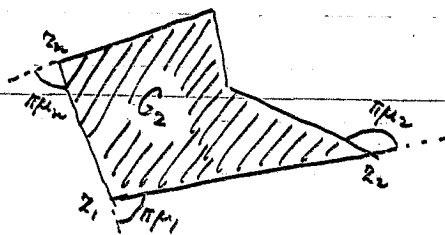
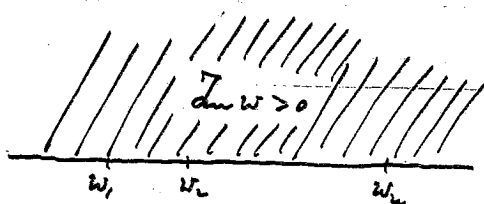
$$\sum \mu_k = 2$$



$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \frac{1}{2}, \mu_4 = -1$$

$$\sum \mu_k = 2$$

Laat nu $z = g(w)$ een conforme afbeelding zijn van $\text{Im } w > 0$ op een polygonaal gebied G_2 met hoekpunten z_1, z_2, \dots, z_n en buitenhoeken $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Elk punt z_k is beeldpunt van een reëel punt w_k op de reële as van het w -vlak. Eén van de punten w_k mag a zijn. De punten w_1, w_2, \dots, w_n liggen in positieve volgorde, d.w.z. bij doorlopen van de reële as van $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_n \rightarrow w_1$, ligt het gebied $\text{Im } w > 0$ aan de linkerhand.



Nu geldt voor de afbeeldingsfunctie $g(w)$:

$$(I) \quad \frac{g''(w)}{g'(w)} = - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{w-w_k}, \quad \text{Im } w > 0.$$

Als $w_j = a$ moet de term $\mu_j / (w-w_j)$ worden weggelaten in de som. De betrekking (I) wordt bewezen in 4.2.

Door integratie van (I) volgt

$$\log g'(w) = C' - \sum_{k=1}^n \mu_k \log(w-w_k),$$

$$(II) \quad g'(w) = C \prod_{k=1}^n (w-w_k)^{-\mu_k}, \quad \text{Im } w > 0,$$

waarin C een complexe constante is. Met $(w-w_k)^{-\mu_k}$ wordt de hoofdwaaarde bedoeld; voor $\text{Im } w > 0$ is $0 \leq \arg(w-w_k) \leq \pi$.

Integreer (II) nog eens vanuit een vast punt w_0 met $\text{Im } w_0 > 0$, dan vinden we

$$(III) \quad g(w) = C \int_{w_0}^w \prod_{k=1}^n (w-w_k)^{-\mu_k} dw + D, \quad \text{Im } w > 0,$$

waarin D een complexe constante is. De betrekking (III) wordt formule van Schwarz-Christoffel ⁽¹⁸⁶⁹⁾ genoemd. Als $w_j = a$, dient de factor $(w-w_j)^{-\mu_j}$ in de producten in (II) en (III) weggelaten te worden.

Zijn G_2 een begrensd polygonaal gebied met hoekpunten z_1, z_2, \dots, z_n en buitenhoeken $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. De afbeelding $z = g(w)$ van $\text{Im } w > 0$ op G_2 is dan te bepalen met de formule van Schwarz-Christoffel. In deze formule komen voor als onbekende grootheden: n reële parameters w_1, w_2, \dots, w_n , en twee complexe constanten C en D . Volgens de afbeeldingsstelling van Riemann (III) mag van drie hoekpunten z_k het origineel w_k worden voorgeschreven. Er restoren dan nog $(n-3)$ onbekende reële parameters w_k en twee ~~on~~ onbekende complexe constanten C en D . Bedenk nu dat een polygonaal met n hoekpunten eenduidig bepaald wordt door

Analog: $\arg(z_k - z_{k'}) = \arg g(w^*) = \arg C - \sum_{j=1}^n p_j \arg(w^* - v_j)$, $v_{k'} < w^* < v_k$
 $\arg(w^* - v_j) = 0$ als $v_j \leq w^*$, $\arg(w^* - v_j) = \pi$ als $v_j > w^*$.

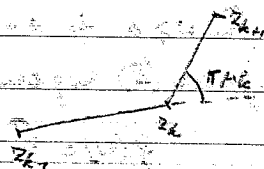
Vergleiche mit (*) dann ist

$$\arg(w^* - v_j) = \arg(w - v_j) \text{ als } j \neq k, \quad \arg(w^* - v_k) = \pi, \quad \arg(w - v_k) = 0,$$

Ersetzt

$$\arg(z_{k'} - z_k) - \arg(z_k - z_{k'}) = \pi p_k,$$

offenbar hoch $\overrightarrow{z_k z_{k'}}$ oder $\overrightarrow{z_{k'} z_k}$ ist πp_k . Klappt mit Figuren



al zijn hoeken en de lengtes van $n-2$ zijden, afgezien van translatie en rotatie. Dit leidt tot $n-2$ onafhankelijke betrekkingen van de vorm

$$|z_{k+1} - z_k| = \left| \int_{z_k}^{z_{k+1}} g'(w) dw \right| = |C| \int_{z_k}^{z_{k+1}} \prod_{j=1}^n |w - w_j|^{-\mu_j} dw.$$

Hierbij is gebruikt: $(w-w_j)^{-\mu_j} = |w-w_j|^{-\mu_j}$ als $\arg(w-w_j) = 0$, of $(w-w_j)^{-\mu_j} = |w-w_j|^{-\mu_j} e^{-i\mu_j \pi}$ als $\arg(w-w_j) = \pi$; $\prod_{j=1}^n (w-w_j)^{-\mu_j} = |A| \prod_{j=1}^n |w-w_j|^{-\mu_j}$ met $|A|$ constant en $|A|=1$.

Door bovenstaande $n-2$ vergelijkingen worden de onbekende $n-3$ parameters w_k en $|C|$ eenduidig bepaald; de eenduidigheid volgt uit de stelling van Riemann.

De translatie-vrijheidsgraden van het polygoon corresponderen met de complexe constanten D . Vaak wordt het beginpunt w_0 van de integratie gekozen in een der punten z_k , dan is $D = z_k$.

De rotatievrijheid van het polygoon correspondeert met $\arg C$. Laat w, w' twee punten zijn met $w_k < w < w' < w_{k+1}$, dan is $\frac{g(w') - g(w)}{w' - w} = \frac{z' - z}{w' - w}$, waarbij de beeldpunten z, z' op de zijde $z_k z_{k+1}$ liggen. Neem het argument van de limiet voor $w' \rightarrow w$, dan volgt $\arg g'(w) = \arg(z_{k+1} - z_k)$ voor $w_k < w < w_{k+1}$; $\arg(z_{k+1} - z_k)$ is de hoek die de richting $\overrightarrow{z_k z_{k+1}}$ maakt met de positieve reële z -as. Men kan nu $\arg C$ bepalen uit

$$\arg(z_{k+1} - z_k) = \arg g'(w) = \arg C - \sum_{j=1}^n \mu_j \arg(w - w_j);$$

hierin is $\arg(w-w_j) = 0$ als $w_j \leq w_k$, $\arg(w-w_j) = \pi$ als $w_j > w_{k+1}$. Neem als speciaal geval $k=0$ dat $w_k = \max_{1 \leq j \leq n} w_j$, dan is $\arg C = \arg(z_{k+1} - z_k)$; de zijde $z_k z_{k+1}$ bevat dan het beeldpunt van $w = a$.

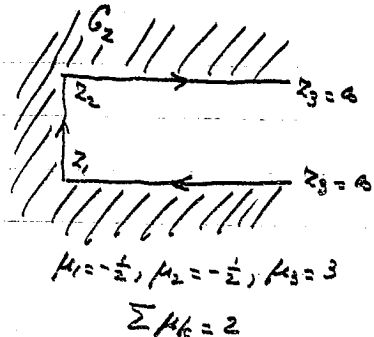
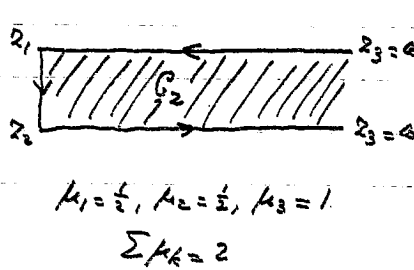
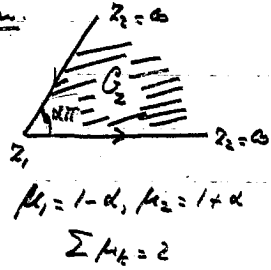
We beschouwen nu de afbeelding van $\Im w > 0$ op een niet-begrensd polygoon gebied G_2 . De rand C_2 bestaat dan uit een eindig aantal rechte lijnstukken, halfrechten of rechten, en een of meer hoekpunten liggen in a . In een hoekpunt $z_k = a$ worden een "binnenhoek" en "buitenhoek" als volgt gedefinieerd:

binnenhoek $\pi \mu_k =$ hoek waarover $\overrightarrow{z_{k+1} z_k}$ door het gebied gedraaid moet worden om met $\overrightarrow{z_{k+1} z_k}$ samen te vallen;

buitenhoek $\pi \mu_k = \pi + \pi \mu_k$ (let op het plus-teken!).

In dit geval is kenmerk $1 \leq \mu_k \leq 3$. Men kan bewijzen dat met deze definitie van de buitenhoek $\pi \mu_k$, de betrekking $\sum \mu_k = 2$ en de formule van Schwarz-Christoffel geldig blijven.

Voorbeelden.



februari 1953

Toevoeging. Beschouw nogmaals de formule van Schwarz-Christoffel

$$(III) \quad z = g(w) = C \int_{w_0}^w \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{-\mu_k} dw + D, \quad \text{Im } w > 0,$$

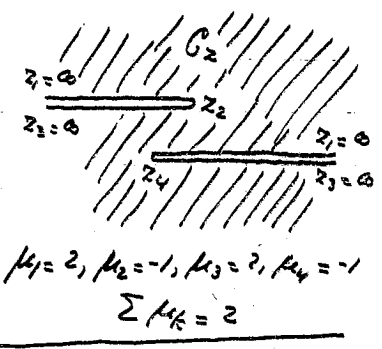
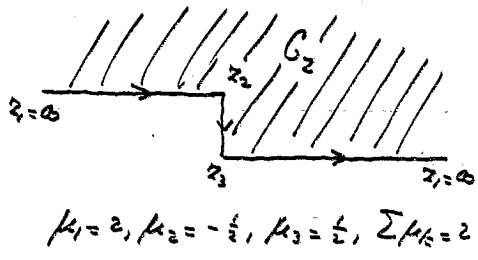
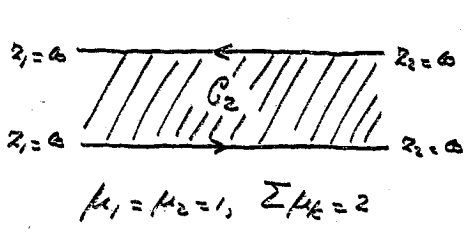
voor de conforme afbeelding van $\text{Im } w > 0$ op het polygon gebied G_2 (met hoekpunten z_k en buitenhoeken $\pi \mu_k$, $k=1, 2, \dots, n$). De hoekpunten z_k van G_2 zijn beeld van de punten w_k op de reële as van het w -vlak. Pas in (III) voor de substitutie $w = (\bar{w}_0 t - w_0) / (t - 1)$, welke de inverse is van de afbeelding $t = (w - w_0) / (w - \bar{w}_0)$. Onder deze afbeelding gaat $\text{Im } w > 0$ over in het cirkelgebied $|t| < 1$, terwijl de punten w_k overgaan in $t_k = (w_k - w_0) / (\bar{w}_k - w_0)$. De integraal in (III) gaat over in

$$\begin{aligned} & C \int_0^t \prod_{k=1}^n \left(\frac{\bar{w}_0 t - w_0}{t-1} - \frac{\bar{w}_0 t_k - w_0}{t_k - 1} \right)^{-\mu_k} \frac{w_0 - \bar{w}_0}{(t-1)^2} dt = \\ & = C \int_0^t \prod_{k=1}^n \left(\frac{(w_0 - \bar{w}_0)(t - t_k)}{(t-1)(t_k - 1)} \right)^{-\mu_k} \frac{w_0 - \bar{w}_0}{(t-1)^2} dt = \frac{C \prod_{k=1}^n (t_k - 1)^{\mu_k}}{w_0 - \bar{w}_0} \int_0^t \prod_{k=1}^n (t - t_k)^{-\mu_k} dt, \end{aligned}$$

wegens $\sum_{k=1}^n \mu_k = 2$. Vervang de factor voor \int_0^t door C' (= constant) en voor in de noemer $g(w) = g((\bar{w}_0 t - w_0) / (t - 1)) = G(t)$. Dan komen we tot de formule

$$(III') \quad z = G(t) = C' \int_0^t \prod_{k=1}^n (t - t_k)^{-\mu_k} dt + D, \quad |t| < 1,$$

voor de conforme afbeelding van $|t| < 1$ op het polygon gebied G_2 ; hierbij gaan de punten t_k op $|t| = 1$ over in de hoekpunten z_k van G_2 .



De bepaling van de parameters μ_k en $|C|$ in de formule van Schwarz-Christoffel lukt nu niet altijd meer op de eerder aangegeven wijze, daar de zijden oneindige lengte kunnen hebben. In de latere voorbeelden wordt aangegeven hoe deze moeilijkheid te overwinnen is.

Copie van 4.2 verspreid op uitgeg. n. 1580, 1581, 1582.

4.2 Bewijs van de formule van Schwarz-Christoffel.

Lemma 4.1. Zij $f(w)$ analytisch voor $0 < |w| < \rho$, $\Im w > 0$, en continu voor $0 \leq |w| < \rho$, $\Im w \geq 0$. Zij $f(0) = 0$; zij $f(w) \neq 0$ voor $0 < |w| < \rho$, $\Im w \geq 0$; zij $0 < \arg f(w) < \pi\alpha$ voor $0 < |w| < \rho$, $\Im w > 0$; zij $\arg f(w) = 0$ voor $0 < w < \rho$ en $\arg f(w) = \pi\alpha$ voor $-\rho < w < 0$; hierin is $0 < \alpha \leq 2$. Dan is er een ρ' met $0 < \rho' \leq \rho$, zodat voor $0 < |w| < \rho'$, $\Im w \geq 0$ geldt $f(w) = w^\alpha \Phi(w)$, $\frac{f'(w)}{f(w)} + \frac{1-\alpha}{w} = \Psi(w)$,

waarbij $\Phi(w)$ en $\Psi(w)$ analytisch zijn voor $|w| < \rho'$.

Bewijs. Voer in de functie $\Phi(w)$ gedefinieerd door

$$\Phi(w) = w^{-\alpha} f(w) = |w|^{-\alpha} \exp[i\alpha \arg w] f(w), \quad 0 < |w| < \rho, \quad 0 \leq \arg w \leq \pi.$$

Dan is $\Phi(w)$ analytisch voor $0 < |w| < \rho$, $\Im w > 0$, en continu voor $0 < |w| < \rho$, $\Im w \geq 0$. Voorts is $\arg \Phi(w) = 0$ voor $0 < w < \rho$ en $-\rho < w < 0$, zodat $\Phi(w)$ daar reëel en positief is. Met het spiegelingenprincipe van Schwarz volgt dan dat $\Phi(w)$ analytisch voort te zetten is tot het gebied $0 < |w| < \rho$; $w=0$ is daarbij een geïsoleerd singulier punt van $\Phi(w)$. Volgens $f(0) = 0$ is $\Phi(w) = o(w^{-\alpha})$ voor $w \rightarrow 0$, met $0 < \alpha \leq 2$. De functie $\Phi(w)$ heeft dan in $w=0$ of een enkelvoudige pool of een ophefbare singulariteit. In geval van een enkelvoudige pool zou gelden $\Phi(w) \approx \frac{c}{w}$ voor $|w| < \varepsilon$, ε voldoende klein. Daaruit zou volgen $\arg \Phi(w) \approx \arg c$ voor $0 < w < \varepsilon$, $\arg \Phi(w) \approx \arg c + \pi$ voor $-\varepsilon < w < 0$, hetgeen in strijd is met $\arg \Phi(w) = 0$ voor $-\rho < w < \rho$, $w \neq 0$.

De functie $\Phi(w)$ heeft dus een ophefbare singulariteit in $w=0$. Na opheffing van de singulariteit volgt $f(w) = w^\alpha \Phi(w)$ met $\Phi(w)$ analytisch voor $|w| < \rho$. We tonen nog aan dat $\Phi(0) \neq 0$ is. Ontwikkel daartoe $\Phi(w)$ in een Taylorreeks:

$\Phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$, $|w| < \rho$, en neem aan dat $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$. Dan is voor $|w|$ klein, $f(w) \approx c_m w^{d+m}$, zodat $\arg f(w)$ varieert van $\arg c_m$ tot $\arg c_m + (d+m)\pi$ als $0 \leq \arg w \leq \pi$. Gegeven is echter $0 \leq \arg f(w) \leq \pi\alpha$, zodat $m=0$, $\arg c_0 = 0$. Daaruit volgt $\Phi(0) = c_0 \neq 0$ en zelfs $\Phi(0)$ reëel en positief.

Beschouw vervolgens de afgeleide

$$f'(w) = \alpha w^{\alpha-1} \Phi(w) + w^{\alpha} \Phi'(w) =: w^{\alpha-1} h(w).$$

Dan is $h(w)$ analytisch voor $|w| < \rho$ en $h(0) = \alpha \Phi(0) \neq 0$. Bepaal nu $\rho' \leq \rho$ zodanig dat $h(w) \neq 0$ is voor $|w| < \rho'$. Vervolgens is dan

$$\frac{f''(w)}{f'(w)} = \frac{(\alpha-1)w^{\alpha-2}h(w) + w^{\alpha-1}h'(w)}{w^{\alpha-1}h(w)} = \frac{\alpha-1}{w} + \frac{h'(w)}{h(w)}, \quad \frac{f''(w)}{f'(w)} + \frac{1-\alpha}{w} = \Psi(w),$$

waarin $\Psi(w) = h'(w)/h(w)$ analytisch is voor $|w| < \rho'$. \square

We geven nu het bewijs van de formule van Schwarz-Christoffel.

Stelling 4.2. Laat $z = g(w)$ een conforme afbeelding zijn van $\text{Im } w > 0$ op een begrensd polygoon gebied G_2 met hoekpunten z_1, z_2, \dots, z_n en buitenhoeken $\pi/\mu_1, \pi/\mu_2, \dots, \pi/\mu_n$. Laat voor $k=1, 2, \dots, n$, het hoekpunt z_k beeldpunt zijn van het punt w_k op de reële as van het w -vlak. Dan geldt voor de afbeeldingsfunctie $g(w)$:

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{w-w_k}, \quad \text{Im } w > 0.$$

Bewijs. 1°. Beschouw eerst het geval dat w_1, w_2, \dots, w_n alle eindig zijn.

Voor in de functie

$$F(w) = \frac{g''(w)}{g'(w)} + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{w-w_k},$$

dan is te bewijzen $F(w) = 0$.

a) Uit het conform zijn van de afbeelding $z = g(w)$ volgt: $g(w)$ analytisch en $g'(w) \neq 0$ voor $\text{Im } w > 0$. Dan is ook $F(w)$ analytisch voor $\text{Im } w > 0$.

De functie $g(w)$ is continu voor $\text{Im } w > 0$. Voorts wordt het interval (w_k, w_{k+1}) door $z = g(w)$ afgebeeld op het lijnstuk $z_k z_{k+1}$. Met het spiegelingsoptimum van Schwarz (II) volgt dan dat $g(w)$ analytisch voort te zetten is tot het gebied bestaande uit de halfolakken $\text{Im } w > 0$ en $\text{Im } w < 0$, en het interval (w_k, w_{k+1}) . In het bijzonder is dan $g(w)$ analytisch en $g'(w) \neq 0$ voor $w_k < w < w_{k+1}$ (het laatste volgt uit het conform zijn van de voortgezette afbeelding). Ook $F(w)$ is dan analytisch op (w_k, w_{k+1}) .

Beschouw vervolgens de functie $\log g'(w)$; deze is analytisch voor $\text{Im } w > 0$ behalve in de punten w_k , $k=1, 2, \dots, n$. Op het interval (w_k, w_{k+1}) geldt

$$\text{Im } \log g'(w) = \arg g'(w) = \arg(z_{k+1} - z_k) = \text{constant}.$$

Differentiatie van deze betrekking leidt tot

$$\text{Im } \frac{g''(w)}{g'(w)} = 0, \quad \frac{g''(w)}{g'(w)} \text{ is reëel, voor } w_k < w < w_{k+1}.$$

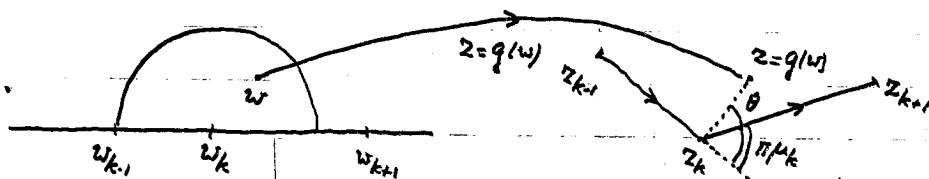
Ook de functie $F(w)$ is dan reëel op (w_k, w_{k+1}) , voor elke $k=1, 2, \dots, n$.

Pas nu nogmaals het spiegelingprincipe van Schwarz toe: $F(w)$ is analytisch voort te zetten tot het hele complexe w -vlak met uitzondering van de punten $w_k, k=1, 2, \dots, n$.

b) Voer in de functie

$$f_k(w) = \exp[-i \arg(z_{k+1} - z_k)] \{g(w) - z_k\},$$

beschouwd voor $|w - w_k| < \rho = \min(|w_{k+1} - w_k|, |w_k - w_{k-1}|)$, $\text{Im } w > 0$.



Uit de figuur blijkt $\arg f_k(w) = \theta$, zodat geldt

$$0 < \arg f_k(w) < \pi(1 - \mu_k) \text{ voor } 0 < |w - w_k| < \rho, \text{ Im } w > 0;$$

$$\arg f_k(w) = 0 \text{ voor } w_k < w < w_k + \rho, \quad \arg f_k(w) = \pi(1 - \mu_k) \text{ voor } w_k - \rho < w < w_k.$$

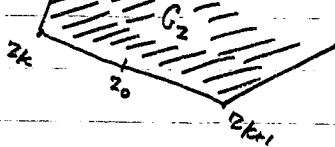
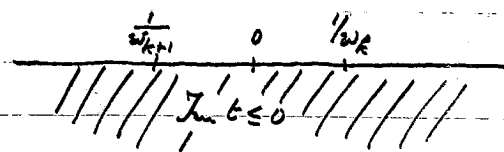
Pas nu lemma 4.1 toe op de functie $f_k(w)$, dan volgt dat

$$\frac{f_k''(w)}{f_k'(w)} + \frac{\mu_k}{w - w_k} = \frac{g''(w)}{g'(w)} + \frac{\mu_k}{w - w_k}$$

analytisch is in een omgeving van w_k . Ook $F(w)$ is dan analytisch in een omgeving van w_k , en wel voor elke $k=1, 2, \dots, n$. Samen met het resultaat van stap a) vinden we dan: $F(w)$ is analytisch in het hele complexe w -vlak, i.e., $F(w)$ is een gehele functie.

c) We onderzoeken het gedrag van $F(w)$ voor $w \rightarrow \infty$. Door de transformatie $t = \frac{1}{w}$ is het punt $w = \infty$ terug te brengen tot $t = 0$. Zij $g(\infty) = z_0$, en laat z_0 liggen op het lijnstuk $z_k z_{k+1}$, voor zekere k . Voer nu in de functie $h(t)$ gedefinieerd door

$$h(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) \text{ voor } \text{Im } t \leq 0, t \neq 0; \quad h(0) = z_0.$$



De functie $h(t)$ is dan analytisch voor $\text{Im } t < 0$ en continu voor $\text{Im } t \leq 0$. Door $z = h(t)$ wordt het interval $\frac{1}{w_{k+1}} < t < \frac{1}{w_k}$ afgebeeld op het rechte lijnstuk $z_k z_{k+1}$. Met behulp van het spiegelingprincipe van Schwarz is nu $h(t)$ analytisch voort te zetten tot een volle omgeving van $t = 0$. In die omgeving geldt de Taylorontwikkeling $h(t) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ met $c_1 = h'(0) \neq 0$ (de afbeelding is conform in $t = 0$). Hieruit volgt voor $g(w)$ de ontwikkeling $g(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^{-n}$, $|w|$ voldoende groot.

Alternatief bewijs:

2° laat een der punten w_k samenvallen met a , bijv. $w_1 = a$.

Voer nu in de functie

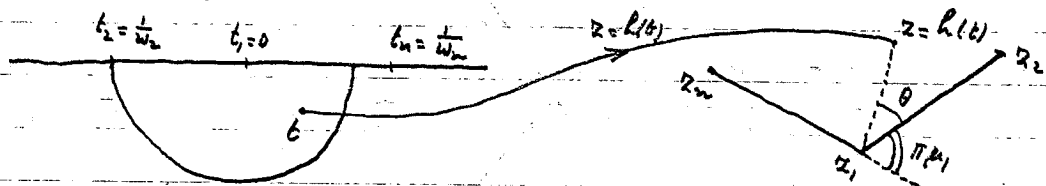
$$\tilde{F}(w) = \frac{q''(w)}{q'(w)} + \sum_{k=2}^n \frac{\mu_k}{w-w_k}$$

waarin vergeleken met $F(w)$ de term $f_1/(w-w_1)$ in de som is weggelaten.

Analoog als onder 1°, stappen a) en b), is te bewijzen dat $\tilde{F}(w)$ analytisch is in het gehele complexe w -vlak, i.e., $\tilde{F}(w)$ is een gehele functie.

c') We onderzoeken nu het gedrag van $\tilde{F}(w)$ voor $w \rightarrow a$. Door de transformatie $t = \frac{1}{w}$ is het punt $w_1 = a$ terug te brengen tot $t_1 = 0$; de "beurtpunten" w_2, w_n gaan hierbij over in $t_2 = \frac{1}{w_2}, t_n = \frac{1}{w_n}$. Voer nu in de functie $h(t)$ gedefinieerd door

$$h(t) = q\left(\frac{1}{t}\right) \text{ voor } \operatorname{Im} t \leq 0, t \neq 0; \quad h(t_1) = h(0) = z_1.$$



De functie $h(t)$ is dan analytisch voor $\operatorname{Im} t < 0$ en continue voor $\operatorname{Im} t \leq 0$. Voor $\operatorname{Im} t = 0$ is de functie

$$h_+(t) = \exp[-i \arg(z_2 - z_1)] \{ h(t) - z_1 \},$$

beschouwd voor $|t| \leq \rho = \min(|t_2|, |t_n|), \operatorname{Im} t \leq 0$. Uit de figuur blijkt $\arg h_+(t) = 0$, zodat

$$0 < \arg h_+(t) < \pi(1 - \mu_1) \text{ voor } 0 < |t| < \rho, \operatorname{Im} t < 0;$$

$$\arg h_+(t) = 0 \text{ voor } 0 < t \leq \rho, \arg h_+(t) = \pi(1 - \mu_1) \text{ voor } -\rho \leq t < 0.$$

Pas nu lemma 4.1 toe op de functie $h_+(t)$, dan volgt dat

$$\frac{h_+''(t)}{h_+'(t)} + \frac{\mu_1}{t} = \frac{h''(t)}{h'(t)} + \frac{\mu_1}{t} = - \frac{q''(\frac{1}{t})}{q'(\frac{1}{t})} \frac{1}{t^2} - \frac{2 - \mu_1}{t}$$

is analytisch in een volle omgeving van $t = 0$. Substitueer $t = \frac{1}{w}$ dan volgt voor $\tilde{F}(w)$:

$$\tilde{F}(w) = \frac{\sum_{k=2}^n \mu_k - 2}{w} + w^2 \times \text{functie analytisch in omgeving van } w = a.$$

Kennelijk is $\tilde{F}(w) \rightarrow 0$ als $w \rightarrow \infty$, zodat met de stelling van Liouville volgt: $\tilde{F}(w) = 0, \frac{q''(w)}{q'(w)} = - \sum_{k=2}^n \frac{\mu_k}{w-w_k}$

Tevens vinden we nogmaals als eerder resultaat $\sum_{k=1}^n \mu_k = 2$. \square

Bereken hieruit de afgeleiden $g'(w)$, $g''(w)$:

$$g'(w) = -c_1 w^{-2} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n c_n}{c_1} w^{-n+1} \right], \quad g''(w) = 2c_1 w^{-3} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) \frac{c_n}{2c_1} w^{-n+1} \right].$$

Voor het quotiënt $g''(w)/g'(w)$ vinden we dan een ontwikkeling van de vorm

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = -\frac{2}{w} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n w^{-n} \right] = -\frac{2}{w} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n w^{-n}, \quad |w| \text{ voldoende groot.}$$

Tenslotte volgt dan voor $F(w)$ een ontwikkeling van de vorm

$$F(w) = \frac{g''(w)}{g'(w)} + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{w-w_k} = \frac{\sum \mu_k - 2}{w} + \sum_{k=2}^n a_n w^{-n}, \quad |w| \text{ voldoende groot.}$$

We constateren dat $F(w) \rightarrow 0$ voor $w \rightarrow \infty$. Met de stelling van Liouville volgt dan $F(w) = 0$. Als nevenresultaat vinden we nogmaals $\sum_{k=1}^n \mu_k = 2$.

2°. Laat één der punten w_k samenvallen met a , bijv. $w_1 = a$.

Kies dan een $a \in \mathbb{R}$ met $w_n < a < \infty$, en beschouw de functie $g_1(t) = g(a - \frac{1}{t})$.

Door de afbeelding $w = a - \frac{1}{t}$ wordt $\text{Im } t > 0$ afgebeeld op $\text{Im } w > 0$. De functie $z = g_1(t)$ beeldt daarom $\text{Im } t > 0$ af op het polygon gebied G_2 . De hoekpunten z_k corresponderen daarbij met $t_k = \frac{1}{a-w_k}$; in het bijzonder is z_1 beeld van $t_1 = 0$. Rangereem t_1, t_2, \dots, t_n alle eindig zijn, kunnen we het reeds bewezen geval 1° van de stelling toepassen met als resultaat

$$\frac{g_1''(t)}{g_1'(t)} = -\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{t-t_k}$$

Substitueer hierin $g_1(t) = g(a - \frac{1}{t})$, $t = \frac{1}{a-w}$, $t_k = \frac{1}{a-w_k}$, dan vinden we

$$g_1'(t) = g'(a - \frac{1}{t}) \frac{1}{t^2}, \quad g_1''(t) = g''(a - \frac{1}{t}) \frac{1}{t^4} - g'(a - \frac{1}{t}) \frac{2}{t^3},$$

$$\frac{g_1''(t)}{g_1'(t)} = \frac{g''(a - \frac{1}{t})}{g'(a - \frac{1}{t})} \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = -\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{t-t_k},$$

$$\begin{aligned} \frac{g''(w)}{g'(w)} &= 2t - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k t^2}{t-t_k} = (2 - \sum_{k=1}^n \mu_k) t - \sum_{k=2}^n \frac{\mu_k}{\frac{1}{t} - \frac{1}{t_k}} = \\ &= \frac{2 - \sum_{k=1}^n \mu_k}{a-w} - \sum_{k=2}^n \frac{\mu_k}{w-w_k} = -\sum_{k=2}^n \frac{\mu_k}{w-w_k} \end{aligned}$$

wegens $\sum_{k=1}^n \mu_k = 2$. In de laatste som ontbreekt de term met $k=1$, zoals te begrijpen was. De betrekking $\sum_{k=1}^n \mu_k = 2$ volgt ook nog eens als nevenresultaat, daar $g''(w)/g'(w)$ analytisch is in $w=a$. \square

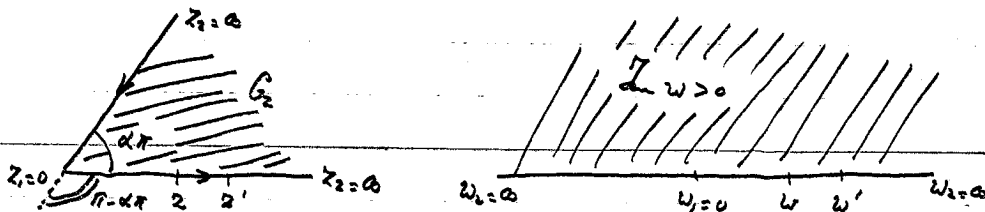
Opmerking. Voor het bewijs van de formule van Schwarz-Christoffel voor een niet-begrensd polygon gebied met één of meer hoekpunten in ∞ , wordt verwezen naar de literatuur, bijv. P. Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Vol. I, Wiley, New York, 1974, § 5.12.

19

4.3. Voorbeelden van afbeeldingen bepaald met de formule van Schwarz-Christoffel.

1) Het gebied $G_2 = \{z \mid 0 < \arg z < \alpha\pi\}$ is op te vatten als een "driehoek" met hoekpunten $z_1 = 0$ en $z_2 = \infty$. Voor de binnenhoecken van G_2 geldt: $\mu_1 = 1 - \alpha$, $\mu_2 = 1 + \alpha$, $\sum \mu_k = 2$.

We zoeken een afbeelding $z = g(w)$ van $\Im w > 0$ op G_2 , zodanig dat z_1, z_2 corresponderen met $w_1 = 0, w_2 = \infty$.



Volgens de formule van Schwarz-Christoffel is nu

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C w^{\alpha-1}, \quad 0 \leq \arg w \leq \pi.$$

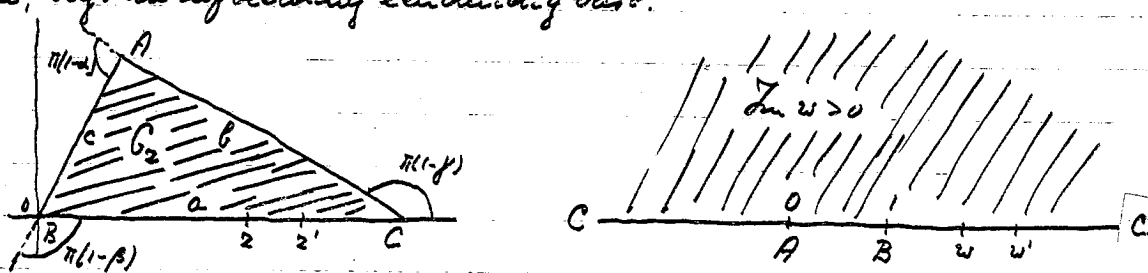
Hierin is $C > 0$. Immers neem twee punten z, z' , met $0 < z < z'$ op de positieve reële as van het z -vlak. Die corresponderen met twee punten w, w' , met $0 < w < w'$ op de positieve reële as van het w -vlak. Dan volgt $\frac{z'-z}{w'-w} > 0$, en na een limietovergang $w' \rightarrow w$: $\frac{dz}{dw} = g'(w) > 0$ voor $w > 0$. Daar ook $w^{\alpha-1} > 0$ is voor $w > 0$, vinden we $C > 0$.

Integreer $g'(w)$ vanuit $w_1 = 0$, corresponderend met $z_1 = 0$, dan volgt

$$z = g(w) = C \int_0^w t^{\alpha-1} dt = C^* w^\alpha, \quad 0 \leq \arg w \leq \pi,$$

waarin $C^* > 0$ een nog vrije constante is (een vrijheidsgraad, omdat maar twee punten w_1 en w_2 werden voorgeschreven). Men kan onmiddellijk inzien dat door $z = C^* w^\alpha$ inderdaad $\Im w > 0$ wordt afgebeeld op G_2 .

2) Beschouw het gebied G_2 begrensd door een driehoek met hoekpunten A, B, C , zijden a, b, c , en binnenhoecken α, β, γ , met $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Laet BC samenvallen met het interval $[0, a]$ van de reële as en laet A boven de reële as liggen. We zoeken een conforme afbeelding $z = g(w)$ van $\Im w > 0$ op G_2 , zodanig dat A, B, C corresponderen met resp. $w = 0, 1, \infty$. Nadat aldus van drie hoekpunten het origineel is voorgeschreven, ligt de afbeelding eenduidig vast.



We vatten de gegevens samen in de tabel op de volgende bladzijde.

	z	w	μ
A	$ce^{i\pi/\beta}$	0	$1-\alpha$
B	0	1	$1-\beta$
C	a	∞	$1-\gamma$

$\sum \mu_k = 2$

Volgens de formule van Schwarz-Christoffel is nu

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C w^{\alpha-1} (w-1)^{\beta-1}, \quad 0 \leq \arg w \leq \pi, \quad 0 \leq \arg(w-1) \leq \pi.$$

Bedenk dat het punt C correspondeert met $w = \infty$, zodat de betreffende factor $(w-1)^{\beta-1}$ dient te worden weggelaten.

Mit de figuur of p. 61 is of te lezen: $\frac{dz}{dw} = \lim_{w \rightarrow w'} \frac{z'-z}{w'-w} > 0$ op BC; tevens is $w^{\alpha-1} > 0$, $(w-1)^{\beta-1} > 0$ op BC waar $w > 1$ is; daarmede volgt $C > 0$, i.e. C is positief reëel.

De waarde van C is te bepalen uit de lengte van één der zijden bijv.

$$c = |z(B) - z(A)| = C \left| \int_0^1 t^{\alpha-1} (t-1)^{\beta-1} dt \right| = C \left| e^{i\pi(1-\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \right| = C B(\alpha, \beta),$$

of ook

$$a = |z(C) - z(B)| = C \left| \int_1^{\infty} t^{\alpha-1} (t-1)^{\beta-1} dt \right| = C \int_0^1 s^{-\alpha-\beta} (1-s)^{\beta-1} ds = C B(1-\alpha, \beta).$$

onder toepassing van de substitutie $t = \frac{1}{s}$. Na herleiding met gebruik van $\alpha + \beta + \gamma = 1$ en de eigenschappen 7 en 8 uit hoofdstuk 1 vinden we voor C:

$$C = \frac{c \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} = \frac{c \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} = \frac{\pi c}{\sin \pi \gamma} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)},$$

resp. $C = \frac{a \Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha - \beta) \Gamma(\beta)} = \frac{\pi a}{\sin \pi \alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)}$

Deze uitkomsten zijn dezelfde op grond van de sinusregel: $\frac{a}{\sin \pi \alpha} = \frac{b}{\sin \pi \beta} = \frac{c}{\sin \pi \gamma}$.

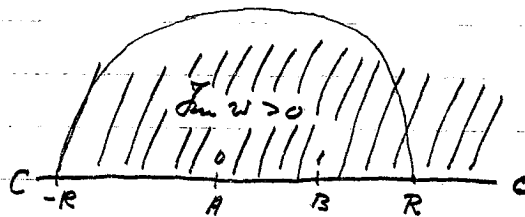
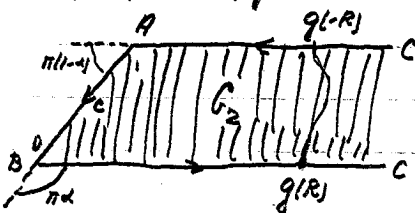
Impliciet is hiermee nog eens de sinusregel bewezen.

Integreer tenslotte $g'(w)$ vanuit $w=1$, corresponderend met $z=0$, dan volgt

$$z = g(w) = C \int_1^w t^{\alpha-1} (t-1)^{\beta-1} dt.$$

Deze integraal is niet verder uit te drukken in elementaire functies.

Beschouw vervolgens het limietgeval van een gebied G_2 in de vorm van een schere half-onzijdige strook met hoekpunten A en B als boven, terwijl het hoekpunt C in ∞ ligt; dan is $\beta = 1 - \alpha$, $\gamma = 0$.



Tabel:

	z	w	μ
A	$ce^{i\pi(1-\alpha)}$	0	$1-\alpha$
B	0	1	α
C	∞	∞	1

$\sum \mu_k = 2$

Voor de afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ geldt nu:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C w^{\alpha-1} (w-1)^{-\alpha},$$

met $C = \frac{c}{B(\alpha, 1-\alpha)} = \frac{c}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} = c \frac{\sin \pi \alpha}{\pi}$.

Impliciet is hiermee tevens nog eens bewezen: $\Gamma(d) \Gamma(1-d) = \frac{\pi}{\sin \pi d}$,
d.i. eigenschap 8 uit hoofdstuk 1.

Voorbeeld 3 uit de 1975, 1983 (inbrengen), 1987 (inbrengen), 1988 (inbrengen).

De constante C is ook op een andere manier te bepalen met een methode die we ook later weer zullen gebruiken. Ontwikkel $\frac{dz}{dw} = g'(w)$ in een omgeving van $w = \infty$:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = Cw^{-1} \left(1 - \frac{1}{w}\right)^{-\alpha} = Cw^{-1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^{-n}\right]; \quad |w| > 1;$$

De precieze waarde van de coëfficiënten, $a_n = \binom{-\alpha}{n} (-1)^n$, is hier niet van belang. Integreer deze ontwikkeling langs de halve cirkel $w = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, met $R > 1$, dan volgt

$$g(-R) - g(R) = \pi i C + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} [R^{-n} - (-R)^{-n}] = \pi i C + O(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty.$$

Voor $R > 1$ liggen de beeldpunten $g(R)$ en $g(-R)$ op resp. BC en AC. Het beeld van de cirkel $w = Re^{i\theta}$ is een kromme in G_2 van $g(R)$ naar $g(-R)$. Dan geldt

$$\operatorname{Im} [g(-R) - g(R)] = C \sin \pi \alpha = \pi C + O(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty,$$

waaruit nogmaals volgt $C = \frac{c}{\pi} \sin \pi \alpha$.

De afbeeldingsfunctie $g(w)$ volgt door integratie van $g'(w)$ vanuit $w=1$:

$$z = g(w) = \frac{c}{\pi} \sin \pi \alpha \int_1^w t^{\alpha-1} (t-1)^{-\alpha} dt.$$

Tenslotte beschouwen we nog het speciaal-geval van een half-oneindige strook G_2 met $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$. De afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ is dan niet te werken tot

$$z = g(w) = \frac{c}{\pi} \int_1^w t^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2c}{\pi} \int_1^{\sqrt{w}} \frac{ds}{(s^2-1)^{3/2}} = \frac{2c}{\pi} \log(\sqrt{w} + \sqrt{w-1})$$

met behulp van de substitutie $t = s^2$. De inverse functie van $z = g(w)$ is nu als volgt te bepalen:

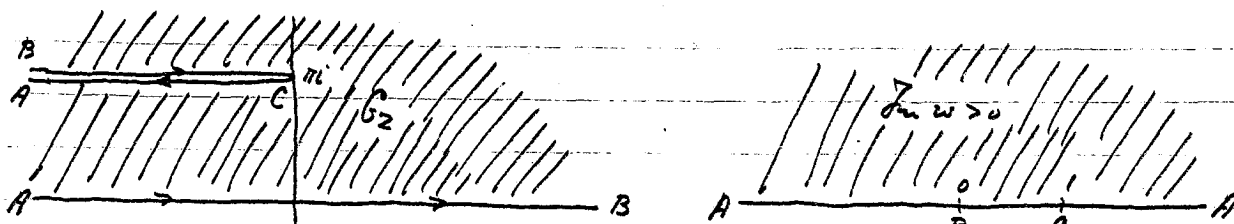
$$\sqrt{w} + \sqrt{w-1} = e^{\pi z / 2c}; \quad \sqrt{w-1} = e^{\pi z / 2c} - \sqrt{w}; \quad \sqrt{w-1} = e^{\pi z / 2c} - 2e^{\pi z / 2c} \sqrt{w} + \sqrt{w};$$

$$\sqrt{w} = \frac{e^{\pi z / 2c} + 1}{2e^{\pi z / 2c}}; \quad w = \frac{e^{2\pi z / 2c} + 2e^{\pi z / 2c} + 1}{4e^{\pi z / 2c}}; \quad w = \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{\pi z}{c}\right) + \frac{1}{2}.$$

De laatste functie beeldt de strook $G_2 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0 \wedge 0 < \operatorname{Im} z < c\}$ af op $\operatorname{Im} w > 0$, zodanig dat de punten $z = ic$, $z = 0$, $z = \infty$ overgaan in resp. $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$. Vergelijk dit met het resultaat uit 3.5, p. 39: $w = \cosh z$ beeldt $G_2 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0 \wedge 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ af op $\operatorname{Im} w > 0$, zodanig dat de punten $z = \pi i$, $z = 0$, $z = \infty$ overgaan in resp. $w = -1$, $w = 1$, $w = \infty$.

*) 3) Zij G_2 het bovenhalfvlak met een sneed langs de halfrechte $\operatorname{Re} z \leq 0$, $\operatorname{Im} z = \pi$. De rand van G_2 vormt een (ontwaarde) driehoek met hoekpunten A, B, C, waarbij A en B tein ∞ liggen en C samenvalt met $z = \pi i$. We zoeken een afbeelding $z = g(w)$ van $\operatorname{Im} w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w = \infty, 0, 1$.

*) Voor een alternatieve behandeling en een toelichting, zie p. 64a, b, c, d.



Tabel:

	z	w	μ
A	a	a	1
B	a	0	2
C	πi	1	-1
			$\sum \mu_k = 2$

Volgens de formule van Schwarz-Christoffel is nu:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C \frac{w-1}{w^2}$$

Mit $\frac{dz}{dw} > 0$ op AB, volgt $C < 0$, i.e. C negatief reëel.
Integreer vanuit $w=1$, corresponderend met $z=\pi i$:

$$z = g(w) = C \int_1^w \frac{t-1}{t^2} dt + \pi i = C \left[\log w + \frac{1}{w} - 1 \right] + \pi i, \quad 0 \leq \arg w \leq \pi$$

Op de verschillende delen van de reële as van het w -vlak is deze functie nog te vereenvoudigen:

AB: $w < 0$; $\arg w = \pi$; $\log w = \log |w| + \pi i$;

$$z = g(w) = C \left[\log |w| + \frac{1}{w} - 1 \right] + \pi i (C+1);$$

in het z -vlak valt AB langs de reële z -as, zodat $C = -1$ moet zijn.

BC en CA: $0 < w < 1$ en $w > 1$; $z = g(w) = -\log w - \frac{1}{w} + 1 + \pi i$;

inderdaad beschrijft het beeldpunt z de halfrechte $|\operatorname{Re} z| < 0$, $\operatorname{Im} z = \pi$.

We onderzoeken nog het gedrag van de afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ in de omgeving van het punt C, d.i. $w=1$, $z=\pi i$. Ontwikkel daartoe $g(w)$ naar machten van $w-1$:

$$z = g(w) = -\log[1+(w-1)] - \frac{1}{1+(w-1)} + 1 + \pi i = -(w-1) + \frac{1}{2}(w-1)^2 - 1 + (w-1) - (w-1)^2 + \pi i + O((w-1)^3),$$

$$z = g(w) = \pi i - \frac{1}{2}(w-1)^2 + O((w-1)^3), \quad w \rightarrow 1.$$

Inderdaad wordt de binnenhoek π bij C: $w=1$ verdubbeld tot een binnenhoek 2π bij C: $z=\pi i$. Voor het gedrag van de inverse functie van $z = g(w)$, in de omgeving van $z = \pi i$ vinden we

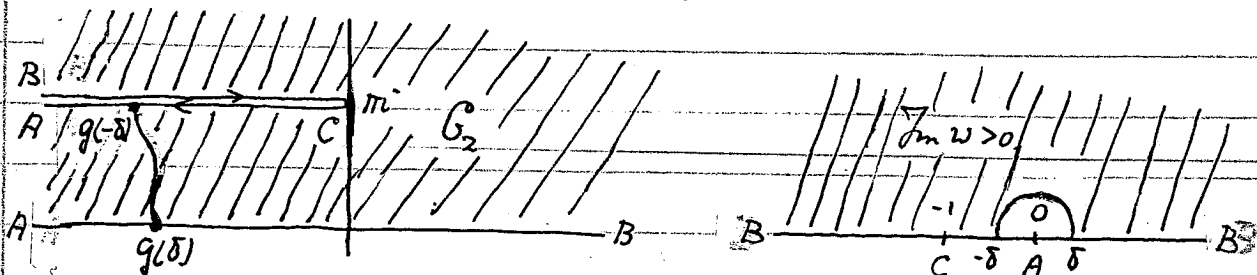
$$(w-1)^2 = -2(z-\pi i) [1 + O(\sqrt{z-\pi i})]; \quad w-1 = i\sqrt{2} \sqrt{z-\pi i} [1 + O(\sqrt{z-\pi i})],$$

$$w = 1 + i\sqrt{2} \sqrt{z-\pi i} + O(\sqrt{z-\pi i}), \quad z \rightarrow \pi i, \quad \text{met } -\pi < \arg(z-\pi i) < \pi.$$

Hierbij is het teken van de wortel zo bepaald dat BC en CA in het z -vlak corresponderen met BC en CA in het w -vlak

4) Zij G_2 het hele complexe z -vlak met snedes langs de halfrechten $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z = 0$ en $\operatorname{Re} z \leq a$, $\operatorname{Im} z = b$. Hierbij zijn a en b willekeurig behalve dat $a < 0$ indien $b = 0$.

3) Zij G_2 het bovenhalfvlak $\text{Im } z > 0$ met een snede langs de halfrechte $\text{Re } z \leq 0, \text{Im } z = \pi$. De rand van G_2 vormt een (ontaard) driehoek met hoekpunten A, B, C , waarbij A en B in ∞ liggen en C samenvalt met $z = \pi i$. We zoeken een afbeelding $z = g(w)$ van $\text{Im } w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met $w = 0, \infty, -1$.



Tabel:	z	w	μ	Volgens de formule van Schwarz-Christoffel is nu
A	∞	0	1	$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C \frac{w+1}{w}$. Met $\frac{dz}{dw} > 0$ op AB , volgt $C > 0$ (positief reëel). $\sum \mu_k = 2$
B	∞	∞	2	
C	πi	-1	-1	

Integreer vanuit $w = -1$, corresponderend met $z = \pi i$:

$$z = g(w) = C \int_{-1}^w \frac{t+1}{t} dt + \pi i = C[w+1 + \log w] + (1-C)\pi i.$$

Neem $w > 0$, zodat $w \in AB$. In het z -vlak valt AB langs de reële ax , zodat $C = 1$ moet zijn.

De waarde van C is ook te bepalen via ontwikkeling van $\frac{dz}{dw} = g'(w) = Cw^{-1} + O(1)$, $w \rightarrow 0$. Integreer deze ontwikkeling langs de halve cirkel $w = \delta e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, dan volgt

$$g(-\delta) - g(\delta) = \pi i C + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0.$$

De punten $g(-\delta)$ en $g(\delta)$ liggen op resp. CA en AB in het z -vlak (zie figuur), zodat $\text{Im}[g(-\delta) - g(\delta)] = \pi = \pi C + O(\delta)$, $\delta \rightarrow 0$; $C = 1$.

Op de verschillende delen van de reële ax van het w -vlak is de afbeeldingsfunctie $g(w)$ nog als volgt niet te verken:

AB, $w > 0$; $z = g(w) = w + 1 + \log w$ doorloopt de reële z - ax van $-\infty$ naar $+\infty$, als w varieert van 0 naar ∞ .

BC en CA, $w < -1$ en $-1 < w < 0$; $z = g(w) = w + 1 + \log |w| + \pi i$; de functie $\text{Re } g(w)$ is toenemend voor $w < -1$ tot een maximum $\text{Re } g(-1) = 0$ en daarna afnemend

voor $-1 < w < 0$; het beeldpunt $z = g(w)$ beschrijft de halve rechte $\operatorname{Re} z \leq 0$, $\operatorname{Im} z = \pi$, eerst van links naar rechts en daarna terug van rechts naar links.

We onderzoeken nog het gedrag van de afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ in de omgeving van het punt C , $w = -1$, $z = \pi i$. Ontwikkel $g(w)$ naar machten van $w+1$:

$$z = g(w) = w+1 + \log(-1) + \log(1-(w+1)) = w+1 + \pi i - (w+1) - \frac{1}{2}(w+1)^2 + O((w+1)^3),$$

$$z - \pi i = -\frac{1}{2}(w+1)^2 + O((w+1)^3), \quad w \rightarrow -1.$$

Hiermee in overeenstemming wordt de binnenhoek π bij C : $w = -1$, verdubbeld tot een binnenhoek 2π bij C : $z = \pi i$. Voor het gedrag van de inverse functie van $z = g(w)$, in de omgeving van $z = \pi i$, vinden we

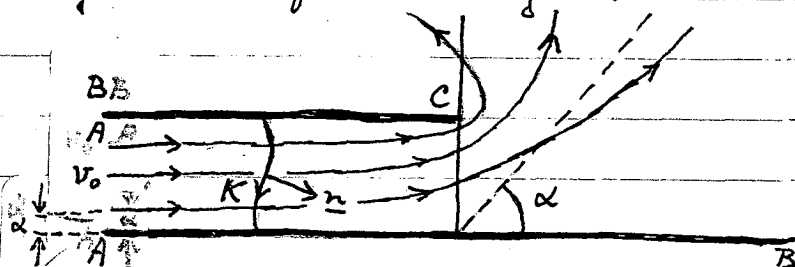
$$(w+1)^2 = -2(z - \pi i) [1 + O(\sqrt{z - \pi i})]; \quad w+1 = i\sqrt{2} \sqrt{z - \pi i} [1 + O(\sqrt{z - \pi i})],$$

$$w = -1 + i\sqrt{2} \sqrt{z - \pi i} + O(\sqrt{z - \pi i}), \quad z \rightarrow \pi i, \quad \text{met } -\pi \leq \arg(z - \pi i) < \pi.$$

Hierbij is het teken van de wortel zo gekozen dat BC en CA in het z -vlak corresponderen met BC en CA in het w -vlak.

Toewoeging. De voorgaande conforme afbeelding wordt nu gebruikt bij de oplossing van het volgende stromingsprobleem.

Zij $z = x + iy$. In het gebied G_2 heerst een potentiaalstroming met snelheid $\underline{v} = (v_x, v_y)$, af te leiden uit een snelheidspotentiaal $\varphi(x, y)$ volgens $\underline{v} = -\operatorname{grad} \varphi$. In de omgeving van A , i.e. voor $x \rightarrow -\infty$, $0 \leq y \leq \pi$, heerst een ongestoorde uniforme stroming met snelheid $\underline{v} = (v_0, 0)$ in de positieve x -richting.



Hiermee zijn enige stroomlijnen (rekend aan de snelheid \underline{v}) getekend.

Bij $\varphi(x, y)$ voeren we in de geconjugeerde harmonische functie $\Psi(x, y)$ (stroomfunctie), bepaald door $\Psi_x = \varphi_y$, $\Psi_y = -\varphi_x$ (Cauchy-Riemann vergelijkingen), en de complexe potentiaal $\Omega(z) = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y)$. De stroomfunctie $\Psi(x, y)$ is eenduidig bepaald op een constante na, en is constant langs stroomlijnen. De rand van G_2 bestaat uit de stroomlijnen BCA ($-\infty < x \leq 0$, $y = \pi$) en AB ($-\infty < x < \infty$, $y = 0$). Neem nu

$\psi = 0$ langs BCA . Uit de voorstelling $\psi(x, 0) = \int_K (v, n) ds = \text{flux door } K$ (zie de figuur en het bewijs van stelling 4.12) volgt $\psi = v_0 \pi$ langs AB . De stroomfunctie $\psi(x, y)$ is dan oplossing van het volgende probleem:

$$\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \text{ in } G_2; \quad \psi = 0 \text{ op } BCA, \quad \psi = v_0 \pi \text{ op } AB.$$

Onder de conforme afbeelding $z = g(w)$ gaat dit probleem over in het volgende probleem in het $w = u + iv$ -vlak:

$$\Delta \psi = \psi_{uu} + \psi_{vv} = 0 \text{ in } \text{Im } w > 0; \quad \psi = 0 \text{ op } BCA (u < 0, v = 0), \quad \psi = v_0 \pi \text{ op } AB (u > 0, v = 0).$$

De oplossing van het laatste probleem wordt gegeven door

$$\psi(u, v) = v_0 (\pi - \arg w), \quad \Omega(w) = v_0 (\pi i - \log |w|).$$

De oplossing van $\psi(x, y)$ en $\Omega(z)$ volgt hieruit door substitutie van $w = g^{-1}(z)$, waarbij g^{-1} de inverse functie is van $z = g(w) = w + 1 + \log w$. Deze inverse functie is niet expliciet te bepalen, zodat de oplossing voor $\psi(x, y)$ en $\Omega(z)$ in impliciet vorm gegeven is.

Uit deze impliciete vorm is toch wel de nodige informatie te halen. Zo worden de stroomlijnen $\psi = \text{constant}$ in het w -vlak gegeven door $\arg w = \alpha = \text{constant}$ met $\alpha \in [0, \pi]$, oftewel door $w = t e^{i\alpha}$, $0 < t < \infty$. In het z -vlak worden de stroomlijnen dan beschreven door de parametervoorstelling

$$z = g(t e^{i\alpha}) = t e^{i\alpha} + \log t + 1 + i\alpha, \quad 0 < t < \infty.$$

Voor kleine t ($t \rightarrow 0$) is $z \approx \log t + 1 + i\alpha$, d.i. bij benadering een horizontale rechte op hoogte α boven AB ; voor grote t ($t \rightarrow \infty$) is $z \approx t e^{i\alpha}$, zodat de stroomlijn wegliep onder (bij benadering) een hoek α met AB ; zie de figuur op de vorige pagina. Voor $\alpha = 0$ resp. $\alpha = \pi$ valt de stroomlijn samen met AB resp. ACB .

De stroomsnelheid $v = -\text{grad } \psi$ van de oorspronkelijke stroming in het gebied G_2 is te bepalen uit

$$\frac{d\Omega}{dz} = \psi_x + i\psi_y = \psi_x - i\psi_y = -(v_x - i v_y).$$

De afgeleide $d\Omega/dz$ wordt gevonden met de kettingregel:

$$\frac{d\Omega}{dw} = \frac{d\Omega}{dz} g'(w); \quad -\frac{v_0}{w} = \frac{d\Omega}{dz} \left(1 + \frac{1}{w}\right); \quad \frac{d\Omega}{dz} = -\frac{v_0}{w+1}.$$

In impliciete vorm wordt de snelheid $v = (v_x, v_y)$ dan gegeven door

$$v_x - i v_y = \frac{v_0}{w+1}, \quad z = g(w) = w + 1 + \log w.$$

We onderzoeken nu de snelheid v in de omgeving van de punten A, B, C .

In de omgeving van A is $w = \delta e^{i\theta}$, δ klein, $0 \leq \theta \leq \pi$; $z = g(w) \approx \log \delta + 1 + i\theta$,

$x \approx \log \delta + 1$, $y \approx 0$; voor de snelheidscomponenten v_x, v_y geldt dan

$$v_x - i v_y = \frac{v_0}{1 + \delta e^{i\theta}} \approx v_0 (1 - \delta e^{i\theta}), \quad v_x \approx v_0 (1 - \delta \cos \theta), \quad v_y \approx v_0 \delta \sin \theta.$$

Uitgedrukt in de coördinaten (x, y) vinden we

$$v_x \approx v_0 - v_0 e^{x-1} \cos y, \quad v_y \approx v_0 e^{x-1} \sin y, \quad \text{geldig voor } x \rightarrow -\infty, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Ver naar links leest tussen AB en ACB een uniforme stroming met snelheid $\underline{v} = (v_0, 0)$.

In de omgeving van B is $w = R e^{i\theta}$, R groot, $0 \leq \theta \leq \pi$; $z = g(w) \approx R e^{i\theta}$; voor de componenten v_x, v_y geldt dan

$$v_x - i v_y = \frac{v_0}{R e^{i\theta} + 1} \approx \frac{v_0}{R} e^{-i\theta}, \quad v_x \approx \frac{v_0}{R} \cos \theta = \frac{v_0 x}{x^2 + y^2}, \quad v_y \approx \frac{v_0}{R} \sin \theta = \frac{v_0 y}{x^2 + y^2}$$

Ver weg, i.e. voor $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, is de stroming bij benadering gericht langs voorstralen vanuit de oorsprong, met snelheid $|v| = v_0 / \sqrt{x^2 + y^2}$.

In de omgeving van C is $z = \pi + p e^{i\theta}$, p klein, $-\pi \leq \theta \leq \pi$; $w + 1 \approx i\sqrt{2} \sqrt{z - \pi} = i\sqrt{2p} e^{\frac{i}{2}\theta}$; voor de componenten v_x, v_y geldt dan

$$v_x - i v_y = \frac{v_0}{w + 1} \approx \frac{-i v_0}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{i}{2}\theta}, \quad v_x \approx -\frac{v_0}{\sqrt{2p}} \sin \frac{1}{2}\theta, \quad v_y \approx \frac{v_0}{\sqrt{2p}} \cos \frac{1}{2}\theta.$$

Merk op dat v_x, v_y een singulariteit vertonen in het punt C: $v_x = O(p^{-1/2})$, $v_y = O(p^{-1/2})$ voor $p \rightarrow 0$.

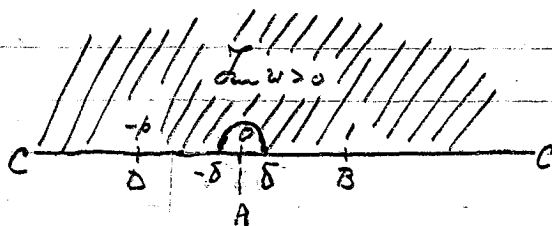
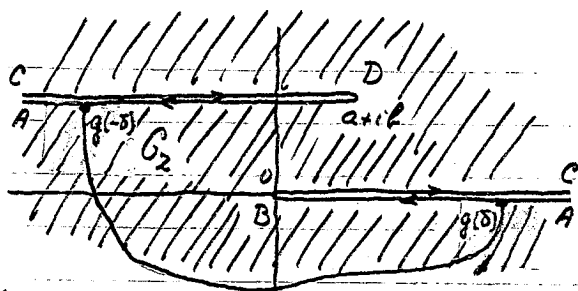
Langs AB en ACB, overeenkomend met de reële as van het w -vlak, is $v_x - i v_y = \frac{v_0}{w + 1}$ reëel. Berekent is $v_y = 0$ langs AB en ACB, zoals ook op fysische gronden duidelijk is.

Voor de component v_x langs AB vinden we

$$v_x(x, 0) = \frac{v_0}{w + 1}, \quad \text{waarbij } w \text{ de (positieve) } n\text{-de machtswortel is van de vergelijking } x = w + 1 + \log w.$$

Voor de component v_x langs ACB vinden we $v_x(x, \pi \mp 0) = v_0 / (w^\mp + 1)$, waarbij $w = w^\mp$ de negatieve wortels zijn van de vergelijking $x = w + 1 + \log |w|$; hierbij is $-1 < w^- < 0$, $w^+ < -1$.

4) Zij G_2 het hele complexe z -vlak met sneden langs de halfrechten $\text{Re } z \geq 0$, $\text{Im } z = 0$, en $\text{Re } z \leq a$, $\text{Im } z = b$. Hierbij zijn a en b willekeurig behalve dat $a < 0$ indien $b = 0$.



We zoeken een afbeelding $z = g(w)$ van $\text{Im } w > 0$ op G_2 , zodanig dat gelijknamige punten uit de figuren met elkaar corresponderen. Merk op dat van drie punten A, B, C het origineel in het w -vlak is voorgeschreven door resp. $w = 0, 1, a$. Van het vierde punt, ligt het origineel dan vast; dit is aangegeven door $w = -p$ met $p > 0$ nog onbekend.

Tabel:	z	w	μ
A	a	0	2
B	0	1	-1
C	a	a	2
D	$a+ib$	$-p$	-1

De punten A en C, waar $\mu = 2$, zijn met respect in resp. $w = 0$ en $w = a$ gelegen, om rekenwerk te besparen.

Volgens de formule van Schwarz-Christoffel is

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C \frac{(w-1)(w+a)}{w^2}$$

Uit $\frac{dz}{dw} > 0$ op BC, volgt $C > 0$.

Integreer $g'(w)$ vanuit $w=1$, corresponderend met $z=0$, dan volgt

$$z = g(w) = C \int_1^w \frac{(t-1)(t+a)}{t^2} dt = C \left[w + \frac{a}{w} + (a-1) \log w - a \right],$$

waarbij voor $\log w$ de hoofdwaaarde van de logaritme te nemen is (hier: $0 \leq \arg w < \pi$).

De constanten C en p volgen uit de afbeelding in het punt D, waar $z = a+ib$, $w = -p$:

$$a+ib = C \left[-2p - 2 + (a-1)(\log p + \pi i) \right]$$

Daar C reëel is valt deze betrekking uiteen in de volgende twee reële vergelijkingen:

$$(I) \quad a = C \left[(a-1) \log p - 2p - 2 \right]; \quad (II) \quad b = C(a-1)\pi,$$

waarvoor C en p bepaald worden afhankelijk van a en b.

Opmerking. De tweede vergelijking is ook als volgt af te leiden. Ontwikkel $\frac{dz}{dw} = g'(w)$ in een omgeving van $w=0$:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C \left[-\frac{a}{w} + \frac{a-1}{w} + 1 \right].$$

Integreer nu $g'(w)$ langs de halve cirkel $w = \delta e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, dan volgt

$$g(-\delta) - g(\delta) = C \left[-\frac{2a}{\delta} + (a-1)\pi + O(\delta) \right], \quad \delta \rightarrow 0.$$

De punten $g(\delta)$ en $g(-\delta)$ liggen op resp. AB en DA in het z -vlak, zodat we vinden

$$\text{Im} [g(-\delta) - g(\delta)] = b = C(a-1)\pi + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0; \quad b = C(a-1)\pi.$$

Indien $b=0$, biedt de oplossing van (I), (II): $p=1$, $C = -\frac{1}{4}a$ (bedenk dat $a < 0$ in dit geval).

De afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ wordt dan

$$z = g(w) = -\frac{1}{2} a \left(w + \frac{1}{w} \right) + \frac{1}{2} a$$

Deze functie beeldt $\text{Im } w > 0$ af op het z -vlak met snedes $[-a, a]$ en $(0, a)$ langs de reële as. Vergelijk dit met het resultaat uit 3.4, p. 51: $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ beeldt $\text{Im } z > 0$ af op het w -vlak met snedes $[-a, -1]$ en $[1, a]$ langs de reële as. (Joukowski afbeelding)

Indien $b > 0$ is, elimineren we C uit (I) en (II) dan ontstaat voor p de vergelijking

$$(III) \quad \frac{\pi a}{b} = \log p - 2 \frac{p+1}{p-1}$$

Noem het rechterlid $\psi(p)$, dan is $\psi'(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{(p-1)^2} > 0$ voor $p > 0$ zodat $\psi(p)$ monotoon is.

De grafiek van $\psi(p)$ is gemakkelijk te schetsen. Het blijkt dat voor iedere

waarde van a de vergelijking (III)

twee wortels heeft: $p_1 < 1$ en $p_2 > 1$.

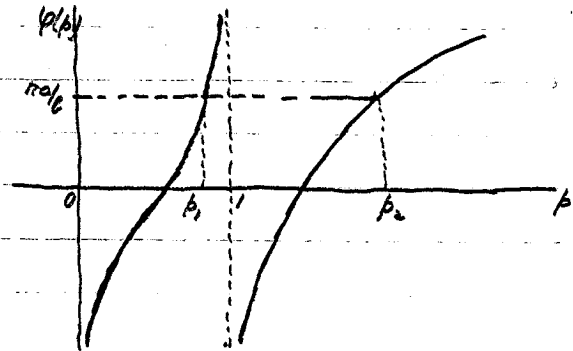
Daar $C > 0$ is volgt uit (II) dat

$p = p_2 > 1$ als $b > 0$ en $p = p_1 < 1$ als $b < 0$ is.

Hiermee is p eenduidig bepaald.

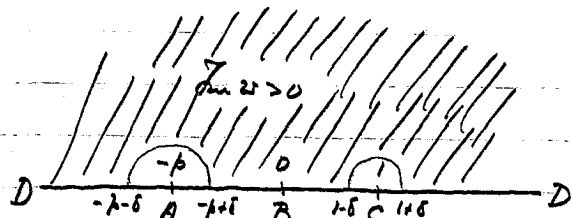
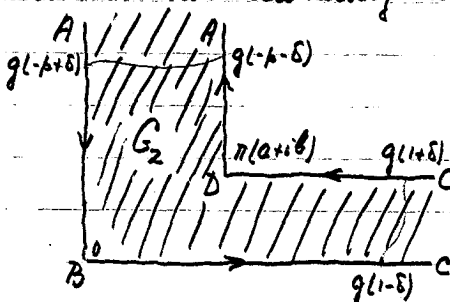
De afbeeldingsfunctie is nog te schrijven als

$$z = \frac{b}{\pi} \log w + \frac{b}{\pi(p-1)} \left[w + \frac{p}{w} - p - 1 \right], \quad 0 \leq \arg w \leq \pi$$



5-1-1982 18-1-1983

5) Zij G_2 het eerste kwadrant van het complexe z -vlak verminderd met het kwartvlak $\text{Re } z \geq \pi a$, $\text{Im } z \geq \pi b$, waarin $a > 0$, $b > 0$ is. We zoeken een conforme afbeelding $z = g(w)$ van $\text{Im } w > 0$ op G_2 met de in onderstaande figuur aangegeven correspondentie van gelijknamige punten. Van de drie punten B, C, D is het origineel voorgeschreven nl. $w = 0, 1, \infty$; het origineel van het vierde punt, i.e. het punt A , ligt in $w = -p$ met $p > 0$ nog onbekend maar wel eenduidig vastgelegd.



Tabel:	z	w	μ
A	∞	$-p$	1
B	0	0	$\frac{1}{2}$
C	∞	1	1
D	$\pi(a+ib)$	∞	$-\frac{1}{2}$
			$\sum \mu_k = 2$

De punten B en D , waar resp. $\mu = \frac{1}{2}$ en $\mu = -\frac{1}{2}$, zijn met opzet in resp. $w = 0$ en $w = \infty$ gelegd ter besparing van rekenwerk.

9-4-1981

Met gebruik van de formule van Schwarz-Christoffel vinden we nu

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = -\frac{C}{\sqrt{w}(w-1)(w+p)}$$

Mit $\frac{dz}{dw} > 0$ op BC, volgt $C > 0$ (het minteken is met opzet toegevoegd).

We bepalen nu C en p door ontwikkeling van $\frac{dz}{dw} = g'(w)$ in een omgeving van $w=1$ resp. van $w=-p$. In een omgeving van $w=1$ is

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = -\frac{C}{p+1} \frac{1}{w-1} + O(1), \quad w \rightarrow 1.$$

Integreer $g'(w)$ langs de halve cirkel $w = 1 + \delta e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, δ klein, dan volgt

$$g(1-\delta) - g(1+\delta) = -\frac{C\pi i}{p+1} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0.$$

De beeldpunten $g(1+\delta)$ en $g(1-\delta)$ liggen op resp. CD en BC in het z-vlak, zodat we vinden

$$\operatorname{Im}[g(1-\delta) - g(1+\delta)] = -\pi b = -\frac{C\pi}{p+1} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0; \quad \boxed{C = (p+1)b}. \quad (I)$$

Evenzo is in een omgeving van $w=-p$:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = \frac{C}{i\sqrt{p}(p+1)} \frac{1}{w+p} + O(1), \quad w \rightarrow -p,$$

waarmee door integratie langs de halve cirkel $w = -p + \delta e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, δ klein, volgt

$$g(-p-\delta) - g(-p+\delta) = \frac{C\pi i}{i\sqrt{p}(p+1)} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0.$$

De beeldpunten $g(-p+\delta)$ en $g(-p-\delta)$ liggen op resp. AB en DA in het z-vlak, zodat we vinden

$$\operatorname{Re}[g(-p-\delta) - g(-p+\delta)] = \pi a = \frac{C\pi}{\sqrt{p}(p+1)} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0; \quad \boxed{C = \sqrt{p}(p+1)a}. \quad (II)$$

Opmerking. De vergelijkingen (I) en (II) zijn ook af te leiden door integratie van $\frac{dz}{dw} = g'(w)$ van $w=0$ (punt B) naar $w=a$ (punt D):

$$\pi(a+ib) = z(D) - z(B) = \int_0^a g'(w) dw = -C \int_0^a \frac{-dw}{\sqrt{w}(w-1)(w+p)} = (\text{integratie weg boven pool } w=1 \text{ langs})$$

$$= -2C \int_0^a \frac{dt}{(t^2-1)(t^2+p)} = -C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2-1)(t^2+p)} = (\text{integratie weg boven pool } t=1 \text{ en onder pool } t=-1)$$

$$= -2\pi i C \left[\operatorname{Res}_{t=1} \frac{1}{(t^2-1)(t^2+p)} + \operatorname{Res}_{t=-1} \frac{1}{(t^2-1)(t^2+p)} \right] = \frac{\pi C}{\sqrt{p}(p+1)} + \frac{\pi i C}{p+1}.$$

De vergelijkingen (I) en (II) zijn eenvoudig op te lossen:

$$p = \frac{b^2}{a^2}, \quad C = \frac{b(b^2+a^2)}{a^2}.$$

16-4-1984

Met de aldus gevonden waarden is $\frac{dz}{dw} = g'(w)$ als volgt te schrijven:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = -\frac{C}{\sqrt{w}} \frac{1}{p+1} \left[\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w+p} \right] = \frac{b}{\sqrt{w}} \left[\frac{1}{1-w} + \frac{1}{p+w} \right].$$

Integreer dit resultaat vanuit $w=0$, corresponderend met $z=0$:

$$z = g(w) = b \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} + b \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{t(p+t)}}$$

Stel in deze integralen resp. $t = s^2$ en $t = ps^2$, en bedenk dat $b = a\sqrt{p}$, dan volgt

$$z = g(w) = b \int_0^{\sqrt{w}} \frac{2s ds}{1-s^2} + a \int_0^{\sqrt{w/p}} \frac{2s ds}{1+s^2} = b \int_0^{\sqrt{w}} \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right] ds + a \int_0^{\sqrt{w/p}} \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right] ds,$$

$$z = g(w) = b \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} + ia \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}}, \quad p = b^2/a^2.$$

waarin de hoofdwaaarden voor de wortel en de logaritme te nemen is. In deze voorstelling voor de afbeeldingsfunctie $g(w)$ is de ^{Completie} arctan-functie vermeden.

Op de verschillende delen van de reële as van het w -vlak is de gevonden afbeeldingsfunctie nuq als volgt te vereenvoudigen: *Uitwerking van $g(w)$ op verschillende delen van de reële as*

BC, $0 < w < 1$: \sqrt{w} is de gewone positieve wortel met $0 < \sqrt{w} < 1$;

$$\arg(1 \pm i\sqrt{w/p}) = \pm \arctan(\sqrt{w/p}); \quad \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} = -2i \arctan \sqrt{w/p},$$

$$z = g(w) = b \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} + 2a \arctan \sqrt{\frac{w}{p}};$$

$z = g(w)$ beschrijft de positieve reële as; B: $w=0 \rightarrow z=0$; C: $w=1 \rightarrow z=a$.

CD, $1 < w < \infty$: \sqrt{w} is de gewone positieve wortel met $\sqrt{w} > 1$;

$$\arg(1+\sqrt{w}) = 0, \quad \arg(1-\sqrt{w}) = -\pi; \quad \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} = \log \frac{\sqrt{w}+1}{\sqrt{w}-1} + \pi i;$$

$$\arg(1 \pm i\sqrt{w/p}) = \pm \arctan \sqrt{w/p}; \quad \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} = -2i \arctan \sqrt{w/p};$$

$$z = g(w) = \pi i b + b \log \frac{\sqrt{w}+1}{\sqrt{w}-1} + 2a \arctan \sqrt{\frac{w}{p}};$$

$z = g(w)$ beschrijft de halve rechte $\operatorname{Re} z \geq \pi a$, $\operatorname{Im} z = \pi b$; C: $w=1 \rightarrow z=a$; D: $w=\infty \rightarrow z=\pi(a+ib)$.

AB, $-p < w < 0$: $\sqrt{w} = i\sqrt{|w|}$, $\sqrt{w/p} = i\sqrt{|w|/p}$ met $0 < \sqrt{|w|/p} < 1$;

$$\arg(1 \pm \sqrt{w}) = \arg(1 \pm i\sqrt{|w|}) = \pm \arctan \sqrt{|w|}; \quad \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} = \log \frac{1+i\sqrt{|w|}}{1-i\sqrt{|w|}} = 2i \arctan \sqrt{|w|};$$

$$z = g(w) = 2ib \arctan \sqrt{|w|} + ia \log \frac{1+i\sqrt{|w|/p}}{1-i\sqrt{|w|/p}};$$

$z = g(w)$ beschrijft de positieve imaginaire as; A: $w=-p \rightarrow z=ia$; B: $w=0 \rightarrow z=0$.

DA, $-a < w < -p$: $\sqrt{w} = i\sqrt{|w|}$, $\sqrt{w/p} = i\sqrt{|w|/p}$ met $\sqrt{|w|/p} > 1$;

$$\arg(1 \pm \sqrt{w}) = \arg(1 \pm i\sqrt{|w|}) = \pm \arctan \sqrt{|w|}; \quad \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} = \log \frac{1+i\sqrt{|w|}}{1-i\sqrt{|w|}} = 2i \arctan \sqrt{|w|};$$

$$\arg(1-i\sqrt{w/p}) = \arg(1+i\sqrt{|w|/p}) = 0; \quad \arg(1+i\sqrt{w/p}) = \arg(1-i\sqrt{|w|/p}) = \pi;$$

$$\log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} = \log \frac{1+i\sqrt{|w|/p}}{1-i\sqrt{|w|/p}} = \log \frac{\sqrt{|w|/p}+1}{\sqrt{|w|/p}-1} - \pi i;$$

$$z = g(w) = \pi a + 2ib \arctan \sqrt{|w|} + ia \log \frac{\sqrt{|w|/p}+1}{\sqrt{|w|/p}-1};$$

$z = g(w)$ beschrijft de halve rechte $\operatorname{Re} z = \pi a$, $\operatorname{Im} z \geq \pi b$; D: $w=\infty \rightarrow z=\pi(a+ib)$; A: $w=-p \rightarrow z=a$.

Tenslotte onderzoeken we nog het gedrag van de afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ en van haar inverse functie in de omgeving van de hoekpunten A, B, C, D.

Hoekpunt B, $z=0, w=0$. Ontwikkel $\frac{dz}{dw} = g'(w)$ naar machten van w in een omgeving van

$w=0$:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = -\frac{C}{\sqrt{w(w-1)(w+p)}} = \frac{C}{p} w^{-\frac{1}{2}} + O(w^{\frac{1}{2}}) = \frac{b^2+a^2}{b} w^{-\frac{1}{2}} + O(w^{\frac{1}{2}}), \quad w \rightarrow 0,$$

en integreer deze ontwikkeling vanuit B, $w=0, z=0$:

$$z = g(w) = \frac{2(b^2+a^2)}{b} w^{\frac{1}{2}} + O(w^{\frac{3}{2}}), \quad w \rightarrow 0.$$

Indedaad wordt de binnenhoek π bij $w=0$ gehalveerd tot de binnenhoek $\frac{\pi}{2}$ bij $z=0$.

Voor de inverse functie geldt in een omgeving van $z=0$:

$$w^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{2(b^2+a^2)} z [1 + O(w)]; \quad w = \frac{b^2}{4(b^2+a^2)^2} z^2 + O(z^4), \quad z \rightarrow 0.$$

Hoekpunt D, $z=\pi(a+ib), w=a$. Ontwikkel $\frac{dz}{dw} = g'(w)$ naar machten van w^{-1} in een omgeving van $w=a$:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = -\frac{C}{\sqrt{w(w-1)(w+p)}} = -C w^{-\frac{3}{2}} + O(w^{-\frac{5}{2}}) = -\frac{b(b^2+a^2)}{a^2} w^{-\frac{3}{2}} + O(w^{-\frac{5}{2}}), \quad w \rightarrow a,$$

en integreer deze ontwikkeling vanuit D, $w=a, z=\pi(a+ib)$:

$$z = g(w) = \pi(a+ib) + \frac{2b(b^2+a^2)}{3a^2} w^{-\frac{3}{2}} + O(w^{-\frac{5}{2}}), \quad w \rightarrow a.$$

Voor de inverse functie geldt in een omgeving van $z=\pi(a+ib)$:

$$w^{-\frac{3}{2}} = \frac{3a^2}{2b(b^2+a^2)} (z - \pi a - \pi ib) [1 + O(w^{-1})]; \quad w = \left\{ \frac{2b(b^2+a^2)}{3a^2} \right\}^{-\frac{2}{3}} (z - \pi a - \pi ib)^{-\frac{2}{3}} + O(1), \quad z \rightarrow \pi a + \pi ib.$$

Hierin is $-\frac{3\pi}{2} < \arg(z - \pi a - \pi ib) < 0$ te nemen, zodat AD en DC in het z -vlak inderdaad corresponderen met AD en DC in het w -vlak.

In het geval van de hoekpunten A en C kan deze methode van ontwikkeling van $g'(w)$ en integratie niet gevolgd worden, omdat A en C corresponderen met $z=0$.

Hoekpunt A, $z=\infty, w=-p$. Schrijf $w = -p + ps = -p(1-s)$, en ontwikkel $z = g(w)$ naar machten van s in een omgeving van $w=-p, s=0$. met $0 \leq \arg s \leq \pi$

$$\sqrt{w} = \sqrt{-p(1-s)} = i\sqrt{p} + O(s); \quad \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} = \log \frac{1+i\sqrt{p}+O(s)}{1-i\sqrt{p}+O(s)} = 2i \arctan \sqrt{p} + O(s);$$

$$i\sqrt{w/p} = -\sqrt{1-s} = -[1 - \frac{1}{2}s + O(s^2)]; \quad \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} = \log \frac{2+O(s)}{\frac{1}{2}s+O(s^2)} = \log \frac{4}{s} + O(s); \quad = -\log \frac{s}{4} + O(s)$$

$$z = g(w) = 2ib \arctan \sqrt{p} + ia \log \frac{4}{s} + O(s) = 2ib \arctan \frac{b}{a} + ia \log \frac{4p}{w+p} + O(w+p), \quad w \rightarrow -p.$$

Voor de inverse functie geldt in een omgeving van A, $z=i\infty$:

$$\log \frac{4}{s} = -\frac{2b}{a} \arctan \frac{b}{a} - \frac{i2}{a} + O(s); \quad s = 4 \exp\left(\frac{2b}{a} \arctan \frac{b}{a}\right) e^{-i2/a} [1 + O(s)];$$

$$\log \frac{s}{4} = + \dots + \dots + \dots$$

$$w = -\frac{b^2}{a^2} + \frac{4b^2}{a^2} \exp\left[\frac{2b}{a} \arctan \frac{t}{a}\right] e^{i2/a} + O(e^{2i2/a}), \quad z \rightarrow i\infty.$$

Hoekpunt C, $z = \infty, w = 1$. Schrijf $w = 1 - t$ met $|t|$ klein en $-\pi \leq \arg t \leq 0$, en ontwikkel $z = g(w)$ naar machten van t in een omgeving van $w = 1, t = 0$:

$$\sqrt{w} = \sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t + O(t^2); \quad \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} = \log \frac{2+O(t)}{\frac{1}{2}t+O(t^2)} = \log \frac{4}{t} + O(t); \quad = -\log \frac{t}{4} + O(t)$$

$$\sqrt{w/p} = \sqrt{\frac{1-t}{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} + O(t); \quad \log \frac{1-i\sqrt{w/p}}{1+i\sqrt{w/p}} = \log \frac{1-i\frac{1}{\sqrt{p}}+O(t)}{1+i\frac{1}{\sqrt{p}}+O(t)} = -2i \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) + O(t);$$

$$z = g(w) = b \log \frac{4}{t} + 2a \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) + O(t) = b \log \frac{4}{1-w} + 2a \arctan \frac{a}{b} + O(w-1), \quad w \rightarrow 1.$$

Voor de inverse functie geldt in een omgeving van $C, z = \infty$;

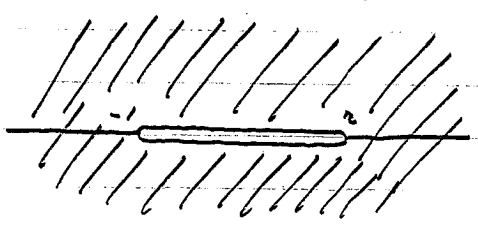
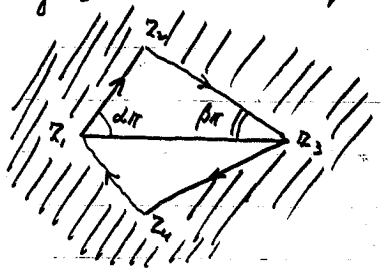
$$\log \frac{4}{t} = -\frac{2a}{b} \arctan \frac{a}{b} + \frac{z}{b} + O(t); \quad t = 4 \exp\left(\frac{2a}{b} \arctan \frac{a}{b}\right) e^{-z/b} [1 + O(t)];$$

$$w = 1 - 4 \exp\left(\frac{2a}{b} \arctan \frac{a}{b}\right) e^{-z/b} + O(e^{-2z/b}), \quad z \rightarrow \infty.$$

b) Dit voorbeeld is ontleend aan

D.F. Hughes, A simplification of the Schwarz-Christoffel formula for symmetric quadrilateral transformation, SIAM J. Math. Anal. 6, 258-261 (1974).

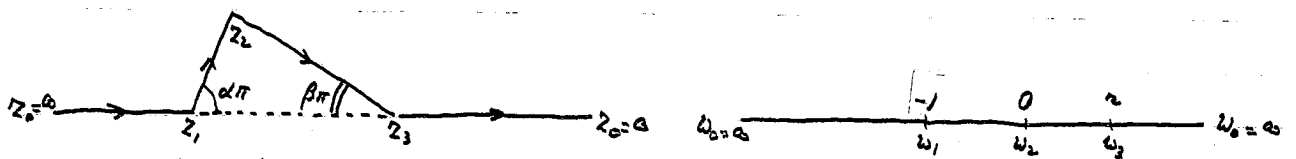
Hughes beschouwt de afbeelding van het buitengebied van een vierhoek met symmetrie-as (whiper) in het z -vlak op het w -vlak met snede $[-1, z]$ langs de reële as.



Hij komt vervolgens aan dat $z = \alpha/\beta$, waarbij $\alpha\pi$ en $\beta\pi$ de hoeken zijn als aangegeven. We zullen het resultaat van Hughes op een eenvoudiger manier afleiden.

Beschouw daartoe de afbeelding $z = g(w)$ van $\Im w > 0$ op het 'halve' buitengebied in het z -vlak, zodanig dat de punten $z_0 = \infty, z_1, z_2, z_3$ corresponderen met resp.

$w_0 = \infty, w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = z$. Na toepassing van het 'spiegelingsprincipe' van Schwarz is deze afbeelding dezelfde als die van Hughes.



Tabel:

z	w	μ
z_0	∞	2
z_1	-1	α
z_2	0	$-\alpha-\beta$
z_3	z	β
$\sum \mu_k = 2$		

Volgens de formule van Schwarz-Christoffel is nu:

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C \frac{w^{\alpha+\beta}}{(w+1)^\alpha (w-z)^\beta}$$

Wilt $\frac{dz}{dw} > 0$ voor $w > r$ volgt $C > 0$. Ontwikkel nu $\frac{dz}{dw} = g'(w)$ in een omgeving van $w = \infty$, dan vinden we

$$\frac{dz}{dw} = g'(w) = C \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{-\alpha} \left(1 - \frac{r}{w}\right)^{-\beta} = C \left[1 + \frac{\beta r - \alpha}{w} + O(w^{-2})\right], \quad w \rightarrow \infty.$$

Integreer deze ontwikkeling langs de cirkel $w = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $R > \max(r, 1)$, dan volgt

$$g(R) - g(R) = 0 = 2\pi i C (\beta r - \alpha) + O(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty; \quad \beta r = \alpha; \quad r = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Aantekening van 18 januari 1990. De verenvoudigde afleiding van $r = \alpha/\beta$ is gepubliceerd als Clebsch Note door S. Richardson, An identity arising in a problem of conformal mapping, SIAM Rev. 31, 484-485 (1989).

26-4-78 (vrijdag) | 24.4.79 (zaterdag)
 51, 52 belien v. 3
 24-4-80 (vrijdag) | 19.4.1982 | 7-5-82

5. Toepassingen van conforme afbeelding op potentiaalproblemen

5.1. Twee-dimensionale potentiaalproblemen, harmonische functies.

De Laplace vergelijking of potentiaalvergelijking

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

komt voor in tal van gebieden van de mathematische fysica:

- a) Electrostatica. Het electrostatische veld \underline{E} voldoet buiten de ladingen aan de Maxwell vergelijkingen $\text{rot } \underline{E} = 0$, $\text{div } \underline{E} = 0$. Uit de eerste vergelijking volgt dat er een electrostatische potentiaal φ bestaat zodat $\underline{E} = -\text{grad } \varphi$. Na substitutie in de tweede vergelijking volgt $\text{div grad } \varphi = \Delta\varphi = 0$.
- b) Electrische stroomgeleiding. De stroomdichtheid \underline{J} in een geleider ten gevolge van een aangelegd electrisch veld \underline{E} is te bepalen met de wet van Ohm: $\underline{J} = \sigma \underline{E}$, waarin σ het geleidingsvermogen van het materiaal is. Zij nu $\underline{E} = -\text{grad } \varphi$, dan volgt met de behoudwet $\text{div } \underline{J} = 0$ dat $\Delta\varphi = 0$.
- c) Stationaire warmtegeleiding (en stationaire diffusie). Zij $T = T(x, y, z)$ de stationaire temperatuur in een medium, dan wordt de warmtestroom \underline{q} gegeven door $\underline{q} = -k \text{ grad } T$ met $k =$ warmtegeleidingscoefficient. Uit de behoudwet $\text{div } \underline{q} = 0$ volgt dan $\Delta T = 0$.
- d) Rotatievrije incompressibele stroming. Voor de snelheid $\underline{v} = \underline{v}(x, y, z)$ van het stromende medium geldt resp. $\text{rot } \underline{v} = 0$, $\text{div } \underline{v} = 0$. Op grond van de eerste vergelijking is er dan een snelheidspotentiaal φ zodat $\underline{v} = -\text{grad } \varphi$. Na substitutie in de tweede vergelijking vinden we $\Delta\varphi = 0$.

Belangrijke randwaardeproblemen voor de potentiaalvergelijking zijn

- (i) Dirichlet probleem $\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \text{ in een gebied } G; \\ \varphi \text{ gegeven op de rand van } G. \end{cases}$
- (ii) Neumann probleem $\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \text{ in een gebied } G; \\ \partial\varphi/\partial n \text{ gegeven op de rand van } G. \end{cases}$

Hierbij is $\partial\varphi/\partial n = (\text{grad } \varphi, \underline{n})$ de rgn. normaalafgeleide in de richting van de normaal \underline{n} op de rand van G . Naast deze problemen komen ook andere voor, waarbij b.v. op een gedeelte van de rand φ gegeven is en op de rest van de rand $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$.
 Zie ook college Wiskunde 40, 2.4.

We beperken ons nu verder tot twee-dimensionale potentiaalproblemen, alleen afhankelijk van x, y , en niet van z . De potentiaalvergelijking gaat dan over in

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

93.

Definitie. Een functie $\varphi(x, y)$ heet harmonisch in een gebied G in het (x, y) -vlak

indien (i) $\varphi(x, y)$ tweemaal continue differentieerbaar is in G ,

(ii) $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ in G .

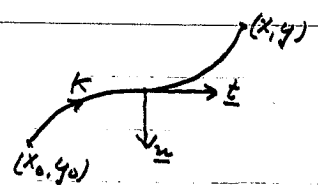
Bij een harmonische functie $\varphi(x, y)$ kan men construeren een geconjugeerde harmonische functie $\psi(x, y)$ zodanig dat φ en ψ voldoen aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$. De functies φ en ψ zijn op te vatten als het reële en imaginair deel van een analytische functie: $\mathcal{R}(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), z = x + iy$.

Stelling 5.1. Zij $\varphi(x, y)$ harmonisch in een enkelvoudig samenhangend gebied G . Dan bestaat er een functie $\psi(x, y)$, harmonisch in G en eenduidig bepaald op een constante na, zodanig dat geldt $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$. Voorts is de functie $\mathcal{R}(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), z = x + iy$, analytisch in G .

Bewijs. We construeren eerst de geconjugeerde functie $\psi(x, y)$ als volgt. Laat k een kromme zijn in G , met beginpunt (x_0, y_0) , eindpunt (x, y) en eenheidsraakvector \underline{t} , dan geldt

$\int_k (\text{grad } \varphi, \underline{t}) ds = \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)$.



Voer nu in de normaal \underline{n} op \underline{t} , verkregen door draaiing van \underline{t} over $\pi/2$ in negatieve richting (met de klok mee).

Voor de x - en y -componenten van $\underline{t} = (t_1, t_2)$ en $\underline{n} = (n_1, n_2)$ geldt dan: $t_1 = -n_2, t_2 = n_1$.

Daarmee volgt dat

$(\text{grad } \varphi, \underline{t}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} t_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} t_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} n_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x} n_1 = (\text{grad } \varphi, \underline{n}) = \frac{\partial\psi}{\partial n}$.

We definiëren nu $\psi(x, y)$ door

$\psi(x, y) = \psi(x_0, y_0) + \int_k \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$.

Door deze definitie wordt $\psi(x, y)$ eenduidig bepaald op de constante $\psi(x_0, y_0)$ na. Om de eenduidigheid in te zien, tonen we aan dat de integraal onafhankelijk is van de integratieweg k . Laat daartoe k' een tweede kromme zijn met beginpunt (x_0, y_0) en eindpunt (x, y) . Voer dan de Jordankromme C bestaande uit k en de in tegengestelde richting doorlopen kromme k' . Met behulp van de divergentiestelling van Gauss volgt nu

$\int_k \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds - \int_{k'} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = \int_C \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = \iint_{G^*} \Delta\varphi dx dy = 0$,

waarin G^* het binnengebied van C is.

We verifiëren nu dat deze functie $\psi(x, y)$ voldoet aan de voorwaarden van de stelling.

Bereken daartoe de partiële afgeleide $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ met

$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x+h, y) - \psi(x, y)}{h}$.

In de definitie van $\psi(x+h, y)$ kiezen we als integratieweg: een kromme van (x_0, y_0) naar (x, y) plus het rechte lijnstuk van (x, y) naar $(x+h, y)$. Dan is

$$\frac{\psi(x+h, y) - \psi(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{(x, y)}^{(x+h, y)} \frac{\partial \psi}{\partial x} ds = -\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) dx = -\frac{\partial \psi}{\partial y}(x+h, y), \quad 0 < \theta < 1,$$

op grond van de middeelwaardstelling van de integraalrekening. Na een limietovergang $h \rightarrow 0$ volgt $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$. Op analoge manier is te bewijzen $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Met behulp van deze betrekkingen volgt voort:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0,$$

i.e. $\psi(x, y)$ is harmonisch.

De hier geconstrueerde functie $\psi(x, y)$ is eenduidig bepaald op een constante na. Dit geldt algemeen: zij namelijk $\psi^*(x, y)$ een tweede functie welke met ψ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoet, dan volgt na aftrekken $\frac{\partial}{\partial x}(\psi^* - \psi) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(\psi^* - \psi) = 0$,
 $\Rightarrow \psi^* - \psi = \text{constant}$.

Voor het bewijs dat $\Omega(z) = \psi(x, y) + i\psi(x, y)$ analytisch is in G , wordt verwezen naar Algebra en Analyse 6.7.6. □

Opmerking. Uit de Cauchy-Riemann vergelijkingen $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ volgt onmiddellijk
 $(\text{grad } \psi, \text{grad } \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$,

i.e. $\text{grad } \psi \perp \text{grad } \psi$. De equipotentiaal-lijnen $\psi(x, y) = \text{constant}$

staan dus loodrecht op de krommen $\psi(x, y) = \text{constant}$. Deze laatste

krommen heten veldlijnen of stroomlijnen: het veld -grad ψ

(i.e. electrostatisch veld, stromingsveld, etc.) raakt overal aan

de krommen $\psi(x, y) = \text{constant}$. In het geval van een stromingsprobleem met dubbeldeks-potentiaal $\psi(x, y)$ wordt $\psi(x, y)$ de stroomfunctie genoemd: het verschil

$$\psi(x_0, y_0) - \psi(x, y) = -\int_{(x, y)}^{(x_0, y_0)} \frac{\partial \psi}{\partial x} ds = \int_{(x, y)}^{(x_0, y_0)} (\mathbf{v}, \mathbf{n}) ds$$

is dan te interpreteren als de hoeveelheid "vloeistof" die per tijdseenheid stroomt door de functie $\Omega(z)$ heet complexe potentiaal.

Uit het bewijs van stelling 5.1 citeren we nog: $(\text{grad } \psi, \mathbf{t}) = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ of wel $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s}$ waarbij s de booglengte langs \mathbf{t} is. Deze betrekking is te beschouwen als de algemene vorm van de Cauchy-Riemann vergelijkingen voor de afgeleiden van ψ en ψ in twee onderling loodrechte richtingen.

De oplossing van een randwaardeprobleem voor de Laplace vergelijking is nu terug te brengen tot de oplossing van een potentiaalprobleem voor de complexe potentiaal $\Omega(z)$. Naar $\Omega(z)$ analytisch is, kunnen we voor de oplossing gebruik maken van methoden uit de functietheorie, in het bijzonder conforme afbeelding. De toepassingen van conforme

1983 Eenvoudiger bewijs (van Studden):

$\varphi(w) = \operatorname{Re} \Omega(w)$ met $\Omega(w)$ analytisch in w ;

de corresponderende functie $\Omega(z)$ analytisch in z ;

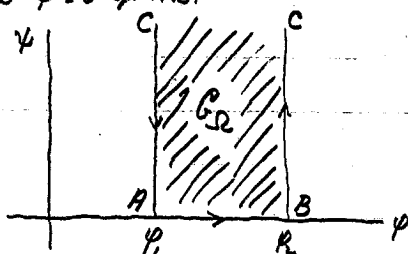
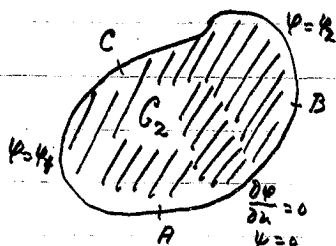
$\varphi(z) = \operatorname{Re} \Omega(z)$ harmonisch in G_2

[Bewijs: G_2 mag eenvoudig samenhangend zijn, dan heeft er geen eenvoudige analytische functie $\Omega(w)$ te zijn.]

afbeelding bij de oplossing van potentiaalproblemen zijn van tweeërlei soort.

I. Laat de gewenste potentiaal $\Omega(z)$ behalve analytisch, ook univalent in G_2 zijn, dan is $\Omega = \Omega(z)$ een conforme afbeelding van G_2 op een gebied G_Ω in het complexe $\Omega = \varphi + i\psi$ -vlak. Als de rand C_2 van G_2 een Jordankromme is (eventueel met meerknopen), dan wordt deze afgebeeld op de rand C_Ω van G_Ω . Vaak is nu de rand C_Ω bekend met de randvoorwaarden voor $\Omega(z)$ op C_2 . In dat geval zoeken we een functie $f(z)$, analytisch in G_2 , welke C_2 afbeeldt op C_Ω met de correcte oriëntatie. Deze functie beeldt G_2 af op G_Ω en we getelt $\Omega(z) = f(z)$.

Als voorbeeld beschouwen we het potentiaalprobleem: $\Delta\psi = 0$ in G_2 ; $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ op het gedeelte AB van de rand; $\psi = \varphi_1$ resp. $\psi = \varphi_2$ (met $\varphi_1 < \varphi_2$) op de resterende gedeelten CA resp. BC van de rand; zie figuur. Volgens $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial s}$ getelt $\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0$, $\psi = \text{constant}$ op AB ; zonder verlies aan algemeenheid mogen we nemen $\psi = 0$ op AB .



De complexe potentiaal $\Omega(z)$ wordt nu gevonden als de afbeeldingsfunctie die G_2 afbeeldt op de half-oneindige strook G_Ω (zie figuur) zodanig dat de gelijknamige punten A, B, C met elkaar corresponderen. Vervolgens is dan $\psi(x, y) = \text{Re } \Omega(z)$.

II. De tweede categorie van toepassing berust op de volgende stelling.

Stelling 5.2. Zij $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ een conforme afbeelding van G_2 op G_w , en zij $\varphi(u, v)$ harmonisch in G_w , dan is de samengestelde functie $\varphi^*(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ harmonisch in G_2 .

Bewijs. Bereken de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

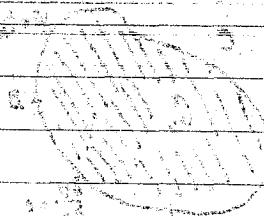
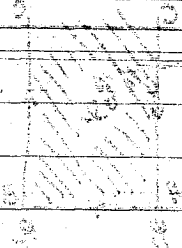
$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

dan volgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] + \frac{\partial\varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \Delta v. \end{aligned}$$

De laatste uitkomst is te vereenvoudigen met de Cauchy-Riemann vergelijkingen.



F. Voorbs geldt voor $z \rightarrow \infty$: $\varphi(x, y) \approx v_0 x$, $\Omega(z) \approx v_0 z$, dus $z = \infty$ gaat over in $\Omega = \infty$.
 Hi 3.4 is onderzocht de afbeelding $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$; die beeldt G_2 af op G_w . In $w > 0$ en het
 punt $z = \infty$ gaat over in $w = \infty$. Het boven-halfrand G_w moet nu worden afgebeeld op het boven-
 halfrand G_2 zodanig dat $v = \infty$ overgaat in $\Omega = \infty$. Deze afbeelding is een "translatie" evenwijdig
 aan de reële as: $\Omega(w) = Aw + B$ met A en B willekeurig reëel, $A > 0$ (hure vrijheidsgraden).
 De complexe potentiaal $\Omega(z)$ wordt dan gegeven door $\Omega(z) = \frac{1}{2}A(z + \frac{1}{z}) + B$. Hierin
 worden A en B bepaald door de eis $\Omega(z) \approx v_0 z$ voor $z \rightarrow \infty$. We vinden dan $A = 2v_0$, $B = 0$,
 waarna $\Omega(z) = v_0(z + \frac{1}{z})$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, terwijl $\Delta u = \Delta v = 0$. We vinden dan

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = 0,$$

i.e. $\varphi^*(x,y)$ is harmonisch. □

Met behulp van stelling 5.2 is een potentiaalprobleem in een ingewikkeld gebied G_2 in het z -vlak over te voeren naar een potentiaalprobleem in een eenvoudig gebied G_w (bijv. cirkel, halfvlak) in het w -vlak, door conforme afbeelding van G_2 op G_w . Als het probleem in G_w de oplossing $\varphi(u,v)$ heeft, dan is de oplossing van het oorspronkelijke probleem in G_2 : $\varphi^*(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$.

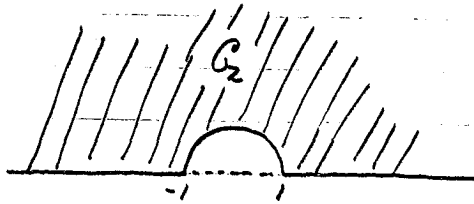
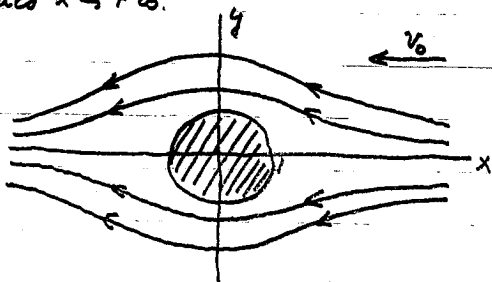
We merken nog op dat randvoorwaarden van de vorm $\varphi^* = c = \text{constant}$ of $\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0$ op de rand van G_2 , overgaan in $\varphi = c$ resp. $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ op de rand van G_w . Ten aanzien van de tweede randvoorwaarde volgt dit uit

$\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0$ op de rand \iff krommen $\varphi^* = \text{constant}$ loodrecht op de rand, en deze loodrechte stand blijft behouden in het w -vlak vanwege de loekbrouwheid van de conforme afbeelding $w = f(z)$.

9-5-1983

5.2. Voorbeelden van potentiaalproblemen opgelost met conforme afbeelding.

1) Een cylinder gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$, is geplaatst in een rotatievrije incompressibele stroming. De stroomsnelheid $\underline{v} = v(x,y)$ wordt afgeleid uit een snelheidspotentiaal $\varphi(x,y)$ volgens $\underline{v} = -\text{grad } \varphi$. Ver van de cylinder heerst de ongestoorde stroming met snelheid v_0 evenwijdig aan de negatieve x -as, i.e. $\underline{v} = (-v_0, 0)$, $\varphi(x,y) \approx v_0 x$ als $x \rightarrow +\infty$.



We beschouwen nu het "halve" stromingsprobleem in het gebied $G_2 = \{z = x+iy \mid z \geq 0 \wedge |z| > 1\}$. Uit symmetrie overwegingen is duidelijk dat de rand van G_2 stroomlijn is. De stroomfunctie $\varphi(x,y)$ is dan constant langs de rand van G_2 . Zonder verlies aan algemeenheid mogen we dan stellen $\varphi = 0$ langs de rand van G_2 . Uit de fysische betekenis van $\varphi(x,y)$ volgt $\varphi(x,y) > 0$ voor $z = x+iy \in G_2$. De complexe potentiaal $\Omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ dient nu G_2 af te beelden op G_Ω : $\text{Im } \Omega = \varphi > 0$. Deze afbeelding is bekend uit 3.4: $\Omega(z) = A(z + \frac{1}{z})$ waarin $A > 0$ een nog te bepalen constante is. Deze constante volgt uit $\Omega(z) \approx Ax$ voor $x \rightarrow +\infty$, $\varphi(x,y) = \text{Re } \Omega(z) \approx Ax$ voor $x \rightarrow +\infty$, zodat $A = v_0$. Voor de oplossing van het stromingsprobleem

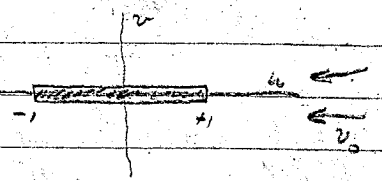
Opmmerking bij 2) $w = \sqrt{z^2 + 1}$ beeldt z vlak met snede $[-i, i]$ of op w -vlak met snede $[-1, 1]$ (zie 3.2).

Verdus z : $w = z + O(\frac{1}{z})$ voor $z \rightarrow \infty$. Stromingsprobleem in

w -vlak is dan ingetrokken stroming. Het is evenaars rijk z , om te

shyp. z op $[-1, 1]$ van rijk z . Oplossing: $Sl(z) = v_0 z$, $\psi(u, v) = v_0 u$.

Potentiaalstroming om te bepalen geplaatst z op, zie tekenen januari 1982.



Voorbeeld 2 als opgave gegeven 1978; niet in 1983; wel in 1981

F. Voorts geldt voor $z \rightarrow \infty$: $\psi(x, y) \sim v_0 x$, $Sl(z) \sim v_0 z$, dus $z = \infty$ gaat over in $z = \infty$. In 3.3 de

onderzoekt de afbeelding $w = \sqrt{z^2 + 1}$; deze beeldt z in $w > 0$ of op z in $w > 0$ minimaal de snede $[0, i]$ langs

de imaginere z . Verwissel de letters z en w , dus beschouw de afbeelding $z = \sqrt{w^2 + 1}$ met de snede

$w = \sqrt{z^2 + 1}$. De laatste beeldt G_2 of op G_w : z in $w > 0$ en het punt $z = \infty$ gaat over in $w = \infty$. Aanslag

aan voorbeeld 1) wordt de afbeelding van w naar z gegeven door de transformatie $Sl(z) = Av + B$,

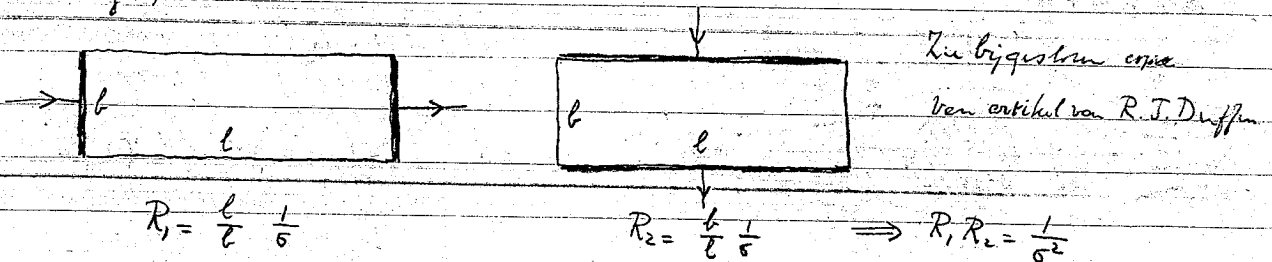
zodanig $Sl(z) = A\sqrt{z^2 + 1} + B$. Met $Sl(z) = v_0 z$ voor $z \rightarrow \infty$ volgt $A = v_0$, $B = 0$, waarna $Sl(z) = v_0 \sqrt{z^2 + 1}$.

Voorbeeld 3 ziet in 1981, 1983, 1987

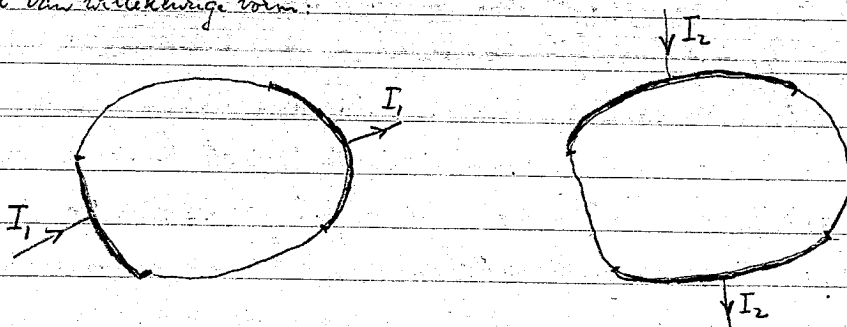
Voorbeeld. Weerstand van dunne plaat = probleem van Rayleigh.

σ = soortelijk geleidingsvermogen; $\frac{1}{\sigma}$ = soortelijke weerstand = weerstand van plaat, 1cm lang, 1cm br.

Rechthoekige plaat:



Plaat van willekeurige vorm:



Pot. verschil V_1 ; $R_1 = V_1 / I_1$

Pot. verschil V_2 ; $R_2 = V_2 / I_2$

Te bewijzen: $R_1 R_2 = \frac{1}{\sigma^2}$.

Opgave Weerstand van dunne plaat - probleem van Rayleigh (1876).

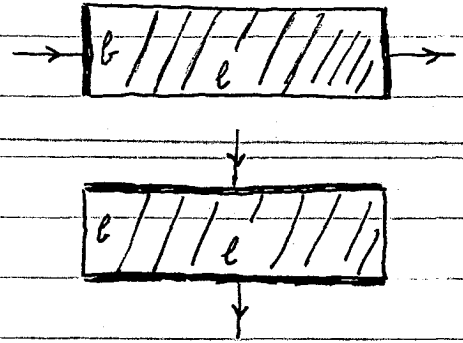
De specifieke weerstand van een dunne plaat van homogeen materiaal wordt aangegeven door $1/\sigma$.

Beschouw een rechthoekige dunne plaat met lengte l en breedte b .

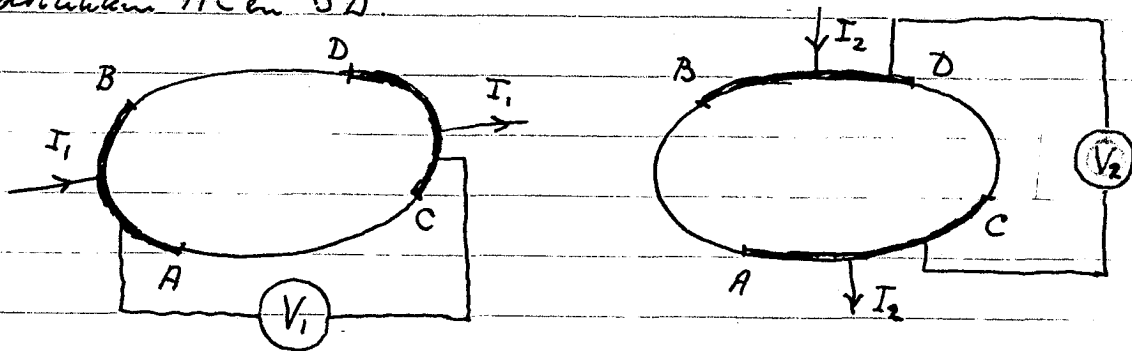
De weerstand van de plaat, bij een elektrische stroom in de lengterichting resp. breedterichting wordt gegeven door

$$R_1 = \frac{l}{b} \frac{1}{\sigma} \text{ resp. } R_2 = \frac{b}{l} \frac{1}{\sigma}$$

zodat $R_1 R_2 = 1/\sigma^2$.



Beschouw vervolgens de weerstand van een plaat van willekeurige vorm. Plaats de elektroden langs de randstukken AB en CD resp. langs de randstukken AC en BD .



Meet de spanning en de stroomsterkte, V_1, I_1 , resp. V_2, I_2 .

Toon aan dat voor de weerstanden $R_1 = V_1/I_1$ en $R_2 = V_2/I_2$ geldt

$$R_1 R_2 = 1/\sigma^2$$

Oplossing probleem van Rayleigh - weerstand van dunne plaat

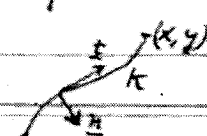
Wet van Ohm: $\underline{J} = \sigma \underline{E} = -\sigma \text{grad } \varphi$; \underline{J} is stroomdichtheidsvector,
 $\sigma = \text{smettelyk geleidingsvermogen} = (\text{smettelyk weerstand})^{-1}$; $\underline{E} = \text{electrische veldsterkte}$,
 $\varphi = \text{electrische potentiaal}$.

$\Delta \varphi = 0$; langs electrode is $\varphi = \text{constant}$; langs geïsoleerde rand is $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

Geconjugeerde harmonische functie $\Psi(x, y)$: $\Psi_x = \Psi_y$, $\Psi_y = -\Psi_x$ (Cauchy-Riemann vgl.)

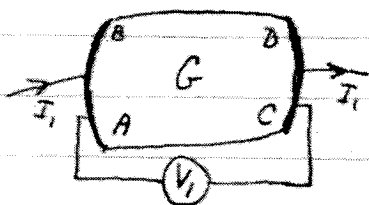
$$\Psi(x, y) = \Psi(x_0, y_0) + \int_k \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds,$$

$$\Psi(x_0, y_0) = \Psi(x, y) = - \int_k \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \frac{1}{\sigma} \int_k (\underline{J}, \underline{z}) ds = \frac{1}{\sigma} * \text{stroom door } (x_0, y_0)$$



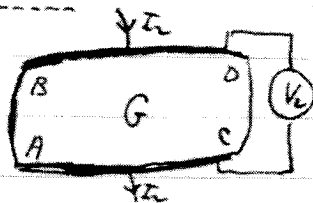
$\Delta \Psi = 0$; langs electrode is $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$; langs geïsoleerde rand is $\Psi = \text{constant}$.

Problem 1. Potentiaal φ_1 , stroomfunctie Ψ_1 voldoen aan



$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi_1 = 0 \text{ in } G, \\ \varphi_1 = V_1 \text{ op } AB, \varphi_1 = 0 \text{ op } CD, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \text{ op } AC, BD, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta \Psi_1 = 0 \text{ in } G, \\ \Psi_1 = 0 \text{ op } BD, \Psi_1 = \frac{I_1}{\sigma} \text{ op } AC, \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} = 0 \text{ op } AB, CD. \end{array} \right.$$

Problem 2. Potentiaal φ_2 , stroomfunctie Ψ_2 voldoen aan



$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi_2 = 0 \text{ in } G, \\ \varphi_2 = 0 \text{ op } BD, \varphi_2 = -V_2 \text{ op } AC, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0 \text{ op } AB, CD, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta \Psi_2 = 0 \text{ in } G, \\ \Psi_2 = 0 \text{ op } CD, \Psi_2 = \frac{I_2}{\sigma} \text{ op } AB, \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} = 0 \text{ op } AC, BD. \end{array} \right.$$

Verband: $\varphi_2 = -\frac{\sigma V_2}{I_1} \varphi_1$, $\Psi_2 = \frac{I_2}{\sigma V_1} \Psi_1$.

Cauchy-Riemann vergelijkingen: $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$; $\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}$.

Mit laatste twee vergelijkingen volgt

$$-\frac{\sigma V_2}{I_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{I_2}{\sigma V_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad -\frac{\sigma V_2}{I_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{I_2}{\sigma V_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \quad \frac{\sigma V_2}{I_1} = \frac{I_2}{\sigma V_1}; \quad \frac{V_1}{I_1} \frac{I_2}{V_2} = R_1 R_2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Alternatieve afleiding Equipotentiaallijnen ($\varphi = \text{constant}$) \perp stroomlijnen ($\Psi = \text{constant}$).

Equipotentiaallijnen φ_1 resp. $\varphi_2 = \text{constant}$ vallen samen met stroomlijnen Ψ_2 resp. $\Psi_1 = \text{constant}$.

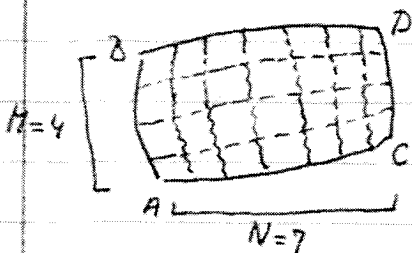
Vondel G door equipotentiaallijnen en stroomlijnen in $M \times N$ "vierkantjes" met zijde Δ .

Weerstand van zo'n vierkantje is $\frac{1}{\sigma} \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{1}{\sigma}$.

Problem 1: weerstand $R_1 = \frac{N}{M} \frac{1}{\sigma}$.

Problem 2: weerstand $R_2 = \frac{M}{N} \frac{1}{\sigma}$.

$$R_1 R_2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$



76+3

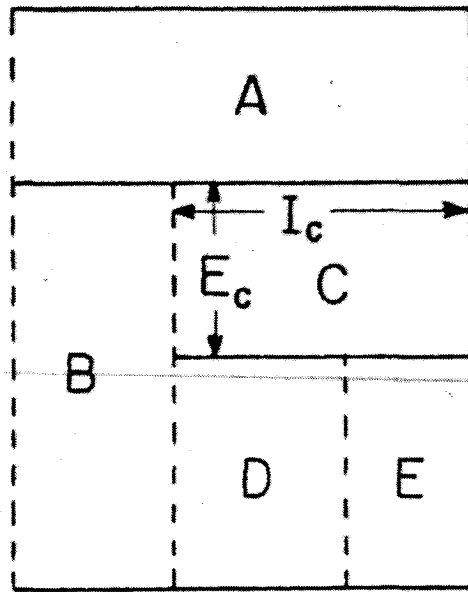


FIGURE 15. A rectangular network.

observations the plate may be regarded as a lumped network having lumped resistors of value A , B , C , D , and E ohms. These resistances are determined by the dimensions. Thus if I_c is the width and E_c is the height of the rectangle marked C then $C = E_c/I_c$ etc.

Clearly the lumped network is the same as the series parallel connection shown in Figure 5. Thus the resistance of the plate is

$$(31) \quad R = A + B:(C + D:E)$$

because the cuts and bus bars do not change resistance. This example of a rectangular network suggests the following conjecture. *Every division of a rectangle into rectangles has an equivalent series-parallel connection and every series-parallel connection has an equivalent division of a rectangle into rectangles.*

8. Rayleigh's reciprocal relation. Again consider a conducting plate having resistance of 1 ohm between opposite sides of a unit square. In Figure 16 is shown a curvilinear quadrilateral plate with sides 1, 2, 3, and 4. The sides 3 and 4 are insulated but sides 1 and 2 are connected to perfectly conducting bus bars (denoted by heavy lines). Let R_{12} be the joint resistance between sides 1 and 2. Next let sides 1 and 2 be insulated and let bus bars be connected to sides 3 and 4. If R_{34} is the joint resistance in this dual situation then

$$(32) \quad R_{12}R_{34} = 1.$$

This is Rayleigh's reciprocal relation [21]. *)

To prove (32) draw the equipotential lines and the streamlines. Since the potential $u(x, y)$ is harmonic the streamlines are the equipotential lines of the conjugate harmonic function $v(x, y)$. It follows from the Cauchy-Riemann equations that the

*) [21] Lord Rayleigh, *On the approximate solution of certain problems relating to the potential*, Proc. London Math. Soc. 7 (1876), 70-78; Sci. Papers 1, no. 38.

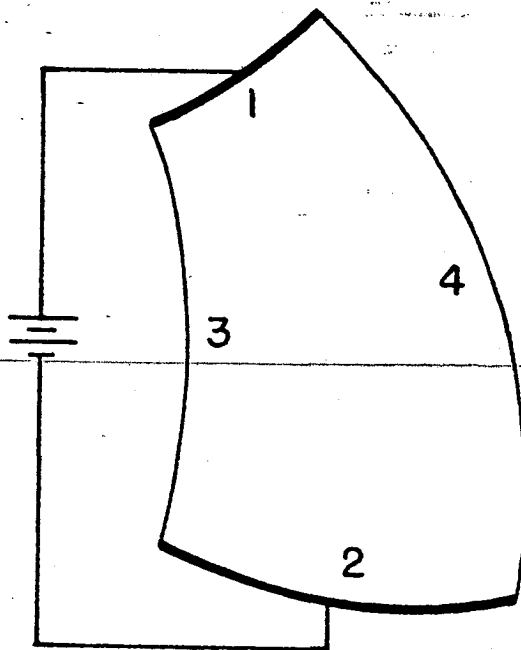


FIGURE 16. A curvilinear quadrilateral.

two sets of equipotentials are orthogonal and divide the region into curvilinear squares such as is shown in Figure 17. This breaks the flow up into channels. One of these channels is denoted by cross hatching in Figure 17. This channel is a series of 7 squares so the total resistance is 7 ohms. It is seen that there are 4 channels in parallel so this gives $R_{12} = 7/4$ ohms. Now consider the conjugate problem ; then

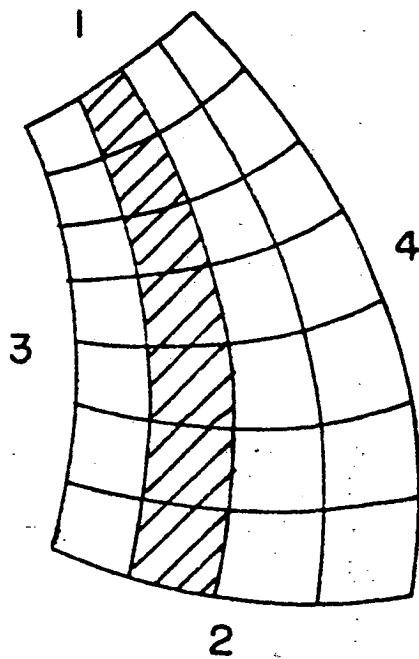


FIGURE 17. Conjugate functions.

Figure 17 again applies, but the equipotentials and streamlines interchange roles. Thus a channel from side 3 to side 4 is a series of 4 squares and so the channel resistance is 4 ohms. There are 7 channels so the total resistance is $R_{34} = 4/7$ ohms. This is the proof of (32) given by Rayleigh.

A surprising consequence of the Rayleigh relation arises when the quadrilateral region has bilateral symmetry as in Figure 18. By symmetry $R_{12} = R_{34}$. Hence by Rayleigh's reciprocal relation $R_{12} = 1$ ohm.

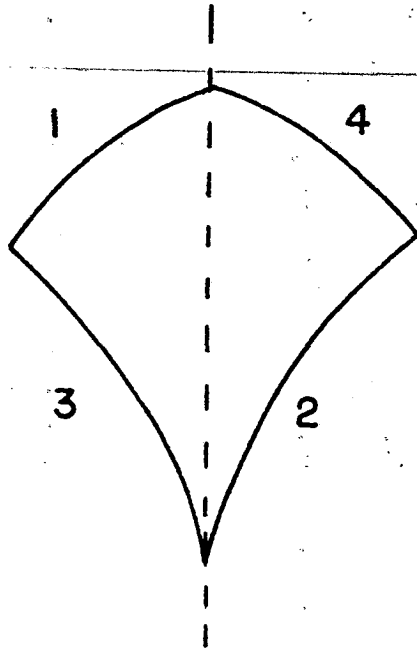


FIGURE 18. Self-dual conductor.

These considerations raise the question of a lumped network analog of Rayleigh's reciprocal relation [9], [11]. To answer this question consider Figure 19. A planar network is shown in solid lines with two distinguished nodes, 1 and 2. Another planar network is shown in dashed lines, and it has two distinguished nodes, 3 and 4. These networks are termed *dual* because of the following properties: (i) Crossing branches give a one-to-one correspondence between the networks. (ii) A region of one of the network contains one and only one of the nodes of the other network. (iii) The distinguished nodes are on the boundary and are not in a region. (iv) If branches cross the resistances r and r^* are required to satisfy

$$(33) \quad rr^* = 1.$$

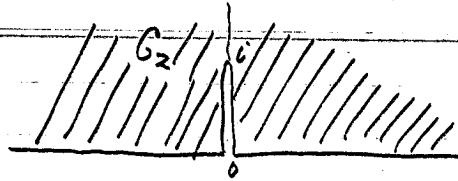
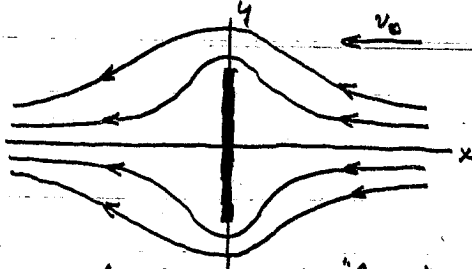
Under these hypotheses it follows that the reciprocal relation (32) holds for the joint resistance of the two networks.

A proof of (32) can be given by noting that Kirchhoff's current law for the primal network defines the same constraint as Kirchhoff's voltage law for the dual network. It follows immediately from the Bott-Duffin analysis that the resistance of the primal network is equal to the conductance of the dual network.

Vinden we dus $\Omega(z) = v_0(z + \frac{1}{z})$, $\psi(x,y) = \text{Re } \Omega(z) = v_0(x + \frac{x}{x^2+y^2})$, $v = -\text{grad } \psi$. De stroomlijnen $\psi = \text{constant}$ zijn eenvoudig te beschrijven met behulp van polcoördinaten r, θ : $\psi = \text{Im } \Omega(z) = \text{Im } v_0(z e^{i\theta} + \frac{1}{z} e^{-i\theta}) = v_0(2 - \frac{1}{r}) \sin \theta = c = \text{constant}$. Deze stroomlijnen verlopen symmetrisch t.o.v. de y -as en hebben asymptoten $y = c/v_0$ evenwijdig aan de x -as.

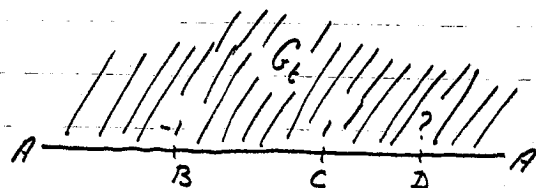
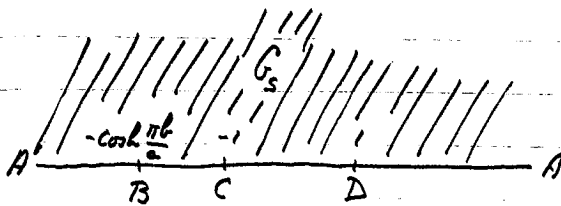
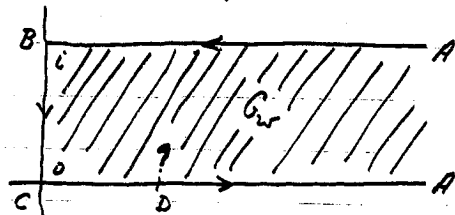
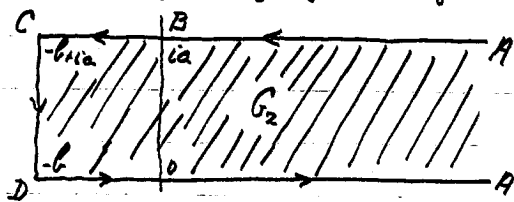
26-4-1982

2) Een strip beschreven door $x=0, -1 \leq y \leq 1$ is geplaatst in de stroming van voorbeeld 1.



Opnieuw beschouwen we het "halve" stromingsprobleem in het gebied $G_2: \text{Im } z = y \geq 0$ met snede $[0, i]$ langs de y -as. Langs de rand van G_2 welke stroomlijn is, stellen we $\psi = 0$. Voor $z = x + iy \in G_2$ is $\psi(x,y) > 0$. De complexe potentiaal $\Omega(z) = \psi(x,y) + i\chi(x,y)$ dient dan G_2 af te beelden op $G_\Omega: \text{Im } \Omega = \psi > 0$. De inverse van deze afbeelding is bekend uit 3.3: $z = \frac{1}{A} \sqrt{\Omega^2 - A^2}$, waarmede volgt $\Omega(z) = A \sqrt{z^2 + 1}$ met $A > 0$ nog te bepalen. Voor $z \rightarrow \infty$ is $\Omega(z) \approx Az$, zodat $\psi(x,y) \approx Ax$ voor $x \rightarrow +\infty$, en dus $A = v_0$. De oplossing van het stromingsprobleem luidt nu: $\Omega(z) = v_0 \sqrt{z^2 + 1}$, $\psi(x,y) = \text{Re } \Omega(z)$, $v = -\text{grad } \psi$. Uit $\Omega'(z) = \frac{v_0 z}{\sqrt{z^2 + 1}}$ volgt $|v| = \infty$ in de eindpunten $z = \pm i$ van de strip, en $|v| = 0$ in $z = 0$ (stuwspunt).

3) Als voorbereiding bepalen we de conforme afbeelding $w = f(z)$ van de halve strook $G_z = \{z \mid \text{Re } z > -b, 0 < \text{Im } z < a\}$ op de halve strook $G_w = \{w \mid \text{Re } w > 0, 0 < \text{Im } w < 1\}$, zodanig dat de aangegeven gelijknamige punten met elkaar corresponderen.



Beeld G_z en G_w af op de helfvlakken $G_s: \text{Im } s > 0$ en $G_t: \text{Im } t > 0$ door $s = \cosh \frac{\pi(z+b)}{a}$, $t = \cosh \pi w$.

De afbeelding door de cosh-functie is onderzocht in 3.5, p. 52.

Vervolgens is G_1 af te beelden op G_2 door een G.L.A. De laatste is van de vorm $s = \alpha t + \beta$, door de punten A: $t = a$ en $s = \alpha a + \beta$ met elkaar dienen te corresponderen. De constanten α en β zijn te bepalen met de correspondenties van de punten B en C. We vinden dan

$$s = \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{\pi b}{a} - 1 \right) t - \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{\pi b}{a} + 1 \right).$$

De gevuchte afbeelding $w = f(z)$ is nu de samenstelling van

$$w = \frac{1}{\pi} \log (t + \sqrt{t^2 - 1}) \quad (\text{d.i. de inverse van } t = \cosh \pi w),$$

$$t = \frac{2s + \cosh \frac{\pi b}{a} + 1}{\cosh \frac{\pi b}{a} - 1} = 1 + 2 \frac{\cosh \frac{\pi(z+b)}{a} + 1}{\cosh \frac{\pi b}{a} - 1}$$

In een omgeving van het punt A ($z = a$, $t = a$, $w = a$) is deze afbeeldingsfunctie als volgt te ontwikkelen:

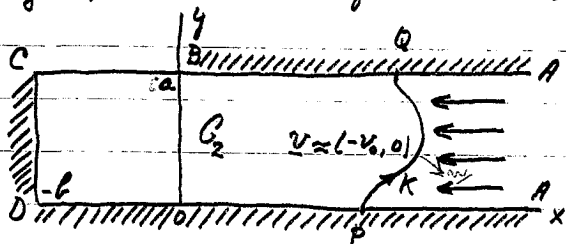
$$t = \frac{e^{2\pi w/a}}{\cosh \frac{\pi b}{a} - 1} [1 + O(e^{-\pi x/a})] = \frac{2e^{\pi z/a}}{(1 - e^{-\pi b/a})^2} [1 + O(e^{-\pi x/a})], \quad x \rightarrow a,$$

$$w = \frac{1}{\pi} \log (2t + O(t^{-1})) = \frac{1}{\pi} \log (2t) + O(t^{-2}), \quad t \rightarrow a,$$

$$w = f(z) = \frac{z}{a} + \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi b/a}} + O(e^{-\pi x/a}), \quad x \rightarrow a.$$

We geven twee toepassingen van deze conforme afbeelding.

a) Een incompressibele vloeistof stroomt tussen twee ondoordringbare wanden bestaande uit de stukken AB: $x \geq 0, y = a$; CD: $x = -b, 0 \leq y \leq a$; DA: $x \geq -b, y = 0$. Voor $x \rightarrow \infty$ is de stroming uniform met snelheid v_0 in de negatieve x-richting. Voor het lijnstuk BC: $-b \leq x \leq 0, y = a$, kan de vloeistof uitstromen in een oneindig groot reservoir.



De stroming wordt beschreven door de snelheidspotentiaal φ , zodat de snelheid $v = -\text{grad } \varphi$. ~~Voor verder in de bij φ behorende stroomfunctie ψ . De functie $\varphi(x, y)$ is dan oplossing van het volgende potentiaalprobleem:~~

$\Delta \varphi = 0$ in het gebied met rand ABCDA (d.i. het gebied G_2);

$\varphi = 0$ op BC (d.i. de beschrijving van de uitstroming in het oneindige reservoir)

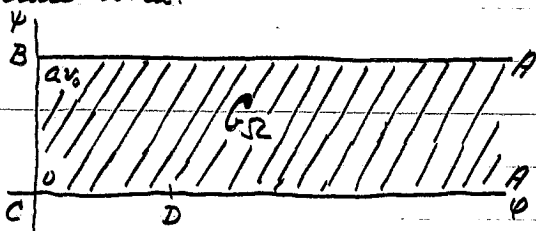
$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ op AB, CD en DA (i.e. ondoordringbare wand).

Voor nu in de bij φ behorende stroomfunctie ψ . Uit $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ volgt $\psi = \text{constant}$ op AB, CD en DA. Rangieren ψ op een constante na bepaald is, mogen we stellen

$\psi = 0$ op CD en DA. Hiermit volgt $\psi = av_0$ op AB.immers voor een punt P op DA en een punt Q op AB, verbonden door een kromme k , is

$$\psi(P) - \psi(Q) = \int_k \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = - \int_k (\nabla \cdot \mathbf{z}) ds = \text{hoeveelheid vloeistof per tijds eenheid door } k = av_0.$$

De complexe potentiaal $\Omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, $z = x+iy$, dient nu G_2 af te beelden op een gebied G_Ω in het complexe $\Omega = \varphi + i\psi$ -vlak; hierbij gaan de punten A, B, C over in resp. $\Omega = \infty$, $\Omega = ia v_0$, $\Omega = 0$; de rand van G_Ω valt langs $\varphi = 0$, $\psi = 0$ en $\psi = av_0$. Uit de fysica van het probleem volgt dat ψ begrensd is. Het gebied G_2 is daarom van de hieronder getekende vorm.



De afbeelding van G_2 op G_Ω is nu, op een vermenigvuldiging na, dezelfde als de eerder bepaalde afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op G_w . We vinden dus

$$\Omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = av_0 f(z).$$

Hiermee zijn φ en ψ bekend en men kan bijv. de equipotentiaallijnen $\varphi = \text{constant}$ en de stroomlijnen $\psi = \text{constant}$ bepalen.

We onderzoeken nog het gedrag van $\Omega(z)$ in een omgeving van A, $z = a$. Met behulp van de eerder afgeleide ontwikkeling voor $f(z)$ volgt

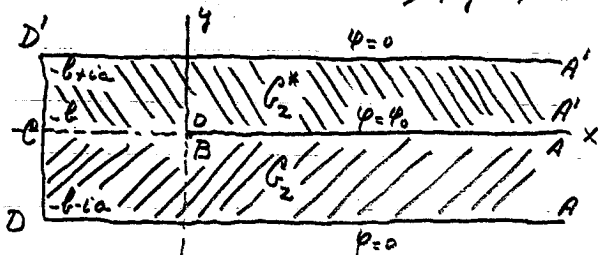
$$\Omega(z) = v_0 z + \frac{2av_0}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi x/a}} + O(e^{-\pi x/a}), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\varphi(x,y) = \text{Re } \Omega(z) = v_0 x + \frac{2av_0}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi x/a}} + O(e^{-\pi x/a}), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\psi(x,y) = \text{Im } \Omega(z) = v_0 y + O(e^{-\pi x/a}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Hiermit blijkt dat voor toenemende x de strooming als spoedig vrijwel uniform is.

b) Als tweede toepassing beschouwen we een probleem uit de electrostatica. Zij gegeven een configuratie van twee elektroden. De buiten-elektrode bestaande uit de stukken AD' : $x \geq -b$, $y = a$, $D'CD$: $x = -b$, $-a \leq y \leq a$, DA : $x > -b$, $y = -a$, bevindt zich op de potentiaal $\varphi = 0$. Op de binnenelektrode AB : $x \geq 0$, $y = 0$, zal $\varphi = \varphi_0$ zijn.



108.

De electrostatische potentiaal $\varphi(x, y)$ is dan oplossing van het volgende probleem:

$\Delta\varphi = 0$ in het gebied $G_2 \cup G_2^*$ tussen de elektroden;

$\varphi = 0$ op $A'D'CD A$ (buiten-elektrode);

$\varphi = \varphi_0$ op AB (binnen-elektrode).

De bijbehorende complexe potentiaal $\Omega(z)$ stamt $G_2 \cup G_2^*$ af te beelden op een gebied $G_\Omega \cup G_\Omega^*$ in het complexe Ω -vlak; hierbij dient de rand $A'D'CD A$ over te gaan in $\varphi = 0$ en de rand AB in $\varphi = \varphi_0$; de rand van $G_\Omega \cup G_\Omega^*$ valt dus langs $\varphi = 0$ en $\varphi = \varphi_0$.

Daar de potentiaal φ begrensd is, moet $G_\Omega \cup G_\Omega^*$ de strook $0 < \text{Re } \Omega < \varphi_0$ zijn.

Ter vereenvoudiging stellen we $\psi = 0$ op BC , waarbij ψ de geconjugeerde functie van φ is.immers uit de symmetrie van het probleem volgt $\varphi(x, y) = \varphi(x, -y)$, zodat $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = 0$ voor $-b < x < a$, en vervolgens $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, 0) = 0$, $\psi = \text{constant}$ op BC .

Het lijnstuk BC wordt dan door $\Omega(z)$ afgebeeld op het interval $[0, \varphi_0]$ langs de reële as in het Ω -vlak.

De afbeelding van G_2 op G_Ω is nu, op een translatie en een vermenigvuldiging na, dezelfde als de eerder bepaalde afbeelding $w = f(z)$ van G_1 op G_w . Na spiegeling aan BC zal deze afbeelding tevens G_2^* overvoeren in G_Ω^* . We vinden dus

$$\Omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = -i\varphi_0 f(z + ia).$$

De ladingdichtheid $\sigma = \sigma(x)$ op de binnen-elektrode hangt samen met de normaalcomponent E_y van het elektrische veld:

$$\sigma(x) = \varepsilon [E_y(x, +0) - E_y(x, -0)] = \varepsilon \left[-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, +0) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, -0) \right] = 2\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, -0),$$

waarin ε de dielectrische constante van het medium is.

Voor de lading op het gedeelte $0 \leq x \leq x_0$ van de binnen-elektrode vinden we dan

$$Q(x_0) = 2\varepsilon \int_0^{x_0} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, -0) dx = -2\varepsilon \int_0^{x_0} \frac{\partial\psi}{\partial x}(x, -0) dx = -2\varepsilon \psi(x_0, -0) =$$

$$= -2\varepsilon \text{Im } \Omega(x_0 - i0) = 2\varepsilon\varphi_0 \text{Re } f(x_0 + ia - i0).$$

Met behulp van de eerder afgeleide ontwikkeling voor $f(z)$ volgt dan

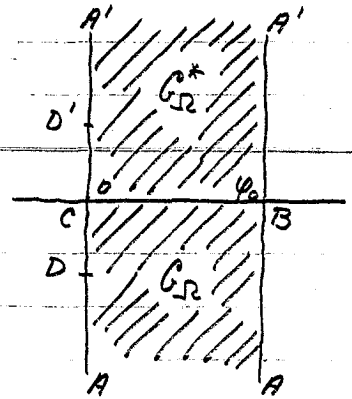
$$Q(x_0) = \frac{2\varepsilon\varphi_0}{a} x_0 + \frac{4\varepsilon\varphi_0}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi x_0/a}} + O(e^{-\pi x_0/a}), \quad x_0 \rightarrow \infty.$$

Met behulp van dezelfde ontwikkeling is ook af te leiden

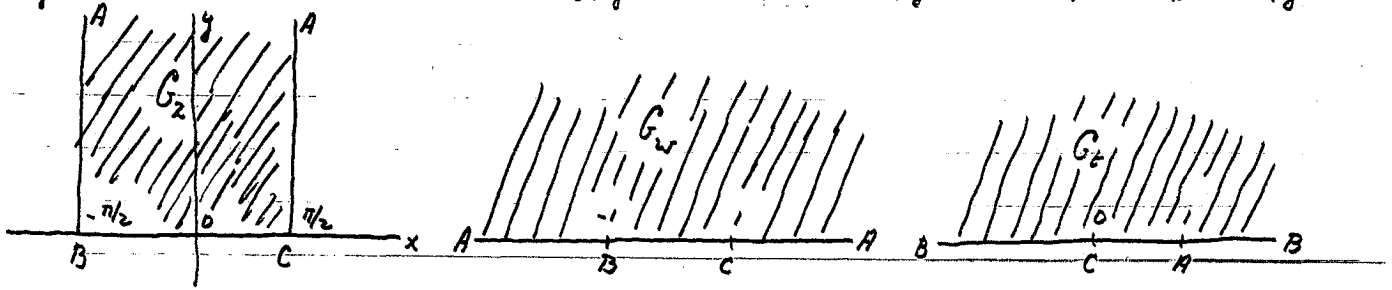
$$\Omega(z) = \pm i\varphi_0 \left[\frac{2\pi ia}{a} + \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{1 - e^{-\pi z/a}} \right] + O(e^{-\pi x/a}), \quad x \rightarrow \infty, \begin{cases} 0 < y < a, \\ -a < y < 0, \end{cases}$$

$$\varphi(x, y) = \text{Re } \Omega(z) = \varphi_0 \left(1 - \frac{|y|}{a} \right) + O(e^{-\pi x/a}), \quad x \rightarrow \infty, \quad |y| \leq a.$$

Voor toenemende x blijft het electrostatische veld spoedig vrijwel homogeen te zijn.



4) Gevraagd wordt de stationaire temperatuurverdeling $T = T(x, y)$ in de half-oneindige strook $G_2 = \{z = x + iy \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$ waarbij op de rand van G_2 de temperatuur is voorgeschreven door $T = 0$ op $AB: x = -\frac{\pi}{2}, y > 0$ en op $CA: x = \frac{\pi}{2}, y > 0$; $T = 1$ op $BC: -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y = 0$.



Het gebied G_2 wordt afgebeeld op G_w : $\text{Im } w > 0$ door $w = \sin z$, zie 3.5, p. 52. Hierbij gaan de punten A, B, C over in resp. $w = 0, w = -1, w = 1$. Beeld vervolgens G_w af op G_t : $\text{Im } t > 0$. Zodanig dat de punten $w = 0, -1, 1$ (A, B, C) corresponderen met resp. $t = 1, 0, 0$. Dit is te realiseren door de GLA $t = \frac{w-1}{w+1}$.

In het t -vlak doet zich nu het volgende potentiaalprobleem voor: te bepalen een functie T welke harmonisch is in G_t en voldoet aan de randvoorwaarden, $T = 0$ op de positieve reële as CAB , $T = 1$ op de negatieve reële as BC . De oplossing van dit probleem is elementair:

$$T = \frac{1}{\pi} \text{Im } \log t = \frac{1}{\pi} \arg t.$$

De oplossing van het oorspronkelijke probleem volgt nu door "terug vertalen" naar het $z = x + iy$ -vlak:

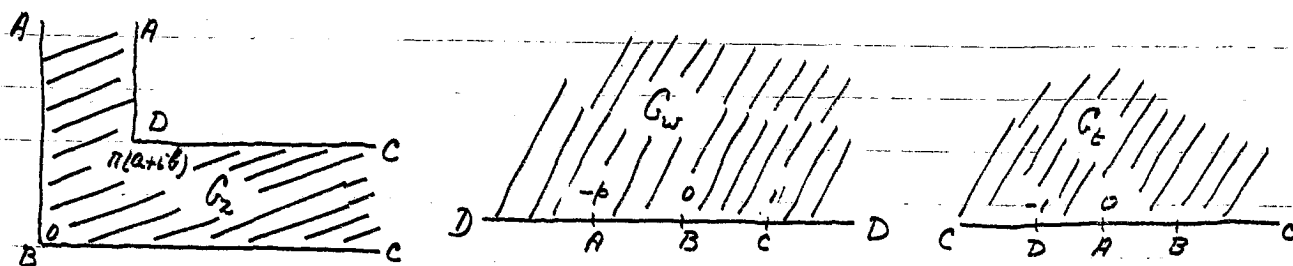
$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{1}{\pi} \text{Im } \log \frac{\sin z - 1}{\sin z + 1} = \frac{1}{\pi} \text{Im } \log \frac{e^{2iz} - 1 - 2ie^{iz}}{e^{2iz} - 1 + 2ie^{iz}} = \frac{2}{\pi} \text{Im } \log \frac{1 + ie^{iz}}{1 - ie^{iz}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \text{Im } \log \frac{1 - e^{-y} \sin x + ie^{-y} \cos x}{1 + e^{-y} \sin x - ie^{-y} \cos x} = \frac{2}{\pi} \text{Im } \log \frac{1 - e^{-y} + 2ie^{-y} \cos x}{1 + 2e^{-y} \sin x + e^{-y}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \text{Im } \log \frac{\sinh y + i \cos x}{\cosh y + \sin x} = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\cos x}{\sinh y} \right). \end{aligned}$$

5) Zij G_2 het eerste kwadrant van het complexe z -vlak vermindert met het kwartvlak $\text{Re } z \geq \pi a, \text{Im } z \geq \pi b$, waarin $a > 0, b > 0$ is. Langs de rand van G_2 zijn elektroden geplaatst; de elektrode ABC houdt zich op de potentiaal $\varphi = 0$, de elektrode CDA heeft potentiaal $\varphi = \pi$. Gevraagd wordt de potentiaal $\varphi(x, y)$ van het electrostatisch veld in G_2 te bepalen. We beelden G_2 af op het helflak G_w : $\text{Im } w > 0$. Zoals afgeleid in 4.3, voorbeeld 5, p. 66, wordt de inverse van de afbeelding gegeven door

$$z = g(w) = b \log \frac{1 + \sqrt{w}}{1 - \sqrt{w}} + ia \log \frac{1 - i\sqrt{w}/p}{1 + i\sqrt{w}/p}, \quad p = b^2/a^2.$$

De punten A, B, C, D op de rand van G_2 corresponderen met resp. $w = -p, 0, 1, 0$.

110.



Beeld vervolgens G_w af op G_z : In $t > 0$, zodanig dat de punten $w = -p, 1, \infty$ (A, C, D) overgaan in resp. $t = 0, \infty, -1$. Dit is te realiseren door de GLA $t = \frac{w+p}{1-w}$.

In het t -vlak doet zich nu voor het potentiaalprobleem: $\Delta\psi = 0$ in G_t ; $\psi = 0$ op de positieve reële as ABC ; $\psi = \pi$ op de negatieve reële as CDA . De oplossing van dit probleem is elementair:

$$\psi = \text{Im} \log t = \arg t.$$

De oplossing van het oorspronkelijke potentiaalprobleem wordt dan in impliciete vorm gegeven door

$$\psi = \text{Im} \log \frac{w+p}{1-w},$$

$$z = g(w) = b \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} + ia \log \frac{1-i\sqrt{w+p}}{1+i\sqrt{w+p}}, \quad p = b^2/a^2.$$

We onderzoeken nog het gedrag van $\psi(x, y)$ in de omgeving van A en van C . Daarbij maken we gebruik van de op p. 69, 70 afgeleide ontwikkelingen van $g(w)$ en haar inverse in de buurt van deze punten.

Punt A, $z = \infty$, i.e. $0 \leq x \leq \pi a$, $y \rightarrow \infty$, $w = -p$.

$$w+p = \frac{4b^2}{a^2} \exp\left[\frac{2b}{a} \arctan \frac{b}{a}\right] e^{i2/a} + O(e^{-2y/a}), \quad 0 \leq x \leq \pi a, y \rightarrow \infty;$$

$$\psi = \text{Im} \log \frac{w+p}{1-w} = \text{Im} [\log(w+p) - \log(1+p) + O(w+p)], \quad w \rightarrow -p$$

$$= \text{Im} \left[\frac{ix}{a} + \log \frac{4b^2}{a^2} + \frac{2b}{a} \arctan \left(\frac{b}{a}\right) + O(e^{-2y/a}) \right], \quad z \rightarrow \infty$$

$$= \frac{x}{a} + O(e^{-y/a}), \quad 0 \leq x \leq \pi a, y \rightarrow \infty.$$

Punt C, $z = \infty$, i.e. $x \rightarrow \infty$, $0 \leq y \leq \pi b$, $w = 1$.

$$1-w = 4 \exp\left[\frac{2a}{b} \arctan \frac{a}{b}\right] e^{-2ib} + O(e^{-2x/b}), \quad x \rightarrow \infty, 0 \leq y \leq \pi b;$$

$$\psi = \text{Im} \log \frac{w+p}{1-w} = \text{Im} [\log(p+1) - \log(1-w) + O(w-1)], \quad w \rightarrow 1$$

$$= \text{Im} \left[\frac{x}{b} - \log 4 - \frac{2a}{b} \arctan \frac{a}{b} + O(e^{-2x/b}) \right], \quad z \rightarrow \infty$$

$$= \frac{x}{b} + O(e^{-x/b}), \quad x \rightarrow \infty, 0 \leq y \leq \pi b.$$

In beide gevallen blijkt het electrostatisch veld spoedig vrijwel homogeen te zijn.

p. 83, 84 overgenomen in 1980; vth later, niet overgenomen in dit deel.

Hoofdstuk 6 niet in 1981; 6,1 niet behandeld in 1982

✓ Invoegen op p. 83:

Γ Uiteraard is $f(z)$ begrensd in de omgeving van $z=a$.

Omgekeerd geldt: als $f(z)$ analytisch en begrensd is in een gereduceerde omgeving van $z=a$, dan heeft $f(z)$ in $z=a$ een ophefbare singulariteit.

112.

10.5.1978 / B.C. 1980 / 3-5-1982

b. Meromorfe en gehele functies.

b.1. Meromorfe functies.

We recapituleren enige resultaten uit het college Wiskunde 50, hoofdstuk IV, §§ 3, 4; zie ook Algebra en Analyse B.4.25-B.4.29, p. 445-448.

Zij de functie $f(z)$ analytisch in een gereduceerde omgeving $0 < |z-a| < \rho$ van $z=a$; $f(z)$ heeft dan in $z=a$ een geïsoleerde singulariteit.

De functie $f(z)$ is nu te ontwikkelen in een Laurent-reeks

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < \rho,$$

met coëfficiënten c_n gegeven door

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz;$$

hierbij is C een willekeurige Jordankromme in de gereduceerde omgeving $0 < |z-a| < \rho$, welke in positieve zin doorlopen wordt.

De Laurent-reeks is te splitsen in twee delen:

positieve deel $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, convergent voor $|z-a| < \rho$, inclusief $z=a$;

negatief deel of hoofdeel $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$, convergent voor $z \neq a$.

Voor het hoofdeel $h(z)$ geldt de integraalvoorstelling:

$$h(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad \text{Zie PA B.4.25}$$

waarbij C_a een Jordankromme is, in de gereduceerde omgeving van a en in positieve zin doorlopen, zodanig dat z buiten C_a ligt.

Afhankelijk van het hoofdeel van de Laurent-reeks kunnen we geïsoleerde singulariteiten in drie klassen indelen:

1° Het hoofdeel ontbreekt, i.e. $c_n = 0$ voor $n \leq -1$. Dan geldt

$$f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < \rho.$$

De functie $f(z)$ heeft in $z=a$ een ophefbare singulariteit. De singulariteit is op te heffen door te definiëren $f(a) = c_0$; vervolgens is dan $f(z)$ analytisch voor $|z-a| < \rho$.

2° Het hoofdeel bestaat uit eindig veel termen, i.e. $c_n = 0$ voor $n < -k$, $c_{-k} \neq 0$ voor zekere positieve gehele k . De functie $f(z)$ heeft in $z=a$ een pool van de orde k of een k -voudige pool. De Laurentreeks van $f(z)$ wordt nu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}, \quad 0 < |z-a| < \rho.$$

Hieruit volgt

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = c_k \neq 0 \text{ of, zwakker, } f(z) = O((z-a)^{-k}) \text{ als } z \rightarrow a.$$

De functie $(z-a)^k f(z)$ heeft in $z=a$ een ophefbare singulariteit. Door te definiëren $(z-a)^k f(z)|_{z=a} = c_k$, wordt $(z-a)^k f(z)$ analytisch voor $|z-a| < \rho$.

Het voorgaande resultaat laat nog de volgende omkering toe: indien $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z)$ eindig en $\neq 0$ is voor zekere gehele $k \geq 1$, dan heeft $f(z)$ in $z=a$ een k -voudige pool.

3^o. Het hoofddeel bestaat uit oneindig veel termen, i.e. voor $n \leq -1$ zijn oneindig veel coëfficiënten $c_n \neq 0$. In dit geval heeft $f(z)$ in $z=a$ een essentieel-singulier punt of essentiële singulariteit. Het gedrag van $f(z)$ in de omgeving van $z=a$ is nu gecompliceerder dan in het geval van een pool; met name geldt niet $f(z) \rightarrow \infty$ als $z \rightarrow a$. We komen aanstands hierop terug in de stelling van Casorati-Weierstrass.

Ten behoeve van later gebruik geven we nog de volgende korte samenvatting:

Zij het punt $z=a$ een geïsoleerde singulariteit van $f(z)$. Dan is het hoofddeel $h(z)$ analytisch voor $z \neq a$. Voorts is $f(z) - h(z)$ analytisch in een omgeving van $z=a$, inclusief $z=a$.immers $f(z) - h(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ voor $0 < |z-a| < \rho$, zodat $f(z) - h(z)$ in $z=a$ een ophefbare singulariteit heeft. Deze singulariteit is op te heffen door de definitie $f(z) - h(z)|_{z=a} = c_0$.

Stelling van Casorati-Weierstrass. Zij $f(z)$ analytisch in een gereduceerde omgeving van a en zij a een essentieel-singulier punt van $f(z)$, dan geldt

$$\forall c \in \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists |z-a| < \delta \quad (|f(z) - c| < \varepsilon),$$

d.w.z. in iedere omgeving van a bestaat een punt z waar $f(z)$ willekeurig weinig verschilt van een opgegeven waarde c .

Opmerking. Men kan de stelling ook als volgt formuleren: $\liminf_{z \rightarrow a} |f(z) - c| = 0$; zie Algebra en Analyse 8.4.29.

Bewijs. Stel dat de uitdrukking van de stelling niet waar is, dan is dus

$$\exists c_0 \in \mathbb{C} \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0 \quad \forall |z-a| < \delta_0 \quad (|f(z) - c_0| \geq \varepsilon_0).$$

Neem nu de functie $g(z) = 1/[f(z) - c_0]$, dan is $g(z)$ analytisch en $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$ voor $0 < |z-a| < \delta_0$. Uit de begrensbaarheid van $g(z)$ volgt dat $g(z)$ in $z=a$ een ophefbare singulariteit heeft; na opheffen van deze is $g(z)$ analytisch voor $|z-a| < \delta_0$.

Onderscheid nu twee gevallen: (i) Als $g(a) \neq 0$ is, dan is $f(z) = c_0 + \frac{1}{g(z)}$ analytisch in een omgeving van $z=a$. (ii) Als $g(z)$ in a een k -voudig nulpunt heeft, dan heeft $f(z) = c_0 + \frac{1}{g(z)}$ in a een k -voudige pool. Beide resultaten zijn in tegenspraak met het gegeven dat $z=a$ een essentieel-singulier punt van $f(z)$ is. Hiermee is het gestelde bewezen. \square

Definitie. Een meromorfe functie is een functie die analytisch is in het hele complexe vlak afgezien van polen.

Voor een meromorfe functie $f(z)$ kunnen invoeren de verzameling V_0 der nulpunten en de verzameling V der polen. Beide verzamelingen V_0 en V hebben geen eindige verdichtingspunten.

Immers zij $z=a$ verdichtingspunt van V_0 dan is (zie Algebra en Analyse 8.4.11) of $f(z) \equiv 0$ in een omgeving van a (wat we uitsluiten) of $f(z)$ heeft in a een geïsoleerde singulariteit. Deze singulariteit kan geen pool zijn omdat $f(z) \rightarrow \infty$ als $z \rightarrow a$. De functie $f(z)$ zou dan in a een essentiële singulariteit hebben. Dit laatste is echter uitgesloten omdat $f(z)$ alleen pool-singulariteiten heeft. Dus V_0 heeft geen eindige verdichtingspunten. Beschouw vervolgens de functie $1/f(z)$; deze heeft V als verzameling van nulpunten en V_0 als verzameling van polen. Met het voorgaande volgt dan dat ook V geen eindige verdichtingspunten bezit.

Een verzameling V zonder eindige verdichtingspunten is

of eindig: $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$;

of aftelbaar: $V = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Immers, een cirkelgebied $G_N: |z| \leq N$ kan slechts eindig veel punten van V bevatten; zou namelijk G_N oneindig veel punten van V bevatten, dan bezet V een eindig verdichtingspunt in G_N op grond van de stelling van Bolzano-Weierstrass. Men kan nu de punten van V opvolgend nummeren, bijv. naar opklimmende modulus, waarna het resultaat als boven volgt.

Conclusie. Een meromorfe functie heeft of eindig veel polen a_1, a_2, \dots, a_n of aftelbaar veel polen a_1, a_2, a_3, \dots met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Beschouw nu eerst het geval van een meromorfe functie $f(z)$ met eindig veel polen a_1, a_2, \dots, a_n . In een gereduceerde omgeving van a_k ($k=1, 2, \dots, n$) is $f(z)$ te ontwikkelen in een Laurent-reeks met hoofddeel $h_k(z)$ te noemen. De functie $h_k(z)$ is analytisch voor $z \neq a_k$, terwijl $f(z) - h_k(z)$ analytisch is in een omgeving van a_k na opheffing van de singulariteit in a_k . Voorts geldt de integraalvoorstelling

$$h_k(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad (\text{AA 8.4.25})$$

waarin C_k een in positieve zin doorlopen Jordankromme om a_k is zodanig dat de overige polen van f en het punt z buiten C_k liggen.

Mit het voorgaande volgt dat $f(z) - \sum_{k=1}^n h_k(z)$ analytisch is in het hele complexe z -vlak.

Wij kunnen daarom $f(z)$ als volgt voorstellen:

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^n h_k(z),$$

waarin $g(z)$ een gehele functie is, d.w.z. analytisch in het hele z -vlak.

De functie $g(z)$ is voor te stellen door de integraal

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

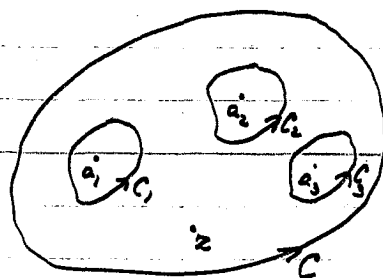
waarin C een in positieve zin doorlopen Jordankromme is die alle polen van f en het punt z omvat.

Dit resultaat is af te leiden met behulp van de residuustelling als volgt toegepast:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(t)}{t-z} dt = f(z),$$

waarbij C_k en C zijn weergegeven in nevenstaande figuur. Bedenk nu dat

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(t)}{t-z} dt = h_k(z),$$



dan volgt de integraalvoorstelling voor $g(z)$ als boven.

Beschouw vervolgens het geval van een meromorfe functie $f(z)$ met afelbaar veel polen a_1, a_2, a_3, \dots met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Laet $h_n(z)$ weer het hoofddeel zijn van de Laurent-reeks van $f(z)$ in een gereduceerde omgeving van a_n , $n=1, 2, 3, \dots$. Het voorgaande resultaat voor een eindig aantal polen is nu niet zonder meer overdraagbaar, daar de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)$ niet convergent hoeft te zijn. In plaats daarvan geldt nu de volgende stelling.

Stelling van Mittag-Leffler. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met afelbaar veel polen a_1, a_2, a_3, \dots , en zij $h_n(z)$ het hoofddeel van de Laurentreeks van $f(z)$ rond de pool a_n , $n=1, 2, 3, \dots$.

Dan bestaan er polynomen $p_n(z)$, $n=1, 2, 3, \dots$, en een gehele functie $g(z)$, zodanig dat

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [h_n(z) - p_n(z)].$$

Bij ieder begreemd gebied $G \subset \mathbb{C}$ is er een getal N zodat de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} [h_n(z) - p_n(z)]$ uniform convergent is op G .

Bewijs. Neem $p_1(z) = 0$. Als $z=0$ een pool is van $f(z)$, stellen we $a_1 = 0$. Dan $a_n \neq 0$ voor $n \geq 2$. De constructie van de polynomen $p_n(z)$ voor $n \geq 2$ verloopt nu als volgt.

Het hoofddeel $h_n(z)$ is analytisch voor $z \neq a_n$, dus zeker voor $|z| < |a_n|$. Voor $h_n(z)$ geldt dan de Taylor-ontwikkeling

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} z^k$$

met convergentiestraal $|a_n|$. Daar de reeks uniform convergent is voor $|z| \leq \frac{1}{2}|a_n|$, bestaat er een index k_n , zodat

$$\left| \sum_{k=k_n+1}^{\infty} c_{nk} z^k \right| \leq 2^{-n} \text{ voor } |z| \leq \frac{1}{2}|a_n|.$$

116.

Definieer nu $p_n(z) = \sum_{k=0}^{k_n} c_{nk} z^k$, $n \geq 2$, dan is

$$|h_n(z) - p_n(z)| = \left| \sum_{k=k_n+1}^{\infty} c_{nk} z^k \right| \leq 2^{-n} \text{ voor } |z| \leq \frac{1}{2}|a_n|.$$

Laat G een begrensd gebied in het complexe z -vlak zijn, en laat G liggen binnen de cirkel $|z| = R$. Bepaal N zo dat $|a_n| > 2R$ voor $n > N$ (dit kan omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$).

Voor $z \in G$ en $n > N$ geldt dan

$$|h_n(z) - p_n(z)| \leq 2^{-n},$$

dus is de reeks $\sum_{n=N}^{\infty} [h_n(z) - p_n(z)]$ uniform convergent op G . De som van de reeks is dan een op G analytische functie. Voeg hieraan toe een eindig aantal begin- termen $\sum_{n=1}^N [h_n(z) - p_n(z)]$, dan volgt dat de functie

$$f_0(z) := \sum_{n=1}^{\infty} [h_n(z) - p_n(z)]$$

analytisch is in G behalve in de punten a_n voorzover in G gelegen. In deze punten heeft $f(z) - h_n(z)$ een ophefbare singulariteit. Derhalve is het verschil

$$g(z) := f(z) - f_0(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} [h_n(z) - p_n(z)]$$

analytisch in G . Rangeten G een willekeurig gebied is, volgt: $g(z)$ is een gehele functie. \square

Opmerking. Uiteraard zijn de polynomen $p_n(z)$ en de gehele functie $g(z)$ niet eenduidig bepaald. Laat bijv. $q_n(z)$, $n=1,2,3,\dots$, polynomen zijn zodanig dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(z)$ uniform convergent is op elk begrensd gebied $G \subset \mathbb{C}$. Dan is ook

$$f(z) = \tilde{g}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [h_n(z) - \tilde{p}_n(z)]$$

met $\tilde{p}_n(z) = p_n(z) + q_n(z)$, $\tilde{g}(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(z)$.

We zullen de stelling van Mittag-Leffler toepassen in een tweetal voorbeelden.

2-5-79
Voorbeeld I. De meromorfe functie

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

heeft tweevoudige polen in $z = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Uit de ontwikkeling

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{\pi^2}{\pi^2 z^2 + O(z^4)} = \frac{1}{z^2} + O(1), \quad z \rightarrow 0,$$

vinden we voor het hoofddeel in de pool $z=0$: $h_0(z) = \frac{1}{z^2}$. Merk op dat $f(z)$ periodiek is met de periode 1. Voor het hoofddeel in de pool $z=n$ vinden we daarom

$$h_n(z) = \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Vorm nu de reeks van hoofddelen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} := \lim_{N_1 \rightarrow \infty, N_2 \rightarrow \infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{1}{(z-n)^2}$$

en beschouw deze reeks op de strook $|\operatorname{Re} z| \leq R$. Voor $|\operatorname{Re} z| \leq R$ en $|n| \geq 2R$ gelden de volgende afchattingen:

$$|\operatorname{Re} z - n| \geq |n| - |\operatorname{Re} z| \geq |n| - R \geq |n| - \frac{1}{2}|n| = \frac{1}{2}|n|,$$

$$|z-n|^2 = (\operatorname{Re} z - n)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geq \frac{1}{4}n^2, \quad \frac{1}{|z-n|^2} \leq \frac{4}{n^2}.$$

Uit de convergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ volgt nu dat de reeks $\sum_{|n| \geq 2R} \frac{1}{(z-n)^2}$ uniform convergent is op de strook $|\operatorname{Re} z| \leq R$; de som van de reeks is een analytische functie.

Voeg hieraan toe het eindig aantal termen $\sum_{|n| < 2R} \frac{1}{(z-n)^2}$, dan volgt dat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ een analytische functie is in de strook $|\operatorname{Re} z| \leq R$ afgezien van de polen $z = n$ voorover in de strook gelegen. In deze punten heeft $f(z) - \frac{1}{(z-n)^2}$ een ophefbare singulariteit. Verhaal is het verschil

$$g(z) := f(z) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

analytisch voor $|\operatorname{Re} z| \leq R$, en dus (daar R willekeurig is) een gehele functie. De functie $g(z)$ is tevens periodiek met periode 1.

Beschouw $g(z)$ op de strook $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$ en bereken $\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} g(z)$ a.l. $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \text{Wegens } |\sin^2 \pi z| &= |\sin \pi x \cosh \pi y + i \cos \pi x \sinh \pi y|^2 = \sin^2 \pi x \cosh^2 \pi y + \cos^2 \pi x \sinh^2 \pi y = \\ &= \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y \geq \sinh^2 \pi y, \end{aligned}$$

is

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = 0.$$

Voorts is

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} + \sum_{|n| \geq 1} \lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \frac{1}{(z-n)^2} = 0;$$

limiet- en somteken mogen verwisseld worden vanwege de uniforme convergentie van $\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{(z-n)^2}$ op de strook $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$. Totaal vinden we dus

$$(*) \quad \lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} g(z) = 0, \text{ uniform over } |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}.$$

Uit het laatste volgt dat $g(z)$ begrensd is op de strook $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$. Verder, omdat $g(z)$ periodiek is met periode 1, is $g(z)$ begrensd in het hele complexe z -vlak.

Met de stelling van Liouville (Algebra en Analyse 8.4.20) volgt dan: $g(z) = \text{constant}$.

Tenslotte, door nogmaals gebruik te maken van de limiet (*), vinden we

$$g(z) = \text{constant} = 0.$$

Hiermee is bewezen:

isomorfie

Het residu in $t=k$ is ook als volgt te berekenen:

$$\operatorname{Res}_{t=k} \frac{1}{t-2} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k^*} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} \frac{dt}{t-2} = -h_k'(z) = -\frac{1}{(z-k)^2}$$

Op grond van de integraalvoorstelling voor het hoofddeel $h(z)$ op p. 83,
 C_k^* is een Jordankromme om $t=k$, zodanig dat het punt 2 buiten C_k^* ligt.

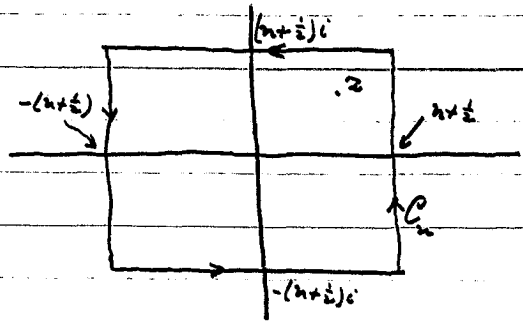
$$(I) \quad f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

d.i. de zgn. partieelbreuksplitsing van $\pi^2/\sin^2 \pi z$. Merk op dat voor deze functie $f(z)$ de polynomen $p_n(z)$ en de gehele functie $q(z)$ uit de stelling van Mittag-Leffler alle 0 zijn.

We zullen het resultaat in (I) nog op een andere wijze afleiden. Beschouw daartoe de integraal

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{1}{t-z} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} dt$$

waarin C_n een vierkant is met hoekpunten $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm (n+\frac{1}{2})i$. Merk op dat C_n de reële as snijdt in $z = \pm(n+\frac{1}{2})$, d.i. precies tussen twee polen van de integrand.



Veranderstel dat n zo groot is dat de pool $t=z$ binnen C_n ligt. De integrand heeft voorts nog tweevoudige polen $t=k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ binnen C_n . Met de residustelling vinden we nu

$$I_n(z) = \operatorname{Res}_{t=z} \frac{1}{t-z} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} + \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res}_{t=k} \frac{1}{t-z} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(z-k)^2}$$

Het residu in de tweevoudige pool $t=k$ is hierbij berekend uit de Laurent-ontwikkeling

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} &= -\frac{1}{(z-k)-(t-k)} \left[\frac{1}{(t-k)^2} + O(1) \right] = -\frac{1}{z-k} \left[1 + \frac{t-k}{z-k} + O((t-k)^2) \right] \left[\frac{1}{(t-k)^2} + O(1) \right] = \\ &= -\frac{1}{z-k} \frac{1}{(t-k)^2} - \frac{1}{(z-k)^2} \frac{1}{t-k} + O(1), \quad t \rightarrow k. \end{aligned}$$

We tonen nu aan dat $I_n(z) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Daartoe gaan we de integraal $I_n(z)$ als volgt afschatten. Schrijf $t = \sigma + i\tau$, dan is

$$|\sin^2 \pi t| = |\sin \pi \sigma \cosh \pi \tau + i \cos \pi \sigma \sinh \pi \tau|^2 = \sin^2 \pi \sigma \cosh^2 \pi \tau + \cos^2 \pi \sigma \sinh^2 \pi \tau = \sin^2 \pi \sigma + \sinh^2 \pi \tau.$$

De integraal $I_n(z)$ langs C_n bestaat uit bijdragen van de verticale zijden en van de horizontale zijden. Langs de verticale zijden is $t = \pm(n+\frac{1}{2}) \pm i\tau$,

$$\left| \frac{1}{t-z} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} \right| \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2} - |\operatorname{Re} z|} \frac{\pi^2}{\sin^2(n+\frac{1}{2})\pi + \sinh^2 \pi \tau} = \frac{1}{n+\frac{1}{2} - |\operatorname{Re} z|} \frac{\pi^2}{\cosh^2 \pi \tau}$$

$$\begin{aligned} \text{Zodat} \quad \left| \int_{\pm(n+\frac{1}{2}) - (n+\frac{1}{2})i}^{\pm(n+\frac{1}{2}) + (n+\frac{1}{2})i} \frac{1}{t-z} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} dt \right| &\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2} - |\operatorname{Re} z|} \int_{-(n+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\pi^2}{\cosh^2 \pi \tau} d\tau \\ &\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2} - |\operatorname{Re} z|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{\cosh^2 \pi \tau} d\tau = \frac{2\pi}{n+\frac{1}{2} - |\operatorname{Re} z|} \end{aligned}$$

Langs de horizontale zijden is $t = \sigma \pm i(n+\frac{1}{2})$,

Stelling 6.1 is afkomstig van Cauchy, 1827;

zie E.T. Copson, *Theory of functions of a complex variable*, Clarendon Press, Oxford,
1935, Sec. 6.81.

Voorbeeld II behandeld met tweede methode, p. 92, in 1978, 1979, 1982, 1984.

$$\left| \frac{1}{t-z} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} \right| \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}-|\operatorname{Im} z|} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t + \sinh^2(n+\frac{1}{2})\pi} \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}-|\operatorname{Im} z|} \frac{\pi^2}{\sinh^2(n+\frac{1}{2})\pi}$$

zodat

$$\left| \int_{-(n+\frac{1}{2})\pm(n+\frac{1}{2})i}^{(n+\frac{1}{2})\pm(n+\frac{1}{2})i} \frac{1}{t-z} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} dt \right| \leq \frac{2n+1}{n+\frac{1}{2}-|\operatorname{Im} z|} \frac{\pi^2}{\sinh^2(n+\frac{1}{2})\pi}$$

Uit deze afchattingen blijkt dat de bijdragen van de vier zijden tot nul nadereen als $n \rightarrow \infty$. Daarom is bewezen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(z) = 0$, zelfs uniform voor $z \in G$ met G een willekeurig begrensd gebied.

Neem nu in het resultaat voor $I_n(z)$ op p. 89 de limiet voor $n \rightarrow \infty$, dan vinden we

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(z-k)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}$$

Strikt genomen levert de laatste limiet de zgn. hoofdwaaarden van de reeks. Men kan gemakkelijk inzien dat deze hoofdwaaarden hier samenvalt met de gewone som van de reeks, aangezien $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n = \lim_{N_1 \rightarrow \infty, N_2 \rightarrow \infty} \sum_{k=-N_1}^{N_2}$ in dit voorbeeld.

21-5-1987

De hier gebruikte (tweede) methode is samen te vatten in de volgende stelling.

Stelling 6.1. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met aftelbaar veel polen a_1, a_2, a_3, \dots , en bijbehorende hoofddeelen $h_1(z), h_2(z), h_3(z), \dots$. Zij C_1, C_2, C_3, \dots een rij van Jordankrommen zodanig dat op C_n geen polen van $f(z)$ liggen, en $R_n = \min |z| \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$.

Zij voorts $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{|f(z)|}{|z|} |dz| = 0$, dan geldt $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)$. Bij ieder begrensd gebied $G \subset \mathbb{C}$ is er een getal N zodat de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} h_n(z)$ uniform convergeert op G .

Bewijs. Bereken de integraal

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

met behulp van de residuustelling en pas vervolgens een limietovergang $n \rightarrow \infty$ toe. \square

10-5-1982

Voorbeeld II. De meromorfe functie

$$f(z) = \pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

heeft enkelvoudige polen in $z = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Uit de ontwikkeling

$$f(z) = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \frac{1 + O(z^2)}{\pi z + O(z^3)} = \frac{1}{z} + O(z), \quad z \rightarrow 0,$$

vinden we voor het hoofddeel in de pool $z=0$: $h_0(z) = \frac{1}{z}$. Daar $f(z)$ periodiek is met periode 1, vinden we dan voor het hoofddeel in de pool $z=n$:

$$h_n(z) = \frac{1}{z-n}$$

De reeks van hoofddelen, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$, is in dit geval niet convergent; vergelijk met de divergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

De polynomen $p_n(z)$ uit de stelling van Mittag-Leffler moeten nu in werking treden om de convergentie te forceren. We nemen $p_0(z) = 0$, $p_n(z) = -\frac{1}{n}$ als $n \neq 0$, dan is

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [h_n(z) - p_n(z)] = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{z}{n(z-n)}$$

Beschouw de laatste reeks op het cirkelgebied $|z| \leq R$. Voor $|z| \leq R$ en $|n| \geq 2R$ geldt

$$|z-n| \geq |n| - |z| \geq |n| - R \geq |n| - \frac{1}{2}|n| = \frac{1}{2}|n|; \quad \left| \frac{z}{n(z-n)} \right| \leq \frac{2R}{n^2}$$

Uit de convergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} 2R/n^2$ volgt dat de reeks $\sum_{|n| \geq 2R} \frac{z}{n(z-n)}$ uniform convergent is op het gebied $|z| \leq R$; de som van de reeks is daar een analytische functie.

Ook de complete reeks $\frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{z}{n(z-n)}$ is dan analytisch in het gebied $|z| \leq R$, behalve in de polen $z = n$ voorzover in het gebied gelegen. In deze polen heeft $f(z) - \frac{1}{z-n}$ een ophefbare singulariteit, zodat het verschil

$$g(z) = \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{z}{n(z-n)}$$

analytisch is voor $|z| \leq R$. Daar te willekeurig is, is $g(z)$ een geheel functie. Men kan voorts gemakkelijk inzien dat $g(z)$ oneven is en periodiek met periode 1.

Analoog aan voorbeeld I kan men nu bewijzen dat $g(z)$ begrensd is voor $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$.

Uit de periodicititeit van $g(z)$ volgt dan: $g(z)$ is begrensd in het hele complexe z -vlak, en dus [Stelling van Liouville] $g(z) = \text{constant}$. Daar $g(z)$ oneven is, moet $g(z) = 0$ zijn.

Hetzelfde resultaat is ook af te leiden door differentiatie van $g(z)$ als boven. Teruggewen differentiatie van de reeks is hier geoorloofd op grond van uniforme convergentie, zodat

$$g'(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} + \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Met behulp van de partieelbreuksplitsing van $\pi^2 / \sin^2 \pi z$ (zie form. (I) of p. 89) vinden we $g'(z) = 0$, dus $g(z) = \text{constant}$. Daar $g(z)$ oneven is, moet $g(z) = 0$ zijn.

Voor de functie $f(z) = \pi \cot \pi z$ vinden we op deze wijze de partieelbreuksplitsing:

$$(I) \quad f(z) = \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

Deze uitkomst is ook als volgt te schrijven:

$$(IIa) \quad \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

zoals eerder afgeleid in 1.5, voorbeeld (9), p. 18, of

$$(IIb) \quad \pi \cot \pi z = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$$

waarbij de laatste reeks moet worden opgevat als de zgn. hoofdwaaarde.

We zullen de partiaalbreuksplitsing (II) van $\pi \cot \pi z$ nog op een andere wijze afleiden. Bereken daartoe de integraal

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \pi \cot \pi t \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \pi \cot \pi t \frac{z}{t(t-z)} dt,$$

waarin C_n een vierkant is met hoekpunten $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm i$; zie de figuur op p. 89.

Veronderstel dat n zo groot is, dat de pool $t=z$ binnen C_n ligt. De integrand heeft voorts nog enkelvoudige polen $t=k=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ en een tweevoudige pool $t=0$ binnen C_n . Met de residustelling vinden we nu

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \left[\text{Res}_{t=z} + \text{Res}_{t=0} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 0}}^n \text{Res}_{t=k} \right] \left\{ \pi \cot \pi t \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) \right\} = \\ &= \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

We tonen nu aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(z) = 0$, dan volgt onmiddellijk de betrekking (E).

Schrijf $t = \sigma + i\tau$, dan is

$$\begin{aligned} |\cot \pi t| &= \left| \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} \right| = \left| \frac{\cos \pi \sigma \cosh \pi \tau - i \sin \pi \sigma \sinh \pi \tau}{\sin \pi \sigma \cosh \pi \tau + i \cos \pi \sigma \sinh \pi \tau} \right| = \\ &= \left[\frac{\cos^2 \pi \sigma \cosh^2 \pi \tau + \sin^2 \pi \sigma \sinh^2 \pi \tau}{\sin^2 \pi \sigma \cosh^2 \pi \tau + \cos^2 \pi \sigma \sinh^2 \pi \tau} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\cos^2 \pi \sigma + \sinh^2 \pi \tau}{\sin^2 \pi \sigma + \sinh^2 \pi \tau} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Op de verticale zijden van het vierkant C_n is $t = \pm(n+\frac{1}{2}) + i\tau$,

$$|\cot \pi t| = \left[\frac{\sinh^2 \pi \tau}{1 + \sinh^2 \pi \tau} \right]^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{\sinh \pi \tau}{\cosh \pi \tau} \right| \leq 1.$$

Op de horizontale zijden van het vierkant C_n is $t = \sigma \pm (n+\frac{1}{2})i$,

$$|\cot \pi t| = \left[\frac{\cos^2 \pi \sigma + \sinh^2 (n+\frac{1}{2})\pi}{\sin^2 \pi \sigma + \sinh^2 (n+\frac{1}{2})\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\cosh (n+\frac{1}{2})\pi}{\sinh (n+\frac{1}{2})\pi} \leq \frac{\cosh \frac{1}{2}\pi}{\sinh \frac{1}{2}\pi}.$$

Conclusie: de functie $\cot \pi t$ is begrensd langs de zijden van C_n . Voorts is

$$\left| \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right| = \left| \frac{z}{t(t-z)} \right| \leq \frac{|z|}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2}-|z|)} \quad \text{voor } t \in C_n.$$

Met behulp van bovenstaande afchattingen volgt eenvoudig: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(z) = 0$, zelfs uniform voor $z \in G$ met G een willekeurig begrensd gebied.

De hier gebruikte methode is samen te vatten in de volgende stelling die een generalisering vormt van stelling 6.1.

Stelling 6.2. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met opeelbaar veel polen a_1, a_2, a_3, \dots , alle $\neq 0$, en bijbehorende hoofddelen $h_1(z), h_2(z), h_3(z), \dots$. Zij C_1, C_2, C_3, \dots een rij van Jordankrommen zodanig dat op C_n geen polen van $f(z)$ liggen, en $R_n = \min_{z \in C_n} |z| \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$. Laet er een geheel getal $m \geq 0$ bestaan zodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{|f(z)|}{|z|^{m+1}} |dz| = 0.$$

Dan geldt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right].$$

Bij ieder begrensde gebied $G \subset \mathbb{C}$ is er een getal N zodat de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left[h_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right]$ uniform convergeert in G .

Bewijs. Bereken de integraal

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f(t) \frac{z^n}{t^n(t-z)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f(t) \left[\frac{1}{t-z} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{t^{k+1}} \right] dt$$

met de residuustelling en pas vervolgens een limietovergang $n \rightarrow \infty$ toe. \square

Opmerking. Indien $f(z)$ een pool in $z=0$ heeft met bijbehorend hoofddeel $h_0(z)$, kan Stelling 6.2 worden toegepast op de functie $f(z) - h_0(z)$. Stelling 6.1 is een bijzonder geval van Stelling 6.2, corresponderend met $m=0$. Als tweede bijzonder geval beschouwen we Stelling 6.2 voor een meromorfe functie met slechts eindig enkelvoudige polen.

Stelling 6.3. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met aftelbaar veel enkelvoudige polen a_1, a_2, a_3, \dots , alle $\neq 0$, met bijbehorende residuen r_1, r_2, r_3, \dots . Zij C_1, C_2, C_3, \dots een rij van Jordankrommen zodanig dat op C_n geen polen van $f(z)$ liggen, en $R_n = \min_{z \in C_n} |z| \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$. Laat er een geheel getal $m \geq 0$ bestaan zodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{|f(z)|}{|z|^{m+1}} |dz| = 0.$$

Dan geldt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n} \right)^m \frac{r_n}{z - a_n}.$$

Bij elk begrensde gebied $G \subset \mathbb{C}$ bestaat er een getal N zodat de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n} \right)^m \frac{r_n}{z - a_n}$ uniform convergeert in G .

Bewijs. Het hoofddeel van $f(z)$ in de pool $z = a_n$ wordt gegeven door $h_n(z) = \frac{r_n}{z - a_n}$, zodat

$$h_n(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_n^{(k)}(0)}{k!} z^k = \frac{r_n}{z - a_n} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{r_n}{a_n^{k+1}} z^k = \left(\frac{z}{a_n} \right)^m \frac{r_n}{z - a_n}.$$

Het gestelde volgt nu onmiddellijk uit Stelling 6.2. \square

De in voorbeeld 2 gebruikte tweede methode beruist op Stelling 6.3, toegepast op de functie $f(z) = \pi \cot \pi z - \frac{1}{z}$ met $m=1$.

16-5-73 / ds 198

6.2 Oneindige producten.

De definitie van een oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ is analoog aan die van een (oneindige) reeks $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$. We voeren in de partieël producten

$$p_n = \prod_{k=1}^n f_k, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Het oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ heet convergent als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

bestaat en $p \neq 0$; we schrijven dan $\prod_{n=1}^{\infty} f_n = p$. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ niet bestaat of gelijk aan 0 is, heet het oneindig product divergent.

De extra voorwaarde $p \neq 0$ heeft de volgende achtergrond: Toelaten van $p=0$ zou betekenen dat elk oneindig product met één factor $f_k = 0$ convergent is, onverschillig wat de andere factoren zijn. De voorwaarde $p \neq 0$ impliceert dat bij een convergent product alle factoren f_n moeten zijn. Dit laatste is vaak een te sterke eis: we willen graag toelaten dat eventueel eindig veel factoren 0 zijn. We stellen daarom in plaats van de definitie boven:

Een oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ heet convergent als er een getal N is zodat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=N+1}^n f_k \text{ bestaat en } \neq 0 \text{ is.}$$

Onder deze definitie geldt: $p = \prod_{n=1}^{\infty} f_n = 0$ dan en slechts dan als eindig veel factoren f_n nul zijn.

16-5-73 / 28-5-73

Stelling 6.4. Een nodige voorwaarde voor de convergentie van het product $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1.$$

Opmerking. De voorwaarde is niet voldoende. Vergelijk dit met de nodige voorwaarde $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ voor de convergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$.

Beweis. Zij $f_k \neq 0$ voor $k > N$ en zij $p_n = \prod_{k=N+1}^n f_k$, dan is $f_n = p_n / p_{n-1}$. Indien het product $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ convergent is, geldt voor $n \rightarrow \infty$: $p_n \rightarrow p$, $p_{n-1} \rightarrow p$ met $p \neq 0$. Daaruit volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1$. □

Op grond van deze stelling noteert men een oneindig product meestal volgens

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n), \quad (\text{i.e. } f_n = 1 + u_n \text{ gesteld})$$

waarbij u_n , $n=1, 2, 3, \dots$, de termen genoemd worden. Voor een convergent oneindig product geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Voorbeelden (i) $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1 \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$;

het product $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})$ is dus divergent.

(ii) $\prod_{k=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{k}) = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$;

het product $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})$ is dus divergent.

(iii) $\prod_{k=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$ als $n \rightarrow \infty$;

het product $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$ is dus convergent.

We beschouwen nu producten met uitlopende niet-negatieve of uitlopende niet-positieve termen.

Stelling 6.5. Zij $u_n \geq 0$ voor $n=1, 2, 3, \dots$, dan zijn de reeks en de producten

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n), \prod_{n=1}^{\infty} (1-u_n)$$

alle convergent of alle divergent.

Bewijs. Onderscheid twee gevallen:

a) Er zijn oneindig veel indices n_1, n_2, n_3, \dots zodat $u_{n_k} \geq 1$. De reeks en de producten als boven zijn dan alle divergent.

b) Er is een index N zodat $u_n < 1$ voor $n > N$. Laat dan de eerste N termen / factoren van de reeks / producten weg; dit zal niets veranderen aan de convergentie of divergentie. Zonder verlies aan algemeenheid mogen we dus stellen $u_n < 1$ voor elke n . Voorts nemen we nog aan dat in geval van convergentie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < 1$ is; ook dit is altijd te realiseren door weglaten van een eindig aantal begintermen.

Voer nu in de notaties

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad p_n^+ = \prod_{k=1}^n (1+u_k), \quad p_n^- = \prod_{k=1}^n (1-u_k)$$

Het is duidelijk dat de rijen $\{s_n\}$ en $\{p_n^+\}$ monotoon niet-dalend zijn, terwijl de rij $\{p_n^-\}$ monotoon niet-stijgend is. De rijen $\{s_n\}$ en $\{p_n^+\}$ zijn dan convergent als ze naar boven begrensd zijn; de rij $\{p_n^-\}$ is convergent met positieve limiet als ze naar beneden begrensd wordt door een positieve ondergrens.

Voor s_n en p_n^{\pm} gelden de volgende ongelijkheden:

$$(1) \quad 1 + s_n \leq p_n^+ \leq e^{s_n}; \quad (2) \quad 1 - s_n \leq p_n^- \leq e^{-s_n}$$

De rechtvaardig van deze ongelijkheden volgt uit

$$1 \pm u_k \leq e^{\pm u_k} \Rightarrow p_n^{\pm} = \prod_{k=1}^n (1 \pm u_k) \leq \exp(\pm \sum_{k=1}^n u_k) = e^{\pm s_n}$$

De linkerkant van de ongelijkheden (1) en (2) is te berekenen door volledige inductie.

Voor $n=1$ geldt triviaal

$$1 \pm s_1 = 1 \pm u_1 = p_1^{\pm}$$

Zij vervolgens $p_n^{\pm} \geq 1 \pm s_n$ voor zekere n , dan is

$$p_{n+1}^{\pm} = p_n^{\pm} (1 \pm u_{n+1}) \geq (1 \pm s_n)(1 \pm u_{n+1}) = 1 \pm s_n \pm u_{n+1} + s_n u_{n+1} \geq 1 \pm s_n \pm u_{n+1} = 1 \pm s_{n+1}$$

Met behulp van de ongelijkheid (1) is af te leiden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ convergent} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \text{ bestaat} \Rightarrow p_n^+ \leq e^s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^+ = p^+ \text{ bestaat} \Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k) \text{ convergent};$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k) \text{ convergent} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^+ = p^+ \text{ bestaat} \Rightarrow s_n \leq p^+ - 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \text{ bestaat} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ convergent.}$$

Met behulp van de ongelijkheid (2) is af te leiden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ convergent} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s < 1 \text{ bestaat} \Rightarrow p_n^- \geq 1 - s > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^- = p^- \text{ bestaat} \Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} (1-u_k) \text{ convergent};$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-u_k) \text{ convergent} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^- = p^- > 0 \text{ bestaat} \Rightarrow s_n \leq -\log p^- \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \text{ bestaat} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ convergent.} \quad \square$$

Met deze stelling is de theorie van de convergentie van producten met bekende termen terug te brengen tot de bekende theorie van de convergentie van reeksen met niet-negatieve termen.

Het verband tussen de convergentie van $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ en $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k)$ geldt niet meer als de termen u_k niet hetzelfde teken hebben, zoals blijkt uit de volgende voorbeelden.

Voorbeelden. (i) Zij $u_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $u_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n=1,2,3,\dots$, dan is $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ convergent en

$\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k)$ is divergent; immers

$$\prod_{k=1}^{2n} (1+u_k) = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

(ii) Zij $u_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $u_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $n=1,2,3,\dots$, dan is $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ divergent en $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k)$ convergent;

immers

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k+1})} \rightarrow \infty \text{ als } n \rightarrow \infty;$$

$$\prod_{k=1}^{2n} (1+u_k) = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \prod_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = 1 \rightarrow 1 \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Definitie. Een oneindig product $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k)$ heet absoluut convergent als $\prod_{k=1}^{\infty} (1+|u_k|)$ convergent is.

Stelling 6.6. Een absoluut convergent oneindig product is convergent.

Bewijs. Voor in de partiële producten $p_n = \prod_{k=1}^n (1+u_k)$, $P_n = \prod_{k=1}^n (1+|u_k|)$ dan is zeker

$|p_n| \leq P_n$. Voorts geldt

$$|p_{n+1} - p_n| = |p_n(1+u_{n+1}) - p_n| = |p_n u_{n+1}| \leq P_n |u_{n+1}| = P_n(1+|u_{n+1}|) - P_n = P_{n+1} - P_n.$$

Zij het product $\prod_{k=1}^{\infty} (1+|u_k|)$ convergent, i.e. zij de rij $\{P_n\}$ convergent, dan convergeert ook de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} (P_{k+1} - P_k)$. Met de ongelijkheid hierboven volgt dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} (p_{k+1} - p_k)$ (absoluut)

convergent is, dus bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. We tonen nog aan dat $p \neq 0$ is. Wegens $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ mogen we zonder verliezen van algemeenheid aannemen dat $|u_n| < 1$ voor $n=1, 2, 3, \dots$. Dan is

$$|p_n| \geq \prod_{k=1}^n (1 - |u_k|)$$

en het rechterlid van deze ongelijkheid heeft een positieve limiet als $n \rightarrow \infty$ op grond van stelling 6.5. Daarmee volgt $p \neq 0$ en het product $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ is convergent. \square

Opmerking. Net als bij reekken geldt het omgekeerde van stelling 6.6 niet: een convergent meevindig product hoeft niet absoluut convergent te zijn.

Voorbeeld: $\prod_{k=1}^{\infty} [1 - \frac{(-1)^k}{k}]$ is convergent, want

$$\prod_{k=1}^{2n} [1 - \frac{(-1)^k}{k}] = \prod_{k=1}^{2n} (1 + \frac{1}{2k-1})(1 - \frac{1}{2k}) = \prod_{k=1}^{2n} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k-1}{2k} = 1 \rightarrow 1 \text{ als } n \rightarrow \infty;$$

$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k})$ is echter divergent, zie voorbeeld (i), p. 95.

Door combinatie met stelling 6.5 volgt nog:

$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ is absoluut convergent dan en slechts dan als $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ absoluut convergent is.

Stelling 6.7. Zij $u_n \neq -1$ voor $n=1, 2, 3, \dots$, dan zijn het product en de reeks

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k), \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + u_k) \quad (\text{hoofdwwaarden van de logaritmen})$$

beide convergent of beide divergent. In geval van convergentie geldt: $p = e^s$ en, er bestaat een getal N zodat voor $n > N$ geldt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \log(1 + u_k) = \log \left[\prod_{k=n+1}^{\infty} (1 + u_k) \right] \quad (\text{hoofdwwaarden van de logaritmen}).$$

Beweis. Voer in de notaties

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k); \quad s_n = \sum_{k=1}^n \log(1 + u_k),$$

dan is $p_n = e^{s_n}$. Indien nu de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + u_k)$ convergent is met som s , dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, en vervolgens $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p = e^s$, i.e. het product $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ is convergent.

Omgekeerd, zij het product $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k) = p$ convergent, dan bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. De partiële som s_n is voor te stellen door

$$s_n = \log p + \log \frac{p_n}{p} = 2\pi i k_n \quad (\text{hoofdwwaarden van de logaritmen})$$

waarin k_n een geheel getal is, afhankelijk van n . Te bewyzen is nu dat k_n op den duur constant blijft. Schrijf daartoe

$$2\pi i (k_{n+1} - k_n) = s_{n+1} - s_n - \log \frac{p_{n+1}}{p} + \log \frac{p_n}{p} = \log(1 + u_{n+1}) - \log \frac{p_{n+1}}{p} + \log \frac{p_n}{p}.$$

Het laatste lid nadert tot 0 als $n \rightarrow \infty$. Daarmee volgt, omdat k_n geheel is, dat er een getal N bestaat zodat $k_n = k$ constant voor $n > N$. We vinden dan

$$S_n = \log p + \log \frac{p}{p} + 2\pi i k, \quad \text{voor } n > N,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \log p + 2\pi i k.$$

Uit het bestaan van deze limiet volgt dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$ convergeert is. Door aftrekken van de twee regels hierboven vinden we

$$S - S_n = \log \frac{p}{p_n} ; \sum_{k=1}^n \log(1+u_k) = \log \left[\prod_{k=1}^n (1+u_k) \right] \quad \text{voor } n > N. \quad \square$$

We beschouwen nu oneindige producten $\prod_{n=1}^{\infty} [1+u_n(z)]$ waarvan de termen $u_n(z)$ afhangen van de complexe variabele z .

Definitie. Een oneindig product $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1+u_n(z)]$ heet uniform convergeert op een gebied $G \subset \mathbb{C}$, als de rij der partiële producten $p_n(z) = \prod_{k=1}^n [1+u_k(z)]$ uniform convergeert op G met limiet $p(z)$, d.w.z. als

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N \forall z \in G (|p_n(z) - p(z)| < \varepsilon).$$

Een belangrijk hulpmiddel om de uniforme convergentie van een oneindig product aan te tonen wordt gegeven in de volgende stelling.

Stelling 6.8 (kenmerk van Weierstrass). Zij $|u_n(z)| \leq a_n$ voor $n=1, 2, 3, \dots$ en $z \in G$. Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert is, dan is het oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} [1+u_n(z)]$ uniform convergeert in G .

Bewijs. Over in de notatie $p_n(z) = \prod_{k=1}^n [1+u_k(z)]$, dan is

$$|p_{n+1}(z) - p_n(z)| = |p_n(z) u_{n+1}(z)| \leq \prod_{k=1}^n [1+|u_k(z)|] |u_{n+1}(z)| \leq K a_{n+1}, \quad z \in G,$$

waarin $K = \prod_{k=1}^n [1+a_k]$ convergeert is omdat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert is. Uit de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} K a_{n+1}$ volgt nu (met het kenmerk van Weierstrass voor reeksen) dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} [p_{n+1}(z) - p_n(z)]$ absolute en uniform convergeert in G . Dan is ook de rij $\{p_n(z)\}$ uniform convergeert op G en dus is het oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} [1+u_n(z)]$ uniform convergeert op G . \square

Stelling 6.9. Zij $u_n(z)$, $n=1, 2, 3, \dots$, analytisch en $\neq -1$ in een gebied $G \subset \mathbb{C}$, en zij het oneindig product $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1+u_n(z)]$ uniform convergeert op G . Dan is $p(z)$ analytisch en $\neq 0$ in G , en

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}$$

waarbij de reeks uniform convergeert in G . (2)

Bewijs. De rij $\{p_n(z)\}$ met $p_n(z) = \prod_{k=1}^n [1+u_k(z)]$ convergeert uniform op G met limiet $p(z)$;

Over sums-product in partialfractionizing $\pi \cot(\pi z)$, 2nd ed
W. Walter, Old and new approaches to Euler's trigonometric expansion,
 Amer. Math. Monthly 89, 225-230 (1982).

Let sums-product identity: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^4}{90}$
 $(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2})^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Taylor series $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2} = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k}\right)^{-2k}$
 $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{k^{2k+2n}}$

Series $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} - \frac{\pi^2 z}{3} - \frac{\pi^4 z^3}{45} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}(2\pi)^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$

Heurist value: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, etc.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = b_n \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{(2n)!}$, $b_1 = \frac{1}{6}$, $b_2 = \frac{1}{90}$, etc.

Heurist value

$p_n(z)$ is analytisch in G . Volgens een bekende stelling uit de functietheorie (vergelijk Algebra en Analyse 8.4.2) is dan de limiet $p(z)$ analytisch en f is in G .

De rij van afgeleiden $\{p'_n(z)\}$ convergeert eveneens uniform op G met limiet $p'(z)$ (vergelijk Algebra en Analyse 8.4.3). Bereken nu $p'_n(z)$ door logaritmisch differentiëren.

$$\log p_n(z) = \sum_{k=1}^n \log(1 + u_k(z)) + 2\pi i k_n, \quad k_n \text{ geheel.}$$

$$\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{u'_k(z)}{1 + u_k(z)}.$$

Neem hierin de limiet voor $n \rightarrow \infty$, dan volgt: $\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u'_k(z)}{1 + u_k(z)}$. \square

Voorbeelden 1) Beschouw het oneindig product

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

met termen $u_n(z) = -z^2/n^2$. Op het gebied $|z| \leq R$ geldt de afchatting $\left|\frac{z^2}{n^2}\right| \leq \frac{R^2}{n^2}$.

Uit de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} R^2/n^2$ volgt, dan met het kenmerk van Weierstrass dat $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ uniform convergeert is voor $|z| \leq R$. De functie $p(z)$ is dan analytisch voor $|z| \leq R$, dus, daar R willekeurig is, $p(z)$ is een gehele functie. De functie $p(z)$ heeft nulpunten $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

De afgeleide $p'(z)$ is te bepalen met stelling 6.9:

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

De laatste term is te vereenvoudigen met gebruik van de partiëlebreukoplossing van $\pi \cot \pi z$ (zie form. (IIa) of 6.91):

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \pi \cot \pi z - \frac{1}{z}.$$

Integreer deze betrekking dan volgt

$$\log p(z) = \log(\sin \pi z) - \log z + C', \quad p(z) = C \frac{\sin \pi z}{z}.$$

De integratieconstante C volgt uit $p(0) = 1 \Rightarrow C = 1/\pi$. Daarmee hebben we gevonden het 29. Sinusproduct

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad \text{Euler 1748}$$

2) Beschouw het oneindig product

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

met termen $u_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} - 1$. Ontwikkeling van $u_n(z)$ bij vaste z en $n \rightarrow \infty$ levert

$$u_n(z) = \left[1 + \frac{z}{n}\right] \left[1 - \frac{z}{n} + \frac{z^2}{2n^2} + O(n^{-3})\right] - 1 = -\frac{z^2}{2n^2} + O(n^{-3}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Laat G een willekeurig begrensd gebied zijn, dan bestaat er een constante M zodat $|u_n(z)| \leq \frac{M}{n^2}$ voor $z \in G$. Daar de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert is, volgt met het criterium van Weierstrass dat het product $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$ uniform convergeert in G . Volgens stelling 6.9 is $F(z)$ analytisch in G . Daar G een willekeurig gebied is, zal $F(z)$ een gehele functie zijn. De functie $F(z)$ heeft nulpunten $z = -1, -2, -3, \dots$.

Vergelyk $F(z)$ met de gamma functie. In eigenschap 5, p.5, is bewezen

$$\Gamma(x) = e^{-x} x^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{x/n}, \quad x > 0,$$

oftewel
$$\Gamma(x) = e^{-x} x^{-1} [F(x)]^{-1}, \quad x > 0.$$

Vervang nu x door z , complex. Linkerlid en rechterlid zijn dan beide analytische functies van z afgezien van enkelvoudige polen $z = 0, -1, -2, \dots$. Uit de gelijkheid voor $z = x > 0$ volgt dan met de identiteitsstelling gelijkheid in het hele complexe z -vlak met uitzondering van de polen $z = 0, -1, -2, \dots$, i.e.

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{-1} [F(z)]^{-1} = e^{-z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}.$$

Weierstrass (1856) gebruikte dit als definitie van $\Gamma(z)$ en bescreef hierop de verdere theorie. De eigenschap 8, p.7, is uitgaande van deze definitie heel eenvoudig af te leiden:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \Gamma(1-z) &= -z \Gamma(z) \Gamma(1-z) = -z e^{-z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \cdot e^{z(1-z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{-z/n} \\ &= z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\sin \pi z} \end{aligned}$$

met gebruikmaking van het sinusproduct uit voorbeeld 1).

6.3. Gehele functies.

Definitie. Een functie $f(z)$ heet geheel als $f(z)$ analytisch is in het gehele complexe z -vlak.

Een gehele functie $f(z)$ is te ontwikkelen in de Taylor-reeks $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ met convergentiestraal ∞ en coëfficiënten a_n gegeven door

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz;$$

hierbij is C een Jordankromme die in positieve richting om $z=0$ loopt.

Gehele functies zijn te onderscheiden in twee klassen: gehele rationale functies of polynomen waarbij de Taylor-reeks als boven afbreekt, en gehele transcendenten functies waarbij de Taylor-reeks niet afbreekt.

We geven de volgende uitbreiding van de stelling van Liouville (Algebra en Analyse 8.4.20) ~~aan~~

Stelling 6.10 Zij $f(z)$ geheel en laat er een getal $m \in \mathbb{R}$ bestaan, zodat $f(z) = O(|z|^m)$ als $z \rightarrow \infty$. Dan is $f(z)$ een polynoom met graad $\leq m$. Indien $m < 0$ is, is $f(z) \equiv 0$.

Bewijs. Ge met van de Taylor-reeks $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ met coëfficiënten $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$.
Neem voor C de cirkel $|z| = R$, dan is

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = O(R^{m-n}) \rightarrow 0 \text{ als } R \rightarrow \infty \text{ en } n > m.$$

De Taylor-reeks breekt dus af, en $f(z)$ is een polynoom met graad $\leq m$.

Indien $m < 0$ is, is $a_n = 0$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$; daarmede volgt $f(z) \equiv 0$. \square

Opmerking. Stelling 6.10 drukt uit: Een gehele functie $f(z)$ is geheel rationaal dan en slechts dan als er een getal $m \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $f(z) = O(|z|^m)$ als $z \rightarrow \infty$; AA 8.4.22.

Voor een gehele functie kan men invoren de verzameling V_0 van nulpunten. Deze verzameling heeft geen eindige verdichtingspunten of graad van de stelling uit Algebra en Analyse 8.4.11. Zoals afgeleid op p. 85 is V_0 dan

of eindig: $V_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, eventueel $V_0 = \emptyset$;

of aftelbaar: $V_0 = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

We spreken hierbij af dat een meervoudig nulpunt net zo vaak vermeld wordt als zijn multipliciteit bedraagt.

Een geheel rationale functie ofwel een polynoom met graad m , heeft precies m nulpunten (hoofdstelling van de algebra; zie Algebra en Analyse 8.5.2).

Een geheel transcendent functie hoeft geen nulpunten te hebben; voorbeeld: $f(z) = e^z$.

Stelling 6.11 Als $f(z)$ geheel is en geen nulpunten heeft, dan is er een gehele functie $g(z)$ zodat $f(z) = e^{g(z)}$.

Bewijs. Voorin de functie

$$g_0(z) = \int_0^z \frac{f'(t)}{f(t)} dt,$$

waarbij de integratieweg willekeurig gekozen mag worden aangezien overal $f(t) \neq 0$ en $f'(t)/f(t)$ analytisch is. Ook $g_0(z)$ is een gehele functie. Er geldt nu

$$\frac{d}{dz} [f(z) e^{-g_0(z)}] = f'(z) e^{-g_0(z)} - f(z) e^{-g_0(z)} \frac{f'(z)}{f(z)} = 0,$$

waarmede volgt $f(z) e^{-g_0(z)} = \text{constant} = f(0)$, $f(z) = \exp[\log f(0) + g_0(z)]$. \square

We beschouwen nu het geval dat de gehele functie $f(z)$ eindig veel nulpunten heeft, namelijk een m -voudig nulpunt $z=0$ en verder de nulpunten a_1, a_2, \dots, a_n (alle $\neq 0$).

Stelling 6.12 is afkomstig van Weierstrass, 1876;

Zie E.T. Copson, *Theory of functions of a complex variable*, Clarendon Press,
Oxford, 1935, Sec. 7.2.

Bewijs niet in 1982, 1984

waarbij eenvoudige nulpunten herhaald worden zo vaak als hun multipliciteit bedraagt. De functie $f(z)$ is dan "deelbaar" door z^m en door $z - a_k$, $k=1, 2, \dots, n$. Het quotiënt

$$f(z) / z^m \prod_{k=1}^n (1 - \frac{z}{a_k})$$

is nu een geheel functie zonder nulpunten. Met stelling 6.11 volgt dan voor $f(z)$ de voorstelling

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^n (1 - \frac{z}{a_k}),$$

waarin $g(z)$ een geheel functie is.

Beschouw vervolgens het geval dat de geheel functie $f(z)$ afteelbaar veel nulpunten heeft. De voorstelling voor $f(z)$ als boven met $n = \infty$ is niet zonder meer geldig door het oneindig product $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_k})$ niet convergent hoeft te zijn.

Stelling 6.12. Zij a_1, a_2, a_3, \dots een rij met $a_n \neq 0$ voor elke n , en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Dan bestaan er niet-negatieve gehele getallen m_1, m_2, m_3, \dots , zodanig dat het oneindig product

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n}) \exp \left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{m_n} \right]$$

uniform convergent is op ieder begrensde gebied $G \subset \mathbb{C}$; $P(z)$ is dan een geheel functie met nulpunten a_1, a_2, a_3, \dots .

Bewijs. Zij G een begrensde gebied in het complexe z -vlak, en laat G liggen binnen de cirkel $|z| = R$. Daar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, bestaat er een getal N zodat $|a_n| \geq 2R$ voor $n \geq N$.

Neem de logaritme (hoofdwaarde) van de n -de factor van $P(z)$:

$$r_n(z) = \log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{m_n},$$

en beschouw $r_n(z)$ voor $z \in G$, $n \geq N$. Dan is $|z| \leq R$, $|a_n| \geq 2R$, en dus $\left| \frac{z}{a_n} \right| \leq \frac{1}{2}$. Na reeksontwikkeling van $\log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right)$ in $r_n(z)$ als volgt af te schatten:

$$(*) \quad |r_n(z)| = \left| - \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n} \right)^k \right| \leq \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{1}{2} \right)^{m_n}, \quad z \in G, n \geq N.$$

Kies nu de getallen m_1, m_2, m_3, \dots zodanig dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{m_n}$ convergent is; een mogelijke keuze is bijv. $m_n = n$.

Mit de ongelijkheid (*) volgt dan met het kenmerk van Weierstrass dat de reeks $\sum_{n=N}^{\infty} r_n(z)$ uniform convergent is op G . Vervolgens is dan ook (vergelijk stelling 6.7) het oneindig product

$$\prod_{n=N}^{\infty} e^{r_n(z)} = \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{m_n} \right]$$

uniform convergent op G . Na vermenigvuldiging met de beginfactoren $\prod_{n=1}^{N-1} \dots$, die een

begrensd functie, is ook het product $P(z)$ uniform convergent op G . De functie $P(z)$ is dan analytisch op G ; en daar G willekeurig is, is $P(z)$ een gehele functie. \square

Stelling 6.13 (productontwikkeling van Weierstrass, 1876). Zij $f(z)$ een gehele functie met een m -voudig nulpunt $z=0$ en met aftelbaar veel nulpunten a_1, a_2, a_3, \dots , alle $\neq 0$. Dan is er een gehele functie $g(z)$ en een oneindig product $P(z)$ als in stelling 6.12, zodanig dat

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z).$$

Bewijs. Het oneindig product $P(z)$ is een gehele functie met nulpunten a_1, a_2, a_3, \dots . Het quotiënt $f(z) / z^m P(z)$ is dan een gehele functie zonder nulpunten. Het gestelde volgt nu onmiddellijk met stelling 6.11. \square

Tenslotte komen we nog terug op de meromorfe functies uit 6.1. Een meromorfe functie is een functie die analytisch is in het hele complexe vlak afgezien van polen.

Stelling 6.14. Een meromorfe functie is te schrijven als het quotiënt van twee gehele functies.

Bewijs. Zij $f(z)$ een meromorfe functie, dan heeft $f(z)$ hoogstens aftelbaar veel polen a_1, a_2, a_3, \dots van orde resp. k_1, k_2, k_3, \dots . Construeer nu met stelling 6.12 een gehele functie $g(z)$ met nulpunten a_1, a_2, a_3, \dots van multipliciteit resp. k_1, k_2, k_3, \dots . Voor het product $g(z)f(z)$ zijn alle polen a_n spherische singulariteiten geworden, i.e. $g(z)f(z) =: p(z)$ is een gehele functie. Voor $f(z)$ vinden we aldus de voorstelling: $f(z) = p(z)/g(z)$. \square

Indien de meromorfe functie $f(z)$ eindig veel polen heeft, is te schrijven $f(z) = p(z)/q(z)$ met $p(z)$ een gehele functie en $q(z)$ een polynoom.

Indien $f(z) = p(z)/q(z)$ met $p(z)$ en $q(z)$ beide polynomen, dan heet $f(z)$ een rationale functie, en wel geheel rationaal als $q(z) = \text{constant}$, gebroken rationaal als $q(z)$ niet constant is.

Stelling 6.15. Een meromorfe functie $f(z)$ is rationaal dan en slechts dan als

- 1° $f(z)$ eindig veel polen heeft;
- 2° $f(z) = O(z^{-m})$ als $z \rightarrow \infty$, voor zekere $m \in \mathbb{R}$.

Bewijs. (i) Zij $f(z)$ rationaal, dan is $f(z) = p(z)/q(z)$ met $p(z)$ en $q(z)$ polynomen van de graad k en l , resp. De noemer $q(z)$ heeft l nulpunten, dus $f(z)$ heeft l polen. Voorts geldt $f(z) = O(z^{k-l})$ als $z \rightarrow \infty$.

(ii) Heet $f(z)$ eindig veel polen a_1, a_2, \dots, a_n hebben van orde resp. m_1, m_2, \dots, m_n . Voor dan is $q(z) = \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{m_k}$, d.i. een polynoom met graad $\sum_{k=1}^n m_k = l$. Vorm nu $p(z) = q(z)f(z)$, dan is $p(z)$ geheel en $p(z) = O(z^{m+l})$ als $z \rightarrow \infty$. Volgens stelling 6.10 is $p(z)$ dan een polynoom met graad $\leq m+l$. Dus $f(z) = p(z)/q(z)$ is een rationale functie. \square

College 2 A826 Voortgezette Functietheorie 2, wintersemester 1985/86.

Stof van het college is uit het dictaat 2.297, editie voorjaar 1982, en daarvan de volgende hoofdstukken en paragrafen (tussen haakjes is aangegeven de betreffende bladzijden uit deze college-aantekeningen):

- Hfdst. 2, §2.1, stellingen 2.1, 2.2, 2.3, formule van Birkhoff-Lagrange (p.19 t/m 22);
 §2.2, maximum-modulus principe, lemma van Schwarz (p.23, 24);
 §2.3, bewijs van stellingen 2.5, 2.6 (p.25);
 §2.4, lemma 2.11, afbeeldingsstelling van Riemann (I), (II), stelling 2.12 (p.29 t/m 32);
 §2.5, spiegelingprincipe van Schwarz (I), (II) (p.34-36).
- Hfdst. 3, §3.2, stellingen 3.3, 3.4, afbeeldingsstelling van Riemann (III) (p.41, 43-44).
- Hfdst. 4, §4.1, formule van Schwarz-Christoffel (p.54-57);
 §4.2, bewijs van formule van Schwarz-Christoffel, copie van aantk. p.57 t/m 60 uitgedeeeld;
 §4.3, voorbeelden van Schwarz-Christoffel afbeeldingen (p.61 t/m 71).
- Hfdst. 5, §5.1, Potentiaalproblemen - gedultelyk (p.72-76);
 §5.2, voorbeelden 3 en 5 (p.77 t/m 80, 81 t/m 82).
- Hfdst. 6, §6.1, meromorfe functies, stelling van Mittag-Leffler, partiëlebreukontwikkeling (p.85 t/m 93);
 §6.2, meevoudige producten (p.94-100);
 §6.3, gehele functies (p.100 t/m 103).

5-12-85, §§ 2.1, 2.2 (p.19 t/m 22, 23, 24)

12-12-85, §§ 2.3, 2.4 tot st. 2.12 (p.25, 29-31)

19-12-85, §§ 2.5 tot 2.11, §§ 3.1, 3.2, 3.4 (p.32, 34-36, 41, 43-44, 54) tot voorname p.55

9-1-86, §4.1; §4.2 (copie p.57 t/m 60 uitgedeeeld), §4.3, voorbeelden 1 en 2 (p.55-57, 61, 62) tot streek voorname p.62

16-1-86, §4.3, voorbeelden 2, 3, 4 (p.62-66) tot een voorbeeld 5

23-1-86, §4.3, voorbeeld 5 (p.66-70)

6-2-86 §5.1 (kopi), §5.2, voorbeeld 5, §6.1 tot aan afsluiting voorbeeld I (p.72-76, 81-82, 85 t/m 87)

12-2-86 §6.1 van afsluiting voorbeeld I, §§ 6.1, voorbeeld 2, §§ 6.2, 6.3, §6.2 tot afsluiting (p.89-93, 94-96)

2-2-86

Vraagstukken Voortgezette Functieleer 2

1.1. Zij $w = f(z) = z/(1+z)$.

Bepaal de Taylorreeks rond $w=0$ van de inverse functie $z = g(w)$ van $w = f(z)$; bepaal ook de convergentiestraal van de Taylorreeks. Sommeer deze reeks en vergelijk de uitkomst met de rechte reeks bepaalden inverse functie.

1.2. Zelfde als 1.1 voor $w = f(z) = z/(a+z)$, met $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

1.3. Zij $w = f(z) = ze^{-az}$, met $a \in \mathbb{C}$.

Bepaal de Taylorreeks rond $w=0$ van de inverse functie $z = g(w)$ van $w = f(z)$; bepaal ook de convergentiestraal van de Taylorreeks.

1.4. Zij de functie $f(z)$ analytisch en niet constant in een begreemd gebied G , en zij $f(z)$ continu op \bar{G} .

Formuleer en bewijs een principe voor het minimum van $|f(z)|$, analoog aan het maximum-modulus principe.

1.5. Zij de functie $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$, zij $|f(z)| \leq 1$ voor $|z| < 1$, en zij $f(a) = 0$ voor zekere $a \in \mathbb{C}$, met $|a| < 1$.

Toon aan dat

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \text{ voor } |z| < 1.$$

1.6. Zij de functie $f(z)$ analytisch voor $\operatorname{Im} z > 0$, zij $|f(z)| \leq 1$ voor $\operatorname{Im} z > 0$, en zij $f(a) = 0$ voor zekere $a \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Im} a > 0$.

Toon aan dat

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| \text{ voor } \operatorname{Im} z > 0.$$

1.7. Zij de functie $f(z)$ analytisch voor $|z| < 1$, en zij $|f(z)| < 1$ voor $|z| < 1$.

Toon aan dat

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{z} \right| \leq |1 - \overline{f(0)} f(z)| \text{ voor } |z| < 1.$$

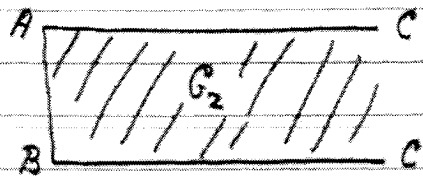
Toon voortz aan dat

$$\text{of } |f'(0)| < 1 \text{ of } f(z) = ze^{i\alpha} \text{ met } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vraagstukken Voortgezette Functietheorie 2

2.1. Zij G_2 de half-moedige strook beschreven door $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$; zie nevenstaande figuur.

De punten A, B, C op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = \pi i$, $z = 0$, $z = \infty$.

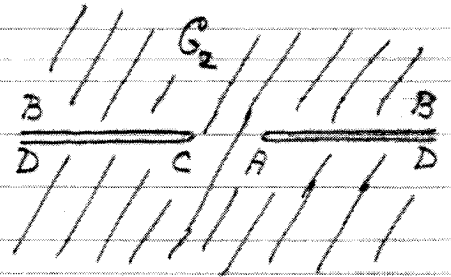


Bepaal de conforme afbeelding $z = q(w)$ van het halfvlak $G_1: \operatorname{Im} w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$.

Bepaal ook de inverse $w = f(z)$ van de afbeelding $z = q(w)$, en controleer de nitkhoudt.

2.2. Het gebied G_2 is het gehele complexe z -vlak met uitzondering van de reeds $(-\infty, -1]$ en $[1, \infty)$ langs de reële as; zie nevenstaande figuur.

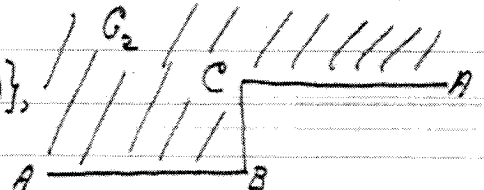
De punten A, B, C, D op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = 1$, $z = \infty$, $z = -1$, $z = \infty$.



Bepaal de conforme afbeelding $z = q(w)$ van het halfvlak $G_1: \operatorname{Im} w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w = 1$, $w = \infty$, $w = -1$. (Het punt D zal corresponderen met $w = p$, $-1 < p < 1$, waarbij p nog te bepalen is).

Klopt de nitkhoudt?

2.3. Zij $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0) \vee (\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > \pi)\}$, zie nevenstaande figuur. De punten A, B, C op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = \infty$, $z = 0$, $z = \pi i$.



Bepaal de conforme afbeelding $z = q(w)$ van $G_1: \operatorname{Im} w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w = \infty$, $w = -1$, $w = 1$.

Werk de afbeeldingsfunctie $q(w)$ nader uit op de reële as van het w -vlak.

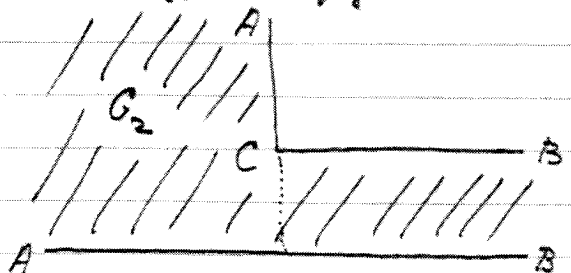
2.4. Zij $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0) \vee (\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi)\}$, zie de figuur.

De punten A, B, C op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = \infty$, $z = \infty$, $z = \pi i$.

Bepaal de conforme afbeelding $z = q(w)$ van $G_1: \operatorname{Im} w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp.

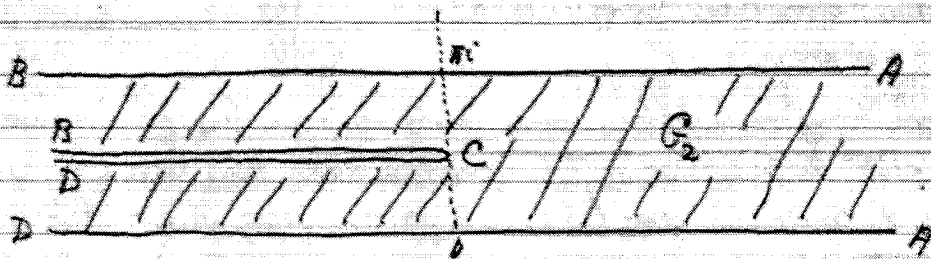
$w = 0$, $w = \infty$, $w = -1$.

Werk de afbeeldingsfunctie $q(w)$ nader uit voor w reëel, $-1 < w < 0$.



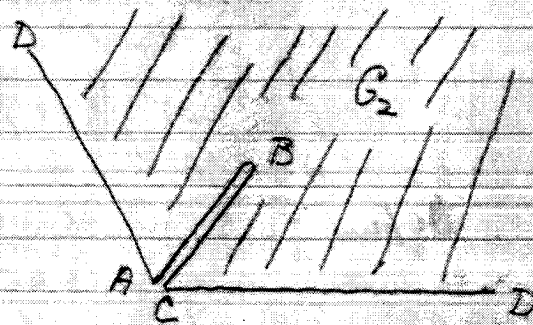
Vraagstukken Voortgezette Functietheorie 2

- 3.1. Zij G_2 de strook $0 < \text{Im } z < \pi$ in het complexe z -vlak, vermindert met de strek $\text{Re } z \leq 0, \text{Im } z = \pi/2$; zie onderstaande figuur. De punten A, B, C, D op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z=0, z=i, z=\pi/2, z=\pi$.



- a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, D corresponderen met resp. $w = i, w = -1, w = 0$.
- b) Bepaal voorts de inverse van deze conforme afbeelding, en controleer de nitkampt.

- 3.2. Laat G_2 het gebied in het complexe z -vlak zijn gevormd door de sector $0 < \arg z < 2\pi/3$, met uitzondering van de strek $z = re^{i\pi/3}, 0 \leq r \leq 1$; zie figuur. De punten A, B, C, D op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z=0, z=e^{i\pi/3}, z=1, z=e^{i2\pi/3}$.



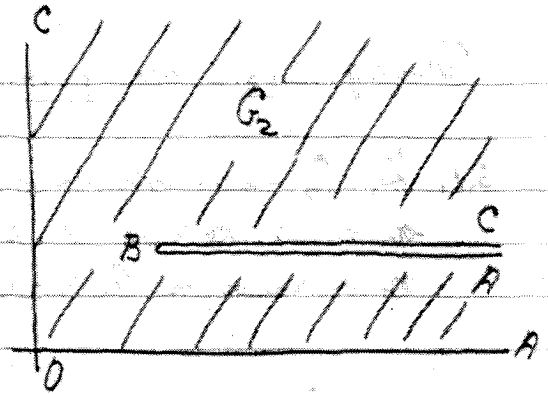
- Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van $G_w: \text{Im } w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, C, D corresponderen met resp. $w = -1, w = 1, w = i$. Bepaal ook de inverse van deze conforme afbeelding, en controleer de nitkampt.

- 3.3. De conforme afbeelding $z = g(w)$ beeldt het halfvlak $\text{Im } w > 0$ af op het gebied G_2 in het complexe z -vlak. Van de functie $g(w)$ is gegeven

$$g(0) = 0, \quad g'(w) = \frac{2(w-1)}{w^{1/2}(w-1)^{1/2}} \quad \text{voor } \text{Im } w > 0.$$

- Bepaal het gebied G_2 in de twee gevallen: a) $\lambda < 0$; b) $\frac{1}{2} < \lambda < 1$.

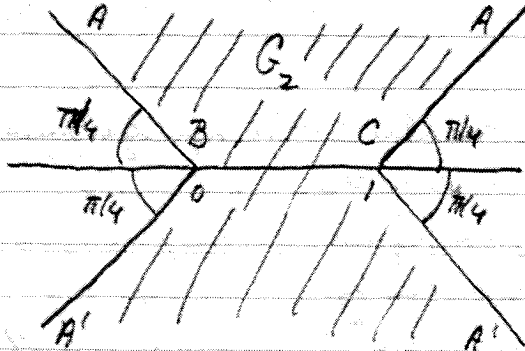
- 3.4. Zij G_2 het eerste kwadrant van het z -vlak, vermindert met de rechte $\operatorname{Re} z \geq a$, $\operatorname{Im} z = b\pi$, waarbij $a > 0$, $b > 0$; zie naaststaande figuur.



De punten O, A, B, C op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z=0$, $z=a$, $z=a+ib\pi$, $z=0$.

- Bepaal de conforme afbeelding $z=g(w)$ van $G_w: \operatorname{Im} w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten O, A, C corresponderen met resp. $w=0, w=1, w=a$.
- Kies a en b zodanig dat het punt B correspondeert met $w=4$, en werk de afbeeldingsfunctie $g(w)$ verder uit op de rechte a van het w -vlak.

- 3.5. Zij $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < 3\pi/4, |\arg(1-z)| < 3\pi/4\}$; zie figuur. De punten A, A', B, C op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z=a$, $z=0$, $z=0$, $z=1$.



Zij G_w het gehele complexe w -vlak met uitsluiting van de tussens $(-a, 0]$ en $[1, \infty)$ langs de reële ax .

- Bepaal de conforme afbeelding $z=g(w)$ van G_w op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w=a, w=0, w=1$.
Aanwijzing: Build het halfvlak $\operatorname{Im} w > 0$ af op de "bovenste helft" van G_2 en gebruik het spiegelingprincipe van Schwarz.
- Zij $z=x+iy$. De potentiaal $\varphi(x,y)$ van een electrostatisch veld voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking en randvoorwaarden:

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \text{ in } G_2; \varphi(x,y) \text{ is begrensd in } G_2;$$

$$\varphi = -1 \text{ op } ABA'; \varphi = 1 \text{ op } ACA'$$

Stel $\varphi(x,y) = \operatorname{Re} \Omega(z)$ en bepaal de complexe potentiaal $\Omega(z)$.

- De veldsterkte $\underline{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ hangt eenvoudig samen met de afgeleide $d\Omega/dz$ (hoe precies?). Ton aan dat in een omgeving van $z=0$ geldt

$$\frac{d\Omega}{dz} = k z^{-1/3} + O(z), |z \rightarrow 0|, \text{ en bepaal de constante } k.$$

Vraagstukken Voortgezette Functietheorie 2

4.1. De conforme afbeelding $z = g(w)$ beeldt het halfvlak $\text{Im } w > 0$ af op het gebied G_2 in het complexe z -vlak. Van de functie $g(w)$ is gegeven

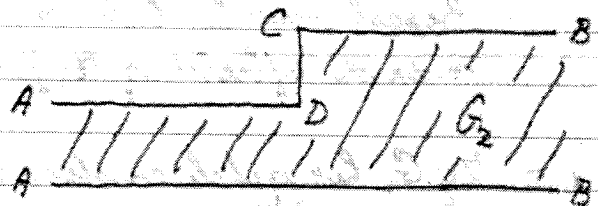
$$g(i) = -i, \quad g'(w) = -\frac{2i}{\pi} \frac{(w^2 - 1)^{1/2}}{w} \quad \text{voor } \text{Im } w > 0.$$

a) Bepaal het gebied G_2 .

b) Werk de afbeeldingsfunctie $g(w)$ nader uit op de reële w -as van het w -vlak. positieve

4.2. Zij $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid (\text{Re } z > 0, 0 < \text{Im } z < 2\pi) \vee (\text{Re } z \leq 0, 0 < \text{Im } z < \pi)\}$;

zie figuur. De punten A, B, C, D op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = \infty, z = \infty, z = 2\pi i, z = \pi i$.



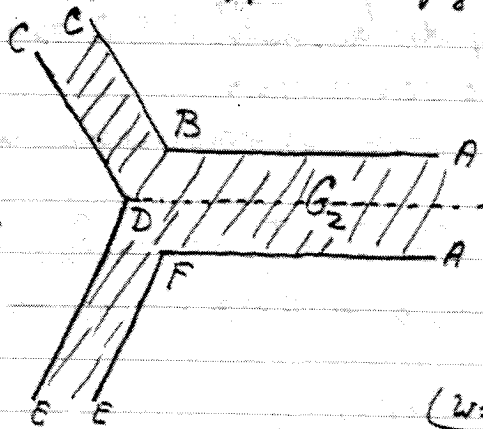
a) Bepaal een conforme afbeelding $z = g(w)$ van $G_1: \text{Im } w > 0$ op G_2 .

N.B. Bij deze conforme afbeelding mag van drie van de vier randpunten A, B, C, D het origineel in het w -vlak worden voorgeschreven. Pas hierop toe dat de te berekenen Schwarz-Christoffel-integraal een eenvoudig wordt.

b) Werk de gevonden afbeeldingsfunctie $g(w)$ nader uit op het gedeelte van de reële w -as van het w -vlak, dat correspondeert met de reële z -as van het z -vlak. Bepaal het punt van het w -vlak dat afgebeeld wordt op $z = 0$.

4.3. Zij G_2 het gebied in het complexe z -vlak begrensd door de zes halfcirkels $\gamma_1 = e^{z\pi/3} + p, \gamma_2 = e^{z\pi/3} + p e^{z2\pi/3}, \gamma_3 = p e^{z2\pi/3}, \gamma_4 = p e^{z\pi/3}, \gamma_5 = p e^{-z\pi/3}, \gamma_6 = e^{-z\pi/3} + p, p > 0$, zie figuur.

De punten A, B, C, D, E, F op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = \infty, z = e^{\pi/3}, z = \infty, z = 0, z = 0, z = e^{-\pi/3}$.



Zij G_1 het gehele complexe w -vlak verminderd met de reeds $(-\infty, 0]$ en $[1, \infty)$ langs de reële w -as.

a) Bepaal de conforme afbeelding $z = g(w)$ van G_1 op G_2 , zodanig dat de punten A, B, D corresponderen met resp.

$$(w=1, w=\infty, w=0).$$

b) Laat $w = f(z)$ de inverse afbeelding zijn van de afbeelding $z = g(w)$.

Toon aan dat in een omgeving van $z = 0$ geldt

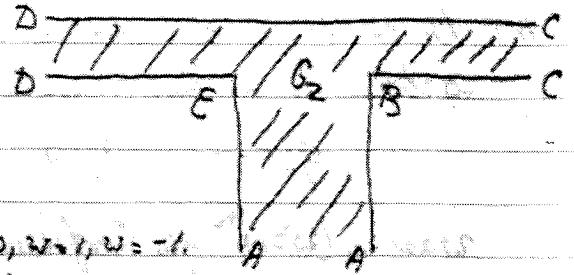
$$w = f(z) = k z^{3/2} + O(z^{9/2}), \quad (z \rightarrow 0)$$

en bepaal de constante k .

4.4. Zij $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid (0 < \operatorname{Im} z < 1) \vee (-1 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z \leq 0)\}$; zie figuur.

De punten A, B, C, D, E op de rand van

G_2 worden gegeven door resp. $z = \infty, z = 1, z = \infty,$
 $z = \infty, z = -1$.



a) Bepaal de conforme afbeelding $z = q(w)$

van $G_w: \operatorname{Im} w > 0$ op G_2 , zodanig dat de

punten A, C, D corresponderen met resp. $w = 0, w = 1, w = -1$.

N.B. Er kan worden volstaan met de bepaling van $q'(w)$;

de integraal voor $q(w)$ hoeft niet te worden uitgewerkt.

b) Toon aan dat $q(\infty) = i$, d.w.z. het punt $w = \infty$ wordt afgebeeld op $z = i$.

Bepaal voorts het beeld van de positieve imaginairre as van het w -vlak, naar de afbeelding $z = q(w)$.

4.5. Zij G_2 het geheel complexe z -vlak met uitzondering van de twee

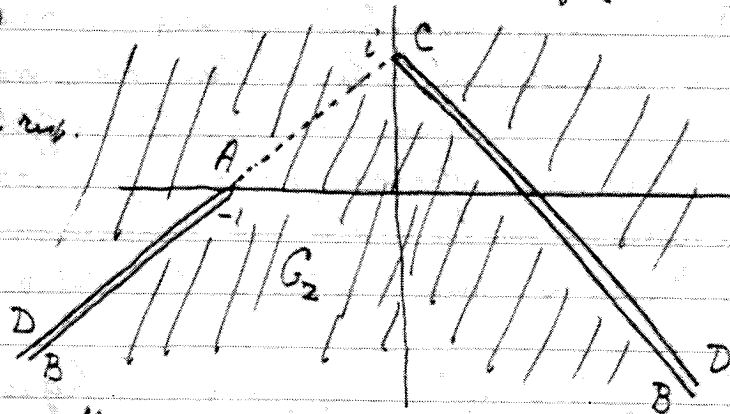
$z = -1 + \rho e^{-3\pi i/4}, \rho \geq 0$, en $z = i + \rho e^{-\pi i/4}, \rho \geq 0$; zie figuur.

De punten A, B, C, D

op de rand van G_2

worden gegeven door resp.

$z = -1, z = \infty, z = i, z = \infty$.



a) Bepaal de conforme afbeelding $z = q(w)$ van $G_w: \operatorname{Im} w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, D op de rand van G_2 corresponderen met resp. $w = 0, w = 1/4, w = \infty$.

b) Zij $z = x + iy$. De stationaire temperatuurverdeling $T(x, y)$ voldoet aan

$$\Delta T = T_{xx} + T_{yy} = 0 \text{ in } G_2; T \text{ is begrensd in } G_2;$$

$$T = 0 \text{ op } BCD; T = 1 \text{ op } DAB.$$

Bepaal $T(x, y)$.

c) Bepaal voorts $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r \cos \theta, r \sin \theta)$ voor $-3\pi/4 \leq \theta \leq -\pi/4$.

Vraagstukken Voortgezette Functietheorie 2

5.1. Bewijs stelling 6.2 uit de syllabus.

5.2. Bewijs stelling 6.3 uit de syllabus.

5.3. Bepaal de partieelbreuksplitsing van de functies

a) $f(z) = \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)}$, b) $f(z) = \frac{\tan(\pi z)}{z}$.

5.4. Bepaal de partieelbreuksplitsing van de functie

$$f(z) = \frac{1}{\cos(\pi z) - \cos(\pi \alpha)}, \text{ waarin } 0 < \alpha < 1 \text{ is.}$$

5.5. Zij $f(z)$ een meromorfe functie met een eindig aantal polen a_1, a_2, \dots, a_n , niet samenvallend met $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Laat C_n het vierkant zijn met hoekpunten $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm (n+\frac{1}{2})i$, $n \in \mathbb{N}$, en zij

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} f(z) \cot(\pi z) dz = 0.$$

Toon aan dat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} [f(z) \cot(\pi z)].$$

Bereken met gebruikmaking van bovenstaand resultaat, de som van de reeksen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} \quad (a \notin \mathbb{Z}), \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Vraagstukken Voortgezette Functietheorie 2

6.1. Bewijs dat het oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1 + \frac{1}{n}}$ convergent is, en bereken dit product.

6.2. Bereken het oneindig product $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

6.3. Het oneindig product $p(z)$ is gedefinieerd door

$$p(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{z^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right].$$

Toon aan dat $p(z)$ een gehele functie is, en bereken $p(z)$.

6.4. Laet zien dat

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = (1 - z)^{-1} \text{ voor } |z| < 1.$$

6.5. Het oneindig product $p(z)$ is gedefinieerd door

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} z\right].$$

a) Voor welke waarden van z convergeert het product?

b) Bewijs dat $p(z)$ een gehele functie is.

c) Wat zijn de nulpunten van $p(z)$?

d) Druk $p(z)$ uit in termen van de P -functie.

6.6. Het oneindig product $p(z)$ is gedefinieerd door

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{z}{2n-1}\right) \left(1 + \frac{z}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)}.$$

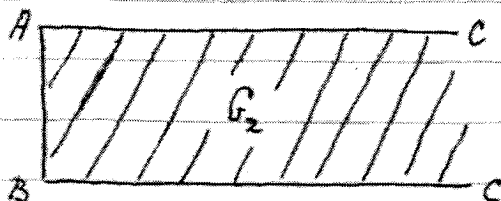
Voor welke waarden van z convergeert het product?

Bereken $p(z)$.

146.

Vraagstukken Voortgezette Functietheorie 1

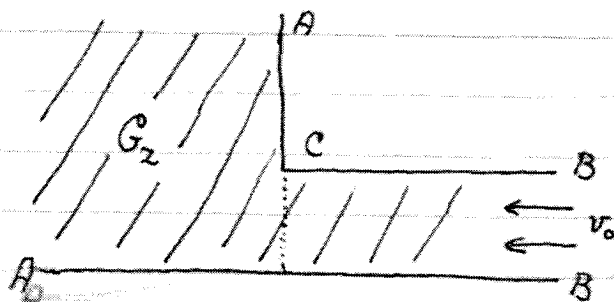
10.1. Zij G_2 de half-meindige strook beschreven door $\text{Re } z > 0, 0 < \text{Im } z < \pi$; zie nevenstaande figuur. De punten A, B, C op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = \pi i, z = 0, z = \infty$.



Bepaal met behulp van de formule van Schwarz-Christoffel de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak G_2 ; $\text{Im } w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w = 0, w = 1, w = \infty$.

Bepaal ook de inverse $w = f(z)$ van de afbeelding $z = g(w)$, en controleer de uitkomst.

10.2. a) Zij $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid (\text{Re } z < 0, \text{Im } z > 0) \vee (\text{Re } z > 0, 0 < \text{Im } z < \pi)\}$; zie de figuur. De punten A, B, C op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = \infty, z = \infty, z = \pi i$.



Bepaal met behulp van de formule van Schwarz-Christoffel de conforme afbeelding $z = g(w)$

van G_2 ; $\text{Im } w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w = 0, w = \infty, w = -1$.

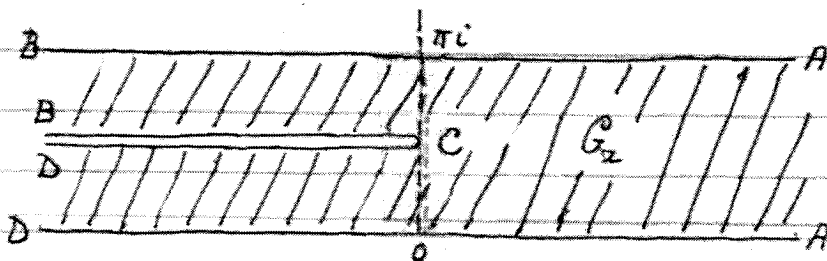
Geef een ontwikkeling van de afbeeldingsfunctie $z = g(w)$ in de omgeving van het punt $C, w = -1, z = \pi i$.

b) In G_2 heerst een potentiaalstroming met snelheid $\underline{v} = -\text{grad } \varphi$, waarbij $\varphi(x, y)$ de snelheidspotential is. Zij $z = x + iy$. Ver naar rechts, voor $x \rightarrow \infty, 0 \leq y \leq \pi$, heerst een ongestoorde uniforme stroming met snelheid $\underline{v} = (-v_0, 0)$ in de negatieve x -richting. De bijbehorende stroomfunctie $\psi(x, y)$ is dan oplossing van het volgende probleem: $\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$ in G_2 ; $\psi = 0$ op $AB, \psi = v_0 \cdot y$ op BCA . Bepaal $\psi(x, y)$ in impliciete vorm, en geef een parameter voorstelling voor de stroomlijnen $\psi = \text{constant}$.

Onderzoek de snelheid \underline{v} in de omgeving van het punt C .

10.3. Zij G_2 de strook $0 < \text{Im } z < \pi$ in het complexe z -vlak, verminderd met de snede $\text{Re } z \leq 0, \text{Im } z = \pi/2$; zie onderstaande figuur.

De punten A, B, C, D op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = \infty, z = \infty, z = \pi/2, z = \infty$.



- a) Bepaal door samenstelling van elementaire afbeeldingen, de conforme afbeelding $w = f(z)$ van G_2 op $G_w: \text{Im } w > 0$, zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w = \infty, w = -1, w = 0$.

Aanwijzing: Pas eerst toe de afbeelding $t = e^z$.

- b) Bepaal met behulp van de formule van Schwarz-Christoffel de conforme afbeelding $z = g(w)$ van het halfvlak $G_w: \text{Im } w > 0$ op G_2 , zodanig dat de punten A, B, C corresponderen met resp. $w = \infty, w = -1, w = 0$. (Het punt D zal corresponderen met $w = k, k > 0$, waarbij k nog te bepalen is.)

Verifieer dat de gevonden afbeelding $z = g(w)$ de inverse is van de afbeelding $w = f(z)$ bepaald onder a).

- c) Zij $z = x + iy$. De functie $\Phi(x, y)$ is oplossing van het volgende potentiaalprobleem:

$$\Delta \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \text{ in } G_2; \Phi(x, 0) = \Phi(x, \pi) = 0, \Phi(x, \pi/2) = 1 \text{ voor } x \leq 0.$$

Bepaal $\Phi(x, \pi/2)$ voor $x > 0$.

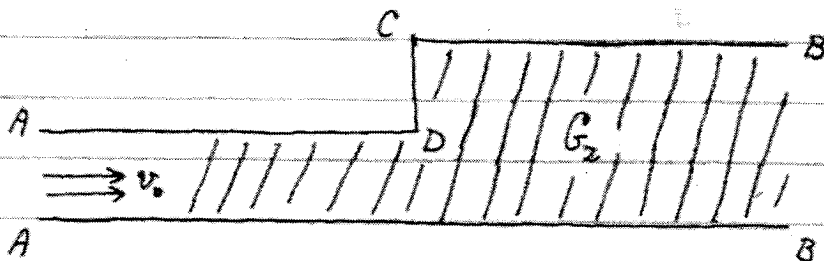
Zie R.V. Churchill, Introduction to complex variables and applications, McGraw-Hill, New York, 1948, p. 186-187.

10.4. De conforme afbeelding $z = g(w)$ beeldt het halfvlak $\text{Im } w > 0$ af op het gebied G_2 in het complexe z -vlak. Van de functie $g(w)$ is gegeven

$$g(0) = 0, g'(w) = \frac{i(w+1)}{w^{1/2}(w-1)^{1/2}} \text{ voor } \text{Im } w > 0.$$

Bepaal het gebied G_2 .

10.5. Zij $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi) \vee (\operatorname{Re} z \leq 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi)\}$;
 zie onderstaande figuur.



De punten A, B, C, D op de rand van G_2 worden gegeven door resp. $z = -a$, $z = a$, $z = 2\pi i$, $z = \pi i$.

- Bepaal met behulp van de formule van Schwarz-Christoffel een conforme afbeelding $z = g(w)$ van $G_w : \operatorname{Im} w > 0$ op G_2 . Bij deze conforme afbeelding mag van drie van de vier randpunten A, B, C, D het origineel in het w -vlak worden voorgeschreven. Probeer dit zo te doen dat de te berekenen Schwarz-Christoffel-integraal eenvoudig wordt.
- Werk de gevonden afbeeldingsfunctie $g(w)$ nader uit op het gedeelte van de reële as van het w -vlak, dat correspondeert met de reële as van het z -vlak. Bepaal het punt van het w -vlak dat afgebeeld wordt op $z = 0$.
- Zij $z = x + iy$. Laat in G_2 een potentiaalstroming heersen met snelheid $v = -\operatorname{grad} \varphi$, waarbij $\varphi(x, y)$ de snelheidspotentiaal is. Ver naar links, voor $x \rightarrow -a$, $0 \leq y \leq \pi$, heerst een ingestuurde uniforme stroming met snelheid $\underline{v} = (v_0, 0)$ in de positieve x -richting. Bepaal de oplossing van dit stromingsprobleem dat model staat voor de stroming in een zich verwijdend kanaal.
 Zie R.V. Churchill, Introduction to complex variables and applications, McGraw-Hill, New York, 1948, pp. 181-182.