

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# **TOEGEPASTE ANALYSE II**

manuscript van

**Prof. Dr. J. Boersma**

1967 - 1984

# Inhoudsbeschrijving

## TOEGEPASTE ANALYSE II

J. Boersma

1967-1984

Ten behoeve van onderstaande inhoudsbeschrijving zijn de bladzijden van het manuscript (boven midden) hernummerd met de natuurlijke getallen 1. - 207. De oorspronkelijke nummering is ook zichtbaar gebleven: De paginanummers die daarbij optreden zijn van type 37, 38a, 38b, 38c, 38c<sup>A</sup>, 68<sup>A</sup>. De kleine letters a, b, c, ... duiden op tussenvoegingen van Prof. Boersma zelf. Het superscript A duidt op een met potlood beschreven achterkant van, bijvoorbeeld, de bladzijden 38c of 68.

Sectie	titel	blz
	LITERATUURLIJST	0.
II	INTEGRAALTRANSFORMATIES	3.
2.1	Fourierreeks en Fourierintegraal, recapitulatie Wiskunde 30	3.
2.2	Stellingen over verwisseling van Integratievolgorde	6.
2.3	Integraalstelling van Fourier	7.
2.4	Rekenregels voor Fouriertransformatie. Bijzondere gevallen	13.
2.5	Convolutie. Gelijkheid van Parseval	16.
2.6	Sommatieformule van Poisson	20.
2.7	Complexe Fourierintegralen	30.
2.8	Toepassingen Fouriertransformatie op PDV in 2 dimensies	38.
	Beginwaardeprobleem Diffusievergelijking	38.
	Begin-Randwaardeprobleem half-oneindige snaar	40.
	Potentialprobleem op strip	42.
	Golfvoortplantingsprobleem. Lijnbron	48.
	Potentialprobleem in bovenhalfvlak	51.
	Puntbron tussen twee geaarde platen (2dim)	53.
	Randwaardeprobleem voor potentialprobleem binnen een strip	58.
	Golfprobleem met bewegende bron	59.
2.9	Toepassingen Fouriertransformatie op Integraalvergelijkingen	46. en 61.
2.10	Toepassingen Wiener-Hopftechniek op Integraalvergelijkingen	63.
	Sommerfeld's diffractieprobleem voor een halfvlak	70.
	Diffusieprobleem voor een stromende vloeistof	80.

Sectie	titel	blz
2.11	Laplacetransformatie	89.
	Toepassingen van Laplacetransformatie	91.
	Inhomogeen randwaardeprobleem diffusievergelijking	91.
	Inhomogeen randwaardeprobleem golfvergelijking	94. en 98.
	Causale fundamentele oplossing golfvergelijking	101.
	Probleem van Beenker	102.
	Integraalvergelijkingen (waaronder Abel)	105.
I	SINGULIERE INTEGRAALVERGELIJKINGEN	109.
1.1	Cauchyintegraal	109.
1.2	Formules van Plemelj	112.
	Addendum formules van Plemelj	117.
1.3	Gedrag van $\Phi(z)$ in de buurt van de eindpunten van $L$	118.
1.4	Voorbeelden van Cauchy-integralen	124.
1.5	Hilbertprobleem voor contour	127.
	Oplossing Hilbertprobleem voor contouren	129.
1.6	Hilbertprobleem voor een boog	132.
1.7	Toepassingen van Cauchy-integraal en Hilbertprobleem	141.
	Dirichletprobleem voor een halfvlak	141.
	Dirichletprobleem voor het binnengebied van een cirkel	145.
	Stroming om een profiel	149.
1.8	I Singuliere integraalvergelijkingen met Cauchy-kern	155.
	II Een algemenere singuliere integraalvergelijking	166.
1.9	Theorie van de wrijving bij een rollende beweging	168.
1.10	Contactprobleem uit de elasticiteitstheorie	174.
1.11	Potentiaalprobleem voor twee strips	160.
1.12	Integraalvergelijking met logaritmische kern I	189.
1.13	Integraalvergelijking met logaritmische kern II	197.
1.14	Integraalvergelijking van Lewin	200.

JdG, 21 November 2005

Literatuura. Singuliere integraalvergelijkingen

- N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations  
Noordhoff, Groningen, 1953 (CNS53MUS)
- N.I. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory  
of elasticity  
Noordhoff, Groningen, 1954 (FDG54MUS)
- F.D. Gakhov, Boundary value problems  
Pergamon Press, Oxford, 1966 (CNL66GAK)  
(veel vraagstukken)

b. Integraaltransformaties en Wiener-Hopf techniek

- I.N. Sneddon, The use of integral transforms  
McGraw-Hill, New York, 1972 (CQN72SNE)
- W. Kaplan, Operational methods for linear systems  
Addison-Wesley, Reading, 1962 (CQR62KAP)
- R.V. Churchill, Operational mathematics  
McGraw-Hill, New York, 1958 (CQR58CHU)
- H.S. Carslaw and J.C. Jaeger, Operational methods in applied mathematics  
Oxford Univ. Press, London, 1953 (CQR52CAR)
- G. Doetsch, Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-  
Transformation  
Birkhäuser Verlag, Basel, 1970 (CQQ70DOE)
- R.T. Seeley, An introduction to Fourier series and integrals  
Benjamin, New York, 1966 (CQF66SEE)
- B.W. Roos, Analytic functions and distributions in engineering  
Wiley, New York, 1969 (CMB69ROO)
- B. Noble, Methods based on the Wiener-Hopf technique for the  
solution of partial differential equations  
Pergamon Press, London, 1958 (CNH58NOB)
- G.F. Carrier, M. Krook and C.E. Pearson, Functions of a complex variable  
McGraw-Hill, New York, 1966 (CMA66CAR)

c. Vraagstukken

- N.N. Lebedev, Problems of mathematical physics  
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965 (CNL65LEB)
- I.P. Skalskaya and Y.S. Uflyand, Theory and problems of Laplace transforms  
Schaum Publ. Co., New York, 1965 (CQQ65SPI)



College "Toxicologic Analysis II"

J. Boerome

Singuliere Integralgl. & Collegen  
Integraltransformationen

B. W. Ross, Analytic function and distribution in engineering,  
John Wiley, New York, 1969

- Index:
1. Analytic functions (Laplace function theory)
  2. Fourier transform (word complex)
  3. Wiener-Kopf technique
  4. Boundary value problems for sectionally analytic functions  
(Hilbert problems, singular integral)
  5. Distributions
  6. Applications in neutron transport theory
  7. Applications in plasma physics

Wird durch Streng, viel über Prozesssch.

3.

Hoofdstuk II. Integraaltransformaties

I. Fourier-transformatie

3-3-67/3-3-69/21-3-73/3-11-77/1-11-79/27-3-1987

2.1. Fourierreeks en Fourierintegraal, recapitulatie Wsk 30.

Zij de functie  $f(x)$  gedefinieerd op  $[-\pi, \pi]$  en laat  $f(x)$  integreerbaar zijn over  $[-\pi, \pi]$ . Dan is  $f(x)$  te ontwikkelen in de volgende Fourierreeks met periode  $2\pi$ ,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

waarin de Fouriercoëfficiënten  $a_n, b_n$  worden gegeven door

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

In de theorie der Fourierreksen zijn centrale vragen:

- (i) Onder welke voorwaarden is de Fourierreeks van  $f(x)$  convergent?
- (ii) Indien de Fourierreeks van  $f(x)$  convergent is voor zekere  $x$ , is dan de som gelijk aan  $f(x)$ ?

Ten aanzien van deze vragen is in het college Wiskunde 30 de 29. hoofdstelling der Fourierreksen bewezen die we hier iets gewijzigd herhalen.

Definitie. Een functie  $f(x)$  heet stuksgewijs glad op een interval  $[a, b]$  indien

- (i)  $f(x)$  continu differentieerbaar is op  $[a, b]$ , eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) waarbij  $f(c_i \pm) := \lim_{h \rightarrow 0} f(c_i \pm h), f'(c_i \pm) := \lim_{h \rightarrow 0} f'(c_i \pm h)$  bestaan;
- (ii)  $f(a+), f(b-), f'(a+)$  en  $f'(b-)$  bestaan.

Opmerking. Een functie die stuksgewijs glad is op  $[a, b]$ , voldoet overal op  $[a, b]$  aan de Dirichlet-conditions als ingevoerd in Wiskunde 30.

Hoofdstelling der Fourierreksen. Zij  $f(x)$  stuksgewijs glad op  $[-\pi, \pi]$ . Dan is de Fourierreeks van  $f(x)$  convergent voor elke  $x \in [-\pi, \pi]$  met som

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)].$$

Voor  $x = \pm\pi$  is de som gelijk van de reeks gelijk aan  $\frac{1}{2} [f(-\pi+) + f(\pi-)]$ .

Indien  $f(x)$  tevens continu is in  $x$ , dan is  $f(x+) = f(x-) = f(x)$  en de som van de Fourierreeks is gelijk aan  $f(x)$ .

Bij het bewijs van de hoofdstelling speelt de volgende hulpstelling een rol:

Hulpstelling. Zij de functie  $f(x)$  integreerbaar over  $[a, b]$  met  $-\pi \leq a \leq b \leq \pi$ , dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\cos nx}{\sin nx} \, dx = 0.$$

Indien  $f(x)$  gedefinieerd is op  $[-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p]$  en integreerbaar is over dit interval, kan men  $f(x)$  ontwikkelen in een Fourierreeks met periode  $p$ .

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{p})$$

met Fouriercoëfficiënten

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{p} dx, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{p} dx.$$

Vervang nu de cosinus- en sinusfuncties door complexe e-machten, dan kan men de Fourierreeks in complexe schrijfwijze:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left[ \frac{2in\pi x}{p} \right]$$

met coëfficiënten

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

of uitgewerkt

$$c_n = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \exp \left[ -\frac{2in\pi x}{p} \right] dx.$$

Ook voor deze Fourierreken geldt de hoofdstelling.

20-3-27 / 6-11-75

Stuksgewijs glad op  $(-c, c)$

Heuristische invoering Fourier integraal. Zij  $f(x)$  gedefinieerd op  $(-a, a)$ , zij  $f(x)$  stuksgewijs glad op elk eindig interval  $[a, b]$  en zij  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  convergeert.

Voor in de hulpfunctie  $f_c(x)$  gegeven door

$$f_c(x) = f(x) \text{ voor } |x| \leq c, \quad f_c(x) = 0 \text{ voor } |x| > c.$$

Beschouw  $f_c(x)$  op het interval  $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$  met  $\frac{p}{2} > c$ , en ontwikkel  $f_c(x)$  in een complexe Fourierreeks met periode  $p$ . Aangezien  $f_c(x)$  stuksgewijs glad is geldt volgens de hoofdstelling

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left[ \frac{2in\pi x}{p} \right] = \frac{1}{2} [f_c(x+) + f_c(x-)] \quad \left( = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] \right) \text{ voor } -c < x < c.$$

Hierbij worden de coëfficiënten  $c_n$  gegeven door

$$c_n = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \exp \left[ -\frac{2in\pi x}{p} \right] dx = \frac{1}{p} \int_{-c}^c f(x) \exp \left[ -\frac{2in\pi x}{p} \right] dx = \frac{1}{p} F \left( -\frac{2n\pi}{p} \right),$$

onder invoering van de notatie

$$F(y) = \int_{-c}^c f(x) \exp(iy x) dx.$$

Substitueer deze coëfficiënten in de Fourierreeks dan ontstaat er

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p} F \left( -\frac{2n\pi}{p} \right) \exp \left( \frac{2in\pi x}{p} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{p} \left[ \dots + F \left( -\frac{4\pi}{p} \right) \exp \left( +\frac{4i\pi x}{p} \right) + F \left( -\frac{2\pi}{p} \right) \exp \left( +\frac{2i\pi x}{p} \right) + F(0) + \right. \\ \left. + F \left( \frac{2\pi}{p} \right) \exp \left( -\frac{2i\pi x}{p} \right) + F \left( \frac{4\pi}{p} \right) \exp \left( -\frac{4i\pi x}{p} \right) + \dots \right], \quad -c < x < c.$$

De laatste som is op te vatten als een Riemann som behorend bij de functie  $F(y) e^{-ixy}$  en het interval  $-a < y < a$  verdeeld in deelintervallen met lengte  $2\pi/p$ . Laat nu  $p \rightarrow \infty$  gaan, dan volgt formeel

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a F(y) e^{-ixy} dy, \quad -c < x < c.$$

In de voorgaande afleiding is  $c$  willekeurig. Neem  $c \rightarrow a$  dan vinden we het paar

integralen

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{+iyx} dx,$$

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy \text{ voor elke } x,$$

en door combinatie

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iyt} dt \text{ voor elke } x.$$

Dit resultaat staat bekend als de integratiebetting van Fourier; een streng bewijs van de stelling wordt later gegeven. Merk op dat de integraal  $F(y)$  convergeert is omdat  $|f(x) e^{iyx}| = |f(x)|$  voor elke  $y$  en (volgens veronderstelling)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  convergeert is.

We definiëren nu de Fourier getransformeerde of Fourier transform van  $f(x)$  door

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{+iyx} dx.$$

Uit de integraalstelling van Fourier volgt dan de inversieformule (inverse transformatie)

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy.$$

Beide integralen zijn van hetzelfde type; ze worden Fourier integralen genoemd. Let op het teken van de exponent.

31.6-1977 | 4.11-1976 | 25.3-1981 | 23.2-1980 | 12.4-1983

Stellingen over verwisseling van integratievolgorde.

We geven de volgende stellingen over verwisseling van de integratievolgorde in herhaalde oneigenlijke integralen met integratiegrenzen  $\pm \infty$ .

Stelling I. Zij de functie  $f(x, y)$  continue voor  $-\infty < x < \infty$ ,  $c \leq y \leq d$  en zij de integraal  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx$  uniform convergeert voor  $c \leq y \leq d$ . Dan is

$$\int_c^d dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Bewijs: Uit de uniforme convergentie van  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx$  voor  $c \leq y \leq d$  volgt (zie Algebra en Analyse, b. 43):

Bij  $\varepsilon > 0$  bestaan getallen  $A, B$  zodat

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx - \int_a^b |f(x, y)| dx \right| < \varepsilon$$

voor  $a < A, b > B, c \leq y \leq d$ .  $A, B$  hangen niet van  $y$  af.

Worm nu het verschil

$$\left| \int_c^d dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \right| \leq \int_c^d dy \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon (d-c),$$

Verwisseling integratievolgorde  
eindige herhaalde integraal,  
in Algebra-Analyse, p. 382-384

voor  $a < A, b > B$ .

Dat betekent evenwel  $\int_c^d dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy.$

Opmerking. De stelling blijft ook geldig indien  $f(x, y)$  voor elke  $y \in [c, d]$  slechts stuksgewijs continue is in  $x$  i.e. continue afgezien van aftelbaar veel discontinuïteiten van de eerste soort (punten waar rechter- en linkerlimiet bestaan doch verschillend zijn).

Zonder eindig verdichtingspunt

Stelling II. Zij de functie  $f(x, y)$  continue voor  $-\infty < x, y < \infty$ , zij  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx$  uniform convergeert op elk eindig interval  $c \leq y \leq d$  en zij  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy$  uniform convergeert op elk eindig interval  $a \leq x \leq b$ . Indien nu een der herhaalde integralen

$$\int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy \text{ of } \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_a^b |f(x, y)| dx$$

convergent is, dan geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy.$$

Bewijs: Laat  $f(x,y) \geq 0$  zijn. Neem aan dat de integraal

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$$

convergent is. Beschouw dan de integraal

$$\int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_a^b f(x,y) dx \leq I_1,$$

waarbij de verwisseling van integratievolgorde is toegestaan volgens stelling I.

Neem nu  $a \rightarrow -\infty$ ,  $b \rightarrow \infty$ , dan volgt

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \leq I_1,$$

i.e. ook de integraal  $I_2$  is convergent.

Men kan nu de redenering omkeren en analogoos bewijzen  $I_1 \leq I_2$ , waarna volgt  $I_1 = I_2$ .

In het algemene geval stellen we

$$f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$$

met  $f_1 = \max(0, f)$ ,  $f_2 = -\min(0, f)$ . De stelling laat zich dan toepassen op  $f_1, f_2$ , waarna hetzelfde resultaat volgt.  $f_1 \leq |f|, f_2 \leq |f|$

11-3-78 | 16-11-78

We geven nog de volgende stelling over het differentieren van oneigenlijke integralen naar een parameter:

Stelling III. Zij  $f(x,y)$  differentieerbaar naar  $y$  voor  $c \leq y \leq d$ , zij  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$  continue van  $a \leq x \leq a$ ,  $c \leq y \leq d$  in  $x$  op  $[a,b]$ ,  $c \leq y \leq d$ , zij  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$  convergent voor  $c \leq y \leq d$  en zij  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx$  uniform convergent voor  $c \leq y \leq d$ . Dan is

$$\frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx, \quad c \leq y \leq d.$$

Bewijs. Zie college Algebra en Analyse, p. 43. p. 373 v.2 boek.

2.3

Integraalstelling van Fourier.

Vooraf bewijzen we twee hulpstellingen:

Hulpstelling I.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -\pi/2, & a < 0, \end{cases} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$$

Bewijs: Door contour integratie van  $\frac{e^{iaz}}{z}$ , zie Wsk I.

Zie ook Algebra en Analyse, p. 373-374.

Hulpstelling II (Lemma van Riemann-Lebesgue). Zij  $f(x)$  integreerbaar over  $[a,b]$ .

-dan is

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{ixy} dx = 0.$$

Zie voor alternatief omzettingen.

Hulpstelling II (Lemma van Riemann-Lebesgue). Zij  $f(x)$  stuksgewijs glad op  $[a, b]$ .  
dan geldt

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \int_a^b f(x) e^{iyx} dx = 0.$$

Bewijs. Volgens de definitie (p. 2) is  $f(x)$  continu differentieerbaar op  $(a, b)$ ,  
eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), waarbij  
 $f'(c_i \pm)$  en  $f'(c_i \mp)$  bestaan;evens bestaan  $f'(a+)$ ,  $f'(b-)$ ,  $f'(a+)$  en  $f'(b-)$ .

Beschouw de integraal over een deelintervaal  $[c_i, c_{i+1}]$  en integreer partieel:

~~$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) e^{iyx} dx =$$~~

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) e^{iyx} dx = \frac{1}{iy} [f(c_{i+1}-) e^{iy c_{i+1}} - f(c_i+) e^{iy c_i}] - \frac{1}{iy} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f'(x) e^{iyx} dx.$$

Voor  $y \rightarrow \pm \infty$ , nadert het rechterlid tot 0, zodat

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) e^{iyx} dx = 0.$$

Evensz kan men aantonen dat de integralen over  $[a, c_1]$  en  $[c_m, b]$  tot 0  
nadieren. Hiermee is de hulpstelling bewezen.

Opmerking. De hulpstelling blijft ook geldig onder de zwakkere voorwaarde dat  
 $f(x)$  integreerbaar is over  $[a, b]$ .



Bewijs: Kies  $\varepsilon > 0$ . Benader  $f(x)$  door een trapfunctie  $\varphi(x)$ ,  
 $\varphi(x) = p_j$  voor  $g_{j-1} < x < g_j$ ,  $c_0 = a < c_1 < \dots < c_n = b$ ,  
 zodanig dat

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon.$$

Dan is,

$$\left| \int_a^b f(x) e^{ixy} dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| |e^{ixy}| dx + \left| \int_a^b \varphi(x) e^{ixy} dx \right|$$

$$< \varepsilon + \left| \sum_{j=1}^n p_j \int_{g_{j-1}}^{g_j} e^{ixy} dx \right| = \varepsilon + \left| \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{iy} [e^{iyg_j} - e^{iyg_{j-1}}] \right|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2}{|y|} \sum_{j=1}^n |p_j|.$$

Kies nu  $|y|$  zo groot dat

$$\frac{2}{|y|} \sum_{j=1}^n |p_j| < \varepsilon \implies \left| \int_a^b f(x) e^{ixy} dx \right| < 2\varepsilon,$$

i.e.  $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{ixy} dx = 0$ .

Toewijzing. Zij  $\int_a^b |f(x)| dx$  convergent dan is

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{ixy} dx = 0.$$

Bewijs: Kies  $\varepsilon > 0$  en bepaal  $b$  zodanig dat

$$\left| \int_a^b f(x) e^{ixy} dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx < \varepsilon.$$

Dan is verder,

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) e^{ixy} dx \right| \leq \left| \int_a^b f(x) e^{ixy} dx \right| + \left| \int_b^{\infty} f(x) e^{ixy} dx \right| < 2\varepsilon$$

voor  $|y|$  voldoende groot, i.e.  $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} f(x) e^{ixy} dx = 0$ .

Opmerking. Uit het lemma volgt

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\cos xy}{\sin xy} dx = 0.$$

Dit resultaat rivat de hulpstelling van 1.2.

23.3.52

Zie pag. 2

Definitie. De functie  $f(x)$  heet stuksgewijs glad op  $[a, b]$  indien  $f(x)$  continue differentieerbaar is op  $[a, b]$  met uitzondering van een eindig aantal discontinuïteitspunten; in elk discontinuïteitspunt  $c$  bestaan  $f'(c+0)$ ,  $f'(c-0)$ .

De functie  $f(x)$  heet stuksgewijs glad op  $(-\infty, \infty)$  indien  $f(x)$  stuksgewijs glad is op elk eindig segment  $[a, b]$ .

$f(x)$  stuksgewijs glad  $\iff f(x)$  voldoet in elk punt aan de Dirichlet condities.

Integraalstelling van Fourier. Zij de functie  $f(x)$  stuksgewijs glad op  $(-\infty, \infty)$  en zij  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  convergent. Dan bestaat de Fourier transform van  $f(x)$ , viz.

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx$$

voor elke  $y$ . Voorts geldt de inversieformule

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iyx} dy,$$

voor elke  $x$ .

Bewijs. Uit

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

Spliten in vier:

$$|I_1| \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \sin Nt \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\Delta \sin Nt \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt \right| + \\ + \left| \frac{1}{\pi} \int_\Delta^\infty \frac{\sin Nt}{t} f(x+t) dt \right| + \frac{|f(x)|}{\pi} \left| \int_\Delta^\infty \frac{\sin Nt}{t} dt \right|$$

Kies  $\delta$  zo klein dat

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \sin Nt \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta |f'(x+ot)| dt < \varepsilon,$$

waarvoor volgens middelwaardestelling

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x+ot), \quad 0 < o < 1.$$

Rest andersz.

Opmerking. In discontinuïteitspunten kan men  $f(x)$  herdefiniëren door

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)],$$

dan is

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F(y) e^{-ixy} dy.$$

en de convergentie van  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  volgt dat  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx$  absoluut convergen  
 is voor elke  $y$ ; i.e.  $F(y)$  bestaat. Daar de afpechting geldt voor elke  $y$  in de  
 integraal  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx$  tevens uniform convergent voor  $-a < y < a$ .

Beschouw nu voor  $N > 0$  de volgende integraal,

$$I_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N F(y) e^{-iyx} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-iyx} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iyt} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-N}^N e^{iy(t-x)} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin N(t-x)}{t-x} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} f(x+t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} dt.$$

De verwisseling van integratievolgorde is toegestaan volgens <sup>(p.2)</sup>stelling I.

Opmerking. De integraalvoorstelling voor  $I_N(x)$  is het analogon van de  
 integraalvoorstelling voor  $S_N(x)$  (p.2) uit de theorie van de Fourierrekenen.

Te bewijzen nu  $I_N(x) \rightarrow \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$  voor  $N \rightarrow \infty$ . Schrijf daarvoor,

$$I_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Nt}{t}$$

$$I_N(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin Nt \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin Nt \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} dt$$

(hulpstelling I) en noem de twee integralen  $I_1, I_2$ .

De integraal  $I_1$  is al volgt af te schatten,

$$|I_1| \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \sin Nt \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} dt \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\delta}^{\infty} \sin Nt \frac{f(x+t)}{t} dt \right| + \frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt \right|$$

Kies  $\delta$  zodanig dat

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{\delta}^{\infty} \sin Nt \frac{f(x+t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{\pi \delta} \int_{\delta}^{\infty} |f(x+t)| dt = \frac{1}{\pi \delta} \int_{\delta}^{\infty} |f(t)| dt < \epsilon.$$

Vervolgens is dan

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \sin Nt \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} dt \right| < \epsilon, \text{ voor } N > N_1,$$

op grond van het lemma van Riemann-Lebesgue, en

$$\left| \frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt \right| \right| = \frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_{N\delta}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| < \epsilon \text{ voor } N > N_2,$$

op grond van de convergentie van de integraal  $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

Totaal is nu  $|I_1| < 3\epsilon$  voor  $N > \max(N_1, N_2)$  i.e.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1 = 0.$$

Evenzo is te bewijzen  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_2 = 0$ .

Daarmee is aangetoond.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N F(y) e^{-iyx} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iyx} dy = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Opmerking. Uit het bewijs blijkt dat  $\int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iyx} dy$  in de inverse formule

12.

7A

Fourier transform

$$F(y) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx.$$

Inverse Fourier transform

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iyx} dy.$$

moet worden opgevat als een egn. Cauchy hoofdwaaarde i.e.  $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N$   
 Vergelijk hiermee algemene definitie  $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N$   
 Men kan de integraalstelling ook onder zwakke voorwaarden bewijzen.

1972

Richtlijns voor Fourier transformatie

Byzondere gevallen en voorbeelden van de integraalstelling van Fourier.

Lij  $f(x)$  even in  $x$ , dan gaat de Fourier transform  $F(y)$  over in

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(yx) dx,$$

d.i. de egn. Fourier cosinus transform.  $F(y)$  is ook even in  $y$ . Omgekeerd is,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(y) \cos(xy) dy = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)], & x > 0 \\ f(x), & x = 0. \end{cases}$$

Lij  $f(x)$  oneven in  $x$ , dan volgt

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(yx) dx.$$

Definieer nu de Fourier sinus transform door

$$F^*(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(yx) dx.$$

dan is  $F^*(y)$  even in  $y$ . Omgekeerd geldt,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F^*(y) \sin(xy) dy = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)], & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

De Fourier cosinus- en sinus transformaties zijn vooral van belang als  $f(x)$  slechts gedefinieerd is voor  $x \geq 0$ . Toepassing van Fourier cosinus (sinus) transformatie is dan equivalent met toepassing van Fourier transformatie op de functie even (oneven) voortgezet.

13-4-1982

Voorbeelden. 1°.  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$  met  $\alpha > 0$ .

De Fourier transform wordt nu gegeven door

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (e^{iyx} + e^{-iyx}) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}.$$

Inverse transformatie,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2} e^{-ixy} dy = e^{-\alpha|x|} = f(x),$$

een resultaat dat nog te verifiëren is door contour-integratie.

2°.  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$  egn.  $x$  met  $\alpha > 0$ .

Fourier transform,

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (e^{iyx} - e^{-iyx}) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{iy}{\alpha^2 + y^2}.$$

Inverse transformatie,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{iy}{\alpha^2 + y^2} e^{-ixy} dy = e^{-\alpha|x|} \text{ egn. } x = f(x).$$

3°.  $f(x) = \frac{\sin \alpha x}{x}$  met  $\alpha > 0$ .

Merkt op dat nu  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$  niet convergent is; toch blijft de integraalstelling van Fourier te gelden.

14.

8<sup>A</sup>

$$\begin{aligned} F_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}x^2 + iyx} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{\frac{1}{2}(ix+y)^2 + \frac{1}{2}y^2} dx = \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i^n} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + \frac{1}{2}(ix+iy)^2} dx = \frac{e^{\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} i^{-n} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(ix-iy)^2 - y^2} dx = \\ &= i^{-n} e^{\frac{1}{2}y^2} \left(\frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2} = i^n f_n(y) \end{aligned}$$

Fourier transform,

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{iyx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos yx}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x+y)x + \sin(x-y)x}{x} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\operatorname{sgn}(x+y) + \operatorname{sgn}(x-y)] =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |y| < x, \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |y| = x, \\ 0, & |y| > x, \end{cases}$$

overeenkomstig hulpstelling I. Inverse transformatie.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dy = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

30-3-1982

4°  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Fourier transform,

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + iyx} dx = \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Inverse transformatie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 - ix y} dy = \frac{C e^{-\frac{1}{2}x^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y+ix)^2} dy = \frac{C^2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x)$$

i.e.  $C^2 = 2\pi$ ,  $C = \sqrt{2\pi}$ ,  $F(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}$

Functie  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$  is eigenfunctie voor de Fourier transformatie.

Opmerking Verdere eigenfuncties zijn

$$f_n(x) = (-i)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)$$

met  $H_n(x)$  is Hermite polynoom. Na Fourier transformatie.

$$F_n(y) = i^n f_n(y).$$

Zie E.C. Titchmarsh, Theory of Fourier integrals, p. 76-82.

27-3-77 / 13-11-1978 / 14-1981

Rekenregels voor Fourier transformatie.

Tabel

functie	Fourier transform
$f(x)$	$F(y)$
$f(-x)$	$F(-y)$
$F(x)$	$f(-y)$ $2\pi f(-y)$
$F(-x)$	$f(y)$ $2\pi f(y)$
$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$	$a_1 F_1(y) + a_2 F_2(y)$
$f(x+a)$	$e^{-iay} F(y)$
$e^{ixb} f(x)$	$F(y+b)$
$f(cx), c \neq 0$	$\frac{1}{ c } F(y/c)$

$$\begin{aligned} f(x) \\ ix f(x) \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}(x) \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (ix)^k f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -iy F(y) \\ F'(y) \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-iy)^k F(y) \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k F^{(k)}(y) \end{aligned}$$

De tabel is geldig uitbreidend voorover de betreffende Fourier transform bestaan. We zullen slechts voor twee gevallen expliciet de voorwaarden aangeven:

a) Fourier transform van  $f'(x)$ .

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{iyx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - iy F(y) = -iy F(y).$$

aangenomen dat  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ .

b) Zij

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx.$$

Laat nu de integraal  $\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| dx$  convergeren zijn, dan is de integraal  $\int_{-\infty}^{\infty} ix f(x) e^{iyx} dx$  uniform convergent voor  $-a < y < a$ . Volgens § 2.2, Stelling III geldt dan

$$F'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ix f(x) e^{iyx} dx$$

i.e. de Fourier transform van  $ix f(x)$  is  $F'(y)$  mits  $\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| dx$  convergent is.

§ 2.20 | 7-11-74 | 11-11-76 | 23-11-78

### Convolutie, gelijkheid van Parseval.

Definitie. Onder de convolutie (Faltung) van twee functies  $f(x)$  en  $g(x)$  verstaan we de functie  $h(x)$  gedefinieerd door

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt.$$

Notatie:

$$h = f * g.$$

Eigenschappen. Het convolutieproduct is commutatief, associatief en distributief i.e.

$$f * g = g * f; f * (g * h) = (f * g) * h; f * (g + h) = f * g + f * h.$$

We bewijzen nu de volgende stelling over de Fourier transform van een convolutie:

### Convolutiestelling

Convolutiestelling. Zij  $f(x), g(x)$  continu voor  $-\infty < x < \infty$ , zij  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$  convergeren en zij een der functies  $f(x)$  of  $g(x)$  begrensd. Dan is:

(i) De convolutie

$$h(x) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

bestaat voor elke  $x$ .

(ii) Noemen we de Fourier transformen van  $f(x), g(x), h(x)$  resp.  $F(y), G(y), H(y)$  dan bestaat  $H(y)$  en er geldt:

$$H(y) = \sqrt{2\pi} F(y) G(y).$$



17.

10<sup>A</sup>

N.B. Ondersellingen of stukgewijs glad,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy$  convergent mogen ook worden vervangen door  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy$  convergent.

Bewijs: (i) Zij  $g(x)$  begrensd i.e.  $|g(x)| \leq k$ . Dan is

$$|f(t)g(x-t)| \leq k|f(t)|, \quad -\infty < x < \infty.$$

Daar  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  convergent is zal de integraal  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt$  absoluut en uniform convergent zijn voor  $-\infty < x < \infty$ . De convolutie  $h(x)$  bestaat voor elke  $x$ .

(ii) We onderzoeken de Fourier transform

$$H(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Op grond van <sup>(2.2)</sup> Stelling II (verifieer de voorwaarden!) zo mag de integratievolgorde worden verwisseld i.e.

$$\begin{aligned} H(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t) e^{iyx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iyt} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iyu} du = \sqrt{2\pi} F(y)G(y). \end{aligned}$$

Opmerking. Fourier transformatie doet een convolutieproduct overgaan in een gewoon product. Omgekeerd verwachten we dat door Fourier transformatie een gewoon product overgaat in een convolutieproduct - vergelijk de symmetrie in de tabel op p. 9, 10.

Omkering van de convolutiestelling. Zij  $f(x), g(x)$  continu voor  $-\infty < x < \infty$ ,  $f(x)$  stiekogewijs glad voor  $-\infty < x < \infty$  (Dirichlet condities) en zij  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$  convergent. Noem de Fourier transform van  $f(x), g(x)$  resp.  $F(y), G(y)$  en zij  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)| dy$  convergent.

Dan is,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) e^{iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F * G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(y-t) dt.$$

Bewijs: Daar  $f(x)$  continu en stiekogewijs glad is geldt de inverse formule,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-ixt} dt.$$

Merkt op dat de laatste integraal absoluut en uniform convergent is voor  $-\infty < x < \infty$ .

De Fourier transform van  $f(x)g(x)$  is nu als volgt te schrijven.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) e^{iyx} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iyx} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-ixt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i(y-t)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(y-t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F * G. \end{aligned}$$

De verwisseling van integratievolgorde is weer toegestaan op grond van <sup>(2.2)</sup> Stelling II.

Gevolg. Stel  $y=0$  in de laatste uitkomst, dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(-t) dt.$$

Vervang nu  $g(x)$  door  $\bar{g}(x)$  dan is  $G(y)$  te vervangen door

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x) e^{iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iyx} dx = \bar{G}(-y)$$

en dus  $G(-y)$  door  $\bar{G}(y)$ .

Voorbeeld  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $F(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  voor  $|t| < 1$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} dt = \pi.$$

H. Dym and H.P. McKeon, *Fourier series and integrals*, Academic Press, 1972.

Pag. 111-112: Zij  $f(x) \in C^2(\mathbb{R}')$  en zij  $|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq \frac{\text{const.}}{1+x^2}$ ,

$$\text{dan is } \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(2\pi k).$$

Voorwaarden te verwachten tot:

$f(x)$  continu differentieerbaar voor  $-\infty < x < \infty$ ;

$f(x) = O(|x|^{-\alpha})$  voor  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $f'(x) = O(|x|^{-\beta})$  voor  $x \rightarrow \pm\infty$ , zekere  $\alpha, \beta < -1$ .

Bewijs Voorin  $\varphi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m)$

Reeks is uniform convergent voor  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ;  $\varphi(x)$  periodiek met periode 1;

$\varphi(x)$  continu differentieerbaar op  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , want reeks  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} f'(x+m)$  uniform convergent.

Functie  $\varphi(x)$  is te ontwikkelen in uniform convergente Fourierreeks

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-2\pi i k x}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Zie verder onder bewijs.

Zie ook N.G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, North-Holland Publ. Co., 1961



We vinden nu de volgende twee voorstellingen voor  $\varphi(x)$ ,

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(2\pi k) e^{-2\pi i k x}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Stel  $x=0$ , dan volgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = (\sqrt{2\pi}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(2\pi k).$$

Generalisering van de sommatieformule van Poisson. Onder analoge omstandigheden als boven geldt ook de algemenere formule,

$$\sqrt{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \sqrt{\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\beta k),$$

waarin  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha\beta = 2\pi$ .

Afleiding. Pas de oorspronkelijke sommatieformule toe op de functie  $f(\alpha x)$ . De Fourier transform van deze functie wordt gegeven door  $\frac{1}{\alpha} F(\frac{\beta}{\alpha})$ . Er volgt dan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} (\sqrt{2\pi}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\frac{2\pi}{\alpha} k)$$

ofwel met  $\alpha\beta = 2\pi$ ,

$$\sqrt{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \sqrt{\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\beta k).$$

17-11-1977 / 15-11-1979

Toepassingen van de sommatieformule van Poisson.

De sommatieformule van Poisson laat zich o.a. gebruiken voor de transformatie van reeksen naar een vorm welke expliciet sommerbaar is of welke sneller convergeert dan de oorspronkelijke reeks.

nu in 1979

$$1^{\circ} f(x) = e^{-|x|}, \quad F(y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{1+y^2}.$$

Toepassing van de sommatieformule van Poisson geeft

$$\sqrt{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|n|} = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\beta^2 k^2}$$

of na uitwerking

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|n|} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} = 1 + \frac{2e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = \operatorname{cotgh} \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{\sqrt{2\beta}}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\beta^2 k^2} = \frac{2}{\alpha} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\beta^2 k^2} \right].$$

Stellen we  $\alpha = 2\pi z$ ,  $\beta = \frac{1}{z}$  dan volgt het bekende resultaat

$$\pi \operatorname{cotgh} \pi z = \frac{1}{z} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + k^2},$$

d.i. de ontwikkeling van  $\pi \operatorname{cotgh} \pi z$  in partiëlebreuken.

Opmerking. Uit deze ontwikkeling is af te leiden  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1982, 1983, 1985.

2<sup>o</sup>. De theta-functie  $\theta_3(z, \tau)$  is gedefinieerd door

$$\theta_3(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2i n z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} \cos(nz).$$

vol in 1878, niet in 19<sup>de</sup>, vol in 1883, niet in 1889

Alternansformule 2<sup>o</sup> (van A. J. E. T. Janssen)

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} e^{-\pi(m+n)} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Afdeling: } S &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\pi m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\pi m} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\pi n} \\ &= S_1 T_1 - S_2 T_2 \end{aligned}$$

Herleiding  $T_1, T_2$  met Poisson

$$f(x) = e^{-\pi x^2}; \quad F(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 + ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2/4\pi};$$

$$T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} F(2\pi k) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi k^2} = \sqrt{2} S_1$$

$$f(x) = e^{-\pi x^2 + i\pi x}; \quad F(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi y} \left[ -\frac{(y+i\pi)}{2i\pi} \right];$$

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} F(2\pi k) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}(2k+\pi)^2} = \sqrt{2} S_2$$

$$S = S_1 T_1 - S_2 T_2 = \sqrt{2} S_1 S_2 - \sqrt{2} S_2 S_1 = 0$$

Indien  $\text{Im } z > 0$  is, is de reeks convergent voor elke complexe  $z$ . Theta-functies spelen een belangrijke rol in de theorie van de warmtegeleidingvergelijking; zie voor de theorie der  $\theta$ -functies, b.v. E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Chapter XXI.

Met de sommatieformule van Poisson laet zich afleiden de volgende belangrijke functieaaltrekking voor  $\theta_3(z, \tau)$ :

$$\theta_3(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \exp\left(\frac{z^2}{\pi i \tau}\right) \theta_3\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right), \quad \text{Im } \tau > 0.$$

Hierbij wordt met  $\sqrt{-i\tau}$  de hoofdwaaard bedoeld i.e.  $\text{Re}(\sqrt{-i\tau}) > 0$ .

Afleiding. Zij de functie  $f(x)$  gegeven door

$$f(x) = \exp[\pi i x^2 \tau + 2i x z],$$

-dan is  $\theta_3(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ . Bereken nu de Fourier transform.

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} F(2\pi k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i x^2 \tau + 2i x z + 2\pi i k x] dx = \\ &= \exp\left[-\frac{i(z + \pi k)^2}{\pi \tau}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i \tau \left(x + \frac{z + \pi k}{\pi \tau}\right)^2] dx = \\ &= \exp\left[-\frac{i(z + \pi k)^2}{\pi \tau}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i \tau u^2] du, \end{aligned}$$

geldig voor  $\text{Im } \tau > 0$ . Verdere herleiding met gebruik van contour-integratie geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau u^2} du = \int_0^{\infty} \frac{e^{\pi i \tau v}}{v^{1/2}} dv = \frac{1}{\sqrt{-\pi i \tau}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-w}}{w^{1/2}} dw = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}},$$

$$\sqrt{2\pi} F(2\pi k) = \frac{\exp\left[-\frac{i(z + \pi k)^2}{\pi \tau}\right]}{\sqrt{-i\tau}} = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \exp\left(\frac{z^2}{\pi i \tau}\right) \exp\left(-\frac{\pi i k^2}{\tau} - \frac{2i k z}{\tau}\right).$$

Substitutie in de sommatieformule van Poisson geeft

$$\begin{aligned} \theta_3(z, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[\pi i k^2 \tau + 2i k z] = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \exp\left(\frac{z^2}{\pi i \tau}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi i k^2}{\tau} + \frac{2i k z}{\tau}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \exp\left(\frac{z^2}{\pi i \tau}\right) \theta_3\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right). \end{aligned}$$

We hebben daarmee voor  $\theta_3(z, \tau)$  twee representaties gevonden. De eerste reeks is dual convergent voor  $\text{Im } \tau$  "groot"; de tweede reeks is dual convergent voor  $\text{Im } \tau$  "klein".

4-4-1973 | 26-4-1982  
wel in 1977, 1978, wel in 1979, 1981, 1982, wel in 1983, 1984

3° Bemonsteringstheorema (Sampling theorem) uit de informatietheorie.

Zij de functie  $g(x)$  band-limited d.w.z. voor de Fourier transform

$$G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i y x} dx \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i \omega t} dt$$

geldt  $G(y) = 0$  voor  $|y| > W$ .  $G(\omega) = 0$  voor  $|\omega| > W$

( $g(t)$  heeft een frequentiespectrum met bandbreedte  $2W$ ).  $g(t) e^{i \omega t}$

Pas nu de sommatieformule van Poisson toe op de functie  $g(x) e^{i \omega x}$  en diens

Fourier transform  $G(y + \omega)$  via:

$$G(\omega + \omega)$$

24.

14<sup>A</sup>

4°. Alternatief: Geval  $k=0$ , potentiaalprobleem?

Levensduurformule met ~~beperking~~  $k=0$  potentiaal, maar  $U$  niet een functie



$$\sqrt{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(\alpha m) e^{i \alpha m t} = \sqrt{\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\beta k + t), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \alpha\beta = 2\pi.$$

Kies nu  $\beta = 2W$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{W}$  dan is

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(2Wk + t) = G(t), \quad \text{voor } -W < t < W,$$

waarna de summatie formule overgaat in

$$G(t) = \frac{1}{W} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{\pi m}{W}\right) \exp\left(\frac{\pi i m t}{W}\right), \quad -W < t < W.$$

De Fourier transform van  $G(t)$  wordt dus volledig bepaald door de bemonsteringen (samples)  $g\left(\frac{\pi m}{W}\right)$ .

Mit  $G(t)$  volgt  $g(x)$  door inverse Fourier transformatie,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W G(t) e^{-ixt} dt$$

of na substitutie van de rechte en kromgewijze integratie,

$$g(x) = \frac{1}{2W} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{\pi m}{W}\right) \int_{-W}^W \exp\left(\frac{\pi i m t}{W} - ixt\right) dt,$$

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{\pi m}{W}\right) \frac{\sin W(x - \frac{\pi m}{W})}{W(x - \frac{\pi m}{W})}.$$

Deze betrekking staat bekend als het limiet sampling theoreem van Shannon (zie dictaat Eijkhoff, Informatietheorie, § 3.4). De functie  $g(x)$  wordt volledig bepaald door de samples  $g\left(\frac{\pi m}{W}\right)$ . Deze samples worden met tussenpozen  $\frac{\pi}{W}$  genomen.

Controle. Voor  $x = \frac{\pi k}{W}$  is alleen de term  $m = k$  van de reeks  $\neq 0$  en gelijk aan  $g\left(\frac{\pi k}{W}\right) = g(x)$ . Merk op dat de functie  $\frac{\sin Wx}{x}$  ook band-limited is met bandbreedte  $2W$  (zie voorb. 3°, p. 8, 9).

o n.v.t. in 1971, 1972, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984.

4°. We beschouwen het volgende twee-dimensionale golfvoortplantingsprobleem:

Tussen de vlakke platen  $-a < x < a$ ,  $y = 0$  en  $-a < x < a$ ,  $y = \pi$  bevindt zich een Lybman in het punt  $x = 0$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$ . Gevraagd wordt nu het totale veld  $u(x, y)$  tussen de platen te bepalen, indien op de platen de randvoorwaarde  $u = 0$  geldt. Mathematisch is dit probleem te formuleren als een randwaardeprobleem viz.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = -\delta(x) \delta(y - \frac{\pi}{2}), & -a < x < a, 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, & -a < x < a, \\ u(x, y) \text{ voldoet aan de uitbreidingvoorwaarde voor } |x| \rightarrow \pm \infty. \end{cases}$$

~~af Aflossing door Fourier transformatie naar x. Naar de Fourier transform~~

~~$$U(w, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{ixw} dx$$~~

~~dan ontstaat het getransformeerd probleem,~~

~~$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dy^2} + (k^2 - w^2) U = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(y - \frac{\pi}{2}), & 0 < y < \pi, \\ U(w, 0) = U(w, \pi) = 0. \end{cases}$$~~

a) Oplossing door separatie van variabelen. Het veld  $u(x,y)$  zal even in  $x$  zijn.

Voor  $x > 0$  voldoet  $u(x,y)$  aan de vergelijking

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Posse separatie van variabelen toe *i.e.*  $u(x,y) = F(x) G(y)$ , dan volgt

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + k^2 = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \beta^2,$$

ofwel

$$\begin{cases} F''(x) + (k^2 - \beta^2) F(x) = 0, \\ G''(y) + \beta^2 G(y) = 0, \quad G(0) = G(\pi) = 0. \end{cases}$$

Als oplossing voor  $\beta$ ,  $G(y)$ ,  $F(x)$  vinden we

$$\begin{cases} \beta = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ G(y) = \sin ny, \\ F(x) = A_n \exp[ix\sqrt{k^2 - n^2}] + B_n \exp[-ix\sqrt{k^2 - n^2}]. \end{cases}$$

We schrijven daarbij af

$$\sqrt{k^2 - n^2} = \begin{cases} (k^2 - n^2)^{1/2}, & n \leq k, \\ i(n^2 - k^2)^{1/2}, & n > k. \end{cases}$$

$F(x)$  zal dan voldoen aan de uitstralingvoorwaarde, mits  $B_n = 0$ . Het veld  $u(x,y)$  wordt dus gegeven door

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin ny \exp[i(x)\sqrt{k^2 - n^2}], \quad x > 0, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

In begreep nu de Helmholtz vergelijking van  $x = -\varepsilon$  naar  $x = +\varepsilon$  en neem  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dan volgt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(+\varepsilon, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(-\varepsilon, y) = -\delta(y - \frac{\pi}{2}).$$

ofwel

$$2i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{k^2 - n^2} \sin ny = -\delta(y - \frac{\pi}{2}), \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Ontwikkel nu ook het rechterlid in een Fourier sinusreeks in.

$$\delta(y - \frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin ny,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \delta(y - \frac{\pi}{2}) \sin ny dy = \frac{2}{\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Dan is af te lezen

$$A_n = \frac{i}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$A_{2n} = 0, \quad A_{2n+1} = \frac{i}{\pi} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}}$$

waarna volgt

$$u(x,y) = \frac{i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}} \sin(2n+1)y \exp[i(x)\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}]. \quad (I)$$

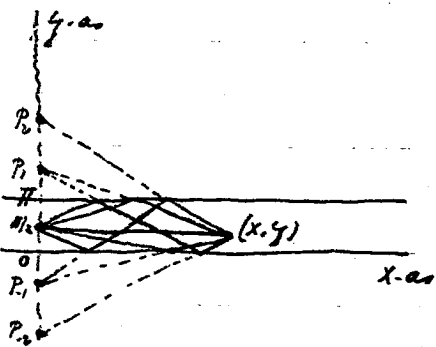
Bovenstaande oplossing in *roh.* af te leiden met Fourier transformatie naar  $x$ , zie voorbeeld b.26a.c. De oplossing (I) is een reeksontwikkeling naar *zgn. modes*.

b) Oplossing met methode van spiegeling. Het veld van een lijn bron gestaat in de vrije ruimte wordt gegeven door

$$u_0 = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr)$$

met  $H_0^{(1)}$  = Hankel functie,  $r$ : afstand tot bronpunt. Het veld plant zich voort langs

Stralen uitgaande van het bronpunt. Deze stralen ondergaan reflectie aan de wanden  $y=0, y=\pi$  met reflectiecoëfficiënt  $(-1)$  (randvoorwaarde  $u=0$ ). In elk punt is het totale veld opgebouwd te denken uit het directe veld  $u_0$  en uit enkelvoudig, resp. meervoudig gereflecteerde velden. Deze gereflecteerde velden zijn tekenbaar afhankelijk van de gekingelde bronpunten.



$P_m(x_m, y_m), x_m=0, y_m=(2m+1/2)\pi, m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Het totale veld in  $(x, y)$  is nu te schrijven als

$$u(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m u_0(r_m) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m H_0^{(1)}(kr_m) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - (2m+1/2)\pi)^2}) \quad (I)$$

Hierbij is  $r_m$  de afstand van  $(x, y)$  tot het punt  $P_m$ .  
 N.B. De reeks (I) is convergent mits  $k \neq 2n, n$  geheel,  $> 0$  oftewel  $k \neq \frac{2n}{\pi}$  geen resonantie.

c) Voor het totale veld  $u(x, y)$  zijn nu twee reeksen gevonden, (I), (II). We zullen aantonen dat deze reeksen samenhangen via de sommatieformule van Poisson.

Bepineer daartoe

dan is  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) =$  reeks (II). Bepaal de Fourier transform,

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ist} dt = \frac{i}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - (t+1/2)\pi)^2}) e^{i(\pi+1/2)t} dt.$$

Stel  $y - (t+1/2)\pi = \eta$ , dan volgt

$$F(s) = \frac{i}{4\pi\sqrt{2\pi}} e^{i(\pi+1/2)(\frac{y}{\pi} - 1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + \eta^2}) e^{-i(\pi+1/2)\eta/\pi} d\eta =$$

Gebruik nu de formule (cf. Erdelyi, Integral Transforms, Vol. I, 1.13 (35), (41))

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + \eta^2}) e^{-i\eta} d\eta = 2 \int_0^{\infty} (k\sqrt{x^2 + \eta^2}) \cos(\eta) d\eta + 2i \int_0^{\infty} \frac{\eta}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} \sin(\eta) d\eta$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{k^2 - \rho^2}} \cos(x\sqrt{k^2 - \rho^2}) + \frac{2i}{\sqrt{k^2 - \rho^2}} \sin(x\sqrt{k^2 - \rho^2}) = \frac{2 \exp[i|x|\sqrt{k^2 - \rho^2}]}{\sqrt{k^2 - \rho^2}}, & 0 \leq |\rho| < k, \\ 0 - \frac{2i}{\sqrt{\rho^2 - k^2}} e^{-|x|\sqrt{\rho^2 - k^2}} = -\frac{2i \exp[-|x|\sqrt{\rho^2 - k^2}]}{\sqrt{\rho^2 - k^2}}, & |\rho| > k, \end{cases}$$

$$= \frac{2 \exp[i|x|\sqrt{k^2 - \rho^2}]}{\sqrt{k^2 - \rho^2}},$$

onder de afspraak

$$\sqrt{k^2 - \rho^2} = (k^2 - \rho^2)^{1/2}, \quad 0 \leq |\rho| < k; \quad \sqrt{\rho^2 - k^2} = i\sqrt{\rho^2 - k^2}, \quad |\rho| > k.$$

Daarmee volgt voor  $F(s)$  of liever voor  $F(2n\pi)$ ,

$$F(2n\pi) = \frac{(-1)^n}{2n/2\pi} e^{(2n+1/2)y} \frac{\exp[i|x|\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}]}{\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}}$$

Toepassing van de summatieformule van Poisson geeft nu,

$$\begin{aligned} \text{Rechte (II)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_n) \sqrt{\Delta x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(2\pi n) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}} e^{(2n+1)iy} \exp[i(x)\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}] \\ &= \frac{i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}} \sin(2n+1)y \exp[i(x)\sqrt{k^2 - (2n+1)^2}] = \text{Rechte (I)}. \end{aligned}$$

1974 voorjaar  
1975-1977  
1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985

5° Numerieke integratie van Fourierintegralen. In de summatieformule van Poisson vervangen we  $f(x)$  door  $f(x)e^{ipx}$ ,  $p > 0$  en dim overeenkomstig  $F(y)$  door  $F(py)$ .

Dan volgt

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\Delta x p n} f(x_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(p + \frac{2\pi k}{\Delta x}) = F(p) + \{F(p + \frac{2\pi}{\Delta x}) + F(p - \frac{2\pi}{\Delta x})\} + \dots$$

Het linkerlid is te beschouwen als een trapeziumbenadering voor de integraal

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ipx} dx = F(p),$$

waarbij  $(-a, a)$  in  $\Delta x$  intervallen ter lengte  $\Delta x$  is verdeeld. Noemen we de trapeziumbenadering  $I_{\text{trap}}$ , dan is

$$I_{\text{trap}} - F(p) = [F(p + \frac{2\pi}{\Delta x}) + F(p - \frac{2\pi}{\Delta x})] + \dots$$

Voor  $\Delta x \rightarrow 0$  is  $p + \frac{2\pi k}{\Delta x} \rightarrow \pm \infty$ ,  $F(p + \frac{2\pi k}{\Delta x}) \rightarrow 0$  (lemma van Riemann-Lebesgue), zodat

$I_{\text{trap}} \rightarrow F(p)$  onder zekere voorwaarden voor de functie  $F$ .

Bereken nu de integraal  $F(p)$  volgens de regel van Simpson, i.e.

$$\begin{aligned} I_{\text{Simp}} &= \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2}{3} e^{2i\Delta x p n} f(2\Delta x n) + \frac{4}{3} e^{i\Delta x p (2n+1)} f((2n+1)\Delta x) \right] = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\Delta x p n} f(x_n) - \frac{1}{3} \frac{2\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\Delta x p n} f(2\Delta x n) = \\ &= \frac{4}{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(p + \frac{2\pi k}{\Delta x}) - \frac{1}{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(p + \frac{\pi k}{\Delta x}) = \\ &= F(p) - \frac{1}{3} \{F(p + \frac{\pi}{\Delta x}) + F(p - \frac{\pi}{\Delta x})\} + \{F(p + \frac{2\pi}{\Delta x}) + F(p - \frac{2\pi}{\Delta x})\} + \dots, \end{aligned}$$

$$I_{\text{Simp}} - F(p) = -\frac{1}{3} [F(p + \frac{\pi}{\Delta x}) + F(p - \frac{\pi}{\Delta x})] + [F(p + \frac{2\pi}{\Delta x}) + F(p - \frac{2\pi}{\Delta x})] + \dots$$

Opk nu geldt  $I_{\text{Simp}} \rightarrow F(p)$  als  $\Delta x \rightarrow 0$  onder zekere voorwaarden voor  $F(p)$ . Echter de foutterm  $\frac{1}{3}[F(p + \frac{\pi}{\Delta x}) + F(p - \frac{\pi}{\Delta x})]$  zal in het algemeen langzamer naar nul gaan dan de foutterm  $F(p + \frac{2\pi}{\Delta x}) + F(p - \frac{2\pi}{\Delta x})$ . Dit betekent dat voor de numerieke berekening van de Fourierintegralen de trapeziumregel in het algemeen een betere benadering geeft dan de regel van Simpson.

F We beschouwen nu de breede integraal. De integrand is bij vaste  $x$  analytisch in  $w$  en bij vaste  $w$  continue in  $x$ .

☞ Voren nu de rij van functies  $F_n(w)$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  gegeven door

$$F_n(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx} dx.$$

Volgens de eerder gebruikte stelling (Algebra-analyse, p. 435) is  $F_n(w)$  analytisch in  $G$ . Voorts is de rij  $\{F_n(w)\}$  uniform convergent in  $G$  omdat

$$|F_n(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \exp[-x^2] dx \leq \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x^2} dx, \quad w \in G,$$

en de rij  $\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x^2} dx \right\}$  convergeert naar  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta x^2} dx$ .

Volgens een stelling van Weierstrass (Algebra-analyse p. 439) is de limiet van een uniform convergente rij van analytische functies ook een analytische functie i.e. de breede integraal  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx} dx$  is analytisch in  $G$ .

Complexe Fourier integralen.

We zullen nu beschouwen de Fourier transform van complexe functies v.m. analytische functies. Ook de variabele  $y$  in de Fourier transform  $F(y)$  zal complex mogen zijn. Om dit duidelijker aan te geven vervangen we eventueel de <sup>notatie</sup> variabelen  $x, y$  door  $z, w$ . Door deze uitbreiding tot complexe integralen kunnen we methoden uit de functietheorie toepassen.

We beschouwen dan de Fourier transform  $F(w)$  van  $f(x)$ ,

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx} dx.$$

$F(w)$  is te splitsen in twee stukken,

$$F(w) = F_+(w) + F_-(w)$$

met

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{iwx} dx, \quad F_-(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{iwx} dx.$$

Stelling I. Zij  $f(x)$  continu en stuksgewijs glad voor  $x \geq 0$  en zij  $f(x) = O(e^{-\alpha x})$  voor  $x \rightarrow \infty$ . Dan is <sup>(i)</sup> de integraal

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{iwx} dx$$

convergent voor  $\Im w > \alpha$ .

(ii)  $F_+(w)$  is analytisch voor  $\Im w > \alpha$ .

(iii) Er geldt de inversieformule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha+i\epsilon}^{\alpha+i\epsilon} F_+(w) e^{-iwx} dw = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0), & x = 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \Im w > \alpha.$$

6-4-1982

Bewijs: De notatie  $f(x) = O(e^{-\alpha x})$  voor  $x \rightarrow \infty$  betekent dat er constanten  $N, k$  bestaan zodat

$$|f(x)| \leq k e^{-\alpha x}, \quad x \geq N.$$

(i) Zij nu  $\Im w = \alpha + \delta$ ,  $\delta > 0$  dan is

$$|f(x) e^{iwx}| \leq k e^{-\alpha x} e^{-x \Im w} = k e^{-\delta x}, \quad x \geq N.$$

Rangieren de integraal  $\int_N^{\infty} e^{-\delta x} dx$  convergent is zal de integraal

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{iwx} dx$$

absoluut convergent en daarmee convergent zijn voor  $\Im w = \alpha + \delta$  i.e. voor  $\Im w > \alpha$ .

(ii) We zullen aantonen dat  $F_+(w)$  analytisch is in het gebied  $G: \Im w > \alpha + \delta$  voor elk  $\delta > 0$ .

Schrijf daartoe

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^N f(x) e^{iwx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_N^{\infty} f(x) e^{iwx} dx.$$

De eerste integraal is analytisch in het hele complexe  $w$ -vlak (Stelling uit college

WSK I, p. 33, ed. 1969). De tweede integraal is uniform convergent op  $G$ . Immers

$$|f(x) e^{iwx}| \leq k e^{-\delta x}, \quad w \in G$$

en  $\int_N^{\infty} e^{-\delta x} dx$  is convergent. De integraal is analytisch in  $w$  bij vaste  $x$  en continu in  $w$  bij vaste  $w$ . De tweede integraal is dan analytisch in  $G$  (volgens WSK I, p. 39, ed. 1969).

$F_+(w)$  is dan analytisch in  $G$ :  $\text{Im } w > \alpha + \delta$ ,  $\delta > 0$ . Daarmee volgt,  $F_+(w)$  is analytisch voor  $\text{Im } w > \alpha$ .

N.B. De afgeleide  $F_+'(w)$  wordt verkregen door differentiatie onder het integraalteken.

$$F_+'(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} ix f(x) e^{iwx} dx.$$

(iii) Beschouw voor  $y > \alpha$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha+iy}^{\alpha+iy} F_+(w) e^{-ixw} dw &= \frac{e^{\delta x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(y+iy) e^{-ixy} dy = \\ &= \frac{e^{\delta x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dy \int_0^{\infty} f(t) e^{-yt} e^{iyt} dt, \end{aligned}$$

waarin  $w = y + iy$  gesteld is.

Pas nu de integraalstelling van Fourier toe op de functie

$$h(x) = \begin{cases} f(x) e^{\delta x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Aan de voorwaarden voor toepassing van de integraalstelling is zeker voldaan, zodat

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha+iy}^{\alpha+iy} F_+(w) e^{-ixw} dw = \frac{e^{\delta x}}{2} [h(x+i0) + h(x-i0)] = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0), & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

18-11-1976

Stelling II. Zij  $f(x)$  continu en stuksgewijs glad voor  $x \leq 0$  en zij  $f(x) = O(e^{\beta x})$  voor  $x \rightarrow -\infty$ .

Dan is:

(i) De integraal

$$F_-(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{iwx} dx$$

bestaat in convergent voor  $\text{Im } w < \beta$ .

(ii)  $F_-(w)$  is analytisch voor  $\text{Im } w < \beta$ .

(iii) Er geldt de inversieformule,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha+iy}^{\alpha+iy} F_-(w) e^{-ixw} dw = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0), & x = 0, \\ f(x), & x < 0, \end{cases} \quad y < \beta.$$

Bewijs. Analoog aan bewijs van stelling I.

8-4-1981

Combineer nu de stellingen I, II tot:

Stelling III. Zij  $f(x)$  continu en stuksgewijs glad voor  $-\infty < x < \infty$ , zij  $f(x) = O(e^{\alpha x})$  voor  $x \rightarrow \infty$  en  $f(x) = O(e^{\beta x})$  voor  $x \rightarrow -\infty$ , met  $\alpha < \beta$ . Dan is:

(i) De integraal

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx} dx$$

is convergent voor  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ .

(ii)  $F(w)$  is analytisch in de strook  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ .

(iii) Er geldt de inversieformule,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha+iy}^{\alpha+iy} F(w) e^{-ixw} dw = f(x), \quad \alpha < y < \beta.$$

20-4-1971 | 2-4-1974 | 14-11-1975 | 20-11-1975

De volgende stelling gaat over de Fourier transform van een analytische functie:

Stelling IV. Zij  $f(z)$  analytisch in de strook  $a < \text{Im } z < b$ ; zij voorts  $f(z) = O(e^{\alpha \text{Re } z})$  voor  $\text{Re } z \rightarrow \infty$  en  $f(z) = O(e^{\beta \text{Re } z})$  voor  $\text{Re } z \rightarrow -\infty$ ,  $\alpha < \beta$ , beide uniform in de strook  $a + \delta \leq \text{Im } z \leq b - \delta$ , voor elke  $\delta > 0$ . Dan is:

(i) De Fourier integraal 
$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+ic}^{a+ic} f(z) e^{i w z} dz, \quad a < c < b,$$
 is convergent voor  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ .

(ii)  $F(w)$  is onafhankelijk van  $c$ .  
(iii)  $F(w)$  is analytisch in de strook  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ .

(iv) Voor elke  $\delta > 0, \epsilon > 0$  geldt 
$$F(w) = O(e^{-(b-\delta)\text{Re } w}), \quad \text{Re } w \rightarrow \infty; \quad F(w) = O(e^{-(a+\delta)\text{Re } w}), \quad \text{Re } w \rightarrow -\infty,$$
 beide uniform in de strook  $\alpha + \epsilon \leq \text{Im } w \leq \beta - \epsilon$ .

(v) Er geldt de inverse formule, 
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+ic}^{a+ic} F(w) e^{-i w z} dw = f(z), \quad \alpha < \text{Im } z < \beta, \quad a < \text{Im } z < b.$$

Bewijs: De notatie

$f(z) = O(e^{\alpha \text{Re } z}), \text{Re } z \rightarrow \infty; \quad f(z) = O(e^{\beta \text{Re } z}), \text{Re } z \rightarrow -\infty,$  uniform in de strook  $a + \delta \leq \text{Im } z \leq b - \delta$ , betekent dat er constanten  $k_1, N_1$  en  $k_2, N_2$  bestaan, zodanig dat

$$|f(z)| \leq k_1 e^{\alpha \text{Re } z}, \quad \text{voor } \text{Re } z \leq N_1, \quad a + \delta \leq \text{Im } z \leq b - \delta;$$
$$|f(z)| \leq k_2 e^{\beta \text{Re } z}, \quad \text{voor } \text{Re } z \geq N_2, \quad a + \delta \leq \text{Im } z \leq b - \delta.$$

De af-schattingen zijn uniform i.e.  $k_1, N_1, k_2, N_2$  zijn onafhankelijk van  $z$ . Wel kunnen  $k_1, N_1, k_2, N_2$  nog afhangen van  $\delta$ .

Zonder bezwaar kunnen we aannemen  $N_1 \leq 0, N_2 \geq 0$ .

(i) Met de substitutie  $z = x + ic$  volgt

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+ic}^{a+ic} f(z) e^{i w z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c w} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+ic) e^{i w x} dx.$$

Kies  $\delta > 0$ , zodanig dat  $a + \delta \leq c \leq b - \delta$ , dan is

$$|f(x+ic)| \leq k_1 e^{\alpha x}, \quad x \leq N_1; \quad |f(x+ic)| \leq k_2 e^{\beta x}, \quad x \geq N_2$$

ofwel  $f(x+ic) = O(e^{\alpha x}), x \rightarrow -\infty$  en  $f(x+ic) = O(e^{\beta x}), x \rightarrow \infty$ .

Volgens stelling III is dan de integraal  $F(w)$  convergent voor  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ .

(iii) Uit stelling III volgt ook:  $F(w)$  is analytisch voor  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ .

(ii) We tonen aan dat

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+ic}^{a+ic} f(z) e^{i w z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+ic^*}^{a+ic^*} f(z) e^{i w z} dz,$$

voor  $a < c < c^* < b$ .

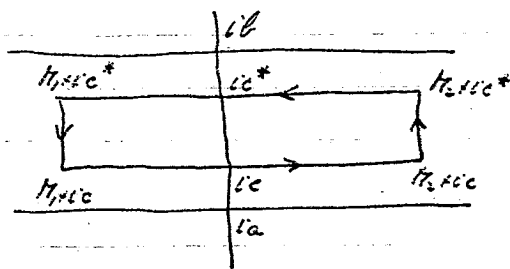
Kies  $\delta > 0$ , zodanig dat

$$a + \delta \leq c < c^* \leq b - \delta,$$



dan gelden de boven ingevoerde afschattingen in de strook  $a-\delta \leq \text{Im } z \leq b+\delta$ .

Neem nu de rechthoek met hoekpunten  $M_1+ic, M_1+ic^*, M_2+ic, M_2+ic^*, M_1 \leq M_2, M_2 \geq a$  en neem de rand van de rechthoek  $C$ .



Daar  $f(z)$  analytisch is voor  $a < \text{Im } z < b$ , zal gelden:

$$\int_C f(z) e^{iwz} dz = 0. \quad (1)$$

Bereken nu de integralen over de zijanten van de rechthoek:

$$\begin{aligned} a) \left| \int_{M_1+ic^*}^{M_2+ic^*} f(z) e^{iwz} dz \right| &\leq k_1 \int_{M_1+ic^*}^{M_2+ic^*} e^{\beta R_2 z} |e^{iwz}| |dz| = \\ &= k_1 e^{\beta M_1} \int_C^* |e^{i\omega(M_1+iy)}| dy = k_1 e^{M_1(\beta - \text{Im } w)} \int_C^* e^{-y R_2 w} dy \rightarrow 0, \end{aligned}$$

indien  $M_1 \rightarrow a, \text{Im } w < \beta$ .

$$b) \left| \int_{M_2+ic}^{M_2+ic^*} f(z) e^{iwz} dz \right| \leq k_2 e^{M_2(\alpha - \text{Im } w)} \int_C^* e^{-y R_2 w} dy \rightarrow 0$$

indien  $M_2 \rightarrow a, \text{Im } w > \alpha$ .

In de limiet voor  $M_1 \rightarrow a, M_2 \rightarrow a$  zal nu de relatie (1) overgaan in

$$\int_{a+ic}^{a+ic^*} f(z) e^{iwz} dz = \int_{-a+ic^*}^{-a+ic} f(z) e^{iwz} dz,$$

mits  $\alpha < \omega < \beta$ .  $F(w)$  is onafhankelijk van  $C$ .

(iv) Kies  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  willekeurig. ~~Laat~~ Laten  $C, w$  voldoen aan de ongelijkheden  $a+\delta \leq c \leq b-\delta, \alpha+\varepsilon \leq \text{Im } w \leq \beta-\varepsilon$ .

Schrijf nu de integraal  $F(w)$  af volgt

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a+ic}^{a+ic^*} f(x+ic) e^{iwz} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-cw} \int_{-\infty}^a f(x+ic) e^{iwx} dx.$$

De integraand  $f(x+ic) e^{iwx}$  is af te schatten:

$$x \leq N_1: |f(x+ic) e^{iwx}| \leq k_1 e^{\beta x} e^{-x \text{Im } w} \leq k_1 e^{\varepsilon x},$$

$$x \geq N_2: |f(x+ic) e^{iwx}| \leq k_2 e^{\alpha x} e^{-x \text{Im } w} \leq k_2 e^{-\varepsilon x},$$

$$N_1 \leq x \leq N_2: |f(x+ic) e^{iwx}| \leq |f(x+ic)| e^{-x \text{Im } w} \leq k_3 \quad (|f(x+ic)| \text{ en } e^{-x \text{Im } w} \text{ begrensd}).$$

Daaruit volgt:

$$\left| \int_{-\infty}^a f(x+ic) e^{iwx} dx \right| \leq k_1 \int_{-\infty}^{N_1} e^{\varepsilon x} dx + k_3 (N_2 - N_1) + k_2 \int_{N_2}^a e^{-\varepsilon x} dx = k \sqrt{2\pi},$$

$$|F(w)| \leq k |e^{-cw}| = k e^{-c R_2 w} \text{ geldig voor } \alpha+\varepsilon \leq \text{Im } w \leq \beta-\varepsilon, a+\delta \leq c \leq b-\delta.$$

Indien  $R_2 w \geq 0$  is, neem dan  $C = b-\delta$ , dan is

$$|F(w)| \leq k e^{-(b-\delta) R_2 w} \text{ voor } R_2 w \geq 0, \alpha+\varepsilon \leq \text{Im } w \leq \beta-\varepsilon.$$

Indien  $R_2 w \leq 0$  is, neem dan  $C = a+\delta$ , dan is

Voorbeeld 2°. De functie  $g(z) = \frac{1}{\sinh z}$  is analytisch voor o.e.  $0 < \text{Im } z < \pi$ , terwijl

$$g(z) = O(e^{-\text{Re } z}), \text{Re } z \rightarrow \infty; \quad f(z) = O(e^{\text{Re } z}), \text{Re } z \rightarrow -\infty.$$

Analoog als i. e.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$ ,  $k = -1$ ,  $\beta = 1$  in dit geval.

Analoog aan voorbeeld 1°, is te berekenen de complexe Fourier transform

$$G(w) = -i\sqrt{2\pi} \frac{e^{-\pi w}}{1 + e^{-\pi w}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\pi w/2}}{\cosh(\frac{\pi w}{2})}$$

$G(w)$  is analytisch voor  $0 < \text{Im } w < 1$  in de strook  $-1 < \text{Re } w < 1$  terwijl voort te geldt

$$G(w) = O(e^{-\pi \text{Re } w}), \text{Re } w \rightarrow \infty; \quad G(w) = O(1), \text{Re } w \rightarrow -\infty.$$

De Fourier transform  $G(w)$  wordt gedefinieerd door

$$G(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c+ic}^{c+ic} \frac{e^{i w z}}{\sinh z} dz, \quad 0 < c < \pi.$$

$$|F(w)| \leq k e^{-|a+\delta|Re w} \text{ voor } Re w \leq 0, \alpha + \varepsilon \leq Im w \leq \beta - \varepsilon.$$

Daarmee is punt (IV) bewezen.

(V) Te bewijzen is

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha+i\gamma}^{\alpha+i\gamma} F(w) e^{-izw} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha-i\gamma}^{\alpha-i\gamma} e^{-izw} dw \int_{-\alpha-i\gamma}^{\alpha-i\gamma} f(y) e^{iwy} dy = f(z).$$

voor  $a < Im z < b, \alpha < \gamma < \beta.$

Neem nu  $c = Im z$ , en schrijf  $z = x + ic$ . Stel verder  $w = u + iv, \gamma = t + ic$ , dan is

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha+i\gamma}^{\alpha+i\gamma} F(w) e^{-izw} dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp[-i(x+ic)(u+iv)] du \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t+ic) \exp[i(u+iv)(t+ic)] dt \\ &= \frac{e^{\delta x}}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ixu} du \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t+ic) e^{\delta t} e^{iut} dt = \\ &= e^{\delta x} [f(x+ic) e^{-\delta x}] = f(x+ic) = f(z). \end{aligned}$$

op grond van de integratiestelling van Fourier toegepast op de functie  $f(x+ic) e^{-\delta x}$ .

Samenvatting Stelling IV: Klasse  $k$  van functies  $f(z)$ , analytisch in de strook  $a < Im z < b$  met  $f(z) = O(e^{\alpha Re z}), Re z \rightarrow \infty, f(z) = O(e^{\beta Re z}), Re z \rightarrow -\infty$  uniform in de strook  $a+\delta \leq Im z \leq b-\delta$ .

Klasse  $k^*$  van functies  $F(w)$  analytisch in de strook  $\alpha < Im w < \beta$  met  $F(w) = O(e^{-(b-\delta)Re w}), Re w \rightarrow \infty, F(w) = O(e^{-|a+\delta|Re w}), Re w \rightarrow -\infty$  uniform in de strook  $\alpha + \varepsilon \leq Im w \leq \beta - \varepsilon$ .

Fourier transformatie beeldt  $k$  af op  $k^*$ , inverse Fourier transformatie beeldt  $k^*$  af op  $k$ . Alle integratiewegen verlopen in de analytischheidsstrook.

22-11-1979

Voorbeeld 1. De functie  $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$  is analytisch voor  $-\frac{\pi}{2} < Im z < \frac{\pi}{2}$ , terwijl voor  $k$  geldt

$$f(z) = O(e^{-Re z}), Re z \rightarrow \infty; f(z) = O(e^{Re z}), Re z \rightarrow -\infty,$$

i.e.  $a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}, \alpha = -1, \beta = 1$  in dit geval.

Bereken nu de complexe Fourier transform

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i w z}}{\cosh z} dz,$$

convergeert voor  $-\pi < Im w < \pi$ .

Verschuif daartoe  $z$  door  $z - i\pi$ ,

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\pi}^{\infty+i\pi} \frac{e^{i w(z-i\pi)}}{\cosh(z-i\pi)} dz = \\ &= -\frac{e^{-\pi w}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\pi}^{\infty+i\pi} \frac{e^{i w z}}{\cosh z} dz. \end{aligned}$$

Vorm nu de combinatie

$$\begin{aligned} (1 + e^{-\pi w}) F(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\infty+i\pi}^{-\infty+i\pi} \right) \frac{e^{i w z}}{\cosh z} dz = \\ &= \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i w z}}{\cosh z} = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\pi w/2}}{i} = \sqrt{2\pi} e^{-\pi w/2}, \end{aligned}$$

$$F(w) = \sqrt{2\pi} \frac{e^{-\pi w/2}}{1 + e^{-\pi w}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh \frac{\pi w}{2}}$$

De functie  $F(w)$  is inderdaad analytisch in de strook  $-1 < \text{Im } w < 1$ , terwijl voor  $t$  geldt

$$F(w) = O(e^{-\frac{t}{2} R w}), R w \rightarrow \infty; \quad F(w) = O(e^{\frac{t}{2} R w}), R w \rightarrow -\infty,$$

in overeenstemming met stelling IV.

15.4.70 (my beelden)

11.4.75 (my beelden) | 29.11.1977

Formules voor hyperbolische functies.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\cosh iz = \cos z,$$

$$i \sinh iz = i \sin z,$$

$$\cosh z = 0 \text{ voor } z = (n + \frac{1}{2})\pi i,$$

$$\sinh z = 0 \text{ voor } z = n\pi i,$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

$$\cosh(z \pm z_1) = \cosh z \cosh z_1 \pm \sinh z \sinh z_1, \quad \sinh(z \pm z_1) = \sinh z \cosh z_1 \pm \cosh z \sinh z_1,$$

$$\cosh(x \pm iy) = \cosh x \cos y \pm i \sinh x \sin y, \quad \sinh(x \pm iy) = \sinh x \cos y \pm i \cosh x \sin y,$$

$$\cosh 2z = 2 \cosh^2 z - 1,$$

$$\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z.$$

Algebra & Analyse, p. 457-458

Notatie:  $M_+(p; f) = \max\{|f(z)| \mid |z|=p, \text{Im } z \geq 0\}$

Lemma van Jordan (Wak. V, ed. 1969, p. 57-59)

(i) Zij  $f(z)$  <sup>continu</sup> analytisch voor  $|z| \geq R_0$ ,  $\text{Im } z \geq 0$  en zij  $f(z) \rightarrow 0$  voor  $z \rightarrow \infty$ , uniform in  $\arg z$ , voor  $0 \leq \arg z \leq \pi$ . Dan geldt voor  $p > 0$ ,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_p} f(z) e^{ipz} dz = 0,$$

waarbij  $\Gamma_p$  een halve cirkel is met straal  $p$  en middelpunt  $z=0$  in het boven-halfoval.

(ii) Zij gegeven een rij van halve cirkels  $\Gamma_n$  met straal  $R_n$  in het boven-halfoval,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty.$$

$$M_+(p; f) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty$$

Zij <sup>continu</sup> ~~max~~  $f(z)$  analytisch ~~op~~ <sup>langs</sup>  $\Gamma_n$  en zij  $\max_{z \in \Gamma_n} |f(z)| \rightarrow 0$  voor  $n \rightarrow \infty$ .

Dan geldt voor  $p > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} f(z) e^{ipz} dz = 0.$$

(iii) Indien  $p < 0$  is gelden analoge resultaten voor integralen langs halve cirkels in het beneden-halfoval  $\text{Im } z \leq 0$ .

overgaan op bls. 22.

Residu berekening enkelvoudige polen

37.

21C<sup>A</sup>

Afleiding oplossing is lateraal gevonden.

Als het verifieert dat er direct is inderdaad correcte indien  $f(x)$

$f(x)$  continue en begrensd is voor  $-a < x < a$ . Zie college PDV, §9.1.

~~Opgesluiting Kort samengevat zegtstelling in het volgende: Gegeven de klasse van functies  $f(z)$  analytisch in de strook  $a < \text{Im } z < b$  met  $f(z) = O(e^{\alpha \text{Re } z})$  indien  $\text{Re } z \rightarrow \infty$ ,  $f(z) = O(e^{\beta \text{Re } z})$  indien  $\text{Re } z \rightarrow -\infty$ . Door Fourier transformatie wordt deze klasse afgebeeld op een klasse van functies  $F(w)$ , analytisch in de strook  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ , met  $F(w) = O(e^{-(b-\delta)\text{Re } w})$  als  $\text{Re } w \rightarrow \infty$ ,  $F(w) = O(e^{-(a+\delta)\text{Re } w})$  indien  $\text{Re } w \rightarrow -\infty$ . De inverse transformatie waart  $F(w)$  naar toe is  $f(z)$ . Alle integratieswegen verlopen in de analytische voortzetting.~~

21.4.67 / 27.4.69 / 17.4.73

Toepassingen van de Fourier transformatie.

a. Randwaardeproblemen.

We zullen in het volgende een aantal voorbeelden geven van randwaardeproblemen welke met Fourier transformatie zijn op te lossen.

1°. Beschouw het volgende probleem voor de diffusievergelijking,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

met de beginvoorwaarde

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Voer in de Fourier getransformeerden (aangenomen dat deze bestaan),

$$U(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{iyx} dx,$$

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx.$$

dan ontstaat er het volgende getransformeerde probleem,

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -y^2 U, \\ U(y, 0) = F(y) \end{cases}$$

met als oplossing

$$U(y, t) = e^{-y^2 t} F(y).$$

De functie  $u(x, t)$  laat zich nu vinden door terugtransformatie,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-y^2 t} e^{-ixy} dy.$$

We kunnen dit nog uitbreiden met behulp van de convolutiestelling.  $U(y, t)$  is namelijk

het product van twee Fourier getransformeerden:  $F(y)$  is de F.T. van  $f(x)$ ;  $e^{-y^2 t}$  is

de F.T. van

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 t} e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(y + \frac{ix}{2t})^2} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Met de convolutiestelling volgt dan,

$$u(x, t) = f * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

Indien  $f(x) = \delta(x)$  (braai in oorsprong  $x=0$ ) volgt,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = S(x, t) \quad (\text{coll. PDV})$$

d.i. de bekende "fundamentele oplossing."

Alternatieve methode (n.a.v. vraag op collig.):

Fourier transformeren naar de tijd

$$U(x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u(x,t) e^{ist} dt, \quad F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{ist} dt.$$

Neem aan:  $u(x,t), f(t) = O(1)$  voor  $t \rightarrow \infty$ , dan is:  $U(x,s), F(s)$  bestaan en analytisch voor  $\text{Im } s > 0$ .

Ge transformeerde problemen: 
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 U = 0, & x > 0, \\ U(0,s) = F(s) \end{cases}$$

Oplossing  $e^{-ixs}$  is nuttig begrensd voor  $x > 0, \text{Im } s > 0$

Daarom:  $U(x,s) = F(s) e^{-ixs}$

Zwarte transformatie:  $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} F(s) e^{-i s(t-x)} ds = \begin{cases} f(t-x), & x < t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$

tot opgave, niet belandde in 1969, 1970, 1971, 1972, 1973-1974 voortaan, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1982  
 met 1983, met 1983

De zelfde fundamentele oplossing komt ook voor in het volgende probleem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta(x) \delta(t), & -a < x < a, \quad \epsilon - a < t < a, \\ u(x, t) = 0 & \text{voor } t < 0. \end{cases}$$

In  $x=0$  bevindt zich een bron welke alleen op het tijdstip  $t=0$  werkt. Definieer waar de Fourier getransformeerde  $U(y, t)$  dan zal wegen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \delta(x) e^{iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

het volgende getransformeerde probleem ontstaat,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + y^2 U &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(t), \\ U(y, t) &= 0 \text{ voor } t < 0. \end{aligned} \right\}$$

Voor  $t > 0$  is de oplossing van deze vergelijking,

$$U(y, t) = G(y) e^{-y^2 t}$$

waarin  $G(y)$  een willekeurige functie is. De laatste waarde bepaald door integratie van de DV van  $t = -\epsilon$  naar  $t = +\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ),

$$U(y, +\epsilon) - U(y, -\epsilon) + y^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} U(y, t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$G(y) e^{-y^2 \epsilon} + y^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} U(y, t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Laat nu  $\epsilon \rightarrow 0$  nadereen, dan volgt  $G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  en dus,

$$U(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2 t}$$

Fouriertransformatie voert nu tot de fundamentele oplossing,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

Opgave laat zien dat de oplossing van het probleem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x, t), \quad -a < x < a, \quad t > 0,$$

$$u(x, t) = 0 \text{ voor } t < 0$$

gegeven wordt door

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t dt \int_{-a}^a d\xi f(\xi, t) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t)}}}{\sqrt{t-t}} d\xi$$

28-4-1971 / 20-4-1972 / 24-4-1974 / 25-11-1978 / 3-8-1983

2°. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem voor de half-meeindige traak:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, t) = f(t), & t > 0. \end{cases}$$

Neem nu Fourier sinus getransformeerde

$$U(y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a u(x, t) \sin xy dx$$

Met behulp van de integraal,

$$\left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin xy dx - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial u}{\partial x} \sin xy \Big|_0^a - y u \cos xy \Big|_0^a - y^2 \int_0^a u(x, t) \sin xy dx \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} y f(t) - y^2 U(y, t)$$

(waarbij we aannemen dat  $u$  en  $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$  voor  $x \rightarrow a$ ). Gaat de DV over in,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + y^2 U = \sqrt{\frac{2}{\pi}} y f(t)$$

onder de voorwaarden,

$$U(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(y, 0) = 0.$$



Alternatieve afleiding:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t f(t-\tau) \sin y\tau \, d\tau$$

d.i. Fourier-sinus transform van functie

$$g(x, t) = \begin{cases} f(t-x), & x < t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

Na terug transformeren daarvan

$$u(x, t) = \begin{cases} f(t-x), & x < t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

Toelichting: Formule van Plancherel  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \bar{G}(y) \, dy$

Zij nu  $f(x)$  distributie = continue lineaire functional op ruimte  $S$  van testfuncties  $\varphi(x)$ , met  $\varphi(x) \in C^\infty$ ,  $x^n \varphi(x) \rightarrow 0$  voor  $x \rightarrow \pm\infty$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ .

Zoals  $\varphi(x) \in S$  bestaat Fourier transform  $\bar{\varphi}$  en ook  $\bar{\bar{\varphi}} \in S$ .

Definieer nu Fourier transform  $F$  van distributie  $f$  door

$$(f, \varphi) = (F, \bar{\varphi}), \quad \varphi \in S$$

Toetsing: Zij  $f(x) = \sin ax$  dan is

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin ax \, dx = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\bar{\varphi}(a) - \bar{\varphi}(-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \bar{\varphi}(y) \, dy$$

$$\Rightarrow F(y) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(y+a) - \delta(y-a)]$$

$$F(y) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sin ax e^{iyx} \, dx = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \sin ax + iyx \, dx = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(y+a) - \delta(y-a)],$$

$$\int_0^{\infty} \sin ax + iyx \, dx = \frac{\pi}{2} [\delta(y-a) - \delta(y+a)].$$

De oplossing van het laatste probleem laat zich afleiden met variatie van constanten.

$$u(y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t f(\tau) \sin y(t-\tau) d\tau$$

Door kerntransformatie volgt voor  $u(x, t)$ .

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(xy) dy \int_0^t f(\tau) \sin y(t-\tau) d\tau.$$

We zouden nu graag de integratievolgorde willen verwisselen. Dit leidt tot.

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \sin(xy) \sin y(t-\tau) dy.$$

De binnenste integraal is echter divergent. We gaan nu formel te werk en vormen de Fourier sine getransformeerde van  $\delta(x-a)$ ,  $a > 0$ :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \delta(x-a) \sin xy dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ay.$$

Omgekeerd is dan:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ay \sin xy dy = \delta(x-a), x > 0.$$

Oplossing ook of te leiden met karakteristieke lijnen methoden; zie college PDV.

We gebruiken dit in de uitdrukking voor  $u(x, t)$ .

$$u(x, t) = \int_0^t f(\tau) \delta\left(\begin{matrix} t-x-\tau \\ x-t+\tau \end{matrix}\right) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{als } x > t, \\ f(x) & \text{als } x < t. \end{cases}$$

Opgave Het eindresultaat is ook zonder gebruikmaking van  $\delta$ -functie af te leiden.

Integreer daarvoor partiël

$$u(y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{f(t) - f(0) \cos yt}{y} - \frac{1}{y} \int_0^t f(\tau) \cos y(t-\tau) d\tau \right]$$

en verifieer dat inderdaad

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(y, t) \sin xy dy = \begin{cases} 0 & \text{als } x > t, \\ f(x) & \text{als } x < t. \end{cases}$$

30 We beschouwen het volgende potentiaalprobleem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, & -a < x < a, 0 < y < \pi, \\ \phi(x, 0) = f(x), & -a < x < a, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \pi) = 0. \end{cases}$$

We zullen aannemen dat voor  $x \rightarrow \pm a$   $f(x) = O(e^{-\epsilon|x|})$  en ook  $\phi(x, y) = O(e^{-\epsilon|x|})$  voor  $0 < y < \pi$ , met  $\epsilon > 0$ . Neem de F.T. van  $\phi(x, y)$ , en van  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \phi(x, y) e^{iw x} dx, \\ F(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(x) e^{iw x} dx. \end{aligned}$$

$\Phi(w, y)$  en  $F(w)$  zullen bestaan en analytisch zijn voor  $-\epsilon < \text{Im } w < \epsilon$ . Het getransformeerde probleem leidt nu,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - w^2 \Phi = 0, & 0 < y < \pi, \\ \Phi(w, 0) = F(w), & \frac{\partial \Phi}{\partial y}(w, \pi) = 0 \end{cases}$$

met als oplossing,

$$\Phi(w, y) = F(w) \frac{\cosh w(\pi - y)}{\cosh w\pi}$$

De uitkomst is weer het product van twee F.T.'s; we zullen daarom de convolutionstelling toepassen. Het bepalen eerst de vooropgaande functie behoort

We bepalen nu de inverse F.T. van  $\frac{\cosh w(\pi - y)}{\cosh w\pi}$ . We zullen echter eerst onderzoeken de inverse F.T. van  $\frac{1}{\cosh w\pi}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \frac{e^{-iwx}}{\cosh w\pi} dw = g(x)$ .

N.B. Uit de afleiding is duidelijk dat deze relatie niet alleen geldt voor reële  $x$ , maar ook voor elke complexe  $x$  waarvoor de integraal convergeert, d.i. voor  $-\pi < \text{Im } x < \pi$ .

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2 z}}{\cosh t z} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\cosh \frac{1}{2} z}, \quad -\pi < \text{Im } z < \pi.$$

Schrijf daartoe.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixw}}{\cosh \pi w} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+ic}^{a+ic} \frac{e^{-ixw-i}}{\cosh \pi(w-i)} dw =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+ic}^{a+ic} \frac{e^{-ixw}}{\cosh \pi w} dw.$$

Neem nu de combinatie.

$$(1 + e^x) g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{-a+ic}^{a+ic} \right) \frac{e^{-ixw}}{\cosh \pi w} dw = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Res}_{w=i} \frac{e^{-ixw}}{\cosh \pi w} =$$

$$= \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ix}}{\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ix}.$$

waarna

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ix}}{1 + e^x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\cosh \frac{x}{2}}$$

Het behoeft van deze integraal berekenen we nu.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} \frac{\cosh w(\pi-y)}{\cosh \pi w} dw = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iwx + i\pi - iy} + e^{-iwx - i\pi + iy}}{\cosh \pi w} dw$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{\cosh \frac{1}{2}(x+i\pi-y)} + \frac{1}{\cosh \frac{1}{2}(x-i\pi+iy)} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\cosh \frac{1}{2}(x+i\pi-y) + \cosh \frac{1}{2}(x-i\pi+iy)}{e^{-\frac{1}{2}(x+i\pi-y)} e^{-\frac{1}{2}(x-i\pi+iy)}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{\cosh \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}y + i \sinh \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}y} + \frac{1}{\cosh \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}y - i \sinh \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}y} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cosh \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}y}{\cosh^2 \frac{1}{2}x - \cos^2 \frac{1}{2}y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cosh \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}y}{\cosh x - \cos y}$$

De functie  $\varphi(x, y)$  is nu de convolutie van deze functie met  $f(x)$ .

$$\varphi(x, y) = f(x) * \frac{1}{\pi} \frac{\cosh \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}y}{\cosh x - \cos y} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin \frac{1}{2}y \cosh \frac{1}{2}(x-\xi)}{\cosh(x-\xi) - \cos y} d\xi.$$

Nu de oplossing afgeleid is, is duidelijk dat ze ook geldt onder minder strenge voorwaarden voor  $f$ . Zo zal het bovengenoemde resultaat blijven gelden als slechts gegeven is dat  $f$  begrensd is.

Als we de functie  $F(w)$  expliciet kennen is het ook mogelijk de oplossing nog op een andere manier te herleiden. Neem aan  $f(x) = e^{-\varepsilon|x|}$  met  $0 < \varepsilon < 1$  dan is,

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|x|} e^{ixw} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + w^2}.$$

Dan is,

$$\Phi(w, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + w^2} \frac{\cosh \frac{1}{2}(w\pi - y)}{\cosh w},$$

en dus

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + w^2} \frac{\cosh \frac{1}{2}(w\pi - y)}{\cosh w} e^{-ixw} dw.$$

De integraal van deze integraal heeft nu Polen in de punten  $w = \pm i\varepsilon$ ,  $w = \pm (2n-1)\pi i$  ( $n=1, 2, \dots$ ) met residuen,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Res}_{w=\pm i\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + w^2} \frac{\cosh \frac{1}{2}(w\pi - y)}{\cosh w} e^{-ixw} = \pm \frac{1}{2i} \frac{\cosh \frac{1}{2}(i\varepsilon\pi - y)}{\cosh i\varepsilon} e^{\pm i\varepsilon x} \\ \operatorname{Res}_{w=\pm(2n-1)\pi i} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + w^2} \frac{\cosh \frac{1}{2}(w\pi - y)}{\cosh w} e^{-ixw} = \mp \frac{\varepsilon}{(2n-1)^2 - \varepsilon^2} \frac{\sinh \frac{1}{2}(2n-1)y}{\pi} e^{\pm(2n-1)x} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \cos \pi p - \sin \pi q &\geq 1 + \pi^2 p^2 - \sin \pi q = \\ &= \pi^2 N^2 + \cos \pi q - \pi^2 q^2 \geq \pi^2 N^2 + \cos \pi N - \pi^2 N^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \pi p + \cos \pi q &\geq \pi^2 p^2 + \cos \pi q = \pi^2 N^2 + \cos \pi q - \pi^2 q^2 \geq \\ &\geq \pi^2 N^2 + \cos \pi N - \pi^2 N^2 = 1. \end{aligned}$$

Lineal voor s.b.o.  $\varphi(x, y) = 1$  oplossing van

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, & -a < x < a, 0 < y < \pi \\ \varphi(x, 0) = 1, & -a < x < a, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \pi) = 0, & -a < x < a \end{cases}$$

We onderzoeken vervolgens de factor  $\frac{\cosh kw}{\cosh \pi w}$  (met  $k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq \pi$ ) op de cirkel  $|w|=1$ .  
 (geleed)

Stel daartoe  $w = p + iq$ , dan is

$$\left| \frac{\cosh kw}{\cosh \pi w} \right| = \left| \frac{\cosh kp \cosh kq + i \sinh kp \sin kq}{\cosh \pi p \cosh \pi q + i \sinh \pi p \sin \pi q} \right| = \left| \frac{\cosh^2 kp - \sin^2 kq}{\cosh^2 \pi p - \sin^2 \pi q} \right|$$

$$\leq \left\{ 1 + \frac{2}{\cosh^2 \pi p - \sin^2 \pi q} \right\}^{1/2} \leq k = \sqrt{2}$$

$\sinh^2 kp + \cos^2 kq$   
noegklein  $\approx 0$

daar de factor  $\cosh^2 \pi p - \sin^2 \pi q$  een positieve ondergrens heeft. Immer  $\cosh^2 \pi p - \sin^2 \pi q = 0$   
 zou betekenen  $\cosh^2 \pi p = 1$ , wat  $q = 0$  en  $p = 0$  of  $p = \pm \pi$  naardat in  $\sin \pi q = 0$  een.

De factor  $\frac{\cosh kw}{\cosh \pi w}$  is dan op de cirkel  $|w|=1$  begrensd.

nischlemach wordt,  
 ondergrens moet noegklein  $\approx 0$  zijn,  
 in limbo

Onderscheid nu twee gevallen:

(i)  $x > 0$ . Beschouw dan de cirkelcontour  $C$  bestaande uit de cirkel  $|w|=N$  van de reële as en de halve cirkel  $|w|=N$  in het boven halfvlak. Dan is

$$\frac{1}{\pi} \int_C \frac{e^{-zx}}{z^2 w} \frac{\cosh w(\pi-y)}{\cosh \pi w} e^{-ixw} dw = \frac{\cos \pi(\pi-y)}{\cos \pi} e^{-\pi x} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-x}}{(n-i)^2 - \epsilon^2} \sin(2n-i)y e^{-i(2n-i)x}$$

Neem nu de limiet voor  $N \rightarrow \infty$ , dan zal de  $\pi$ -graad van het lemma van Jordan (Wiskunde II, p. 46) de integraal langs de halve cirkel tot nul reduceren. In de limiet komt er dan

$$\psi(x, y) = \frac{\cos \pi(\pi-y)}{\cos \pi} e^{-\pi x} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{(n-i)^2 - \epsilon^2} \sin(2n-i)y e^{-i(2n-i)x}$$

(ii)  $x < 0$ . We sluiten nu de reële as door halve cirkels in het boven halfvlak.

Analoog als bij (i) vinden we

$$\psi(x, y) = \frac{\cos \pi(\pi-y)}{\cos \pi} e^{\pi x} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x}{(n-i)^2 - \epsilon^2} \sin(2n-i)y e^{i(2n-i)x}$$

4. Voor een overzicht voor het lezen zie p. 262-9.

b. Integraalvergelijkingen.

De methode van Fourier transformatie laat zich toepassen bij integraalvergelijkingen van het type convolutie type

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi) f(\xi) d\xi \quad \text{(integraalvgl. van 1<sup>o</sup> soort; } g(x) \text{ gegeven, } f(x) \text{ gevraagd)}$$

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi) f(\xi) d\xi \quad \text{(integraalvgl. van 2<sup>o</sup> soort; } g(x) \text{ gegeven, } f(x) \text{ gevraagd)}$$

We passen F.T. toe Fourier transformatie toe: neem de F.T.  $\hat{f}, \hat{g}, \hat{k}$  resp.  $F, G, K$ . De eerste van het behulp van de convolutiestelling gaan de twee vergelijkingen nu over in:

$$G(y) = \sqrt{2\pi} K(y) F(y),$$

$$F(y) = G(y) + \lambda \sqrt{2\pi} K(y) F(y).$$

De oplossing van de eerste getransformeerde vergelijking luidt

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} K(y)} G(y),$$

waarna door terugtransformatie volgt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(y)}{K(y)} e^{-ixy} dy.$$

Zevenzo volgt voor de tweede vergelijking

$$F(y) = \frac{G(y)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} K(y)}$$

waarna

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(y)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} K(y)} e^{-ixy} dy.$$

28-4-87 gunn college (dins)

We onderstellen hierbij dat een P.T. G.L.y) bestaat.

$$\text{Alternatief: } \begin{cases} U(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sin k(y\sqrt{a^2-k^2})}{\sqrt{a^2-k^2} \cos k(\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2-k^2})}, & 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ U(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{-\sin k((\pi-y)\sqrt{a^2-k^2})}{\sqrt{a^2-k^2} \cos k(\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2-k^2})}, & \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi \end{cases}$$

Vervolg p. 26, midden:

4. We beschouwen nogmaals het op p. 15-geformuleerde twee-dimensionale golfvoortplantingsprobleem: Gevraagd wordt het totale veld  $u(x,y)$  te bepalen van een lijnbron geplaatst in het punt  $x=0, y=\pi/2$  tussen twee vlakke wanden  $-a < x < a, y=0$  resp.  $-a < x < a, y=\pi$ . Op deze wanden geldt de randvoorwaarde  $u=0$ . Mathematisch is dit probleem te formuleren als een randwaardeprobleem viz.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -\delta(x) \delta(y - \frac{\pi}{2}), & -\infty < x < \infty, 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, y) \text{ voldoet aan de uitbreidingsvoorwaarde voor } x \rightarrow \pm \infty. \end{cases}$$

De laatste voorwaarde drukt uit

$$u(x, y) = O(e^{ck|x|}), \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

We nemen nu voorlopig aan dat  $k$  complex zal zijn i.e.

$$k = k_1 + ik_2, \quad \text{met } k_1 > 0, k_2 > 0,$$

dan is

$$u(x, y) = O(e^{-k_2|x|}), \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Noem nu in de Fourier transform van  $u(x, y)$  naar  $x$ , viz.

$$U(w, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{iwx} dx,$$

dan zal  $U(w, y)$  bestaan en analytisch zijn in de strook  $-k_2 < \text{Im} w < k_2$ . Er ontstaat nu het getransformeerde probleem,

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dy^2} + (k^2 - w^2) U = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(y - \frac{\pi}{2}), & 0 < y < \pi, \\ U(w, 0) = U(w, \pi) = 0. \end{cases}$$

De oplossing van dit laatste probleem luidt

$$\begin{cases} U(w, y) = A(w) \sin(y\sqrt{k^2 - w^2}), & 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ U(w, y) = B(w) \sin((\pi - y)\sqrt{k^2 - w^2}), & \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

Integratie van het getransformeerde probleem van  $y = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  naar  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ , gevolgd door een limietovergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  geeft,

$$\frac{dU}{dy} (w, \frac{\pi}{2} + 0) - \frac{dU}{dy} (w, \frac{\pi}{2} - 0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad U(w, \frac{\pi}{2} + 0) - U(w, \frac{\pi}{2} - 0) = 0.$$

Met behulp van deze relaties is eenvoudig te bevestigen,

$$A(w) = B(w) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - w^2} \cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2 - w^2})}$$

We vinden dus

$$\begin{cases} U(w, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(y\sqrt{k^2 - w^2})}{\sqrt{k^2 - w^2} \cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2 - w^2})}, & 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ U(w, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sin((\pi - y)\sqrt{k^2 - w^2})}{\sqrt{k^2 - w^2} \cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2 - w^2})}, & \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

We zullen nu deze uitkomst terugtransformeren. We geven de details alleen voor het geval  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

Merkt op dat de functie  $U(w, y)$  analytisch is in  $w$  behalve in een aantal Polen; de wortelvrouwen  $\sqrt{k^2 - w^2}$  vallen precies weg, zodat  $U(w, y)$  geen vertakkingpunten heeft.



Alternativ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{w^2-k^2}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{w^2-k^2} = \pm(2n+1)i \Rightarrow w = \pm\sqrt{k^2-(2n+1)^2}$$

Alternativ:

$$u(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(y\sqrt{w^2-k^2})}{\sqrt{w^2-k^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{w^2-k^2}\right)} e^{-ixw} dw, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Alternativ: Under each factor  $\frac{\sin(y\sqrt{w^2-k^2})}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{w^2-k^2}\right)}$  of  $\Gamma_n$ ,  $\sqrt{w^2-k^2} = \rho + i\eta$ .

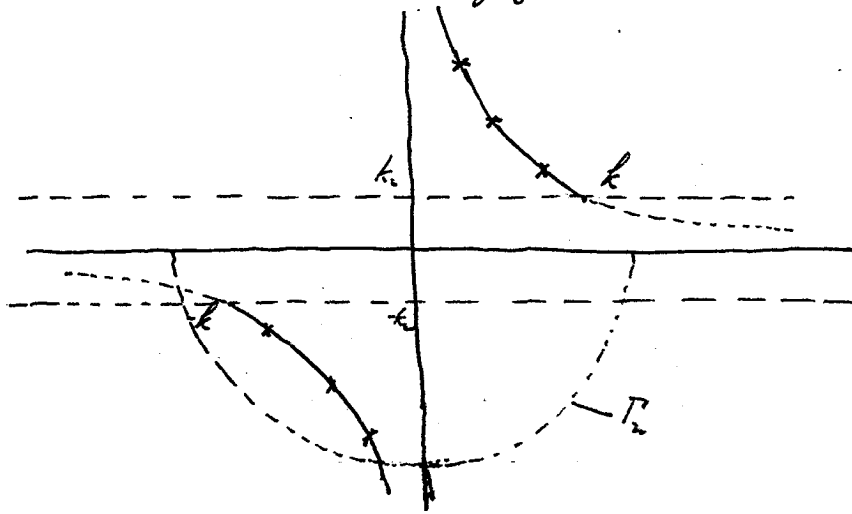
$$\left| \frac{\sin(y\sqrt{w^2-k^2})}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{w^2-k^2}\right)} \right| \leq \left[ 1 + \frac{2}{\cos^2\frac{\eta}{2} - \sin^2\frac{\eta}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq K \text{ of } \Gamma$$

$$\text{wenn } \cos^2\frac{\eta}{2} - \sin^2\frac{\eta}{2} \geq \frac{\eta^2}{4} \Rightarrow \frac{\eta^2}{4} + \cos^2\frac{\eta}{2} = \frac{\eta^2}{4} |w-k|^2 + \cos^2\frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{4} \geq \cos^2\frac{\eta}{2} |w-k|^2$$

$$|w-k|^2 = |w| \left[ 1 + O\left(\frac{1}{|w|}\right) \right] = R_n \left[ 1 + O\left(\frac{1}{|w|}\right) \right] = 2n+2 + O\left(\frac{1}{|w|}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

$$\cos^2\frac{\eta}{2} |w-k|^2 = \cos^2 \left[ (n+1)\pi + O\left(\frac{1}{|w|}\right) \right] = 1 + O\left(\frac{1}{|w|}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

De polen van  $U(w, y)$  worden gegeven door  
 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2-w^2}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{k^2-w^2} = \frac{\pi(2n+1)}{2} \Rightarrow w = \pm\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)^2}$ ,  
 waarin  $n$  geheel,  $\frac{\pi(2n+1)}{2}$ . Deze polen liggen op de hyperbool  $\operatorname{Re} w = k, k_1$ ,  
 gaande door de punten  $\pm k$ , zie figuur.



$U(w, y)$  is analytisch in de strook  $-k_1 < \operatorname{Im} w < k_1$ . De integratieweg voor  
 Keug. transformatie wordt in deze strook gekozen genomen. We kiezen voor  
 deze integratieweg de rechte as, waarna volgt

$$U(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(y\sqrt{k^2-w^2})}{\sqrt{k^2-w^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2-w^2}\right)} e^{-ixw} dw, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Het is duidelijk dat  $U(x, y)$  even is in  $x$ , we beperken ons daarom bij de verdere  
 uitwerking tot het geval  $x > 0$ .

Met het oog op de toepassing van het lemma van Jordan sluiten we nu de  
 integratieweg  $\Gamma_n$  door het cirkel  $T_n$  met straal  $R_n$  in het beneden-halfflakt.  
 $R_n$  wordt zo gekozen dat  $T_n$  precies tussen twee naburige polen doorgaat, i.e.  
 hier b.v.

$$R_n = \frac{1}{2} \left[ |k^2 - (2n+1)\frac{\pi^2}{4}|^{1/2} + |k^2 - (2n+3)\frac{\pi^2}{4}|^{1/2} \right].$$

We komen nu aan dat de factor  $\frac{\sin(y\sqrt{k^2-w^2})}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2-w^2}\right)}$  begrensd is op  $\Gamma_n$ . Schrijf daartoe  
 $\sqrt{k^2-w^2} = p+iq$ , dan volgt analoge als onder voorbeeld 3°, b. 26,

$$\left| \frac{\sin(y\sqrt{k^2-w^2})}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2-w^2}\right)} \right| = \left| \frac{\sin y p \cosh y q + i \cos y p \sinh y q}{\cos \frac{\pi}{2} p \cosh \frac{\pi}{2} q - i \sin \frac{\pi}{2} p \sinh \frac{\pi}{2} q} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sin^2 y p + \sinh^2 y q}{\cos^2 \frac{\pi}{2} p + \sinh^2 \frac{\pi}{2} q} \right|^{1/2} \leq \left[ 1 + \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{2} p + \sinh^2 \frac{\pi}{2} q} \right]^{1/2} \leq k$$

op  $\Gamma_n$ , omdat de noemer  $\cos^2 \frac{\pi}{2} p + \sinh^2 \frac{\pi}{2} q$  op  $\Gamma_n$  een positieve ondergrens heeft  
 onafhankelijk van  $n$ . Immers,

$$\cos^2 \frac{\pi}{2} p + \sinh^2 \frac{\pi}{2} q \geq \frac{\pi^2 q^2}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{2} p = \frac{\pi^2}{4} |k^2-w^2| + \cos^2 \frac{\pi}{2} p - \frac{\pi^2 p^2}{4}$$

$$\geq \frac{\pi^2}{4} |k^2-w^2| + \cos^2 \frac{\pi}{2} |k^2-w^2|^{1/2} - \frac{\pi^2}{4} |k^2-w^2| = \cos^2 \frac{\pi}{2} |k^2-w^2|^{1/2}$$

berwijkt voor  $n$  voldoende groot geldt.

$$\left| \frac{1}{k^2-w^2} \right|^{1/2} = \left| \frac{1}{k^2-w^2} \right|^{1/2}$$

$$|k^2 - w^2|^n = |w| \left[ 1 + O\left(\frac{1}{|w|^2}\right) \right] = R_n \left[ 1 + O\left(\frac{1}{R_n}\right) \right] = (2n+2) + O\left(\frac{1}{R_n}\right), \quad w \in \Gamma_n.$$

$$C_n^2 \int_{\Gamma} |k^2 - w^2|^n = C_n^2 \left[ \frac{2n+2}{2} + O\left(\frac{1}{C_n}\right) \right] = 1 + O\left(\frac{1}{C_n}\right), \quad w \in \Gamma_n.$$

De integraal voor  $u(x,y)$  laat zich nu uitwerken met behulp van het lemma van Jordan; aan de voorwaarden voor toepassing van dit lemma is voldaan.

We vinden dan met residuerekening,

$$u(x,y) = -\frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{w=-\sqrt{k^2-(2n+1)^2}} \frac{\sin(y\sqrt{k^2-w^2})}{\sqrt{k^2-w^2} \cos(\sqrt{k^2-w^2})} e^{-ixw} = \frac{i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k^2-(2n+1)^2}} \sin(2n+1)y \exp[ix\sqrt{k^2-(2n+1)^2}], \quad x > 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Algemeen geldt voor  $x > 0$  en  $x < 0$ ,

$$u(x,y) = \frac{i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k^2-(2n+1)^2}} \sin(2n+1)y \exp[i|x|\sqrt{k^2-(2n+1)^2}], \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

in overeenstemming met het resultaat (I) op p. 16.

Men kan gemakkelijk verifiëren dat bovenstaand resultaat ook geldt voor  $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$ .

$$\sqrt{k^2-(2n+1)^2} = \begin{cases} [k^2-(2n+1)^2]^{1/2}, & k > 2n+1 \\ i[(2n+1)^2-k^2]^{1/2}, & k < 2n+1 \end{cases}$$

1-5-1984  
5° N.N. Lebedev, I.P. Skalskaya and V.S. Uflyand,

Problems of Mathematical Physics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965, probl. 308.

1974, 1975, 1976  
1977, 1978, 1979  
1981, 1982  
1983, 1984  
We beschouwen het volgende potentiaalprobleem

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty, y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \\ u(x,y) \text{ begrensd voor } & -\infty < x < \infty, y > 0. \end{cases}$$

Zie ook Collegedictaat Partiele Differentiaalvergelijkingen § 7.7; de oplossing van het bovenstaande Dirichlet probleem is eenduidig.

Voor in de Fourier transform  $\omega$

$$U(\omega, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{i\omega x} dx,$$

en neem aan dat deze Fourier transform bestaat voor  $\omega$  reëel.

Onderstel voorts dat de afgeleiden  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  door Fourier transformatie vergeaan in

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\omega x} dx = -\omega^2 U(\omega, y), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{i\omega x} dx = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Na Fourier transformatie ontstaat nu het getransformeerde probleem,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \omega^2 U = 0, & y > 0, \\ U(\omega, 0) = F(\omega), \end{cases}$$

waarbij

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

We eisen voorts dat  $U(\omega, y)$  begrensd zal zijn voor  $y > 0$ .

52.

26c<sup>A</sup>

N.B. De functie  $u(x, y)$  stemt juist overeen met de functie van Green  
 $G(x, y; 0, a)$ ; zie Collegedietaat Partiel Differentiaalvergelijkingen,  
§ 7.6.

De oplossing van het getransformeerde probleem leidt dan

$$U(w, y) = F(w) \exp(-|w|y), \quad w \text{ reëel.}$$

Bepaal nu de inverse Fourier transform van  $U(w, y)$  met behulp van de convolutiestelling. Bereken daarbij eerst de inverse Fourier transform van de functie  $\exp(-|w|y)$ , viz.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|w|y) e^{-iwx} dw = \sqrt{\frac{y}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

overeenkomstig voorbeeld 10 van p. 8. (§2.4)

Toepassing van de convolutiestelling geeft nu

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} f(x) * \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

De afleiding van dit resultaat was grotendeels formeel en allerlei tussenstappen dienen nog nader te worden behalen en preciezer bewezen. Eenvoudiger is echter om rechtstreeks te verifiëren dat het gevonden resultaat inderdaad oplossing is van het gestelde Dirichlet probleem; zie Collegedictaat Partiele Differentiaalvergelijkingen, <sup>§7.7</sup> waar hetzelfde resultaat is afgeleid met een Green's functie techniek.

6° N.N. Lebedev, I.P. Skobkaya and Y.S. Uflyand.

Problems of Mathematical Physics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965,

problem 312.

1973, 1974, 1977, 1981, 1982, 1987, 1989  
1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025

We beschouwen het volgende potentiaalprobleem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\delta(x) \delta(y-a), & -\infty < x < \infty, 0 < y < \pi \quad (0 < a < \pi) \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \\ u(x, y) \rightarrow 0 \text{ voor } x \rightarrow \pm\infty. \end{cases}$$

De functie  $u(x, y)$  is de potentiaal van een "lijnbelasting" geplaatst in  $x=0, y=a$  tussen twee geleide, gelijde vlakke platen  $y=0, y=\pi$ .

Voor in de Fourier transform

$$U(w, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{iwx} dx.$$

Formele toepassing van Fourier transformatie leidt tot het getransformeerde probleem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - w^2 U = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(y-a), & 0 < y < \pi, \\ U(w, 0) = U(w, \pi) = 0. \end{cases}$$

De oplossing van het laatste probleem leidt

$$\begin{cases} U(w, y) = A(w) \sinh(wy), & 0 < y < a, \\ U(w, y) = B(w) \sinh((\pi-y)w), & a < y < \pi, \end{cases}$$

waarin  $A(w), B(w)$  nader te bepalen functies van  $w$  zijn.

Integreer de getransformeerde vergelijking van  $y = a - \varepsilon$  naar  $y = a + \varepsilon$ , en neem  $\varepsilon \downarrow 0$ , dan volgt

$$\frac{\partial U}{\partial y}(w, a+0) - \frac{\partial U}{\partial y}(w, a-0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad U(w, a+0) - U(w, a-0) = 0.$$

Met behulp van deze relaties is eenvoudig te berekenen

$$A(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sinh[(\pi-a)w]}{w \sinh \pi w}, \quad B(w) = \frac{\sinh(aw)}{\sqrt{2\pi} w \sinh \pi w},$$

zodat we vinden

$$\begin{cases} U(w, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sinh[(\pi-a)w] \sinh(wy)}{w \sinh \pi w}, & 0 < y < a, \\ U(w, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sinh(aw) \sinh(w(\pi-y))}{w \sinh \pi w}, & a < y < \pi. \end{cases}$$

Merkt op dat de twee resultaten in elkaar overgaan door verwisseling van  $y$  en  $a$ .

Inverse transformatie geeft voor  $u(x, y)$ ,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh[(\pi-a)w] \sinh(wy)}{w \sinh \pi w} e^{-ixw} dw, \quad 0 < y < a,$$

terwijl een soortgelijk resultaat geldt in geval  $a < y < \pi$ .

We zullen bovengenoemde integraal nog verder herleiden met behulp van contourintegratie en residuerekening. Merk daarbij op dat de integrand analytisch is in  $w$  behalve in de enkelvoudige polen  $w = \pm ni$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  gelegen op de imaginair as;  $w = 0$  is geen pool. Voor later gebruik berekenen we het residu

$$\begin{aligned} \text{Res}_{w=ni} \frac{\sinh[(\pi-a)w] \sinh wy}{w \sinh \pi w} e^{-ixw} &= \pm \frac{\sinh[(\pi-a)ni] \sinh(niy)}{ni \pi \cosh(\pi ni)} e^{\pm nx} \\ &= \mp i \frac{\sin na \sin ny}{n\pi} e^{\pm nx} \end{aligned}$$

We sluiten nu de integratieweg door een halve cirkel  $T_n^{\pm}$ :  $|w| = n + \frac{1}{2}$  in het boven- of in het benedenhalfvlak afhankelijk van  $x < 0$  of  $x > 0$ .

We tonen de werkhoud aan dat de factor

$$\frac{\sinh[(\pi-a)w] \sinh wy}{w \sinh \pi w} = \frac{\cosh[(\pi-ay)w] - \cosh[(\pi-a-y)w]}{2 \cosh w \sinh \pi w}$$

begrensd is op  $T_n^{\pm}$ .

Stel daarom  $w = p+iq$ ,  $p^2+q^2 = (n+\frac{1}{2})^2$  dan is

$$\begin{aligned} |\sinh wy| &= |\sinh(p+iq)y| = |\sinh py \cosh qy + i \sinh py \sinh qy| \\ &= [\sinh^2 py + \cosh^2 qy]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Beschouw nu de vorm  $\frac{\cosh kw}{\sinh \pi w}$ ,  $0 \leq k \leq \pi$  op  $T_n^{\pm}$  en stel  $w = p+iq$ , met  $p^2+q^2 = (n+\frac{1}{2})^2$ :

Voorbeeld § 2.7 (p. 216):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{e^{i\omega z}}{\sinh z} dz = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-\pi\omega/2)}{\cosh(\pi\omega/2)}, \quad 0 < \omega < \pi, \quad -1 < \operatorname{Im} \omega < 1.$$

$$|\cosh zw| = |\cosh z(p+iq)| = |\cosh zp \cos zq + i \sinh zp \sin zq| = \\ = [\sinh^2 zp + \cos^2 zq]^{\frac{1}{2}},$$

$$|\sinh \pi w| = |\sinh \pi p \cos \pi q + i \cosh \pi p \sin \pi q| = [\sinh^2 \pi p + \sin^2 \pi q]^{\frac{1}{2}},$$

$$\left| \frac{\cosh zw}{\sinh \pi w} \right| = \left[ \frac{\sinh^2 zp + \cos^2 zq}{\sinh^2 \pi p + \sin^2 \pi q} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ 1 + \frac{\cos^2 zq - \sin^2 \pi q}{\sinh^2 \pi p + \sin^2 \pi q} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2},$$

want voor  $0 \leq p \leq (n+\frac{1}{2})$ ,  $q = \sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - p^2}$  geldt

$$\sinh^2 \pi p + \sin^2 \pi q \geq \pi^2 p^2 + \sin^2 \pi q = \pi^2 (n+\frac{1}{2})^2 + \sin^2 \pi q - \pi^2 q^2$$

$$\geq \pi^2 (n+\frac{1}{2})^2 + \sin^2 \pi (n+\frac{1}{2}) - \pi^2 (n+\frac{1}{2})^2 = 1,$$

daar  $\sin^2 \pi q - \pi^2 q^2$  een afnemende functie van  $q$  is voor  $0 \leq q \leq n+\frac{1}{2}$ .

Op de integraal  $u(x,y)$  is nu het lemma van Jordan van toepassing:

De integraal langs de cirkelboog  $\Gamma_n^z$  zal tot 0 naderen voor  $n \rightarrow \infty$ .

Het residuerekening volgt nu:

$$u(x,y) = \frac{2\pi i}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{w=\bar{z}+ki} \frac{\sinh(\pi a w) \sinh(\pi y)}{w \sinh(\pi w)} e^{-ixw} \quad (x \geq 0)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \pi a \sin \pi y}{n} e^{-n|x|}, \quad 0 < y < a.$$

Evenzo vinden

voor  $a < y < \pi$  vinden we dezelfde uitkomst (verwisseling van  $a$  en  $y$  verandert de uitkomst niet!).

Opgave. Sommeer de gevonden reeks en laat zien dat  $u(x,y)$  ook gegeven wordt door

$$u(x,y) = \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{1 - 2e^{-|x|} \cos(y+a) + e^{-2|x|}}{1 - 2e^{-|x|} \cos(y-a) + e^{-2|x|}} \right), \quad 0 < y < \pi. \\ = \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{\cosh x - \cos(y+a)}{\cosh x - \cos(y-a)} \right).$$

Op de vlakke platen wordt  $y=0$ ,  $y=\pi$  wordt een negatieve lading geïnduceerd met ladingsdichtheid  $\sigma = \frac{\partial u}{\partial n}$  waarbij  $n$  de naar buiten gerichte normaal voorstelt.

De het bijzonder vinden we op de plaats  $y=0$  een geïnduceerde ladingdichtheid

$$\sigma(x) = - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(\pi a w)}{\sinh \pi w} e^{-ixw} dw.$$

De laatste integraal is expliciet te berekenen met behulp van voorbeeld

2° van p. 316,

(p. 27)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c+ic}^{c+ic} \frac{e^{-izw}}{\sinh \pi w} dw = - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{\cosh \frac{1}{2}z},$$

geldig voor  $0 < c < 1$ ,  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ .



57.

26f<sup>A</sup>

$$\cosh \frac{1}{2}(x + \pi i - ai) \cosh \frac{1}{2}(x - \pi i + ei) = \frac{1}{2} [\cosh x + \cos(\pi - a)] = \frac{1}{2} [\cosh x - \cos a]$$

Voor de ladingdichtheid  $\sigma(x)$  vinden we met behulp van het laatste resultaat

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\pi-a)w} - e^{-\pi-a-w}}{\sinh \pi w} e^{-ixw} dw = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\exp[-iw(x+\pi-a)] - \exp[-iw(x-\pi+a)]}{\sinh \pi w} dw \\ &= \frac{i}{4\pi} \left[ \frac{\exp\left[\frac{i}{2}x + \frac{\pi i}{2} - \frac{ai}{2}\right]}{\cosh \frac{i}{2}(x+\pi-a)} - \frac{\exp\left[\frac{i}{2}x - \frac{\pi i}{2} + \frac{ai}{2}\right]}{\cosh \frac{i}{2}(x-\pi+a)} \right] = \\ &= -\frac{e^{\frac{i}{2}x}}{4\pi} \left[ \frac{\exp\left(-\frac{ai}{2}\right)}{\cosh \frac{i}{2}x \sin \frac{1}{2}a + i \sinh \frac{i}{2}x \cos \frac{1}{2}a} + \frac{\exp\left(\frac{ai}{2}\right)}{\cosh \frac{i}{2}x \sin \frac{1}{2}a - i \sinh \frac{i}{2}x \cos \frac{1}{2}a} \right] = \\ &= -\frac{e^{\frac{i}{2}x}}{4\pi} \cdot \frac{2 \cosh \frac{i}{2}x \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a - 2 \sinh \frac{i}{2}x \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a}{\cosh^2 \frac{i}{2}x \sin^2 \frac{1}{2}a + \sinh^2 \frac{i}{2}x \cos^2 \frac{1}{2}a} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\sin a}{\cosh x - \cos a} \end{aligned}$$

Een analogoog resultaat is af te leiden voor de ladingdichtheid  $\sigma^*(x)$  op de plaat  $y = \pi$ ,

$$\sigma^*(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sin a}{\cosh x + \cos a}$$

verbreiden door in de vorige uitkomst  $a$  te vervangen door  $\pi-a$ .

Opgaven: 1. Controleer de uitkomst voor  $\sigma(x)$  door uit te gaan van het expliciete resultaat voor  $u(x,y)$  vermeld in de opgave op p. 26/.

2. Toon aan dat  $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^*(x) dx = -1$ , en interpreteer dit antwoord.

7. C. J. Bouwkamp, *Capita selecta uit de Toegepaste Wiskunde*, Collegereferaat 1967, p. 1-13, 34-38.

We beschouwen het volgende potentiaalprobleem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, & -a < x < a, \quad -b < y < b, \\ v(x, \pm b) = 0, & -a < x < a, \\ v(x, 0) = 1, & -a \leq x \leq a, \\ v(x, y) \rightarrow 0 & \text{voor } x \rightarrow \pm a, |y| \leq b. \end{cases}$$

Probleem is te herleiden tot integraalvergelijking voor ladingdichtheid  $\sigma(x) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x, 0)$ ,  $-a \leq x \leq a$ . Bouwkamp laat deze integraalvergelijking af met Green's functie techniek (Green's functie is zelfde als die noemt in vorige voorbeeld 6°). Afleiding ook mogelijk via Fourier transformatie. Expliciete oplossing te bepalen met behulp van conforme afbeelding, zie Bouwkamp, loc. cit.

van Leceren (1977), 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984

8°. Dit voorbeeld is ontleend aan

G.F. Carrier, H. Krook and C.E. Pearson, *Functions of a complex variable*,  
Mc Graw-Hill, New York, 1966, p. 342, problem 14.

We beschouwen het volgende beginwaardeprobleem voor de golfvergelijking:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\delta(x-Vt) H(t), \\ u(x, t) = 0, \quad t < 0, \quad \text{of } u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

waarin  $H(t)$  de eenheidsstapfunctie is:  $H(t) = 1$  voor  $t > 0$ ,  $H(t) = 0$  voor  $t < 0$ .

Het probleem beschrijft de trilling van een oneindig lange snaar onder invloed van een geconcentreerde eenheidskracht aangrijpend in  $x = Vt$  vanaf het tijdstip  $t = 0$ ;  $u(x, t)$  is de uitwijking van de snaar ter plaats  $x$  en ten tijde  $t$ ;  $c$  is de voortplantingssnelheid in de snaar,  $c = \sqrt{T/\rho}$  met  $T$  is spanning en  $\rho$  is dichtheid.

We lossen het probleem op met Fourier transformatie:

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\xi x} dx.$$

De Fourier transform van  $\delta(x-Vt)$  is

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-Vt) e^{i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi Vt}.$$

Het getransformeerde probleem wordt nu

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + c^2 \xi^2 U = \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi Vt} H(t), \\ U(\xi, t) = 0, \quad t < 0 \end{cases}$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking luidt

$$U(\xi, t) = A e^{ic\xi t} + B e^{-ic\xi t} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{c^2}{(c^2 - V^2)\xi^2} e^{i\xi Vt}, \quad t > 0,$$

waarin  $A$  en  $B$  constanten zijn te bepalen uit

$$U(\xi, 0+) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(\xi, 0+) = 0.$$

N.B. Hierbij is ondersteld  $c \neq V$ .

Toepassing van de beginvoorwaarden levert

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{c}{(c-V)\xi^2}, \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{c}{(c+V)\xi^2},$$

waarna volgt

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{c^2}{(c^2 - V^2)\xi^2} e^{i\xi Vt} - \frac{1}{2} \frac{c}{(c-V)\xi^2} e^{ic\xi t} - \frac{1}{2} \frac{c}{(c+V)\xi^2} e^{-ic\xi t} \right].$$

De gezochte functie  $u(x, t)$  volgt nu door inverse Fourier transformatie van  $U(\xi, t)$ :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi,t) e^{-i x \xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{c^2}{c^2 - V^2} \frac{e^{i\xi Vt}}{\xi^2} - \frac{1}{2} \frac{c}{c-V} \frac{e^{i c \xi t}}{\xi^2} - \frac{1}{2} \frac{c}{c+V} \frac{e^{-i c \xi t}}{\xi^2} \right] e^{-i x \xi} d\xi.$$

Elk van de drie termen van de integrand is singulier in  $\xi = 0$ ; de totale integrand heeft echter een eindige limiet als  $\xi \rightarrow 0$ . Neem nu de variabele  $\xi$  complex en verform de integratieweg door met een klein cirkeltje om  $\xi = 0$  langs te lopen (instatie:  $\int_{-\infty}^{\infty}$ ). De functie  $u(x,t)$  is dan de som van drie integralen die we aangeven door  $u_1, u_2, u_3$ .

De integraal

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{c^2}{c^2 - V^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(Vt-x)}}{\xi^2} d\xi$$

is niet te werken door sluiting van de integratieweg met een halve cirkel naar beneden (indien  $Vt - x < 0$ ) of naar boven (indien  $Vt - x > 0$ ). De bijdrage van de halve cirkel tot de integraal is in beide gevallen 0 of grond van het lemma van Jordan. We vinden op deze wijze

$$(I) \quad u_1(x,t) = 0 \text{ als } x > Vt, \quad u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{c^2}{c^2 - V^2} 2\pi i \operatorname{Res}_{\xi=0} \frac{e^{i\xi(Vt-x)}}{\xi^2} = -\frac{c^2}{c^2 - V^2} (Vt - x) \text{ als } x < Vt.$$

Op dezelfde wijze zijn ook de integralen  $u_2(x,t), u_3(x,t)$  te berekenen.

$$(II) \quad u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & , x > ct \\ \frac{1}{2} \frac{c}{c-V} (ct-x), & x < ct \end{cases} \quad (III) \quad u_3(x,t) = \begin{cases} 0 & , x > ct \\ -\frac{1}{2} \frac{c}{c+V} (ct+x), & x < -ct. \end{cases}$$

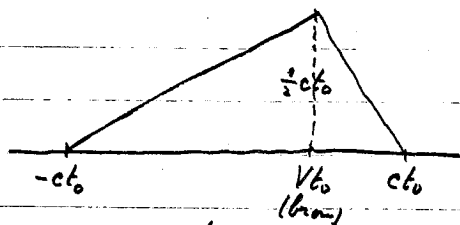
De functie  $u(x,t)$  wordt nu verkregen door sommatie van (I), (II) en (III).

Merck op dat voor  $x < -ct$  geldt

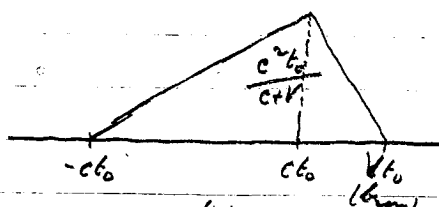
$$u(x,t) = -\frac{c^2}{c^2 - V^2} (Vt - x) + \frac{1}{2} \frac{c}{c-V} (ct - x) - \frac{1}{2} \frac{c}{c+V} (ct + x) = 0;$$

voorts is ook  $u(x,t) = 0$  voor  $x > \max(c, V)t$ . Voor gegeven  $t > 0$  speelt de trilling van de snaar zich af in het gebied  $-ct < x < \max(c, V)t$ , daarbuiten is de snaar in rust. Aangezien  $u_1, u_2, u_3$  lineaire functies van  $x$  zijn, wordt de vorm van de snaar beschreven door een gebroken lijn. Hierbij zijn de twee gevallen  $V < c$  en  $V > c$  apart te beschouwen; zie onderstaande figuren.

Uitwijking  $u(x,t_0)$  ten tijde  $t_0 > 0$ .



( $V < c$ )



( $V > c$ )

Behandel zelf het geval  $c = V$ .

Nitaraard zijn deze afleidingen zuiver formeel: ze gelden alleen indien de diverse Fourier integralen bestaan en convergent zijn.

Voorbeeld:

Beschouw de integraalvergelijking,

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{d\xi}{\cosh(\lambda(x-\xi))}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$-1 < 2\pi\lambda < 1$$

Lees  $\lambda$  door  $\omega$   
vervangen.

Noem de Fourier getransformeerden van  $f$  en  $g$  weer  $F$  en  $G$ . De F.T. van de kern  $\frac{1}{\cosh \lambda x}$  wordt gegeven door,

$$K(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{\cosh \lambda x} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\cosh \pi y} \quad \text{Zie voorbeeld § 27, p. 216.}$$

De integraalvergelijking gaat nu na Fourier transformatie over in,

$$F(y) = G(y) + \frac{2\pi\lambda}{\cosh \pi y} F(y)$$

met als oplossing,

$$F(y) = G(y) \frac{\cosh \pi y}{\cosh \pi y - 2\pi\lambda}$$

We onderstellen nu dat  $-1 < 2\pi\lambda < 1$ , dan bestaat er een  $\alpha$  met  $0 < \alpha < \pi$  zodat

$$2\pi\lambda = \cos \alpha. \quad \text{Schrijf nu,}$$

$$F(y) = G(y) + \cos \alpha \frac{G(y)}{\cosh \pi y - \cos \alpha}$$

We bepalen nu de inverse F.T. van  $\frac{1}{\cosh \pi y - \cos \alpha}$ ,

$$k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy}}{\cosh \pi y - \cos \alpha} dy.$$

Pas daartoe een analoge truc toe als op bl. 25,

$$k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x} \int_{-\alpha + 2\pi i}^{\alpha + 2\pi i} \frac{e^{-ixy}}{\cosh \pi y - \cos \alpha} dy,$$

waarna

$$(1 - e^{2x}) k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\alpha + 2\pi i}^{-\alpha + 2\pi i} \right) \frac{e^{-ixy}}{\cosh \pi y - \cos \alpha} dy.$$

Binnen deze contour heeft de integrand nu twee polen in de punten  $y = i\alpha$  en  $y = i(\pi - \alpha)$

De berekening van de residuen volgt,

$$(1 - e^{2x}) k_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{e^{-\alpha x}}{\sin \alpha \pi} - \frac{e^{-(\pi - \alpha)x}}{\sin \alpha \pi} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^x}{\sin \alpha \pi} 2 \sinh(\alpha - 1)x$$

waarna

$$k_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sin \alpha \pi} \frac{\sinh(1 - \alpha)x}{\sinh x}$$

Met de convolutiestelling volgt nu,

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{\pi} \frac{\cos \alpha \pi}{\sin \alpha \pi} \frac{\sinh(1 - \alpha)x}{\sinh x} * g(x) =$$

$$= g(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha \pi \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\sinh(1 - \alpha)(x - \xi)}{\sinh(x - \xi)} d\xi.$$

in 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985

Opmerking Indien  $2\pi\lambda \geq 1$  of  $(2\pi\lambda \leq -1)$  kan men gemakkelijker zien dat de homogene vergelijking ~~een~~ triviale oplossing heeft.

$$f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{d\xi}{\cosh(\lambda(x-\xi))}$$

en niet-triviale oplossing heeft. Zij b.v.  $2\pi\lambda \geq 1$ , stel dan  $2\pi\lambda = \cosh \beta$ ,  $\beta \geq 0$ .

We beweren dat nu  $f(x) = e^{\beta x}$  voldoet aan de homogene integraalvergelijking.

Wiener-Hopf techniek overgehoort in 1978

Verre literatuur:

J.B. Alblas en J.A. Spanenberg, "Mathematische problemen uit de praktijk:  
Wiener-Hopf integraalvergelijkingen".  
Colloquium Math. Centrum, 1957.

Geeft beknopte theorie van Fourier integralen; voorbeelden van integraalvgl.  
en van randwaardeproblemen op te lossen met Wiener-Hopf techniek; behandelen  
randwaardeproblemen: Sommerfeld's halfvlakprobleem, diffractie aan een kraak,  
diffractie van watergolven aan een half-occluder dan  $\alpha$  en rotorend aarde.

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\alpha \xi}{\cosh \xi(x-\xi)} d\xi = \frac{\cosh \pi \beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta \xi}}{\cosh \xi(x-\xi)} d\xi =$$

$$= \frac{\cosh \pi \beta}{2\pi} e^{i\beta x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta u}}{\cosh \xi u} du = \cosh \pi \beta \frac{e^{i\beta x}}{\cosh \pi \beta} = e^{i\beta x} = f(x).$$

Evenzo voldoet  $f(x) = e^{-i\beta x}$  aan de homogene integraalvergelijking.

~~In het algemeen zal in geval  $200 \leq -1$  of  $200 \geq 1$  de vooropstelde integraalvergelijking slechts onder bepaalde voorwaarden voor gegeven oplossing bestaan terwijl de oplossing niet eenduidig is. De oplossing van de vooropstelde integraalvergelijking zal daarom in het geval  $200 \leq -1$  of  $200 \geq 1$  zeker niet eenduidig zijn.~~

### Wiener-Hopf techniek

~~De methode van Wiener en Hopf, die we in het volgende zullen bespreken, werd voor het eerst uiteengezet door Wiener en Hopf in een artikel in de *Sitzungsberichte*~~

1-5-1974 | 29.11.1977

### Wiener-Hopf techniek

De methode van Wiener en Hopf, die we in het volgende zullen bespreken, dateert van 1931. Vooropstelig ingevoerd ter oplossing van een bepaalde klasse van integraalvergelijkingen bleef naderhand de Wiener-Hopf techniek ook van toepassing te zijn bij de oplossing van andere randwaardeproblemen. Van beide categorieën van problemen zullen we hier voorbeelden geven.

Voor een goed overzicht van de Wiener-Hopf techniek, zie:

B. Noble, *Methods based on the Wiener-Hopf technique*, Pergamon Press, London, 1958.

### Integraalvergelijkingen

De Wiener-Hopf techniek werd ingevoerd ter oplossing van integraalvergelijkingen van het volgende convolutie type:

$$g(x) = \int_0^{\infty} f(\xi) k(x-\xi) d\xi + f(x), \quad 0 < x < \infty,$$

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} f(\xi) k(x-\xi) d\xi, \quad 0 < x < \infty.$$

De functie  $g$  en de kern  $k$  zijn hierbij gegeven, de functie  $f$  wordt gevraagd te bepalen.

De integraalvergelijkingen zijn weer van de eerste resp. tweede soort. De tegenstelling tot de voorgaande integraalvergelijkingen van het convolutie type gelden nu de vergelijkingen slechts op het half-eindige interval  $0 < x < \infty$ .

We behandelen eerst de integraalvergelijking van eerste soort. We voeren in functies

$f_+^*(x)$ ,  $f_-^*(x)$  volgen

$$f_+^*(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_-^*(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \int_0^{\infty} f(\xi) k(x-\xi) d\xi, & x < 0 \end{cases}$$

Wiberaard is  $f_+^*(x)$  een bekende functie, terwijl  $f_-^*(x)$  nog onbekend is.

Hierin is  $f$  de  
integroal-  
vergelijking

$f(x) = 0$  stellen voor  
gaat over in  $x < 0$  gaat de integraalvergelijking over in.

$$g_+^*(x) + g_-^*(x) = \int_0^{\infty} k(x-\xi) f(\xi) d\xi, \quad -\infty < x < \infty$$

a.i. een vergelijking van het zelfde type als in het vorige beschouwd.

We stellen nu de complexe F.T. van  $g_+^*, g_-^*, f$  voor door  $G_+^*(w), G_-^*(w), F(w) = \frac{F_+^*(w)}{F_-^*(w)}$ .  
Onderstellen we nu dat  $k(w)$  bestaat en analytisch is in een strook  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ , dat  $G_+^*(w), F_+^*(w)$  bestaan en analytisch zijn voor  $\text{Im } w > \beta$  resp.  $\text{Im } w > \beta_1$  en dat  $G_-^*(w)$  bestaat en analytisch is voor  $\text{Im } w < \beta$ . Indien nu  $\beta_1, \beta_2 > \alpha$ ,  $\alpha < \beta_1, \beta_2$  zodat deze gebieden elkaar overlappen, dan is over de in a.v. in een

$$\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2) < \beta = \min(\beta_1, \beta_2)$$

stellen in de strook  $\alpha < \text{Im } w < \beta$  de F.T.'s  $G_+, G_-, F_+, k$  bestaan en analytisch zijn.  
Door Fourier transformatie gaat de integraalvergelijking over in,

$$G_+^*(w) + G_-^*(w) = \sqrt{2\pi} k(w) F_+^*(w), \quad \alpha < \text{Im } w < \beta.$$

In deze functionaalvergelijking zijn  $G_+(w), k(w)$  bekend, terwijl  $F_+(w)$  en  $G_-(w)$  bepaalde waarden worden.

7-5-1968 In geval van een integraalvergelijking van tweede soort voeren we in functies

$$g_+^*(x), f_+(x), f_-(x) \text{ volgens,}$$
$$g_+(x) = \begin{cases} g_+(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_+(x) = \begin{cases} f_+(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \int_0^{\infty} k(x-\xi) f(\xi) d\xi, & x < 0 \end{cases}$$

De integraalvergelijking gaat dan over in.

$$f_+(x) + f_-(x) = g_+(x) + \int_0^{\infty} k(x-\xi) f(\xi) d\xi, \quad -\infty < x < \infty,$$

waarin  $f_+(x)$  en  $f_-(x)$  bepaalde waarden worden. Neem weer aan dat de F.T.'s  $F_+(w), F_-(w), G_+(w), k(w)$  van  $f_+(x), f_-(x), g_+(x), k(x)$  een gemeenschappelijk strook bezitten waar ze bestaan en analytisch zijn. Na Fourier transformatie gaat de integraalvergelijking dan over in.

$$F_+(w) + F_-(w) = G_+(w) + \sqrt{2\pi} k(w) F_+(w), \quad \alpha < \text{Im } w < \beta.$$

In deze functionaalvergelijking zijn  $G_+(w), k(w)$  bekend. Terwijl gevraagd wordt  $F_+(w), F_-(w)$  te bepalen.

8-5-1969 We kunnen nu de functionaalvergelijking zoals deze voortkomt uit F.T. van  
29-4-70 4-12-75  
1-1-76 een integraalvergelijking van eerste of tweede soort in het algemeen als volgt voorstellen:

$$A(w) \Phi_+(w) + B(w) \frac{\Psi_-(w)}{B(w)} + C(w) = 0, \quad \alpha < \text{Im } w < \beta.$$

Hierin zijn  $A(w), B(w), C(w)$  gegeven functies, analytisch in de strook  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ .  
De functies  $\Phi_+(w), \Psi_-(w)$  zijn de gevraagde functies:  $\Phi_+(w)$  is analytisch in het boven-halvvlak  $\text{Im } w > \alpha$ ,  $\Psi_-(w)$  is analytisch in het beneden-halvvlak  $\text{Im } w < \beta$ .

2-12-76 De fundamentele stap in de methode van Wiener en Hopf is dat we het quotiënt  $A(w)/B(w)$  a.v. schrijven,



$$\frac{A(w)}{B(w)} = \frac{K_+(w)}{K_-(w)}$$

waarbij  $K_+(w)$  analytisch is voor  $\text{Im } w > \alpha$ ,  $K_-(w)$  analytisch is voor  $\text{Im } w < \beta$ . Deze fundamentele stap wordt factorisatie genoemd. In eenvoudige gevallen ligt de oplossing <sup>20</sup> voor de hand en is de oplossing van  $K_+(w), K_-(w)$  gemakkelijk met te vinden. Er bestaan echter ook algemene gevallen, met behulp waarvan de factorisatie kan worden uitgevoerd, zie Nöbb.

Deel nu de functievergelijking door  $B(w)$ , & substitueer het resultaat boven en vermenigvuldig het geheel met  $K_-(w)$ , dan volgt:

$$K_+(w) \Phi_+(w) + K_-(w) \Psi_-(w) + K_-(w) \frac{C(w)}{B(w)} = 0.$$

De tweede stap bestaat nu in de splitsing van de derde term.

$$K_-(w) \frac{C(w)}{B(w)} = D_+(w) + D_-(w)$$

waarbij de functie  $D_+(w)$  analytisch is voor  $\text{Im } w > \alpha$ ,  $D_-(w)$  analytisch is voor  $\text{Im } w < \beta$ .

Dan volgt:

$$K_+(w) \Phi_+(w) + D_+(w) = -K_-(w) \Psi_-(w) - D_-(w), \quad \alpha < \text{Im } w < \beta.$$

Het linkerlid is nu analytisch voor  $\text{Im } w > \alpha$ , het rechterlid voor  $\text{Im } w < \beta$ . Beide leden zijn gelijk voor  $\alpha < \text{Im } w < \beta$ . Linkerlid en rechterlid zijn dan elkaars analytische voortzetting. Samen definiëren ze een ghele functie welke analytisch is in het ghele  $w$ -vlak d.i. een ghele functie. Noem deze functie  $J(w)$ .

Naal is het mogelijk uit de gegevens van het probleem over het o/a te leren met het gedrag van linkerlid en rechterlid voor  $|w| \rightarrow \infty$  b.v.

$$K_+(w) \Phi_+(w) + D_+(w) = O(|w|^k) \text{ als } |w| \rightarrow \infty, \text{ Im } w > \alpha,$$

$$K_-(w) \Psi_-(w) + D_-(w) = O(|w|^q) \text{ als } |w| \rightarrow \infty, \text{ Im } w < \beta.$$

In dat geval volgt uit de stelling van Liouville (zie Wiskunde II, p. 30) dat  $J(w) = P(w) =$  polynoom van graad  $\leq \min\{k, q\}$ .

In de meeste praktisch voorkomende gevallen zal deze polynoom klein zijn zodat  $P(w)$  van lage graad is.

Nu  $J(w)$  is vastgelegd, volgt er:

$$K_+(w) \Phi_+(w) + D_+(w) = P(w), \quad \text{Im } w > \alpha,$$

$$K_-(w) \Psi_-(w) + D_-(w) = -P(w), \quad \text{Im } w < \beta,$$

waarmee  $\Phi_+(w), \Psi_-(w)$  zijn vastgelegd, althans zodra  $P(w)$  bekend is. Door krugtransformatie volgen dan de oorspronkelijke functies.

We zullen de Wiener Hoop beschriek nog toelichten aan de hand van een voorbeeld.

voorbeeld.

voorbeeld

Beschouw de integraalvergelijking van tweede soort,

$$f(x) = e^{-ax} + \lambda \int_0^{\infty} e^{-|x-\xi|} f(\xi) d\xi, \quad 0 < x < \infty,$$

waarin  $a > 0, 0 < \lambda < \frac{1}{2}$ .

Voor dit voorbeeld is:

6-5-1981 Beginn mit:  $F_+(w) + F_-(w) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{w+i} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} F_+(w)$

$\sqrt{1-2i} = \mu$  stellen

Hier  $A(w) = \frac{w+i\mu^2}{w+i}$ , analytisch für  $\text{Im } w < \mu$

Denon  $\mu > \mu$  wenn  $d = \max(-1, 0, -a, \mu)$

Faktorisiere  $= \frac{w+i\mu^2}{w+i} = \frac{K_+(w)}{K_-(w)}$  mit  $K_+(w)$  analytisch für  $\text{Im } w > \mu$

$K_-(w)$  analytisch für  $\text{Im } w < \mu$

Lemma von Jordan: Whisknoten I, p. 46

$$g_+(x) = e^{-ax}, \quad G_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax+wx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w+ia}, \quad \text{Im } w > -a.$$

$$k(x) = e^{-|x|}, \quad K(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|+wx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2+1}, \quad -1 < \text{Im } w < 1.$$

We proberen nu een oplossing  $f(x)$  te vinden met  $f(x) = O(e^{cx})$  voor  $x \rightarrow \infty$ , met  $c < 1$ .

Dan bestaat  $F_+(w)$  voor  $\text{Im } w > c$  en is daar analytisch. (stelling 5.1.1)

Voor  $x < 0$  zal gelden.

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-ix\epsilon} |f(\epsilon)| d\epsilon \right| \leq e^x \int_0^{\infty} e^{-\epsilon} O(e^{c\epsilon}) d\epsilon = O(e^x) \text{ indien } x \rightarrow -\infty.$$

De F.T.  $F_+(w)$  zal bestaan en analytisch zijn voor  $\text{Im } w < 1$ .

De analytischheidsgebieden tussen van  $F_+(w), F_-(w), G_+(w), K(w)$  hebben nu als overlapping de strook  $\alpha = \max(-1, c, -a) < \text{Im } w < \beta = 1$ . In deze strook zal gelden.

$$F_+(w) + F_-(w) = G_+(w) + \sqrt{2\pi} K(w) F_+(w),$$

$$F_+(w) \left\{ 1 - \frac{2d}{w^2+1} \right\} + F_-(w) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w+ia} = 0, \quad \alpha < \text{Im } w < \beta.$$

12-1977/6-5199  
We passen nu de volgende factorisatie toe.

$$1 - \frac{2d}{w^2+1} = \frac{w^2+(1-2d)}{w^2+1} = \frac{(w-a_1)(w-a_2)}{(w+i)(w-i)} = \frac{(w-a_1)(w-a_2)}{w+i} \cdot \frac{1}{w-i}$$

waarin  $a_1 = i\sqrt{1-2d}$ ,  $a_2 = -i\sqrt{1-2d}$ .

De functie  $\frac{(w-a_1)(w-a_2)}{w+i}$  is analytisch voor  $\text{Im } w > \frac{1}{2}$ ; de functie  $\frac{1}{w-i}$  is analytisch voor  $\text{Im } w < 1$ . Vermenigvuldigen we de functienaaldrukking met  $w-i$ .

$$\frac{w^2+(1-2d)}{w+i} F_+(w) + (w-i) F_-(w) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{w-i}{w+ia} = 0,$$

$$\frac{w^2+(1-2d)}{w+i} F_+(w) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{w-i}{w+ia} = -(w-i) F_-(w), \quad \alpha < \text{Im } w < \beta.$$

Het linkerlid van deze betrekking is nu analytisch voor  $\text{Im } w > \frac{1}{2}$ ; het rechterlid is analytisch voor  $\text{Im } w < 1$ . Beide leden stellen dus samen een gehele functie voor.

Op grond van het lemma van Riemann-Lebesgue is nu  $F_+(w) = O(1)$ ,  $F_-(w) = O(1)$  voor  $\text{Re } w \rightarrow \infty$ .

Linkerlid en rechterlid van de functienaaldrukking zijn daarom  $O(1)$  indien  $\text{Re } w \rightarrow \infty$ .

De gehele functie zal daarom een polynoom van de graad nul d.i. een constante zijn. Noem deze constante  $A$ , dan is, onder meer,

$$F_+(w) = \frac{A(w+i)}{w^2+(1-2d)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{w^2+1}{(w^2+(1-2d))(w+ia)}, \quad \text{Im } w > \max\left(\frac{1}{2}, c\right).$$

Het is duidelijk dat  $F_+(w)$  polen heeft in  $w = \pm i\sqrt{1-2d}$ ,  $w = -ia$ . Bovenstaande voorstelling geldt alleen voor  $\text{Im } w > \frac{1}{2}$ , en is daar analytisch.

Op grond van stelling 1.1.18 wordt nu de kerntransformatie gegeven door.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(w) e^{-ixw} dw =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w+i}{w^2+(1-2d)} e^{-ixw} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2+1}{(w^2+(1-2d))(w+ia)} e^{-ixw} dw, \quad x > 0.$$

We sluiten nu de integratie weg door een halve cirkel in het beneden halfvlak. De bijdrage van deze halve cirkel tot de integraal nadert tot nul, als de straal van de halve cirkel  $\rightarrow \infty$ .

Het behulp van residuerekening volgt.

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \left\{ \underset{w=i\sqrt{1-2d}}{\text{Res}} + \underset{w=-i\sqrt{1-2d}}{\text{Res}} \right\} \frac{(w+i)e^{-ixw}}{w^2+(1-2d)} + \left\{ \underset{w=i\sqrt{1-2d}}{\text{Res}} + \underset{w=-i\sqrt{1-2d}}{\text{Res}} + \underset{w=ia}{\text{Res}} \right\} \frac{w^2+1}{(w^2+(1-2d))(w+ia)} e^{-ixw} =$$

Hangt samen met  $a \neq \sqrt{1-2d}$ , anders de laatste pool!

Oplossing:

$$f(x) = -\frac{1-\mu^2}{2\mu} \left[ \frac{e^{\mu x}}{\mu+a} + \frac{e^{-\mu x}}{\mu-a} \right] + \frac{1-a^2}{\mu^2 a^2} e^{-ax}$$

$$+ A^* \left[ \frac{1+\mu}{\mu} e^{\mu x} - \frac{1-\mu}{\mu} e^{-\mu x} \right], \quad A^* = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ willekeurig}$$

$$\mu = \sqrt{1-2\epsilon}$$

Individueel is  $f(x) = O(e^{\mu x})$  voor  $x \rightarrow \infty$  met  $\mu < 1$ .

1974 reizen: Voorbeeld met C. Atkinson, Biometrika 61, 277-283 (1974) genoemd  
aan Memorandum 1974-11 (okt. 1974) uitgegeeft.

1975: idem plus tekst colloquium voordracht over n-voudige integraal uitgegeeft

1977: preprint "Non-linear integral equation of viscous flow theory" uitgegeeft.

~~Over de voorloper helpde problemen met betrekking tot 1960, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976,  
1977, 1979, 1982, 1983, wel in 1985~~

$$= -\frac{A}{\sqrt{1-a^2}} \left[ \frac{e^{x\sqrt{1-a^2}}}{\sqrt{1-a^2} + a} + \frac{e^{-x\sqrt{1-a^2}}}{\sqrt{1-a^2} - a} \right] + \frac{1-a^2}{1-a^2} e^{-ax}$$

$$+ A^* \left[ \frac{\sqrt{1-a^2} + 1}{\sqrt{1-a^2}} e^{x\sqrt{1-a^2}} - \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} e^{-x\sqrt{1-a^2}} \right]$$

waarin  $A^* = -A/\sqrt{1-a^2}$  en willekeurige constante is.

De term in de oplossing met de willekeurige constante  $A^*$  correspondeert met een oplossing van de homogene integraalvergelijking.

$$f(x) = \lambda \int_0^a e^{-\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi, \quad 0 < x < a.$$

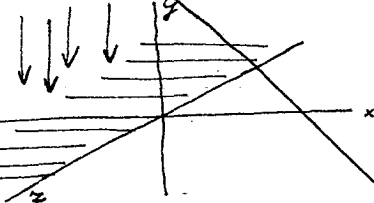
0.5.1979

C.2. Randwaardeproblemen.

We zullen nu een voorbeeld bespreken uit een klasse van randwaardeproblemen, welke eveneens met de Wiener-Hopf techniek zijn op te lossen. Vele van de problemen uit deze klasse zijn zgn. halfvoldeproblemen, dat zijn problemen waarbij de randvoorwaarden gegeven zijn op een halfvolde: zie Noble. Voorspreeklijk lost men deze problemen op door te eerst met behulp van b.v. Stieltjes een Grenson functie te herleiden tot een integraalvergelijking van het een volde type als besproken onder C.1. Naderhand heeft D.S. Jones er al eerste op gewezen dat men ook te op het voorspreeklijke randwaardeprobleem direct Fourier transformatie kan toepassen waarna onmiddellijk de functionaalvergelijking van het Wiener-Hopf type ontstaat. Noble volgt in zijn boek ook deze methode van Jones. We zullen hier ook eveneens volgen de methode van Jones als voorbeeld behandelen het

Samenvattend halfvoldeprobleem. — Zie binnengevogde aantekeningen, p. 1-10, d.d. 17.8.79

Gegeven een halfvolde  $-a < x \leq 0, y < 0, -a < z < a$ .



Het halfvolde wordt getroffen door een vlakke reclaire golf, welke loodrecht invalt.  
 $\phi_i = e^{-iky}$

De aanvang van loodrecht inval vormt geen wettelijke

beperking; ook voor niet loodrecht inval gaat het probleem eiel met de Wiener-Hopf techniek oplossen.

Deze golf wordt teruggesleut en geloges. We nemen de potentiaal van de totale golf  $\phi_t = \phi_0$  en stellen.

$$\phi_t = \phi + \phi_i$$

waarbij  $\phi$  de op' potentiaal van de verstrooide golf voorstelt. Het is duidelijk dat het hele probleem onafhankelijk is van  $z$ .

De functie  $\phi = \phi(x, y)$  moet nu voldoen aan

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0.$$

We zullen verder stellen als randvoorwaarde op het halfvolde  $\phi = 0$ , waaruit volgt

$$\phi = -\phi_i = -1 \quad \text{voor } y=0, \quad 0 < x < a.$$

Buiten het halfvolde moet  $\phi_t$  en dus  $\phi$  uiteraard continu zijn.

De grootte  $k$  zal complex zijn,  $k = k_1 + ik_2$ , met  $k_2 > 0$ . Vanuit de fysica gezien is  $k$  eijeljk

Mei 1984

Sommerfeld's diffractieprobleem voor een halfvlak

(onderdeel college Toegepaste Analyse II, J. Boursma)

Literatuur

A. Sommerfeld, Mathematische Theorie der Diffraction, Math. Ann. 47, 317-374 (1896).

A. Sommerfeld, Optics, Lectures on Theoretical Physics, Vol. II, Academic Press, New York, Sec. 38.

B. B. Baker and E. T. Copson, The mathematical theory of Huygens' principle, Clarendon Press, Oxford, 1953, Chapter II en I, §4.

E. T. Copson, On an integral equation arising in the theory of diffraction, Quart. J. Math., Oxford Ser. 17, 19-34 (1946).

M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon, Oxford, 1970, Sec. 11.5.

B. Noble, Methods based on the Wiener-Hopf technique, Pergamon, London, 1958, Chapter II.

D. S. Jones, A simplifying technique in the solution of a class of diffraction problems, Quart. J. Math. Oxford (2), 3, 189-196 (1952).

Formulering van het probleem

Wij behandelen Sommerfeld's diffractieprobleem in zijn twee-dimensionale vorm, beschreven in Cartesisch coördinaten  $x, y$ , en polcoördinaten  $r, \theta$ , met  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Gegeven is het halfvlak  $x \geq 0, y = 0$  (halfrecht in doorsnee), dat getroffen wordt door een vlakke golf

$$(1) \quad u^i(x, y) = \exp[-ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)] = \exp[-ikr \cos(\theta - \theta_0)]$$

invallend onder een hoek  $\theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi$ ) met het halfvlak; zie fig. 1. De parameter  $k$  in (1) is het golfgetal. Voorts wordt een harmonische tijdsafhankelijkheid volgens  $e^{-i\omega t}$  ( $\omega$  = frequentie) ondersteld; de tijdfactor is onderdrukt.

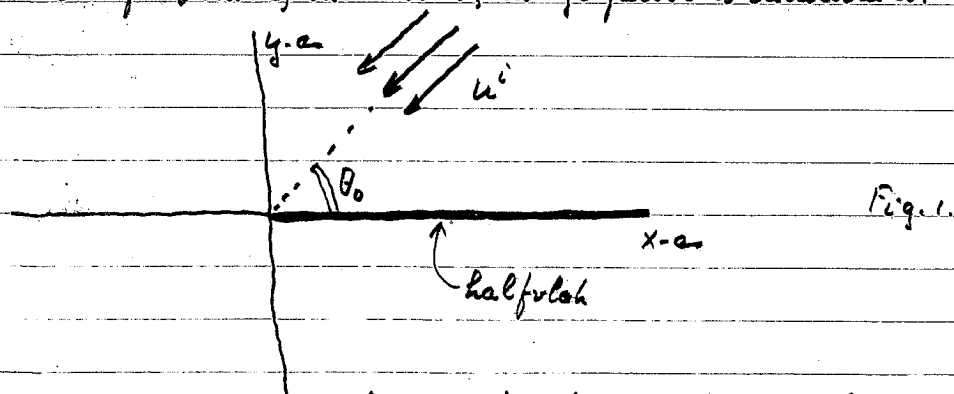


Fig. 1.

Beveegd wordt de resulterende totale golf  $u^t(x, y)$  te bepalen, welke dient te voldoen aan de randvoorwaarde  $u^t(x, 0) = 0, x > 0$ , op het halfvlak.

Voor nu in de vstrooiden golf  $u(x, y)$  gedefinieerd door

$$(2) \quad u(x, y) = u^t(x, y) - u^i(x, y).$$

Dan is  $u(x, y)$  oplossing van het volgende randwaardeprobleem:

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{binnen het halfvlak;} \\ u(x, 0) = -u^i(x, 0) = -\exp[-ikx \cos \theta_0], \quad x > 0; \\ u(x, y) \text{ voldoet aan de uitstralingsvoorwaarden.} \end{cases}$$

Het probleem (3) is voor het eerst opgelost door Sommerfeld in 1896 met een functie theoretische methode (contour integralen); zie Sommerfeld, Behr & Copson, Chapter IV. Veel later is Sommerfeld's diffractieprobleem opgelost met Fourier transformatie en Wiener-Hopf techniek, en wel voor het eerst door Copson in 1946; zie Copson, Behr & Copson, Chapter II, §4, Noble.

In de oplossing volgens Copson wordt het probleem herleid tot een integraalvergelijking van het convolutionstype op  $[0, \infty)$ . Daartoe wordt eerst met een Green's functie techniek een integraalvoorstelling van  $u(x, y)$  afgeleid, namelijk

$$(4) \quad u(x, y) = -\frac{i}{2} \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}) h(\xi) d\xi,$$

waarin  $h(\xi) = \frac{\partial u}{\partial y}(\xi, 0+) - \frac{\partial u}{\partial y}(\xi, 0-)$  en  $H_0^{(1)}$  de Hankelfunctie van orde 0 en eerste soort vormstelt. Na oplossen van de randvoorwaarden op het halfvlak volgt voor  $h(\xi)$  de integraalvergelijking

$$(5) \quad i \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k|x-\xi|) h(\xi) d\xi = 2 \exp[-ikx \cos \theta_0], \quad x > 0.$$

Copson loste deze integraalvergelijking op met Fourier transformatie en Wiener-Hopf techniek.

Naderhand is door D. S. Jones opgemerkt dat de tussenstap van de integraalvergelijking overbodig is. In plaats daarvan wordt de Fourier transformatie direct toegepast op het oorspronkelijke probleem (3). Het resultaat is dan een functionaalvergelijking, die met Wiener-Hopf techniek is op te lossen. We zullen hieronder deze laatste methode volgen bij het oplossen van het probleem (3).

### Oplossing met Wiener-Hopf techniek

Voor het gemak van de analyse nemen we  $k$  complex,  $k = k_1 + ik_2$  met  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ . In het eindresultaat wordt dan een limietovergang  $k_2 \rightarrow 0$  toegepast.

Uit de fysica van het probleem volgt voor  $u(x, y)$  een gedrag voor  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  volgens

$$(6) u(x,y) = \begin{cases} -\exp[-ik(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0)] + O(r^{-1/2} e^{ikr}), & 0 \leq \theta < \pi - \theta_0, \text{ (gebied I)} \\ O(r^{-1/2} e^{ikr}), & \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0, \text{ (gebied II)} \\ -\exp[-ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)] + O(r^{-1/2} e^{ikr}), & \pi + \theta_0 < \theta \leq 2\pi, \text{ (gebied III).} \end{cases}$$

De gebieden I, II, III zijn getekend in fig. 2.

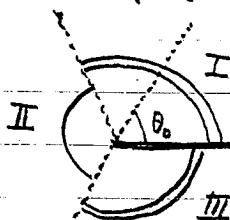


Fig. 2.

Met  $k = k_1 + ik_2$  gesteld volgt uit (6),

$$(7) u(x,y) = \begin{cases} O(\exp[k_2 x \cos \theta_0]), & x \rightarrow +\infty, \\ O(\exp[k_2 x]), & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad y \text{ vast.}$$

15-5-05 Voor nu in de Fourier transform

$$(8) U(w,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{iw x} dx,$$

den is op grond van (7),  $U(w,y)$  analytisch in de strook  $k_2 \cos \theta_0 < \text{Im } w < k_2$ .

Onder Fourier transformatie gaat de Helmholtz vergelijking (3) over in

$$(9) U_{yy} - (w^2 - k^2)U = 0,$$

met de algemene oplossing

$$(10) U(w,y) = A(w) \exp[-\sqrt{w^2 - k^2} y] + B(w) \exp[\sqrt{w^2 - k^2} y],$$

waarin  $A(w)$  en  $B(w)$  weder te bepalen functies zijn.

Vooraf dient  $\sqrt{w^2 - k^2}$  eenduidig te worden vastgelegd door de invoering van sneden vanuit de vertakkingspunten  $\pm k$ ; zie fig. 3. We kiezen de snede vanuit  $k$  verticaal omhoog en vanuit  $-k$  verticaal naar beneden.

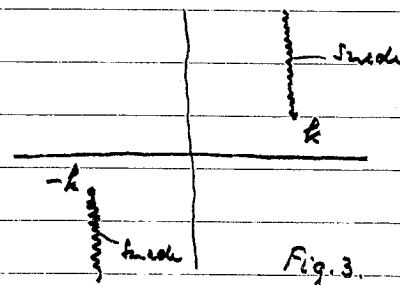


Fig. 3.

Vervolgens de funiesen we

$$(11) \begin{cases} \sqrt{w^2 - k^2} = \sqrt{w-k} \sqrt{w+k}, \\ \sqrt{w-k} = |w-k|^{1/2} \exp[\frac{1}{2} i \arg(w-k)], & -\pi/2 < \arg(w-k) < \pi/2, \\ \sqrt{w+k} = |w+k|^{1/2} \exp[\frac{1}{2} i \arg(w+k)], & -\pi/2 < \arg(w+k) < \pi/2. \end{cases}$$

Het is duidelijk dat de functie  $\sqrt{w-k}$  resp.  $\sqrt{w+k}$  zeker analytisch en  $\neq 0$  is voor



In  $w < k_2$  resp. In  $w > -k_2$ . Voorts is eenvoudig in te zien dat  $\operatorname{Re} \sqrt{w^2 - k^2} > 0$  in de strook  $-k_2 < \operatorname{Im} w < k_2$ .

We eisen nu dat  $U(w, y) \rightarrow 0$  voor  $y \rightarrow \pm \infty$ . De oplossing (10) wordt dan

$$(12) \quad U(w, y) = A(w) \exp[-\sqrt{w^2 - k^2} y], \quad y > 0; \quad U(w, y) = B(w) \exp[\sqrt{w^2 - k^2} y], \quad y < 0.$$

Aangezien  $u(x, y)$  continu is over  $y=0$ , is ook  $U(w, y)$  continu over  $y=0$ . Verder is  $A(w) = B(w)$ , en de oplossing voor  $U(w, y)$  wordt

$$(13) \quad U(w, y) = A(w) \exp[-\sqrt{w^2 - k^2} |y|].$$

Hierin wordt de zog. onbekende functie  $A(w)$  bepaald door de randvoorwaarden op  $y=0$ . Op het halfploek geldt de randvoorwaarde (3), die we aanvullen tot

$$(14) \quad u(x, 0) = \begin{cases} -\exp[-ikx \cos \theta_0], & x > 0, \\ f_-(x), & x < 0, \end{cases}$$

waarin  $f_-(x)$  een onbekende hulpfunctie is. Veronderstel  $f_-(x) = O(e^{k_2 x})$ ,  $x \rightarrow -\infty$ , dan bestaat de Fourier transform  $F\{f_-(x)\} = F_-(w)$  en is analytisch voor  $\operatorname{Im} w < k_2$ . Onder Fourier transformatie gaat (14) over in

$$(15) \quad U(w, 0) = \frac{-i}{w - k \cos \theta_0} + F_-(w) \quad \text{geldig voor } k_2 \cos \theta_0 < \operatorname{Im} w < k_2.$$

De afgeleide  $\partial u / \partial y$  is continu voor de negatieve  $x$ -as  $x < 0$ ,  $y = 0$ , en discontinu voor het halfploek. Schrijf daarom

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0-) = \begin{cases} g_+(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

waarin  $g_+(x)$  een onbekende hulpfunctie is. Veronderstel  $g_+(x) = O(\exp[k_2 x \cos \theta_0])$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , dan bestaat  $F\{g_+(x)\} = G_+(w)$  en is analytisch voor  $\operatorname{Im} w > k_2 \cos \theta_0$ . Onder Fourier transformatie gaat (16) over in

$$(17) \quad \frac{\partial U}{\partial y}(w, 0+) - \frac{\partial U}{\partial y}(w, 0-) = G_+(w) \quad \text{geldig voor } \operatorname{Im} w > k_2 \cos \theta_0.$$

Substitutie van (13) in (15) en (17) leidt tot de betrekkingen

$$(18) \quad \begin{cases} A(w) = \frac{-i}{w - k \cos \theta_0} + F_-(w), \\ -2A(w)\sqrt{w^2 - k^2} = G_+(w). \end{cases}$$

Elimineer hieruit  $A(w)$ , dan komen we tot de functionaalvergelijking

$$(19) \quad \frac{G_+(w)}{2\sqrt{w^2 - k^2}} + F_-(w) - \frac{i}{w - k \cos \theta_0} = 0, \quad \text{geldig voor } k_2 \cos \theta_0 < \operatorname{Im} w < k_2.$$

In deze vergelijking komen voor de onbekende functies  $G_+(w)$ ,  $F_-(w)$ , analytisch voor resp.  $\text{Im } w > k_2 \cos \theta_0$  en  $\text{Im } w < k_2$ .

De functionaalvergelijking (19) wordt opgelost met Wiener-Hopf techniek.

De eerste stap is de factorisatie van  $\sqrt{w^2 - k^2}$  volgens (20)

$$(20) \quad \sqrt{w^2 - k^2} = \sqrt{w-k} \sqrt{w+k},$$

waarbij  $\sqrt{w-k}$  en  $\sqrt{w+k}$  analytisch en  $\neq 0$  zijn voor resp.  $\text{Im } w < k_2$  en  $\text{Im } w > -k_2$ .

Vermenigvuldig (19) met  $\sqrt{w-k}$ , dan ontstaat er

$$(21) \quad \frac{G_+(w)}{2\sqrt{w+k}} + \sqrt{w-k} F_-(w) - \frac{i\sqrt{w-k}}{w-k \cos \theta_0} = 0, \quad k_2 \cos \theta_0 < \text{Im } w < k_2.$$

De tweede stap is de decompositie van de derde term in (21). Deze term is analytisch voor  $\text{Im } w < k_2$ , afgezien van een pool  $w = k \cos \theta_0$ . Schrijf nu

$$(22) \quad \frac{i\sqrt{w-k}}{w-k \cos \theta_0} = \frac{i\sqrt{k \cos \theta_0 - k}}{w-k \cos \theta_0} + \frac{i\sqrt{w-k} - i\sqrt{k \cos \theta_0 - k}}{w-k \cos \theta_0} = \\ = \frac{(2k)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \theta_0}{w-k \cos \theta_0} + \frac{i\sqrt{w-k} - (2k)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \theta_0}{w-k \cos \theta_0}.$$

De twee functies in de laatste regel van (22) zijn analytisch voor resp.  $\text{Im } w > k_2 \cos \theta_0$  en  $\text{Im } w < k_2$ . Substitueer (22) in (21) en herschrijf (21) als

$$(23) \quad \frac{G_+(w)}{2\sqrt{w+k}} - \frac{(2k)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \theta_0}{w-k \cos \theta_0} = -F_-(w) \sqrt{w-k} + \frac{i\sqrt{w-k} - (2k)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \theta_0}{w-k \cos \theta_0}.$$

In (23) is het linkerlid analytisch voor  $\text{Im } w > k_2 \cos \theta_0$ , en het rechterlid is analytisch voor  $\text{Im } w < k_2$ . Linkerlid en rechterlid zijn gelijk in de gemeenschappelijke strook  $k_2 \cos \theta_0 < \text{Im } w < k_2$ . Overalmer definiert (23) een gehele functie.

We maken nu gebruik van de zgn. "edge condition"

$$(24) \quad f_-(x) = O(1), \quad x \uparrow 0; \quad g_+(x) = O(x^{-\frac{1}{2}}), \quad x \downarrow 0,$$

waarmee is op te liden

$$(25) \quad \begin{cases} F_-(w) = O(w^{-1}) \text{ als } w \rightarrow \infty \text{ in } \text{Im } w < k_2, \\ G_+(w) = O(w^{-\frac{1}{2}}) \text{ als } w \rightarrow \infty \text{ in } \text{Im } w > k_2 \cos \theta_0. \end{cases}$$

Met (25) volgt

$$(26) \quad \begin{aligned} \text{linkerlid van (23)} &= O(w^{-1}) \text{ als } w \rightarrow \infty \text{ in } \text{Im } w \geq k_2 \cos \theta_0, \\ \text{rechterlid van (23)} &= O(w^{-\frac{1}{2}}) \text{ als } w \rightarrow \infty \text{ in } \text{Im } w < k_2. \end{aligned}$$

De gehele functie gedefinieerd door (23), gaat dus naar 0 als  $w \rightarrow \infty$ . Met de stelling van Liouville volgt dan dat de gehele functie  $\equiv 0$  is. Voor de functie  $G_+(w)$  vinden we op deze wijze

$$(27) \quad G_+(w) = 2(2k)^{1/2} \sin \frac{1}{2} \theta_0 \frac{\sqrt{w+k}}{w-k \cos \theta_0}, \quad \text{Im } w > k_2 \cos \theta_0.$$

Uit  $G_+(w)$  is  $A(w)$  te bepalen met (18). De oplossing (13) van het getransformeerde probleem wordt dan

$$(28) \quad U(w, y) = -(2k)^{1/2} \sin \frac{1}{2} \theta_0 \frac{\exp[-\sqrt{w^2-k^2}|y|]}{\sqrt{w-k} (w+k \cos \theta_0)},$$

analytisch voor  $k_2 \cos \theta_0 < \text{Im } w < k_1$ .

Ten slotte vinden we door inverse Fourier transformatie

$$(29) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} U(w, y) e^{-iwx} dw \\ = -\frac{(2k)^{1/2}}{2\pi} \sin \frac{1}{2} \theta_0 \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[-\sqrt{w^2-k^2}|y| - iwx]}{\sqrt{w-k} (w+k \cos \theta_0)} dw,$$

waarin  $k_2 \cos \theta_0 < y < k_1$ . Laat  $k_2 = k_0$ , dan gaat de integratieweg over in de reële as met kleine halve cirkeltjes boven  $w = -k$  en  $w = k \cos \theta_0$ , langs en onder  $w = k$  langs; zie fig. 4.

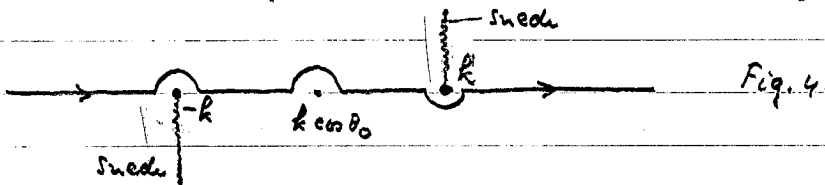


Fig. 4.

De einduitkomst is dan

$$(30) \quad u(x, y) = -\frac{(2k)^{1/2}}{2\pi} \sin \frac{1}{2} \theta_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\sqrt{w^2-k^2}|y| - iwx]}{\sqrt{w-k} (w+k \cos \theta_0)} dw.$$

Herleiding van de oplossing tot Fresnel-integralen (Born & Wolf, Sec. 11.5.2)

Pas in (30) toe de substitutie  $w = -k \cos \alpha$ ,  $0 < \text{Re } \alpha < \pi$ , dan is

$$(31) \quad \sqrt{w-k} = -i(2k)^{1/2} \cos \frac{1}{2} \alpha, \quad \sqrt{w^2-k^2} = -ik \sin \alpha, \quad dw = k \sin \alpha d\alpha,$$

terwijl de integratieweg overgaat in de contour  $\Gamma$ , getekend in fig. 5;  $\Gamma$  loopt met een half cirkeltje boven de pool  $\alpha = \pi - \theta_0$  langs.

Substitueer voortaan in (30),  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , en verander stel eerst  $y > 0$ ,  $0 < \theta < \pi$ .

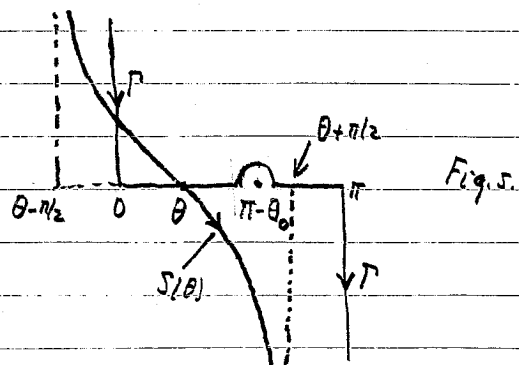


Fig. 5.

De uitkomst (30) gaat dan over in

$$(32) \quad u(x, y) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha + \cos \theta_0} \exp[ikr \cos(\alpha - \theta)] d\alpha$$

De factor  $\exp[ikr \cos(\alpha - \theta)]$  heeft een zadelpunt  $\alpha = \theta$ . Tekem door het zadelpunt de "steepst descent" kromme  $S(\theta)$ , gegeven door

$$(33) \quad S(\theta): \operatorname{Re} \cos(\alpha - \theta) = 1, \operatorname{Im} \cos(\alpha - \theta) \geq 0.$$

De kromme  $S(\theta)$  maakt een hoek  $-\pi/4$  met de reële as en heeft de asymptoten  $\operatorname{Re} \alpha - \theta = \pm \pi/2$ ; zie fig. 5.

In (32) vervangen we de integratieweg  $\Gamma$  tot  $S(\theta)$ ; indien  $0 < \theta < \pi - \theta_0$  wordt daarbij de pool  $\alpha = \pi - \theta_0$  gepasseerd en het bijbehorende residu moet in rekening worden gebracht.

Aldus vinden we

$$(34) \quad u(x, y) = -\frac{1}{\pi i} \int_{S(\theta)} \frac{\sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha + \cos \theta_0} \exp[ikr \cos(\alpha - \theta)] d\alpha \\ - \exp[-ikr \cos(\theta + \theta_0)] H(\pi - \theta - \theta_0),$$

waarin de laatste term de residu-bijdrage voorstelt met de stapfunctie  $H$  gegeven door  $H(x) = 1$  voor  $x > 0$ ,  $H(x) = 0$  voor  $x < 0$ .

Gebruik nu de goniometrische identiteit

$$(35) \quad \frac{\sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha + \cos \theta_0} = \frac{1}{4} \sec \frac{1}{2}(\alpha + \theta_0) - \frac{1}{4} \sec \frac{1}{2}(\alpha - \theta_0),$$

dan is te schrijven

$$(36) \quad u(x, y) = -I(\theta_0) + I(-\theta_0) - \exp[-ikr \cos(\theta + \theta_0)] H(\pi - \theta - \theta_0),$$

waarin

$$(37) \quad I(\beta) = \frac{1}{4\pi i} \int_{S(\theta)} \sec \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \exp[ikr \cos(\alpha - \theta)] d\alpha = \\ = \frac{1}{4\pi i} \int_{S(\theta)} \sec \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \theta) \exp[ikr \cos \alpha] d\alpha.$$

De laatste integraal wordt als volgt uitgewerkt:

$$(38) \quad I(\beta) = \frac{1}{8\pi i} \int_{S(\theta)} [\sec \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \theta) + \sec \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \theta)] \exp[ikr \cos \alpha] d\alpha \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(\theta)} \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta + \theta) \cos \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha + \cos(\beta + \theta)} \exp[ikr \cos \alpha] d\alpha.$$

Langs  $S(\theta)$  stellen we (volgens (33))  $\cos \alpha = 1 + i\tau^2$ ,  $\tau = \sqrt{2} e^{\pi i/4} \sin \frac{1}{2} \alpha$ ,

$\cos \frac{1}{2} \alpha dx = \sqrt{2} e^{-\pi i/4} d\tau$ , dan varieert  $\tau$  van  $-\infty$  naar  $\infty$ , en (38) gaat over in

$$(39) \quad I(\beta) = -\frac{\sqrt{2} e^{-\pi i/4}}{2\pi} \cos \frac{1}{2}(\beta + \theta) e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-kr\tau^2]}{\tau^2 - is^2} d\tau, \quad s^2 = 2 \cos^2 \frac{1}{2}(\beta + \theta).$$

De laatste integraal wordt als volgt herleid:

$$\begin{aligned} (40) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-kr\tau^2]}{\tau^2 - is^2} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kr\tau^2} d\tau \int_0^{\infty} e^{-(\tau^2 - is^2)\sigma} d\sigma = \\ &= \int_0^{\infty} e^{is^2\sigma} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\sigma + kr)\tau^2] d\tau = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{is^2\sigma}}{\sqrt{\sigma + kr}} d\sigma = \\ &= \sqrt{\pi} e^{-ikrs^2} \int_{kr}^{\infty} \frac{e^{is^2\sigma}}{\sqrt{\sigma}} d\sigma = \text{(met de substitutie } s^2\sigma = t^2) \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{|s|} e^{-ikrs^2} \int_{|s|\sqrt{kr}}^{\infty} e^{it^2} dt = \frac{2\sqrt{\pi}}{|s|} e^{-ikrs^2} \int_{-\infty}^{-|s|\sqrt{kr}} e^{it^2} dt. \end{aligned}$$

Voor nu in de Fresnel integraal  $F(x)$ , gedefinieerd door

$$(41) \quad F(x) = \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{it^2} dt.$$

De volgende eigenschappen zijn eenvoudig te verifiëren,

$$(42) \quad \begin{aligned} F(+\infty) &= 1, \quad F(0) = \frac{1}{2}, \\ F(x) + F(-x) &= \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt = 1. \end{aligned}$$

Met gebruik van (40) en (41) in (39), vinden we voor de integraal  $I(\beta)$ ,

$$(43) \quad \begin{aligned} I(\beta) &= -\frac{\sqrt{2} e^{-\pi i/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta + \theta)}{|s|} \exp[ikr(1-s^2)] \int_{-\infty}^{-|s|\sqrt{kr}} e^{it^2} dt \\ &= -\exp[-ikr \cos(\theta + \beta)] F[-\sqrt{2kr} |\cos \frac{1}{2}(\theta + \beta)|] \operatorname{sgn}(\cos \frac{1}{2}(\theta + \beta)). \end{aligned}$$

Substitueer dit resultaat in (36) en bedenk dat  $\cos \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) > 0$  als  $0 < \theta < \pi$ . Aldus volgt

$$\begin{aligned} (44) \quad u(x, y) &= -\exp[-ikr \cos(\theta - \theta_0)] F[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)] \\ &\quad - \exp[-ikr \cos(\theta + \theta_0)] \cdot \\ &\quad \cdot \{ H(\pi - \theta - \theta_0) - F[-\sqrt{2kr} |\cos \frac{1}{2}(\theta + \theta_0)|] \operatorname{sgn}(\cos \frac{1}{2}(\theta + \theta_0)) \} = \\ &= -\exp[-ikr \cos(\theta - \theta_0)] F[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)] \\ &\quad - \exp[-ikr \cos(\theta + \theta_0)] F[\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta + \theta_0)] \end{aligned}$$

waarbij in de overgang naar de laatste regel gebruik is gemaakt van (42).

Het resultaat (44) geldt voor  $y > 0$  ofwel  $0 < \theta < \pi$ . Als  $y < 0$  geldt  $u(x, y) = u(x, -y)$  volgens (30). Bij een vervanging van  $\theta$  door  $2\pi - \theta$  (overeenkomend met een vervanging van  $y$  door  $-y$ ) blijft (44) invariabel. Derhalve geldt het resultaat (44) zowel voor  $y > 0$  als  $y < 0$ , dus algemeen voor  $0 < \theta < 2\pi$ . Voor  $\theta = 0$  of  $\theta = 2\pi$ , overeenkomend met een punt van het halfrond, gaat (44) over in (met gebruik van (42))

$$(45) \quad u(x, 0) = -\exp[-ikr \cos \theta_0] \left\{ F(-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}\theta_0) + F(\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}\theta_0) \right\} \\ = -\exp[-ikx \cos \theta_0], \quad x > 0,$$

in overeenstemming met de randvoorwaarde (3) op het halfrond.

Tenslotte, tel bij (44) op de invallende golf  $u^i$ , gegeven door (1). Met gebruik van (42) vinden we dan voor de totale golf  $u^t$ :

$$(46) \quad u^t(x, y) = \exp[-ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)] F(\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)) \\ - \exp[-ik(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0)] F(\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta + \theta_0)).$$

Interessant is nog de asymptotiek van  $u^t$  voor  $kr \rightarrow \infty$ . Gebruik makend van de asymptotische ontwikkeling van de Fresnel integraal,

$$(47) \quad F(x) = H(x) - \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{ix^2}}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Dan volgt

$$(48) \quad u^t(x, y) = u^i(x, y) H(\pi - \theta + \theta_0) + u^r(x, y) H(\pi - \theta - \theta_0) \\ - \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} [\sec \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) - \sec \frac{1}{2}(\theta + \theta_0)] + O\left(\frac{e^{ikr}}{(kr)^{3/2}}\right), \quad kr \rightarrow \infty,$$

waarin

$$(49) \quad u^r(x, y) = -\exp[-ik(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0)]$$

de gereflecteerde golf voorstelt. De eerste twee termen in het rechterlid van (48) stellen voor de 2<sup>de</sup> qn. geometrisch-optische golf; de derde term stelt voor de diffractiegolf of buigingsgolf. Merk op dat de asymptotische ontwikkeling (48) niet geldt voor  $\theta = \pi + \theta_0$  en  $\theta = \pi - \theta_0$ , d.i. op de 2<sup>de</sup> qn. schaduwgrenzen van invallende en gereflecteerde golf.

Uitgaande van (1), (48) en (49) voeren we nog in de fasefuncties van invallende, gereflecteerde en diffractiegolf:

$$(50) \quad S^i(x, y) = -x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0, \quad S^r(x, y) = -x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0, \quad S^d(x, y) = r_0.$$

Voor de voren we in de indicatoren

$$(51) \quad \varepsilon^i = \operatorname{sgn}(\pi - \theta + \theta_0), \quad \varepsilon^r = \operatorname{sgn}(\pi - \theta - \theta_0),$$

- dan is  $\varepsilon^{i,r} = 1$  in het verlichte gebied van de invallende (ge-reflecteerde) golf,  
en  $\varepsilon^{i,r} = -1$  in het schadewgebied.

Met de notaties (50) en (51) is de oplossing (46) in de volgende "coördinaatvrije" vorm te schrijven:

$$(52) \quad u^t = u^i F[\varepsilon^i \sqrt{k(s^d - s^i)}] + u^r F[\varepsilon^r \sqrt{k(s^d - s^r)}].$$

Slotopmerking. Sommerfeld's diffractieprobleem voor een halfplak is in de literatuur ook nog op een aantal andere manieren opgelost. Voor een afleiding van de oplossing met elementaire middelen, zie

J. Boersma, A simple solution of Sommerfeld's half-plane diffraction problem,  
J. Appl. Sci. Eng. A, 2, 187-193 (1977).

Het is mogelijk deze integraal verder te herleiden tot een eenvoudiger vorm. Voor de details zij verwezen naar Noble §.1.6. We vermelden slechts het eindresultaat voor de totale golf,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,y) &= \varphi(x,y) + \varphi_1(x,y) \\ &= e^{-iky} F[\sqrt{2k} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})] - e^{iky} F[-\sqrt{2k} \cos(\theta + \frac{\pi}{4})] \end{aligned}$$

waarin  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, -\pi \leq \theta \leq \pi,$

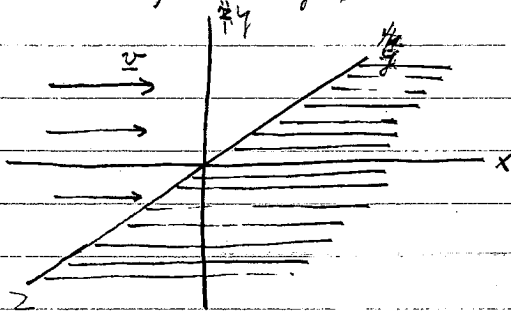
en de Fresnel-integraal  $F(u)$  gedefinieerd door

$$F(u) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^u e^{it^2} dt$$

14-5-1968 / 9-5-1973 (nu in 1987)

Tweede voorbeeld. Als tweede voorbeeld van een halfvlak probleem dat zich met behulp van Fourier-transformatie en Wiener-Hopf techniek rechtstreeks laat oplossen, behandelen we het volgende randwaardeprobleem ontleend aan Carrier, Krook en Pearson, pp. 376-379:

Een half-onendige plaat  $x \geq 0, y \geq 0, -\infty < z < \infty$  bevindt zich in een vloeistof



welke met stroomt met een constante snelheid  $v$  evenwijdig aan de  $x$ -as. De temperatuur van de plaat is bekend; gevraagd wordt de temperatuurverdeling in de vloeistof te bepalen. Deze temperatuurverdeling zal onafhankelijk van de tijd zijn; we zijn dan geïnteresseerd in de stationnaire toestand.

Noem van de temperatuur in de vloeistof  $T(x,y,z)$ , dan zullen we eerst een vergelijking opstellen voor  $T(x,y,z)$ . Beschouw daarvoor een willekeurig volume  $V$  begrensd door een gesloten oppervlak  $S$ . De totale hoeveelheid warmte lossen in  $V$  moet nu constant zijn. Daar toe moet de hoeveelheid warmte die per tijdseenheid door het oppervlak  $S$  naar buiten stroomt gelijk nul zijn. Deze warmtestroom door  $S$  naar buiten bestaat nu uit twee delen:

- Warmtestroom ten gevolge van warmtegeleiding,  $q = -k \text{ grad } T$ . Per tijdseenheid stroomt naar buiten  $-k \iint_S \text{grad } T \cdot n \, d\sigma$ .
- Warmtestroom ten gevolge van vloeistofstroming. Door een oppervlakte  $d\sigma$  stroomt naar buiten een hoeveelheid vloeistof welke  $\rho v \cdot n \, d\sigma$  waarin  $\rho$  de soortelijke massa van de vloeistof is. Laat  $c$  de soortelijke warmte van de vloeistof zijn, dan stroomt per tijdseenheid door  $S$  naar buiten  $\rho c \iint_S T v \cdot n \, d\sigma$ .

Totaal is nu,

$$-k \iint_S \text{grad } T \cdot n \, d\sigma + \rho c \iint_S T v \cdot n \, d\sigma = 0, \quad (n \text{ is de naar buiten gerichte normaal op } S).$$

ofwel met de divergentiestelling van Gauss

$$\iiint_V \{k \text{ div grad } T - \rho c \text{ div}(T v)\} d\tau = 0,$$

$$\iiint_V \{k \Delta T - \rho c v \frac{\partial T}{\partial x}\} d\tau = 0.$$

Deze betrekking moet gelden voor elk volume  $V$  zodat we komen tot de warmtegeleidendevergelijking:

$$\Delta T - \frac{\rho c v}{k} \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad *)$$

We kunnen de verschillende dimensies nu zodanig kiezen dat de coëfficiënt  $\frac{\rho c v}{k}$  gelijk 1 wordt.

\*) Algemeen  $\Delta T - \frac{\rho c v}{k} \frac{\partial T}{\partial x} = 0$



We beschouwen nu het volgende randwaardeprobleem,

$$\begin{cases} \Delta \varphi - \varphi_x = 0, & \text{binnen de halfronde } x \geq 0, y = 0, \\ \varphi(x, y) \rightarrow 0 & \text{voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \\ \varphi(x, 0) = e^{-ax}, & \text{voor } x \geq 0, (a > 0). \end{cases}$$

17-5788:

Het randwaardeprobleem is oplosbaar van 2-graden. Binnen de halfronde zal  $x \geq 0, y = 0$  zal  $\varphi$  overal continue zijn met continue partiële afgeleiden.

We passen nu Complexe Fourier transformatie toe. We stellen,

$$\tilde{\varphi}(w, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{iwx} dx = (\tilde{\varphi}_+(w, y) + \tilde{\varphi}_-(w, y))$$

en nemen aan dat  $\tilde{\varphi}(w, y)$  bestaan analytisch is in een zekere strook in het  $w$ -vlak.

De differentiaalvergelijking gaat dan over in

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dy^2} - (w^2 - i w) \tilde{\varphi} = 0.$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking luidt,

$$\tilde{\varphi}(w, y) = A(w) e^{-\sqrt{w^2 - i w} y} + B(w) e^{+\sqrt{w^2 - i w} y},$$

waarin  $A(w), B(w)$  willekeurige functies van  $w$  zijn. We maken nu de nieuwe variabele  $\sqrt{w^2 - i w}$  vastleggen. De hulpvertakkingpunten zijn  $w = 0, w = i$ . We leggen nu een rechte lijn langs de imaginaire as van  $-i\infty$  naar  $0$  en van  $i$  naar  $i\infty$ . We spreken vervolgens af:

$$\sqrt{w^2 - i w} = F w^{\frac{1}{2}} (w - i)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{met } -\frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{4} < \arg(w - i) < \frac{\pi}{4}$$

Men kan dan gemakkelijk bewijzen dat

$$\operatorname{Re} \sqrt{w^2 - i w} > 0.$$

De functie  $\sqrt{w^2 - i w}$  is verder analytisch in de strook  $0 < \operatorname{Im} w < 1$ .

Nu de voorwaarde  $\varphi(x, y) \rightarrow 0$  voor  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  volgt nu dat  $\tilde{\varphi}(w, y) \rightarrow 0$  voor  $|y| \rightarrow \infty$ . Dit

bekent dat we voor de oplossing  $\tilde{\varphi}(w, y)$  moeten nemen,

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(w, y) = A(w) e^{-\sqrt{w^2 - i w} y}, & y > 0, \\ \tilde{\varphi}(w, y) = B(w) e^{+\sqrt{w^2 - i w} y}, & y < 0, \end{cases}$$

met  $A(w), B(w)$  willekeurige functies van  $w$ . De functie  $\varphi(x, y)$  is continu over  $y = 0$ ;

ook de F.T.  $\tilde{\varphi}(w, y)$  moet dan continu in  $y$  zijn voor  $y = 0$ . Er volgt dan  $A(w) = B(w)$ ,

zodat we de oplossing ~~als~~ van het getransformeerde probleem als volgt kunnen schrijven,

$$(I) \quad \tilde{\varphi}(w, y) = A(w) e^{-\sqrt{w^2 - i w} |y|}$$

Hierin moet de functie  $A(w)$  nog bepaald worden uit de randvoorwaarden op de halfronde

en uit de continuïteit van  $\varphi$  en zijn afgeleiden.

We gaan de randvoorwaarden op de halfronde o.v. aanstellen:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0, \\ f(x), & x < 0, \end{cases}$$

waarbij  $f(x)$  een voorhande bekende functie is. We nemen aan dat  $f(x) = O(e^{\beta x})$  voor  $x \rightarrow -\infty$ .

Na Fourier transformatie gaat dit over in de randvoorwaarden over  $w$ ,

$$(II) \quad \tilde{\varphi}(w, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{iwx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{iwx} dx =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w + ia} + F_-(w).$$

De eerste integraal bestaat en is analytisch voor  $\operatorname{Im} w > -a$ ;  $F_-(w)$  bestaat en is analytisch voor  $\operatorname{Im} w < \beta$ .

We maken nog voldaan aan de voorwaarde dat  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  continu is voor  $x \geq 0, y=0$ .  
Over de halffunctie is  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  discontinu. Beschouw nu het verschil,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, +0) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, -0) = \begin{cases} g_+(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

waarin  $g_+(x)$  een nog onbekende functie is. We nemen aan dat  $g_+(x) = O(e^{-\alpha|x|})$  voor  $x \rightarrow \infty$ .

Na Fourier transformatie gaat de relatie over in,

$$(III) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(w, +0) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(w, -0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_+(x) e^{iwx} dx = G_+(w).$$

De functie  $G_+(w)$  zal bestaan en analytisch zijn voor  $\text{Im } w > \alpha$ .

De oplossing (I) moet nu voldoen aan de relatie (II) en (III). Daaruit volgt

$$\begin{cases} A(w) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w+ia} + F(w), \\ -2\sqrt{i-w} A(w) = G_+(w). \end{cases}$$

Na eliminatie van  $A(w)$  komen we tot de volgende functievergelyking tussen  $F(w), G_+(w)$ ,

$$\frac{G_+(w)}{2\sqrt{i-w}} + F(w) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w+ia} = 0$$

geldig in de strook  $\alpha = \max\{-\alpha, 0, \alpha\} < \text{Im } w < \beta = \min\{\beta_1, 1\}$ .  $G_+(w)$  is zuber analytisch voor  $\text{Im } w > \alpha$ ;  $F(w)$  is zuber analytisch voor  $\text{Im } w < \beta$ .

11-12-1978  
13-5-70  
16-2-79  
We passen nu de Wiener-Hopf techniek toe. De eerste stap bestaat in de factorisatie van

$$\frac{1}{\sqrt{w^2-iw}} = \frac{1}{w^{\frac{1}{2}}(w-i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{w^{-\frac{1}{2}}}{(w-i)^{\frac{1}{2}}}$$

De functie  $w^{-\frac{1}{2}}$  is analytisch voor  $\text{Im } w > 0$ ; de functie  $(w-i)^{-\frac{1}{2}}$  is analytisch voor  $\text{Im } w < 1$ . Schrijf de functievergelyking nu als volgt,

$$\frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} G_+(w) + (w-i)^{-\frac{1}{2}} F(w) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{(w-i)^{-\frac{1}{2}}}{w+ia} = 0.$$

De tweede stap bestaat in de splitsing van de derde term <sup>in een functie</sup> analytisch in een boven halffolde en een functie analytisch in een beneden halffolde,

$$\begin{aligned} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{(w-i)^{-\frac{1}{2}}}{w+ia} &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{(-ia-i)^{-\frac{1}{2}}}{w+ia} + \frac{(w-i)^{-\frac{1}{2}} - (-ia-i)^{-\frac{1}{2}}}{w+ia} \right] = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}} (1+ia)^{\frac{1}{2}}}{w+ia} + \frac{(w-i)^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{\pi i}{4}} (1+ia)^{\frac{1}{2}}}{w+ia} \right] \end{aligned}$$

De functievergelyking is dan als volgt te schrijven,

$$\frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} G_+(w) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}} (1+ia)^{\frac{1}{2}}}{w+ia} = -(w-i)^{-\frac{1}{2}} F(w) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{(w-i)^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{\pi i}{4}} (1+ia)^{\frac{1}{2}}}{w+ia} \quad \alpha < \text{Im } w < \beta.$$

11-12-1978  
Het linkerlid en rechterlid zijn nu analytisch voor  $\text{Im } w > \alpha$  resp.  $\text{Im } w < \beta$ . Samen vormen linkerlid en rechterlid een gehele functie met voor  $|w| \rightarrow \infty$ : linkerlid  $= O(w^{-\frac{1}{2}})$ , rechterlid  $= O(w^{\frac{1}{2}})$ . De gehele functie moet dus identiek nul zijn waarna volgt,

$$\begin{cases} G_+(w) = -\frac{2e^{\frac{\pi i}{4}} (1+ia)^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} (w+ia)}, \\ F(w) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{(w-i)^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{\pi i}{4}} (1+ia)^{\frac{1}{2}}}{(w+ia)(w-i)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{(1+a)^k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(y\sqrt{s^2-s})}{(s+a)(s+1)^k} e^{xs} ds & \text{als } x < 0, \\ \cos(y\sqrt{a^2+a}) e^{-ax} - \frac{(1+a)^k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(y\sqrt{s^2+s})}{(s-a)(s+1)^k} e^{-xs} ds & \text{als } x > 0. \end{cases} \quad 11-5-1982$$

betreft in 1977

$$\text{Hierin } \varphi(x, 0) = \begin{cases} \frac{(1+a)^k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{xs}}{(s+a)(s+1)^k} ds, & x < 0 \rightarrow \varphi(x, 0) = O(e^x), x \rightarrow \infty \\ e^{ax}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 0+) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 0-) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{2(1+a)^k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^{k-1} e^{-xs}}{(s-a)^2} ds, & x > 0 \\ = O(x^{-k}), & x \rightarrow \infty \text{ (asymptotisch Laplace-integral)} \\ \text{(Watson's lemma)} \end{cases}$$

$$\text{Stel } u = 1+t: \int_0^{\infty} |x| = \frac{(1+a)^k}{\pi} e^x \int_0^{\infty} \frac{e^{xt}}{(1+at)^k t^k} dt = O(e^x) \text{ voor } x \rightarrow -\infty. \\ \leq \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+at)^k} \quad \text{i.e. } B_k = 1$$

Wanneer nog te schrijven:

$$\int_0^{\infty} |x| = e^{-ax} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{-ax|x|}} e^{-u^2} du \right] = e^{-ax} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{-ax|x|})] \\ = e^{-ax} \operatorname{erfc}(\sqrt{-ax|x|}).$$

De functie  $A(w)$  wordt nu gegeven door,

$$A(w) = - \frac{g_-(w)}{2w^2 i w} = \frac{e^{i\pi/4} (1+a)^{1/2}}{\sqrt{2\pi} w^{3/2} (w+ia)(w-i)^{1/2}}$$

waarna

$$\Phi(w, y) = \frac{e^{i\pi/4} (1+a)^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\sqrt{w^2-iw} |y|}}{(w+ia)(w-i)^{1/2}}$$

De laatste functie is analytisch voor  $0 < \text{Im } w < 1$ . Inverse Fourier transformatie levert tot de volgende uitkomst voor  $\varphi(x, y)$ ,

$$\varphi(x, y) = \frac{e^{i\pi/4} (1+a)^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{e^{-\sqrt{w^2-iw} |y|}}{(w+ia)(w-i)^{1/2}} e^{-ixw} dw, \quad 0 < y < 1$$

Deze integraal is door contour integratie te herleiden tot reële integralen voor  $x > 0$  resp.  $x < 0$ .

We zullen nu de onderzochte veranderingen i.e.  $f_-(x) = O(e^{\beta_1 x})$ ,  $g_-(x) = O(e^{\beta_2 x})$  nog verifiëren.

Daarvoor berekenen we eerst,

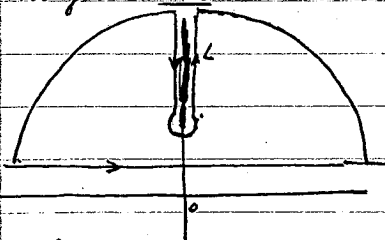
$$\varphi(x, 0) = \frac{e^{i\pi/4} (1+a)^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{e^{-ixw}}{(w+ia)(w-i)^{1/2}} dw.$$

In geval  $x > 0$  sluiten we de integratiecontour door een halve cirkel in het linker halfvlak. De integraal over deze halve cirkel nadert tot nul volgens het lemma van Jordan. Binnen de contour ligt nu alleen de pol  $w = -ia$ , zodat we vinden,

$$\varphi(x, 0) = \frac{e^{i\pi/4} (1+a)^{1/2} (-2\pi i) \text{Res}_{w=-ia} \frac{e^{-ixw}}{(w+ia)(w-i)^{1/2}}}{2\pi} = e^{-ax} \quad (x \geq 0)$$

in overeenstemming met de randvoorwaarden op de halfrechte  $x \geq 0, y = 0$ .

In geval  $x < 0$  sluiten we de integratiecontour naar boven af aangegeven in de figuur.



De integralen over de kwartcirkelbogen nadert tot nul volgens het lemma van Jordan. We vinden dan,

$$\varphi(x, 0) = \frac{e^{i\pi/4} (1+a)^{1/2}}{2\pi} \int_L \frac{e^{-ixw}}{(w+ia)(w-i)^{1/2}} dw,$$

waarbij  $L$  een lus is die aan weerstanden van de reede loopt.

We stellen nu  $w = iu$ , op de linkerover (rechtboven) van de reede is dan  $(w-i)^{1/2} = e^{-3\pi i/4} (u-i)^{1/2}$  resp.

$(w+i)^{1/2} = e^{i\pi/4} (u+i)^{1/2}$ , waarna volgt

$$\varphi(x, 0) = \frac{2}{2\pi} (1+a)^{1/2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{i(u+ia)(u-i)^{1/2}} du = \frac{(1+a)^{1/2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{(u+ia)(u-i)^{1/2}} du = f_-(x) \quad (x < 0).$$

Deze functie laat zich nog verder herleiden tot een error-functie. Berekenen daartoe

$$\frac{d}{dx} (e^{ax} f_-(x)) = \frac{(1+a)^{1/2} e^{ax}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{(u+ia)(u-i)^{1/2}} du = \frac{(1+a)^{1/2} e^{ax}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t+ia} dt = \frac{(1+a)^{1/2} e^{ax}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{-x}}$$

Wegens  $f_-(0) = 1$  volgt dan door integratie

$$e^{ax} f_-(x) = 1 + \frac{(1+a)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} \frac{e^{-at}}{t+ia} dt = 1 + \frac{(1+a)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} \frac{e^{-at}}{\sqrt{u}} du = \frac{(1+a)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} \frac{e^{-at}}{\sqrt{u}} du$$

De laatste integraal laat zich asymptotisch ontwikkelen en we vinden

$$e^{ax} f_-(x) = \frac{(1+a)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{e^{a|x|}}{|a|^{1/2}|x|} + \text{hogere orde termen} \right] \quad (x \rightarrow -\infty)$$

zodat  $f_-(x) = O(e^{\beta_1 x})$  voor  $x \rightarrow -\infty$  m.a.w.  $\beta_1 = 1$ .

Evenzo berekenen we

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = - \frac{e^{i\pi/4} (1+a)^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{w^{1/2}}{w+ia} e^{-ixw} dw.$$

$$g_-(x) = - \frac{e^{i\pi/4}}{\pi} (1+a)^{1/2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{w^{1/2}}{w+ia} e^{-ixw} dw$$

$g_1(x)$  begrensd voor  $x \geq a$   $g_1(x) = D(x)$ ,  $x \geq a$

$$g_1(x) = -\frac{2(1+a)^k}{\pi} \int_0^{2a} \frac{u^k e^{-xu}}{u-a} du - \frac{2(1+a)^k}{\pi} \int_{2a}^{\infty} \frac{u^k e^{-xu}}{u-a} du = I_1 + I_2$$

Voor  $x \geq N$ :  $|I_1| \leq \frac{2(1+a)^k}{\pi} \int_0^{2a} \frac{u^k e^{-xu}}{u-a} du$ , begrensd

$$I_1 = -\frac{2(1+a)^k}{\pi} e^{-ax} \int_0^{2a} \frac{u^k}{u-a} du - \frac{2(1+a)^k}{\pi} \int_0^{2a} \frac{e^{-xu} - e^{-ax}}{u-a} u^k du$$

$D(e^{-ax})$  begrensd

$I_2$

$$\left| \frac{e^{-xu} - e^{-ax}}{u-a} \right| = \left| e^{-xu} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \right|_{t=2a} \leq x e^{-xu}, \quad 0 \leq u \leq a$$

$$\left| \frac{e^{-ax} - e^{-xu}}{u-a} \right|_{t=u-a} \leq x e^{-ax}, \quad a \leq u \leq 2a \quad (\text{ook via middelwaardestelling})$$

$$\Rightarrow |I_2| \leq \frac{2(1+a)^k}{\pi} \int_0^a x e^{-xu} u^k du + \frac{2(1+a)^k}{\pi} \int_a^{2a} x e^{-ax} u^k du \leq$$

$$\leq \frac{2(1+a)^k a^k}{\pi} [1 - e^{-ax}] + \frac{2(1+a)^k}{\pi} \frac{2}{3} [(2a)^k - a^k] x e^{-ax}, \text{ begrensd}$$

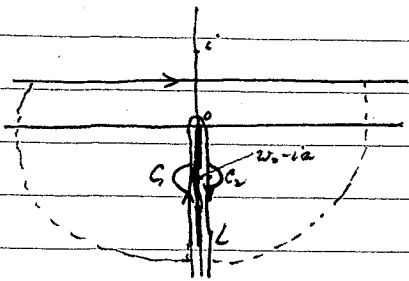
Zie ook p. 38f

Voor  $x < 0$  sluiten we de integratie weg door een halve cirkel in het boven halfvlak. In het boven halfvlak. In  $w > 0$  is de integrand analytisch, zodat we vinden,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, z=0) = 0 \quad (x < 0).$$

Dit resultaat was ook af te leiden uit symmetrieoverwegingen.

Voor  $x > 0$  sluiten we de integratie weg in het beneden halfvlak, als aangegeven in de figuur.



We komen dan tot

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, z=0) = -\frac{e^{-\pi i/4}}{2\pi} (1+aj)^{\frac{1}{2}} \int_L \frac{w^{\frac{1}{2}}}{w+ia} e^{-ixw} dw$$

waarbij  $L$  een lus is ter weerszijden van de rechte met halfcirkelvormige uitbuitingen van de pool  $w = -ia$ . Noem de straal van  $C_1, C_2$   $\delta$ , dan volgt,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{w^{\frac{1}{2}}}{w+ia} e^{-ixw} dw = -\pi i \operatorname{Res}_{w=-ia} \frac{w^{\frac{1}{2}} e^{-ixw}}{w+ia} = -\pi i e^{-\frac{3\pi i}{4}} e^{-ax} = -\pi i e^{-\frac{3\pi i}{4}} e^{-ax}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{w^{\frac{1}{2}}}{w+ia} e^{-ixw} dw = -\pi i \operatorname{Res}_{w=-ia} \frac{w^{\frac{1}{2}} e^{-ixw}}{w+ia} = -\pi i e^{-\frac{\pi i}{4}} e^{-ax}$$

Deze bijdrage zullen elkaar juist opheffen. Het nu oph.  $w = -iu$ , dan is op de linker- resp. rechteroever van de sneed  $w^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3\pi i}{4}} u^{\frac{1}{2}}$  resp.  $w^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\pi i}{4}} u^{\frac{1}{2}}$ . Voor de functie  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, z=0)$  vinden we dan de voorstelling,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, z=0) = -\frac{(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}} e^{-xu}}{u+ia} du, \quad (x > 0)$$

waarbij de integraal moet worden opgevat als een Cauchy- hoofdwaaard. Evenzo in  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  het te geseñte van de uitdrukking en dus

$$q_+(x) = -\frac{2(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}} e^{-xu}}{u-a} du,$$

We kunnen  $q_+(x)$  weer uitdrukken in een error-functie, als we bedenken op dat  $q_+(x)$  is een

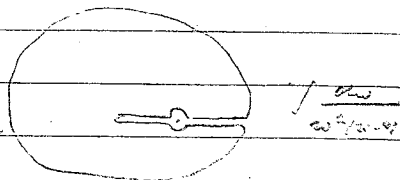
$$\frac{d}{dx} (e^{ax} q_+(x)) = \frac{2(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{u-a} du$$

Schrijf daartoe

$$q_+(x) = -\frac{2(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{u^{\frac{1}{2}}} du - \frac{2a(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{u^{\frac{1}{2}}(u-a)} du = -\frac{2(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}}} - h(x),$$

dan is

$$h(0) = \frac{2a(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}(u-a)} = 0, \quad \text{Contourintegratie}$$



$$\frac{d}{dx} (e^{ax} h(x)) = \frac{2a(1+aj)^{\frac{1}{2}} e^{ax}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{u^{\frac{1}{2}}} du = \frac{2a(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ax}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Daarmee volgt,

$$e^{ax} h(x) = \frac{2a(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{e^{at}}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{2\sqrt{a(1+aj)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{ax}} \frac{e^{u^2}}{\sqrt{u}} du$$

Voor  $q_+(x)$  vinden we dus,

$$q_+(x) = -\frac{2(1+aj)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\sqrt{a(1+aj)}}{\sqrt{\pi}} e^{-ax} \int_0^{\sqrt{ax}} \frac{e^{u^2}}{\sqrt{u}} du$$

$$\frac{2\sqrt{a(1+aj)}}{\sqrt{\pi}} e^{-ax} \int_0^{\sqrt{ax}} e^{u^2} du$$

87.

38 e<sup>A</sup> $g_+(x)$  begrenst voor  $x \rightarrow \infty$ ,  $g_+(x) = O(1)$ 

Partiële integreren:

$$g_+(x) = -\frac{2(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \left[ u^{\frac{1}{2}} \log|u-a| e^{-xu} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu} \log|u-a|}{u^{\frac{3}{2}}} du \right. \\ \left. + x \int_0^{\infty} e^{-xu} u^{\frac{1}{2}} \log|u-a| du \right] \\ = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu} \log|u-a|}{u^{\frac{3}{2}}} du - \frac{2(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} x e^{-xu} u^{\frac{1}{2}} \log|u-a| du.$$

Afschakking:

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu} \log|u-a|}{u^{\frac{3}{2}}} du \right| \leq \int_0^{\infty} \frac{e^{-Nu} |\log|u-a||}{u^{\frac{3}{2}}} du = K_1 \text{ voor } x \geq N;$$

$$\left| \int_0^{\infty} x e^{-xu} u^{\frac{1}{2}} \log|u-a| du \right| \leq \int_0^{2a} x e^{-xu} u^{\frac{1}{2}} |\log|u-a|| du + \\ + \int_{2a}^{\infty} x e^{-xu} u^{\frac{1}{2}} |\log|u-a|| du = I_1 + I_2;$$

$$\text{voor } 0 \leq u \leq 2a, \quad x e^{-xu} \leq \max_{0 \leq x \leq \infty} (x e^{-xu}) = \frac{e^{-1}}{u},$$

$$I_1 \leq e^{-1} \int_0^{2a} \frac{|\log|u-a||}{u^{\frac{1}{2}}} du = K_2;$$

$$\text{voor } u \geq 2a, \quad |\log|u-a|| \leq K_3 u^{\frac{1}{2}},$$

$$I_2 \leq K_3 x \int_{2a}^{\infty} u e^{-xu} du = K_3 e^{-2ax} \left( 2a + \frac{1}{x} \right) \leq K_4 \text{ voor } x \geq N.$$

Totaal:

$$|g_+(x)| \leq \text{const. voor } x \geq N$$

$$g_+(x) = O(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

~~Voor  $x \rightarrow \infty$  is nu  $g_p(x)$  begrensd.immers we kunnen afleiden.~~

~~$$e^{-p} \int_0^p \frac{e^u}{\sqrt{u}} du \leq e^{-p} \int_0^p \frac{du}{\sqrt{u}} + e^{-p} \int_0^p e^u du = 1 + e^{-p} \leq 1 + e.$$~~

~~We vinden dus  $g_p(x) = O(1)$  en  $\alpha_1 = 0$ .~~

~~Met  $\beta_1 = 1, \alpha_1 = 0$  volgt nu~~

~~$$\alpha = \max(0, -\alpha_1) = 0, \quad \beta = \min(\beta_1, 1) = 1.$$~~

~~We vinden dus inderdaad een gemeenschappelijke stroom  $0 < T_1 < 1$ .~~

De laatste integraal laat zich asymptotisch ontwikkelen,

$$e^{-ax} \int_0^{ax} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du = e^{-ax} \int_0^{ax} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du + e^{-ax} \left[ \frac{e^u}{\sqrt{u}} \Big|_1^{ax} + \frac{1}{2} \int_1^{ax} \frac{e^u}{u^{3/2}} du \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ax}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

waarna volgt,

$$g_p(x) = \frac{1}{\sqrt{ax}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

De functie  $g_p(x)$  is dus begrensd voor  $x \rightarrow \infty$ .  $g_p(x) = O(1)$  en  $\alpha_1 = 0$ .

Met  $\beta_1 = 0, \alpha_1 = 0$  volgt nu

$$\alpha = \max(0, -\alpha_1) = 0, \quad \beta = \min(\beta_1, 1) = 1.$$

<sup>litten</sup> We vinden dus inderdaad een gemeenschappelijke stroom  $0 < T_1 < 1$ .



~~Het is mogelijk deze integraal verder te herleiden tot een eenvoudiger vorm. Voor de details zij verwezen naar Noble, §1.6. We vermelden slechts het eindresultaat voor de totale golf.~~

~~$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y) &= \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) \\ &= e^{-iky} F\left[\sqrt{2k}r \cos(\theta - \frac{\pi}{4})\right] - e^{-iky} F\left[-\sqrt{2k}r \cos(\theta + \frac{\pi}{4})\right] \end{aligned}$$~~

~~waarin  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$~~

~~en de Fresnel integraal  $F(x)$  gedefinieerd is door~~

~~$$F(x) = \frac{e^{-\pi i k^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{i u^2} du$$~~

19-5-1971 | 15-5-1974 | 15-12-1977 | 13-5-1981 | 22-5-1987

II. Laplace transformatie

Zij  $f(x)$  gedefinieerd voor  $x \geq 0$  dan wordt de Laplace getransformeerde (L.T.) van  $f(x)$  gedefinieerd door

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

De grootte  $s$  mag complex zijn. De Laplace transformatie is een bijzonder geval van de Fourier transformatie. Indien we namelijk weer invoeren,

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{iwt} dt,$$

dan is  $F(s) = \sqrt{2\pi} F_+(i s)$ .

Wij bewijzen nu de volgende stelling:

Stelling Zij  $f(x)$  <sup>en stukgewijs glad</sup> continue voor  $x \geq 0$  met  $f(x) = O(e^{\alpha x})$  voor  $x \rightarrow \infty$ . <sup>(I)</sup> Dan is de integraal

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

convergeert voor  $\text{Re } s > \alpha$ . (II) De functie  $F(s)$  is analytisch voor  $\text{Re } s > \alpha$  en de afgeleide  $F'(s)$  wordt verkregen door differentiatie onder het integraalteken.

$$F'(s) = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt.$$

(III) Er geldt verder de volgende omkerformule.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) e^{xs} ds = \begin{cases} f(x) & \text{als } x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0) & \text{als } x = 0, \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases} \quad (\gamma > \alpha)$$

Bewijs: De stelling volgt onmiddellijk uit stelling I voor de F.T.  $F_+(w)$ . <sup>p. 27</sup> (zie h. 19).

De Fourier F.T.  $F_+(w)$  bestaat en was analytisch voor  $\text{Im } w > \alpha$ .

Wegens  $F(s) = \sqrt{2\pi} F_+(i s)$  zal  $F(s)$  bestaan en analytisch zijn voor  $\text{Im } s > \alpha$  ofwel voor  $\text{Re } s > \alpha$ . De differentiatie onder het integraalteken volgt analoog.

Voor  $F_+(w)$  geldt de omkerformule.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} F_+(w) e^{-ixw} dw = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0), & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad \gamma > \alpha.$$

Stel nu  $w = i s$  dan is  $F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(s)$  en er volgt,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) e^{xs} ds = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0), & x = 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \gamma > \alpha.$$

Voor een aantal rekenregels en toepassingen van de Laplace transformatie, zie college Wiskunde III a.

Berekening van inverse Laplace transform door contour integratie onder toepassing van lemma van Jordan voor dit type integralen.

Lemma van Jordan hier eerst behandelen, zie p. 41.

Lemma van Jordan (vergelijk § 2.7, p. 210)

(i) Zij  $F(s)$  continu voor  $|s| > R_0$ ,  $\forall \text{Re } s \leq 0$  en zij  $M(\rho; F) = \max_{|s|=\rho, \text{Re } s \leq 0} |F(s)| \rightarrow 0$  voor  $\rho \rightarrow \infty$ . Dan geldt voor  $t > 0$ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} F(s) e^{st} ds = 0,$$

waarin  $\Gamma$  de halve cirkel is gegeven door  $|s| = \rho$ ,  $\text{Re } s \leq 0$ .

(ii) Zij gegeven een rij van halve cirkels  $\Gamma_n: |s| = \rho_n$ ,  $\text{Re } s \leq 0$ , met  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \infty$ .

Zij  $F(s)$  continu langs  $\Gamma_n$  en zij  $M(\rho_n; F) \rightarrow 0$  voor  $n \rightarrow \infty$ .

Dan geldt voor  $t > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} F(s) e^{st} ds = 0.$$

Bewijs: Stel  $s = iz$ , dan volgt

$$\int_{\Gamma} F(s) e^{st} ds = i \int_{\Gamma^*} F(iz) e^{it^2} dz,$$

waarin  $\Gamma^*: |z| = \rho$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ .

Op de laatste integraal is nu het oorspronkelijke lemma van Jordan (§ 2.7) van toepassing.

Hier ook behandelen stelling van p. 42.

18.5.1972

Voor de Fourier transformatie wordt de convolutie van twee functies  $f(x)$  en  $g(x)$  gedefinieerd door,

$$h(x) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi$$

en voor de overeenkomstige F.T.'s  $H(\gamma), F(\gamma), G(\gamma)$  geldt,

$$H(\gamma) = \sqrt{2\pi} F(\gamma) G(\gamma).$$

Beschouw nu twee functies  $f(x), g(x)$ , welke slechts gedefinieerd zijn voor  $x \geq 0$  en voor  $x < 0$  per definitie gelijk aan nul <sup>wordt</sup> gesteld worden. Dan is de convolutie gegeven door,

$$h(x) = \begin{cases} \int_0^x f(\xi) g(x-\xi) d\xi, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

De F.T. van  $f, g, h$  zijn nu gelijk aan  $F_+( \gamma ), G_+( \gamma ), H_+( \gamma )$  en er geldt,

$$H_+( \gamma ) = \sqrt{2\pi} F_+( \gamma ) G_+( \gamma ).$$

Noem de R.T.

afwaarts van  $f, g, h$  resp.  $F_-(s), G_-(s), H_-(s)$ . Wegens  $F_-(s) = \sqrt{2\pi} F_+( \omega )$  en volgt onmiddellijk

$$H F_-(s) = \frac{F_-(s) G_-(s)}{\sqrt{2\pi}}$$

Conclusie De L.T.  $h(x)$  is de convolutie van  $f(x), g(x)$ ,

$$h(x) = \int_0^x f(\xi) g(x-\xi) d\xi.$$

Dan geldt voor de overeenkomstige F.T.'s,

$$H(s) = F(s) G(s).$$

Voor rechtstreeks herijp zie college

Wiskunde 30.

20.5.72 / 15.5.73 / 24.5.73

Toepassingen van de Laplace transformatie.

a. Randwaardeproblemen.

1. Beschouw het volgende warmtegeleidingsprobleem voor een half-onzijdige

staaf:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, t) = A \sin \omega t, & t > 0. \end{cases} \quad u(x, t) \rightarrow 0 \text{ voor } x \rightarrow \infty.$$

Stom in de Laplace getransformeerde naar  $t$  van  $u(x, t)$ ,

$$U(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt.$$

De L.T. van  $\frac{\partial u}{\partial t}$  wordt nu,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt = e^{-st} u(x, t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = s U(x, s);$$

evenzo de L.T. van  $\sin \omega t$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t dt = \int_0^{\infty} e^{-st+i\omega t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{s-i\omega} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \text{Re } s > 0.$$

Het Laplace getransformeerde probleem leidt nu,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} = s U(x, s), & x > 0, \\ U(0, s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \end{cases}$$

$e^{x\sqrt{s}}$  niet beschouwen  
 Afwaarts voor  $\sqrt{s}$  eerst nemen.

met als oplossing

$$U(x, s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} e^{-x\sqrt{s}}, \quad \text{Re } s > 0.$$

Onder  $\sqrt{s}$  zullen we hierbij verstaan de wortel met positief reëel deel.

We moeten nu terugtransformeren.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} e^{st} ds, \quad \gamma > 0.$$

We moeten de ~~contour~~

De ~~contour~~ We zullen eerst de wortelvorm  $\sqrt{s}$  nader vastleggen. Daar toe brengen we in het complexe  $s$ -vlak een snede aan langs de negatieve reële as. In het opengenoemde  $s$ -vlak kiezen we arg  $s$  zodanig dat  $-\pi < \arg s < \pi$  (hoofwaaarde argument). Dan is  $-\frac{\pi}{2} < \arg \sqrt{s} < \frac{\pi}{2}$  en dus  $\operatorname{Re} \sqrt{s} > 0$ .

In het  $s$ -vlak met snede is nu de integrand boven analytisch, behalve in de polen  $s = \pm i\omega$ .

~~We maken nu gebruik van het volgende lemma dat onmiddellijk volgt uit het lemma van Jordan.~~

~~Lemma: Zij  $f(s)$  analytisch voor  $\operatorname{Re} s \leq 0$ ,  $|s| \geq R$ , en zij  $f(s) \rightarrow 0$ , uniform in het linker halfvlak  $\operatorname{Re} s \leq 0$ , indien  $|s| \rightarrow \infty$ , dan geldt voor  $t > 0$ ,~~

~~$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(s) e^{ts} ds = 0,$$~~

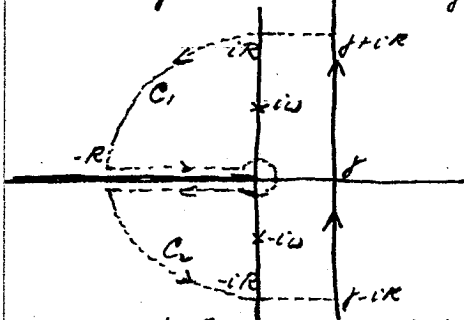
~~waarbij  $C$  een halve cirkels met straal  $R$  om de oorsprong, gelegen in het linker halfvlak.~~

~~Bewijs: Laet  $s = iz$  dan is~~

~~$$\int_C f(s) e^{ts} ds = i \int_{C^*} f(i^2 z) e^{it^2 z} dz$$~~

~~waarbij  $C^*$  een halve cirkels in de bovenste helft van het  $z$ -vlak. Volgens het lemma van Jordan nadert de laatste integraal tot 0 naarmate  $R \rightarrow \infty$ .~~

We gaan nu de integratie van  $\gamma-i\infty$  naar  $\gamma+i\infty$  a.u. uitvoeren: zie figuur.



Beschouw nu een contour bestaande uit het lijnsegment  $\mathcal{R}_\omega[iR, \gamma+iR]$ , de segmenten  $[iR, \gamma+iR]$ ,  $[-iR, \gamma-iR]$ , de kwartcirkelbogen  $C_1, C_2$  en een lus 'aan weerszijden van de snede welke volgens een klokwise cirkel om  $s=0$  loopt. Neem  $R$  zo groot dat de polen  $\pm i\omega$  binnen de contour liggen, dan is

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} + \int_{\gamma+iR}^{iR} + \int_{iR}^{\gamma+iR} + \int_{\gamma-iR}^{-iR} + \int_{-iR}^{\gamma-iR} + \int_{\gamma-iR}^{-iR} + \int_{-iR}^{\gamma-iR} \right] \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} e^{st} ds = \\ & = \frac{A}{2i} e^{-x\sqrt{i\omega}} e^{i\omega t} - \frac{A}{2i} e^{-x\sqrt{-i\omega}} e^{-i\omega t} \\ & = \frac{A}{2i} e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} - ix\sqrt{\frac{\omega}{2}} + i\omega t} - \frac{A}{2i} e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + ix\sqrt{\frac{\omega}{2}} - i\omega t} \\ & = A e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \sin(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}) \end{aligned}$$

Neem nu  $R \rightarrow \infty$ . De integralen over  $C_1, C_2$  nadern tot nul (lemma!). De integralen over de lijnsegmenten  $[iR, \gamma+iR], [-iR, \gamma-iR]$  nadern evenzo tot nul (bewijs!).

Beschouw nu de integraal langs  $L$ . Aangenem de integrand een eindige waarde heeft voor  $s=0$  zal de integraal langs het cirkeltje om  $s=0$  tot nul nadern, als de

Zie H. Sommerfeld, Partial Differential Equations  
 in Physics, Band III, §14, p. 68-71.  
 College Physics, Transportvorgänge, p. 75-77.

Deze stelling behandeld bij elementaire theorie, p. 33-34

Viet Dostak, Einzigkeit der Lösung einer Laplace Transformfunktion, §16 citen van

Stelling Bij gegeven  $f(s)$  kan er niet meer dan één  $F(x)$  bestaan. Het geldt

$F(s) \rightarrow 0$  voor  $|s| \rightarrow \infty$ , en  $f(x)$  is het halfvlak  $\text{Re } s > \sigma$ .

Toetsing De functie  $\frac{\sinh x_1}{\sinh s}$  is geen Laplace getransformeerde. Het is  $\frac{1}{s} \frac{\sinh x_1}{\sinh s}$

$$\left| \frac{\sinh x_1}{\sinh s} \right| = \left| \frac{\sinh^2 x_1 + \cosh^2 x_1}{\sinh^2 s + \cosh^2 s} \right|$$

en deze uitdrukking neemt niet het nul waarden  $q \neq 0, p \neq 0$ .

18-5-1972

voorbeeld Ia. (1973)

1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1981, 1982, 1983

94.

I

412

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = f(x) \cos \omega t, & t > 0. \end{cases}$$

Laplace transformeren naar tijd t,

$$U(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow s^2 U - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - s u(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = s^2 U$$

$$\sin \omega t \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \text{Re } s > 0.$$

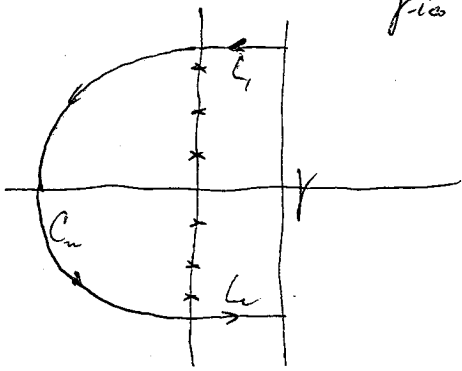
Cyclusvormige probleem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 U = 0, & 0 < x < 1, \\ U(0, s) = 0, \quad U(1, s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{cases}$$

Oplusing:  $U(x, s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{\sinh xs}{\sinh s}$ , analoog voor  $\text{Re } s > 0$ .

Inverse transformatie:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{\sinh xs}{\sinh s} e^{ts} ds, \quad \gamma > 0.$$



Integrand: polen  $s = \pm n\pi i, n = 1, 2, 3, \dots$  ( $s=0$  open pool)  
 $s = \pm i\omega$ .

Onderstelling:  $\omega \neq n\pi$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=i\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{\sinh xs}{\sinh s} e^{ts} &= \pm \frac{1}{2i} \frac{\sinh ix}{\sinh i\omega} e^{\pm i\omega t} = \pm \frac{1}{2i} \frac{\sin \omega x}{\sin \omega} e^{\pm i\omega t} \\ \text{Res}_{s=n\pi i} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{\sinh xs}{\sinh s} e^{ts} &= \frac{\omega}{\omega^2 - n^2\pi^2} \frac{\sinh n\pi x}{\sinh n\pi} e^{n\pi i t} = \frac{i\omega(-1)^n \sin n\pi x}{\omega^2 - n^2\pi^2} e^{n\pi i t} \\ \text{Res}_{s=-n\pi i} &= - \frac{i\omega(-1)^n \sin n\pi x}{\omega^2 - n^2\pi^2} e^{-n\pi i t} \end{aligned}$$

o: Sluit integratieweg door lijnstukke  $l_1, l_2$  en halve cirkel  $C_n$  met straal  $(2n+1)\pi$  (kan ook door

voor  $n \rightarrow \infty$  integreren langs  $l_1, l_2$  nader tot nul. (zelf bewijzen)

$\int_{C_n} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{\sinh xs}{\sinh s} e^{ts} ds \rightarrow 0$  op grond van Lemma van Jordan.

Factoriseer:  $H(s) = \frac{\sinh xs}{\sinh s}$  op  $C_n: |s| = (2n+1)\pi$ .

$$\begin{aligned} \text{bij } s = \rho + i\varphi, \quad |\sinh xs| &= |\sinh x\rho \cos x\varphi + i \cosh x\rho \sin x\varphi| = [\sinh^2 x\rho \cos^2 x\varphi + \cosh^2 x\rho \sin^2 x\varphi]^{1/2} \\ &= [\sinh^2 x\rho + \sin^2 x\varphi]^{1/2}; \quad |\sinh s| = [\sinh^2 \rho + \sin^2 \varphi]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sinh xs}{\sinh s} \right| = \left| \frac{\sinh^2 x\rho + \sin^2 x\varphi}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \varphi} \right|^{1/2} \leq \left( \frac{\sinh^2 x\rho + \sin^2 \varphi}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \varphi} \right)^{1/2} \leq \left( 1 + \frac{1}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \varphi} \right)^{1/2}$$

Zie voorbeeld 8.8

$\sinh^2 \rho + \sin^2 \varphi \geq \rho^2 + \sin^2 \varphi = (2n+1)^2 \pi^2 + \sin^2 \varphi - \rho^2 \geq (2n+1)^2 \pi^2 + \sin^2 \varphi - (2n+1)^2 \pi^2 = 1$  met  $\sin^2 \varphi \geq 0$  of meer.

$$\Rightarrow \left| \frac{\sinh xs}{\sinh s} \right| \leq \sqrt{2} \quad \left| \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{\sinh xs}{\sinh s} \right| \leq \frac{\omega\sqrt{2}}{(2n+1)^2 \pi^2 - \omega^2} \rightarrow 0 \text{ voor } n \rightarrow \infty.$$

Resultaat:

41 b

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot (+2\pi i) \left[ \text{Res}_{s=i\omega} + \text{Res}_{s=-i\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \text{Res}_{s=n\pi i} + \text{Res}_{s=-n\pi i} \right) \right]$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\sin \omega x + \sin \omega t}{\sin \omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\omega}{\omega^2 - n^2 \pi^2} \sin n\pi x + \sin n\pi t$$

Bewijzing naar standaard bijdragen.

Eerste term = gewone bijdrage, freq.  $\omega$ ; tweede term = vrije bijdrage.

Opmerking. Voor  $\omega = n\pi$  eerste term singulier omdat tweede term v. reuk. samenkomst en limietovergang  $\omega \rightarrow n\pi$ .  
 bij reukstralen via dubbele pool. Resonantie

Voortzetting II  
Uitwerking oplozing. Algemeener probleem

met in 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & 0 \leq x < 1, t > 0. \\ u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x < 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = f(t), & t > 0. \end{cases}$$

Laplace transformeren naar t:

$$u(x,s) = \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-st} dt, \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Getransformeerde problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - s^2 u = 0, & 0 \leq x < 1 \\ u(0,s) = 0, \quad u(1,s) = F(s) \end{cases}$$

Oplossing  $u(x,s) = F(s) \frac{\sinh xs}{\sinh s}$

Terug transformeren met convolutiebijdrage.  
 Inverse v.  $F(s)$  is  $f(t)$ . Inverse v.  $\frac{\sinh xs}{\sinh s}$  is  $H(x,t)$ .

Nu is:  $\frac{\sinh xs}{\sinh s}$  is niet Laplace transform v. gewone functie

volgens volgende Boole'sch.  $\frac{\sinh xs}{\sinh s}$  anal. voor  $\text{Re } s > 0$ .  
 $s = p + iq: \left| \frac{\sinh xs}{\sinh s} \right| = \left\{ \frac{\sinh^2(x + i^2 x q)}{\sinh^2(p + i^2 q)} \right\}^{1/2} \rightarrow 0$  voor  $q \rightarrow \pm \infty$ ,  $p$  vast.

$\frac{\sinh xs}{\sinh s}$  is wel Laplace transform v. reuk v.  $\delta$ -functie:

$$\frac{\sinh xs}{\sinh s} = \frac{e^{xs} - e^{-xs}}{e^s - e^{-s}} = \frac{e^{(x-1)s}}{1 - e^{-2s}} - \frac{e^{-xs}}{1 - e^{-2s}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(x-1-2k)s} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(x+2k)s}$$

$\delta(t-a) \Rightarrow \int_0^{\infty} \delta(t-a) e^{-st} dt = e^{-as}$

$$\frac{\sinh xs}{\sinh s} \text{ is Laplace transform v. } H(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(\frac{t+x-2k}{2}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(\frac{t-x-2k}{2}\right)$$

~~Klein ook met f. In de laatste term~~

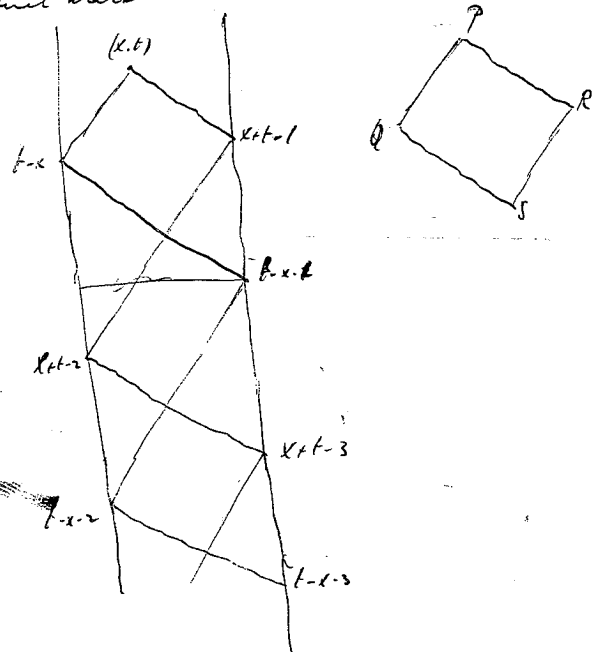
$$\begin{aligned}
 18-12 \cdot 1475 \\
 k(x,t) &= f(x) * H(x,t) = \int_0^t f(\tau) H(x,t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x+t-2n-\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-x-2n-\tau) \right] d\tau \\
 &= \sum_{0 < x+t-2n < t} f(x+t-2n) - \sum_{0 < t-x-2n < t} f(t-x-2n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{x+t-1}{2} \rfloor} f(x+t-2n) - \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{t-x-1}{2} \rfloor} f(t-x-2n)
 \end{aligned}$$

naar links                      naar rechts

Ontwikkeling naar lopende golven  
 Reflectie en interferentie

Naar groter t, hoe meer lopende golven.

Ook met karakteristiekmethoden. (college 73V)



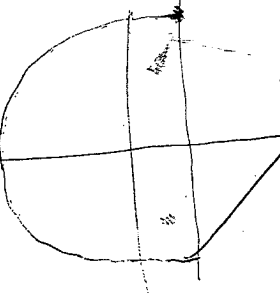
Karakteristieke method.  
 $k(P) = k(Q) + k(R) - k(S)$

~~Alternatieve oplossing. (zonder J-functie)~~

~~Schrijf  $k(x,t) = \mathcal{S}\{f\} \frac{\sin x}{\sin t}$~~

~~Waarbij:  $f(t)$  differentieerbaar,  $f(0)=0$  dan  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\mathcal{S}\{f\}}{s}$   
 Bepaal nu functie  $k(x,t)$  door  $\mathcal{L}\{k(x,t)\} = \frac{\sin x}{s \sin t}$  (klassieke functie in wel Laplace transform)~~

~~$k(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\sin x}{s \sin t} e^{ts} ds$ . Polen  $s = \pm n\pi i, n=1,2,3,\dots$ ; pool  $s=0$ .~~



~~Stuur door het cirkel naar links (zie product II)~~

$$\begin{aligned}
 k(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s=n\pi i} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s=-n\pi i} \left( \frac{\sin x}{s \sin t} e^{ts} \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin 2n\pi x \cos 2n\pi t \\
 k(x,t) &= \frac{1}{2} [S(x+t) + S(x-t)] \text{ met } S(p) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi p \\
 \Rightarrow S(p) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{n\pi i p} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + e^{n\pi i p}) = -\frac{1}{2} p, \quad -1 < p < 1.
 \end{aligned}$$

~~$S(p) = -\frac{1}{2} p$~~



Alternatieve afleiding (zonder  $\delta$ -functie) Nijs 1976, 1977, 1978, 1979, 1984

IV

schrijf  $U(x, s) = S F(s) \frac{\sinh xs}{s \sinh s}$

41 d

Onderstel  $f(t)$  differentieerbaar,  $f(0) = 0$ , dan is  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s)$ .

Invrees van  $\frac{\sinh xs}{s \sinh s}$  is  $K(x, t)$ , al volgt te bepalen:

$$\frac{\sinh xs}{s \sinh s} = \frac{1}{s} \frac{e^{xs} - e^{-xs}}{e^s - e^{-s}} = \frac{1}{s} [e^{(x-1)s} - e^{-(x+1)s}] (1 - e^{-2s})^{-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s} \{ e^{-(2n+1-x)s} - e^{-(2n+1+x)s} \}$$

$$\frac{1}{s} \{ e^{-(2n+1-x)s} - e^{-(2n+1+x)s} \} = \int_{2n+1-x}^{2n+1+x} e^{-st} dt,$$

$$K(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1-x, \\ 1, & 2n+1-x < t < 2n+1+x, \quad n=0,1,2,\dots \\ 0, & 2n+1+x < t < 2n+3-x, \quad n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Convolutiebetting toevoegen:

$$U(x, t) = f'(t) * K(x, t) = \int_0^t f'(t-\tau) K(x, \tau) d\tau =$$

(men gemakkelijker  $f'(t) = f'(t) = 0$  voor  $t < 0$ )

$$= \int_0^{\infty} f'(t-\tau) K(x, \tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n+1-x}^{2n+1+x} f'(t-\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [f(t+x-2n-1) - f(t-x-2n-1)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\lfloor \frac{t-x}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{t+x}{2} \rfloor} f(t-x-2n-1) =$$

$s = -\epsilon$

straal tot nul nadert. Langs de onderkant van de twee is nu  $\sqrt{s} = -i\sqrt{-s}$ , langs de bovenkant is  $\sqrt{s} = i\sqrt{-s}$ . Daarom is:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} e^{t^s} ds = \int_0^{\infty} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-ix\sqrt{-s}} e^{t^s} ds + \int_0^{-\infty} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} e^{ix\sqrt{-s}} e^{t^s} ds$$

(tel  $-s = \omega$ )

$$= -\int_0^{\infty} \frac{A\omega}{\omega^2 + \omega^2} (e^{ix\sqrt{\omega}} - e^{-ix\sqrt{\omega}}) e^{-t\omega} d\omega = -2i \int_0^{\infty} \frac{A\omega}{\omega^2 + \omega^2} \sin(x\sqrt{\omega}) e^{-t\omega} d\omega.$$

De limietovergang voor  $R \rightarrow \infty$  geeft nu:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} e^{t^s} ds =$$

$$= A e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \sin[\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}] + \frac{A\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{\omega})}{\omega^2 + \omega^2} e^{-t\omega} d\omega.$$

In de limiet voor  $t \rightarrow \infty$  zal de integraalterm tot nul nadere. De stationaire toestand oplossing wordt dus gegeven door

$$u_{stat} = A e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \sin[\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}].$$

Een oprijke van de handtemperatuur  $u(x, t) = A \sin \omega t$  in deze temperatuur ter plaats  $x$  en fan verschoven over een bedrag  $x\sqrt{\frac{\omega}{2}}$ , terwijl de amplitude van de temperatuurschommeling verzwakt is volgens een factor  $e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}}$ .

Toepassing: diepte van kelders en waterleidingbuizen.

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem voor een lineaire waer,

zie 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = f(t), \quad t > 0,$$

waarbij we veronderstellen dat  $f(t)$  differentieerbaar zal zijn en  $f(0) = 0$  is.

Pa nu Laplace transformatie toe.

$$U(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt, \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

dan gaat het randwaardeprobleem over in

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 U = 0, \\ U(0, s) = 0, \quad U(1, s) = F(s) \end{cases}$$

met als oplossing

$$U(x, s) = F(s) \frac{\sinh xs}{\sinh s}.$$

We willen nu  $U(x, s)$  terugtransformeren met behulp van de convolutiestelling. Evenwel  $\frac{\sinh xs}{\sinh s}$  is geen Laplace getransformeerde, zo kan men bewijzen. We schrijven daarom:

$$U(x, s) = s F(s) \frac{\sinh xs}{s \sinh s}.$$

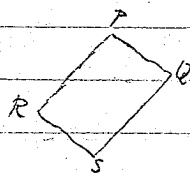
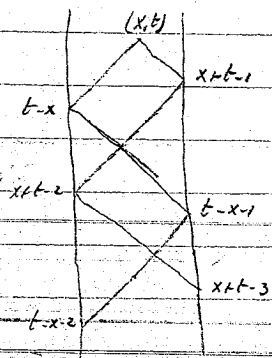
De functie  $s F(s)$  is nu de L.T. van  $f'(t)$ ,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = s F(s).$$

We bepalen vervolgens de inverse Laplace transform van  $\frac{\sinh xs}{s \sinh s}$ , glt/kruisen. Volgens de residuformule zal gelden. De functie  $\frac{\sinh xs}{s \sinh s}$  heeft Polen in de punten  $s = 0$  en  $s = \pm i\pi k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), verder is ze analytisch, dus zeker analytisch voor  $|s| > 0$ .

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t f(\tau) [\delta(x+t-\tau-2n-1) - \delta(t-\tau-x-2n-1)] d\tau = \\
 &= \sum_{0 < x+t-2n-1 < t} f(x+t-2n-1) - \sum_{0 < t-x-2n-1 < t} f(t-x-2n-1) \\
 &= \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{x+t-1}{2} \rfloor} f(x+t-2n-1) - \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{t-x-1}{2} \rfloor} f(t-x-2n-1)
 \end{aligned}$$

De oplossing is ook af te leiden met karakteristiekmethode, zie college PDI.



voor karakteristiek methode geldt

$$u(P) = u(Q) + u(R) - u(S)$$

Nut correct. Als volgt doen:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 p + \sin^2 q &\geq p^2 + \sin^2 q = (2rt)^2 \pi^2 + \sin^2 q - q^2 \\
 &\geq (2rt)^2 \pi^2 + \sin^2(2rt)\pi - (2rt)^2 \pi^2 = 1,
 \end{aligned}$$

want  $\sin^2 q - q^2$  is afnemende functie

Toevraging: Over de functie

$$S(p) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi p$$

Uitwerking:

$$S(p) = -\frac{1}{\pi} \Im \log(1 + e^{i\pi p}) = -\frac{1}{2} p, \quad -1 < p < 1; \quad S(p) \text{ periodiek met periode 2.}$$

Controle: Ontwikkel  $S(p)$  in Fourierreeks dan vinden we waarschijnlijk recht terug.

Grafiek van  $S(p)$  is "zaagtoestand" met sprongpunten  $p = 2n+1$ , sprong 1.

Merkt:

$$g(t) = x + S(x+t) + S(x-t) = x + S(x+t) - S(t-x)$$

Opgawe: Verifieer dat inderdaad  $R\{g(t)\} = \frac{\sin \pi x}{5 \sin \pi s}$  voor  $0 \leq x \leq 1$ .

Afgelide van  $S(p)$ :  $S'(p) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(p-2n-1)$

Oplossing  $u(x,t)$  te herleiden tot

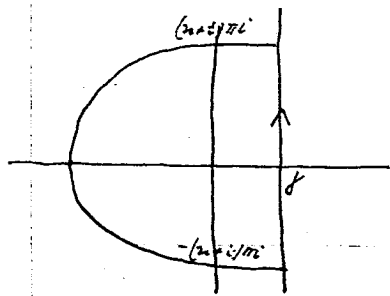
$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= x f(t) + \int_0^t f'(\tau) [S(x+t-\tau) - S(t-\tau-x)] d\tau = \\
 &= x f(t) + 2 \int_0^t f(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) [S'(x+t-\tau) - S'(t-\tau-x)] d\tau
 \end{aligned}$$

vullen weg voor  $0 < x < 1, S(x) = -\frac{1}{2}x$

form -1/2 in afgeleide valt weg. Zie boven

Met behulp van de omkeersomformule volgt nu,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\sinh xs}{s \sinh s} e^{ts} ds.$$



We sluiten nu de integratieweg naar links als getekend in de figuur. De gesloten contour bestaat uit de lijnsegmenten  $[\gamma - E(n+1/2)\pi, \gamma + (n+1/2)\pi]$ ,  $[(n+1/2)\pi, \gamma + (n+1/2)\pi]$  en  $[-(n+1/2)\pi, \gamma - (n+1/2)\pi]$  en een halve cirkel  $C_n$  met straal  $(n+1/2)\pi$  op in het linker halfvlak.

Er zal nu gelden volgens de residuerekening,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\sinh xs}{s \sinh s} e^{ts} ds &= \text{Res}_{s=0} \frac{\sinh xs}{s \sinh s} e^{ts} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s=i n \pi} \frac{\sinh xs}{s \sinh s} e^{ts} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s=-i n \pi} \frac{\sinh xs}{s \sinh s} e^{ts} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i \sin n\pi x}{n\pi (-1)^n} e^{n\pi i t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i \sin n\pi x}{-n\pi (-1)^n} e^{-n\pi i t} \\ &= x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x \cos n\pi t}{n}. \end{aligned}$$

Stel nu  $s = p+iq$ , dan is op de cirkel  $C_n$   $(p^2+q^2)^{1/2} = (n+1/2)\pi$ , en

$$\left| \frac{\sinh xs}{s \sinh s} \right| = \left| \frac{\sinh xp \cos xq + i \cosh xp \sin xq}{\sinh p \cosh q + i \cosh p \sin q} \right| = \left| \frac{\sinh^2 xp + \sin^2 xq}{\sinh^2 p + \sin^2 q} \right|^{1/2}$$

$$\leq \left\{ 1 + \frac{2}{\sinh^2 p + \sin^2 q} \right\}^{1/2} \leq K = \sqrt{3}$$

want  $\sinh^2 p + \sin^2 q$  heeft op  $C_n$  een positieve ondergrens. Tenzij valt  $\sinh^2 p + \sin^2 q = 0$  in een zeker punt op  $C_n$ , dan moet noodzakelijkerwijs  $p=0$  zijn, dus  $q = (n+1/2)\pi$ ,  $\sin^2 q = 1$  en:

Op  $C_n$  Er zal nu gelden,

$$\frac{\sinh xs}{s \sinh s} \Big|_{s \in C_n} \rightarrow 0 \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Volgens het lemma van blz. 41 is dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\sinh xs}{s \sinh s} e^{ts} ds = 0.$$

Evenszoo kan men aantonen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma+i(n+1/2)\pi}^{\gamma+i(n+1/2)\pi} + \int_{\gamma+i(n+1/2)\pi}^{\gamma-i(n+1/2)\pi} \right) \frac{\sinh xs}{s \sinh s} e^{ts} ds = 0.$$

Neem nu in de boven berekende contour integraal de limiet voor  $n \rightarrow \infty$ , dan volgt,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\sinh xs}{s \sinh s} e^{ts} dt = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x \cos n\pi t}{n}$$

Eventueel is de laatste term nog expliciet te berekenen. Met de conversieinstelling volgt nu,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f'(t) * g(t) \\ &= \int_0^t f'(\tau) \left\{ x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x \cos n\pi(t-\tau)}{n} \right\} d\tau \end{aligned}$$

Neem we aan dat kruisgewijs integratie geoorloofd is dan volgt,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= x f(t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x}{n} \int_0^t f'(\tau) \cos n\pi(t-\tau) d\tau \\ &= x f(t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x}{n} \left\{ f(t) - n \int_0^t f(\tau) \sin n\pi(t-\tau) d\tau \right\} \\ &= f(t) \left\{ x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x}{n} \right\} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x}{n} \int_0^t f(\tau) \sin n\pi(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

101

3. De causale fundamentele oplossing  $C(x, y, z, t)$  van de golfvergelijking in  $\mathbb{R}_3$  wordt gedefinieerd als de oplossing van het volgende probleem

$$\begin{cases} \Delta C - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = -\delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t), & (x, y, z) \in \mathbb{R}_3, -\infty < t < \infty, \\ C(x, y, z, t) = 0, & t < 0, \end{cases}$$

zie Collegedictaat Part. Differentiaalvogl., p. 121.  
We zullen  $C(x, y, z, t)$  bepalen met behulp van Laplace transformatie naar de tijd  $t$ . Noteer daarbij

$$F(x, y, z, s) = \int_0^{\infty} C(x, y, z, t) e^{-st} dt.$$

waarbij de ondergrens  $-0$  te nemen is.

Er ontstaat dan het getransformeerde probleem

$$\Delta F - \frac{s^2}{c^2} F = -\delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

De functie  $F$  is dan fundamentele oplossing van de Helmholtz vergelijking met singulariteit in de oorsprong.

Op symmetrie-gronden zal nu  $F$  alleen afhangen van  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Buiten de oorsprong gaat dan de vergelijking voor  $F$  over in

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{s^2}{c^2} F = 0$$

met oplossingen  $\frac{\exp[-sr/c]}{r}$ ,  $\frac{\exp[sr/c]}{r}$ .

De eerste oplossing voldoet niet omdat  $\frac{\exp[sr/c]}{r} \rightarrow \infty$  voor  $r \rightarrow \infty$  bij  $\text{Re } s > 0$ .

Indien we de  $\delta$ -functie singulariteit op de juiste wijze in aanmerking nemen (zie Collegedictaat Part. Differentiaalvogl. § 7.4) volgt

$$F(x, y, z, s) = \frac{\exp[-sr/c]}{4\pi r}$$

vergelijk met Collegedictaat Part. Differentiaalvogl., op pag. 6.10.11.

De functie  $F$  is niet Laplace transform van een gewone functie want voor vaste  $\text{Re } s > 0$  geldt niet  $F(x, y, z, s) \rightarrow 0$  voor  $\text{Im } s \rightarrow \pm \infty$ .

Maak nu gebruik van het volgende resultaat

$$\delta(t-a) \Rightarrow \int_0^{\infty} \delta(t-a) e^{-st} dt = e^{-as}, \quad a > 0.$$

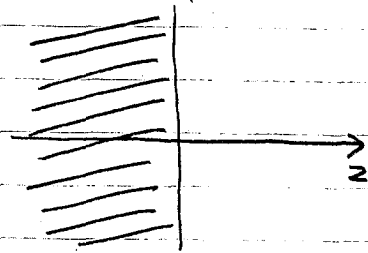
Dan volgt dat  $F(x, y, z, s)$  Laplace transform is van

$$\frac{\delta(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} = C_3(x, y, z, t).$$

in overeenstemming met resultaat uit Collegedictaat Part. Differentiaalvogl. p. 121.

13-12-1975

4. Probleem van G.F.T. Beemer, Stagerverslag december 1978.



Halfruimte  $z > 0$  bevat vloeistof fase;  
 halfruimte  $z < 0$  bevat vaste-stof fase.  
 Interfacie  $z=0$  verplaatst zich met snelheid  $v(t)$ ,  
 in tijd, naar rechts door kristalgroei.  
 Kristalgroei ontstaat door afkoeling aan het

interfacie, waardoor vloeistof-fase daar verzadigd is.

Een en ander is te formuleren als diffusieprobleem voor concentratie  $C(z, t)$ :

$$\begin{cases} C_{zz} + \frac{v(t)}{D} C_z = \frac{1}{D} C_t, & (z > 0, t > 0) \\ C(z, 0) = C_0, \\ C(0, t) = C_0 - q(t), \\ D C_z(0, t) = [C_s - C(0, t)] v(t). \end{cases}$$

Term  $\frac{v(t)}{D} C_z$  komt omdat  $z$ -coördinaat betrokken is op bewegende interface.

$D$  = diffusieconstante;  $C_0$  = beginconcentratie;  $q(t)$  beschrijft de verandering van de concentratie aan het interface door afkoeling; de laatste vergelijking is de zogenaamde massabalans, vloeistofmassa gaat over in vaste massa,  $C_s$  is de concentratie van de vaste fase.

Werk op dat  $C(z, t)$  en  $v(t)$  onbekend zijn - 292. Stefan probleem; daarom ook twee randvoorwaarden voor  $z=0$ .

In praktijk werkt men vaak met lineaire afkoeling  $q(t) = kt$ ,  $k = \text{constante}$ .  
 Probleem dan op te lossen door reeksontwikkeling voor  $C(z, t)$  en  $v(t)$ , bruikbaar voor kleine  $t$ , zie Stagerverslag Beemer.

Ander aanpak is om  $q(t)$  anders te kiezen en wel zodanig dat  $v(t) = v$  constant wordt. Een aanpak wordt hieronder verder uitgewerkt.

Voor in  $C(z, t) = C_0 - \psi(z, t)$ ,  
 dan probleem voor  $\psi(z, t)$ :

$$\begin{cases} \psi_{zz} + \frac{v}{D} \psi_z = \frac{1}{D} \psi_t, & z > 0, t > 0, \\ \psi(z, 0) = 0 \\ \psi(0, t) = q(t), & D \psi_z(0, t) = -[C_s - C_0 + q(t)] v. \end{cases}$$

Laplace transformatie naar tijd  $t$ :

$$\bar{\psi}(z, s) = \int_0^\infty \psi(z, t) e^{-st} dt, \quad \bar{q}(s) = \int_0^\infty q(t) e^{-st} dt.$$

Gebruik transformeer het probleem:

$$\begin{cases} \Phi_{zz} + \frac{v}{D} \Phi_z - \frac{s}{D} \Phi = 0, & z > 0 \\ \Phi(0, s) = G(s), \\ D \Phi_z(0, s) = -(C_1 - C_0) \frac{v}{s} - v G(s) \end{cases}$$

Algemeen oplossing vergelijking:

$$\Phi(z, s) = A(s) \exp\left[-\left(\frac{v}{2D} + \sqrt{\frac{s^2 + \lambda}{D}}\right)z\right] + B(s) \exp\left[-\left(\frac{v}{2D} - \sqrt{\frac{s^2 + \lambda}{D}}\right)z\right],$$

met  $\lambda = \frac{v^2}{4D}$ . Tweede oplossing niet begrensd voor  $z \rightarrow \infty$ ; daarom  $B(s) = 0$ .

Voorts is  $A(s) = G(s)$ , zodat

$$\Phi(z, s) = G(s) \exp\left[-\left(\frac{v}{2D} + \sqrt{\frac{s^2 + \lambda}{D}}\right)z\right].$$

Substitutie in massa-balans leidt tot

$$-\left(\frac{v}{2} + \sqrt{D} \sqrt{s^2 + \lambda}\right) G(s) = -(C_1 - C_0) \frac{v}{s} - v G_2(s),$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{(C_1 - C_0)v}{s} \frac{1}{-\frac{v}{2} + \sqrt{D} \sqrt{s^2 + \lambda}} = \frac{(C_1 - C_0)v}{D^{3/2}} \frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{s^2 + \lambda} - \sqrt{\lambda}} = \\ &= \frac{(C_1 - C_0)v}{D^{3/2}} \frac{\sqrt{s^2 + \lambda} + \sqrt{\lambda}}{s^2}. \end{aligned}$$

Zoeken Laplace-transformatie:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\lambda}}{s^2}\right\} = \sqrt{\lambda} t,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s^2 + \lambda}}{s^2}\right\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\sqrt{s^2 + \lambda}}{s^2} e^{st} ds = (\text{sluit integratie weg door} \\ &\text{halve cirkel naar links}) \\ &= \text{Res}_{s=0} \frac{\sqrt{s^2 + \lambda}}{s^2} e^{st} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sqrt{s^2 + \lambda}}{s^2} e^{st} ds = (\text{L is lus om twee } (-\infty, -\lambda], \\ &\text{stiel } s = -\infty) \end{aligned}$$

$$= t\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\sqrt{s-\lambda}}{s^2} e^{-st} ds =$$

$$= t\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\pi} e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \frac{s^{-3/2}}{s+\lambda} e^{-st} ds + \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \frac{s^{-3/2}}{(s+\lambda)^2} e^{-st} ds$$

$$\text{Voor in: } k(t) = e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \frac{s^{-3/2}}{s+\lambda} e^{-st} ds, \quad L\{k\} = e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \frac{s^{-3/2}}{(s+\lambda)^2} e^{-st} ds.$$

$$\text{dan is } L\{k\} = -k'(t), \quad k'(t) = -e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} s^{-3/2} e^{-st} ds = -e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

$$k(0) = \int_0^{\infty} \frac{s^{-3/2}}{s+\lambda} ds = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}, \quad L\{k\} = \int_0^{\infty} \frac{s^{-3/2}}{(s+\lambda)^2} ds = -\frac{\partial}{\partial \lambda} k(0) = \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}}.$$

Door terug-integreren volgt

$$k(t) = k(0) + \int_0^t k'(\tau) d\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\pi} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \tau^{-1/2} d\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda t})],$$

$$L(t) = L(0) + \int_0^t L'(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}} - \int_0^t k(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}} - t k(t) + \int_0^t \tau k'(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda t})] t - \sqrt{\pi} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \tau^{1/2} d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda t})] t + \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} e^{-\lambda t} t^{3/2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \tau^{-1/2} d\tau =$$

$$= \left( \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}} - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} t \right) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda t})] + \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} e^{-\lambda t} t^{3/2}.$$

Substitueer den resultaat dan volgt

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{s+\lambda}}{s^2} \right\} = t\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda t})] + \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \lambda^{3/2} t \right) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda t})] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda t} t^{3/2},$$

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G(s) \} = \frac{(C_1 - C_0)v}{D^{3/2}} \left[ 2t\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + \lambda^{3/2} t \right) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda t})] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda t} t^{3/2} \right].$$

waarin  $\lambda = v^2/4D$ , of ook

$$q(t) = \frac{(C_1 - C_0)v}{D^{3/2}} \left[ \frac{vt}{2\sqrt{D}} + \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{v^2 t}{4D}} + \frac{v}{2\sqrt{D}} \left( t + \frac{2D}{v^2} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{D}} \right) \right]$$

Voor de Laplace transform  $\Phi(z, s)$  van de concentratie vinden we

$$\Phi(z, s) = \frac{(C_1 - C_0)v}{D^{3/2}} \frac{\sqrt{s+\lambda} + \sqrt{\lambda}}{s^2} \exp \left[ - \left( \frac{v}{2D} + \sqrt{\frac{s+\lambda}{D}} \right) z \right]$$

Ook den uitdrukking is terug te transformeren. Bemerkt dat dat met formules uit Appendix V van Carslaw & Jaeger en vindt

$$\begin{aligned} \psi(z, t) = & \frac{C_1 - C_0}{2D} \left[ \frac{2v\sqrt{Dt}}{\sqrt{\pi}} \exp \left( - \frac{(z+vt)^2}{4Dt} \right) + \right. \\ & \left. + (v^2 t - vz + D) \exp \left( - \frac{vz}{D} \right) \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{Dt}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{D}} \right) \right\} \right. \\ & \left. - D \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{Dt}} + \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{D}} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$



b. Integraalvergelijkingen

Met behulp van Laplace transformatie zijn de volgende integraalvergelijkingen van het convolutie type op te lossen:

$$g(x) = \int_0^x k(x-\xi) f(\xi) d\xi, \quad x > 0,$$

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x-\xi) f(\xi) d\xi, \quad x > 0.$$

Deze integraalvergelijkingen zijn bijzondere gevallen van Volterra integraalvergelijkingen van eerste en tweede soort. De functie  $g(x)$ , en de kern  $k(x)$  zijn gegeven, de functie  $f(x)$  wordt gevraagd te bepalen.

We passen op beide vergelijkingen Laplace transformatie toe en noemen de l.t.'s van  $f, g, k$  resp.  $F(s), G(s), K(s)$ . Dan volgt:

$$G(s) = F(s) K(s)$$

resp.

$$F(s) = G(s) + \lambda K(s) F(s).$$

De oplossing van deze functionaalvergelijkingen luidt:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - \lambda K(s)},$$

resp.

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - \lambda K(s)}.$$

We te moeten vervolgens  $F(s)$  terugtransformeren b.v. met de convolutiestelling, opent de oorspronkelijke.

Voor de integraalvergelijking van eerste soort waar de

$$F(s) = \frac{G(s)}{K(s)}$$

in dat soort zonder meer mogelijk, omdat  $\frac{1}{K(s)}$  geen l.t. is. In veel gevallen kunnen we dan echter schrijven,

$$F(s) = s \frac{1}{sK(s)} G(s),$$

waarbij  $\frac{1}{sK(s)}$  wel een l.t. is. b.v. bij  $\frac{1}{sK(s)}$  de l.t. van  $\frac{h(x)}{x}$  dan is na terugtransformatie,

$$f(x) = \frac{d}{dx} h(x) * g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x g(\xi) k(x-\xi) d\xi.$$

In geval van een integraalvergelijking van tweede soort schrijven we  $F(s)$  vaak als volgt.

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - \lambda K(s)} = G(s) + \frac{\lambda K(s)}{1 - \lambda K(s)} G(s).$$

~~We laten nu de inverse l.t. van  $\frac{\lambda K(s)}{1 - \lambda K(s)}$ , naar deze  $g(x)$ . We volgen een stelling van Doetsch (Doe. Nu was  $k(x)$  de l.t.~~

We zoeken nu de inverse l.t. van  $\frac{\lambda K(s)}{1 - \lambda K(s)}$ . Nu was  $K(s)$  de inverse l.t. van  $k(x)$ . Volgens een bekende stelling (zie b.v. Doetsch, Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace Transformation, S. 16-73, p. 143) zal nu  $K(s) \rightarrow 0$  gaan als  $|s| \rightarrow \infty$  in het halfvlak waar  $k(x)$  analytisch is. Er bestaat nu zeker een getal  $a$  zodat  $|\lambda K(s)| < 1$  is voor  $\text{Re } s > a$ . We ontwikkelen dan,

$$\frac{\lambda K(s)}{1 - \lambda K(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \{K(s)\}^n.$$

Opgeave, Algemene integratievergelijking van Abel:

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1$$

Leefoplossing

$$f(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \frac{g(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}} d\xi \right]$$

Fractionele integraal  $f(x) * 1 = \int_0^x f(t) dt$ ,  $\mathcal{L}\{f(x) * 1\} = \frac{F(s)}$

(Riemann-integraal)  $(f(x) * 1) * 1 = \int_0^x (x-t) f(t) dt$  want  $\mathcal{L}\{(f(x) * 1) * 1\} = \frac{F(s)}{s^2}$ ,  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x$

$f(x) * 1^{*n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$  want  $\mathcal{L}\{f(x) * 1^{*n}\} = \frac{F(s)}{s^n}$ ,  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

Definitie  $I^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$   $n$ -de integraal  $| I^0 f(x) = f(x)$

$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$ ,  $\alpha > 0$ , integraal van orde  $\alpha$

Eigenschap  $I^\alpha I^\beta f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x)$

Bewijs  $\mathcal{L}\{I^\alpha I^\beta f(x)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} I^\beta f(t) dt\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt\right\} =$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} \mathcal{L}\left\{\frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right\} \mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{F(s)}{s^{\alpha+\beta}}$$

$$\mathcal{L}\{I^{\alpha+\beta} f(x)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right\} \mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{F(s)}{s^{\alpha+\beta}}$$

Eigenschap  $D I^\alpha f(x) = I^{\alpha-1} f(x)$ ,  $\alpha > 1$ ;  $D^n I^\alpha f(x) = I^{\alpha-n} f(x)$ ,  $\alpha > n$ ;  $D = \frac{d}{dx}$

Bewijs  $D I^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt = I^{\alpha-1} f(x)$

Definitie  $I^{-n} f(x) = D^n I^{\alpha-n} f(x)$  voor  $-n \leq -\alpha < -n+1$

Definitie  $D^\alpha f(x) = I^{-\alpha} f(x)$  voor  $\alpha \geq 0$ ;  $\alpha$  fractioneel of geheel n orde  $\alpha$ .

Abel vergelijking om het te schrijven als  $g(x) = \sqrt{x} I^{\frac{1}{2}} f(x)$ ;

formele oplossing  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} I^{-\frac{1}{2}} g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} D I^{\frac{1}{2}} g(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt$

Norm nu de inverse Laplace transformatie,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n k(x)^{*n}$$

waarin  $k(x)^{*n}$  de  $n$ -voudige convolutie voorstelt,

$$k(x)^{*n} = k(x) * k(x) * \dots * k(x).$$

De oplossing van de integraalvergelijking wordt nu gegeven door,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + g(x) * g(x) \\ &= g(x) + \int_0^x g(x-\xi) g(\xi) d\xi \\ &= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^x k(x-\xi) k(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

De laatste reeks is juist de bekende Neumann reeks. Blijkbaar andere weg is te bewijzen dat deze Neumann reeks voor iedere Volterra integraalvergelijking van tweede soort convergeert naar de oplossing.

Voorbeelden:

1. De integraalvergelijking van Abel leidt,

$$f g(x) = \int_0^x \frac{g(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi, \quad x > 0.$$

De Laplace transformatie toe; dan wordt de l.t. van de kern nu gegeven door

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Er volgt nu,

$$G(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} F(s),$$

waaruit we afleiden,

$$F(s) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} F G(s) = \frac{s}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} G(s).$$

De factor  $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} G(s)$  is nu juist de l.t. van de convolutie,

$$\sqrt{x} * g(x) = \int_0^x \frac{g(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi.$$

Nemen we nu aan dat b.v.  $g(x)$  begrensd is, dan zal deze integraal nul zijn voor  $x=0$ , en er volgt de oplossing,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi.$$

Is  $g(x)$  tweemaal differentieerbaar, dan volgt na partiële integratie,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left[ -2g(\xi) \sqrt{x-\xi} \Big|_0^x + 2 \int_0^x g'(\xi) \sqrt{x-\xi} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{g(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{g'(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Substitueer dit in het rechterlid van de Abel integraalvergelijking, dan volgt

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi &= \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \left[ \frac{g(0)}{\sqrt{\xi}} + \int_0^{\xi} \frac{g'(\eta)}{\sqrt{\xi-\eta}} d\eta \right] \\ &= \frac{1}{\pi} g(0) \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{\xi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^x g'(\eta) d\eta \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\eta} \sqrt{x-\xi}} \\ &= g(0) + \int_0^x g'(\eta) d\eta = g(x) \end{aligned}$$

m.a.w. de gevonden oplossing voldoet inderdaad aan de Abel integraalvergelijking.

Opgave Onder welke voorwaarden voor  $g(x)$  heeft de integraalvergelijking

$$g(x) = \int_0^x \sin(x-\xi) f(\xi) d\xi$$

een oplossing. Bepaal deze oplossing.

$$f(x) = g(x) + g''(x) \text{ met } g(0) = g'(0) = 0$$

2. Als voorbeeld van een integraalvergelijking van tweede soort bespreken we.

$$f(x) = g(x) + \int_0^x e^{a(x-\xi)} f(\xi) d\xi.$$

De L.T. van de kern is in dit geval,

$$\int_0^{\infty} e^{ax} e^{-sx} dx = \frac{1}{s-a}.$$

Na Laplace transformatie gaat de integraalvergelijking over in.

$$F(s) = G(s) + \frac{F(s)}{s-a}$$

met als oplossing

$$F(s) = \frac{s-a}{s-a-1} G(s) = G(s) + \frac{1}{s-a-1} G(s).$$

Neem  $\frac{1}{s-a-1}$  de L.T. van  $e^{(a+1)x}$  zodat we als oplossing vinden

$$f(x) = g(x) + e^{(a+1)x} * g(x) = g(x) + \int_0^x e^{(a+1)(x-\xi)} g(\xi) d\xi.$$

III. Singuliere integraalvergelijkingen

109.

1.1 Cauchy integraal

We definiëren eerst enige begrippen die bij de invoering van de Cauchy integraal een belangrijke rol spelen.

Onder een (gladde) boog verstaan we een kromme die kan worden voorgesteld door,

$$x = x(s), y = y(s), s_2 \leq s \leq s_1$$

met:

(i)  $x(s), y(s)$  continu differentieerbaar voor  $s_2 \leq s \leq s_1, \{x'(s)\}^2 + \{y'(s)\}^2 \neq 0;$

(ii)  $(x(s_1), y(s_1)) \neq (x(s_2), y(s_2))$  voor  $s_2 \leq s_1, s_2 \leq s_1, s_1 \neq s_2.$

Zwaa: een (gladde) contour is een kromme met dezelfde eigenschappen als een boog behalve dat (ii) vervangen wordt door

(i')  $(x(s_1), y(s_1)) \neq (x(s_2), y(s_2))$  voor  $s_2 < s_1, s_2 < s_1;$

$$x(s_2) = x(s_1), y(s_2) = y(s_1), x'(s_2) = x'(s_1), y'(s_2) = y'(s_1).$$

Op een boog of contour  $L$  zullen we nu een positieve richting vastleggen. Zij  $t \in L, t$  geen eindpunt van  $L$  dan zullen we in het volgende vaak te maken krijgen met limietovergangen waarbij  $z \rightarrow t$ . We noteren nu  $z \rightarrow t^+ (z \rightarrow t^-)$  d.i. nadering van de positieve (negatieve) kant, indien bij doorlopen van  $L$  in de positieve richting  $z \rightarrow t$  langs een pad dat links (rechts) van  $L$  verloopt. In geval  $L$  een contour is nemen we voor de positieve richting de richting "tegen de wijzers van de klok in".  $L$  is dan de rand van twee gebieden: het binnengebied  $S^+$  (links van  $L$ ) en het buitengebied  $S^-$  (rechts van  $L$ ).

Definitie De functie  $\varphi(t)$  zal gedefinieerd zijn op  $L, t = x+iy \in L$ . ( $L$  is een boog of contour).

$\varphi(t)$  heet dan Hölder continu op  $L$  (of voldoet op  $L$  aan een Hölder conditie) indien er een constante  $K > 0$  en een exponent  $\mu$  met  $0 < \mu \leq 1$  bestaan, zodat voor elk tweetal punten  $t_1, t_2 \in L$  geldt:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq K |t_2 - t_1|^\mu.$$

We noteren:  $\varphi(t) \in H(\mu)$  of  $\varphi(t) \in H$ .

Opmerkingen: 1°. Als  $\varphi(t)$  Hölder continu is op  $L$ , dan is  $\varphi(t)$  tevens continu op  $L$ . Het omgekeerde resultaat geldt niet. Ton dit aan.

2°. Verifieer dat, indien  $\varphi(t)$  Hölder continu is op  $L$  met exponent  $\mu > 1$ , dan volgt  $\varphi'(t) = 0, \varphi(t) = \text{constant}$  op  $L$ . Het is daarom zinvol  $\mu$  te beperken tot  $0 < \mu \leq 1$ .

3°. Als  $\varphi(t)$  continu differentieerbaar is op  $L$ , dan is  $\varphi(t)$  Hölder continu met  $\mu = 1$ . Bewijs dit.

zij nu  $L$  een boog of contour,  $\varphi(t)$  gedefinieerd op  $L$  dan noemen we de integraal

$$\oint(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

een Cauchy integraal.

De functie  $\frac{1}{t-z}$  heet de Cauchy kern.

Met betrekking tot de functie  $\varphi(t)$  zullen we steeds onderstellen:

- 1°. In geval  $L$  een contour is:  $\varphi(t)$  is Holomorf continuum op  $L$
- 2°. In geval  $L$  een boog is met eindpunten  $t=a, t=b$ :

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\alpha_1} (t-b)^{\alpha_2}}$$

met  $\varphi^*(t)$  Hölder continuum op  $L$ ,  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1$  (eventueel  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1$ ).

In geval 2° is  $\varphi(t)$  zeker Holomorf continuum op elk gesloten subinterval van  $L$ , dat  $a$  en  $b$  niet bevat. De voorwaarde  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1$  is opgelijze opdat  $\varphi(t)$  integreerbaar is over  $L$ .

Uit de definitie is stondwylig dat de Cauchy integraal  $\Phi(z)$  betekenis heeft voor elke complexe  $z \notin L$ . Voorts volgt met een stelling uit de functietheorie (College Wiskunde II, p. 28):

$\Phi(z)$  is analytisch (holomorf) in het geheel complexe  $z$ -vlak met uitzondering van  $L$ .

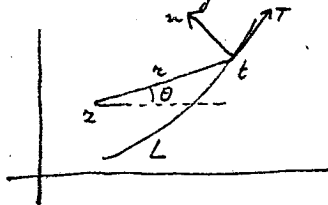
In de (Engels) literatuur noemt men een dergelyk functie  $\Phi(z)$  sectionally holomorf (gedeelteholomorf) met  $L$  als discontinuiteitslijn.

Verder geldt voor  $|z| \rightarrow \infty$   $\Phi(z) \rightarrow 0$ ;  $\Phi(z)$  is af te meten door  $|\Phi(z)| \leq \frac{\text{const.}}{|z|}$ , wat we noteren als  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ .

Toewijzing. De Cauchy integraal is nauw verwant met de logarithmische potentiaal van een ladingsverdeling resp. dipoolbelgging langs  $L$ . (zie College Part. Diff. vgl. I). Neem aan dat  $\varphi(t)$  reëel is, dan schrijven we

$$\Phi(z) = U(x,y) + iV(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt,$$

waarin  $z = x+iy$ .



Voor in.

$$t-z = re^{i\theta}$$

dan is

$$\frac{dt}{t-z} = d \log(t-z) = d[\log r + i\theta] = \frac{dr}{r} + i d\theta$$

waarna de Cauchy integraal overgaat in.

$$U(x,y) + iV(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi d\theta - \frac{i}{2\pi} \int_L \varphi \frac{dr}{r}$$

ofwel

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi \frac{d\theta}{ds} ds \quad \text{en} \quad V(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \varphi \frac{dr}{r} ds.$$

Voor in een coördinatenstelsel in met assen  $T, n$  (zie figuur). Voor de functie

$$\log(t-z) = \log r + i\theta$$

geldt dan als een van de Cauchy-Riemann vergelijkingen

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{d \log r}{dn} = \frac{d}{dn} \left( \log \frac{1}{r} \right).$$

Er volgt dan

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi \frac{d}{dn} \left( \log \frac{1}{r} \right) ds$$

d.w.z.  $U(x,y)$  is de potentiaal van een dipoolbelgging met dipolmoment  $\varphi$  langs  $L$ .

Nemen we verder aan dat  $\varphi$  differentieerbaar en  $L$  een contour is, dan volgt na partiële integratie,

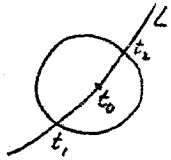
$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{dy}{ds} \log z \, ds = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{dy}{ds} \log \frac{1}{z} \, ds$$

d.v.  $V(x,y)$  is de potentiaal van een ladingsverdeling met dichtheid  $-\frac{dy}{ds}$  langs  $L$ .

We willen nu ook een betekenis geven aan de Cauchy integraal  $\bar{\Phi}(z)$  indien  $z = t_0 \in L$ ,  $t_0$  geen eindpunt van  $L$ . Het is duidelijk dat de integraal

$$\bar{\Phi}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$$

divergent is. We voeren nu in het begrip Cauchy hoofdwaaarde van een integraal:



Teken een cirkel met straal  $\rho$  om  $t_0$ ; den zal een boog  $\ell$  met eindpunten  $t_1, t_2$  uitknippen in  $L$ . Definieer nu,

$$\text{Cauchy hoofdwaaarde van } \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L-\ell} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$$

aangenomen dat deze limiet bestaat.

Opmerking. In de literatuur wordt de Cauchy hoofdwaaarde soms aangegeven met  $V.P. \int$  of  $\int'$ .

We zullen hier het gewone  $\int$ -symbool blijven gebruiken en afdrukken dat als de integraal geen betekenis heeft in gewone zin, de Cauchy hoofdwaaarde bedoeld is.

We zullen nu verifiëren dat indien  $\varphi(t)$  Hölder Continu is op  $L$ , de Cauchy hoofdwaaarde van  $\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$  inderdaad bestaat. Schrijf daartoe,

$$\int_{L-\ell} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \int_{L-\ell} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \varphi(t_0) \int_{L-\ell} \frac{dt}{t-t_0}$$

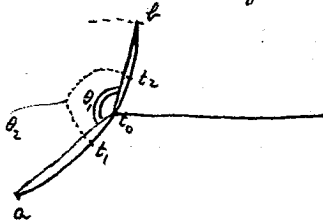
Wegens  $\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} \right| \leq K |t-t_0|^{\mu-1}$  waarin  $\mu-1 > -1$  zal gelden

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L-\ell} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt = \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt$$

daar de laatste integraal convergeert is. Noem de eindpunten van  $L$   $a$  en  $b$ , dan is

$$\int_{L-\ell} \frac{dt}{t-t_0} = \log|t-t_0| \Big|_a^{t_1} + \log|t-t_0| \Big|_{t_2}^b = [\log|b-t_0| - \log|a-t_0|] - [\log|t_2-t_0| - \log|t_1-t_0|]$$

Nu is de functie  $\log|t-t_0|$  meerwaardig met vertakkingspunt  $t_0$ . We zullen de functie eenvaardig maken door het aanebrengen van een sede vanuit  $t_0$  gericht naar de rechter kant van  $L$ .



Dan is,

$$\begin{aligned} \log|b-t_0| - \log|a-t_0| &= \log \left| \frac{b-t_0}{a-t_0} \right| + i \arg(b-t_0) - i \arg(a-t_0) \\ &= \log \left| \frac{b-t_0}{a-t_0} \right| - i\theta_2 \end{aligned}$$

$$\log|t_2-t_0| - \log|t_1-t_0| = \log \left| \frac{t_2-t_0}{t_1-t_0} \right| - i\theta_2 = -i\theta_2$$

waarmee de logaritmen eendubbelzinnig vastliggen

Indien nu  $\rho \rightarrow 0$ , zal gelden  $\theta_2 \rightarrow \pi$  en

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L-\ell} \frac{dt}{t-t_0} = \log \frac{b-t_0}{a-t_0} + \pi i$$

De Cauchy hoofdwaaarde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \log \frac{b-t_0}{a-t_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt$$

bestaat dus inderdaad. We stellen nu  $\Phi(t_0)$  per definitie gelijk aan deze hoofswaarde.

Indien  $L$  een contour is geldt  $a=b$  en daarmee,

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt.$$

Opgave Bereken de Cauchy hoofswaarde van de integralen.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t-t_0} = \log \frac{1-t_0}{1+t_0} \quad (-1 < t_0 < 1), \quad \int_C \frac{dt}{t-t_0} = \pi i \quad (t_0 \in C)$$

waarbij  $C$  de cirkel  $|t|=1$  is. Bereken de laatste integraal ook met residuerekening.

Formules van Planché:

We bepalen nu de limiet van  $\Phi(z)$  voor  $z \rightarrow t_0 \in L$ ,  $t_0$  geen eindpunt van  $L$ . We merken daarbij onderscheid maken tussen de limiet indien  $z \rightarrow t_0^+$  resp.  $z \rightarrow t_0^-$ . De limiet van  $\Phi(z)$  wordt gegeven door de formules van Planché (1908):

$$\begin{cases} \Phi^+(t_0) = \lim_{z \rightarrow t_0^+} \Phi(z) = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt, \\ \Phi^-(t_0) = \lim_{z \rightarrow t_0^-} \Phi(z) = -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt. \end{cases}$$

Waarvoor:  $\varphi(t)$  Hölder continu in omgeving van  $t_0$ .

Naast deze formules zullen we ook vaak gebruik maken van de equivalente versie:

$$\begin{cases} \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0), \\ \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt. \end{cases}$$

Opmerking. In het voorafgaande is opgemerkt, dat  $\Phi(z) = U(x,y) + iV(x,y)$  waarbij  $U, V$  potentiaal zijn van een dipoolbelegging resp. ladingverdeling op  $L$ . In het college Part. Diff. vgl. I is aangehouden, dat  $U$  discontinu is over  $L$  met een sprong  $\varphi(t_0)$ , terwijl  $V$  continu is over  $L$ . Daaruit volgt nog een

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \lim_{(x,y) \rightarrow t_0^+} \{U(x,y) + iV(x,y)\} - \lim_{(x,y) \rightarrow t_0^-} \{U(x,y) + iV(x,y)\} = \varphi(t_0).$$

Voor het bewijs van de formules van Planché leiden we eerst de volgende hulpstelling af:

Hulpstelling. Zij  $\varphi(t)$  Hölder continu op  $L$ ,  $t_0 \in L$  ( $t_0$  mag eindpunt van  $L$  zijn) en zij

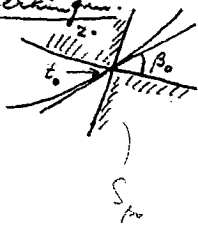
$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-z} dt.$$

Laat  $\beta_0$  een willekeurige scherpe hoek zijn i.e.  $0 < \beta_0 \leq \frac{\pi}{2}$  en laat  $z$  naderen tot  $t_0$  zodanig dat de scherpe hoek tussen  $t_0 z$  en de raaklijn in  $t_0$  aan  $L$   $\geq \beta_0$  is. Dan is,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_{\beta_0}}} \Psi(z) = \Psi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt,$$

uniform in  $t_0$ .

Opmerkingen:

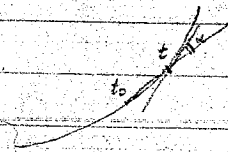


De nadering  $z \rightarrow t_0$  geschiedt binnen de geadecoreerde sector.

De integraal  $\Psi(t_0)$  heeft betekenis als een gewone Riemann integraal omdat  $\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} \right| \leq k |t-t_0|^{p-1}$  met  $p-1 > -1$  op grond van de Hölder continuïteit van  $\varphi(t)$ .

Voor het bewijs blijft voldoende te zijn:  $\varphi(t)$  Hölder continu in omgeving van  $t_0$ .





Ad (1)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

waar  $\alpha$  de hoek is tussen  $dt$  en de raaijende met  $t$  aan  $l$ . Voor  $s$  voldoende klein is.

$$d\alpha, d\alpha < \frac{\pi}{2} \text{ op } l \text{ en dus } \frac{1}{\cos \alpha} \leq \frac{1}{\cos \alpha_0} = m$$

Zie Muskelinvariant, Singular integral equation, § 1 b.

→ Bewijs:  $r = |t - t_0| = \sqrt{(x(s) - x(s_0))^2 + (y(s) - y(s_0))^2}$ , (bij  $s = 0$  min)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{(x(s) - x(s_0))x'(s) + (y(s) - y(s_0))y'(s)}{r} = \\ &= \frac{x(s) - x(s_0)}{r} x'(s) + \frac{y(s) - y(s_0)}{r} y'(s) \end{aligned}$$

Voor de vectoren  $\underline{v}_1 = \left\{ \frac{x(s) - x(s_0)}{r}, \frac{y(s) - y(s_0)}{r} \right\}$ ,  $\underline{v}_2 = \{x'(s), y'(s)\}$ , beide zijn eenheidsvectoren.

Dan is:

$$\frac{dr}{ds} = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \cos \alpha \text{ met } \alpha \text{ hoek tussen } \underline{v}_1 \text{ en } \underline{v}_2.$$

Zie Muskelinvariant, Singular integral equation, § 2.

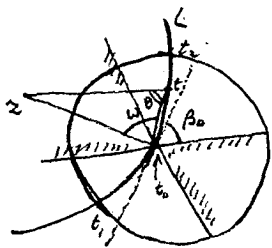
$$t = x(s) + iy(s)$$

$$\frac{dt}{ds} = x'(s) + iy'(s)$$

$$\left| \frac{dt}{ds} \right| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} = 1$$

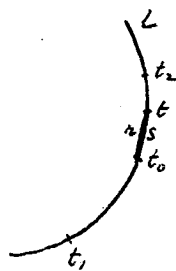
Beweis hulpstelling: We beschouwen het verschil

$$\Psi(z) - \Psi(t_0) = \frac{z-t_0}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)} dt$$



Teken een cirkel met middelpunt  $t_0$  en straal  $\rho$ ; deze zal een loop  $L = t_1, t_2$  uitwijzen in  $L$ . Kies  $\rho$  zo klein dat voor elke  $t \in L$  de hoek tussen  $t-t_0$  en de raaklijn in  $t_0$  aan  $L \leq \beta_0/2$  is. Dan geldt voor de hoek  $\omega$  tussen  $z-t_0$  en  $t-t_0$ ,  $\omega \geq \beta_0/2$ . Met de sinusregel toegepast in  $\triangle z t_0 t$  volgt dan:  $\beta_0/2 \leq \omega \leq \pi - \beta_0/2$

$$\frac{|z-t_0|}{|t-z|} = \frac{\sin \theta}{\sin \omega} \leq \frac{1}{\sin \frac{\beta_0}{2}} = M. \quad (I)$$



Voor  $t_0$ : voor elke  $t \in L$  laat zich definiëren

$$r = |t-t_0|, \quad s = \text{ lengte van loop } t_0 t.$$

Men kan nu bewijzen dat voor  $\rho$  voldoende klein geldt,

$$\left| \frac{ds}{dr} \right| \leq m \quad \text{of} \quad |dt| = |ds| \leq m |dr|. \quad (II) \quad (\text{Huskulshoek, (2)})$$

waarin  $m$  een positieve constante is.

Splitst men de integraal over  $L$  in twee stukken,

$$I_1 = \int_{L_1} \frac{z-t_0}{2\pi i} \int \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)} dt, \quad I_2 = \int_{L_2} \frac{z-t_0}{2\pi i} \int \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)} dt$$

De integraal  $I_1$  is nu als volgt af te schatten:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{|z-t_0|}{2\pi} \int_L \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)|}{|t-t_0||t-z|} |dt| \leq \frac{M}{2\pi} \int_L K |t-t_0|^{-\mu} |dt| \\ &\leq \frac{KMm}{2\pi} 2 \int_0^\rho r^{-\mu} dr = \frac{KMm}{\pi} \frac{\rho^{1-\mu}}{1-\mu}, \end{aligned}$$

De ongelijkheden (I), (II) en de Hölder-continuïteit van  $\varphi(t)$  zijn hierbij gebruikt. Kies nu  $\rho$  zo klein dat  $|I_1| < \frac{\epsilon}{2}$  en fixeer  $\rho$  op die waarde. Keuze van  $\rho$  onafhankelijk van  $t_0$  en van  $z$ .

Vervolgens maken we  $I_2$  af te schatten. Neem  $|z-t_0| \leq \frac{\rho}{2}$ , dan is voor  $t \in L$ ,  $|t-t_0| \geq \rho$ ,  $|t-z| \geq \frac{\rho}{2}$  en dus

$$|I_2| \leq \frac{|z-t_0|}{2\pi} \int_{L-L} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)|}{|t-t_0|} |dt| = \frac{|z-t_0|}{\pi \rho^2} \int_{L-L} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| |dt| \leq \frac{A}{\pi \rho^2} |z-t_0|$$

waarin  $A$  een constante is onafhankelijk van  $z$  en  $t_0$ . Er bestaat nu een  $\delta > 0$ , zodat  $|I_2| < \frac{\epsilon}{2}$  voor  $|z-t_0| < \delta$ ;  $\delta$  onafhankelijk van  $t_0$ .

Daarmee volgt

$$|\Psi(z) - \Psi(t_0)| \leq |I_1| + |I_2| < \epsilon, \quad \text{voor } |z-t_0| < \delta, \quad z \in S_{\rho_0}$$

Aangenomen bovengenoemde ongelijkheid geldt voor elke  $t_0 \in L$ , is

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \Psi(z) = \Psi(t_0), \quad \text{uniform in } t_0, \quad z \in S_{\rho_0}$$

Oorsprong van hulpstelling: ~~Met het uniform eigen van de binnenvoering  $\lim_{z \rightarrow t_0} \Psi(z) = \Psi(t_0)$  volgt dat  $\Psi(t_0)$  continu is op  $L$ . Men kan dan vervolgens bewijzen dat  $\lim_{z \rightarrow t_0} \Psi(z) = \Psi(t_0)$  ook~~

Opmerking. Voor de gelykenis  $\lim_{z \rightarrow t_0} \Phi(z) = \Phi(t_0)$  is het al voldoende dat  $\Phi(t)$  in een omgeving van  $t_0$  holter continue is, zo blijkt uit bovenstaande bewijs.

51A

F Uit de hulpstelling volgt dat ook dat

$$\lim_{z \rightarrow t_0^+} \Phi(z) = \Phi^+(t_0), \quad \lim_{z \rightarrow t_0^-} \Phi(z) = \Phi^-(t_0)$$

uniform in  $t_0$ .

Men kan dan bewijzen dat de limietfuncties  $\Phi^\pm(t_0)$  continue zijn op  $L$  en verder dat ook geldt

$$\lim_{z \rightarrow t_0^+} \Phi(z) = \Phi^+(t_0) = \Phi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} dt,$$

$$\lim_{z \rightarrow t_0^-} \Phi(z) = \Phi^-(t_0) = \Phi(t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} dt,$$

indien  $z \rightarrow t_0^\pm$  langs een willekeurig pad links resp. rechts van  $L$ , met uiteraardlyk binnen de eerder genoemde gebieden. Voor de details, zie N.T. Muskhelishvili, Singular integral equations, §14.

Opmerking. De formules van Plemelj gelden in een wisk. punt  $t_0$  in dien  $\Phi(t)$  in een omgeving van  $t_0$  holter continue is. zie opmerking boven. We moeten dus ook, in geval  $L$  een hoog is, aannemen dat  $t_0 \neq a, b$  is.

Opmerking

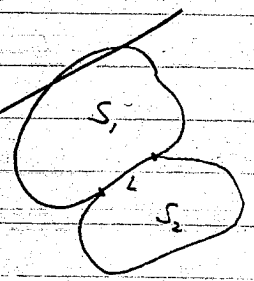
Analytische voortzetting

~~In het volge de zal de volgende stelling over analytische voortzetting een essentieel rol spelen.~~

~~Stelling 11. De gebieden  $S_1$  en  $S_2$ , welke geen punten gemeen hebben, hebben de boog  $L$  als gemeenschappelijke rand.~~

~~De functies  $\Phi_1(z)$ ,  $\Phi_2(z)$  zijn analytisch in  $S_1$ ,  $S_2$  en continue tot op  $L$  vanuit  $S_1$ ,  $S_2$  met~~

~~$$\lim_{z \rightarrow t} \Phi_1(z) = \Phi_1(t) = \Phi_2(t) = \lim_{z \rightarrow t} \Phi_2(z), \quad t \in L.$$~~



~~Daar is de functie  $\Phi(z)$  gedefinieerd door~~

~~$$\Phi(z) = \Phi_1(z) \text{ voor } z \in S_1, \quad \Phi(z) = \Phi_2(z) \text{ voor } z \in S_2, \quad \Phi(t) = \Phi_1(t) = \Phi_2(t) \text{ voor } t \in L$$~~

~~analytisch in  $S_1 \cup S_2 \cup L$ .~~

~~De functies  $\Phi_1(z)$  en  $\Phi_2(z)$  zijn dus elkaars analytische voortzetting.~~

~~Voor het bewijs, zie N.T. Muskhelishvili, loc. cit., §14~~

~~geldt indien  $z$  to lang en willekeurig punt niet noodzakelijk binnen de bron bevestigd is. Voor de details, zie N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations, S. 4.~~

8-2-1982/26-3-85

Bewijs formule van Heineij:

zij  $L$  een contour dan schrijven we voor  $z \notin L$ ,

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \int \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt$$

De eerste integraal laat zich berekenen,

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dt}{t-z} = \begin{cases} 1, & z \in S^+ \\ 0, & z \in S^- \end{cases}$$

De tweede integraal is gelijk aan de functie  $\Phi(z)$  met de hulpstelling.

Voor  $z = t_0$  (lang en willekeurig punt op of nabij  $L$ ) geldt nu  $\Phi$  volgens de hulpstelling

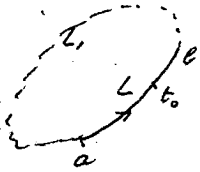
$$\begin{cases} \Phi^+(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt, \\ \Phi^-(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt. \end{cases}$$

F

De hier opgetreden integralen zijn uit te drukken in de Cauchy hoofwaardes  $\int \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$ , waarna precies de formule van Heineij volgen.

Indien  $L$  een boog is, vullen we  $L$  met een boog  $l$ , aan tot een contour die in positieve zin doorlopen wordt. Stel  $\varphi(t) = 0$  op  $l$ , dan is

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$



Zij nu  $t_0 \in l$ ,  $t_0 \neq a, b$ . Volgens de formule van Heineij voor een contour is

$$\Phi^\pm(t_0) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \pm \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt.$$

Zie p. 52a.

~~6-2-1982/4-2-70  
6-2-1969/4-2-71~~

~~Gedrag van  $\Phi(z)$  in buurt van de eindpunten van  $l$~~

~~We beschouwen de Cauchy integraal~~

~~$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt,$$~~

~~waarin  $L$  een boog is met eindpunten  $t=a, t=b$ . We willen nu het gedrag onderzoeken van  $\Phi(z)$  indien  $z$  in de buurt van een der eindpunten  $a$  of  $b$  ligt. We zullen dit onderzoek uitvoeren in de onderstelling dat de boog  $L=ab$  langs de reële as valt. Voor de functie  $\varphi(t)$~~

~~zullen we dan onderstellen:~~

~~$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\alpha_1}(b-t)^{\alpha_2}}$$~~

~~met  $\varphi^*(t)$  Hölder continu op  $[a, b]$ ,  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1$ .~~

~~Z.O.Z.~~

~~We onderscheiden nu twee gevallen:~~

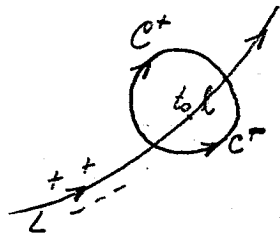
~~I.  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  dan is~~

~~$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$~~

~~met  $\varphi(t)$  Hölder continu op  $[a, b]$~~

Addendum formules van Heineij: 117

Indien de functie  $\varphi(t)$  analytisch is in een omgeving van  $t_0$ , zijn de formules van Heineij of de volgende veel eenvoudiger manier af te leiden.



Laat  $L$  een boog of contour zijn en  $t_0 \in L$ , dan wordt  $\rho$  klein genomen dat  $\varphi(t)$  analytisch is binnen en op  $C$ . De cirkel  $C$  drijft een boog  $L$  uit in  $L$ . Het gedeelte van  $C$  links (rechts) van  $L$  noemen we  $C^+$  ( $C^-$ ).

Indien nu  $z \rightarrow t_0^+$  schrijven we:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

We kunnen nu de limietovergang zonder moeite maken:

$$\lim_{z \rightarrow t_0^+} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt.$$

In de laatste uitkomst nemen we nu  $\rho \rightarrow 0$ , dan volgt,

$$\begin{aligned} \Phi^+(t_0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt. \end{aligned}$$

Evenzo is te doen bij nadering  $z \rightarrow t_0^-$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^-(t_0) &= \lim_{z \rightarrow t_0^-} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt. \end{aligned}$$

6-2-1972 | 19-9-1975 | 16-9-76

Hulpstelling (mogelijk). Zij  $\varphi(t)$  Holder continu op  $L$ ,  $t_0 \in L$  en zij

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-z} dt.$$

Dan is  $\lim_{z \rightarrow t_0} \Psi(z) = \Psi(t_0)$  ook als  $z$  langs een willekeurig pad tot  $t_0$  nadert.

Bewijs: Uit de formules van Heineij volgt

$$\lim_{z \rightarrow t_0^+} \Psi(z) = \Psi^+(t_0) = \frac{1}{2} [\varphi(t_0) - \varphi(t_0)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt$$

of kwel

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \Psi(z) = \Psi(t_0).$$

18-9-1977

Gedrag van  $\Phi(z)$  in de buurt van de eindpunten van  $L$ .

Beschouw de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

in het geval dat  $L$  een hoog is met eindpunten  $a, b$ . We willen nu onderzoeken het gedrag van  $\Phi(z)$  voor  $z$  in de omgeving van een der eindpunten  $a$  of  $b$ . Gemakshalve zal ondersteld worden dat de hoog  $L$  langs de reële as valt. De functie  $\varphi(t)$  zal van de volgende gedaante zijn

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\mu_1} (b-t)^{\mu_2}}$$

met  $\varphi^*(t) \in H(\mu)$  Hilbert continue op  $[a, b]$ ,  $0 \leq \mu_{1,2} < 1$ .

Ter vereenvoudiging van het onderzoek splitsen we  $\Phi(z)$  in twee integralen,

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^c \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\mu_1} (b-t)^{\mu_2} (t-z)} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_c^b \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\mu_1} (b-t)^{\mu_2} (t-z)} dt,$$

met  $a < c < b$ .

Gedrag bij  $z=a$ .  $\Phi_2(z)$  is analytisch buiten hoog  $cb$  i.e.  $\Phi_2(z)$  is analytisch en dus begrensd in de omgeving van  $z=a$ . Op de hoog  $ac$  is  $(b-t)^{\mu_2}$  continue differentieerbaar i.e.  $(b-t)^{\mu_2} \in H(\mu_2)$ , zodat nu  $\varphi(t) = \varphi^*(t) (b-t)^{\mu_2}$  dan is  $\varphi(t) \in H(\mu_1)$  (Kuskeleisbrink, §6: indien  $\varphi(t) \in H(\mu_1)$ ,  $\psi(t) \in H(\mu_2)$  dan is  $\varphi \cdot \psi \in H(\mu)$  met  $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$ ).

We kunnen nu daarom bijkomen tot het onderzoek van het gedrag bij  $z=a$  van een Cauchy integraal van de gedaante

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^c \frac{\varphi(t)}{(t-a)^{\mu_1} (t-z)} dt,$$

waarbij  $\varphi(t) \in H(\mu_1)$ ,  $0 \leq \mu_1 < 1$ .

Gedrag bij  $z=b$ . Analoog, kunnen we nu bijkomen tot het onderzoek van het gedrag bij  $z=b$  van een Cauchy integraal van de gedaante

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c^b \frac{\varphi(t)}{(b-t)^{\mu_2} (t-z)} dt,$$

waarbij  $\varphi(t) \in H(\mu_2)$ ,  $0 \leq \mu_2 < 1$ .

Onderzoek nu twee gevallen:

I.  $\mu = 0$ . Dan is

$$\Phi_1(z) = \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

Splits  $\Phi_1(z)$  op de bekende wijze

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t-z} dt + \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{t-z} =$$

$$= \tilde{V}_0(z) + \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \log \frac{z-b}{z-a}.$$

De integraal  $\tilde{V}_0(z)$  is van de vorm als onderzocht in de hulpstelling. Er geldt daarom  $\lim_{z \rightarrow a} \tilde{V}_0(z) = \tilde{V}_0(a)$ , zodat  $\tilde{V}_0(z)$  zeker begrensd is in de omgeving van  $z=a$ .

De functie  $\log(z-b)$  is analytisch en dus (eveneens) begrensd in de omgeving van  $z=a$ .

In de omgeving van  $z=a$  is daarom  $\Phi_1(z)$  als volgt voor te stellen,

$$\Phi_1(z) = -\frac{\varphi(a)}{2\pi i} \log(z-a) + \Phi_1^*(z),$$

met  $\Phi_1^*(z)$  begrensd in omgeving van  $z=a$ .

Zaam  $\varphi(a) \neq 0$  is blijkbaar  $\Phi_1(z)$  een logarithmische singulariteit in  $z=a$ .

Zaam  $\varphi(a) = 0$  is  $\Phi_1(z)$  begrensd in de omgeving van  $z=a$ .

Analoog: In de omgeving van  $z=b$  is  $\Phi_2(z)$  voor te stellen door

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \Psi_2(z) + \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \log \frac{z-b}{z-a} = \\ &= \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \log(z-b) + \Phi_2^*(z), \end{aligned}$$

met  $\Phi_2^*(z)$  begrensd in omgeving van  $z=b$ .

*1973, 1977, 1978, 1979, 1981, 1982, 1983, 1985*  
 Gevolg. Voor  $x \in (a, b)$  wordt de Cauchy hoofdwaaarde  $\Phi_{1,2}(x)$  gevonden via de formules van Plemelj: viz.

$$\Phi_{1,2}(x) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \frac{1}{2} [\Phi_{1,2}^+(x) + \Phi_{1,2}^-(x)].$$

Met het eerder afgeleid gedrag van  $\Phi_{1,2}(z)$  bij  $z=a, z=b$  volgt een eenvoudig

$$\Phi_1(x) = -\frac{\varphi(a)}{2\pi i} \log(x-a) + \Phi_1^*(x), \quad \Phi_2(x) = \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \log(b-x) + \Phi_2^*(x),$$

met  $\Phi_1^*(x)$  begrensd in een rechte omgeving van  $x=a$ ,  $\Phi_2^*(x)$  begrensd in een linker omgeving van  $x=b$ .

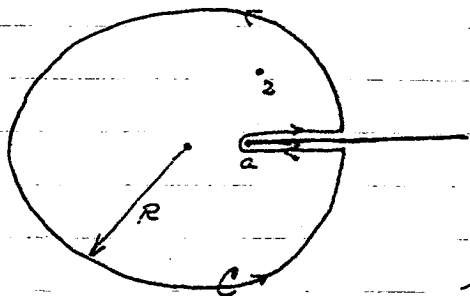
II.  $0 < \nu < 1$ . Ter voorbereiding onderzoeken we eerst het gedrag bij  $z=a$  van de Cauchy integraal

$$S_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\nu (t-z)}, \quad 0 < \nu < 1.$$

schrijf  $S_\nu(z)$  als integraal als volgt

$$S_\nu(z) = S_1(z) - S_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\nu (t-z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\nu (t-z)}.$$

$S_2(z)$  is analytisch buiten het interval  $[b, a]$ ; in het bijzonder is dan  $S_2(z)$  analytisch en begrensd in de omgeving van  $z=a$ .



$S_1(z)$  is expliciet te berekenen via uitwerking van de contour-integraal

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{(w-a)^\nu (w-z)}$$

Hierbij is  $C$  de contour als getekend, terwijl  $(w-a)^\nu$  eenwaardig en analytisch is het  $w$ -vlak met  $\text{mede } w > a$  onder de afspraak  $0 < \arg(w-a) < 2\pi$ .

Nemen  $R > |z|$ , dan in

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{(w-a)^\nu} = (z-a)^{-\nu}, \quad 0 < \arg(z-a) < 2\pi.$$

Nam en  $R \rightarrow \infty$ , dan zal de integraal over de cirkel  $|z|=R$  tot nul nadere en er volgt

$$\frac{1}{2\pi i} (1 - e^{-2\pi i}) \int_a^{\infty} \frac{dt}{(t-a)(t-z)} = (z-a)^{-1},$$

Zodanig we voor  $\Omega_1(z)$  vinden

$$\Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^{\infty} \frac{dt}{(t-a)(t-z)} = \frac{e^{\pi i} (z-a)^{-1}}{2i \sin \pi}, \quad 0 < \arg(z-a) < 2\pi.$$

Gedrag van  $\Omega_1(z)$  bij  $z=a$  wordt nu beschreven door

$$\Omega_1(z) = \frac{e^{\pi i}}{2i \sin \pi} (z-a)^{-1} + \Omega_2(z), \quad 0 < \arg(z-a) < 2\pi,$$

met  $\Omega_2(z)$  begrensd in de omgeving van  $z=a$ .

Analoog laat zich onderzoeken en afleiden,

$$\Omega_2^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_b^{\infty} \frac{dt}{(t-b)(t-z)} = -\frac{1}{2i \sin \pi} (z-b)^{-1} + \Omega_2^*(z),$$

met  $-\pi < \arg(z-b) < \pi$ ,  $\Omega_2^*(z)$  begrensd in de omgeving van  $z=b$ .

We keren nu terug tot het onderzoek van de integraal

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(t-a)(t-z)} dt$$

in de buurt van  $z=a$ . Split de integraal weer op de bekende wijze,

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)(t-z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{(t-a)(t-z)} dt = \\ &= \varphi(a) \Omega_1(z) + \Psi_1(z). \end{aligned}$$

Nu we voort

$$\Psi_1(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{(t-a)t},$$

dan is volgens  $\varphi(t) \in H(\mu)$ ,  $\Psi_1(t) \in H(\mu-1)$

$$|\Psi_1(t)| \leq K|t-a|^{-(\mu-1)}.$$

Indien  $\mu > 1$  is, dan is  $\lim_{t \rightarrow a} \Psi_1(t) = 0$ . Zouwe stellen we dan  $\varphi(a) = 0$ , dan laat zich bewijzen  $\Psi_1(t) \in H(\mu-1)$ , zie Muskhelishvili, §6. De integraal  $\Psi_1(z)$ ,

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t-z} dt,$$

is dan van de vorm als onderzocht in de hulpstelling. Er geldt dan  $\lim_{z \rightarrow a} \Psi_1(z) = \Psi_1(a)$ , i.e.  $\Psi_1(z)$  is begrensd in de omgeving van  $z=a$ .

Indien  $\mu \leq 1$  is, is de hulpstelling niet van toepassing. Men kan dan bewijzen \*)

$$|\Psi_1(z)| = O(|z-a|^{\mu-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0$$

in de omgeving van  $z=a$ , oftewel, bij elke  $\varepsilon > 0$  bestaat er een constante  $A = A(\varepsilon)$  zodat

$$|\Psi_1(z)| \leq A|z-a|^{\mu-1-\varepsilon},$$

in een vaste omgeving van  $z=a$ .

\*) Zie Muskhelishvili, §31.



Toewijzing. De resultaten van de samenstelling blijven, afgezien van een geringe modificatie, ook geldig voor complex  $\delta$ . In de resultaten (A), (B) dient dan  $\delta$  te worden vervangen door  $\operatorname{Re} \delta$ .

De modificatie betreft het geval  $\operatorname{Re} \delta = 0$ , i.e.  $\delta = i\beta$ :

1°. Zij  $\varphi(t) = (t-a)^{i\beta} \psi(t)$ , met  $\psi(t) \in H(\mu)$  in een rechter omgeving van  $t=a$ .

Dan  $z$  in een omgeving van  $z=a$ ,

$$(A') \quad \bar{\Phi}(z) = \begin{cases} \text{begrensd, indien } \beta \neq 0, \\ O(\log |z-a|), \text{ indien } \beta = 0. \end{cases}$$

2°. Zij  $\varphi(t) = (b-t)^{i\beta} \psi(t)$ , met  $\psi(t) \in H(\mu)$  in een linker omgeving van  $t=b$ .

Dan  $z$  in een omgeving van  $z=b$ ,

$$(B') \quad \bar{\Phi}(z) = \begin{cases} \text{begrensd, indien } \beta \neq 0, \\ O(\log |z-b|), \text{ indien } \beta = 0. \end{cases}$$

Voor het bewijs zij verwezen naar Muskhelishvili, § 29-31.

Conclusie. 1°. In een omgeving van  $z=a$  is  $\Phi_1(z)$  als volgt voor te stellen

$$\Phi_1(z) = \frac{e^{\pi i \gamma}}{2i \sin \pi \gamma} \varphi(a) (z-a)^{\gamma} + \Phi_1^*(z),$$

met

$$\Phi_1^*(z) = \begin{cases} \text{begrensd, indien } \mu > \gamma, \\ O(|z-a|^{\mu-\gamma-\epsilon}), \text{ indien } \mu \leq \gamma. \end{cases}$$

2°. Analooq: In een omgeving van  $z=b$  is  $\Phi_2(z)$  voor te stellen door

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi \gamma} \varphi(b) (z-b)^{\gamma} + \Phi_2^*(z),$$

met

$$\Phi_2^*(z) = \begin{cases} \text{begrensd, indien } \mu > \gamma, \\ O(|z-b|^{\mu-\gamma-\epsilon}), \text{ indien } \mu \leq \gamma. \end{cases}$$

Gevolg. Zij  $x \in (a, b)$  beschouw van de Cauchy hoofwaardes

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(t-a)(t-x)} dt = \frac{1}{2} [\Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x)].$$

In een rechter omgeving van  $x=a$  geldt dan

$$\Phi(x) = \frac{\cot \pi \gamma}{2i} \varphi(a) (x-a)^{\gamma} + \Phi_1^*(x)$$

met

$$\Phi_1^*(x) = \begin{cases} \text{begrensd, indien } \mu > \gamma, \\ O(|x-a|^{\mu-\gamma-\epsilon}), \text{ indien } \mu \leq \gamma. \end{cases}$$

Een analooq resultaat geldt voor de Cauchy hoofwaardes  $\Phi_2(t)$  in een linker omgeving van  $x=b$ .

Samenvatting van de resultaten van de gevallen I, II.

Gegewe is de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

1°. Zij  $\varphi(t) = (t-a)^{\delta} \psi(t)$  met  $\delta > -1$ ,  $\psi(t) \in H(\mu)$  in een rechter omgeving van  $t=a$ ,  $\psi(a) \neq 0$ .

Dan is in een omgeving van  $z=a$ ,

$$(A) \quad \Phi(z) = \begin{cases} \text{begrensd, indien } \delta > 0, \\ O(|\log|z-a||), \text{ indien } \delta = 0, \\ O(|z-a|^{\delta}), \text{ indien } -1 < \delta < 0. \end{cases}$$

2°. Zij  $\varphi(t) = (b-t)^{\delta} \psi(t)$  met  $\delta > -1$ ,  $\psi(t) \in H(\mu)$  in een linker omgeving van  $t=b$ ,  $\psi(b) \neq 0$ .

Dan is in een omgeving van  $z=b$ ,

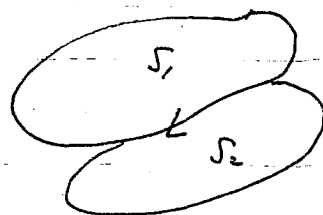
$$(B) \quad \Phi(z) = \begin{cases} \text{begrensd, indien } \delta > 0, \\ O(|\log|z-b||), \text{ indien } \delta = 0, \\ O(|z-b|^{\delta}), \text{ indien } -1 < \delta < 0. \end{cases}$$

123.

Analytische voortzetting.

Zie het volgende zullen we herhaaldelijk gebruik maken van de volgende stelling over analytische voortzetting.

Stelling A. De gebieden  $S_1, S_2$ , welke geen punten gemeen hebben, hebben de boog  $L$  als een gemeenschappelijke rand.



De functies  $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$  zijn analytisch in  $S_1, \text{ resp. } S_2$  en continue aansluitend over  $L$ , d.w.z. voor  $t \in L$  is

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in S_1}} \Phi_1(z) = \Phi_1(t) = \Phi_2(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in S_2}} \Phi_2(z).$$

Dan is de functie  $\Phi(z)$  gedefinieerd door

$$\Phi(z) = \Phi_i(z), \text{ voor } z \in S_i, i=1,2; \quad \Phi(t) = \Phi_1(t) = \Phi_2(t) \text{ voor } t \in L,$$

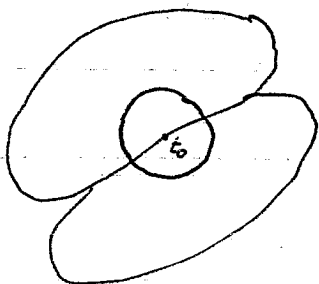
analytisch in  $S_1 + S_2 + L$ .

De functies  $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$  zijn dus elkaars analytische voortzetting.

~~Over het bewijs, zie Kunsthekkersboek, §15.~~

Bewijs (Kunsthekkersboek, §15): Het is voldoende om aan te tonen dat  $\Phi(z)$  analytisch is in de omgeving van elk punt van  $L$ .

Zij nu  $t_0 \in L$ . Teken dan een cirkel  $C$  met middelpunt  $t_0$  en voldoende kleine straal zodat  $C$  een boog  $l$  uitnijdt in  $L$ . Het binnengebied  $\Sigma$  van de cirkel bestaat uit twee delen  $\Sigma_1 = \Sigma \cap S_1, \Sigma_2 = \Sigma \cap S_2$ .



Eveneens is  $C = C_1 + C_2$  met  $C_i = C \cap S_i$ .

Beschouw nu de volgende twee integralen, dan volgt met de stelling van Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+l} \frac{\Phi_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+l} \frac{\Phi_2(t)}{t-z} dt = \begin{cases} \Phi_1(z), & z \in \Sigma_1 \\ \Phi_2(z), & z \in \Sigma_2 \end{cases} = \Phi(z), \quad z \in \Sigma_{1,2}$$

Hierbij worden de contouren  $C_1+l, C_2+l$  in positieve zin doorlopen.

Anderszijds is ook

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+l} \frac{\Phi_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+l} \frac{\Phi_2(t)}{t-z} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+l} \frac{\Phi(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+l} \frac{\Phi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(t)}{t-z} dt, \quad z \in \Sigma_{1,2} \end{aligned}$$

Ook geldig voor  $z \in l$  op grond van continuïteit.

Volgens een bekende stelling (WSK II) is de laatste integraal een analytische functie van  $z$  binnen  $C$ . Dus  $\Phi(z)$  is analytisch op de omgeving  $\Sigma$  van  $t_0$ .

~~Breueno laat zich aanpakken het gebruik van de Cauchy hoofdwaaarden  $\Phi^*(z)$  in een besloten omgeving van  $z$ .~~

Stelling A<sub>1</sub> in lessen

17-2-1977 / 17-2-1977 / 17-2-1977 / 17-2-1977 / 2-4-1985  
 Voorbeelden van Cauchy integralen

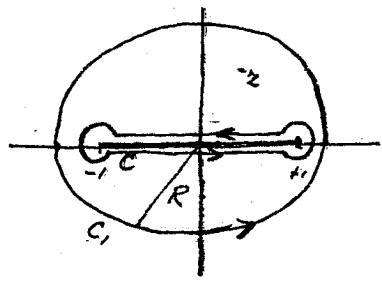
1°. We beschouwen de Cauchy integraal,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(t-1)^{\lambda} (1+t)^{-\lambda}}{t-z} dt, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Bereken nu de volgende contour integraal.

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(w-1)^{\lambda} (w+1)^{-\lambda}}{w-z} dw$$

Eventueel ook tegelijk: contour bestaat uit  $C_1 + C_2$ .



waarbij  $C$  een contour is als getekend.

De meervoudige functie  $F(w) = (w-1)^{\lambda} (w+1)^{-\lambda}$  wordt eenvaardig gemaakt door de afspraak:

$$(w-1)^{\lambda} = |w-1|^{\lambda} e^{-i\lambda \arg(w-1)}, \quad -\pi < \arg(w-1) < \pi$$

$$(w+1)^{-\lambda} = |w+1|^{-\lambda} e^{i\lambda \arg(w+1)}, \quad -\pi < \arg(w+1) < \pi.$$

In eerste instantie moeten we daarom een deel  $-\infty < w \leq 1$  aanbrengen. Echter, het gedeelte  $-\infty < w < -1$  van de reële kan weer vervallen omdat voor  $-\infty < t < -1$  geldt:

$$\lim_{w \rightarrow t^{\pm}} F(w) = |t-1|^{\lambda} |t+1|^{-\lambda} e^{F(t)\pi} e^{\pm i(-1)\lambda\pi} = |t-1|^{\lambda} |t+1|^{-\lambda} e^{\pm \lambda\pi i}$$

en deze twee limieten zijn gelijk.  $F(w)$  is dus eenvaardig en analytisch in het  $w$ -vlak met deede  $-1 \leq w \leq 1$ . (Stelling A<sub>1</sub>)

22-9-1977 / 23-2-1984  
 Bij  $w = -1 < t < 1$  dan is:

$$\lim_{w \rightarrow t^{\pm}} F(w) = \lim_{w \rightarrow t^{\pm}} F(w-1)^{\lambda} (w+1)^{-\lambda} = (1-t)^{\lambda} (1+t)^{-\lambda} e^{F(t)\pi}$$

Daaruit volgt:

$$I = \frac{1}{2\pi i} [e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}] \int_{-1}^{+1} \frac{(t-1)^{\lambda} (1+t)^{-\lambda}}{t-z} dt = 2i \sin \lambda\pi \Phi(z).$$

Anderszija is  $I$  te berekenen met residuenrekening. Beschouw daartoe de integraal  $I_1$  met dezelfde integrand geïntegreerd langs de cirkel  $C_1: |w|=R$  met  $R$  zo groot dat  $z$  binnen  $C_1$  ligt. Dan is:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(w-1)^{\lambda} (w+1)^{-\lambda}}{w-z} dw = I + (z-1)^{\lambda} (z+1)^{-\lambda}$$

Laat nu  $R \rightarrow \infty$  gaan, dan is  $I_1 \rightarrow 0$  volgens  $\frac{(w-1)^{\lambda} (w+1)^{-\lambda}}{w-z} = O(|w|^{-2})$ . Daaruit volgt  $I$  en daarmee:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i \sin \lambda\pi} (z-1)^{\lambda} (z+1)^{-\lambda}$$

met  $-\pi < \arg(z \pm 1) < \pi$ .

We in het voorstaande geformuleerde eigenschappen van ~~de~~ Cauchy integralen zijn aan dit voorbeeld te verifiëren:

a.  $\Phi(z)$  is analytisch in het hele  $z$ -vlak met uitzondering van de deede  $-1 \leq z \leq 1$ ;  $\Phi(z) = O(\frac{1}{|z|})$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

b. Voor  $-1 < t_0 < 1$  is:

$$\Phi^{\pm}(t_0) = \lim_{z \rightarrow t_0^{\pm}} \Phi(z) = -\frac{e^{\mp i\pi\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} (1-t_0)^{-\gamma} (1+t_0)^{-1+\gamma}$$

Door combinatie volgt (formule van Plemelj):

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = (1-t_0)^{-\gamma} (1+t_0)^{-1+\gamma}$$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = i \cot \gamma \pi (1-t_0)^{-\gamma} (1+t_0)^{-1+\gamma} = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-\gamma} (1+t)^{-1+\gamma}}{t-t_0} dt.$$

Byzonder geval: Voor  $\gamma = \frac{1}{2}$  volgt

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{t-t_0} dt = 0, \quad -1 < t_0 < 1.$$

c. In de omgeving van  $z=1$  geldt:

$$\Phi(z) = -\frac{z^{-\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} (z-1)^{-\gamma} + \text{begrensde functie}$$

in overeenstemming met wat vroeger is afgeleid.

Alternatieve methode. We zullen de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-\gamma} (1+t)^{-1+\gamma}}{t-z} dt$$

nog eens op een andere wijze berekenen. (grijpt voorwaarde volledig over Hilbert probleem)

Volgens de formules van Plemelj is dan voor  $-1 < t_0 < 1$ :

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = (1-t_0)^{-\gamma} (1+t_0)^{-1+\gamma}$$

De functie  $\Phi(z)$  is voortaan analytisch voor in het hele  $z$ -vlak met de uitsluiting  $-1 \leq z \leq 1$ ;  $\Phi(z) = O(\frac{1}{|z|})$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ ; in de buurt van de punten  $z=1$ ,  $z=-1$  geldt  $\Phi(z) = O(|z-1|^{-1+\gamma})$  resp.  $\Phi(z) = O(|z+1|^{-\gamma})$ .

Beschouw nu daarnaast de functie

$$F(z) = (z-1)^{-\gamma} (z+1)^{-1+\gamma}$$

eenvaardig door de afspraak  $-\pi < \arg(z \pm 1) < \pi$ .  $F(z)$  is eveneens analytisch in het  $z$ -vlak met de uitsluiting  $-1 \leq z \leq 1$ ;  $F(z)$  heeft hetzelfde gedrag als  $\Phi(z)$  indien  $|z| \rightarrow \infty$ , resp. in de buurt van  $z=1$ ,  $z=-1$ . Voor  $-1 \leq t_0 < 1$  is verder,

$$F^+(t_0) - F^-(t_0) = -2i \sin \pi\gamma (1-t_0)^{-\gamma} (1+t_0)^{-1+\gamma}$$

Neem nu de smeedfunctie:

$$\omega(z) = \Phi(z) + \frac{1}{2i \sin \pi\gamma} F(z)$$

dan is voor  $-1 < t_0 < 1$ ,

$$\omega^+(t_0) - \omega^-(t_0) = 0.$$

De functie  $\omega(z)$  is dus continu over  $-1 < z < 1$ , terwijl buiten de deede  $\omega(z)$  analytisch is. Volgens een bekende stelling uit de functietheorie (zie Muskhelishvili, loc. cit. p. 15) is dan  $\omega(z)$  overal analytisch behalve in  $z = \pm 1$ . Evenwel omdat  $\omega(z) = O(|z \pm 1|^{-1+\gamma})$  in de omgeving van  $z = -1$ ,  $\omega(z) = O(|z-1|^{-\gamma})$  kan  $\omega(z)$  geen polen hebben in de punten  $z = \pm 1$  (immers  $-\gamma > -1$ ,  $-1+\gamma > -1$ ). De singulariteiten  $z = \pm 1$  zijn daarom ophefbaar (zie college Wiskunde V, p. 39). De functie  $\omega(z)$  is dan analytisch in het geheel complexe  $z$ -vlak opzwell  $\omega(z)$  is een geholte functie.

Voor  $|z| \rightarrow \infty$  is  $\omega(z) = O(\frac{1}{|z|})$ . Volgens de stelling van Liouville (zie college Wisk. I, p. 38)

moot dan  $w(z) = 0$  zijn. Daaruit volgt,

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi f} F(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi f} (z-1)^{-f} (z+1)^{-1+f}$$

in overeenstemming met het vorige resultaat.

2°. De Cauchy-integraal

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-f} (1+t)^{-1+f}}{t-z} dt, \quad 0 < f < 1.$$

Streefsje weg naar  $\sqrt{z}$

laat zich op analoge wijze door contourintegratie berekenen (opgave!).

We kunnen ook  $\Phi^*(z)$  terugbrengen tot de integraal  $\Phi(z)$  met voorbeeld 1°. Schrijf daartoe:

$$\frac{(1-t)^{-f}}{t-z} = (1-t)^{-f} \frac{1-t}{t-z} = (1-t)^{-f} \left[ \frac{1-z}{t-z} - 1 \right]$$

waarna volgt

$$\begin{aligned} \Phi^*(z) &= \frac{1-z}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-f} (1+t)^{-1+f}}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} (1-t)^{-f} (1+t)^{-1+f} dt \\ &= (1-z) \Phi(z) - \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-f) \Gamma(f)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2i \sin \pi f} [(z-1)^{-f} (z+1)^{-1+f} - 1]. \end{aligned}$$

Opgave Verifieer de vroeger afgeleide eigenschappen voor de Cauchy-integraal  $\Phi^*(z)$ .

Alternatieve methode. Op grond van de eerder afgeleide eigenschappen geldt voor  $\Phi^*(z)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^*(z) \text{ is analytisch overal behalve op de reede } -1 \leq z \leq 1; \\ \Phi^*(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ voor } |z| \rightarrow \infty; \quad \Phi^*(z) = O(|z+1|^{-1+f}) \text{ in de buurt van } z = -1; \\ \Phi^*(z) \text{ is begrensd in de buurt van } z = 1; \\ \text{voor } -1 < t_0 < 1 \text{ is: } \Phi^*(t_0) \\ \Phi^{*+}(t_0) - \Phi^{*-}(t_0) = (1-t_0)^{-f} (1+t_0)^{-1+f} \end{array} \right.$$

Over nu in de functie Streefsje weg naar

$$G(z) F^*(z) = (z-1)^{-f} (z+1)^{-1+f}, \quad -\pi < \arg(z \pm 1) < \pi.$$

Deze zal analoge eigenschappen bezitten als  $\Phi^*(z)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} F^*(z) \text{ is overal analytisch behalve op de reede } -1 \leq z \leq 1; \\ F^*(z) = O(1) \text{ voor } |z| \rightarrow \infty; \quad F^*(z) = O(|z+1|^{-1+f}) \text{ in de buurt van } z = -1; \\ F^*(z) = O(|z-1|^{-f}) \text{ in de buurt van } z = 1; \\ \text{voor } -1 < t_0 < 1 \text{ is: } \\ F^{*+}(t_0) - F^{*-}(t_0) = 2i \sin \pi f (1-t_0)^{-f} (1+t_0)^{-1+f}. \end{array} \right.$$

Norm nu de functie

$$w^*(z) = \Phi^*(z) - \frac{1}{2i \sin \pi f} F^*(z)$$

dan is volgens  $w^{*+}(t_0) - w^{*-}(t_0) = 0$ ,  $-1 < t_0 < 1$ ,  $w(z)$  analytisch behalve  $z = \pm 1$ . Evenwel de singulariteiten in  $z = \pm 1$  zijn ophefbaar, zodat  $w^*(z)$  weer een gehele functie is. Voor  $|z| \rightarrow \infty$  is  $w^*(z) = O(1)$ , d.i.  $w^*(z)$  is begrensd: volgens de stelling van Liouville is dan  $w^*(z) = A = \text{constant}$ . Daaruit volgt,

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2i \sin \pi f} F^*(z) + A = \frac{1}{2i \sin \pi f} (z-1)^{-f} (z+1)^{-1+f} + A.$$

De constante  $A$  is te bepalen uit de eis:  $\Phi^*(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ . Inwikkelt daartoe voor

$|z|$  groot,

$$(z-1)^{-1} (z+1)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1} = 1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

waarna volgt:  $A = -\frac{1}{2i + \pi}$

3°. Op analoge wijze is te berekenen

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^n (1+t)^{m-1} dt}{t-z},$$

met  $0 < n < 1$ ,  $n, m$  geheel  $\geq 0$ .

Opgave Bereken  $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{n-1} dt}{t-z}$ ,  $n$  geheel  $\geq 0$ .

Opmerking In de hier voorbidsen verkregen resultaten blijven geldig voor  $f$  complex,  $0 < \operatorname{Re} f < 1$ .

22-2-1983

Hilbert probleem voor contour

De Cauchy integraal laat zich met veel succes gebruiken voor de oplossing van een groot aantal problemen b.v. twee-dimensionale randwaardeproblemen voor de potentiaal- en bi-potentiaalvergelijking, stroomgolven, elasticiteitstheorie, singuliere integraalvergelijkingen. In al deze gevallen blijkt het onderhevige probleem na invoering van geschikte Cauchy integralen over te gaan in een zgn. Hilbert probleem. We zullen daarom eerst het Hilbert probleem opschrijven en oplossen.

Vooraf definiëren we nog het begrip graad in  $z = \infty$  van een analytische functie:

Zij  $F(z)$  analytisch in een omgeving van  $z = \infty$  dan geldt de Laurent reeks ontwikkeling,

$$F(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot z^j, \quad |z| > R.$$

Indien nu  $a_k \neq 0$ ,  $a_j = 0$  voor  $j > k$ , dan noemen we  $F(z)$  van de graad  $k$  in  $z = \infty$ . De volgende resultaten zijn onmiddellijk in te zien:

I. Zij  $F(z)$  van de graad  $k$  in  $z = \infty$  dan geldt voor

$$\begin{cases} k > 0, & F(z) \text{ heeft in } z = \infty \text{ een } k\text{-voudig pool van orde } k; \\ k = 0, & F(z) \text{ is begrensd in de omgeving van } z = \infty; \\ k < 0, & F(z) \text{ heeft in } z = \frac{1}{z} a \text{ een } (-k)\text{-voudig nulpunt. (College Wisk. I, p. 40/41)} \end{cases}$$

II. Zij  $F(z)$  van de graad  $k$  in  $z = \infty$  dan is

$$|F(z)| \leq A |z|^k \text{ voor } |z| > R \text{ of } F(z) = O(|z|^k), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

III. Stelling van Liouville. Zij  $F(z)$  een gehete functie van de graad  $k$  in  $z = \infty$ , dan is voor

$$\begin{cases} k \geq 0, & F(z) \text{ is een polynoom van de graad } k; \\ k < 0, & F(z) = 0. \end{cases} \quad \text{(College Wisk. I, p. 38).}$$

voor een contour

Formulering Hilbert probleem Bepaal de functie  $\Phi(z)$  welke aan de volgende voorwaarden

- voldoet: 1°.  $\Phi(z)$  is analytisch in het hele complexe  $z$ -vlak met uitzondering van log of contour
  - 2°.  $\Phi(z)$  is van eindige graad in  $z = \infty$ ;
  - 3°. ~~alleen op een hoog is met eindpunten en een~~
- $$\Phi(z) = O(|z|^{-\alpha}), \quad \Phi(z) = O(|z|^{-\beta}), \quad 0 < \alpha < 1, \text{ in de omgeving van } z = \infty$$

Muskelisboeri, p. 27

Hilbert problem: Hilbert, Göttinger Nachrichten 1905; Hilbert zelf en ook Gakhov spreekt van Riemann problem. (Riemann kwam op dit probleem bij het onderzoek van diff. vgl. met algebraïsche coëfficiënten);

Hilbert heeft formulerend probleem naar Fredholm integro-vgl., maar een volledig antwoord van den vgl. te geven;

volledige oplossing van het eerste door Gakhov, 1936.

Baan van Glt. tekens



$\Phi(z)$  voltooit een reeds gegeven.

3°  $\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), t \in L$  (homogeen Hilbert probleem)

of  $\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), t \in L$  (inhomogeen Hilbert probleem)

met  $g(t), G(t)$  Hölder continu op  $L, G(t) \neq 0$  op  $L$ .

Oplösing Hilbert problem voor contouren We zullen het probleem in drie stappen oplossen:

A. Beschouw het Hilbert probleem

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \psi(t), t \in L.$$

met  $\psi(t)$  Hölder-continu op  $L$ . Met de <sup>waarde</sup>formule van Plemelj volgt dat als oplossing voldoet

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(t)}{t-z} dt.$$

Stel nu  $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Psi(z)$ , dan is

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = 0, t \in L.$$

De functie  $\Psi(z)$  is dus continu over  $L$ . Volgens stelling A is dan  $\Psi(z)$  overal analytisch m.a.w.

$\Psi(z)$  is een gehele functie.  $\Psi(z)$  is voort van eindige graad in  $z = \infty$ , dus volgt (St. van Liouville),

$\Psi(z) = P(z)$  waarin  $P(z)$  een willekeurig polynoom voorstelt. De algemene oplossing van het Hilbert probleem luidt nu.

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(t)}{t-z} dt + P(z).$$

B. Beschouw het homogeen Hilbert probleem

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), t \in L.$$

Neem links en rechts de logaritme (N.B.  $G(t) \neq 0$ ).

$$[\log \Phi^+(t)]^+ - [\log \Phi^-(t)]^- = \log G(t).$$

Nu zal de functie  $\log G(t)$  in het algemeen niet eenvaardig zijn: als  $t$  rondloopt langs  $L$  zal  $\log G(t)$  toegenomen of afgenomen met een zeker bedrag, dat we aanduiden met  $[\log G(t)]_L = i[\arg G(t)]_L$ . Deze verandering zal gelijk zijn aan een geheel aantal malen  $2\pi i$ . We voeren nu in de index van  $G(t)$ ,

$$\kappa = \text{Ind } G(t) = \frac{1}{2\pi i} [\log G(t)]_L. \quad *)$$

Voorbeeld. Zij  $G(t) = t^n$  (n geheel),  $L$  is cirkel  $|t|=1$  dan is  $\kappa = n$ .

Laat nu het punt  $z=0$  <sup>in</sup>  $S^+$  <sup>(binnen)</sup> liggen, voor dan in

$$G_0(t) = t^{-\kappa} G(t).$$

dan is de index van  $G_0(t)$  gelijk nul, dus  $\log G_0(t)$  is eenvaardig langs  $L$ . Men kan voortbewijzen dat  $\log G_0(t)$  Hölder continu is op  $L$ . (zie Muskhelishvili St. punt 8°).

Voor verder in de functie  $\Phi_0(z)$  volgens

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} \Phi(z), & z \in S^+ \\ z^\kappa \Phi(z), & z \in S^- \end{cases}$$

dan is voor  $t \in L$ ,

$$\Phi_0^+(t) = G_0(t) \Phi_0^-(t).$$

$$[\log \Phi_0^+(t)]^+ - [\log \Phi_0^-(t)]^- = \log G_0(t)$$

Volgens A <sup>is</sup> <sup>een</sup> de oplossing van dit probleem.

\*)  $\kappa$  heet ook de index van het Hilbert probleem.

Beweis als volgt:

Stel  $\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$  dan ontstaat voor  $\Psi(z)$  het Hilbert probleem

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t), \quad t \in L,$$

met oplossing  $\Psi(z) = P(z)$ .

Opmerking. Als  $P(z)$  een polynoom van de graad  $k$  is, dan is de graad van  $X(z)P(z)$  in  $z \rightarrow \infty$   $\rightarrow \infty$ . De fundamentele oplossing  $X(z)$  is dus te karakteriseren als de oplossing met de laagst mogelijke graad in  $z \rightarrow \infty$ .

1. Bewijs als volgt:

Stel  $\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$  dan ontstaat voor  $\Psi(z)$  het Hilbert probleem

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{q(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L,$$

met als algemene oplossing (Hof A),

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)}{X^+(t)(t-z)} dt + P(z).$$

etc.

Opgave Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene Hilbert probleem indien de voorwaarde 2° wordt vervangen door:

2'.  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi(z) = 0$  ofwel  $\Phi(z)$  is van negatieve graad in  $z \rightarrow \infty$ .

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log g_0(t)}{t-z} dt, \quad \Phi_0(z) = e^{\Omega(z)}$$

De oplossing van het homogene Hilbert probleem vinden we dan

$$\Phi(z) = X(z) = \begin{cases} e^{\Omega(z)}, & z \in S^+ \\ e^{-\Omega(z)}, & z \in S^- \end{cases}$$

De functie  $X(z)$  heet de fundamentele oplossing van het homogene Hilbert probleem. De graad van  $X(z)$  in  $z = \infty$  is  $-n$ . Verdere eigenschap:  $X(z) \neq 0$  in hele complexe  $z$ -vlak.

De algemene oplossing wordt verkregen door de relaties,

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), \quad X^+(t) = G(t) X^-(t)$$

op elkaar te delen.

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L$$

Volgensstelling A is dan  $\Phi(z)/X(z)$  overal analytisch, dus een geheel functie. Daar de graad in  $z = \infty$  eindig moet zijn volgt,

$$\Phi(z)/X(z) = P(z), \quad \Phi(z) = X(z)P(z)$$

als algemene oplossing, waarbij  $P(z)$  een willekeurig polynoom is.

24-271. Woningbouw en... 24-272 | 29-9-77 | 5-10-1975

C. Beschouw het inhomogene Hilbert probleem.

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L$$

Laat  $X(z)$  de fundamentele oplossing zijn van het bijbehorende homogene probleem, dan is

$$\Phi X^+(t) = G(t) X^-(t), \quad G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L$$

Substitueer deze waarde van  $G(t)$ , dan volgt,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L$$

Het laatste probleem laat zich oplossen volgens A:

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^-(t)(t-z)} dt + P(z),$$

waarna de algemene oplossing van het inhomogene Hilbert probleem luidt,

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^-(t)(t-z)} dt + X(z)P(z),$$

waarin  $P(z)$  een willekeurig polynoom is. De integraalterm stelt voor een particuliere oplossing van het inhomogene probleem, de term  $X(z)P(z)$  is juist de algemene oplossing van het homogene probleem.

Voorbeeld We zullen het volgende inhomogene Hilbert probleem oplossen:

$$\Phi^+(t) = (t^2-1) \Phi^-(t) + \frac{t}{t-1}, \quad t \in L$$

waarbij  $L$  de cirkel  $|t-1|=1$  is.

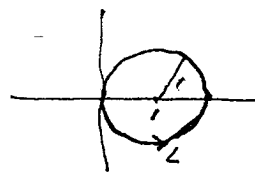
Beschouw eerst het homogene Hilbert probleem,

$$\Phi^+(t) = (t^2-1) \Phi^-(t), \quad t \in L$$

De index  $n$  is hier,

$$n = \frac{1}{2\pi i} [\log(t^2-1)]_L = \frac{1}{2\pi i} [\log(t-1)]_L + \frac{1}{2\pi i} [\log(t+1)]_L = 1.$$

Het punt  $t=0$  ligt nu niet binnen  $L$ ; we laten de rol van dit punt nu vervullen door  $t=1$ .



1.6. Hilbert probleem voor een boog.

~~Formulering Hilbert probleem voor een boog met eindpunten  $a, b$ .~~

~~1°  $\Phi(z)$  is analytisch in het hele complexe vlak met uitzondering van  $L$ ;~~

~~2°  $\Phi(z)$  is van eindige graad in  $z = a$ .~~

F Formulering Hilbert probleem voor een boog met eindpunten  $a, b$ :

Bepaal de functie  $\Phi(z)$  welke aan de volgende voorwaarden voldoet:

1°  $\Phi(z)$  is analytisch in het complexe vlak met uitzondering van  $L$ ;

2°  $\Phi(z)$  is van eindige graad in  $z = a$ ;

3° in omgeving van  $z = a, z = b$  geldt naar keuze een der voorwaarden:

3a)  $\Phi(z) = O(|z-a|^{-\delta_1})$  bij  $z = a, \Phi(z) = O(|z-b|^{-\delta_2})$  voor where  $\delta_{1,2}$  met  $0 \leq \delta_{1,2} < 1$ ;

3b)  $\Phi(z)$  is begrensd bij  $z = a, \Phi(z) = O(|z-b|^{-\delta_2})$  voor where  $\delta_2$  met  $0 \leq \delta_2 < 1$ ;

3c)  $\Phi(z) = O(|z-a|^{-\delta_1})$  voor where  $\delta_1$  met  $0 \leq \delta_1 < 1, \Phi(z)$  begrensd bij  $z = b$ ;

3a)  $\Phi(z)$  begrensd bij  $z = a$  en bij  $z = b$ .

4° voor  $t \in L$  geldt randvoorwaarden

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) \quad (\text{homogeen Hilbert probleem})$$

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t) \quad (\text{inhomogeen Hilbert probleem})$$

met  $g(t), G(t)$  Hölder continue op  $L, G(t) \neq 0$  op  $L$ .

In feite zijn hiermee een viertal Hilbert problemen geformuleerd corresponderend met de vier versies van de voorwaarde 3°.

We zullen deze vier problemen aanduiden met resp.  $HP_0, HP(a), HP(b), HP(a, b)$ .

Wi definieren nu,

$$G_0(t) = (t-1)^{-\alpha} (t^2-1) = t+1, \quad \Phi_0(z) = \begin{cases} \Phi(z), & z \in S^+ \\ (z-1)\Phi(z), & z \in S^- \end{cases}$$

Daar volgt voor  $\Phi_0(z)$  het Hilbert probleem,

$$\Phi_0^+(t) = G_0(t) \Phi_0^-(t), \quad t \in L.$$

$$[\log \Phi_0^+(t)]^+ - [\log \Phi_0^-(t)]^- = \log(t+1), \quad t \in L.$$

De oplossing van dit probleem is,

$$\log \Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log(t+1)}{t-z} dt = \begin{cases} \log(z+1), & z \in S^+ \\ 0, & z \in S^- \end{cases}$$

Daaruit volgt

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} e^{\log(z+1)} = z+1, & z \in S^+ \\ e^0 = 1, & z \in S^- \end{cases}$$

en daarmee de fundamentele oplossing,

$$X(z) = \begin{cases} z+1, & z \in S^+ \\ \frac{z+1}{z-1}, & z \in S^- \end{cases}$$

Homogeen probleem oplossen via  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z)$ .

De algemene oplossing van het inhomogeen probleem leidt nu,

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{t}{(t-1)X^+(t)} \frac{dt}{t-z} + X(z) P(z).$$

De contourintegraal laat zich via  $X^+(t) = t+1$  a.v. berekenen.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t}{(t-1)(t+1)} \frac{dt}{t-z} = \begin{cases} \frac{1}{2(z+1)}, & z \in S^+ \\ -\frac{1}{2(z-1)}, & z \in S^- \end{cases}$$

waarna

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} + (z+1) P(z), & z \in S^+ \\ -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{z+1}{z-1} P(z), & z \in S^- \end{cases}$$

Oplösung Hilbert problem vor ein boog We zullen het probleem in drie analoge stappen oplossen:

A. Beschouw ~~nu~~ het Hilbertprobleem  $HP_0$  (voorwaarde 3a) in van kracht

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \quad t \in L,$$

waarin  $L$  een boog met ~~z~~ Holden is met eindpunten  $a$  en  $b$ ,  $\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\beta_1}(t-b)^{\beta_2}}$  met  $0 \leq \beta_1, \beta_2 < 1$  en  $\varphi^*(t) \in H^0 \cap L$ .

De oplossing van dit probleem is,

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

In de omgeving van  $z=a$  geldt  $\Phi_1(z) = O(\log|z-a|)$  als  $\beta_1 = 0$  of  $\Phi_1(z) = O(|z-a|^{\beta_1})$  (terwijl een soortgelijk gedrag geldt in de omgeving van  $z=b$ ). De oplossing voldoet dus aan de eis 3°.

Stel nu  $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Psi(z)$  dan is

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = 0, \quad t \in L.$$

De functie  $\Psi(z)$  is dus continu over  $L$ . Volgens stelling A is dan  $\Psi(z)$  overal analytisch behalve in  $z=a$ ,  $z=b$ . In de omgeving van  $z=a$  en  $z=b$  is echter:  $\Psi(z) = O(|z-a|^{-\delta_1})$ ,  $\Psi(z) = O(|z-b|^{-\delta_2})$  met  $0 \leq \delta_1, \delta_2 < 1$ . In  $z=a$ ,  $z=b$  kan  $\Psi(z)$  daarom geen polen hebben. De singulariteiten  $z=a$ ,  $z=b$

zijn oplosbaar (Wiskunde V, t. 48, ed. 1969): de functie  $\Psi(z)$  is dan een ghele functie. Omdat  $\Psi(z)$  van eindige graad  $\leq$  in  $z = \infty$  volgt  $\Psi(1) = P(z)$ . De algemene oplossing van het Hilbert probleem  $HP_0$  luidt nu

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + P(z),$$

waarin  $P(z)$  een willekeurig polynoom is.

22-10-75 / 1-3-1983

B. Beschouw vervolgens het homogeen Hilbert probleem

$$\Phi'(t) = G(t) \Phi(t), \quad t \in L.$$

Neem links en rechts de logaritmes,

$$[\log \Phi(t)]' = [\log \Phi(t)]' = \log G(t), \quad t \in L.$$

Omdat  $L$  een boog is, zal de functie  $\log G(t)$  eenwaardig en Hölder continu zijn op  $L$ .

Een oplossing van het laatste probleem wordt gegeven door

$$\Phi_1(z) = e^{\Omega(z)}, \quad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G(t)}{t-z} dt.$$

Deze oplossing voldoet aan de voorwaarden 1°, 2°, 4°, echter in het algemeen niet aan één der voorwaarden 3°. Zamen in de omgeving van  $z=a, z=b$  geldt volgens § 54:

$$\begin{cases} \Omega(z) = -\frac{\log G(a)}{2\pi i} \log(z-a) + \Omega_1(z), \\ \Omega(z) = \frac{\log G(b)}{2\pi i} \log(z-b) + \Omega_2(z), \end{cases}$$

met  $\Omega_1(z), \Omega_2(z)$  begrensd in de omgeving van  $z=a$  resp.  $z=b$ . Noteer nu

$$-\frac{\log G(a)}{2\pi i} = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \frac{\log G(b)}{2\pi i} = \alpha_2 + i\beta_2,$$

dan geldt in de omgeving van  $z=a, z=b$ ,

$$\Phi_1(z) = (z-a)^{\alpha_1 + i\beta_1} e^{\Omega_1(z)}, \quad \Phi_2(z) = (z-b)^{\alpha_2 + i\beta_2} e^{\Omega_2(z)},$$

waarbij  $e^{\Omega_1(z)}$  begrensd zal zijn in de omgeving van  $z=a, z=b$ . In het algemeen zal nu niet gelden  $\alpha_{1,2} > -1$  zodat  $\Phi_1(z)$  b.v. niet voldoet aan de voorwaarde 3a).

Deze moeilijkheden te overwinnen sloot te bedenken dat naast  $\Phi_1(z)$  ook de functie

$$\Psi_1(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \Phi_1(z), \quad n_1, n_2 \text{ geheel,}$$

voldoet aan de voorwaarden 1°, 2°, 4° van het Hilbert probleem. Voor de functie

$\Psi_1(z)$  zal gelden

$$\begin{cases} \Psi_1(z) = O(|z-a|^{\alpha_1 + n_1}) \text{ bij } z=a, \\ \Psi_1(z) = O(|z-b|^{\alpha_2 + n_2}) \text{ bij } z=b. \end{cases}$$

We zullen nu  $n_1, n_2$  zelfs geschikt kiezen afhankelijk van de vigerende versie van voorwaarde 3°.

(i) Hilbert probleem  $HP_0$ , voorwaarde 3a). Kies  $n_1, n_2$  zodanig dat

$$-1 < \alpha_1 + n_1 \leq 0, \quad -1 < \alpha_2 + n_2 \leq 0.$$

De geheel getallen  $n_1, n_2$  zijn hierdoor eenduidig vastgelegd. De met deze getallen  $n_1, n_2$  te vormen oplossing

$$\chi(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \Phi_1(z),$$

heeft de fundamentele oplossing van het homogeen Hilbert probleem  $HP_0$ . Volgens  $d_1 + n_1 > -1$ ,  $d_2 + n_2 > -1$  zal  $X(z)$  voldoen aan de voorwaarde 3a). De reden van de restrictie  $d_1 + n_1 \leq 0$ ,  $d_2 + n_2 \leq 0$  zal aanstaande duidelijk worden.

De graad van  $X(z)$  in  $z = a$  is  $n_1 + n_2$ . We stellen  $n_1 + n_2 = -\kappa$  en noemen  $\kappa$  weer de index van het Hilbert probleem. Evenals voor het Hilbert probleem voor een contour is dan de graad van  $X(z)$  in  $z = \infty$  gelijk aan  $-\kappa$ .

We onderzoeken nog wat nauwkeuriger het gedrag van  $X(z)$  in de omgeving van  $z = a$ ,  $z = b$ . Het behelst van de resultaten van p. 63 in  $X(z)$  voor te stellen door

$$\begin{cases} X(z) = (z-a)^{d_1 + i\beta_1 + n_1} (z-b)^{n_2} e^{S_1(z)}, & \text{bij } z = a, \\ X(z) = (z-b)^{d_2 + i\beta_2 + n_2} (z-a)^{n_1} e^{S_2(z)}, & \text{bij } z = b, \end{cases}$$

met  $S_1(z)$ ,  $S_2(z)$  begrensd in de omgeving van  $z = a$ , resp.  $z = b$ .

Het is duidelijk dat  $(z-b)^{n_2} e^{S_1(z)}$  naar boven en naar beneden begrensd is in een omgeving van  $z = a$ ; hetzelfde geldt voor  $(z-a)^{n_1} e^{S_2(z)}$  in een omgeving van  $z = b$ . Er bestaan daarom positieve constanten  $A_1, A_2, B_1, B_2$  zodat

$$\begin{cases} A_1 |z-a|^{d_1 + n_1} \leq |X(z)| \leq A_2 |z-a|^{d_1 + n_1}, & \text{in een omgeving van } z = a, \\ B_1 |z-b|^{d_2 + n_2} \leq |X(z)| \leq B_2 |z-b|^{d_2 + n_2}, & \text{in een omgeving van } z = b. \end{cases}$$

We willen tenslotte nog bepalen de algemene oplossing van het homogeen Hilbert probleem  $HP_0$ . Het daartoe  $\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$  dan volgt  $\Psi(z)$  het probleem

$$\begin{aligned} X^+(t)\Psi^+(t) &= G(t)X^-(t)\Psi^-(t), \\ \Psi^+(t) &= \Psi^-(t), \quad t \in L. \end{aligned}$$

Blijkbaar is  $\Psi(z)$  continu aan hertend over  $L$ . Volgens stelling A is dan  $\Psi(z)$  analytisch op  $L$ , i.e.  $\Psi(z)$  is overal analytisch behalve in  $z = a, z = b$ .

Het de voorwaarde 3a) en het gedrag van  $X(z)$  bij  $z = a, z = b$  volgt nu:

$$\Psi(z) = O(|z-a|^{-\delta_1 - d_1 - n_1}) \text{ bij } z = a, \quad \Psi(z) = O(|z-b|^{-\delta_2 - d_2 - n_2}) \text{ bij } z = b. \text{ Bedenk nu dat}$$

$$-\delta_1 - d_1 - n_1 > -1, \quad -\delta_2 - d_2 - n_2 > -1.$$

(hier geldt de restrictie  $d_1 + n_1 \leq 0, d_2 + n_2 \leq 0$  zie 3a)) dan heeft  $\Psi(z)$  geen polen in  $z = a, z = b$  i.e. de singulariteiten zijn ophefbaar, zodat  $\Psi(z)$  een ghele functie is. Vanwege de eindige graad in  $z = \infty$  volgt dan  $\Psi(z) = P(z)$ , waarna de algemene oplossing van het homogeen Hilbert probleem  $HP_0$  luidt

$$\Phi(z) = X(z)P(z).$$

Opmerking. Ook hier in de fundamentele oplossing te karakteriseren met de laagst mogelijke graad ( $= -\kappa$ ) in  $z = \infty$ .

(ii) Hilbert probleem  $HP(a, b)$ , voorwaarde 3a). Kies  $n_1, n_2$  zodanig dat

$$0 \leq d_1 + n_1 < 1, \quad 0 \leq d_2 + n_2 < 1,$$

waardoor  $n_1, n_2$  eenduidig zijn vastgelegd. De bijbehorende fundamentele oplossing wordt weer genoemd als

$$X(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \Phi_1(z);$$

die zal voldoen aan de voorwaarde 3a), omdat  $d_1 + n_1 \geq 0, d_2 + n_2 \geq 0$ .

Met dezelfde kritieke constanten  $A_1, A_2, B_1, B_2$  als voren zal weer gelden

$$\begin{cases} A_1 |z-a|^{d_1+m_1} \leq |X(z)| \leq A_2 |z-a|^{d_2+m_2}, & \text{in omgeving van } z=a, \\ B_1 |z-b|^{d_1+m_1} \leq |X(z)| \leq B_2 |z-b|^{d_2+m_2}, & \text{in omgeving van } z=b. \end{cases}$$

Voor de bepaling van de algemene oplossing van het homogene Hilbert probleem  $HP(a, b)$ , stellen we weer  $\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$ . Analogisch als onder (i) volgt dan weer dat  $\Psi(z)$  analytisch is overal behalve in  $z=a, z=b$ .

Mit de voorwaarden 3c) en het gedrag van  $X(z)$  bij  $z=a, z=b$  volgt:

$$\Psi(z) = O(|z-a|^{-d_1-m_1}) \text{ bij } z=a, \quad \Psi(z) = O(|z-b|^{-d_2-m_2}) \text{ bij } z=b.$$

Volgens  $-d_1-m_1 > -1, -d_2-m_2 > -1$  volgt dat  $\Psi(z)$  in  $z=a, z=b$  weer ophefbare singulariteiten heeft. i.e.  $\Psi(z)$  is een gehele functie. Uit de eindigheid van de graad in  $z=a$  volgt  $\Psi(z) = P(z)$ , zodat nu voor de algemene oplossing van het probleem  $HP(a, b)$  vinden

$$\Phi(z) = X(z)P(z).$$

(iii) Hilbert probleem  $HP(a)$ , voorwaarde 3b). De fundamentele oplossing wordt nu gegeven door

$$X(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \Phi(z)$$

met  $n_1, n_2$  geheel eenduidig bepaald door

$$0 \leq d_1 + n_1 < 1, \quad -1 \leq d_2 + n_2 < 0.$$

De algemene oplossing van het probleem  $HP(a)$  wordt gegeven door  $\Phi(z) = X(z)P(z)$ .

(iv) Hilbert probleem  $HP(b)$ , voorwaarde 3c). Woordelijk hetzelfde als (iii) behalve

dat nu de gehele getallen  $n_1, n_2$  eenduidig worden vastgelegd door

$$-1 \leq d_1 + n_1 < 0, \quad 0 \leq d_2 + n_2 < 1.$$

25-2-1981 | 23-4-1986

C. Beschouw nu het inhomogene Hilbert probleem

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L,$$

waarbij het gedrag van  $\Phi(z)$  weer beschreven wordt door een der voorwaarden 3°.

Zij nu  $X(z)$  de fundamentele oplossing van het bijbehorende homogene Hilbert probleem onder dezelfde vereis van de voorwaarde 3°. Het dan  $\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$  dan ontstaat voor  $\Psi(z)$  het Hilbert probleem

$$X^+(t)\Psi^+(t) = G(t)X^-(t)\Psi^-(t) + g(t),$$

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L.$$

Volgens stap A wordt de oplossing van het laatste probleem gegeven door

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt + P(z).$$

De algemene oplossing van het inhomogene Hilbert probleem luidt nu

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt + X(z)P(z).$$

Deze oplossing is van dezelfde vorm als die voor het inhomogene Hilbert probleem voor een contour.



nieuwe gedeelte  
in 1974, 1975, 1977, 1981, 1985  
1975, 1977, 1981, 1985

De voorgaande oplossing voldoet zeker aan de voorwaarden 1°, 3°, 4° van het Hilbert probleem. We verifiëren nog dat de oplossing tevens voldoet aan de vijfde voorwaarde 3°.

Merkt daarvoor op dat de kern  $X(z)P(z)$  voldoet aan de voorwaarde 3°. Zou de in de omgeving van  $z=a, z=b$  verband  $X(z)P(z)$  hetzelfde gedrag als  $X(z)$ .  $X(z)$  was evenwel de fundamentele oplossing van het homogene Hilbert probleem onder de zelfde vijfde voorwaarde 3°.

We onderzoeken nu de integraalterm  $\int \frac{g(t)}{X^*(t)} dt$  in de algemene oplossing  $\Phi(z)$ . Merkt op dat voor de fundamentele oplossing  $X(z)$  geldt (voor alle vier problemen),

$$X(z) = O(|z-a|^{d_1+n_1}) \text{ bij } z=a, \quad X(z) = O(|z-b|^{d_2+n_2}) \text{ bij } z=b.$$

Men kan voort gemakkelijks afleiden uit de meer stap B afgeleide resultaten, dat

$$\begin{cases} \frac{g(t)}{X^*(t)} = (t-a)^{-d_1-i\beta_1-n_1} \psi_1(t) \text{ in rechter omgeving van } t=a, \\ \frac{g(t)}{X^*(t)} = (t-b)^{-d_2-i\beta_2-n_2} \psi_2(t) \text{ in linker omgeving van } t=b. \end{cases}$$

Hierbij zijn  $\psi_1(t), \psi_2(t)$  Hölder continue in een rechter omgeving van  $t=a$ , resp. in een linker omgeving van  $t=b$ .

Gebruik nu de resultaten van de samenvatting <sup>§1.3</sup> plus beweging of bl. 55a:

In een omgeving van  $z=a$  geldt,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^*(t)(t-z)} dt = \begin{cases} \text{begrensd, in de gevallen } d_1+n_1 < 0 \text{ of } d_1+n_1=0, \beta_1 \neq 0, \\ O(\log|z-a|), \text{ in geval } d_1+n_1=0, \beta_1=0, \\ O(|z-a|^{-d_1-n_1}), \text{ in geval } d_1+n_1 > 0. \rightarrow 0 < d_1+n_1 < 1 \end{cases}$$

In een omgeving van  $z=b$  geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^*(t)(t-z)} dt = \begin{cases} \text{begrensd, in de gevallen } d_2+n_2 < 0 \text{ of } d_2+n_2=0, \beta_2 \neq 0, \\ O(\log|z-b|), \text{ in geval } d_2+n_2=0, \beta_2=0, \\ O(|z-b|^{-d_2-n_2}), \text{ in geval } d_2+n_2 > 0. \rightarrow 0 < d_2+n_2 < 1 \end{cases}$$

Na vermenigvuldiging van de integraal met  $X(z)$  vinden we met gebruikmaking van het bekende gedrag van  $X(z)$  bij  $z=a, z=b$ :

In een omgeving van  $z=a$  geldt

$$\Phi_0(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^*(t)(t-z)} dt = \begin{cases} O(|z-a|^{d_1+n_1}), \text{ in geval } d_1+n_1 < 0, \\ \text{begrensd, in geval } d_1+n_1=0, \beta_1 \neq 0, \\ O(\log|z-a|), \text{ in geval } d_1+n_1=0, \beta_1=0, \\ \text{begrensd, in geval } d_1+n_1 > 0. \rightarrow 0 < d_1+n_1 < 1 \end{cases}$$

In een omgeving van  $z=b$  geldt

$$\Phi_0(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^*(t)(t-z)} dt = \begin{cases} O(|z-b|^{d_2+n_2}), \text{ in geval } d_2+n_2 < 0, \\ \text{begrensd, in geval } d_2+n_2=0, \beta_2 \neq 0, \\ O(\log|z-b|), \text{ in geval } d_2+n_2=0, \beta_2=0, \\ \text{begrensd, in geval } d_2+n_2 > 0. \rightarrow 0 < d_2+n_2 < 1 \end{cases}$$

Voor het Hilbert probleem  $HP_0$  worden  $n_1, n_2$  zo gekozen dat

$$-1 < \alpha_1 + n_1 \leq 0, \quad -1 < \alpha_2 + n_2 \leq 0$$

is. Het is duidelijk dat de integraalterm  $\Phi_0(z)$  dan voldoet aan de vigerende voorwaarde 3a).

Voor het Hilbert probleem  $HP(a, b)$  worden  $n_1, n_2$  bepaald door

$$0 \leq \alpha_1 + n_1 < 1, \quad 0 \leq \alpha_2 + n_2 < 1.$$

De integraalterm is inderdaad begrensd bij  $z=a, z=b$  (in overeenstemming met de vigerende voorwaarde 3d)) mits niet

$$\alpha_1 + i\beta_1 + n_1 \neq 0 \text{ en/of } \alpha_2 + i\beta_2 + n_2 \neq 0.$$

Mit de definitie van  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  (zie b. 63) dan volgt eenvoudig dat

$$\alpha_1 + i\beta_1 + n_1 = 0 \iff g(a) = b, \quad \alpha_2 + i\beta_2 + n_2 = 0 \iff g(b) = a.$$

In de gevallen  $\alpha_1 + i\beta_1 + n_1 = 0$  en/of  $\alpha_2 + i\beta_2 + n_2 = 0$  zal de integraalterm  $\Phi_0(z)$  in het algemeen niet begrensd zijn, maar een logarithmische singulariteit vertonen in  $z=a$  en/of  $z=b$ . Het Hilbert probleem  $HP(a, b)$  heeft dan geen oplossing.

Opmerking. Indien  $g(a) = 0$  en/of  $g(b) = 0$  vervalt de zojuist gesignaleerde logarithmische singulariteit. De integraalterm  $\Phi_0(z)$  is dan wel begrensd in de omgeving van  $z=a$  en/of van  $z=b$ . Men kan dit afleiden door het afdrukken van  $\Phi_0(z)$  in de buurt van  $z=a, z=b$  iets nauwkeuriger uit te voeren.

Voor de Hilbert problemen  $HP(a), HP(b)$  kan men op analoge wijze verifiëren dat de integraalterm  $\Phi_0(z)$  voldoet aan de vigerende voorwaarden 3b) resp. 3c).

De gevallen  $\alpha_1 + i\beta_1 + n_1 = 0$  en  $\alpha_2 + i\beta_2 + n_2 = 0$  verdienen daarbij een bijzondere vermelding voor uitwerkingsoverzichten of dezelfde wijze als boven.

3-371 | 2-372

Voorbeeld. Beschouw het inhomogeen Hilbert probleem

$$e^{2\pi i f} \Phi^+(t) - e^{-2\pi i f} \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L,$$

waarbij  $0 < f < 1$ ,  $L = [-1, +1]$ ,  $g(t) \in H_{1/2}$  op  $[-1, +1]$ . Het

is stellen de volgende voorwaarden voor het gedrag van  $\Phi(z)$  bij  $z = \pm 1$ :

$$(I) \quad \begin{cases} \Phi(z) \text{ is begrensd in de omgeving van } z = 1; \\ \Phi(z) = O(|z+1|^{-\delta}), \quad 0 \leq \delta < 1, \text{ in de omgeving van } z = -1. \end{cases}$$

Het Hilbert probleem is dus van het type  $HP(1)$ .

Onderzoek eerst het bijbehorende homogeen Hilbert probleem eveneens onder de voorwaarden (I).

$$e^{2\pi i f} \Phi^+(t) - e^{-2\pi i f} \Phi^-(t) = 0, \quad t \in L.$$

Neem de logarithmen dan volgt

$$[\log \Phi^+(t)]^+ - [\log \Phi^-(t)]^- = \log e^{-2\pi i f} = -2\pi i f.$$

Het laatste probleem heeft als oplossing

$$\log \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{-2\pi i f}{t-z} dt = -f \log \frac{z-1}{z+1},$$

$$\Phi(z) = (z-1)^{-f} (z+1)^f.$$

Vorm van de fundamentele oplossing.

$$X(z) = (z-1)^{\alpha_1} (z+1)^{\alpha_2}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \text{ geheel.}$$

Wanneer de voorwaarden (I) worden  $\alpha_1, \alpha_2$  bepaald door

$$0 \leq \alpha_1 - \alpha_2 < 1, \quad -1 < \alpha_2 + \alpha_1 \leq 0,$$

i.e.  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ , want  $0 < \alpha_1 - \alpha_2 < 1$ . De fundamentele oplossing van het homogene Hilbert probleem luidt dus

$$X(z) = (z-1)^{-1} (z+1)^{1-\alpha_2}.$$

We leggen de functie  $X(z)$  nader vast door de afspraak  $-\pi < \arg(z \pm 1) < \pi$ . Op de bekende manier (zie p. 56) kan dan worden aangetoond dat  $X(z)$  analytisch is in het  $z$ -vlak met beide  $-1 \leq z \leq 1$ . Voor een punt  $t$  op de reede  $-1 < t < 1$  geldt

$$X^\pm(t) = (1-t)^{-1} (1+t)^{-1} e^{\pm \pi i (1-\alpha_2)}$$

Voor de bepaling van de oplossing van het inhomogene Hilbert probleem stellen we  $\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$ . Er bestaat dan voor  $\Psi(z)$  het Hilbert probleem

$$e^{+\pi i} X^+(t) \Psi^+(t) - e^{-\pi i} X^-(t) \Psi^-(t) = g(t),$$

$$(1-t)^{-1} (1+t)^{-1} e^{+\pi i} - (1-t)^{-1} (1+t)^{-1} \Psi^-(t) e^{-\pi i} = g(t).$$

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = -g(t) (1-t)^{-1} (1+t)^{1-\alpha_2}.$$

De oplossing van het laatste probleem laat zich eenvoudig <sup>bepalen</sup> vinden. Na vermenigvuldiging met  $X(z)$  vinden we als algemene oplossing van het inhomogene Hilbert probleem

$$\Phi(z) = (z-1)^{-1} (z+1)^{1-\alpha_2} \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t) (1-t)^{-1} (1+t)^{1-\alpha_2}}{t-z} dt + P(z) \right],$$

waarbij  $P(z)$  een willekeurig polynoom voorstelt.

Men kan gemakkelijk verifiëren dat de aldus gevonden oplossing inderdaad voldoet aan de voorwaarden (I).

Opgave 1. Geef de oplossing van het voorgaande Hilbert probleem indien de voorwaarden (I) wordt vervangen door de voorwaarden

$$(II) \quad \Phi(z) \text{ is begrensd in omgeving van } z=1 \text{ en in omgeving van } z=-1$$

$$\text{of} \quad (III) \quad \begin{cases} \Phi(z) = O(|z-1|^{-\delta_1}) \text{ in omgeving van } z=1, & 0 \leq \delta_1 < 1; \\ \Phi(z) = O(|z+1|^{-\delta_2}) \text{ in omgeving van } z=-1, & 0 \leq \delta_2 < 1. \end{cases}$$

De Hilbert problemen zijn van het type  $HP(-1, 1)$ ,  $HP_0$ .

2. Bepaal de oplossing van het Hilbert probleem

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L,$$

met  $L = [-1, +1]$ ,  $g(t) \in H(\mu)$  op  $L$ , waarbij de oplossing  $\Phi(z)$  begrensd dient te zijn in de omgeving van  $z = \pm 1$ .

Laat zien dat een dergelijke oplossing alleen bestaat als  $g(z) = 0$  is.

P.17 mei in 1978

1) Nader toelichting Er dient nog te worden aangegeven dat de Cauchy-integraal

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

begrepen is voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

Onderzoek van  $\Psi(z)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$  niet te verwarren met een gegeven in

F.D. Gakhov, Boundary value problems, Pergamon Press, Oxford, 1966, p.

Voor in nieuwe variabelen  $\xi = \frac{1}{z}$ ,  $\tau = \frac{1}{t}$  en welke  $\Psi(z) = \Psi(\frac{1}{\xi}) = \Psi^*(\xi)$ ,  $f(t) = f(\frac{1}{\tau}) = f^*(\tau)$ .

Cauchy-integraal gaat dan over in

$$\Psi^*(\xi) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(\tau)}{\tau - \xi} d\tau,$$

te onderzoeken in de omgeving van  $\xi=0$ , heeft  $f^*(\tau)/\tau = O(|\tau|^{-p})$  in omgeving van  $\tau=0$ .

Splitst integraal in vier delen,

$$\Psi^*(\xi) = -\frac{1}{\pi i} \left( \int_{-\infty}^{-N} + \int_{-N}^0 + \int_0^N + \int_N^{\infty} \right) \frac{\tau^{-1} f^*(\tau)}{\tau - \xi} d\tau.$$

Bijdrage eerste en vierde integraal is  $O(|\xi|)$  in omgeving van  $\xi=0$ .

Bijdrage tweede en derde integraal is

$$O(|\xi|^p) \text{ indien } 0 < p < 1; \quad O(|\xi| \log |\xi|) \text{ indien } p = 1; \quad O(|\xi|^{-1}) \text{ indien } p > 1;$$

in de omgeving van  $\xi=0$  op grond van Lemma p.55a).

Conclusie Voor  $|z| \rightarrow \infty$  geldt

$$\Psi(z) = \begin{cases} O(|z|^{-p}), & \text{indien } 0 < p < 1; \\ O(|z|^{-1} \log |z|), & \text{indien } p = 1; \\ O(|z|^{-1}), & \text{indien } p > 1. \end{cases}$$

Voorbeelden (i)  $f(t) = t^p, t > 0; f(t) = 0, t < 0; 0 < p < 1$ . Dit is (vergelijk p.54, 55),

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{t^p}{t-z} dt = \frac{e^{i\pi p}}{i \sin \pi p} z^{-p}, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

(ii)  $f(t) = \frac{|t|}{t+1}$  (i.e.  $p=1$ ). Exacte uitwerking met de contour-integraalbediening geeft

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \left[ -\frac{2z \log z}{z+1} \pm \frac{\pi i z}{z+1} \right], \quad \begin{matrix} 0 < \arg z < \pi \\ -\pi < \arg z < 0 \end{matrix}$$

(iii)  $f(t) = \frac{1}{t+1}$  (i.e.  $p=2$ ). Exacte uitwerking met contour-integraal en residuerekening geeft

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{i}{2z+1}, & \text{Im } z > 0, \\ \frac{i}{z-1}, & \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

~~F~~ waarbij  $C$  een constante in de oplossing moet worden toegevoegd aan  $\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}$ ,

~~$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt + C, \\ -\overline{\Phi(\bar{z})} = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-\bar{z}} dt + \bar{C} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt - \bar{C}, \end{cases}$$~~

i.e. we vinden  $C = -\bar{C}$ . De constante  $C$  moet dus reëel of imaginair zijn, ~~als~~ zodat ~~de~~ ~~constante~~ ~~is~~.

~~$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt + iD,$$~~

waarbij  $D$  een willekeurige reële constante is.

1.7 Toepassingen van Cauchy integraal en Hilbert probleem.

Dirichlet probleem voor een halfvlak.

Gevraagd de functie  $u(x,y)$  te bepalen, gedefinieerd in het halfvlak  $y \geq 0$ , welke voldoet aan de voorwaarden:

- 1°  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, -\infty < x < \infty, y > 0;$
- 2°  $u(x,y)$  begrensd in het halfvlak  $y \geq 0$ ; (begrensd voor  $x^2 + y^2 = a, y \geq 0$ )
- 3°  $u(x,0) = \begin{cases} f(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$

De oplossing van dit Dirichlet probleem voor een halfvlak is eenduidig, zie collegeboekje Partiele Differentiaalvgl., §7.7

Ondersteld wordt dat  $f(x)$ , en dus  $u(x,y)$ , reëelwaardig is. We vatten dan  $u(x,y)$  op als het reële deel van een analytische functie.

$\Phi(z) = u(x,y) + iv(x,y), z = x + iy, \text{Im } z > 0,$

waarbij  $u, v$  voldoen aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

Volgens college Wiskunde 50, p. 65-67 (1973) is  $\Phi(z)$  door haar reële-deel  $u(x,y)$  of een <sup>imaginair</sup> constante na vastgelegd.

De functie  $\Phi(z)$  wordt voortgezet naar het benedenhalfvlak  $\text{Im } z < 0$  volgens  $\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}, \text{Im } z < 0,$

of uitgewerkt,

$\Phi(z) = \Phi(x+iy) = -\overline{\Phi(x-iy)} = -u(x,-y) + iv(x,-y), y < 0.$

Men kan gemakkelijk nagaan dat ook de functies  $-u(x,-y), v(x,-y)$  voldoen aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann. De aldus gedefinieerde functie  $\Phi(z)$  is dus analytisch in het beneden halfvlak (spiegelingsprincipe van Schwarz; college Voortgezette Functietheorie, p. 25-27).

Kies punt  $x$  op reële as, dan is

$$\begin{cases} \Phi^+(x) = \lim_{z \rightarrow x+i0} \Phi(z) = u(x,0) + iv(x,0), \\ \Phi^-(x) = \lim_{z \rightarrow x-i0} \Phi(z) = -u(x,0) + iv(x,0), \end{cases}$$

waarmee volgt

$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 2u(x,0) = \begin{cases} 2f(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$

De functie  $\Phi(z)$  sluit dus continu aan over  $(-a,-a), (a,a)$ . Volgens het behulp van stelling A volgt dan dat  $\Phi(z)$  analytisch is in het hele  $z$ -vlak behalve op  $[-a,a]$ .

Voor  $\Phi(z)$  bestaat er nu het Hilbert probleem

$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 2f(x), -a < x < a.$

alternatief:  $e^{\Phi(z)}$  is analytisch buiten  $[a, \infty)$  en begrensd voor  $|z| \rightarrow \infty$ ; dan kan  $e^{\Phi(z)}$  bestaan  $\neq 0$ , (mits  $e^{\Phi(z)} \neq 0$ )  
 dan bestaat ook  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z)$  en  $\bar{\Phi}(z)$  is begrensd voor  $|z| \rightarrow \infty$ . 65a66  
(mits  $e^{\Phi(z)} \neq 0$ )

142.

Voorts is  $\Phi(z)$  begrensd voor  $|z| \rightarrow \infty$ , omdat  $u(x, y)$  begrensd moet zijn (verhouding: onderscheid de gevallen: (i)  $\Phi(z)$  heeft pool in  $z=a$ , dan is  $u(x, y)$  niet begrensd; (ii)  $\Phi(z)$  heeft essentieel singulier punt in  $z=a$ , dan is  $u(x, y)$  niet begrensd volgens Casorati-Weierstrass; (iii)  $\Phi(z)$  is analytisch in  $z=a$ ; laatste geval doet zich voor).  
 De oplossing van het Hilbert probleem laat zich eenvoudig bepalen:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_a^\infty \frac{f(t)}{t-z} dt + C,$$

waarin  $C$  een willekeurige (complex) constante is. Een oplossing moet nog voldoen aan  $\Phi(z) = -\bar{\Phi}(\bar{z})$ , dus

$$-\bar{\Phi}(\bar{z}) = \frac{1}{\pi i} \int_a^\infty \frac{f(t)}{t-\bar{z}} dt - \bar{C} = \frac{1}{\pi i} \int_a^\infty \frac{f(t)}{t-z} dt - \bar{C} = \frac{1}{\pi i} \int_a^\infty \frac{f(t)}{t-z} dt + C = \Phi(z),$$

waarmit volgt  $C = -\bar{C}$ ,  $C = iA$  met  $A$  reëel. De uiteindelijk oplossing wordt dan

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_a^\infty \frac{f(t)}{t-z} dt + iA.$$

Neem het reële deel van den oplossing, dan volgt voor de oplossing  $u(x, y)$  van het Poisson probleem

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{y}{\pi} \int_a^\infty \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Hetzelfde resultaat is ook afgeleid in college Part. Diff. vgl. § 7.7. De oplossing blijft ook geldig voor  $a = \infty$ , mits (voldoende voorwaarden)  $f(x)$  continu en begrensd is op  $(-\infty, \infty)$ .

zie in 1961, vol 6 (1960), 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985

Toevoeging. Beschouw de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad f(t) \text{ reëel}$$

waarbij in verband met convergentie ondersteld wordt dat  $f(t) = O(|t|^{-\delta})$  voor  $t \rightarrow \pm \infty$ , met  $\delta > 0$ . De functie  $\Phi(z)$  is analytisch voor  $\operatorname{Im} z > 0$  en voor  $\operatorname{Im} z < 0$ , en de formules van Plemelj blijven van toepassing.

Schrijf nu

$$\Phi(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad z = x + iy,$$

dan is

$$\Phi^+(x) = u(x, +0) + i v(x, +0) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

Hieruit volgt:  $u(x, +0) = f(x)$ . Stel  $v(x, +0) = g(x)$  dan is

$$(I) \quad -g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dx.$$

We noemen  $-g$  de Hilbert transform van  $f$ . De relatie (I) geldt algemeen voor het reële en imaginair deel van een analytische functie. Pas nu (I) toe op de functie  $\Psi(z) = i\Phi(z)$ , dan is  $\Psi^+(x) = -g(x) + i f(x)$  en dus

Opmerking: Voor  $|z| \rightarrow \infty$  is  $\Phi(z) = O(|z|^{-\delta})$  als  $0 < \delta < 1$ , zie afdeling p. 64. Dan is ook  $g(x) = O(|x|^{-\delta})$ ,  $x \rightarrow \pm \infty$ .

143.

$$(II) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt,$$

i.e.  $f$  is de Hilbert transform van  $g$ . De relaties (I) en (II) zijn elkaars inverse.

Hilbert transform vindt toepassing in theoretische fysica: Kramers-Kronig relaties voor reële en imaginaire deel van complexe brekingsindex, dispersierelaties, causaliteit, zie

B. W. Ross, Analytic functions and distributions in physics and engineering. Wiley, New York, 1969, Chapter II.

A. Kyralo, Applied functions of a complex variable. Wiley-Interscience, New York, 1972, Chapter 11.

Opgave. Bepaal de oplossing van het gemengde randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty, y > 0; \\ u(x, y) \text{ begrensd in het halfvlak voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, y \geq 0; \\ u(x, 0) = f(x), & -1 < x < 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad |x| > 1. \end{cases}$$

144.

65b<sup>A</sup>

F Hierbij dient  $\Phi(z)$  begrensd te zijn in omgeving van  $z = \infty$ , i.e.  
 $\Phi(z)$  is van de graad 0 in  $z = \infty$ . Immers de volgende limiet bestaat,  
$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\Phi(0)}.$$



~~Voeringing~~ ~~Twee de functies  $u(x,y)$  en  $v(x,y)$  bestaan het volgt~~

Met de formules van Planché volgt,

$$\Phi^+(x) = u(x,0) + i v(x,0) = f(x) + i g(x) = f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt,$$

waarbij de laatste integraal moet worden opgevat als een Cauchy hoofwaarde. Het is nu duidelijk dat

$$g(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt. \quad (I)$$

Uitgebreed is deze relatie geldig (onafhankelijk van het Dirichlet probleem) voor elke functie  $\Phi(z)$  die analytisch is voor  $\text{Im } z > 0$  en continu voor  $\text{Im } z \geq 0$  met  $\Phi^+(x) = f(x) + i g(x)$ .

Beschouw nu de functie  $\Psi(z) = i \Phi(z)$ , dan is  $\Psi^+(x) = i \Phi^+(x) = -g(x) + i f(x)$  en dus geldt

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt. \quad (II)$$

De relaties (I), (II) zijn elkaars inverse. Op grond van (II) noemt men  $f(x)$  ook de Hilbert transform van  $g(x)$ , omgekeerd is dan volgens (I)  $-g(x)$  de Hilbert transform van  $f(x)$ .

10-10-1974 | 17-10-1976 | 11-10-1979 | 2-3-1982 | 8-3-1983

Dirichlet probleem voor het binnengebied van een cirkel.

Beschouw het probleem: Gevraagd de functie  $u(x,y)$  te bepalen gedefinieerd voor  $x^2 + y^2 \leq 1$ , welke voldoet aan de voorwaarden:

1°  $u = 0$  voor  $x^2 + y^2 < 1$ ;

2°  $u = f(t)$  voor  $t \in L$  op de cirkel  $|t|=1$  met  $f(t)$  reëelwaardig.

(Dirichlet probleem voor het binnengebied van een cirkel)

We vatten  $u(x,y)$  voor op als het reële deel van een analytische functie  $\Phi(z)$ ,

$$\Phi(z) = u(x,y) + i v(x,y), \quad |z| < 1.$$

Voor  $|z| > 1$  definiëren we

$$\Phi(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad |z| > 1$$

of uitgewerkt

$$\Phi(z) = \Phi(x+iy) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{x-iy}\right)} = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) - i v\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad |z| > 1.$$

Men kan nu gemakkelijk bewijzen dat  $u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) - i v\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$  voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen;  $\Phi(z)$  is dus ook analytisch voor  $|z| > 1$ . (Spiegelingsprincipe van Schwarz)

Neem de gebieden  $|z| < 1, |z| > 1$   $S^+, S^-$  resp. en beschouw de limiet van  $\Phi(z)$  indien  $z \rightarrow t^{\pm}$ ,  $t \in L$ .

$$\Phi^+(t) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0), \quad \Phi^-(t) = u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0).$$

Voor  $\Phi(z)$  ontstaat er dan het Hilbert probleem

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 2u(x_0, y_0) = 2f(t), \quad t \in L.$$

Tom aan dat de oplossing van het homogeen Hilbert probleem

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0, \quad t \in L.$$

gegeven wordt door

$$\Phi(z) = X(z) = \begin{cases} +1, & z \in S^+ \\ -1, & z \in S^- \end{cases}$$

Stel nu het oplossing van het inhomogeen Hilbert probleem,

$$\Phi(z) = X(z) \Phi(z) / X(z) = \begin{cases} \Phi(z), & z \in S^+ \\ -\Phi(z), & z \in S^- \end{cases}$$

Alternatief:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = \bar{\Phi}(0) = -C$

$$\Rightarrow \Phi(z) = \pm \left[ \frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} - \bar{\Phi}(0) \right].$$

Substitueer  $z=0$  dan volgt

$$\Phi(0) + \bar{\Phi}(0) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(t) dt}{t},$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{f(t) dt}{t} + iD, \quad D = \int_{\infty} \Phi(0) = v(0,0) \text{ willekeurige constante}$$

met in 1988

Toevanging Gemene de Dirichlet problemen zijn bijzondere gevallen van het algemene Riemann-Hilbert probleem:

$$\Phi(z) = u + iv \text{ is analytisch in } S^+; \quad a u - b v = c \text{ op } L \text{ met } a, b, c \text{ reëel, continu.}$$

In geval  $S^+$  een halfvlak of een enkelvoudig gebied is, leidt het probleem uit boven tot een Hilbert probleem  $(a+ib)\Phi^+(t) + (a-ib)\Phi^-(t) = c, t \in L$ .

Zie Muskhelishvili, loc. cit. §§ 39-43.

Wt in geval  $a, b, c$  eindelijk real dan en kan men stellen dat er alteszins lokale Hilbert problemen zijn oploss.

Een belangrijke bijzonder geval vormt het zg. gemene de Dirichlet probleem

$$\Phi(z) = u + iv \text{ is analytisch in } S^+; \quad u^+ = f(t) \text{ op } L^+, \quad v^+ = g(t) \text{ op } L^+ \text{ met } L = L^+ \cup L^-$$

Zie Muskhelishvili, loc. cit. §§ 44, 45.

Voor informatie, zie ook F.D. Gakhov Bronslangingsprobleem, p. 227, p. 451.

Dan is  $\Phi^+(t) = \Psi^+(t)$ ,  $\Phi^-(t) = -\Psi^-(t)$ , waarna voor  $\Phi(z)$  het volgende Hilbert probleem ontstaat

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = 2f(t), \quad t \in L.$$

Voorts dient  $\Psi(z)$  van de graad 0 in  $z=0$  te zijn. Er volgt een gemiddelde oplossing

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + C,$$

$$\Phi(z) = \pm \left[ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + C \right], \quad z \in S^\pm,$$

waarbij  $C$  een willekeurige constante voorstelt.

De constante wordt weder vastgelegd door de eis  $\Phi(z) = \overline{\Phi(\frac{1}{z})}$ , voor  $z \in S^-$ .

Voor  $z \in S^-$  is  $\frac{1}{z} \in S^+$ , waarna zich laat uitwerken

$$\overline{\Phi(\frac{1}{z})} = \overline{\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-\frac{1}{z}} dt + C} = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-\frac{1}{z}} dt + \bar{C}.$$

Stel langs  $L$   $t = e^{i\theta}$ , dan is  $\bar{t} = e^{-i\theta} = \frac{1}{t}$ ,  $d\bar{t} = -ie^{-i\theta} d\theta = -\frac{dt}{t^2}$ , waarna volgt

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(\frac{1}{z})} &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{(\frac{1}{t}-\frac{1}{z})t^2} dt + \bar{C} = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{z f(t)}{t(t-z)} dt + \bar{C} = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t} dt + \bar{C}. \end{aligned}$$

Anderzijds is

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt - C, \quad z \in S^-.$$

Voor de constante  $C$  geldt daarom

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t} dt + \bar{C} = -C \implies C = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t} dt + iD,$$

waarin  $iD$  een willekeurige zuiver imaginair constant is.

Substitueer dit resultaat in de formule voor  $\Phi(z)$  dan ontstaat er

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t+z}{t-z} \frac{f(t)}{t} dt + iD, \quad |z| < 1,$$

d.i. de formule van Schwarz.

De functie  $\frac{t+z}{(t-z)t}$  heet de Schwarz kern.

Stel in deze formule  $z = re^{i\varphi}$ ,  $t = e^{i\theta}$  dan volgt

$$\begin{aligned} \Phi(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + re^{i\varphi}}{e^{i\theta} - re^{i\varphi}} f(e^{i\theta}) d\theta + iD = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2 - 2r^2 \sin(\theta-\varphi)}{1+r^2 - 2r \cos(\theta-\varphi)} f(e^{i\theta}) d\theta + iD. \end{aligned}$$

Neem links en rechts het reële deel, dan volgt voor de gevraagde functie  $u(x,y)$ ,

$$\operatorname{Re} \Phi(re^{i\varphi}) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1+r^2 - 2r \cos(\theta-\varphi)} d\theta,$$

d.i. de integraalformule van Poisson. (zie ook college Part. Diff. vgl.)

Trouwring met in 1968, 1969, 1972, 1971, 1973, 1974 tweejaar, 1974 tweejaar, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985

$$\Phi(z) = u(x,y) + i v(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t+z}{t-z} \frac{u(\theta)}{t} dt + i \tilde{D}, \quad |z| < 1, \quad t = e^{i\theta}$$

$$z=0: \quad u(0,0) + i v(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta + i \tilde{D}, \quad u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta, \quad v(0,0) = \tilde{D}$$

$$\Psi(z) = i \Phi(z) = -v(x,y) + i u(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t+z}{t-z} \frac{v(\theta)}{t} dt + i \tilde{D}, \quad |z| < 1, \quad t = e^{i\theta}$$

$$\Phi(z) = u(x,y) + i v(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{t+z}{t-z} \frac{v(\theta)}{t} dt + \tilde{D}, \quad |z| < 1, \quad t = e^{i\theta}$$

$$z=0: \quad u(0,0) + i v(0,0) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta + \tilde{D}, \quad u(0,0) = \tilde{D}, \quad v(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta$$

Den  $\tilde{D}$  invullen:  $\Phi(z) = u(x,y) + i v(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t+z}{t-z} \frac{u(\theta)}{t} dt + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta$

$$\Phi(z) = u(x,y) + i v(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{t+z}{t-z} \frac{v(\theta)}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta$$

Limiet van  $z \rightarrow t_0 = e^{i\theta_0}$  van binnen toe zie formule van Poincaré:

$$\Phi^+(t_0) = u(\theta_0) + i v(\theta_0) = u(\theta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t+t_0}{t-t_0} \frac{u(\theta)}{t} dt + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta,$$

$$\Phi^+(t_0) = u(\theta_0) + i v(\theta_0) = i v(\theta_0) + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{t+t_0}{t-t_0} \frac{v(\theta)}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta.$$

Voorbeelden met behandeld in 1968, 1969, ook in 1972, 1971, 1973, met in 1974 tweejaar, ook in 1974 tweejaar, 1975, met in 1976, ook in 1977, met in 1978, ook in 1979, 1981, 1985 met in 1982, 1983, 1985

Leidt toe  $v(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{t+t_0}{t-t_0} \frac{u(\theta)}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta$

$$u(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{t+t_0}{t-t_0} \frac{v(\theta)}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta.$$

Substituties  $t = e^{i\theta}$ ,  $t_0 = e^{i\theta_0}$ , waarna  $\frac{t+t_0}{t-t_0} = -i \cot \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)$  en

$$v(\theta_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \cot \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta$$

$$u(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) \cot \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta,$$

dat zijn de Cauchy-integralen van Hilbert.

Toevanging Zij de functie  $\Phi(z) = u(x,y) + i v(x,y)$  analytisch voor  $|z| < 1$  en continu voor  $|z| \leq 1$ .  
 Dan bestaat er een verband tussen de waarden van  $u$  en  $v$  op de cirkel  $|z|=1$ . Voor deze waarden voeren we de volgende notatie in,

$$u(\theta) = u(1, \cos \theta, \sin \theta), \quad v(\theta) = v(1, \cos \theta, \sin \theta).$$

Volgens de formule van Schwarz geldt namelijk,

$$\Phi(z) = u(x,y) + i v(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t+z}{t-z} \frac{u(\theta)}{t} dt + i v(0,0), \quad |z| < 1, \quad t = e^{i\theta}$$

Neem nu  $z \rightarrow t_0 = e^{i\theta_0}$  vanuit het binnen gebied van de cirkel dan volgt met de formules van Heine;

$$\Phi^+(t_0) = u(t_0) + i v(t_0) = u(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t+t_0}{t-t_0} \frac{u(\theta)}{t} dt + i v(0,0)$$

ofwel

$$v(t_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{t+t_0}{t-t_0} \frac{u(\theta)}{t} dt + v(0,0).$$

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta$$

Sub in deze integraal  $t = e^{i\theta}$ ,  $t_0 = e^{i\theta_0}$  dan is

$$v(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta$$

$$\frac{t+t_0}{t-t_0} = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta_0}}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} = \frac{e^{i(\theta+\theta_0)/2} + e^{-i(\theta+\theta_0)/2}}{e^{i(\theta-\theta_0)/2} - e^{-i(\theta-\theta_0)/2}} = \frac{1}{i} \cotg \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)$$

waarna volgt

$$v(t_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \cotg \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) d\theta + v(0,0). \quad (I)$$

De zelfde formule laat zich ook toepassen op de analytische functie,

$$+ i \Phi(z) = -v(x,y) + i u(x,y)$$

waarna volgt

$$u(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) \cotg \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) d\theta + u(0,0). \quad (II)$$

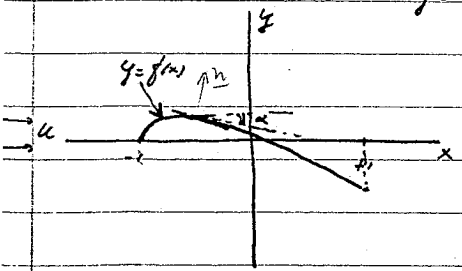
De formules (I) en (II) staan bekend als de inversieformules van Hilbert. De functie  $\cotg \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)$  heet de Hilbert kern.

27-2-1969, 25-2-1970

Straming van een profiel.

We beschouwen de straming van een incompressibel, niet-viskeus vloeistof over een dan profiel waarvan de dikte verwaarloosd wordt. Het profiel wordt gegeven door

$$y = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$



Ver van het profiel heeft de ongestoorde straming welke een snelheid  $U$  heeft evenwijdig aan de x-as. Door de aanwezigheid van het profiel treedt een verstoring op: op de snelheid  $U$  wordt een stroomsnelheid  $(u,v)$  gesuperponeerd. We nemen aan  $u, v \ll U$ . Totale snelheid  $q = (U+u, v)$ .

De functies  $u(x,y), v(x,y)$  voldoen aan de volgende relaties:

- 1°  $u_x + v_y = 0$  (de vloeistof is incompressibel)
- 2°  $v_x - u_y = 0$  (de straming is rotatievrij)

Deze relaties zijn juist de Cauchy-Riemann vergelijkingen voor  $u$  en  $v$ . Voer daarom in de complexe snelheid  $\Phi(z)$ ,

$$\Phi(z) = u(x,y) - i v(x,y), \quad z = x + iy.$$

$\Phi(z)$  is dan buiten het profiel een analytische functie van  $z$ . Voort geldt voor  $|z| \rightarrow \infty$ :  $u, v \rightarrow 0$  en daarmee  $\Phi(z) \rightarrow 0$ .

Opmerking In het probleem zoals boven gezegd heeft de randvoorwaarde betrekking op de functie  $v = \Im \Phi(z)$ . Om het een Hilbert probleem voor analytische functies te maken ligt het voor de hand om naast de functie  $\Phi(z)$  de analytische functie  $\Psi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$  te beschouwen.

Kortek als volgt:

Op grond van symmetrie-overwegingen is in te zien dat

$$v(x, y) = v(x, -y), \quad u(x, y) = -u(x, -y).$$

Op het interval  $-1 < x < 1$  zal gelden

$$\Phi^+(x) = u(x, 0) - i v(x, 0),$$

$$\Phi^-(x) = u(x, 0) - i v(x, 0) = -u(x, 0) - i v(x, 0).$$

Elimineer de onbekende functie waarden  $u(x, 0)$ , dan ontstaat het volgende Hilbert-probleem,

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = -2i v(x, 0) = -2i u f'(x), \quad -1 < x < 1.$$

De functie  $\Phi(z)$  moet voorts voldoen aan de voorwaarden:

- 1°  $\Phi(z)$  is analytisch buiten het interval  $-1 \leq z \leq 1$ ;
- 2°  $\Phi(z) \rightarrow 0$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ ;
- 3°  $\Phi(z)$  is begrensd in de omgeving van  $z=1$ ;  
 $\Phi(z) = O(|z-1|^{-\delta})$ ,  $0 \leq \delta < 1$ , in de omgeving van  $z=1$ .

7.5.85 Zie verder bl. 70 met  $\Omega_2(z)$  vervangen door  $\Phi(z)$ .

Voor alternatieve behandeling zie p. 70 links.

Op het profiel geldt de volgende randvoorwaarde. Laat  $d$  de loek zijn tussen de raaktlijn aan het profiel ter plaatse  $(x, f(x))$  en de  $x$ -as, dan is

$$\tan d = f'(x) \neq f''(x)$$

~~aan gegeven dat  $f''(x) \neq 0$~~ . Op het profiel moet in de normaalcomponent van de d. veld van de strooming nul zijn,

$$(q, n) = -(u \cos \alpha + v \sin \alpha) = 0 \implies v = (u \sin \alpha) \tan d \text{ op het profiel.}$$

Na linearisatie gaat deze voorwaarde over in,

$$v = u \tan \alpha$$

$$u \cos \alpha - v \sin \alpha = u f'(x) \text{ voor } -1 \leq x \leq 1.$$

5-3-1980

Samenvatting komen we nu tot het volgende probleem voor  $\Phi(z)$ :

- 1°  $\Phi(z)$  is analytisch in het hele complexe  $z$ -vlak met uitzondering van het interval  $(-1, +1)$ ;
  - 2°  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi(z) = 0$ ;
  - 3°  $v(x, +0) = v(x, -0) = u f'(x), -1 \leq x \leq 1$ ;
  - 4°  $\Phi(z) = O(|z|^{-\delta})$  met  $0 < \delta < 1$  in de omgeving van  $z = -1$ ;
- $\Phi(z)$  is begrensd in de omgeving van  $z = 1$ .

De voorwaarde 4° komt voort uit de fysica. De voorwaarde:  $\Phi(z)$  begrensd in de omgeving van  $z = 1$  staat bekend als de Kutta conditie.

We zullen dit probleem herleiden tot een Hilbert probleem. Voor daartoe in de functie

$$\Psi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})};$$

den heeft soortgelijke eigenschappen als  $\Phi(z)$ . Voor  $z = x \pm i0$  op de reële as, geldt dan

$$\Psi^+(x) = \overline{\Phi^-(x)}, \quad \Psi^-(x) = \overline{\Phi^+(x)}$$

De waarden  $u(x, \pm 0), v(x, \pm 0)$  zijn nu niet te drukken in  $\Phi^{\pm}(x), \Psi^{\pm}(x)$ . Ga daartoe uit van

$$\Phi^+(x) = u(x, +0) - i v(x, +0), \quad \Phi^-(x) = u(x, -0) - i v(x, -0)$$

dan volgt

$$\begin{cases} u(x, +0) = \frac{\Phi^+(x) + \overline{\Phi^-(x)}}{2} = \frac{\Phi^+(x) + \Psi^-(x)}{2}, & \begin{cases} u(x, -0) = \frac{\Phi^-(x) + \overline{\Phi^+(x)}}{2} \\ v(x, -0) = i \frac{\Phi^-(x) - \overline{\Phi^+(x)}}{2} \end{cases} \\ v(x, +0) = i \frac{\Phi^+(x) - \overline{\Phi^-(x)}}{2} = i \frac{\Phi^+(x) - \Psi^-(x)}{2}, & \begin{cases} v(x, +0) = i \frac{\Phi^-(x) - \overline{\Phi^+(x)}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Voor  $u(x, \pm 0), v(x, \pm 0)$  geldt nu,

$$\left. \begin{aligned} v(x, +0) &= u f'(x) \\ v(x, -0) &= u f'(x) \end{aligned} \right\} -1 < x < 1; \quad \left. \begin{aligned} u(x, +0) &= u(x, -0) \\ v(x, +0) &= v(x, -0) \end{aligned} \right\} \text{voor } |x| > 1.$$

Er ontstaat dan het volgende Hilbert probleem voor de functie  $\Phi(z)$  en  $\Psi(z)$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi^+(x) - \Psi^-(x)}{2} &= -i u f'(x), \\ \frac{\Phi^-(x) - \Psi^+(x)}{2} &= -i u f'(x) \end{aligned} \right\} -1 < x < 1; \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{\Phi - \Psi}{2}\right)^+ - \left(\frac{\Phi - \Psi}{2}\right)^- &= 0, \\ \left(\frac{\Phi + \Psi}{2}\right)^+ - \left(\frac{\Phi + \Psi}{2}\right)^- &= 0. \end{aligned} \right\} \text{voor } |x| > 1$$

Door optelling en aftrekking gaan de randvoorwaarden op  $-1 < x < 1$  over in:

$$\left(\frac{\Phi - \Psi}{2}\right)^+ + \left(\frac{\Phi - \Psi}{2}\right)^- = -2i u f'(x), \quad \left(\frac{\Phi + \Psi}{2}\right)^+ - \left(\frac{\Phi + \Psi}{2}\right)^- = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Voor nu in de analytische functies,

$$\Omega_1(z) = \frac{\Phi(z) + \Psi(z)}{2}, \quad \Omega_2(z) = \frac{\Phi(z) - \Psi(z)}{2}$$

Kort en duidelijk als volgt te behandelen:

Gaat uit van het op p. 69 gegeven probleem voor  $\Phi(z)$  (voorwaarden 1°-4°).

We trachten dit probleem te herleiden tot een Hilbert probleem voor  $\Phi(z)$ . Zie eerste instantie geeft dat mogelijk is. Voor  $-1 < x < 1$  geldt namelijk

$$\Phi^+(x) = u(x,0) + i v(x,0), \quad \Phi^-(x) = u(x,0) - i v(x,0).$$

Hierbij zijn de functiewaarden  $v(x, \pm 0) = u_f'(x)$  bekend, maar de functiewaarden  $u(x, \pm 0)$  zijn onbekend. Het is daarom nog niet mogelijk om een relatie tussen  $\Phi^+(x)$ ,  $\Phi^-(x)$  - nodig voor het Hilbert probleem - te vinden.

Voor en in de functie

$$\Psi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}.$$

Deze functie heeft soortgelijke eigenschappen als  $\Phi(z)$ :

1°  $\Psi(z)$  is analytisch in het hele complexe  $z$ -vlak buiten de deuk  $-1 \leq z \leq 1$ ;

2°  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Psi(z) = 0$ ;

4°  $\Psi(z) = O(|z|^{-\delta})$ ,  $0 < \delta < 1$ , bij  $z \rightarrow \infty$ ;  $\Psi(z)$  is begrensd bij  $z \rightarrow 1$ .

Op de deuk  $-1 < x < 1$  zal gelden:

$$\Psi^+(x) = \overline{\Phi^-(x)} = u(x,0) + i v(x,0); \quad \Psi^-(x) = \overline{\Phi^+(x)} = u(x,0) - i v(x,0).$$

Vorm nu het <sup>de</sup> <sup>voor</sup> ~~aan~~ <sup>aan</sup> ~~aan~~

$$\Omega(z) = \Phi(z) + \Psi(z).$$

Voor  $-1 < x < 1$  zal dan gelden:

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = [u(x,0) + i v(x,0) + u(x,0) + i v(x,0)] - [u(x,0) - i v(x,0) + u(x,0) - i v(x,0)] = 2i v(x,0) + 2i v(x,0) = 0.$$

Op de gebruikelijke manier is dan weer of te leiden

$$\Omega(z) = 0, \quad \Phi(z) = -\Psi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})},$$

in het hele complexe  $z$ -vlak.

Voor  $-1 < x < 1$  zal nu gelden

$$\Phi^+(x) = u(x,0) + i v(x,0), \quad \Phi^-(x) = -\overline{\Phi^+(x)} = -u(x,0) - i v(x,0).$$

Elimineer hieruit  $u(x,0)$ , dan ontstaat het Hilbert probleem

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = 2i v(x,0) = -2i u_f'(x).$$

Wie verder bl. 70 reeds met  $\Omega_2(z)$  vervaagen door  $\Phi(z)$ .

N.B. de relatie  $\Phi(z) = -\overline{\Psi(z)} = -\overline{\Phi(\bar{z})}$  was,  $\Omega(z) = 0$  was te verwachten <sup>omdat</sup> ~~omdat~~ van symmetrische overgangen; zie p. 69, link.

$u(x,y) = u(x,-y)$ ,  $v(x,y) = v(x,-y)$  of grond van symmetrische overgangen; zie p. 69, link.

Het van Bernoulli'se

$$p = \frac{1}{2} p [(u(x,y))^2 + v(x,y)^2] = \frac{1}{2} p u^2 = \text{const}$$



$\Omega_1(z), \Omega_2(z)$  zijn dan oplossingen van het volgende Hilbert probleem.

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x) = 0, \text{ voor } -1 < x < 1, |x| > 1 \\ \Omega_2^+(x) - \Omega_2^-(x) = 0, \text{ voor } |x| > 1, \\ \Omega_2^+(x) + \Omega_2^-(x) = -2i U f'(x), \text{ voor } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Deze Hilbert problemen zijn als volgt op te lossen.

De functie  $\Omega_1(z)$  zal overal analytisch zijn behalve in de punten  $z = \pm 1$ . Vanwege de voorwaarde 4° kan  $\Omega_1(z)$  geen pool hebben in  $z = \pm 1$ ; de functie  $\Omega_2(z)$  heeft daar een op deffenen singulariteit waarna  $\Omega_1(z)$  een gehele functie is. Vanwege 3° is dan:  $\Omega_1(z) = 0$ .

De functie  $\Omega_2(z)$  is overal analytisch met uitzondering van de boog  $-1 \leq x \leq 1$ , waar geldt

$$\Omega_2^+(x) + \Omega_2^-(x) = -2i U f'(x), \quad -1 < x < 1.$$

We beschouwen weer eerst het eenvoudige Hilbert probleem.

$$\Omega_2^+(x) + \Omega_2^-(x) = 0 \text{ of } \Omega_2^+(x) = -\Omega_2^-(x) \text{ voor } -1 < x < 1.$$

Neem links en rechts de logaritme

$$[\log \Omega_2(x)]^+ - [\log \Omega_2(x)]^- = \log(-1) = \pi i, \quad -1 < x < 1.$$

Een oplossing van dit probleem wordt gegeven door

$$\log \Omega_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\pi i}{t-z} dt = \frac{1}{2} \log \frac{z-1}{z+1},$$

$$\Omega_2(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

De fundamentele oplossing wordt nu gegeven door

$$X(z) = (z-1)^{m_1} (z+1)^{m_2} (z-1)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}}$$

waarbij de gehele getallen  $m_1, m_2$  worden gekozen dat  $X(z)$  voldoet aan de voorwaarde 3°.

In dit geval leidt dat tot  $m_1 = 0, m_2 = 0$  waarna

$$X(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}}$$

N.B. We spreken hierbij af dat  $-\pi < \arg(z \pm 1) < \pi$ , dan is:

$$X^{\pm}(x) = e^{\pm \pi i/2} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad -1 < x < 1.$$

De oplossing van het eenvoudige Hilbert probleem wordt nu gegeven door

$$\Omega_2(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{-2i U f'(x) dx}{X'(x)(x-z)} + X(z) P(z).$$

Vanwege 3° moet hier het polynoom  $P(z)$  gelijk nul zijn waarna

$$\Omega_2(z) = \frac{(z-1)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{U f'(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} dx}{x-z}.$$

Met  $\Omega_1(z) = 0$  volgt dan voor  $\Phi(z)$ .

$$\Phi(z) = \Omega_1(z) + \Omega_2(z) = -\frac{(z-1)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{U f'(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} dx}{x-z}.$$

Met behulp van de formules van Plemelj is hieruit  $\Phi^{\pm}(x)$  en daarmee  $u(x, z)$  op het gelineariseerde profiel  $-1 < x < 1$  te bepalen. De drukverdeling over het profiel laat zich vinden met de wet van Bernoulli, die in gelineariseerde vorm aldus luidt

$$p - p_0 = -\rho U u$$

waarin  $p_0$  de druk in de ongestoorde stroming en  $\rho$  de dichtheid van de vloeistof voorstelt.

Voor verdere toepassingen van de theorie van het Hilbert probleem zie:

J.B. Alblas, J.A. Geurst en J.A. Scharenburg. "Mathematische problemen uit de praktijk: singuliere integraalvergelijkingen"  
Colloquium Math. Centrum, 1957.

C.W. Veltkamp, *The drag on a vibrating aerofoil in incompressible flow, I, II.*  
Proc. KNAW Amsterdam  
~~Indag. Math.~~ Abt., (1958), 278-287, 288-297.

Alblas, Geurst en Scharenburg geven zowel theorie van Cauchy integraal en Hilbert probleem als ook voorbeelden van Hilbert problemen voortkomende uit de mathematische fysica: stroming om een profiel zonder of met cavitatie, problemen uit de elasticiteitstheorie waarin de bi-potentialvergelijking een rol speelt.

Overzichtsartikel over singuliere integraalvergelijkingen:

E. Meister, Ein Überblick über analytische Methoden zur Lösung singularer Integralgleichungen, ZAMM 57, T23-T35 (1977), 58 referenties.

1981 Gevul van hoog/centrum geramplify behandeld.

IA. = over I, centrum, IB = over I, hoog;

II = over II, centrum / hoog samen.

De opwaartse kracht of lift  $L$  op het profiel laat zich a.v. berekenen.

$$L = \int_{-1}^{+1} \{p(x, -0) - p(x, +0)\} dx = -\rho U \int_{-1}^{+1} \{u(x, -0) - u(x, +0)\} dx =$$

$$= -\rho U \int_{-1}^{+1} \{\Phi'(x) - \bar{\Phi}'(x)\} dx = -\rho U \int_C \Phi(z) dz = 2\pi i \rho U \operatorname{Res}_{z=\infty} \Phi(z)$$

Hierbij is  $C$  een willekeurige contour die het interval  $-1 \leq x \leq 1$  omsluit. Het residu van  $\Phi(z)$  in  $z = \infty$  laat zich berekenen door ontwikkeling van  $\Phi(z)$  in de omgeving van  $z = \infty$ .

$$\Phi(z)_{z \rightarrow \infty} = + \frac{1}{\pi i} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} U f'(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} U f'(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Het residu van  $\Phi(z)$  in  $z = \infty$  is nu juist het tegengestelde van de coëfficiënt van  $\frac{1}{z}$  in deze ontwikkeling. Er volgt dan,

$$L = -2\rho U^2 \int_{-1}^{+1} f'(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Opgaven 1. Bereken op analoge wijze het moment t.o.v. de oorsprong.

$$M = \int_{-1}^{+1} \{p(x, -0) - p(x, +0)\} x dx = 2\rho U^2 \int_{-1}^{+1} f'(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{3}{2}} dx.$$

2. Bepaal  $\Phi(z)$ ,  $L$  en  $M$  expliciet in geval het profiel een vlakke plaat is gegeven door

$$y = -\alpha_0 x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

13-16-1977 / 13-3-1980

Singuliere integraalvergelijkingen met een Cauchy kern. I

De algemene gedaante van een singuliere integraalvergelijking met Cauchy kern luidt

$$a(t_0) \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k(t_0, t) \varphi(t) dt}{t - t_0} = f(t_0), \quad t_0 \in L. \quad (2)$$

$$a(t_0), k(t_0, t) \in \mathbb{H}$$

Hierbij is  $L$  een contour, de functie  $f$  is gegeven en Hölder-continu op  $L$ , de functie  $\varphi$  moet bepaald worden. De integraal over  $L$  moet opgevat worden als een Cauchy hoofwaardes.

Voor de algemene theorie van deze singuliere integraalvergelijkingen, zie Muskhelishvili, loc. cit., § 12, b. We zullen hier slechts een paar bijzondere gevallen van (2) beschouwen.

I. We beschouwen eerst de vergelijking,

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = f(t_0), \quad t_0 \in L.$$

Muskhelishvili, § 27 geeft alfa-  
ditte methode en deze vgl. op te lossen

Om deze vergelijking op te lossen voeren we in de functie,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - z},$$

dan is  $\Phi(z)$  analytisch in het hele complexe  $z$ -vlak met uitzondering van  $L$ . Volgens de

formules van Plemelj is  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

Volgens de formules van Plemelj is nu,

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = f(t_0), \quad t_0 \in L.$$

We hebben daarmee een Hilbert probleem verkregen voor  $\Phi(z)$ . De oplossing verloopt op de bekende manier. De fundamentele oplossing van het homogene Hilbert probleem luidt,

$$X(z) = \begin{cases} +1, & z \in S^+ \\ -1, & z \in S^- \end{cases}$$

Stel daarom

$$\Psi(z) = X(z) \Phi(z) = \begin{cases} \Phi(z), & z \in S^+ \\ -\Phi(z), & z \in S^- \end{cases}$$

156.

71<sup>A</sup>

Journal of the American Mathematical Society, 1971, 1973, 2nd ed in 1974 re/over, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1982, 1983, 1984

See also:

L.C. Baird, S. Sankaranarayanan and P.F. Zweifel, The Poincaré-Bertrand formula: a derivation and a generalization, SIAM J. Math. Anal. 8, 580-591 (1977).

to give more in 1964

dan is  $\Psi(z)$  oplossing van het Hilbert probleem

$$\Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0) = f(t_0), t_0 \in L.$$

Vanwege  $\Psi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ , leidt de oplossing van dit probleem

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Met de formules van Plemelj volgt dan

$$\begin{cases} \Phi^+(t_0) = \Psi^+(t_0) = \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt, \\ \Phi^-(t_0) = -\Psi^-(t_0) = -\frac{1}{2} f(t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt. \end{cases}$$

Voorn het verschil dan is

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt$$

de oplossing van de integraalvergelijking.

<sup>18-10-1975</sup> Opmerking Substitutie van deze oplossing in de integraalvergelijking roept een identiteit op.

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} \int_L \frac{f(t)}{t-t} dt = -\pi^2 f(t_0). \quad (I)$$

Merkt op dat in dit soort dubbele Cauchy hoofdwaaarde integralen de integratievolgordes <sup>zeker naar</sup> niet mag worden verwisseld, i.e. dat

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} \int_L \frac{f(t)}{t-t} dt \neq \int_L \frac{f(t)}{t-t} dt \int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t-t)}$$

Ommer de eerste integraal is  $-\pi^2 f(t_0)$ , terwijl de tweede integraal nul is wegens

$$\int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t-t)} = \frac{1}{t_0-t_0} \left[ \int_L \frac{dt}{t-t_0} - \int_L \frac{dt}{t-t} \right] = \frac{1}{t_0-t_0} [\pi i - \pi i] = 0.$$

Poincaré 1910, Bertrand 1921, 1923

De relatie (I) is een bijzonder geval van de transformatieformule van Poincaré-Bertrand

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t} dt = -\pi^2 \varphi(t_0) + \int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t-t)} \int_L \varphi(t) dt$$

Voor het bewijs van deze formule, zie N.T. Muskhelishvili, loc. cit. § 23.

$L$  is lang of een touw  
 $t_0$  geen eindpunt

Opmerking bij  $L$  de eenheidscirkel, toen dan aan dat de integraalvergelijkingen zijn oplossing

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), \quad \varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt$$

Door de substitutie  $t = e^{i\theta}$ ,  $t_0 = e^{i\theta_0}$  overgaan in de inversieformule van Hilbert.

Zie Muskhelishvili, loc. cit., § 28.

27-2-1968 / 7-3-1975 / 11-3-1981

II. Besluit vervolgens de singuliere integraalvergelijkingen

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = 0, t_0 \in L \text{ (homogeen integraalvgl.)}$$

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), t_0 \in L \text{ (inhomogeen integraalvgl.)}$$

De functies  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $f(t)$  zullen <sup>Hölder</sup> continu zijn op  $L$ .

Voor de oplossing van deze integraalvergelijkingen voeren we in de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

Waar  $\Phi(z)$  analytisch in het hele complexe  $z$ -vlak met uitzondering van  $L$ . Verder is

$$\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right), |z| \rightarrow \infty$$

Volgen de formule van Plemelj is nu

$$\begin{cases} \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \psi(t_0), \\ \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(t)}{t-t_0} dt. \end{cases} \quad t_0 \in L$$

Substitueer dit in de integraalvergelijkingen dan volgt

$$\begin{cases} \{a(t_0) + b(t_0)\} \Phi^+(t_0) - \{a(t_0) - b(t_0)\} \Phi^-(t_0) = f(t_0) \text{ (homogeen Hilbert probleem)} \\ \{a(t_0) + b(t_0)\} \Phi^+(t_0) - \{a(t_0) - b(t_0)\} \Phi^-(t_0) = g(t_0) \text{ (inhomogeen Hilbert probleem)} \end{cases}$$

We zullen nu onderstellen:

$$a(t) \pm b(t) \neq 0, t \in L$$

dan heeft het quotiënt

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, t \in L$$

betekenis en  $G(t) \neq 0$  op  $L$ .

De Hilbert problemen gaan dan over in de standaardvorm.

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), t \in L \\ \Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + \frac{g(t)}{a(t) + b(t)}, t \in L. \end{cases}$$

De fundamentele oplossing van het homogeen Hilbert probleem wordt gegeven door  
Zie §1.5

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Omega(z)}, & z \in S^+ \\ e^{\Omega(z)}, & z \in S^- \end{cases} \quad \Omega \in S^+ \quad G_0(t) = (t-a_0)^{\alpha_0} G(t), \alpha_0 \in S^+$$

met

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G(t)}{t-z} dt, \quad \kappa = \text{Ind } G(t) = \text{Ind } \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$$

We noemen  $\kappa$  de index van de integraalvergelijking.

De algemene oplossing van het homogeen en inhomogeen Hilbert probleem wordt nu

$$\begin{cases} \Phi(z) = X(z) P(z), \\ \Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{[a(t) + b(t)] X^+(t) (t-z)} dt + X(z) P(z) \end{cases}$$

waarin  $P(z)$  een willekeurig polynoom voorstelt. graad  $\leq \kappa$

<sup>1.5-3-1932</sup> We moeten nu nog voldoen aan de voorwaarde  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .  
dan geldt  $\kappa \geq 0, \kappa = 0, \kappa < 0$

Onderscheid daartoe twee gevallen:

1<sup>o</sup>  $\kappa \geq 0$ . Laat  $P(z)$  een polynoom van de graad  $k$  zijn, dan heeft  $X(z)P(z)$  de graad  $k - \kappa$  op  $z = \infty$ . We moeten nu eisen:  $k - \kappa \leq -1, k \leq \kappa - 1$ .  $P(z)$  is dus een willekeurig polynoom van een graad  $\leq \kappa - 1$ ; we schrijven  $P(z) = P_{\kappa-1}(z)$ .

Indien  $\kappa = 0$  zou  $P(z)$  van de graad  $(-1)$  moeten zijn d.i.  $P(z) = 0, P_1(z) = 0$

De kern

$$\frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{[a(t) + b(t)] X^+(t) (t-z)} dt$$

is van de graad  $-\kappa - 1$  in  $z = \infty$  en dus zeker  $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

De algemene oplossing leidt dus nu

$$\Phi(z) = X(z) P_{\kappa-1}(z)$$

Beter:  $G(z) = \frac{X(z)}{z^N} H(z)$   
 met  $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$ ,  $c_k = \int \frac{t^k f(t)}{[a(t), b(t)] z^N dt}$

graad van  $H(z) \leq -1 + N$  daarom  $c_k = 0$  voor  $k=0, 1, \dots, -N-1$

$$\left. \begin{array}{l} X(z) \text{ van graad } -N \\ X(z)H(z) \text{ van graad } \leq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow H(z) \text{ van graad } \leq N-1$$

daarom  $c_k = 0$  voor  $k=0, 1, \dots, -N-1$

Opmerking Wezen  $X^T(t_0) = G(t_0) X^{-1}(t_0) = \frac{a(t_0) - b(t_0)}{a(t_0) + b(t_0)} X^{-1}(t_0)$  laat de eerste twee van de oplossing zien over een vinding te zijn

$$\frac{a(t_0)}{a(t_0) - b(t_0)} f(t_0)$$

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{L[a(t)+b(t)] X^*(t)(t-z)} dt + X(z) P_{x-1}(z)$$

waarin  $P_{x-1}(z)$  een willekeurig polynoom is van een graad  $\leq x-1$ ,  $P_{x-1}(z) \equiv 0$  indien  $x=0$ .

2°  $x < 0$ . Bij de graad van  $P(z)$  weer  $k^2$ , dan is de graad van  $X(z)P(z)$  in  $z=0$  gelijk aan  $-x+k > 0$ . De oplossing  $X(z)P(z)$  is dus onverenigbaar met de eis  $\Phi(z) = O(\frac{1}{|z|})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .

We moeten daarom  $P(z) \equiv 0$  stellen: het homogene Hilbert probleem heeft alleen de triviale oplossing  $\Phi(z) \equiv 0$ .

ook in de oplossing van het inhomogene Hilbert probleem moeten we  $P(z) \equiv 0$  stellen.

Wij onderzoeken vervolgens de term:

$$H(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{L[a(t)+b(t)] X^*(t)(t-z)} dt = - \frac{X(z)}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{t^k f(t)}{L[a(t)+b(t)] X^*(t)} dt \frac{1}{z^{k+1}}$$

voor  $|z|$  voldoende groot.

$X(z)$  is van de graad  $-x > 0$  in  $z=0$ ; de  $t^k$  term van de reeks vermenigvuldigt met  $X(z)$  is van de graad  $-x-k$  in  $z=0$ . Als nu alle termen met  $-x-k \geq 0$  i.e. de termen  $k=0, 1, 2, \dots, -x-1$  wegvallen, dan is inderdaad  $H(z) = O(\frac{1}{|z|})$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ . De oplossing van het inhomogene Hilbert probleem zal dus bestaan onder de voorwaarde

$$\int \frac{t^k f(t)}{L[a(t)+b(t)] X^*(t)} dt = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, -x-1$$

en gegeven zijn door

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{L[a(t)+b(t)] X^*(t)(t-z)} dt$$

Nadat de oplossing  $\Phi(z)$  van het Hilbert probleem bepaald is volgt de oplossing  $\psi(t)$  van de inhomogene en inhomogene integraalvergelijking met de formules van Plemelj:

$$\psi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0),$$

waarbij  $\Phi^{\pm}(t_0)$  eveneens met de formules van Plemelj volgt uit  $\Phi(z)$ .

Voor verdere details geven we alleen het eindresultaat:

Conclusie 1° Bij  $x \geq 0$  dan besit de homogene integraalvergelijking de algemene oplossing

$$\psi(t) = [X^+(t) - X^-(t)] P_{x-1}(t),$$

waarin  $P_{x-1}(t)$  een willekeurig polynoom van de graad  $\leq x-1$  is.

2° Bij  $x < 0$  dan besit de homogene integraalvergelijking alleen de triviale oplossing  $\psi(t) = 0$ .

3° Bij  $x \geq 0$  dan besit de inhomogene integraalvergelijking voor elk reëelherlid  $f$  een oplossing gegeven door

$$\psi(t_0) = \frac{X^+(t_0) + X^-(t_0)}{2L[a(t_0)+b(t_0)] X^*(t_0)} f(t_0) + \frac{X^+(t_0) - X^-(t_0)}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{L[a(t)+b(t)] X^*(t)(t-t_0)} dt + [X^+(t_0) - X^-(t_0)] P_{x-1}(t_0)$$

waarin  $P_{x-1}(t_0)$  een willekeurig polynoom van een graad  $\leq x-1$ ,  $P_{x-1}(t_0) = 0$  als  $x=0$ , is.

4° Bij  $x < 0$  dan besit de inhomogene integraalvergelijking alleen een oplossing indien het reëelherlid  $f$  voldoet aan de voorwaarden

$$\int \frac{t^k f(t)}{L[a(t)+b(t)] X^*(t)} dt = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, -x-1.$$



Vergelykbare Fredholm vergelijking:

$$\varphi(t_0) - \int_{L_0} K(t_0, t) \varphi(t) dt = \begin{cases} 0 \\ f(t_0) \end{cases}, t_0 \in L \text{ ofwel } \varphi - T\varphi = \begin{cases} 0 \\ f \end{cases}$$

Fredholm alternatief (Lin. Methode II)

of 1°. Homogene vgl. alleen triviale op.  $\varphi = 0$

Zie homogene vgl. heeft voor elk reëel of c. eenduidige op.

of 2°. Homogene vgl. niet triviale op.  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

dan heeft geadjungeerde homogene vgl. niet triviale op.  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$

Zie homogene vgl. heeft alleen op. als  $(f, \psi_j) = \int f(t) \psi_j(t) dt = 0, j=1, 2, \dots, n$

oplossing niet eenduidig

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim (I - T)^{-1}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim (I - T)^{-1}(0) = n \\ \dim (I - T^*)^{-1}(0) = 0 \end{cases}$$

Zie Ranktheorie, loc. cit. pag voor een functionaal analytisch bespreking over het verschil tussen singuliere integraal en Fredholm integraal.

De oplossing wordt gegeven door

$$\varphi(t_0) = \frac{X^+(t_0) + X^-(t_0)}{2(a(t_0) + b(t_0))X^+(t_0)} f(t_0) + \frac{X^+(t_0) - X^-(t_0)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{[a(t) + b(t)]X^+(t)(t-t_0)} dt$$

Opmerking Vergelijk dan een basis over de oplosbaarheid en de oplossingen van (in)homogene singuliere integraalvergelijkingen met het overeenkomstig Fredholm alternatief voor Fredholm integraalvergelijkingen (zie College Part. Diff. vgl. I). Merk op dat alleen in het geval  $\kappa=0$  de hier gegeven conclusie en het Fredholm alternatief parallel lopen. Singuliere integraalvergelijkingen met  $\kappa=0$  heten daarom wel quasi-Fredholm vergelijkingen.

6-5-1977

Voorbeeld Met behulp van de hiervoor aangegeven methode zullen we de volgende integraalvergelijking oplossen.

$$a\varphi(t_0) + \frac{c}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), \quad t_0 \in L$$

waarbij  $a$  en  $b$  reële constanten zijn,  $a \neq b$  niet beide nul.

Na invoering van de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

gaat de integraalvergelijking over in het Hilbert probleem;

$$\begin{cases} \Phi(z) \text{ is overal analytisch, } L \text{ uitgesloten; } \Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ voor } |z| \rightarrow \infty \\ (a+ib)\Phi^+(t) - (a-ib)\Phi^-(t) = f(t), \quad t \in L. \end{cases}$$

De fundamentele oplossing van het homogene Hilbert probleem luidt in dit geval,

$$\chi(z) = \begin{cases} \frac{a-ib}{a+ib}, & z \in S^+ \\ 1, & z \in S^- \end{cases}$$

Stel nu  $\Phi(z) = \chi(z)\Psi(z)$  dan volgt voor  $\Psi(z)$  het Hilbert probleem,

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{f(t)}{a-ib}, \quad t \in L$$

met als algemene oplossing

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a-ib} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + P(z).$$

Naarwege de voorwaarde  $\Psi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$  moet het polynoom  $P(z)$  hier nul zijn.

Voor  $\Phi(z)$  vinden we dan,

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{a+ib} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt, & z \in S^+ \\ \frac{1}{a-ib} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt, & z \in S^- \end{cases}$$

Met de formules van Plemelj volgens  $\Phi^+(t_0), \Phi^-(t_0)$  waarna de oplossing  $\varphi(t_0)$  gegeven wordt door

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \frac{a}{a^2+b^2} f(t_0) - \frac{1}{\pi} \frac{c}{a+ib} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt.$$

10-1-1976  
B. Geerd van Booy

### Singuliere integraalvergelijkingen met Cauchy kern II

We bespreken nu de singuliere integraalvergelijking met Cauchy kern

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k(t_0, t)\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), \quad t_0 \in L \quad (I)$$

in het geval dat  $L$  een boog is. De algemene theorie (zie Muskhelishvili, loc. cit., hoofdstuk 14)

$a(t_0), k(t_0, t), f(t_0)$  gegeven en  $k$  holter continue op  $L$ ;  $f$  en  $a(t_0)$  moet besleed worden; integraal in Cauchy hoofdvorm

N.B. We zoeken een oplossing  $\varphi(t)$  die een integreerbare singulariteit mag hebben in de punten  $t = \pm 1$  i.e.

$$\varphi(t) = O(|t-1|^{-\delta_1}) \text{ bij } t=1, \quad \varphi(t) = O(|1+t|^{-\delta_2}) \text{ bij } t=-1; \quad 0 \leq \delta_{1,2} < 1.$$

Van geleet voor de Cauchy integraal  $\Phi(z)$ ,

$$\Phi(z) = O(|z-1|^{-\delta_1}) \text{ bij } z=1; \quad \Phi(z) = O(|z+1|^{-\delta_2}) \text{ bij } z=-1.$$

F.V. Chumakov, General theory of integral equations with power-series kernels,

Diff. Equations 2, 279-286 (1966)

onderzocht v.v. oplosbaarheid van <sup>Complex</sup>gegeneraliseerde Abel integraalvergl.

$$M\varphi \equiv A(x) \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\mu} dt + B(x) \int_x^\beta \frac{\varphi(t)}{(t-x)^\mu} dt + \int_a^\beta m(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad \alpha < x < \beta$$

met  $0 < \mu < 1$ ,  $A(x)$ ,  $B(x)$  en  $m(x,t)$ ,  $f(x)$  gegeven,  $\varphi(t)$  te bepalen

Vergelijking wordt herleid tot singuliere integraalvergelijking met Cauchy kern.

Opgave Bepaal de oplossing van de integraalvergelijkingen

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{|t-t_0|^\mu} dt = f(t_0), \quad -1 < t_0 < 1, \quad 0 < \mu < 1$$

(integraalvergelijking van Abel met constante grenzen)

$$\int_{-1}^{+1} \log|t-t_0| \varphi(t) dt = f(t_0), \quad -1 < t_0 < 1.$$

Literatuur: Carrier, Krook and Pearson, Functions of a complex variable, pp. 426-432.

loopt groter dan parallel aan die voor het geval dat  $L$  een entour is. We zullen steeds een paar bijzondere gevallen beschouwen van (I).

I, We bespreken eerst de integraalvergelijking

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), \quad -1 < t_0 < 1.$$

Voor in de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

dan is  $\Phi(z)$  analytisch overal behalve op  $-1 \leq z \leq 1$  en  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

Volgens de formules van Plemelj is nu

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0),$$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0)$$

}  $t_0 \in (-1, 1)$

We hebben daarmee een Hilbert probleem verkregen. De oplossing verloopt op de bekende manier. We onderzoeken eerst het bijbehorende homogene probleem, de bepaling van de functie  $\Phi(z)$  met het voorwaarde dat we a.v. schrijven.

$$[\log \Phi(t_0)]^+ - [\log \Phi(t_0)]^- = \log(-1) = \pi i, \quad t_0 \in (-1, 1),$$

waaruit volgt

$$\log \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\pi i}{t-z} dt = \frac{1}{2} \log \frac{z-1}{z+1},$$

$$\Phi(z) = (z-1)^{-\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}}$$

De fundamentele oplossing  $X(z)$  volgt hieruit door vermenigvuldiging met  $\frac{1}{z-1}$ ,

$$X(z) = (z-1)^{-\frac{3}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}}$$

We werken hierbij af, waar  $|z+1| < \pi$  zodat

$$X^+(t_0) = e^{-\pi i k} (1-t_0)^{-\frac{3}{2}} (1+t_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad X^-(t_0) = e^{\pi i k} (1-t_0)^{-\frac{3}{2}} (1+t_0)^{-\frac{1}{2}}$$

Stel nu  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z)$  dan volgt voor  $\Psi(z)$  het Hilbert probleem

$$\Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0) = i f(t_0) (1-t_0)^{\frac{3}{2}} (1+t_0)^{\frac{1}{2}},$$

met als oplossing

$$\Psi(z) = \frac{E_1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) (1-t)^{\frac{3}{2}} dt}{t-z} + P(z)$$

waarin  $P(z)$  een willekeurig polynoom voorstelt.

Voor  $\Phi(z)$  volgt dan

$$\Phi(z) = X(z) \Psi(z) = \frac{(z-1)^{-\frac{3}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) (1-t)^{\frac{3}{2}} dt}{t-z} + (z-1)^{-\frac{3}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}} P(z).$$

We moeten nog voldoen aan de voorwaarde:  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ . De eerste term van de oplossing is van de graad  $-2$  in  $z \rightarrow \infty$ , de tweede term is van de graad  $k-1$  (als  $k$  de graad van  $P(z)$  is). We moeten daarom eisen  $k=0$ ,  $P(z) = \text{const.} = C$ .

Bereken nu vervolgens  $\Phi^{\pm}(t_0)$  met de formules van Plemelj, dan volgt de oplossing  $\varphi(t_0)$ .

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \frac{(1-t_0^2)^{-\frac{1}{2}}}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) (1-t)^{\frac{3}{2}} dt}{t-t_0} + C(1-t_0)^{-\frac{1}{2}}$$

waarin  $C$  een willekeurige constante is.

Opmerking Het term  $C(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$  is oplossing van de homogene integraalvergelijking

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = 0, \quad -1 < t_0 < 1.$$

De en voorbeeld op p. 57 is aangekomen dat

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t-t_0} dt = 0, \quad -1 < t_0 < 1.$$

We zoeken weer een oplossing die  $\psi(t)$ , die in de uitbreiden  $t = \pm 1$  Longsten en integreerbare singulariteit heeft i.e.

$$\psi(t) = O(|t-1|^{-\delta_1}) \text{ bij } t=1, \quad \psi(t) = O(|t+1|^{-\delta_2}) \text{ bij } t=-1, \quad 0 \leq \delta_{1,2} < 1.$$

Dan geldt voor de Cauchy integraal  $\Phi(z)$ ,

$$\Phi(z) = O(|z-1|^{-\delta_1}) \text{ bij } z=1, \quad \Phi(z) = O(|z+1|^{-\delta_2}) \text{ bij } z=-1.$$

Toewijzing Behalve oplossingen met een integreerbare singulariteit in de uitbreiden  $t = \pm 1$  kunnen ook zoeken naar een oplossing  $\psi(t)$  die voldoet aan

$$\psi(1) = \psi(-1) = 0.$$

In dat geval geldt voor de Cauchy integraal  $\Phi(z)$ ,

$$\Phi(z) \text{ is begrensd bij } z=+1 \text{ en bij } z=-1.$$

De fundamentele oplossing  $\chi(z)$  van het homogeen Hilbert probleem moet dan bij het recente "randgedrag" worden aangepast. De index  $\kappa$  en ook de uitbreidings oplossing van de integraalvergelijking zal daardoor veranderen.

De eindenelen over de oplosbaarheid van de integraalvergelijking blijft woordelijk dezelfde, uitgedrukt in termen van de recente index  $\kappa$ .

De analoge wijze kunnen beschouwen "kruisingswalle" waarbij de oplossing  $\psi(t)$  in het ene uitbreiden nul is en in het andere uitbreiden een integreerbare singulariteit heeft.

1.2.3.4

II. We zullen vervolgens kort bespreken de algemene singuliere integraalvergelijkingen

$$a(t_0) \varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_{t=t_0}^+ \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \begin{cases} 0, & t_0 \in L \text{ (homogeen)} \\ f(t_0), & t_0 \notin L \text{ (inhomogeen)} \end{cases}$$

De functies  $a$ ,  $b$  en  $f$  zullen Hölder continu zijn op  $\sigma$ ,  $-1 \leq t_0 \leq 1$ .

Evenals in het voorafgaande geval van een contour doet <sup>invoering</sup> invoering van de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

de integraalvergelijkingen overgaan in het (in)homogeen Hilbert probleem.

$$\{a(t_0) + b(t_0)\} \Phi^+(t_0) - \{a(t_0) - b(t_0)\} \Phi^-(t_0) = \begin{cases} 0 \\ f(t_0) \end{cases}, \quad -1 < t_0 < 1.$$

We onderstellen weer

$$a(t_0) \pm b(t_0) \neq 0, \quad -1 \leq t_0 \leq 1,$$

dan laat zich invoeren het quotiënt

$$g(t_0) = \frac{a(t_0) - b(t_0)}{a(t_0) + b(t_0)} \neq 0$$

waarna de Hilbert problemen overgaan in de standaardvorm,

$$\Phi^+(t) = g(t) \Phi^-(t) + \begin{cases} 0 \\ \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \end{cases}, \quad -1 < t < 1.$$

We bepalen dan eerst de fundamentele oplossing  $X(z)$  van het homogene probleem.

$$X(z) = (z+1)^{n_1} (z-1)^{n_2} \circledast \Omega(z)$$

met

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\log g(t)}{t-z} dt,$$

$n_1, n_2$  geheel zo gekozen dat  $X(z) = O(|z+1|^{-\delta_1})$ ,  $X(z) = O(|z-1|^{-\delta_2})$ ,  $0 \leq \delta_{1,2} < 1$ , in de omgeving van  $z = -1, z = 1$ . De graad van  $X(z)$  in  $z = \infty$  is dan  $n_1 + n_2 = -\kappa$ , waarbij we  $\kappa$  de index van de integraalvergelijking noemen.

De algemene oplossing van het homogeen en inhomogeen Hilbert probleem wordt dan gegeven door,

$$\begin{cases} \Phi(z) = X(z) P(z), \\ \Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(t)}{[a(t)+b(t)] X'(t)} dt + X(z) P(z), \end{cases}$$

waarin  $P(z)$  een willekeurig polynoom voorstelt.

Andere oplossing moet dan nog de eis worden opgelegd:  $\Phi(z) = O(|z|^{-\alpha})$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

Dit beperkt de keuze van het polynoom  $P(z)$  en daarmee de algemene oplossing op de zelfde wijze als afgeleid voor het geval van een contour (zie p. 73, 74). Ook de conclusie van p. 74 blijft woordelijk gelijk.

Voorbeeld. Beschouw de integraalvergelijking,

breuk delijver  $a = \cos t, b = \sin t, 0 \leq t < \pi$

$$a \varphi(t_0) + \frac{b}{\pi} \int_{t=t_0}^+ \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), \quad -1 < t_0 < 1.$$

$a, b$  zullen reële constanten zijn, zo genormeerd dat  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $b \neq 0$ .

Na invoering van de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

gaat de integraalvergelijking over in het Hilbert probleem.

Gedrag bij uiteinden:  $\varphi(1) = 0$ ;  $\varphi(t) = O((1+t)^{-\delta})$  bij  $t = -1$ ,  $0 < \delta < 1$ .

Daar volgt voor  $\Phi(z)$ :

$\Phi(z)$  begrensd bij  $z=1$ ;  $\Phi(z) = O((z+1)^{-\delta})$  bij  $z=-1$ ,

d.i. zelfde voorwaarden als in voorbeeld 1.6.

Oplossing Hilbert probleem volgens 1.6:

$$\Phi(z) = (z-1)^{-1+\gamma} (z+1)^{-1+\gamma} \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\{t(1-t)^{-1+\gamma} (1+t)^{-1+\gamma}\}^{\gamma}}{t-z} dt + P(z) \right].$$

Wegens  $\Phi(z) = O(1/z)$  voor  $z \rightarrow \infty$ , moet zijn  $P(z) = 0$ .

Oplossing in reële vergelijking

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \cos(\pi\gamma) \{t_0\} = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (1-t_0)^{-1+\gamma} (1+t_0)^{-1+\gamma} \int_{-1}^{+1} \frac{\{t(1-t)^{-1+\gamma} (1+t)^{-1+\gamma}\}^{\gamma}}{t-t_0} dt.$$

zie ook 1971, 1972, 1973, 1974 voorjaar, 1974 najaar, zie ook 1975, zie ook 1976, 1977, 1978, 1979, zie ook 1981,  
zie ook 1982, 1983, 1984, 1985

Aantekening maart 1983 Een vroege voorbeeld van een singuliere integraalvergelijking is te halen uit

G.M.L. Gladwell, On some singular integral equations appearing in contact problem for the elastic cylinder, J. of Elasticity 28, 97-109 (1982).

$\Phi(z)$  is overal analytisch, de boog  $-1 \leq z \leq 1$  uitgesloten;  $\Phi(z) = O(\frac{1}{|z|})$  voor  $|z| \rightarrow \infty$   
 $(a+ib)\Phi^+(t) - (a-ib)\Phi^-(t) = f(t), -1 \leq t \leq 1$

Vanwege  $a^2 + b^2 = 1, b \geq 0$  kunnen we nu schrijven.

$$a+ib = e^{i\gamma}, a-ib = e^{-i\gamma}, 0 < \gamma < \pi,$$

waarna we terecht komen op het Hilbert probleem

$$e^{i\gamma}\Phi^+(t) - e^{-i\gamma}\Phi^-(t) = f(t), -1 \leq t \leq 1$$

dat reeds eerder als voorbeeld (p. 64) is behandeld. We citeren de algemene oplossing,

$$\Phi(z) = (z+1)^{-1/2} (z-1)^{1/2} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t) (1+t)^{1/2} (1-t)^{1/2}}{t-z} dt + P(z) \right]$$

waarin  $P(z)$  een willekeurig polynoom voorstelt.

Vanwege de voorwaarde:  $\Phi(z) = O(\frac{1}{|z|})$  voor  $|z| \rightarrow \infty$  zal  $P(z)$  van de graad 0 zijn m.a.w.

$P(z) = \text{constante} = C$ . Beruik nu met de formules van Poincaré  $\Phi^\pm(t_0)$  dan volgt de oplossing:

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = C \cos \gamma f(t_0) - \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} (1+t_0)^{1/2} (1-t_0)^{1/2} \int_{-1}^1 \frac{f(t) (1+t)^{1/2} (1-t)^{1/2}}{t-t_0} dt + C (1+t_0)^{-1/2} (1-t_0)^{1/2}$$

19 Theorie van de wrijving bij een rollende beweging.

De hieronder volgende toepassing van de theorie over singuliere integraalvergelijkingen is ontleend aan:

H. Buefler, Zur Theorie der rollenden Reibung, Ing.-Arch. 27, 137-152, (1959).

Gegeven zijn twee cilindrische walsen (stralen  $r_1, r_2$ ; middelpunten  $M_1, M_2$ ) die tegen elkaar gedrukt zijn en met hoekvelociteiten  $\omega_1, \omega_2$  over elkaar rollen. (fig. 1)

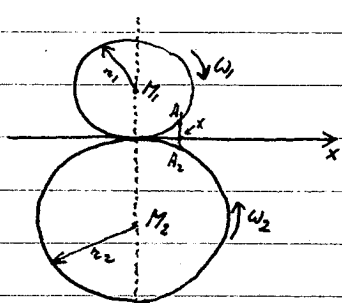


fig. 1

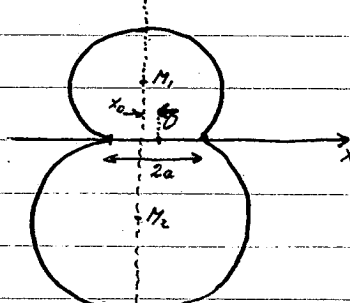


fig. 2

De walsen zullen nu een zeker contactgebied gemeen hebben, dat bij benadering vlak is.

De twee-dimensionale doorsnede (zie fig. 2) zullen de cirkels  $(M_1, r_1)$  en  $(M_2, r_2)$  contact met elkaar hebben langs een lijnsegment. Leg de x-as door dit lijnsegment en neem het midden 0 als oorsprong op de x-as. Noem de breedte van het lijnsegment  $2a$  en noem  $x_0$  de afstand van 0 tot  $M_1, M_2$ . Het contactgebied wordt dan gegeven door  $-a \leq x \leq a$ . Langs dit contactgebied heerst een bepaalde spanningverdeling bestaande uit een normaalspanning of druk  $p(x)$  en een schrifspanning  $q(x)$ , gericht resp. loodrecht op en langs de x-as.

Men kan nu het probleem van deze rollende beweging a.v. mathematisch formuleren.

Formulering van het probleem

$$(I) \int_{-a}^a \frac{p(t)}{x-t} dt - C q(x) = B(x_0 + x), -a \leq x \leq a,$$



$$(II) \int_{-a}^a \frac{q(t)}{x-t} dt + C p(x) = S^*, \quad c \leq x \leq a,$$

$$(III) \quad q(x) = \mu_0 p(x), \quad -a \leq x \leq c$$

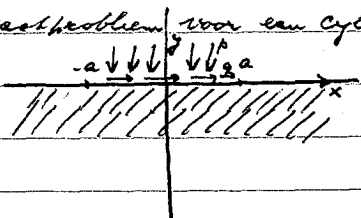
$$(IV) \quad \int_{-a}^a p(t) dt = P, \quad \int_{-a}^a q(t) dt = Q$$

$$(V) \quad p(\pm a) = q(\pm a) = 0$$

N.B. de integralen in (I), (II) worden genomen als Cauchy hoofdwwaarden.

Toelichting De vergelijking (I) kent wel de contactvoorwaarde. Het drukt uit dat de twee walen inderdaad contact hebben langs het interval  $-a \leq x \leq a$ . Daar toe wordt de verplaatsing beschouwd

van de punten  $A_1, A_2$  (zie fig. 1) die na deformatie in het punt  $x$  van de contactzone terecht komen. Een verplaatsing laat zich eenvoudig meetkundig vinden. In het lid van (I), anderzijds volgt u uit de elasticiteitstheorie: de deformaties hangen samen met de normaal- en schuifspanningen  $p(x)$  en  $q(x)$  (Lid van (I)). Bij de berekening van de deformaties met  $p(x)$  en  $q(x)$  is nog een benadering toegepast: in de voorstelling dat de lengte  $2a$  klein is t.o.v.  $r_1, r_2$  is het contactprobleem voor een cylinder vervangen door het contactprobleem voor een halfcylinder



van  $y \leq 0$ , waarbij op het gedeelte  $-a \leq x \leq a, y = 0$  een normaalspanning  $p(x)$  en een schuifspanning  $q(x)$  wordt uitgeoefend.

De grootheden  $C$  en  $B$  in (I) zijn constanten die

samenhangen met de elastische constanten van de twee walen  $e$  met  $r_1, r_2$ . Van belang is nog dat  $-\frac{\pi}{2} \leq C \leq \frac{\pi}{2}$  geldt en dat  $C=0$  indien de walen van hetzelfde materiaal zijn.

Het contactgebied  $-a \leq x \leq a$  zal nu bestaan uit een Haftgebied  $c \leq x \leq a$  (de haften = klem, hechten) en een glijgebied  $-a \leq x \leq c$ . In het Haftgebied haften de walen aan elkaar; de punten van het Haftgebied worden beschouwd als punt van de eerste of als punt van de tweede wal, dus voor zichzelf hebben. Dit legt een zekere voorwaarde op aan de deformatie in het Haftgebied en daarmee aan  $p(x), q(x)$ . Deze Haftvoorwaarde wordt uitgedrukt door II.

Behalve de constant  $C$  treedt daarin op de constante  $S^*$ , die samenhangt met de elastische constanten, met  $r_1, r_2$  en met de slip  $S = \frac{2\pi}{\omega} (\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2)$  van de twee walen. In het glijgebied glijden de walen over elkaar: het verband tussen  $q(x)$  en  $p(x)$  wordt dan uitgedrukt door de wrijvingswet van Coulomb (III), waarin  $\mu_0$  de wrijvingscoëfficiënt is.

De vergelijkingen (II) stemmen uit dat  $P$  en  $Q$  de totale normaalcracht resp. schuifcracht zijn door de twee walen op elkaar uitgeoefend. De vergelijkingen (II) spreken voor zichzelf.

In de vergelijkingen (I) - (V) zijn behalve de grootheden  $C, B, \mu_0, P, Q$  tevens de grootheden  $p(x), q(x)$  (beide voor  $-a \leq x \leq a$ ),  $a, x_0, C, S^*$  bepaald moeten worden.

We beschouwen nu twee bijzondere gevallen van de algemene probleemstelling:

1°  $C = a$ . Het contactgebied is dan in zijn geheel glijgebied. Door eliminatie van  $q(x)$  uit (I) en (III) volgt de singuliere integraalvergelijking

$$\int_{-a}^a \frac{p(t)}{t-x} dt + \mu_0 C p(x) = -B(x_0 + x), \quad -a \leq x \leq a$$

welke met de bestproben methoden is op te lossen.

Utgave Werk den oplossing uit.

2°  $C = -a$ . Het contactgebied is dan in zijn geheel Haftgebied. De spanningen  $p(x)$  en  $q(x)$  moeten nu voldoen aan een stelsel van <sup>van</sup> gekoppelde integraalvergelijkingen.

$$\begin{cases} \text{(I)} & Cq(x) + \int_a^x \frac{p(t)}{t-x} dt = -B(x_0+x), \quad -a \leq x \leq a \\ \text{(II)} & Cp(x) - \int_a^x \frac{q(t)}{t-x} dt = S^*, \quad -a \leq x \leq a. \end{cases}$$

Vermenigvuldig (I) met  $i$  en tel ze op bij (II), dan volgt na invoering van

$$\psi(x) = p(x) + iq(x)$$

de enkele singuliere integraalvergelijking voor  $\psi(x)$ ,

$$C\psi(x) + i \int_a^x \frac{\psi(t)}{t-x} dt = S^* - iB(x_0+x), \quad -a \leq x \leq a.$$

Deze vergelijking is een bijzonder geval van de integraalvergelijking, behandeld in het voorbeeld op blz. 77/78. We zouden dus eventueel de daar gegeven oplossing kunnen citeren en vermelden de voorwaarden (IV) en (V) op te leggen. We willen hier echter liever een rechtstreekse oplossing geven, waarin automatisch aan de voorwaarden (V) <sup>(V)</sup> voldaan is.

Over daarnaast in de Cauchy integraal:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^z \frac{\psi(t)}{t-z} dt.$$

Dan is de functie  $\Phi(z)$  overal analytisch, uitgedrukt op het interval  $-a \leq z \leq a$ ;  $\Phi(z) = O(1/z)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ ;  $\Phi(z)$  is begrensd in de omgeving van  $z = \pm a$  en dat  $\psi(\pm a) = 0$  (voor (V)).

Volgens de formule van Plemelj is nu

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(x) - \Phi^-(x) &= \psi(x), \\ \Phi^+(x) + \Phi^-(x) &= \frac{1}{\pi i} \int_a^x \frac{\psi(t)}{t-x} dt \end{aligned} \right\} \quad -a \leq x \leq a.$$

Substitueer dit in de integraalvergelijking, dan komen we terecht op het Hilbert probleem:

$$(C-\pi)\Phi^+(x) - (C+\pi)\Phi^-(x) = S^* - iB(x_0+x), \quad -a \leq x \leq a.$$

Beschouw nu eerst het homogene Hilbert probleem,

$$(C-\pi)\Phi^+(x) - (C+\pi)\Phi^-(x) = 0, \quad -a \leq x \leq a.$$

opnieuw

$$[\log \Phi(x)]^+ - [\log \Phi(x)]^- = \log \frac{C+\pi}{C-\pi}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Nu was  $-\frac{\pi}{2} \leq C \leq \frac{\pi}{2}$  dus  $\frac{C+\pi}{C-\pi} < 0$ ,  $\log \frac{C+\pi}{C-\pi} = \log \frac{C+\pi}{\pi-C} + \pi i = \pi i + 2\pi\beta$ , waarbij

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\pi+C}{\pi-C}$$

Als oplossing vinden we voor  $\log \Phi(z)$ ,

$$\log \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^z \frac{\pi i + 2\pi\beta}{t-z} dt = \left(\frac{1}{2} - i\beta\right) \log \frac{z-a}{z+a},$$

waarna

$$\Phi(z) = (z-a)^{\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta}$$

Hieruit wordt de fundamentele oplossing verkregen door vermenigvuldiging met  $(z-a)^{n_1} (z+a)^{n_2}$ ,  $n_1, n_2$ -geheel.

$$\chi(z) = (z-a)^{n_1+\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{n_2-\frac{1}{2}+i\beta}$$

De fundamentele oplossing moet begrensd zijn in de omgeving van  $z = \pm a$ . We moeten  $n_1, n_2$  zo kiezen dat

$$0 < \operatorname{Re}(n_1 + \frac{1}{2} - i\beta) < 1, \quad 0 < \operatorname{Re}(n_2 - \frac{1}{2} + i\beta) < 1$$

Liever ~~andere~~ methode wie §1.4 folgen. Vergleich mit

$$F(z) = [S^* - iB(x_0 + z)] (z - a)^{-\frac{1}{2} + i\beta} (z + a)^{-\frac{1}{2} - i\beta},$$

dann ist

$$F^+(x) - F^-(x) = \underbrace{\left[ e^{\pi i(-\frac{1}{2} + i\beta)} - e^{-\pi i(-\frac{1}{2} + i\beta)} \right]}_{-2i \cos \pi\beta = \frac{-2\pi i}{(\pi^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}} [S^* - iB(x_0 + z)] (z - x)^{-\frac{1}{2} + i\beta} (z + x)^{-\frac{1}{2} - i\beta}$$

Es folgt dann

$$V(z) = -\frac{1}{2\pi} F(z) + T(z), \text{ etc.}$$

We vinden dan  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$  en daarmee

$$X(z) = (z-a)^{\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{\frac{1}{2}+i\beta}, \quad -\pi \leq \arg(z+a) \leq \pi$$

Daarmee de afbraak  $-\pi < \arg(z+a) < \pi$  in dan

$$\begin{aligned} X^+(x) &= e^{\frac{\pi}{2} + \beta\pi} (a-x)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{\frac{1}{2}+i\beta} = i \left( \frac{\pi+C}{\pi-C} \right)^{\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{\frac{1}{2}+i\beta} \\ X^-(x) &= e^{-\frac{\pi}{2} - \beta\pi} (a-x)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{\frac{1}{2}+i\beta} = -i \left( \frac{\pi-C}{\pi+C} \right)^{\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{\frac{1}{2}+i\beta} \end{aligned}$$

Stel nu  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z)$  dan gaat het inhomogene Hilbert probleem over in

$$\Psi^+(x) - \Psi^-(x) = i(\pi^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} [S^* - iB(x_0+x)] (a-x)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{-\frac{1}{2}+i\beta}, \quad -a \leq x \leq a$$

met als algemene oplossing

$$\Psi(z) = \frac{(\pi^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{[S^* - iB(x_0+t)] (a-t)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (a+t)^{-\frac{1}{2}+i\beta}}{t-z} dt + P(z)$$

waarin  $P(z)$  een willekeurig polynoom moet zijn.

We berekenen nu de Cauchy integralen (zie voorbeelden pp. 56-59)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{(a-t)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (a+t)^{-\frac{1}{2}+i\beta}}{t-z} dt &= -\frac{1}{2i \sin(\frac{\pi}{2} - i\beta\pi)} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} \\ &= -\frac{1}{2i \cosh \beta\pi} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{t(a-t)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (a+t)^{-\frac{1}{2}+i\beta}}{t-z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{(a-t)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (a+t)^{-\frac{1}{2}+i\beta}}{t-z} dt + \frac{z}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{(a-t)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (a+t)^{-\frac{1}{2}+i\beta}}{t-z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\beta) \Gamma(\frac{1}{2}-i\beta)}{\Gamma(1)} - \frac{z}{2i \cosh \beta\pi} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} \end{aligned}$$

Deze uitkomsten zijn nog te vereenvoudigen.

$$\cosh \beta\pi = \frac{e^{\beta\pi} + e^{-\beta\pi}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\pi+C}{\pi-C} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{\pi-C}{\pi+C} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{\pi}{(\pi^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}+i\beta) \Gamma(\frac{1}{2}-i\beta) = \frac{\pi}{\sinh(\pi+i\beta\pi)} \cosh \beta\pi = (\pi^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}$$

Substitueer dit alles dan vinden we na enig rekenen voor  $\Phi(z)$  en  $\Psi(z)$ ,

$$\Psi(z) = -\frac{(\pi^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} [S^* - iB(x_0+z)] (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} + iB + P(z)$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) = X(z) \Psi(z) &= -\frac{(\pi^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} [S^* - iB(x_0+z) + iB(z-a)^{\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{\frac{1}{2}+i\beta}] + \\ &\quad + P(z) (z-a)^{\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{\frac{1}{2}+i\beta} \end{aligned}$$

We leggen nog de voorwaarde op:  $\Phi(z) = O(\frac{1}{|z|})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ . Ontwikkel daartoe voor  $|z|$  grote

$$\begin{aligned} S^* - iB(x_0+z) + iB(z-a)^{\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{\frac{1}{2}+i\beta} &= \\ &= S^* - iBx_0 + iBz + i\beta z \left[ 1 - (\frac{1}{2}-i\beta) \frac{a}{z} + (\frac{1}{2}+i\beta) \frac{a}{z} + O(\frac{1}{z^2}) \right] = \\ &= S^* - iBx_0 - 2\beta a B + O(\frac{1}{z}); \end{aligned}$$

de eerste term in de oplossing van  $\Phi(z)$  voldoet dus aan de voorwaarde mits

$$S^* - iBx_0 - 2\beta a B = 0$$

De tweede term uit de oplossing voor  $\Phi(z)$  zal  $O(\frac{1}{|z|})$  zijn met  $P(z) \neq 0$ , waarna

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} [S^* - iB(x_0 + z) + iB(z-a)^{\frac{1}{2}-i\beta} (z+a)^{\frac{1}{2}+i\beta}]$$

Op het interval  $-a \leq x \leq a$  geldt dan,

$$\begin{cases} \Phi^+(x) = -\frac{1}{2\pi} [S^* - iB(x_0 + x) + iB e^{i\pi(\frac{1}{2}-i\beta)} (a-x)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{\frac{1}{2}+i\beta}] \\ \Phi^-(x) = -\frac{1}{2\pi} [S^* - iB(x_0 + x) + iB e^{-i\pi(\frac{1}{2}+i\beta)} (a-x)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{\frac{1}{2}+i\beta}] \end{cases}$$

Trek den randwaarden af, dan volgt de functie  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{B}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\beta\pi\right) (a-x)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{\frac{1}{2}+i\beta}$$

ofwel

$$\varphi(x) = \frac{B}{(\pi^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} (a-x)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+x)^{\frac{1}{2}+i\beta} = \frac{B}{(\pi^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{i\beta}$$

Merkt op dat  $\varphi(x)$  voldoet aan de voorwaarde (V) i.e.  $\varphi(xa) = 0$ .

De normaalspanning  $p(x)$  en de schuifspanning  $q(x)$  volgen hieruit als het reële en imaginair deel van  $\varphi(x)$ .

$$\begin{cases} p(x) = \frac{B}{(\pi^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\beta \log \frac{a+x}{a-x}\right), \\ q(x) = \frac{B}{(\pi^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\beta \log \frac{a+x}{a-x}\right). \end{cases}$$

We moeten tenslotte nog  $S^*$ ,  $a$ ,  $x_0$  berekenen. Daarvoor beschikken we in de eerste plaats over de relatie,

$$(1) \quad S^* - iBx_0 - 2\beta aB = 0.$$

Noort moet voldaan zijn aan de voorwaarde (VI) -dus in complexe vorm luidt,

$$\int_a^a \varphi(t) dt = \int_a^a \{p(t) + iq(t)\} dt = P + iQ.$$

Substitueer nu  $\varphi(t)$  als boven gegeven, dan is

$$\begin{aligned} \int_a^a \varphi(t) dt &= \frac{B}{(\pi^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \int_a^a (a-t)^{\frac{1}{2}-i\beta} (a+t)^{\frac{1}{2}+i\beta} dt \\ &= \frac{B}{(\pi^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} (2a)^{\frac{1}{2}-i\beta} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\beta) \Gamma(\frac{1}{2}+i\beta)}{\Gamma(1)} = \frac{2Ba^{\frac{1}{2}}}{(\pi^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-i\beta) \Gamma(\frac{1}{2}+i\beta) \Gamma(1+i\beta)}{\Gamma(1+i\beta)} \\ &= \frac{1}{2} Ba^{\frac{1}{2}} (4\beta^2 + 1) \end{aligned}$$

waarna als tweede relatie volgt,

$$(2) \quad \frac{1}{2} Ba^{\frac{1}{2}} (4\beta^2 + 1) = P + iQ.$$

De relaties (1) en (2) die in feite 4 relaties zijn, hebben een tot oplossing,

$$x_0 = 0, \quad Q = 0, \quad a = \sqrt{\frac{2P}{B(4\beta^2 + 1)}}, \quad S^* = 2\beta aB = 2\beta \sqrt{\frac{2PB}{4\beta^2 + 1}}$$

$$\text{waarin } \beta = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\pi + c}{\pi - c}.$$

Conclusie

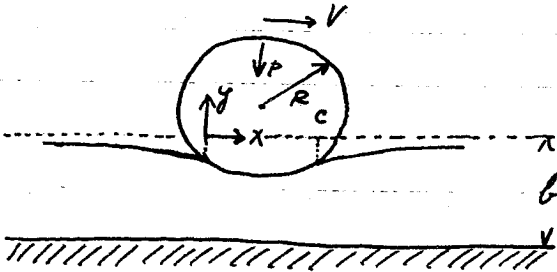
Opmerking. Zamen  $Q=0$  zal het contactgebied bij de rollende beweging in zijn geheel glijgend Heftgebied zijn. De breuk en de plaats van het midden van het contactgebied, de normaalkracht- en schuifkrachtverdeling, de grootte <sup>S\*</sup> worden dan door bovenstaande formules <sup>voorgekomen</sup> uitgedrukt in behuude grootheden  $P$ ,  $B$  en  $C$ .

20-11-57

1.10 Contact problem uit de elasticiteitstheorie.

We geven nog een tweede toelassing van de theorie der singuliere integraalvergelijkingen met betrekking aan

J.B. Alblas and H. Kuiper, The two dimensional contact problem of a rough stamp sliding slowly on an elastic layer - I. General considerations and thick layer asymptotics, Int. J. Solids Structures 7, 99-109 (1971)



Een isotrope homogeen elastische laag van dikte  $b$  rust op een stijve fundering.

De laag wordt belast door een cilinder met straal  $R$ , die met een kracht  $P$  in de laag wordt gedrukt. Tegelijk glijdt de cilinder

langzaam naar rechts met snelheid  $v$ . De constante wrijvingscoëfficiënt is  $f$ . Voor de instanthouding van de glijbeweging wordt daarom een horizontale kracht  $fP$  uitgeoefend.

Het probleem wordt beschreven met behulp van meetkundige coördinaten  $x, y$ . De lengte van het contactinterval tussen cilinder en laag wordt  $c$  genoemd. De druk over het contactinterval wordt voorgesteld door  $p(x)$ ,  $0 \leq x \leq c$ .

Het contactprobleem wordt nu herleid tot een integraalvergelijking voor de druk  $p(x)$ .

In het genoemde artikel wordt <sup>bepaald</sup> <sup>het</sup> gemaal van een dikke laag i.e. de verhouding  $\frac{b}{c} = q$  zal groot zijn,  $q \gg 1$ . De druk  $p(x)$  wordt nu ontwikkeld volgens

$$p(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{p_l(x)}{(2q)^l}$$

Substitutie van deze reeks in de integraalvergelijking voor  $p(x)$  leidt tot successieve integraalvergelijkingen voor de coëfficiënten  $p_l(x)$ . De integraalvergelijking voor  $p_0(x)$  blijft een singuliere integraalvergelijking te zijn van de volgende gedaante

$$\int_0^1 \frac{p_0(y)}{y-x} dy + q p_0(x) = d_0 + Q_0(x), \quad 0 < x < 1. \quad \text{Variabele } x = \frac{\text{coördinaat } x}{c}$$

Hierin is  $Q_0(x)$  een gegeven polynoom bepaald door de voorgaande coëfficiënten  $p_{-2}(x), p_{-4}(x), \dots$ , terwijl  $d_0$  een nog te bepalen constante is. De constante  $q$  wordt gegeven door

$$q = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int \pi$$

met  $\nu = \frac{1}{2(1+\mu)}$  = Poisson verhouding i.e.  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ .

In de uiteinden  $x=0, x=1$  van het contactinterval dient  $p_0(x)$  begrensd te zijn.

Gemakshalve laten we nu verder de index  $l$  weg in de singuliere integraalvergelijking.

Tot oplossing van de singuliere integraalvergelijking voeren we in de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{p(t)}{t-z} dt, \quad z \text{ complex.}$$

Dan heeft  $\Phi(z)$  de volgende eigenschappen:

(i)  $\Phi(z)$  is analytisch buiten het interval  $0 \leq z \leq 1$

(ii)  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ ,

(iii)  $\Phi(z)$  is begrensd in de omgeving van  $z=0, z=1$  of  $\Phi(z)$  heeft een logaritmische singulariteit in  $z=0, z=1$ .

Volgens de formules van Plemelj is nu,

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(x) - \Phi^-(x) &= p(x), \\ \Phi^+(x) + \Phi^-(x) &= \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{p(t)}{t-z} dt, \end{aligned} \right\} 0 < x < 1.$$

Het behulp van deze relaties is de integraal singuliere integraalvergelijking te herleiden tot het volgende Hilbert probleem,

$$(iv) \quad (q + \pi i) \Phi^+(x) - (q - \pi i) \Phi^-(x) = d + Q(x), \quad 0 < x < 1.$$

De oplossing van dit Hilbert probleem verloopt op de bekende manier. Beschouw het bijbehorende homogene Hilbert probleem

$$(q + \pi i) \Phi^+(x) - (q - \pi i) \Phi^-(x) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Neem de logaritme dan volgt

$$[\log \Phi^+(x)]^+ - [\log \Phi^-(x)]^- = -2\pi i \theta \log \frac{q - \pi i}{q + \pi i} = -2\pi i \theta$$

waarbij

$$\theta = \arctan \frac{\pi}{q} = \arctan \frac{2/(1-x)}{1/(1-2x)}, \quad \text{i.e. } 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

De oplossing van het laatste probleem vinden we

$$\log \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{-2\pi i \theta}{t-z} dt = -\theta \log \frac{z-1}{z},$$

$$\Phi(z) = (z-1)^{-\theta} z^{\theta}.$$

Het het oog op de voorwaarde (iii) wordt nu de fundamentele oplossing van het homogene Hilbert probleem gegeven door

$$\chi(z) = (z-1)^{1-\theta} z^{\theta}.$$

De functie  $\chi(z)$  is eenwaardig te maken door de afspraak  $-\pi < \arg(z-1) < \pi, -\pi < \arg z < \pi$ ;  $\chi(z)$  is dan analytisch buiten het interval  $0 \leq z \leq 1$ .

Voor een punt  $x$  met  $0 < x < 1$  zal gelden

$$\chi^{\pm}(x) = (1-x)^{1-\theta} x^{\theta} e^{\pm \pi i (1-\theta)}$$

Ter oplossing van het inhomogene Hilbert probleem (iv) stellen we

$$\Phi(z) = \chi(z) \Psi(z),$$

dan ontstaat voor  $\Psi(z)$  het inhomogene Hilbert probleem

$$(q + \pi i) \chi^+(x) \Psi^+(x) - (q - \pi i) \chi^-(x) \Psi^-(x) = d + Q(x),$$

$$-(1-x)^{1-\theta} x^{\theta} [(q + \pi i) e^{-\pi i \theta} \Psi^+(x) - (q - \pi i) e^{\pi i \theta} \Psi^-(x)] = d + Q(x),$$

ofwel wegens  $(q + \pi i) e^{-\pi i \theta} = (q - \pi i) e^{\pi i \theta} = (q^2 + \pi^2)^{1/2} = \frac{\pi}{\sin \pi \theta}$ ,

$$\Psi^+(x) - \Psi^-(x) = -\frac{\sin \pi \theta}{\pi} \int_0^1 \frac{d + Q(x)}{x^{\theta} (1-x)^{1-\theta}}, \quad 0 < x < 1.$$

De algemene oplossing van het laatste probleem luidt

$$\Psi(z) = -\frac{\sin \pi \theta}{2\pi^2 i} \int_0^1 \frac{d+Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} \frac{dt}{t-z} + P(z),$$

waarbij  $P(z)$  een willekeurig polynoom voorstelt. De oplossing van het inhomogene Hilbert probleem (iv) wordt nu gegeven door

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z) = z^\theta(z-1)^{1-\theta} \left[ -\frac{\sin \pi \theta}{2\pi^2 i} \int_0^1 \frac{d+Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} \frac{dt}{t-z} + P(z) \right].$$

Aan deze oplossing wordt nog de voorwaarde (ii) opgelegd, i.e.  $\Phi(z) = O(\frac{1}{|z|})$ ,  $z \rightarrow \infty$ . Ontwikkel daartoe  $\Phi(z)$  naar machten van  $1/z$ , viz.

$$\Phi(z) = z \left[ 1 + O(\frac{1}{z}) \right] \left[ \frac{\sin \pi \theta}{2\pi^2 i} \int_0^1 \frac{d+Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} \frac{dt}{t-z} + O(\frac{1}{z}) + P(z) \right].$$

Aan de voorwaarde (ii) zal voldaan zijn mits

$$P(z) \equiv 0, \quad \int_0^1 \frac{d+Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} dt = 0.$$

De laatste betrekking legt juist de nog onbekende constante d vast. Met behulp van de beta-integraal vol

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} = \frac{\Gamma(1-\theta)\Gamma(\theta)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \pi \theta}$$

volgt voor  $d$ ,

$$d = -\frac{\sin \pi \theta}{\pi} \int_0^1 \frac{Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} dt.$$

Daar  $Q(t)$  een polynoom is, de laatste integraal te schrijven als een som van beta-integralen welke eenvoudig zijn uit te werken.

De uiteindelijke oplossing  $\Phi(z)$  van het inhomogene Hilbert probleem wordt dan gegeven door

$$\Phi(z) = -\frac{\sin \pi \theta}{\pi} \frac{z^\theta(z-1)^{1-\theta}}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d+Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} \frac{dt}{t-z},$$

met de constante  $d$  als boven aangegeven.

<sup>22-3-1983</sup> Dit  $\Phi(z)$  volgt de dreuk  $h(x)$  in het contact-interval  $0 < x < 1$  met behulp van de Plemelj-formule.

$$h(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x).$$

Naar de uitwerking.

$$\Phi^+(x) = X^+(x)\Psi^+(x),$$

$$X^+(x) = (1-x)^{1-\theta} x^\theta e^{i\pi(1-\theta)}, \quad (\text{zie p. 84})$$

$$\Psi^+(x) = \mp \frac{\sin \pi \theta}{2\pi} \frac{d+Q(x)}{x^\theta(1-x)^{1-\theta}} - \frac{\sin \pi \theta}{2\pi^2 i} \int_0^1 \frac{d+Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} \frac{dt}{t-x} \quad (\text{Plemelj})$$

waarna volgt met enige rekenen

$$h(x) = \frac{\sin 2\pi \theta}{2\pi} [d+Q(x)] - \frac{\sin^2 \pi \theta}{\pi^2} x^\theta(1-x)^{1-\theta} \int_0^1 \frac{d+Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} \frac{dt}{t-x}, \quad 0 < x < 1$$

in overeenstemming met Ahlfors en Kurbans, loc. cit., form. (4.3).



177;

16-3-1972

De uitkomst voor  $\psi(z)$  bevat nu een Cauchy hoofwaarde en is daarom niet voldoende expliciet voor verder gebruik.

We berekenen deze Cauchy hoofwaarde indirect door terug te keren naar de voorstelling voor  $\Phi(z)$  en de Cauchy integraal.

$$\Psi(z) = -\frac{\sin \pi \theta}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d+Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} \frac{dt}{t-z}$$

met te werken. Naak daartoe gebruik van de (alternatieve) methode van §1.4.

De Cauchy integraal  $\Psi(z)$  heeft de volgende eigenschappen:

- 1°  $\Psi(z)$  is analytisch buiten het interval  $0 \leq z \leq 1$ ;
- 2°  $\Psi(z) = O\left(\frac{1}{|z|^\theta}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ , vanwege de speciale keuze van  $d$ ;
- 3°  $\Psi(z) = O(|z|^{-\theta})$  bij  $z \rightarrow 0$ ;  $\Psi(z) = O(|z-1|^{-1+\theta})$  bij  $z \rightarrow 1$ ;
- 4° formule van Plemelj:

$$\Psi^+(x) - \Psi^-(x) = -\frac{\sin \pi \theta}{\pi} \frac{d+Q(x)}{x^\theta(1-x)^{1-\theta}}, \quad 0 < x < 1.$$

24-16-1972

Vergelijk  $\Phi(z)$  met de functie  $F(z)$  gegeven door

$$F(z) = z^{-\theta} (z-1)^{-1+\theta} [d+Q(z)],$$

met  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $-\pi < \arg(z-1) < \pi$ .

De functie  $F(z)$  heeft analoge eigenschappen als  $\Phi(z)$ , viz.:

- 1°  $F(z)$  is analytisch buiten het interval  $0 \leq z \leq 1$ ;
- 2°  $F(z) = O(|z|^{k-\theta})$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ , waarbij  $k$  de graad van het polynoom  $Q(z)$  is;
- 3°  $F(z) = O(|z|^{-\theta})$  bij  $z \rightarrow 0$ ;  $F(z) = O(|z-1|^{-1+\theta})$  bij  $z \rightarrow 1$ ;
- 4° sprongrelatie

$$F^+(x) - F^-(x) = -2i \sin \pi \theta \frac{d+Q(x)}{x^\theta(1-x)^{1-\theta}}, \quad 0 < x < 1.$$

13-3-1974

Vorm van de combinatie

$$\Omega(z) = \Psi(z) - \frac{1}{2\pi i} F(z),$$

dan volgt uit de eigenschappen 4°

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

afwezigheidsstelling -  $\Omega(z)$  is analytisch op het interval  $0 < z < 1$ .

Met de eigenschappen 1°, 3° volgt dan:  $\Omega(z)$  is gehele functie.

Tenslotte, uit de eigenschappen 2° volgt  $\Omega(z) = P(z)$  waarbij  $P(z)$  een polynoom van een graad  $\leq k-1$  is. We vinden daarom voor  $\Psi(z)$ ,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} F(z) + P(z) = \frac{1}{2\pi i} z^{-\theta} (z-1)^{-1+\theta} [d+Q(z)] + P(z).$$

Het polynoom  $P(z)$  wordt nu ver vastgelegd door de eis 2°:  $\Psi(z) = O\left(\frac{1}{|z|^\theta}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

Ontrikt het daarom  $z^{-\theta} (z-1)^{-1+\theta} Q(z)$  naar machten van  $1/z$ ,

$$z^{-\theta} (z-1)^{-1+\theta} Q(z) = s_{k-1} z^{k-1} + s_{k-2} z^{k-2} + \dots + s_0 + \frac{s_{-1}}{z} + \dots$$

waarbij de coëfficiënten  $s_j$  in principe zijn te bepalen.

Substitutie in het resultaat voor  $\Psi(z)$  geeft

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \sum_{j=0}^{k-1} s_j z^j + \frac{s_{-1}}{z} + \frac{d}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \right] + P(z).$$

We vinden daarom voor  $P(z)$ ,

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{k-1} s_j z^j,$$

terwijl ook de constante  $d$  nog eens opnieuw wordt gevonden in een andere vorm

$$d = -s_{-1}.$$

N.B. Men kan gemakkelijk verifiëren dat deze uitkomst voor  $d$  overeenkomt met de uitkomst van p. 85.

Uiteindelijk vinden we voor de Cauchy integraal  $\Psi(z)$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= -\frac{\sin \pi\theta}{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d + Q(t)}{t^\theta(1-t)^{1-\theta}} \frac{dt}{t-z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ z^{-\theta} (z-1)^{-1+\theta} \{d + Q(z)\} - \sum_{j=0}^{k-1} s_j z^j \right]. \end{aligned}$$

Vermenigvuldig deze uitkomst met  $\chi(z) = z^\theta (z-1)^{1-\theta}$ , dan volgt voor  $\Phi(z)$ ,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} [d + Q(z)] - \frac{z^\theta (z-1)^{1-\theta}}{2\pi i} \sum_{j=0}^{k-1} s_j z^j.$$

Tenslotte vinden we voor de druk  $p(x)$  in het contact interval  $0 < x < 1$ ,

$$\begin{aligned} p(x) &= \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \\ &= -\frac{\sin \pi\theta}{\pi} x^\theta (1-x)^{1-\theta} \sum_{j=0}^{k-1} s_j x^j, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Verdere toepassing van theorie der singuliere integraalvergelijkingen, zie:

T. W. Davies, Steady two-dimensional cavity flow past an aerofoil using linearised theory, Quart. J. Mech. Appl. Math. 23, 49-76 (1970).

Artikel geeft o.m. oplossing van volgende singuliere integraalvgl.

$$\int_0^\alpha \frac{\mu(\theta)}{\sin(\theta-\theta_0)} d\theta = q(\theta_0), \quad 0 < \theta_0 < \alpha,$$

Via substitutie  $\xi = e^{i\theta}$ ,  $\zeta = e^{i\theta_0}$  wordt vergelijking herleid tot singuliere integraalvergelijking met Cauchy kern langs cirkelboog  $L = \{e^{i\theta} | 0 < \theta < \alpha\}$ .

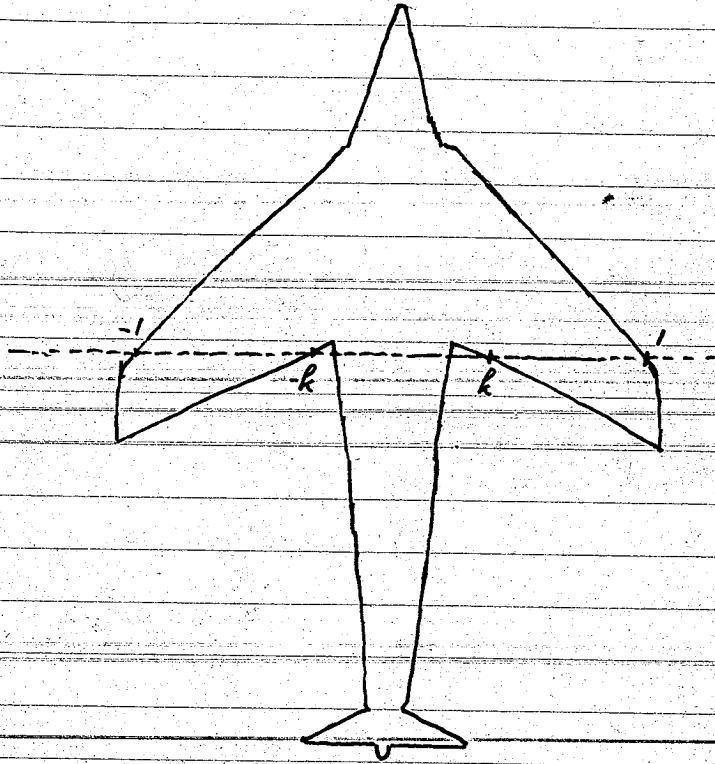
Voor een veel kortere en eenvoudiger oplossing van de integraalvergelijking zie A. M. J. Davis, Quart. J. Mech. Appl. Math. 23, 567-568 (1974).

179.

87 A

wel in 1973, wel in 1974, voorjaar, 1974, najaar, 1975, wel in 1976, niet in 1977, 1978,

wel in 1979, niet in 1981, wel in 1982, niet in 1983, 1984, wel in 1985



Potentiaalprobleem voor twee strips.

In deze paragraaf beschouwen we singuliere integraalvergelijkingen over een dubbel interval van de volgende gedaante,

$$(I) \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \log|x-t| u(t) dt = f(x), \quad k < |x| < 1,$$

$$(II) \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \frac{v(t)}{t-x} dt = g(x), \quad k < |x| < 1,$$

waarbij  $0 < k < 1$ .

De integraalvergelijkingen (I) en (II) werden opgelost door

A.K. Gantsev and W.E. Olmstead, On the solution of the integral equation for the potential of two strips, SIAM J. Math. Anal. 2, 293-306 (1971).

De integraalvergelijking (II) werd eerder opgelost door o.a.

F.G. Tricomi, The airfoil equation for a double interval, ZAMP 2, 402-406 (1951).

In beide artikelen werd (I), (II) herleid tot een integraalvergelijking over een enkel interval, waarna de bekende oplossing van de laatste vergelijking werd gebruikt (zie voorbeeld op pag. 76). We zullen hier voor een speciaal geval de integraalvergelijkingen (I), (II) rechtstreeks oplossen met behulp van een geschikte Cauchy integraal en de theorie van het Hilbert probleem.

De integraalvergelijking (I) komt voor bij het potentiaalprobleem voor twee evenwijdige, coplanaire strips, een voorbeeld dat aanstaande uitvoeriger zal worden behandeld.

De integraalvergelijking (II) komt voor in de aerodynamica van vliegtuig met "swept-back wings", zie figuur. De draagkracht op de getekende vleugelvormen wordt dan bepaald door een functie  $v(t)$  die voldoet aan een integraalvergelijking van type (II).

Daarnaast treedt de integraalvergelijking (II) op bij het probleem van een rechthoekige golfpijl waarin een dubbel diafragma is geplaatst. De functie  $v(t)$  beschrijft dan het veld in de twee openingen van het diafragma, zie L. Lewin, The solution of singular integral equations over a multiple interval and applications to multiple diaphragms in rectangular waveguide, SIAM J. Appl. Math. 16, 417-430 (1960).

We merken op dat de integraalvergelijking (I) over te voeren is in (II). Door differentiatie naar  $x$  gaat (I) over in

$$\left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \frac{u(t)}{x-t} dt = f'(x), \quad k < |x| < 1,$$

waarbij de integraal moet worden opgevat als een Cauchy hoofdwaaarde. De laatste vergelijking is gelijkwaardig met (II).

De differentiatie naar  $x$  onder het integraalteken is toegestaan op grond van

Voor een alternatief bewijs van het lemma, zie Muskelshvili §13.

het volgende lemma:

Lemma. Zij  $\varphi(t)$  gedefinieerd op  $[a, b]$  met  $\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\alpha_1}(b-t)^{\alpha_2}}$ ,  
waarbij  $0 \leq \alpha_1 < 1$ ,  $0 \leq \alpha_2 < 1$  en  $\varphi^*(t) \in H(\mu)$ . Dan is:

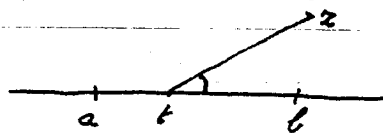
$$\frac{d}{dx} \int_a^b \varphi(t) \log|x-t| dt = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{x-t} dt, \quad a < x < b,$$

waarbij de laatste integraal moet worden opgevat als een Cauchy hoofdwert.

Bewijs: Voor in de functie

$$F(z) = \int_a^b \varphi(t) \log|z-t| dt,$$

onder de afspraak  $-\pi < \arg|z-t| < \pi$ .



$F(z)$  is dan analytisch in het  $z$ -vlak met sneede  $[-a, b]$ .

Buiten de sneede mag  $F(z)$  worden gediifferentieerd onder het integraalteken.

$$\Phi(z) := F'(z) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{z-t} dt.$$

We berekenen nu de limieten  $F^\pm(x)$ ,  $\Phi^\pm(x)$  als  $z \rightarrow x \pm i0$ ,  $a < x < b$ .

Met behulp van een figuur is eenvoudig in te zien dat

$$\lim_{z \rightarrow x \pm i0} \arg|z-t| = \begin{cases} 0, & a < t < x, \\ \pm \pi, & x < t < b, \end{cases}$$

zodanig

$$F^\pm(x) = \int_a^b \varphi(t) \log|x-t| dt \pm \pi i \int_x^b \varphi(t) dt, \quad a < x < b.$$

Uit de formules van Plemelj volgt

$$\Phi^\pm(x) = \mp \pi i \varphi(x) + \int_a^b \frac{\varphi(t)}{x-t} dt, \quad a < x < b.$$

Bedenk dat  $\lim_{z \rightarrow x \pm i0} \Phi(z) = \Phi^\pm(x)$  uniform geldt op elk gesloten subinterval van  $(a, b)$ ; zie het bewijs van de formules van Plemelj. De rij van afgeleide functies  $F'(z)$  convergeert dus  $F'(z) = F'(x+i0)$  convergeert dus uniform naar  $\Phi^\pm(x)$  als  $z \rightarrow \pm i0$ . Volgens een bekende stelling (Wiskunde 30, III, §9) is dan  $F^\pm(x)$  differentieerbaar voor  $a < x < b$  met

$$\frac{d}{dx} F^\pm(x) = \Phi^\pm(x),$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_a^b \varphi(t) \log|x-t| dt \pm \pi i \int_x^b \varphi(t) dt \right] = \mp \pi i \varphi(x) + \int_a^b \frac{\varphi(t)}{x-t} dt,$$

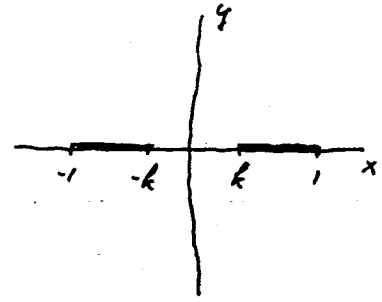
waaruit volgt

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \varphi(t) \log|x-t| dt = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{x-t} dt.$$

We beschouwen nu het volgende potentiaalprobleem voor twee gelidende strips  $-1 < x < k$ ,  $y=0$ ,  $-\infty < z < \infty$  en  $k < x < 1$ ,  $y=0$ ,  $-\infty < z < \infty$ . De strips zijn geladen en bevinden zich op de potentialen  $\pm 1$ . Gewaagd wordt de pot. ladingdichtheid op de strips.

Daar het probleem twee-dimensionaal is kunnen we het volgende probleem formuleren voor de potentiaalfunctie  $V(x, y)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \text{ buiten de strips } k < |x| < 1, y=0 \\ V(x,0) = \text{sgn } x = \begin{cases} +1, & k < x < 1, \\ -1, & -1 < x < -k, \end{cases} \\ V(x,y) \text{ begrensd voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$



Het aldus geformuleerde potentiaalprobleem heeft een eenduidige oplossing, zie collegedictaat Partiele Differentiaalvgl., §7.3.

De potentiaal in  $(x,y)$  ten gevolge van een positieve eenheidslading in  $(\xi,\eta)$  wordt nu gegeven door

$$S(x,y; \xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

zie collegedictaat Part. Diff. vgl. §7.4;  $S$  is fundamentele oplossing.

Bij de ladingdichtheid of de platoon strips gegeven door  $\varphi(t)$ ,  $k < |t| < 1$ . Dan is de potentiaal  $V(x,y)$  voor te stellen door

$$V(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log \sqrt{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Toepassing van de randvoorwaarde  $V(x,0) = \text{sgn } x$  leidt dan tot de volgende integraalvergelijking voor  $\varphi(t)$ ,

$$-\frac{1}{2\pi} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log |x-t| dt = \text{sgn } x, \quad k < |x| < 1,$$

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log |x-t| dt = -2\pi \text{sgn } x, \quad k < |x| < 1.$$

Differentieer de laatste integraalvergelijking naar  $x$ . Dan is (1) gelijkwaardig met de singuliere integraalvergelijking

$$(2) \quad \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = 0, \quad k < |x| < 1,$$

onder de nevenvoorwaarden

$$(3) \quad \begin{cases} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log |1-t| dt = -2\pi, \\ \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log |1+t| dt = 2\pi. \end{cases}$$

21-10-1976 / 16-3-1982 / 24-5-85  
Ter oplossing van (2) voeren we in de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

Dan is  $\Phi(z)$  analytisch in het  $z$ -vlak met uitsluitend  $[-1, -k]$ ,  $[k, 1]$ .

Voorts geldt  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

We zullen toelaten dat  $\varphi(t)$  singulier wordt aan de uiteinden  $t = \pm 1$ ,  $t = \pm k$ , i.e.

$$\varphi(t) = O[(t+1)^{\alpha_1}] \text{ bij } t = -1, \quad \varphi(t) = O[(k-t)^{\alpha_2}] \text{ bij } t = -k,$$

$$\varphi(t) = O[(t-k)^{\alpha_3}] \text{ bij } t = k, \quad \varphi(t) = O[(t-1)^{\alpha_4}] \text{ bij } t = 1,$$

met  $0 \leq \alpha_{1,2,3,4} < 1$ . De integraal  $\Phi(z)$  heeft dan een voortgelijk gedrag bij  $z = \pm 1$ ,  $z = \pm k$ .

Met behulp van de formules van Plemelj volgt,

$$\begin{cases} \Phi^+(k) - \Phi^-(k) = 2\pi i \varphi(k), & k < |k| < 1, \\ \Phi^+(k) + \Phi^-(k) = 2 \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, & k < |x| < 1. \end{cases}$$

Voor  $\Phi(z)$  ontstaat er nu het homogene Hilbert probleem

(4)  $\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = 0, \quad k < |x| < 1.$

Dit probleem wordt opgelost op de bekende manier,

$$[\log \Phi^+(k)]^+ - [\log \Phi^+(k)]^- = \log(-1) = \pi i, \quad k < |x| < 1,$$

$$\log \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \frac{\pi i}{t-z} dt = \frac{1}{2} \log \frac{z+k}{z+1} + \frac{i}{2} \log \frac{z-1}{z-k},$$

$$\Phi(z) = (z+1)^{-\frac{1}{2}} (z+k)^{\frac{1}{2}} (z-k)^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{\frac{1}{2}}.$$

De fundamentele oplossing wordt gegeven door

$$\chi(z) = (z+1)^{n_1+i} (z+k)^{n_2+i} (z-k)^{n_3+i} (z-1)^{n_4+i},$$

met  $n_1, n_2, n_3, n_4$  geheel en nader bekijken. In verband met het voorgeschreven gedrag van  $\chi(z)$  bij de uitkomsten  $z = \pm k, z = \pm 1$  kiezen we

$$\theta \rightarrow 1 \leftarrow \frac{n_j+i}{z \pm k_j}$$

$$-1 < n_1+i \leq 0, \quad -1 < n_2+i \leq 0, \quad -1 < n_3+i \leq 0, \quad -1 < n_4+i \leq 0,$$

waarmit volgt  $n_1 = n_3 = 0, \quad n_2 = n_4 = -1$  en

$$\chi(z) = (z^2-1)^{-\frac{1}{2}} (z^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

We onderzoeken nu eerst de analytischeit van  $\chi(z)$ . We spreken af

$$-\pi < \arg(z \pm 1) < \pi, \quad -\pi < \arg(z \pm k) < \pi,$$

hetgeen in eerste instantie correspondeert met een deede  $[-\alpha, 1]$ .

We geven nu de volgende tabel van  $\arg(z \pm 1), \arg(z \pm k)$  voor  $z = x \pm i0$  op de deede:

	$k < x < 1$	$-k < x < +k$	$-1 < x < -k$	$x < -1$
$\arg(z-1)$	$\pm \pi$	$\pm \pi$	$\pm \pi$	$\pm \pi$
$\arg(z-k)$	0	$\pm \pi$	$\pm \pi$	$\pm \pi$
$\arg(z+k)$	0	0	$\pm \pi$	$\pm \pi$
$\arg(z+1)$	0	0	0	$\pm \pi$
$\arg \chi(z)$	$\mp \frac{1}{2} \pi$	$\mp \pi$	$\mp \frac{3}{2} \pi$	$\mp 2\pi$

Uit deze tabel is af te leiden:

$$k < x < 1: \chi^{\pm}(x) = e^{\mp \frac{1}{2} \pi i} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}} = \mp i (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$-1 < x < -k: \chi^{\pm}(x) = e^{\mp \frac{3}{2} \pi i} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm i (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$-k < x < k: \chi^{\pm}(x) = e^{\mp \pi i} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (k^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} = - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (k^2-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$x < -1: \chi^{\pm}(x) = e^{\mp 2\pi i} (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}} = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Uit de laatste twee resultaten volgt  $\chi^{\pm}$

$$\chi^+(x) = \chi^-(x) \text{ voor } -k < x < k, \text{ en voor } x < -1.$$

Volgens stelling A is dan  $\chi(z)$  analytisch voor  $-k < z < k$  en voor  $z < -1$  i.e. dit gedeelte van de deede vervalt.



De functie  $\chi(z)$  is dus analytisch in het  $z$ -vlak met uitsluitend  $[k, 1]$ .  
 Het dus steeds geldt

$$(5) \quad \begin{cases} \chi^2(x) = \mp i \operatorname{sgn}(x) [R(x)]^{-1/2}, & k < |x| < 1, \\ R(x) = (1-x^2)(x^2-k^2). \end{cases}$$

De algemene oplossing van het homogene Hilbert probleem (4) wordt nu gegeven door

$$\Phi(z) = \chi(z) P(z),$$

waarbij  $P(z)$  een willekeurig polynoom voorstelt.

In verband met de voorwaarde  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ , is  $P(z)$  een polynoom van de graad  $\leq 1$ . We vinden dus als uitdrukkelijke oplossing

$$\Phi(z) = [A + Bz] \chi(z),$$

waarbij  $A, B$  willekeurige constanten zijn.

De functie ladingdichtheid  $\varphi(x)$  wordt nu gegeven door

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi i} [\Phi^+(x) - \Phi^-(x)] = \frac{1}{2\pi i} (A + Bx) [\chi^+(x) - \chi^-(x)] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{sgn}(x) (A + Bx) [R(x)]^{-1/2}, \quad k < |x| < 1, \end{aligned}$$

overeenkomstig (5).

De constanten  $A, B$  worden nu nader vastgelegd door de randvoorwaarden nevenvoorwaarden (3). Deze voorwaarden worden als volgt herschreven

$$(3) \quad \begin{cases} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log|1+t| dt = -2\pi \\ \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log|1+t| dt = 2\pi \end{cases}$$

Substitueer hierin de gevonden oplossing voor  $\varphi(t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-k} (A - Bt) [R(t)]^{-1/2} \log|1+t| dt + \frac{1}{\pi} \int_k^1 (A + Bt) [R(t)]^{-1/2} \log|1+t| dt &= -2\pi, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-k} (A + Bt) [R(t)]^{-1/2} \log|1+t| dt &= 2\pi. \end{aligned}$$

Neem nu de som en het verschil van deze twee relaties

$$\begin{cases} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) [\varphi(-t) + \varphi(t)] \log \frac{1+t}{1-t} dt = 0, \\ \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) [\varphi(-t) - \varphi(t)] \log|1+t| dt = -4\pi, \end{cases}$$

en substitueer hierin de gevonden oplossing voor  $\varphi(t)$ , dan volgt

$$\begin{cases} B \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) |t| [R(t)]^{-1/2} \log|1+t| dt = 0, \\ A \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \operatorname{sgn}(t) [R(t)]^{-1/2} \log|1+t| dt = -2\pi^2. \end{cases}$$

Uit de eerste betrekking volgt  $B=0$ . Dit was ook te voorzien omdat de ladingdichtheid  $\varphi(x)$  oneven zal zijn in  $x$ ,  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ .

Teneinde  $A$  te bepalen berekenen we de bijbehorende integraal,

Opmerking. Op blz. 93 wordt afgeleid  $I = \pi K(k)$ .

Zelfde resultaat wordt ook gegeven in

C. J. Bouwkamp, Capita Selecta Toegepaste Wiskunde,  
Collegedictaat 1967, p. 13, form. (33):

$$K(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log \left| \frac{x+c}{x-c} \right|}{\sqrt{(1-k^2x^2)(x^2-1)}} dx, \quad 1 \leq c \leq 1/k.$$

Deze identiteit werd als nevenresultaat gevonden bij de behandeling van het potentiaalprobleem voor een geladen strip  $|x| \leq a, y=0$  op potentiaal 1, tussen de gaarde vlakken  $-a < x < a, y = \pm b$ .

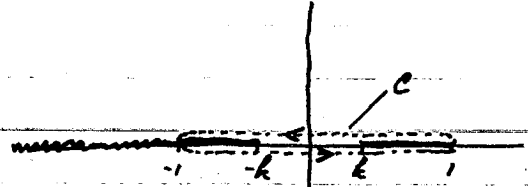
$$I = \left( \int_{-1}^k + \int_k^1 \right) \operatorname{sgn}(t) [R(t)]^{-\frac{1}{2}} \log(1+t) dt.$$

Beschouw daartoe de contour integraal

$$J = \int_C X(z) \log(z+1) dz = \int_C (z^2-1)^{-\frac{1}{2}} (z^2-k^2)^{-\frac{1}{2}} \log(z+1) dz.$$

De factor  $X(z)$  is analytisch in het  $z$ -vlak met sneden  $[-1, -k]$ ,  $[k, 1]$ . De factor  $\log(z+1)$  is analytisch in het  $z$ -vlak met snede  $[-\infty, -1]$  waarbij wordt afgesproken  $-\pi < \arg(z+1) < \pi$ .

De contour  $C$  zal een gesloten kromme zijn aan ~~weerskanten~~ van het boven- en onderkant van het interval  $[-1, 1]$ .



Dan is:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 [X^-(x) - X^+(x)] \log(x+1) dx = \\ &= \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) [X^-(x) - X^+(x)] \log(x+1) dx = \\ &= 2i \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \operatorname{sgn}(x) [R(x)]^{-\frac{1}{2}} \log(1+x) dx = 2i I, \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van vroegere resultaten over  $X(z)$ .

De integraand is analytisch buiten het interval  $[-\infty, 1]$  van de reële  $z$ .

Blaas nu de contour  $C$  op tot een oneindig grote cirkel en een lus aan weerskanten van het interval  $[-a, 1]$ .

De bijdrage van de grote cirkel tot de integraal nadert tot nul voor  $R \rightarrow \infty$  omdat

$$X(z) \log(z+1) = O\left(\frac{\log R}{R^2}\right)$$

voor  $|z| \rightarrow R \rightarrow \infty$ .

Er blijft dus alleen over de integraal langs de lus.

Bedenk nu dat voor  $x < -1$  geldt:

$$X^\pm(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \lim_{z \rightarrow x \pm i0} \log(z+1) = \log(-1-x) \pm \pi i.$$

Wij vinden dan voor de integraal  $J$ :

$$J = \int_{-\infty}^{-1} \left\{ X^+(x) [\log(-1-x) + \pi i] - X^-(x) [\log(-1-x) - \pi i] \right\} dx =$$

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{-1} (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Daarmee voor de integraal  $I$ ,

$$I = \pi \int_{-\infty}^{-1} (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} (x^2-k^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Vervang nu  $x$  door  $\frac{1}{x}$  dan gaat de laatste integraal over in

$$I = \pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}}.$$

J. M. Borwein and P. B. Borwein, The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions, SIAM Review 26, 357-366 (1984)

Zij  $0 < b < a$ ,  $a_0 := a$ ,  $b_0 := b$ . Besselows iteraties

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \quad a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

Daar is  $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$  en dus bestaat  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ ; tevens weten we convergent  $L$  het arithmetisch-geometrisch gemiddelde van  $a$  en  $b$ :  $L = AG(a, b)$ .

Beschouw volledige elliptische integraal van eerste soort

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$$

Met substitutie  $t = b \tan \theta$  volgt

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

Vervolgen is of te doen, met de substitutie  $t = u + \sqrt{u^2 + a^2}$ ,  $u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{a^2}{t}\right)$ ,

$$I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$$

Daarmee volgt dat  $I(a_n, b_n)$  onafhankelijk is van  $n$ , en dus

$$I(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n, b_n) = I(L, L) = \frac{\pi}{2L} = \frac{\pi}{2} [AG(a, b)]^{-1},$$

$$K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = \frac{\pi a}{2} \frac{1}{AG(a, b)}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{AG(1, k')}$$

Werk in 1974 voojaar, niet in 1975 najaar, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985

Opmerken dat (I) gelijkwaardig is met (II) plus additionele voorwaarde dat  $a_n$  (I) voldaan is in een punt b.v. punt  $x=1$  of  $x=-1$ .

De laatste integraal is de standaardvorm van de volledige elliptische integraal van de eerste soort genoteerd als

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

We vinden dus

$$I = \pi K(k), \quad A = -\frac{2\pi}{K(k)},$$

en vervolgens

$$\varphi(x) = \frac{2}{K(k)} \operatorname{sgn}(x) [R(x)]^{-1/2} = \frac{2}{K(k)} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}} \quad k < |x| < 1.$$

De lading per lengte-eenheid op de strips wordt gegeven door

$$Q = \pm \int_k^1 \varphi(x) dx = \pm \frac{2}{K(k)} \int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}},$$

waarbij plus-tekens gelden voor de strip  $k < x < 1$  en min-tekens voor de strip  $-1 < x < -k$ .

Vervang nu  $x$  door  $\sqrt{1-x^2}$  dan gaat de integraal over in

$$Q = \pm \frac{2}{K(k)} \int_0^{\sqrt{1-k^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2-x^2}} = \pm \frac{2}{K(k)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-k^2)x^2}} = \pm \frac{2K(k')}{K(k)},$$

waarin  $k' = \sqrt{1-k^2}$  de complementaire modulus heet.

De capaciteit per lengte-eenheid wordt nu gegeven door

$$C = \frac{K(k')}{K(k)}.$$

Opmerking. Het voorgaande potentiaalprobleem kan ook worden opgelost met behulp van conforme afbeelding via de formules van Schwarz-Christoffel, zie F. Oberhettinger en W. Magnus, Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Springer-Verlag, Berlin, 1949.

### Integraalvergelijking met logaritmische kern. I.

Literatuur: G.F. Carrier, H. Krook, and C.E. Pearson, Functions of a complex variable, Mc Graw-Hill, New York, 1966, p. 428-429.

We beschouwen de integraalvergelijking met logaritmische kern

$$(I) \quad \int_{-1}^1 \log|x-t| f(t) dt = g(x), \quad -1 < x < 1.$$

De integraalvergelijking komt voort uit een potentiaalprobleem voor een strip.

Differentieer de integraalvergelijking naar  $x$ . Volgens het lemma op p. 89 vinden we dan

$$(II) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{x-t} dt = g'(x), \quad -1 < x < 1,$$

waarbij de integraal moet worden opgevat als een Cauchy hoofdw waarde.

De aldus verkregen singuliere integraalvergelijking met Cauchy kern wordt op de bekende manier opgelost. Voor in de Cauchy integraal

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

dan heeft  $F(z)$  de volgende eigenschappen:

1°.  $F(z)$  is analytisch overal behalve op  $[-1, 1]$ .

2°.  $F(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

3°.  $F(z) = O(|z-1|^{-\delta_1})$  bij  $z=1$ ,  $F(z) = O(|z+1|^{-\delta_2})$  bij  $z=-1$ , voor zekere  $\delta_{1,2}$  met  $0 \leq \delta_{1,2} < 1$ .

4°. Formules van Plemelj:

$$\begin{cases} F^+(x) - F^-(x) = f(x), \\ F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt \end{cases} \text{ voor } -1 < x < 1.$$

Vergelijk de laatste betrekking met de singuliere integraalvergelijking.

De functie  $F(z)$  is oplossing van het Hilbert probleem:

$$F^+(x) + F^-(x) = \frac{i}{\pi} g'(x), \quad -1 < x < 1.$$

Beschouw eerst het homogeen Hilbert probleem

$$F^+(x) + F^-(x) = 0, \quad -1 < x < 1.$$

De fundamentele oplossing van dit probleem, onder voorwaarde 3°, is afgeleid op p. 76:

$$\chi(z) = (z^2 - 1)^{-1/2}.$$

Stel nu in het inhomogeen Hilbert probleem  $F(z) = \chi(z) \psi(z)$ , dan gaat het inhomogeen probleem over in

$$\psi^+(x) - \psi^-(x) = -\frac{1}{\pi} g'(x) \sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1,$$

met als oplossing

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi^2 i} \int_{-1}^1 \frac{g'(t) \sqrt{1-t^2}}{t-z} dt + P(z),$$

waarin  $P(z)$  een polynoom voorstelt.

Voor  $F(z)$  volgt de oplossing

$$F(z) = -\frac{(z^2-1)^{-1/2}}{2\pi^2 i} \int_{-1}^1 \frac{g'(t) \sqrt{1-t^2}}{t-z} dt + \frac{C}{(z^2-1)^{1/2}},$$

waarbij  $P(z) = C = \text{const.}$  gesteld is vanwege voorwaarde 3°.

Bereken nu voor  $-1 < x < 1$ ,

$$F^{\pm}(x) = \pm \frac{(1-x^2)^{-1/2}}{2\pi^2 i} \int_{-1}^1 \frac{g'(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt + \frac{C}{(x^2-1)^{1/2}}$$

De constante  $C$  laat nu nader aangeven door nauwkeurig onderzoek van het gedrag van  $F(z)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ ,

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

Alternatieve behandeling

Merk nu op dat de oorspronkelijke integraalvergelijking (I) gelijkwaardig is met (II) en de voorwaarde

$$(III') \quad \int_{-1}^1 f(t) \log(1+t) dt = g(-1).$$

De voorwaarde (III') drukt uit dat in een punt nl.  $x=1$  voldaan is aan (I).

Schrijf nu de oplossing  $f(x)$  in de volgende vorm:

$$f(x) = F_1^+(x) - F_1^-(x) + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

waarbij

$$F_1(z) = -\frac{(z^2-1)^{-1/2}}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t)\sqrt{1-t^2}}{t-z} dt.$$

Substitueer deze oplossing in (III'), i.e.

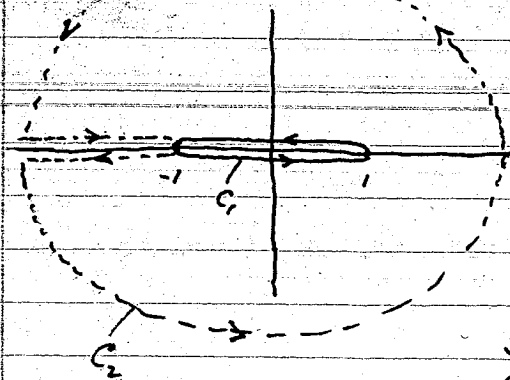
$$(IV') \quad \int_{-1}^1 [F_1^+(t) - F_1^-(t)] \log(1+t) dt + C \int_{-1}^1 \frac{\log(1+t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = g(-1)$$

waardoor de constante  $C$  in principe bepaald is.

De eerste integraal in (IV') wordt als volgt herleid:

$$I = \int_{-1}^1 [F_1^+(t) - F_1^-(t)] \log(1+t) dt = -\int_{C_1} F_1(z) \log(z+1) dz$$

waarbij  $C_1$  een contour is aan werkstaken van de sneed  $-1 \leq z \leq 1$ . Het  $\log(z+1)$  wordt de hoofdwaaard beduidt i.e.  $\arg(z+1) \leq \pi$ . De integrand  $F_1(z) \log(z+1)$  is dan analytisch in het  $z$ -vlak met sneed  $-1 \leq z \leq 1$  (vanwege  $F_1(z)$ ) en sneed  $-\infty < z \leq -1$  (vanwege  $\log(z+1)$ ).



Blaas nu  $C_1$  op tot een contour  $C_2$  bestaande uit de oneindig grote cirkel en een lus aan werkstaken van de sneed  $-\infty < z \leq -1$ ;

$$\text{dan is } I = -\int_{C_1} = -\int_{C_2}.$$

De bijdrage van de oneindig grote cirkel tot de integraal = 0, want  $F_1(z) = O(\frac{1}{|z|^2})$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

Stel op de sneed  $z = x \pm i0$ ,  $x < -1$ , dan is

$$\log(z+1) = \log|x+1| \pm \pi i, \quad F_1(z) = F_1^+(x) = F_1^-(x), \text{ bedenk}$$

dat  $F_1(z)$  analytisch is op  $-\infty < z < -1$ .

Bereken nu voor  $-1 < x < 1$ ,

$$F^+(x) = \pm \frac{i}{\pi} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \left[ \pm \frac{1}{2} g'(x) \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g'(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \right] \mp \frac{iC}{\sqrt{1-x^2}}$$

Met behulp van de formules van Plemelj volgt dan de oplossing van de singuliere integraalvergelijking (II):

$$f(x) = F^+(x) - F^-(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{g'(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt + \frac{C^*}{\sqrt{1-x^2}}$$

waarin  $C$  een willekeurige constante voorstelt.

Merk nu op dat de oorspronkelijke integraalvergelijking (I) gelijkwaardig is met (II) en de voorwaarde

$$(III) \quad \int_{-1}^1 f(t) \log(1-t) dt = g(1).$$

De voorwaarde (III) drukt uit dat in  $x=1$  een punt n.l.  $x=1$  voldaan is aan (I). Substitueer de gevonden  $f$  in (III) dan volgt na verwisseling van de integratievolgorde

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 g'(s) \sqrt{1-s^2} ds \int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{s-t} + C \int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = g(1).$$

Door het den betrekking wordt de constante  $C$  bepaald.

Maak nu gebruik van de resultaten

$$(IV) \quad \int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{s-t} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{1-s^2}} + \frac{\pi \arcsin s}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\pi \log 2$$

die aanstands afgeleid zullen worden.

Na substitutie volgt

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 g'(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g'(s) \arcsin s ds - \pi C \log 2 = g(1),$$

$$\frac{1}{2} [g(1) - g(-1)] + \frac{1}{\pi} g(s) \arcsin s \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds - \pi C \log 2 = g(1),$$

$$C = -\frac{1}{\pi \log 2} \int_{-1}^1 \frac{g(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds,$$

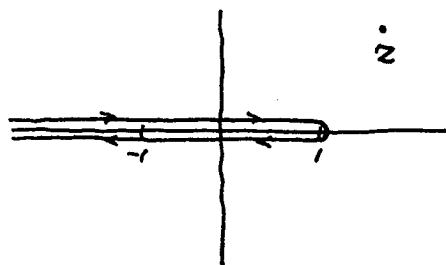
zodat de oplossing van de oorspronkelijke integraalvergelijking luidt:

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{g'(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt - \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\pi \log 2} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Afleiding van (IV). Ga uit van de Cauchy integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\log(w-1)}{(w-1)^{\frac{1}{2}}(w-z)} dw$$

waarin de contour  $C$  een lus is langs   
 boven   
 onder- en bovenzijde van het   
 interval  $(-1, 1]$  van de reële as.





Vervolg alternatieve behandeling.

We vinden dan

$$I = \int_{-\infty}^{-1} [\log(x+1+nc)] F_1^+(x) dx + \int_{-\infty}^{-1} [\log(x+1-nc)] F_1^+(x) dx = \\ = -2\pi i \int_{-\infty}^{-1} F_1^+(x) dx.$$

Bereken nu uitgaande van  $F_1(z)$ , de limiet  $F_1^+(x)$  voor  $x < -1$ :

$$F_1^+(x) = \frac{(x^2-1)^{-1/2}}{2\pi^2 i} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt.$$

Substitueer dit in de integraal  $I$  en vervang  $x$  door  $-x$ , dan volgt

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t) \sqrt{1-t^2}}{t+x} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g(t) \sqrt{1-t^2} dt \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1} (t+x)}.$$

De binnenste integraal is nader uit te werken door de substitutie  $x = \cosh s$ ,

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1} (t+x)} = \int_0^{\infty} \frac{ds}{t + \cosh s} = \int_0^{\infty} \frac{2e^s ds}{e^{2s} + 2te^s + 1} = \int_1^{\infty} \frac{2 du}{u^2 + 2tu + 1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \arctan \left| \frac{u+t}{\sqrt{1-t^2}} \right|_1^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \arctan \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

Substitueer dit in de integraal  $I$  dan volgt met partiële integratie

$$(IV) \quad I = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} g(t) \arctan \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = -\frac{2}{\pi} g(t) \arctan \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ = g(1) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

De tweede integraal in (IV) laat zich berekenen als aangegeven in de opmerking op p. 98; uitkomst  $-\pi \log 2$ .

Met deze resultaten gaat (IV) over in

$$g(1) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - \pi C \log 2 = g(1),$$

waarmit volgt

$$C = -\frac{1}{\pi \log 2} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

De oplossing van de oorspronkelijke integraalvergelijking luidt dus

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \pm \frac{(1-x^2)^{-1/2}}{\pi^2 \log 2} \int_{-1}^{+1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Met  $\log(w-1)$ ,  $(z^2-1)^{1/2}$  in de hoofdwaaarden bedacht, i.e.  $|\arg(w \pm 1)| < \pi$ . De integrand is dan analytisch in het  $z$ -vlak met tueden  $-\infty < w \leq 1$ .

Met de stelling van Cauchy volgt

$$\Phi(z) = \frac{\log(z-1)}{(z^2-1)^{1/2}}$$

in het  $z$ -vlak met tueden  $-\infty < z \leq 1$ ;  $\log(z-1)$ ,  $(z^2-1)^{1/2}$  zijn weer hoofdwaaarden.

De integraal is anderszies als volgt uit te werken:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{-\infty}^{-1} \frac{\log(1-t) + \pi i}{(-1)\sqrt{t^2-1}(t-z)} dt + \int_{-1}^1 \frac{\log(1-t) + \pi i}{i\sqrt{1-t^2}(t-z)} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{\infty} \frac{\log(1-t) - \pi i}{-i\sqrt{1-t^2}(t-z)} dt + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\log(1-t) - \pi i}{(-1)\sqrt{t^2-1}(t-z)} dt \right] = \\ &= \int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}(t-z)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}(t-z)} dt. \end{aligned}$$

De eerste integraal in de laatste regel is nader uit te werken via de substitutie  $t = \cosh s$ ,

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}(t-z)} &= \int_0^{\infty} \frac{ds}{z + \cosh s} = \int_0^{\infty} \frac{2e^s ds}{e^{2s} + 2ze^s + 1} = \int_1^{\infty} \frac{2 du}{u^2 + 2zu + 1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \log \frac{z+1-\sqrt{z^2-1}}{z+1+\sqrt{z^2-1}}, \end{aligned}$$

waarbij voor logaritme en vierkantswortel de hoofdwaaarden is te nemen.

Combineer de voorgaande resultaten dan volgt

$$(V) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}(t-z)} dt = -\frac{\log(z-1)}{\sqrt{z^2-1}} - \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} \log \frac{z+1-(z^2-1)^{1/2}}{z+1+(z^2-1)^{1/2}}.$$

Neem in (V) de limiet voor  $z \rightarrow \infty$  dan volgt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) &= \\ = -\frac{\log z}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) - \left[\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] \log \frac{z+1-z+O\left(\frac{1}{z}\right)}{z+1+z+O\left(\frac{1}{z}\right)} &= \\ = -\frac{\log z}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) - \left[\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] \left[O\left(\frac{1}{z}\right) + \log(2z) + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] &= -\frac{\log z}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{aligned}$$

waaruit we afleem

$$\int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\pi \log 2$$

conform het tweede resultaat in (IV).

Neem in (V) de limiet voor  $z \rightarrow s \pm i0$ ,  $-1 < s < 1$ , dan volgt met de formules van Planché:

$$\begin{aligned}
& \pm i \frac{\log(1-s)}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\log|1-t|}{\sqrt{1-t^2}(t-s)} dt = \\
& = - \frac{\log(1-s) \pm \pi i}{\pm i \sqrt{1-s^2}} - \frac{1}{\pm i \sqrt{1-s^2}} \log \frac{1+s \mp i \sqrt{1-s^2}}{1+s \pm i \sqrt{1-s^2}} = \\
& = \pm i \frac{\log(1-s)}{\sqrt{1-s^2}} - \frac{\pi}{\sqrt{1-s^2}} \pm \frac{i}{\sqrt{1-s^2}} \cdot \mp 2i \arctan \sqrt{\frac{1-s}{1+s}} = \\
& = \pm i \frac{\log(1-s)}{\sqrt{1-s^2}} - \frac{\pi}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-s^2}} \arctan \sqrt{\frac{1-s}{1+s}}.
\end{aligned}$$

Merk op dat

$$2 \arctan \sqrt{\frac{1-s}{1+s}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin s,$$

zoals eenvoudig is a/f te leiden. Dan volgt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\log|1-t|}{\sqrt{1-t^2}(t-s)} dt = -\frac{\pi}{2\sqrt{1-s^2}} - \frac{\arcsin s}{\sqrt{1-s^2}}$$

conform het eerste resultaat in (IV).

Opmerking. Het tweede resultaat in (IV) is ook rechtstreeks a/f te leiden.

Ga daartoe uit van de B-integraal

$$I(p, q) = \int_{-1}^1 (1-t)^{p-1} (1+t)^{q-1} dt = \frac{2^{p+q-1} \Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

bifferentieer naar  $p$ , en stel  $p=q=\frac{1}{2}$  dan volgt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{\log(1-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} [\log 2 + \psi(\frac{1}{2}) - \psi(1)] = \\
&= \pi [\log 2 - \gamma - 2 \log 2 + \gamma] = -\pi \log 2.
\end{aligned}$$

Opgave. Leid af de volgende uitbreiding van (IV):

$$\int_{-1}^1 \frac{\log|a-t|}{\sqrt{1-t^2}(t-s)} dt = \frac{\pi^2 \operatorname{sgn}(s-a)}{2\sqrt{1-s^2}} - \frac{\pi \arcsin s}{\sqrt{1-s^2}}$$

geldig voor  $-1 \leq a \leq 1$ ,  $-1 < s < 1$ , waarbij  $\operatorname{sgn}(s-a) = \begin{cases} 1, & s > a, \\ 0, & s = a, \\ -1, & s < a. \end{cases}$

Zie Kap. Divergen II, #63.

196.

98A

red in 1974 majar, 1975, wd in 1977, 1978, wd in 1979, 1981, 1982, 1984, 1985

1978, vorkula:  $\int_{-1}^{+1} \log|x-t| f(t) dt = 1, -1 \leq x \leq 1$ ;  $\int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{x-t} dt = 0$ , vploring in §1.8

vploring  $f(x) = -\frac{1}{\pi \log 2} (1-x^2)^{-1/2}$

## Integraalvergelijking met logaritmische kern. II.

Literatuur: G.F. Carrier, H. Krook and C.E. Pearson, *Functions of a complex variable*, McGraw-Hill, New York, 1966, p. 428, 429.

We beschouwen de integraalvergelijking met logaritmische kern

$$(I) \quad \int_{-1}^{+1} \log|x-t| f(t) dt = x, \quad -1 < x < 1.$$

In Carrier-Krook-Pearson ~~Differentieer de integraal~~ wordt deze integraalvergelijking behandeld met algemeen rechtstreeks  $g(x)$ ; zie ook § 1.12.

Differentieer de integraalvergelijking (I) naar  $x$ . Volgens het lemma op p. 89 vinden we dan

$$(II) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{x-t} dt = 1, \quad -1 < x < 1,$$

waarbij de integraal moet worden opgevat als een Cauchy hoofdwert.

De integraalvergelijking (II) wordt op de bekende manier opgelost via invoering van de Cauchy integraal

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Dan heeft  $F(z)$  de volgende eigenschappen:

1°.  $F(z)$  is analytisch overal behalve op  $[-1, +1]$ .

2°.  $F(z) = O(1/z)$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

3°.  $F(z) = O(|z-1|^{-\delta})$  bij  $z=1$ ,  $F(z) = O(|z+1|^{-\delta})$  bij  $z=-1$ , voor zekere  $\delta_{1,2}$  met  $0 \leq \delta_{1,2} < 1$ .

4°. Formules van Plemelj:

$$\begin{cases} F^+(x) - F^-(x) = f(x), \\ F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} dt \end{cases} \quad \text{voor } -1 < x < 1.$$

De singuliere integraalvergelijking is nu over te voeren in het inhomogene Hilbert probleem:

$$(III) \quad F^+(x) + F^-(x) = \frac{i}{\pi}, \quad -1 < x < 1.$$

Ter oplossing van (III) beschouwen we het bijbehorende homogene Hilbert probleem

$$F^+(x) + F^-(x) = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Zoals afgeleid op bladz. 76 heeft dit probleem de fundamentele oplossing

$$X(z) = (z^2 - 1)^{-1/2}.$$

Stel nu in (III)  $F(z) = X(z)G(z) = (z^2 - 1)^{-1/2}G(z)$ , dan gaat het inhomogene Hilbert probleem (III) over in

$$(IV) \quad G^+(x) - G^-(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Het laatste probleem is op de bekende wijze op te lossen; de oplossing

is niet te drukken in een Cauchy integraal.

We zullen nu echter het probleem (IV) op een andere manier oplossen zodanig dat in het eindresultaat geen Cauchy integraal voorkomt. Vergelijk daartoe  $G(z)$  met de functie

$$\Omega(z) = (z^2 - 1)^{-1/2}, \quad -\pi \leq \arg(z \pm 1) < \pi.$$

De functie  $\Omega(z)$  heeft analoge analytische eigenschappen als  $G(z)$ . In het bijzonder is

$$(V) \quad \Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 2i\sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Gelid door (IV), (V) vormen we de combinatie  $G(z) - \frac{i}{2\pi} \Omega(z)$ .

Deze functie is continue over  $(-1, 1)$  en daarmee analytisch op  $(-1, 1)$ . In de punten  $z = \pm 1$  kan geen poel of breuk worden zoodat  $G(z) - \frac{i}{2\pi} \Omega(z)$  een gehele functie is. Het heb gedrag voor  $|z| \rightarrow \infty$ , d.w.z.  $G(z) = O(1)$ ,  $\Omega(z) = O(z)$ , volgt met de stelling van Liouville

$$G(z) - \frac{i}{2\pi} \Omega(z) = Az + B, \quad \frac{G(z)}{z} = \frac{\Omega(z)}{z} + \frac{A}{z} + \frac{B}{z},$$

$$G(z) = \frac{i}{2\pi} (z^2 - 1)^{-1/2} + Az + B,$$

waarin  $A, B$  willekeurige constanten zijn. Nogmaals bekijken van de eis  $G(z) = O(1)$  als  $|z| \rightarrow \infty$ , voert tot  $A = -\frac{i}{2\pi}$  en dus

$$G(z) = \frac{i}{2\pi} (z^2 - 1)^{-1/2} - \frac{i}{2\pi} z + B.$$

Daarmee volgt voor  $F(z)$ ,

$$F(z) = (z^2 - 1)^{-1/2} G(z) = \frac{i}{2\pi} (z^2 - 1)^{-1/2} - \frac{i}{2\pi} z + B(z^2 - 1)^{-1/2}$$

~~Bereken nu  $F^{\pm}(x)$ :~~

$$\frac{F^{\pm}(x)}{x} = \frac{1 - (x-B)(x \pm i)\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 < x < 1,$$

~~waarna we vinden~~

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{F^+(x)}{x} - \frac{F^-(x)}{x} =$$

Bereken nu  $F^{\pm}(x)$ :

$$F^{\pm}(x) = \frac{i}{2\pi} \mp \frac{x(1-x^2)^{-1/2}}{2\pi} \mp iB(1-x^2)^{-1/2},$$

waarna we vinden

$$(VI) \quad f(x) = F^+(x) - F^-(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

waarbij  $C$  een willekeurige constante is.

Merk nu op dat de oorspronkelijke integraalvergelijking (I) gelijkwaardig is met (II) en de vergelijking (I) vervuld in een punt bijv.  $x=0$ , dus

$$(VII) \quad \int_{-1}^{+1} \log |t| f(t) dt = 0.$$

Vol. 19, 1978. Miel in 1979, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985

### Verdere literatuur:

R.A. Hurd and B.K. Sachdeva, Scattering by a dielectric-loaded slit in a conducting plane, *Radio Science* 10, 565-572 (1975).

Artikel gaat over diffractie van E-gepolariseerde vlakke golf aan een spleet in een perfect geleidend vlak, waarbij de spleet gevuld is met een dielectrische cylinder; zie figuur.

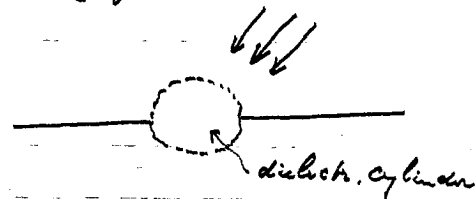
Met behulp van quasi-statische methode wordt het probleem herleid tot integraal-

vergelijking van type (I) met  $d^2 = \mu_1^2$

( $\mu_1 =$  magn. permeabiliteit van cylinder)

voor  $F(\theta) = E(a, \theta) - E(a, 2\pi - \theta)$ ; oppervlak cylinder wordt in cylinder coördinaten beschreven door  $\rho = a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Verdere uitwerking voor geval  $\mu_1 = 1$ ,  $d^2 = 1$ , waarbij de oplossing van de integraalvergelijking ontleend wordt aan Hurd-Sachdeva, *J. Appl. Phys.* 46, 1547-1553 (1975).



B. Lal, An electrostatic problem of a semi-circular strip, *ZAMM* 59, 271-272 (1979)

Artikel gaat over elektrostatisch veld van geleidende half-cirkelvormige strip  $r=a$ ,  $0 \leq \theta < \pi$ ;  $r, \theta$  zijn polcoördinaten. Potentiaal  $\Phi(r, \theta)$  wordt voorgesteld door

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{Q}{2\pi} \int_0^\pi g(\theta_1) \log |x - y| \Big|_{r_1=a}^{r_1=r} d\theta_1, \text{ waarin } g(\theta) = \frac{\partial \Phi}{\partial r_1}(r_1, \theta) \Big|_{r_1=a}$$

Op de strip is  $\Phi = \Phi_0 = \text{constant}$ ; leidt tot integraalvergelijking

$$-2\pi\Phi_0 = a \int_0^\pi g(\theta_1) \log(2a \sin \frac{1}{2}(\theta - \theta_1)) d\theta_1, \quad 0 < \theta < \pi$$

Differentieer naar  $\theta$ , dan volgt integraalvergelijking van type (b) hier beschouwd met  $d =$

$$\int_0^\pi g(\theta_1) \frac{\sin \theta_1 + \sin \theta}{\cos \theta_1 - \cos \theta} d\theta_1 = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

Oplossing:  $g(\theta) = B \left[ (\tan \frac{1}{2}\theta)^{\frac{1}{2}} + (\cot \frac{1}{2}\theta)^{\frac{1}{2}} \right], \quad B = -\frac{\Phi_0 \sqrt{2}}{a \log(\frac{1}{2}a)}$

Substitueer nu de oplossing (III) in #1 de voorwaarde (III) dan volgt

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t \log|t|}{\sqrt{1-t^2}} dt + C \int_{-1}^1 \frac{\log|t|}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$$

$= -\pi \log 2$

waaruit we afleiden  $C=0$ .

De oplossing van de integraalvergelijking (I) leidt dus

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2-11-1978

Integraalvergelijking van Lewin.

We beschouwen de integraalvergelijking

$$(I) \int_0^\pi F(\theta) \frac{\sin \theta + \alpha^2 \sin \phi}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = G(\phi), \quad 0 < \phi < \pi,$$

waarin  $G(\phi)$  een gegeven functie en  $F(\theta)$  de te bepalen functie is. De integraal is op te vatten als een Cauchy hoofdwaaarde, terwijl  $\alpha^2$  een positieve constante is.

Literatuur:

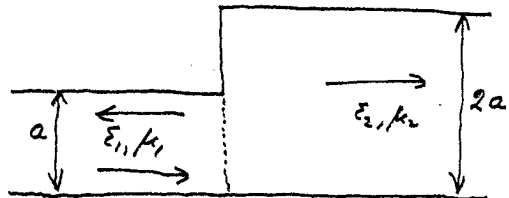
L. Lewin, On the resolution of waveguide discontinuity problems by the use of singular integral equations, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., MTT-9, 321-332 (1961).

R.A. Hurd and B.K. Sachdeva, Diffraction by a composite cylinder, J. Appl. Phys. 46, 1547-1552 (1975).

B. Lal and D.L. Jain, Acoustic diffraction of a plane wave by a semicircular infinite soft strip, J. Acoust. Soc. Amer. 62, 250-254 (1977).

Lewin behandelt een groot aantal problemen van reflectie/transmissie aan een discontinuïteit in een rechthoekige golfpijp, bijv. diafragma, strip, bifurcatie, ferriet-vulling, "strip". De problemen worden geformuleerd in termen van singuliere integraalvergelijkingen, overwegend van een simpele vorm en op bekende wijze op te lossen. De integraalvergelijking (I) treedt op

in geval van een stap-discontinuïteit waarbij de diameter van de golfpijp verdubbelt als in nevenstaande figuur. Het medium in de golfpijp heeft materiaalparameters  $\epsilon_1, \mu_1$  links



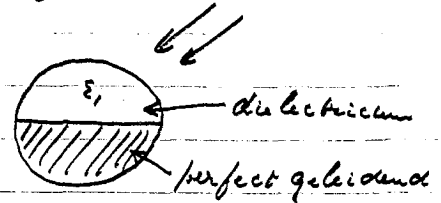
en  $\epsilon_2, \mu_2$  rechts. De functie  $F(\theta)$  hangt samen met het elektrische veld ten plattē in het apertuur tussen het linker en rechter deel van de golfpijp. Voort is  $\alpha^2 = 1 + \frac{2\mu_2}{\mu_1}$ , dus in het bijzonder  $\alpha^2 = 3$  in het geval van gelijke media.

Lewin lost de vergelijking (I) op, op een zeer verruïfde en ingewikkelde wijze. We zullen hier de vergelijking op een andere wijze behandelen en oplossen met behulp van



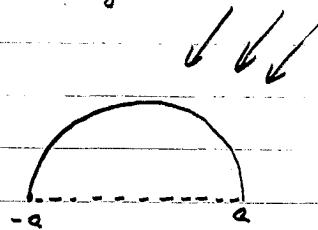
Muskhelishvili's theorie van singuliere integraalvergelijkingen. Het afleiding van de oplossing is meer systematisch en minder gecompliceerd dan bij die van Levin.

Hurd en Sachdeva behandelen de diffractie (verstrooiing) van een E-gepolariseerde vlakke golf aan een samengestelde cilinder met een helft dielectricum en een helft perfect geleidend.



Met behulp van een quasi-statische methode (laag-frequente benadering,  $ka \ll 1$ ) wordt het probleem herleid tot een integraalvergelijking van het type (I) met  $d^2 = 3$ ;  $F(\theta) = E'(\theta)$ , waarbij  $E(\theta)$  het elektrische veld is in  $\rho = a$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  ( $\rho, \theta$  zijn polcoördinaten;  $a$  is de straal van de cilinder).

Cal en Jain behandelen de diffractie van een vlakke akoestische golf  $u^{(0)} = \exp[ikr \cos(\theta - \theta_0)]$  aan een half-cirkelvormige strip  $r = a$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  ( $r, \theta$  zijn polcoördinaten). Het probleem wordt herleid tot de integraalvergelijking



$$\frac{i}{4} \int_0^\pi q(\theta) H_0^{(1)}(ka |\sin \frac{1}{2}(\theta - \phi)|) d\theta = -\exp[ika \cos(\phi - \theta_0)], \quad 0 < \phi < \pi;$$

hierin komt  $q(\theta)$  samen met de discontinuïteit van de normaalafgeleide van de golf over de strip. Bovenstaande integraalvergelijking wordt in laag-frequente benadering ( $ka$  klein) opgelost door ontwikkeling van  $q(\theta)$  en  $H_0^{(1)}$  en het reekterlies naar machten van  $ka$ . Voor de successieve ontwikkelingscoëfficiënten van  $q(\theta)$  ontstaan dan eenvoudigere integraalvergelijkingen van de gedaante

$$\int_0^\pi q_n(\theta) \psi_n(\theta, \phi) d\theta = v(\phi), \quad 0 < \phi < \pi,$$

waarin  $v(\phi)$  een bekende functie is, afhankelijk van de voorgaande  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ ; voort is  $\psi_n(\theta, \phi) = \log(\frac{1}{2}ka) + \gamma - \frac{1}{2}\pi i + \log|2 \sin \frac{1}{2}(\theta - \phi)|$ . Differentieer de integraalvergelijking voor  $q_n(\theta)$  naar  $\phi$ , dan volgt

$$\int_0^\pi q_n(\theta) \frac{\sin \theta + \sin \phi}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = 2v'(\phi), \quad 0 < \phi < \pi,$$

d.i. een vergelijking van type (I) met  $d^2 = 1$ .

Zowel Hurd-Sachdeva als Cal-Jain gebruiken het resultaat van Levin als oplossing van hun integraalvergelijking (I).

We zullen nu de vergelijking (I) oplossen met Muskhelishvili's theorie van singuliere integraalvergelijkingen. Om te beginnen voeren we in de nieuwe variabelen

$$\cos \theta = t, \quad \cos \phi = x, \quad \frac{F(\theta)}{\sin \theta} = f(t), \quad G(\phi) = g(x),$$

- dan gaat de integraalvergelijking (I) over in

$$(II) \quad \int_{-1}^1 f(t) \frac{\sqrt{1-t^2} + \alpha^2 \sqrt{1-x^2}}{t-x} dt = g(x), \quad -1 < x < 1.$$

De gevraagde functie  $f(t)$  mag integreerbare singulariteiten hebben in  $t = \pm 1$ , dan

$$f(t) = O((t-1)^{-\delta_1}) \text{ bij } t=1; \quad f(t) = O((t+1)^{-\delta_2}) \text{ bij } t=-1; \quad 0 \leq \delta_{1,2} < 1.$$

Voor nu in de Cauchy integralen

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t) \sqrt{1-t^2}}{t-z} dt, \quad \Phi_2(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

- dan hebben  $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$  de volgende eigenschappen:

1°  $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$  zijn analytisch overal behalve op  $-1 \leq z \leq 1$ ;

2°  $\Phi_1(z) = O(\frac{1}{z}), \Phi_2(z) = O(1)$  als  $z \rightarrow \infty$ ;

3°  $\Phi_{1,2}(z) = O((z-1)^{+\frac{1}{2} \mp \delta_1})$  bij  $z=1$ ;  $\Phi_{1,2}(z) = O((z+1)^{+\frac{1}{2} \mp \delta_2})$  bij  $z=-1$ ;  $+\frac{1}{2} \mp \delta_{1,2} > -\frac{1}{2}$ .

4° Formules van Plemelj voor  $-1 < x < 1$ ,

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = f(x) \sqrt{1-x^2}, \\ \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt, \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x) = i f(x) \sqrt{1-x^2}, \\ \Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt, \end{cases}$$

waarbij de betrekkingen voor  $\Phi_2$  volgen uit

$$\Phi_2^\pm(x) = \pm i \sqrt{1-x^2} \left[ \pm \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt \right]$$

Met behulp van de formules is de integraalvergelijking (II) te schrijven als

$$(III) \quad [\Phi_1(x) - i\alpha^2 \Phi_2(x)]^+ + [\Phi_1(x) + i\alpha^2 \Phi_2(x)]^- = -\frac{i}{\pi} g(x), \quad -1 < x < 1.$$

Verder volgt uit de formules van Plemelj

$$(IV) \quad [\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)]^+ + [-\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)]^- = 0, \quad -1 < x < 1.$$

De betrekkingen (III) en (IV) vormen een "vector" Hilbert-probleem voor de vectorfunctie  $\begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{bmatrix}$ . Probeer nu dit probleem te herleiden tot twee "scalair" Hilbert-problemen.

Vorm daartoe een lineaire combinatie van (III) en (IV) met weder te bepalen coëfficiënten  $A, B$ :

$$[(A+B)\Phi_1(x) + i(-\alpha^2 A + B)\Phi_2(x)]^+ + [(A-B)\Phi_1(x) + i(\alpha^2 A + B)\Phi_2(x)]^- = -\frac{iA}{\pi} g(x), \quad -1 < x < 1.$$

Kies nu  $A$  en  $B$  zo dat de min-functie een "veelvoud" is van de plusfunctie, i.e.

$$\frac{(A-B)\Phi_1(x) + i(\alpha^2 A + B)\Phi_2(x)}{(A+B)\Phi_1(x) + i(-\alpha^2 A + B)\Phi_2(x)} = \text{onafhankelijk van } \Phi_1, \Phi_2.$$

Van moet gelden

$$\frac{A-B}{A+B} = \frac{\alpha^2 A + B}{-\alpha^2 A + B}, \quad -\alpha^2 A^2 + AB + \alpha^2 AB - B^2 = \alpha^2 A^2 + AB + \alpha^2 AB + B^2$$

$$\alpha^2 A^2 + B^2 = 0, \quad A=1, \quad B = \pm i\alpha.$$

Uiteraard zijn  $A, B$  op een constante te vastgelegd; we mogen daarom  $A=1$  stellen.

Substitueer deze waarden van  $A$  en  $B$ , dan ontstaat er

$$[(1 \pm i\alpha) \Phi_1(x) + i(-\alpha^2 \pm i\alpha) \Phi_2(x)]^+ + [(1 \mp i\alpha) \Phi_1(x) + i(\alpha^2 \pm i\alpha) \Phi_2(x)]^- = -\frac{i}{\pi} q(x),$$

$$(1 \pm i\alpha) [\Phi_1(x) \mp \alpha \Phi_2(x)]^+ + (1 \mp i\alpha) [\Phi_1(x) \mp \alpha \Phi_2(x)]^- = -\frac{i}{\pi} q(x), \quad -1 < x < 1.$$

Voer nu in de lineaire combinaties

$$\Psi_1(z) = \Phi_1(z) - \alpha \Phi_2(z), \quad \Psi_2(z) = \Phi_1(z) + \alpha \Phi_2(z),$$

dan komen we tot de volgende Hilbert problemen voor  $\Psi_1(z), \Psi_2(z)$ :

1°  $\Psi_1(z), \Psi_2(z)$  zijn analytisch overal behalve op  $-1 \leq z \leq 1$ ;

2°  $\Psi_{1,2}(z) = O(1)$  als  $z \rightarrow \infty$ ;

3°  $\Psi_{1,2}(z) = O(|z-1|^{\frac{1}{2}-\delta_1})$  bij  $z=1$ ;  $\Psi_{1,2}(z) = O(|z+1|^{\frac{1}{2}-\delta_2})$  bij  $z=-1$ ;  $\frac{1}{2}-\delta_{1,2} > -\frac{1}{2}$ .

4° Voor  $-1 < x < 1$  geldt

$$(1+i\alpha) \Psi_1^+(x) + (1-i\alpha) \Psi_1^-(x) = -\frac{i}{\pi} q(x); \quad (1-i\alpha) \Psi_2^+(x) + (1+i\alpha) \Psi_2^-(x) = -\frac{i}{\pi} q(x).$$

Bepaal de oplossing van de bijbehorende homogene Hilbert problemen:

$$(1+i\alpha) \Psi_1^+(x) + (1-i\alpha) \Psi_1^-(x) = 0,$$

$$[\log \Psi_1(x)]^+ - [\log \Psi_1(x)]^- = \log \left( -\frac{1-i\alpha}{1+i\alpha} \right) = \pi i - 2\pi i \beta, \quad \beta = \frac{1}{\pi} \arctan \alpha,$$

$$\log \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\pi i - 2\pi i \beta}{t-z} dt = \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \log \frac{z-1}{z+1},$$

$$\Psi_1(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}-\beta} (z+1)^{-\frac{1}{2}+\beta}, \quad \chi_1(z) = (z-1)^{n_1+\frac{1}{2}-\beta} (z+1)^{n_2-\frac{1}{2}+\beta},$$

bedenk dat  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  en dat  $-\frac{1}{2} < n_1 + \frac{1}{2} - \beta \leq \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} < n_2 - \frac{1}{2} + \beta \leq \frac{1}{2}$  moet zijn wegens voorwaarde 3°, dus  $n_1 = n_2 = 0$  en

$$\chi_1(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}-\beta} (z+1)^{-\frac{1}{2}+\beta}, \quad \text{fundamentele oplossing};$$

$$(1-i\alpha) \Psi_2^+(x) + (1+i\alpha) \Psi_2^-(x) = 0$$

$$[\log \Psi_2(x)]^+ - [\log \Psi_2(x)]^- = \log \left( -\frac{1+i\alpha}{1-i\alpha} \right) = \pi i + 2\pi i \beta, \quad \beta = \frac{1}{\pi} \arctan \alpha,$$

$$\Psi_2(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}+\beta} (z+1)^{-\frac{1}{2}-\beta},$$

wegens voorwaarde 3° is

$$\chi_2(z) = (z-1)^{-\frac{1}{2}+\beta} (z+1)^{\frac{1}{2}-\beta}, \quad \text{fundamentele oplossing}.$$

$X_1(z), X_2(z)$  zijn eenwaardig door de afspraak  $-\pi < \arg(z \pm 1) < \pi$ ; voor  $-1 < x < 1$  is dan

$$X_1^\pm(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta} \exp[\pm \pi i (\frac{1}{2}-\beta)] = \pm i \frac{1 \mp i x}{\sqrt{1+x^2}} (1-x)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta},$$

$$X_2^\pm(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}+\beta} (1+x)^{\frac{1}{2}-\beta} \exp[\pm \pi i (-\frac{1}{2}+\beta)] = \mp i \frac{1 \pm i x}{\sqrt{1+x^2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}+\beta} (1+x)^{\frac{1}{2}-\beta}$$

Stel nu  $\Psi_1(z) = X_1(z) \Omega_1(z)$ ,  $\Psi_2(z) = X_2(z) \Omega_2(z)$ , dan vinden we de volgende elementaire Hilbert problemen voor  $\Omega_1(z), \Omega_2(z)$ :

$$i\sqrt{1+x^2} (1-x)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta} \Omega_1^+(x) - i\sqrt{1+x^2} (1-x)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta} \Omega_1^-(x) = -\frac{i}{\pi} g(x),$$

$$\Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1+x^2}} g(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}+\beta} (1+x)^{\frac{1}{2}-\beta}, \quad -1 < x < 1;$$

$$\Omega_2^+(x) - \Omega_2^-(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1+x^2}} g(x) (1-x)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta}, \quad -1 < x < 1.$$

De oplossing van deze problemen is eenvoudig te geven, waarna we voor  $\Psi_1(z), \Psi_2(z)$  vinden

$$\bar{\Psi}_1(z) = X_1(z) \Omega_1(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}-\beta} (z+1)^{-\frac{1}{2}+\beta} \left[ -\frac{1}{\pi\sqrt{1+z^2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t) (1-t)^{-\frac{1}{2}+\beta} (1+t)^{\frac{1}{2}-\beta}}{t-z} dt + P_1(z) \right],$$

$$\bar{\Psi}_2(z) = X_2(z) \Omega_2(z) = (z-1)^{-\frac{1}{2}+\beta} (z+1)^{\frac{1}{2}-\beta} \left[ \frac{1}{\pi\sqrt{1+z^2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t) (1-t)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+t)^{-\frac{1}{2}+\beta}}{t-z} dt + P_2(z) \right],$$

waarin  $P_1(z), P_2(z)$  polynomen zijn.

Mit de voorwaarde  $z^0: \bar{\Psi}_{1,2}(z) = O(1)$  voor  $z \rightarrow \infty$ , volgt  $P_1(z) = C_1, P_2(z) = C_2$  waarbij  $C_1, C_2$  willekeurige constanten zijn.

Mit  $\bar{\Psi}_1(z), \bar{\Psi}_2(z)$  bepalen we  $\Phi_1(z)$  (of  $\Phi_2(z)$ ):

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_1(z) + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_2(z).$$

Wegens  $\Phi_1(z) = O(\frac{1}{z}), z \rightarrow \infty$ , moet gelden  $C_2 = -C_1 = -C$ , zodat er nog een willekeurige constante overblijft in de oplossing:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & \frac{1}{2\pi\sqrt{1+z^2}} \left[ -\frac{(z-1)^{\frac{1}{2}-\beta} (z+1)^{-\frac{1}{2}+\beta}}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t) (1-t)^{-\frac{1}{2}+\beta} (1+t)^{\frac{1}{2}-\beta}}{t-z} dt + \right. \\ & \left. + \frac{(z-1)^{-\frac{1}{2}+\beta} (z+1)^{\frac{1}{2}-\beta}}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t) (1-t)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+t)^{-\frac{1}{2}+\beta}}{t-z} dt \right] \\ & + C \left[ \frac{(z-1)^{\frac{1}{2}-\beta}}{(z+1)} - \frac{(z+1)^{\frac{1}{2}-\beta}}{(z-1)} \right]. \end{aligned}$$

Bereken hieruit  $\Phi_1^\pm(x)$  voor  $-1 < x < 1$ .

$$\begin{aligned} \Phi_1^\pm(x) = & \frac{1}{2\pi\sqrt{1+d^2}} \left[ \mp i \frac{1 \mp i d}{\sqrt{1+d^2}} (1-x)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta} \left\{ \pm \frac{1}{2} g(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}+\beta} (1+x)^{\frac{1}{2}-\beta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t) (1-t)^{-\frac{1}{2}+\beta} (1+t)^{\frac{1}{2}-\beta}}{t-x} dt \right\} \right. \\ & \left. \mp i \frac{1 \pm i d}{\sqrt{1+d^2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}+\beta} (1+x)^{\frac{1}{2}-\beta} \left\{ \pm \frac{1}{2} g(x) (1-x)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t) (1-t)^{\frac{1}{2}-\beta} (1+t)^{-\frac{1}{2}+\beta}}{t-x} dt \right\} \right] + \\ & + C \left[ \pm i \frac{1 \mp i d}{\sqrt{1+d^2}} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} \pm i \frac{1 \pm i d}{\sqrt{1+d^2}} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} \right]. \end{aligned}$$

Tenslotte volgt dan de gevoolte functie  $f(x)$  uit

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = f(x) \sqrt{1-x^2},$$

namelyk

$$\begin{aligned} f(x) \sqrt{1-x^2} = & C^* \left[ \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} + \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} \right] - \\ & - \frac{1}{2\pi^2(1+d^2)} \int_{-1}^1 g(t) \left[ \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} + \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} \right] \frac{dt}{t-x}. \end{aligned}$$

We keren terug tot de oorspronkelijke variabelen door te stellen  $x = \cos \phi$ ,  $t = \cos \theta$ , dan is de oplossing van de oorspronkelijke integraalvergelijking (I):

$$\begin{aligned} F(\phi) = & C^* \left[ (\tan \frac{1}{2} \phi)^{1-2\beta} + (\cot \frac{1}{2} \phi)^{1-2\beta} \right] - \\ & - \frac{1}{2\pi^2(1+d^2)} \int_0^\pi G(\theta) \left[ \left( \frac{\tan \frac{1}{2} \theta}{\tan \frac{1}{2} \phi} \right)^{1-2\beta} + \left( \frac{\tan \frac{1}{2} \phi}{\tan \frac{1}{2} \theta} \right)^{1-2\beta} \right] \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \phi}, \quad 0 < \phi < \pi. \end{aligned}$$

Hierin is  $C^*$  een willekeurige constante. De vorm  $C^* \left[ (\tan \frac{1}{2} \phi)^{1-2\beta} + (\cot \frac{1}{2} \phi)^{1-2\beta} \right]$  is oplossing van de homogene integraalvergelijking (I) met rechterlid  $G(\phi) = 0$ .

In het artikel van Hurvitz-Sachdeva is  $d^2 = 3$ ; dan is  $\beta = \frac{1}{\pi} \arctan d = \frac{1}{3}$ ,  $1-2\beta = \frac{1}{3}$ .

In het artikel van Lal-Tajiri is  $d^2 = 1$ ; dan is  $\beta = \frac{1}{\pi} \arctan d = \frac{1}{4}$ ,  $1-2\beta = \frac{1}{2}$ .

Indien  $G(\theta)$  expliciet gegeven is en van een eenvoudige vorm is, kan de hoofdwert van de integraal in de oplossing  $F(\phi)$  uitgewerkt worden. Als voorbeelden beschouwen we de integraalvergelijking

$$\int_0^\pi F(\theta) \frac{\sin \theta + \sin \phi}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = \cos \phi, \quad 0 < \phi < \pi,$$

ontleend aan het artikel van Lal-Tajiri. Vergelijken met het algemene geval is nu  $d^2 = 1$  (dus  $\beta = \frac{1}{4}$ ) en  $G(\phi) = \cos \phi$ ,  $g(x) = x$ .

De oplossing van  $f(x)$  van p. 106 wordt dan als volgt.

$$f(x)\sqrt{1-x^2} = C^* \left[ \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} \right] - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^1 \left[ \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \frac{t dt}{t-x}$$

De laatste integralen zijn te berekenen met behulp van het eerste voorbeeld uit (1.4, p. 86):

$$\int_{-1}^1 (1-t)^{\frac{1}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}} \frac{t}{t-x} dt = \int_{-1}^1 (1-t)^{\frac{1}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}} dt + x \int_{-1}^1 (1-t)^{-\frac{3}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}} \frac{1-t}{t-x} dt =$$

$$= 2 \frac{\Gamma(\frac{5}{4}) \Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} - x \int_{-1}^1 (1-t)^{-\frac{3}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}} dt + x(1-x) \int_{-1}^1 (1-t)^{-\frac{3}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}} \frac{dt}{t-x} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} - x \frac{\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(1)} + x(1-x) \cdot (-\pi \cot \frac{3\pi}{4}) (1-x)^{-\frac{3}{4}} (1+x)^{-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1-2x) + \pi x (1-x)^{\frac{1}{4}} (1+x)^{-\frac{1}{4}};$$

$$\int_{-1}^1 (1-t)^{-\frac{1}{4}} (1+t)^{\frac{1}{4}} \frac{t}{t-x} dt = \int_{-1}^1 (1+t)^{-\frac{1}{4}} (1-t)^{\frac{1}{4}} \frac{t}{t+x} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1+2x) - \pi x (1-x)^{-\frac{1}{4}} (1+x)^{\frac{1}{4}}.$$

Substitueer deze resultaten, dan vinden we

$$f(x)\sqrt{1-x^2} = C^* \left[ \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} \right] - \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1-2x) \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} + \pi x + \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1+2x) \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{4}} - \pi x \right] =$$

$$= C^* \left[ \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} \right] - \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \left[ (1-2x) \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} + (1+2x) \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{4}} \right].$$

Na overgang op de voorwaarskalyke variabele  $x = \cos \phi$ , volgt

$$F(\phi) = C^{**} \left[ (\tan \frac{1}{2} \phi)^{\frac{1}{4}} + (\cot \frac{1}{2} \phi)^{\frac{1}{4}} \right] - \frac{\cos \phi}{2\pi\sqrt{2}} \left[ (\tan \frac{1}{2} \phi)^{\frac{1}{4}} - (\cot \frac{1}{2} \phi)^{\frac{1}{4}} \right],$$

als oplossing van de integraalvergelijking.

Aaddendum. Een zelfde soort integraalvergelijking komt voor als voorbeeld in C. Atkinson and F. G. Leppington, The asymptotic solution of some integral equations, IMA J. Appl. Math. 31, 169-182 (1983).

Atkinson en Leppington geven een methode voor de ~~oplossing~~ asymptotische oplossing van integraalvergelijkingen indien een kleine parameter  $\varepsilon > 0$ . De verkregen oplossing bestaat uit een "outer approximation" geldig in het grootste deel van het gebied, en een "inner approximation" die de fijnstructuur in de buurt van de eindpunten geeft. De methode wordt toegepast aan twee voorbeelden.

Het eerste voorbeeld betreft de volgende integraalvergelijking van Comminon

(ASAC J. Appl. Mech. 44, 631-636 (1977), voortkomend uit een contact probleem:

$$\int_{-1}^{+1} \left[ 1 - \beta^2 \left( \frac{1-t^2 w^2}{1-t^2 \eta^2} \right)^{1/2} \right] \frac{B(w)}{w-\eta} dw = 1, \quad -1 < \eta < 1.$$

Hierin is  $\beta$  een constante met  $0 < \beta < 1$ ;  $t = 1 - \varepsilon$  met  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Gaat de onbekende functie  $B(w)$  moet bovendien voldoen aan  $\int_{-1}^{+1} B(w) dw = 0$ , en begrensd zijn in  $w = \pm 1$ . Uiteindelijk leidt dit tot een transcendent vergelijking voor  $\varepsilon$  in termen van  $\beta$ . Atkinson en Coppington bepalen <sup>de</sup> "inter approximation"  $B_0(w)$  als oplossing van de integraalvergelijking met  $t = 1$ , i.e.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{B_0(w)}{w-t} dw - \beta^2 \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1-w^2}{1-t^2} \right)^{1/2} \frac{B_0(w)}{w-t} dw = 1, \quad -1 < t < 1.$$

Te verwachten is dat  $B(w) \sim B_0(w)$  behalve in de omgeving van  $w = \pm 1$ . De voorwaarde  $B(w)$  begrensd zijn in  $w = \pm 1$  wordt hierbij achterwege gelaten. De oplossing van de integraalvergelijking voor  $B_0(w)$  verloopt met de standaard theorie van Muskhelishvili. Voor in de Cauchy integraal

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{B_0(w)}{w-z} dw, \quad \Phi_2(z) = \frac{(z^2-1)^{-1/2}}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-w^2)^{1/2} B_0(w)}{w-z} dw,$$

dan volgt het vector Hilbert probleem

$$[\Phi_1 - i\beta^2 \Phi_2]^+ + [\Phi_1 + i\beta^2 \Phi_2]^- = \frac{1}{\pi i}; \quad [\Phi_1 - i\Phi_2]^+ - [\Phi_1 + i\Phi_2]^- = 0.$$

Voor nu in de hulffuncties  $\Psi_1(z) = \Phi_1(z) - i\beta^2 \Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z) = \Phi_1(z) + i\beta^2 \Phi_2(z)$ , dan ontstaan de scalaire Hilbert problemen

$$(1+\beta) \Psi_1^+(t) + (1-\beta) \Psi_2^-(t) = \frac{1}{\pi i}, \quad (1-\beta) \Psi_1^+(t) + (1+\beta) \Psi_2^-(t) = \frac{1}{\pi i}, \quad -1 < t < 1.$$

Met de notatie

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \text{ wordt de oplossing van deze problemen gevonden als}$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} + (z+1)^{-\frac{1}{2}-i\alpha} (z-1)^{-\frac{1}{2}+i\alpha} P_1(z),$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} + (z+1)^{-\frac{1}{2}+i\alpha} (z-1)^{-\frac{1}{2}-i\alpha} P_2(z).$$

Hierin worden de polynomen  $P_1, P_2$  vastgelegd door de eis  $\Phi_{1,2}(z) = O(z^{-2}), \Psi_{1,2}(z) = O(z^{-2})$  voor  $z \rightarrow \infty$  (volgens met  $\int_{-1}^{+1} B_0(w) dw = 0$ ):  $P_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} (z+2i\alpha), P_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} (z-2i\alpha)$ .

Tenslotte is dan

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{4\pi i} \left[ 2 - (z+2i\alpha)(z+1)^{-\frac{1}{2}-i\alpha} (z-1)^{-\frac{1}{2}+i\alpha} - (z-2i\alpha)(z+1)^{-\frac{1}{2}+i\alpha} (z-1)^{-\frac{1}{2}-i\alpha} \right],$$

$$B_0(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{2\pi i} \left[ (t+2i\alpha)(1+t)^{-\frac{1}{2}-i\alpha} (1-t)^{-\frac{1}{2}+i\alpha} + (t-2i\alpha)(1+t)^{-\frac{1}{2}+i\alpha} (1-t)^{-\frac{1}{2}-i\alpha} \right] \text{ voor } -1 < t < 1,$$

in overeenstemming met Atkinson-Coppington, form. (2.19).

Vervolgens wordt in het artikel een "inner approximation"  $B_1(w)$  bepaald, geldig in de omgeving van  $w = \pm 1$ . Na "stretching" van de variabelen met  $B_1(w)$  overeen aan een integraalvergelijking voldoen, die wordt opgelost met <sup>Stieltjes</sup> transformatie en Wiener-Hopf techniek. De "inner" en "outer approximation" worden dan aan elkaar geïmbedd met resultaat in een benaderde vergelijking voor  $\varepsilon$  in termen van  $\beta$ .