

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# **TOEGEPASTE ANALYSE III**

**Singuliere Integraalvergelijkingen**

**Prof. Dr. J. Boersma**

lentetrimester 1985

# Inhoudsbeschrijving

## TOEGEPASTE ANALYSE III

### (Singuliere Integraalvergelijkingen)

J. Boersma

lente 1985

Sectie	titel	blz
	LITERATUURLIJST	0.
1	De Cauchy-integraal	1
2	De formules van Plemelj	5
3	Het gedrag van $\Phi(z)$ bij de eindpunten van $L$	14
4	Voorbeelden van Caychy-integralen	20
5	Het Hilbertprobleem voor een contour	27
6	Het Hilbertprobleem voor een boog	32
7	Toepassingen van de theorie van het Hilbertprobleem	39
	Stroming om een profiel	44
8	Singuliere integraalvergelijking met Cauchy-kern	48
9	Potentiaalprobleem voor twee strips	56
	Tussen te voegen pagina's: $10^A$ , $23^A$ , $39^A$ , $40^A$ , $48^A$ , $52^A$	67-72
	APPENDIX: Elliptische integralen en elliptische functies	73

JdG, 24 November 2005

Toegepaste Analyse 3

Singuliere Integraalvergelijkingen

prof.dr. J. Boersma

Aantekeningen van het college 2B136  
gegeven in het lentetrimester 1985.

Toegepaste Analyse 3

Singuliere Integraalvergelijkingen

prof.dr. J. Boersma

Literatuur College Toegepaste Analyse 3 (2B136)

- N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations  
Noordhoff, Groningen, 1953 (CNS53MUS)
- N.I. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory  
of elasticity  
Noordhoff, Groningen, 1954 (FDG54MUS)
- F.D. Gakhov, Boundary value problems  
Pergamon Press, Oxford, 1966 (CNL66GAK)  
(veel vraagstukken)
- I. Gohberg, N. Krupnik One-dimensional linear singular integral equations,  
I. Introduction, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992 (CNS92GOH)*
- E. Meister Randwertaufgaben der Funktionentheorie,  
Teubner, Stuttgart, 1983 (CNS83MEI)*

11-9-1992

1.

College Toegepaste Analyse 3

docent: Prof. dr. J. Boersma.

Onderwerp: Singuliere Integraalvergelijkingen.

Referentie: N.I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, 1953.

1. De Cauchy Integraal.

Ter introductie enige begrippen.

- (Gladde) boog is een kromme in het  $(x, y)$  vlak gegeven door de parameter voorstelling  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $s_a \leq s \leq s_b$ ; vaak is  $s$  de booglengte.

Waarbij -  $x(s)$  en  $y(s)$  continu differentieerbaar op  $[s_a, s_b]$

-  $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 \neq 0$

-  $(x(s_1), y(s_1)) \neq (x(s_2), y(s_2))$  als  $s_1 \neq s_2$ .

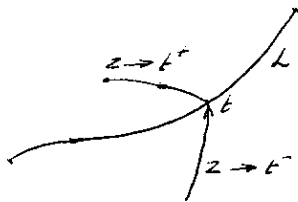
- als  $s$  de booglengte is, dan  $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$ .

- (Gladde) contour is een gladde boog met de toewijzing:

$x(a) = x(b)$ ,  $y(a) = y(b)$ ;  $x'(s_a) = x'(s_b)$ ,  $y'(s_a) = y'(s_b)$

- Positieve richting.

Op boog of contour wordt een positieve richting gekozen. Voor een contour is dat tegen de klok in. Lopend langs boog of contour is links de positieve en rechts de negatieve kant.



Zij  $L$  een boog of contour en  $t \in L$ ,  $t$  een eindpunt van  $L$ .

Dan:  $z \rightarrow t^+$  nadering van positieve kant (links)

$z \rightarrow t^-$  nadering van negatieve kant (rechts)

Bij contour  $L$ : buuningsgebied  $S^+$ , buuningsgebied  $S^-$ .

Definitie: Zij  $f(z)$  gedefinieerd op boog/contour  $L$ , zij  $t = x+iy \in L$ .

De functie  $f$  heet Höldercontinu op  $L$  als er een positieve constante  $K$  en een reële exponent  $\mu$ ,  $\mu \in (0,1]$  bestaat zodat, voor elk paar  $t_1, t_2 \in L$

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq K |t_2 - t_1|^\mu$$

Korte notatie:  $f \in H(\mu)$ , ook wel  $f \in C^\mu$   
of  $f \in H$

Opmerking: Als  $f$  Höldercontinu is, dan is  $f$  continu. Laat met een voorbeeld zien dat het omgekeerde niet geldt.

Zij  $f \in H(\mu)$  met  $\mu > 1$ , dan  $\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \right| \leq K |t_2 - t_1|^{\mu-1}$ ,  $\mu > 1$

Na de limietovergang  $t_2 \rightarrow t_1$ , volgt  $f'(t) = 0$ ,  $t \in L$ , dus  $f(t) = \text{constant}$ . Daarom is de beperking  $\mu \in (0,1]$ .

Als  $f$  continu differentieerbaar is op  $L$ , dan is  $f \in H(1)$ .

Voor eigenschappen van Hölder-continue functies, zie Muskhelishvili, §§ 3 t/m 8.

De Cauchy integraal is een integraal van de vorm

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \bar{\varphi}(z) \qquad \frac{1}{t-z} \text{ heet } \underline{\text{Cauchy kern}}$$

L is een boog of contour. Als  $L$  een contour is, dan  $f \in H$  op  $L$ ; als  $L$  een boog is met eindpunten  $a$  en  $b$ , dan

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\beta_1} (t-b)^{\beta_2}}, \text{ met } \varphi^* \in H, 0 \leq \beta_{1,2} < 1. \text{ (of } 0 \leq \text{Re} \beta_{1,2} < 1)$$

vanwege de convergentie van de integraal.

$\bar{\Phi}(z)$  heet "sectionally holomorphic" met  $L$  de discontinuïteitlijn.

-3-

De functie  $\bar{\Phi}(z)$  is gedefinieerd voor elke  $z \notin L$ ,  $\bar{\Phi}$  is analytisch in  $\mathbb{C} \setminus L$ .

x

Als  $|z| \rightarrow \infty$ , dan  $\bar{\Phi}(z) \rightarrow 0$ .

Het preciezer:

$$|\bar{\Phi}(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_L \frac{\varphi(t)}{1 - \frac{t}{z}} dt \right| \leq \frac{\text{constante}}{|z|}, \text{ als } |z| \text{ voldoende groot.}$$

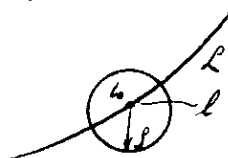
Notatie:  $\bar{\Phi}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ , als  $|z| \rightarrow \infty$ .

Onderzoek  $\bar{\Phi}(z)$  als  $z = t_0 \in L$ ,  $t_0$  geen eindpunt van  $L$ .

De integraal  $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$  is divergent.

Gedefinieerd wordt de Cauchy-Hoofdwaarde van de integraal door

$$\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L-\rho} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt,$$



waarbij  $L \setminus L_\rho$  de boog is die de cirkel om  $t_0$  met straal  $\rho$  uit  $L$  snijdt.

Opmerking: Soms worden notaties als  $H.N. \int_L$  of  $\int_L'$  of  $V.P. \int_L$  (V.P. = valeur principale) gebruikt.

In dit college wordt de notatie  $\int_L$  gebruikt.

Als  $\varphi \in H$  op  $L$ , dan bestaat de Cauchy-Hoofdwaarde.

Voldaan aan:  $\varphi \in H$  in een omgeving van  $t_0$

Afleiding 
$$\int_{L-\rho} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \int_{L-\rho} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \int_{L-\rho} \frac{\varphi(t_0)}{t-t_0} dt.$$

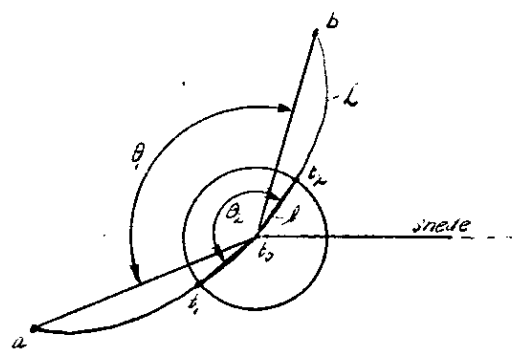
Nu geldt:  $\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} \right| \leq K |t-t_0|^{\mu-1}$ ,  $\mu-1 > -1$ , zodat

x

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L-\rho} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt = \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt \text{ convergent is voor } \mu > 0.$$



Beschouw de volgende figuur:



Zij L de boog met eindpunten a en b. De eindpunten van L worden aangeduid met  $t_1$  en  $t_2$ .

$$\int_{L-t} \frac{dt}{t-t_0} = \log(t-t_0) \Big|_a^{t_1} + \log(t-t_0) \Big|_{t_2}^b$$

$$= \log(b-t_0) - \log(a-t_0) + \log(t_1-t_0) - \log(t_2-t_0).$$

De functie  $\log(t-t_0)$  heeft een vertakkingspunt in  $t_0$ . Er is een snede aan vanuit  $t_0$  naar rechts.

$$\text{Dus } \log(b-t_0) - \log(a-t_0) = \log \left| \frac{b-t_0}{a-t_0} \right| + i [\arg(b-t_0) - \arg(a-t_0)]$$

$$= \log \left| \frac{b-t_0}{a-t_0} \right| - i \theta_1 = \log \frac{b-t_0}{a-t_0}.$$

$$\text{Verder } \log(t_1-t_0) - \log(t_2-t_0) = \log \left| \frac{t_1-t_0}{t_2-t_0} \right| + i \theta_2 = i \theta_2,$$

$$\text{want } |t_1-t_0| = |t_2-t_0| = g$$

$$\text{Als } g \rightarrow 0, \text{ dan } t_2 \rightarrow t_1, \lim_{g \rightarrow 0} \int_L \frac{dt}{t-t_0} = \log \frac{b-t_0}{a-t_0} + \pi i$$

Dus

$$\text{Cauchy H.W. } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \log \frac{b-t_0}{a-t_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt$$

Voor een contour geldt  $a=b$  en daarmee volgt voor een

contour:

$$\text{Cauchy H.W. } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt.$$

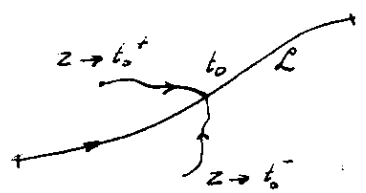
Opgave. - Bepaal  $\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t-t_0}$ ,  $-1 < t_0 < 1$ .

- Zij  $C$  de cirkel  $|t|=1$ . Bepaal  $\int_C \frac{dt}{t-t_0}$ ,  $t_0 \in C$ .

2 De formules van Plemelj

$$\text{Zij } \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt. \quad \text{Zij } t_0 \in L, t_0 \text{ geen eindpunt van } L.$$

Beschouw de limieten van  $\bar{\Phi}(z)$  als  $z \rightarrow t_0^+$  (van links) en  $z \rightarrow t_0^-$  (van rechts)



De formules van Plemelj (1908) luiden:

$$\lim_{z \rightarrow t_0^+} \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}^+(t_0) = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$$

in beide gevallen  $\times$   
is de tweede

$$\lim_{z \rightarrow t_0^-} \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}^-(t_0) = -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$$

integraal Cauchy H.W.  $\times$

De formules zijn geldig als  $\varphi$  Höldercontinu is in een omgeving van  $t_0$ .

Equivalente vorm van de formules van Plemelj:

$$\bar{\Phi}^+(t_0) - \bar{\Phi}^-(t_0) = \varphi(t_0)$$

$$\bar{\Phi}^+(t_0) + \bar{\Phi}^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt.$$

Het bewijs van de geldigheid van de formules van Plemelj is voor een belangrijk deel gebaseerd op de volgende

Hulpstelling. Zij  $\varphi$  Höldercontinu op  $L$ ; zij  $t_0 \in L$  ( $t_0$  mag eindpunt zijn).

$$\text{Zij } \bar{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - z} dt.$$

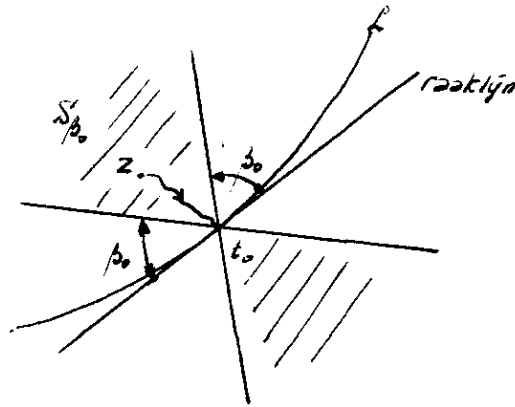
Den is

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_{\beta_0}}} \bar{\Psi}(z) = \bar{\Psi}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt, \text{ uniform in } t_0. \quad \times$$

waarbij

$$\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right| \leq K |t - t_0|^{\mu-1}, \quad \mu-1 > -1, \text{ zodat de integraal convergeert is.}$$

$S_{\beta_0}$  is de dubbelsector begrensd door twee rechten door  $t_0$  die een hoek  $\beta_0 \in (0, \pi/2]$  maken met de raaktlijn aan  $L$  in  $t_0$ .

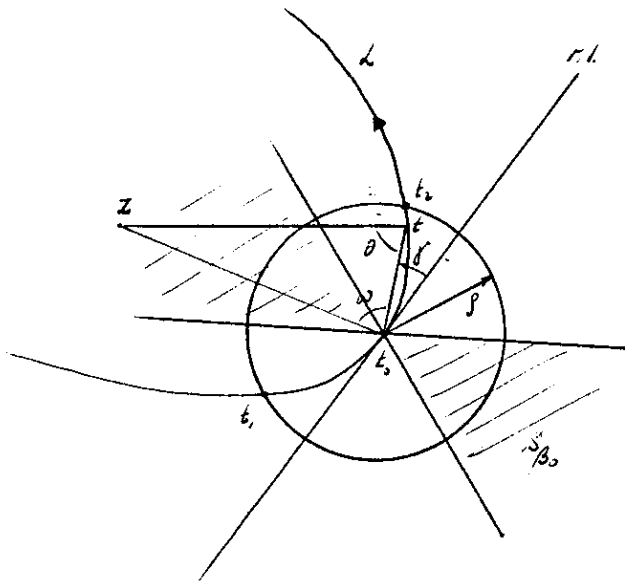


Het bewijs van de hulpstelling is nogal moeizaam en vereist de nodige voorbereiding.

Bewijs van de Helpstelling.

Voorbereiding

Beschouw de volgende figuur



De cirkel om \$t\_0\$, straal \$r\$, snijdt de boog \$l = (t\_1, t\_2) \subset L\$.

Zij \$t \in l\$, \$z \in S\_{\beta\_0}\$.

Laat \$\phi\$ de hoek tussen de lijn \$t\_0 t\$ en de raaklijn in \$t\_2\$ aan \$L\$ zijn.

Laat \$w\$ de hoek tussen de lijn \$z t\_0\$ en de lijn \$t\_0 t\$ zijn.

Kies \$r\$ zo klein, dat \$|r| \le \frac{1}{2} \beta\_0\$, dan is \$\frac{1}{2} \beta\_0 \le w \le \pi - \frac{1}{2} \beta\_0\$, zodat \$\sin w \ge \sin \frac{1}{2} \beta\_0\$, voor elke \$t \in l\$. v.m.t. \$l\$ \$\beta\_0 - \gamma \le w \le \pi - \beta\_0 - \gamma\$

Met de sinusregel in driehoek \$(z, t\_0, t)\$ volgt

$$\left| \frac{z - t_0}{z - t} \right| = \frac{\sin \theta}{\sin w} \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \beta_0} = M \quad \text{----- (I) v.m.t. } t \in l, z \in S_{\beta_0}$$

Naast deze eerste ongelijkheid is nog een tweede van belang.

Laat  $L$  geparametriseerd zijn met de booglengte  $s$

Op  $L$ :  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ;  $s$  de booglengte.

Zij  $t = x(s) + iy(s)$ ,  $t_0 = x(s_0) + iy(s_0)$ .

Voer in:  $r = |t - t_0| = \left[ \{x(s) - x(s_0)\}^2 + \{y(s) - y(s_0)\}^2 \right]^{1/2}$   $\frac{dr}{ds} = \frac{x(s) - x(s_0)}{r} x'(s) + \frac{y(s) - y(s_0)}{r} y'(s)$

Definieer:  $\underline{u}_1 = \left( \frac{x(s) - x(s_0)}{r}, \frac{y(s) - y(s_0)}{r} \right)$  zodat  $|\underline{u}_1| = 1$

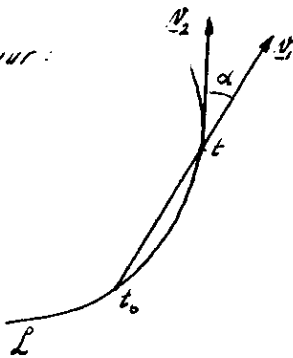
$\underline{u}_2 = (x'(s), y'(s))$  zodat  $|\underline{u}_2| = 1$

De eenheidsvector  $\underline{u}_1$  is gericht van  $t_0$  naar  $t$  en  $\underline{u}_2$  is de eenheidsraakvector in  $t$  aan  $L$

Voor de functie  $r = r(s)$  geldt dan

$\frac{dr}{ds} = \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = \cos \alpha$ ,  $\alpha$  de hoek tussen  $\underline{u}_1$  en  $\underline{u}_2$

In een figuur:



Kies  $\delta$  zo klein dat  $0 < \alpha \leq \alpha_0 < \pi/2$  voor elke  $t \in L$ . Dan  $\cos \alpha \geq \cos \alpha_0$

zodat

$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{\cos \alpha} \leq \frac{1}{\cos \alpha_0} = m$ , voor zekere  $\alpha_0$ .

Verder geldt:  $\frac{dt}{ds} = x'(s) + iy'(s)$ ,  $|\frac{dt}{ds}| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} = 1$

Dan volgt de ongelijkheid in differentiaalvorm

$|dt| = |ds| \leq m |dr|$  ----- (II) voor  $t \in L$

Na deze voorbereidingen volgt nu het eigenlijke bewijs van de hulpstelling.

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(z) - \tilde{\psi}(t_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt \\
&= \frac{z-t_0}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} dt \\
&= \frac{z-t_0}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} dt + \frac{z-t_0}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} dt
\end{aligned}$$

De beide laatste integralen worden afzonderlijk geschat

$$I_1 = \frac{z-t_0}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} dt$$

$$\text{dan: } |I_1| = \left| \frac{z-t_0}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} dt \right| \leq \frac{|z-t_0|}{2\pi} \int_L \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)|}{|t-z| |t-t_0|} |dt|$$

ongelijkheid gebruik eigenschap (I) en het gegeven  $\varphi \in H$ , dan volgt

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \frac{M}{2\pi} \int_L K |t-t_0|^{\mu-1} |dt|, \text{ stel } r = |t-t_0| \text{ en gebruik } \text{ongelijkheid} \text{ eigenschap (I)} \\
&\leq \frac{MKm}{2\pi} \int_L r^{\mu-1} |dr| = \frac{MKm}{2\pi} 2 \int_0^{\rho} r^{\mu-1} dr = \frac{MKm}{\pi} \frac{\rho^\mu}{\mu}
\end{aligned}$$

Kies  $\rho$  zo klein dat  $|I_1| < \frac{1}{2} \epsilon$ . De keuze van  $\rho$  is onafhankelijk van  $z$  en  $t_0$ .

Fixeer daarna  $\rho$ .

Zij

$$I_2 = \frac{z-t_0}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} dt.$$

Voor  $t \in L-l$  is  $|t-t_0| \geq \rho$ ; neem aan  $|z-t_0| \leq \frac{1}{2}\rho$ , dan volgt

$$|t-z| \geq |t-t_0| - |z-t_0| \geq \frac{1}{2}\rho \text{ voor } t \in L-l.$$

Voor de integraal  $I_2$  volgt

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{|z-t_0|}{2\pi} \int_{L-l} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)|}{|t-t_0| \cdot |t-z|} |dt| \\ &\leq \frac{|z-t_0|}{2\pi} \int_{L-l} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)|}{\rho \cdot \frac{1}{2}\rho} |dt| \leq \frac{|z-t_0|}{\rho^2} A, \end{aligned}$$

waarbij  $A$  een constante onafhankelijk van de keuze van  $z$  en  $t_0$  is.

Immers

$$\int_{L-l} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| |dt| \leq 2P \cdot (\text{length } L) = A, \quad P = \max_{t \in L} |\varphi(t)|.$$

Er is een  $\delta > 0$  zodat  $|I_2| < \frac{1}{2}\varepsilon$ , als  $|z-t_0| < \delta$ . De waarde van  $\delta$  is onafhankelijk van de keuze van  $t_0$ .

Eindresultaat:  $|\bar{\Psi}(z) - \bar{\Psi}(t_0)| < \varepsilon$  als  $|z-t_0| < \delta$ , onafhankelijk van  $t_0$ .

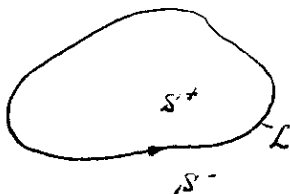
Daarmee  $\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S^+}} \bar{\Psi}(z) = \bar{\Psi}(t_0)$ , uniform in  $t_0$ .

### Bewijs van de formules van Plemelj.

Geval 1.  $L$  is een contour.

$$\text{Schrijf } \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-z} dt$$

De tweede integraal is juist de functie  $\bar{\Psi}(z)$  uit de hulpstelling. De eerste integraal laat zich eenvoudig berekenen



$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{t-z} = \begin{cases} 1, & z \in S^+ \\ 0, & z \in S^- \end{cases}$$

Met de hulpstelling volgt dan

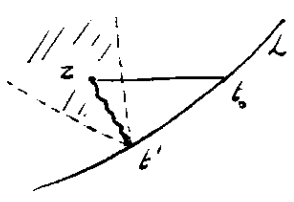
$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0^+ \\ z \in S_{\beta_0}^+}} \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}^+(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0^- \\ z \in S_{\beta_0}^-}} \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}^-(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt$$

} beide uniform in  $t_0$ .

In Muskhelishvili's boek, § 14, wordt bewezen dat  $\bar{\Phi}^+$  en  $\bar{\Phi}^-$  beide continu zijn op  $L$ . Zie ook.

In dit boek wordt ook bewezen dat de limietresultaten ook gelden als  $z \rightarrow t_0^+$  resp.  $z \rightarrow t_0^-$  langs een willekeurig pad. In bijgaande figuur wordt een bewijs van dit laatste gesuggereerd. Het betekent dat de toevoeging " $z \in S_{\beta_0}^+$ " in de limieten mag worden weggelaten.



In § 1 is voor de Cauchy-Hoofdwaaide afgeleid

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt$$

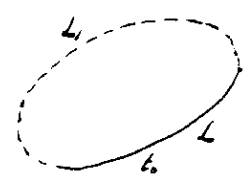
Gebruik dit resultaat, dan volgen de formules van Plemelj

$$\lim_{z \rightarrow t_0^+} \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = \bar{\Phi}^+(t_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow t_0^-} \bar{\Phi}(z) = -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = \bar{\Phi}^-(t_0)$$

Gez. 2.  $L$  is een boog.

Vul  $L$  met de boog  $L_1$  aan tot een contour en stel  $\varphi(t) = 0$  op  $L_1$ .





Den geldt: 
$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{L+L_1} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

Passen we nu de formules van Plemelj toe voor  $t_0 \in L$ ,  $t_0$  geen eindpunt van  $L$ , dan volgt

$$\lim_{z \rightarrow t_0^\pm} \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}^\pm(t_0) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt,$$

de integraal alleen over  $L$  want  $\varphi(t) = 0$  voor  $t \in L_1$ .

Vraag. Ga na waarom de beperking " $t_0$  geen eindpunt van  $L$ " is toegevoegd.

Beschouw nogmaals de hulpstelling.

Zij  $\varphi$  Höldercontinu op  $L$ . Zij  $t_0 \in L$  ( $t_0$  mag eindpunt van  $L$  zijn).

$$\bar{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt.$$

Dan is 
$$\lim_{z \rightarrow t_0} \bar{\Psi}(z) = \bar{\Psi}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt, \quad z \rightarrow t_0 \text{ langs een}$$

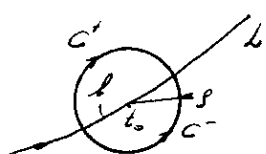
willekeurig pad. *Bepaling  $z \in S_p$  is kunnen weggelaten.*

Het bewijs volgt direct uit de formules van Plemelj

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \bar{\Psi}(z) = \pm \frac{1}{2} [\varphi(t_0) - \varphi(t_0)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt = \bar{\Psi}(t_0).$$

Tweede bewijs van de formules van Plemelj.

Het bewijs van de formules van Plemelj kan worden vereenvoudigd als we ons beperken tot functies  $\varphi$  die analytisch zijn in een omgeving van  $t_0$ .



Beschouw de cirkel  $C = C^+ + C^-$  om  $t_0$  met straal  $p$ ; zodat  $\varphi$  analytisch is op en binnen  $C$ .  $C$  snijdt de boog  $l$  uit  $L$ , en wordt zelf door  $L$  verdeeld in  $C^+$ , links, en  $C^-$ , rechts.

Geval  $z \rightarrow t_0^+$ .

$$\text{Schrift } \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

$$\lim_{z \rightarrow t_0^+} \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}^+(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$$

Limietovergang  $\rho \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^+(t_0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \\ &= \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \quad (\text{Cauchy-Hoofdwaarde}) \end{aligned}$$

ment als  $\rho \rightarrow 0$  dan  $C^- \rightarrow$  halve cirkel, zodat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \rightarrow \frac{1}{2} \text{Res}_{t=t_0} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} = \frac{1}{2} \varphi(t_0)$$

Geval  $z \rightarrow t_0^-$ .

$$\text{Schrift } \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

$$\lim_{z \rightarrow t_0^-} \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}^-(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt$$

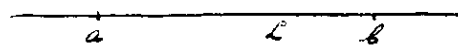
Limietovergang  $\rho \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^-(t_0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \\ &= -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \quad (\text{Cauchy-Hoofdwaarde}) \end{aligned}$$

Het (-) teken in de eerste term omdat  $C^+$  in klokrichting (negatief) wordt doorlopen.

3. Het gedrag van  $\bar{\Phi}(z)$  bij de eindpunten van  $L$ .

$L$  is een boog, met eindpunten  $a$  en  $b$ , langs de reële as.



Cauchy integraal:

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad \text{waarbij}$$

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^\alpha (t-b)^\beta}, \quad \varphi^* \in H(\mu), \quad 0 \leq \alpha, \beta < 1.$$

Vraag. Wat is het gedrag van  $\bar{\Phi}$  bij  $z=a$  en  $z=b$ . Waarmee bedoeld wordt in de omgeving van  $z=a$  resp.  $z=b$ ?

Splitst  $\bar{\Phi}$  volgens

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_a^c + \int_c^b \right) \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^\alpha (b-t)^\beta (t-z)} dt = \bar{\Phi}_1(z) + \bar{\Phi}_2(z), \quad a < c < b.$$

Gedrag bij  $z=a$ .  $\bar{\Phi}_2$  is analytisch buiten de boog  $cb$ , dus  $\bar{\Phi}_2$  is analytisch en begrensd bij  $z=a$ .

$$\text{Stel in } \bar{\Phi}_1(z): \quad \frac{\varphi^*(t)}{(b-t)^\beta} = \varphi(t).$$

De noemer

$(b-t)^{-\beta}$  is cont. diffb. op  $ac$ , dus in  $H(\mu)$ ;  $\varphi^* \in H(\mu)$ , dan  $\varphi \in H(\mu)$   
(zie Muskhelishvili §6)

Beperk het onderzoek bij  $z=a$  tot de Cauchy integraal van de vorm

$$\bar{\Phi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(t-a)^\alpha (t-z)} dt, \quad \varphi \in H(\mu), \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Gedrag bij  $z=b$ . Het onderzoek bij  $z=b$  kan worden beperkt tot de Cauchy-integraal

$$\bar{\Phi}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(b-t)^\beta (t-z)} dt, \quad \varphi \in H(\mu), \quad 0 \leq \beta < 1.$$

Te onderscheiden zijn twee gevallen.

$$\text{I. } f' = 0. \quad \text{Dan } \Phi_1(z) = \bar{\Phi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Bij } z = a: \quad \bar{\Phi}_1(z) &= \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t-z} dt \\ &= \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \log \frac{z-b}{z-a} + \bar{\Psi}_1(z), \quad \bar{\Psi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t-a} dt. \end{aligned}$$

Uit de hulpstelling van § 2 volgt:  $\lim_{z \rightarrow a} \bar{\Psi}_1(z) = \bar{\Psi}_1(a)$ , zodat  $\bar{\Psi}_1(z)$  begrensd is bij  $z = a$ . Ook  $\log(z-b)$  is begrensd bij  $z = a$ , zodat geconcludeerd kan worden dat  $\bar{\Phi}_1$  kan worden voorgesteld als:

$$\bar{\Phi}_1(z) = - \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \log(z-a) + \bar{\Phi}_1^*(z), \quad \text{waarbij } \bar{\Phi}_1^* \text{ begrensd is bij } z = a.$$

Als  $\varphi(a) \neq 0$  heeft  $\bar{\Phi}_1(z)$  een logarithmische singulariteit in  $z = a$ .

Als  $\varphi(a) = 0$  is  $\bar{\Phi}_1(z)$  begrensd bij  $z = a$ .

$$\text{Analoog bij } z = b. \quad \bar{\Phi}_2(z) = \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \log \frac{z-b}{z-a} + \bar{\Psi}_2(z),$$

$$\bar{\Psi}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(b)}{t-z} dt$$

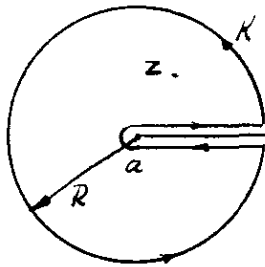
$$\text{zodat: } \bar{\Phi}_2(z) = \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \log(z-b) + \bar{\Phi}_2^*(z), \quad \text{waarbij } \bar{\Phi}_2^* \text{ begrensd is bij } z = b.$$

II  $0 < \rho < 1$  Voorbereiding.

$$\begin{aligned} \text{Beschouw: } \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\rho (t-z)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_a^\infty - \int_b^\infty \right) \frac{dt}{(t-a)^\rho (t-z)} = \Omega_1(z) - \Omega_2(z) \end{aligned}$$

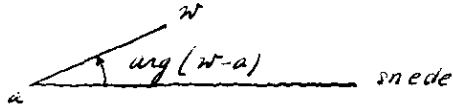
$\Omega_2$  is analytisch buiten  $[b, \infty)$ , dus begrensd bij  $z = a$ .

$\Omega_2$  kan worden berekend met functietheorie.



Beschouw  $I = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{dw}{(w-a)^\alpha (w-z)}$

Afpraak:  $(w-a)^\alpha = |w-a|^\alpha \exp [i\alpha \arg(w-a)]$   
 $0 < \arg(w-a) < 2\pi$ , snede  $[a, \infty)$



Met de Residustelling volgt, voor  $z$  binnen  $K$

$$I = (z-a)^{-\alpha}, \quad 0 < \arg(z-a) < 2\pi$$

Voor  $R \rightarrow \infty$ :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{dw}{(w-a)^\alpha (w-z)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi R}{(R-|a|)^\alpha (R-|z|)} \rightarrow 0, \text{ voor } R \rightarrow \infty$$

De lussen aan weerszijden van de snede.

$$\text{stel } w=t, \quad \arg(w-a) = \begin{cases} 0 & \text{bovenkant snede} \\ 2\pi & \text{onderkant snede} \end{cases}$$

zodat

$$(w-a)^\alpha = \begin{cases} (t-a)^\alpha & \text{bovenkant snede} \\ e^{2\pi i \alpha} (t-a)^\alpha & \text{onderkant snede} \end{cases}$$

Dan:  $I = \frac{1}{2\pi i} (1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_a^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha (t-z)} = (z-a)^{-\alpha}$

bedenk:  $1 - e^{-2\pi i \alpha} = 2i e^{-\pi i \alpha} \sin \pi \alpha,$

zodat

$$\Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha (t-z)} = \frac{e^{\pi i \alpha}}{2i \sin \pi \alpha} (z-a)^{-\alpha}, \quad 0 < \arg(z-a) < 2\pi.$$

Conclusie:

$$\Omega(z) = \frac{e^{\pi i \alpha}}{2i \sin \pi \alpha} (z-a)^{-\alpha} - \Omega_2(z), \text{ waarbij } \Omega_2 \text{ begrensd is bij } z=a.$$

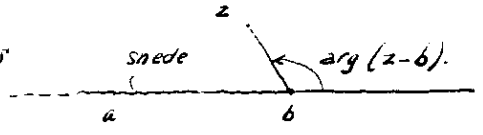
Opmerking. De singulariteit in de integraal komt overeen met die in de integrand; de (negatieve) exponent van  $(t-a)$  in de integrand is gelijk aan die van  $(z-a)$  in de integraal.

Analoog. 
$$\Omega^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\mu (t-z)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-\infty}^b - \int_{-\infty}^a \right) \frac{dt}{(b-t)^\mu (t-z)} = \Omega_1^*(z) - \Omega_2^*(z)$$

$$= -\frac{1}{2i \sin \pi \mu} (z-b)^{-\mu} - \Omega_2^*(z), \quad \Omega_2^* \text{ begrensd bij } b,$$

waarbij  $\arg(z-b)$  nu wel de hoofdwaaarde is  
 $-\pi < \arg(z-b) < \pi$



Terug naar  $\bar{\Phi}_1$ .

$$\bar{\Phi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(t-a)^\mu (t-z)}$$

Gedrag bij  $z = a$ ?

Schrijf: 
$$\bar{\Phi}_1(z) = \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\mu (t-z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{(t-a)^\mu (t-z)} dt$$

$$= \varphi(a) \Omega(z) + \bar{\Psi}_1(z)$$

Notatie: 
$$\psi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{(t-a)^\mu}; \quad \text{omdat } \varphi \in H(\mu) \text{ volgt}$$

$$|\psi(t)| \leq K |t-a|^{\mu-f}$$

Onderscheid de beide volgende gevallen

geval 1.  $\mu > f$ .

Voor  $\mu > f$  geldt  $\lim_{t \rightarrow a} \psi(t) = 0$ , definieer dan  $\psi(a) = 0$ .

Vervolgens geldt  $\psi \in H(\mu-f)$ , zie Mushkelishvili §6.

Schrijf.

$$\bar{\Psi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\psi(t) - \psi(a)}{t-z} dt, \quad \psi(a) = 0.$$

Met de hulpstelling uit §2:  $\lim_{z \rightarrow a} \bar{\Psi}_1(z) = \bar{\Psi}_1(a)$  bestaat, zodat

$\bar{\Psi}_1$  begrensd is bij  $z = a$ .

x

geral 2.  $\mu \leq \nu < 1$ .

De hulpstelling kan nu niet worden gebruikt; dit gerel is ook wat moeilijker dan het eerste. In Mushkelishvili, §31, wordt bewezen:

$$\bar{\Phi}_1(z) = O(|z-a|^{\mu-\nu-\varepsilon}) \text{ bij } z=a, \quad \varepsilon > 0 \text{ willekeurig.}$$

ofwel:

bij elke  $\varepsilon > 0$  is er een van  $\varepsilon$  afhankelijke constante  $A = A(\varepsilon)$  zodat

$$|\bar{\Phi}_1(z)| \leq A |z-a|^{\mu-\nu-\varepsilon} \text{ in een vaste omgeving van } z=a.$$

Samengevat kan worden geconcludeerd.

$$\bar{\Phi}_1(z) = \frac{e^{i\pi\nu}}{2i \sin \pi\nu} \cdot \varphi(a) (z-a)^{-\nu} + \bar{\Phi}_1^*(z),$$

waarbij  $\bar{\Phi}_1^*(z) \begin{cases} \text{begrensd is bij } z=a \text{ als } \mu > \nu, \\ = O(|z-a|^{\mu-\nu-\varepsilon}) \text{ bij } z=a \text{ als } \mu \leq \nu. \end{cases}$

De belangrijkste, meest singuliere term, is in beide gevallen de term met factor  $(z-a)^{-\nu}$ ; neem b.v.  $\varepsilon = \frac{1}{2}\mu$  in de tweede term.

Dus.

$$\bar{\Phi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(t-a)^\nu(t-z)} dt = O(|z-a|^{-\nu}) \text{ bij } z=a.$$

Analoog:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(b-t)^\nu(t-z)} dt, \quad 0 < \nu < 1 \\ &= \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\nu(t-z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(b)}{(b-t)^\nu(t-z)} dt \end{aligned}$$

waarbij de eerste term te schrijven is als  $\varphi(b) \Omega^*(z)$ .

Resultaat  $\bar{\Phi}_2(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi f} \varphi(b) (z-b)^{-f} + \bar{\Phi}_2^*(z),$

waarbij  $\bar{\Phi}_2^*(z) \begin{cases} \text{begrensd bij } z=b \text{ als } \mu > f \\ O(|z-b|^{\mu-f-\epsilon}) \text{ bij } z=b \text{ als } \mu \leq f, \epsilon > 0. \end{cases}$

De belangrijkste term is die met  $(z-b)^{-f}$  als factor.

Dus

$$\bar{\Phi}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(b-t)^f (t-z)} dt = O(|z-b|^{-f}) \text{ bij } z=b.$$

Samenvatting en uitbreiding van de resultaten

Zie Muskhelishvili § 29-31.

Notatie: Cauchy integraal  $\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$

1. Zij  $\varphi(t) = (t-a)^\delta \psi(t)$  met  $\text{Re } \delta > -1$  en  $\psi$  Höldercontinu in rechteromgeving van  $a$ ,  $\psi(a) \neq 0$ .

Dan geldt in omgeving van  $z=a$ .

$$\bar{\Phi}(z) = \begin{cases} \text{begrensd als } \text{Re } \delta > 0 \\ \text{begrensd als } \text{Re } \delta = 0, \text{Im } \delta \neq 0, \text{ zie Muskhelishvili} \\ O(\log|z-a|) \text{ als } \delta = 0, \text{ zie Muskhelishvili.} \\ O(|z-a|^{\text{Re } \delta}) \text{ als } -1 < \text{Re } \delta < 0 \end{cases}$$

2. Zij  $\varphi(t) = (b-t)^\delta \psi(t)$  met  $\text{Re } \delta > -1$  en  $\psi$  Höldercontinu in linkeromgeving van  $b$ ,  $\psi(b) \neq 0$ .

Dan geldt in omgeving van  $z=b$ .

$$\bar{\Phi}(z) = \begin{cases} \text{begrensd als } \text{Re } \delta > 0 \\ \text{begrensd als } \text{Re } \delta = 0, \text{Im } \delta \neq 0, \text{ zie Muskhelishvili} \\ O(\log|z-b|) \text{ als } \delta = 0, \text{ zie Muskhelishvili} \\ O(|z-b|^{\text{Re } \delta}) \text{ als } -1 < \text{Re } \delta < 0 \end{cases}$$

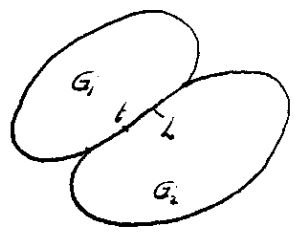
Opmerking. Voor  $\text{Re } \delta \in (-1, 0)$  zijn de singulariteiten in de integraal en de integrand onderling gelijk; de (negatieve) exponenten van  $(t-a)$  of  $(b-t)$  in de integrand zijn gelijk aan die van  $(z-a)$  resp.  $(z-b)$  in de integraal, de functie  $\bar{\Phi}$ .



#### 4. Voorbeelden van Cauchy-integralen.

Ter inleiding: Een stelling over analytische voortzetting.

##### Stelling A.



Laat \$G\_1\$ en \$G\_2\$ twee disjuncte gebieden zijn met de boog \$L\$ als gemeenschappelijk randstuk. Laat \$\phi\_1\$ analytisch zijn in \$G\_1\$ en \$\phi\_2\$ in \$G\_2\$.

Laat \$\phi\_1\$ en \$\phi\_2\$ continu aansluiten over \$L\$; d.w.z. voor \$t \in L\$ geldt

$$\lim_{z \rightarrow t} \phi_1(z) = \phi_1(t) = \phi_2(t) = \lim_{z \rightarrow t} \phi_2(z), \quad z \in G_i$$

Dan is de functie \$\Phi\$ gedefinieerd volgens 
$$\Phi(z) = \begin{cases} \phi_1(z), & z \in G_1, \\ \phi_2(z), & z \in G_2, \\ \phi_1(t) = \phi_2(t), & t \in L \end{cases}$$

analytisch op \$G\_1 + G\_2 + L\$.

Voor het bewijs wordt verwezen naar Mushkelishvili §15, of College Voortgezetste Functietheorie, Stelling 2.13

In woorden drukt Stelling A uit dat als twee analytische functies continu aansluiten (over een boog) ze elkaars analytische voortzetting zijn.

##### Voorbeeld I.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-\gamma} (1+t)^{-1+\gamma}}{t-z} dt, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Deze integraal zal eerst worden berekend, waarna allerlei eigenschappen van Cauchyintegralen zullen worden geverifieerd.

##### 1-ste berekening van \$\Phi(z)\$ met contourintegratie.

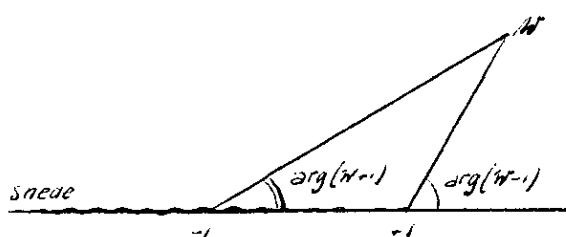
Beschouw 
$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(w-1)^{-\gamma} (w+1)^{-1+\gamma}}{(w-z)} dw$$

De functie \$F(w) = (w-1)^{-\gamma} (w+1)^{-1+\gamma}\$ is een meerwaardige functie, welke met de volgende afspraken éénwaardig wordt:

$$(w-1)^{-\gamma} = |w-1|^{-\gamma} \exp[-i\gamma \arg(w-1)], \quad -\pi < \arg(w-1) < \pi$$

$$(w+1)^{-1+\gamma} = |w+1|^{-1+\gamma} \exp[i(-1+\gamma) \arg(w+1)], \quad -\pi < \arg(w+1) < \pi$$

In een plaatje:



$(w-1)^{-1/2}$  sneede  $(-\infty, 1]$   
 $(w+1)^{-1/2}$  sneede  $(-\infty, -1]$

totale sneede  $(-\infty, 1]$

De functie  $F$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  met sneede  $(-\infty, 1]$ .

Het gedrag van  $F$  op de sneede.

Zij  $-\infty < t < -1$ .  $\lim_{w \rightarrow t^+} \arg(w-1) = \pm \pi$  en  $\lim_{w \rightarrow t^+} \arg(w+1) = \pm \pi$ .

zodat  $\lim_{w \rightarrow t^+} F(w) = |t-1|^{-1/2} |t+1|^{-1/2} e^{\mp i\pi/2} e^{\pm i\pi(-1/2)} = |t-1|^{-1/2} |t+1|^{-1/2} e^{\pm i\pi}$

Dan volgt:  $\lim_{w \rightarrow t^+} F(w) = \lim_{w \rightarrow t^-} F(w)$ , dus  $F(w)$  sluit continu aan over  $(-\infty, -1)$

Conclusie:  $F$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  met sneede  $[-1, 1]$

Zij  $-1 < t < 1$ .  $\lim_{w \rightarrow t^+} \arg(w-1) = \pm \pi$  en  $\lim_{w \rightarrow t^+} \arg(w+1) = 0$ ,

zodat  $\lim_{w \rightarrow t^+} F(w) = |t-1|^{-1/2} |t+1|^{-1/2} e^{\mp i\pi/2} = (1-t)^{-1/2} (1+t)^{-1/2} e^{\mp i\pi/2}$

dus  $F$  is niet continu ~~op~~ <sup>over</sup>  $[-1, 1]$ .

De contour  $C$  uit de integraal  $I$  is een lus om de sneede



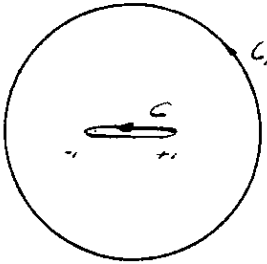
$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(w-1)^{-1/2} (w+1)^{-1/2}}{(w-2)} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} (e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{-1/2} (1+t)^{-1/2}}{(t-2)} dt = 2i \sin \frac{\pi}{4} \tilde{\Phi}(2)$$

Berekening van  $\bar{I}$ .

Beschoon 
$$\bar{I} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(w-1)^{\alpha} (w+1)^{-1+\alpha}}{(w-z)} dw$$

waarby  $C_1: |w| = R, R > \max(|z|, 1)$



Er geldt: 
$$\bar{I}_1 - \bar{I} = \text{Res}_{w=z} \frac{(w-1)^{\alpha} (w+1)^{-1+\alpha}}{w-z} = (z-1)^{\alpha} (z+1)^{-1+\alpha}, \quad -\bar{\pi} < \arg(z \pm 1) < \bar{\pi}.$$

Op  $C_1: |w| = R$  en  $\left| \frac{(w-1)^{\alpha} (w+1)^{-1+\alpha}}{(w-z)} \right| = O(R^{-2}), R \rightarrow \infty,$

dus  $|\bar{I}_1| = O(R^{-1}), R \rightarrow \infty.$  Conclusie:  $\bar{I}_1 = 0.$

Den volgt:

$$\bar{I} = - (z-1)^{\alpha} (z+1)^{-1+\alpha}, \quad -\bar{\pi} < \arg(z \pm 1) < \bar{\pi}.$$

zodet

$$\bar{\Phi}(z) = - \frac{1}{2i \sin \bar{\alpha} \pi} (z-1)^{\alpha} (z+1)^{-1+\alpha}, \quad -\bar{\pi} < \arg(z \pm 1) < \bar{\pi}.$$

Controle eigenschappen van  $\bar{\Phi}$ .

1.  $\bar{\Phi}$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  buiten  $[-1, 1]$
2.  $\bar{\Phi}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), |z| \rightarrow \infty$
3. gedrag by  $z=1$ :  $(z+1)^{-1+\alpha} = (2+(z-1))^{-1+\alpha} = 2^{-1+\alpha} \left(1 + \frac{z-1}{2}\right)^{-1+\alpha} = 2^{-1+\alpha} \left[1 + O(|z-1|)\right],$   
 $z-1 \rightarrow 0,$

dus 
$$\bar{\Phi}(z) = - \frac{2^{-1+\alpha}}{2i \sin \bar{\alpha} \pi} (z-1)^{\alpha} + O(|z-1|^{1+\alpha}), \quad z-1 \rightarrow 0.$$

Het gedrag by  $z=-1$  kan analoog worden afgeleid, zodat samengevat volgt:

$$\bar{\Phi}(z) = O(|z-1|^{\alpha}) \quad \text{by } z=1$$

$$\bar{\Phi}(z) = O(|z+1|^{-1+\alpha}) \quad \text{by } z=-1.$$

4. voor  $-1 < t_0 < 1$  volgt  $\Phi^\pm(t_0) = - \frac{e^{\mp i\pi f}}{2i \sin \pi f} (1-t_0)^f (1+t_0)^{-1+f}$  ( =  $\lim_{z \rightarrow t_0^\pm} \Phi(z)$  )

daaruit  $\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = (1-t_0)^f (1+t_0)^{-1+f} (= \psi(t_0))$

$$\begin{aligned} \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) &= i \cotan \pi f \cdot (1-t_0)^f (1+t_0)^{-1+f} \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^f (1+t)^{-1+f}}{t-t_0} dt \quad (\text{hoofdwaarde}) \end{aligned}$$

Speciaal geval  $f = \frac{1}{2}$ .

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^{-1/2}}{t-t_0} dt = 0$$

Loopt voort op het verhaal over het Hilbert probleem.

2. de berekening van  $\Phi(z)$  met de theorie van de paragrafen 1, 2 en 3.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^f (1+t)^{-1+f}}{t-z} dt, \quad 0 < f < 1.$$

Eigenschappen van  $\Phi$

1.  $\Phi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  buiten  $[-1, 1]$ ,
2.  $\Phi(z) = O(\frac{1}{z})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .
3.  $\Phi(z) = O(|z-1|^f)$  bij  $z=1$   
 $= O(|z+1|^{-1+f})$  bij  $z=-1$

4. Plemelj: voor  $-1 < t_0 < 1$  geldt  $\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = (1-t_0)^f (1+t_0)^{-1+f}$

Beschouw  $F(z) = (z-1)^f (z+1)^{-1+f}$ ,  $-\pi < \arg(z \pm 1) < \pi$

Eigenschappen van  $F$ .

1.  $F$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  buiten  $[-1, 1]$
2.  $F(z) = O(\frac{1}{z})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$

$$3. \quad F(z) = O(|z-1|^{-f}) \quad \text{bij } z=1 \\ = O(|z+1|^{-f}) \quad \text{bij } z=-1$$

4. voor  $-1 < t_0 < 1$  geldt

$$F^+(t_0) - F^-(t_0) = -2i \sin \pi f (1-t_0)^{-f} (1+t_0)^{-f}$$

Vorm nu de volgende combinatie.

$$w(z) = \bar{\Phi}(z) + \frac{1}{2i \sin \pi f} F(z)$$

Uit eigenschap 4 voor  $\bar{\Phi}$  en  $F$  volgt dan.

$$w^+(t_0) - w^-(t_0) = 0, \quad -1 < t_0 < 1,$$

dat  $w$  sluit continu aan over  $(-1, 1)$ , zodat met stelling A volgt dat  $w$  analytisch is op  $(-1, 1)$ .

Met eigenschap 1 volgt dan dat  $w$  analytisch is in  $\mathbb{C}$  behalve in  $z = \pm 1$ .

Met eigenschap 3 volgt

$$w(z) = O(|z-1|^{-f}) \quad \text{bij } z=1, \quad -f > -1 \\ = O(|z+1|^{-f}) \quad \text{bij } z=-1, \quad -f > -1.$$

⇐ Dus de punten  $z = \pm 1$  zijn opbeefbare singuliere punten van de functie  $w$ . (grenspolen)

Gevolg:  $w$  is analytisch in  $\mathbb{C}$ , dus  $w$  is een gehele functie.

Eigenschap 2  $w(z) = O(\frac{1}{z}) \rightarrow 0$  voor  $|z| \rightarrow \infty$

Met de stelling van Liouville volgt dan  $w = 0$ .

Dus

$$\bar{\Phi}(z) = - \frac{1}{2i \sin \pi f} F(z) \\ = - \frac{1}{2i \sin \pi f} (z-1)^{-f} (z+1)^{-f}, \quad -\pi < \arg(z \pm 1) < \pi.$$

Voorbeeld II 
$$\bar{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-\gamma} (1+t)^{-1+\gamma}}{t-z} dt, \quad 0 < \gamma < 1.$$

1-ste berekening met contour-integratie.

Deze berekening wordt als opgave gesteld.

Ook kan worden gebruikt:

$$\frac{(1-t)^{-\gamma}}{t-z} = (1-t)^{-\gamma} \frac{1-t}{t-z} = (1-t)^{-\gamma} \left[ -1 + \frac{1-z}{t-z} \right].$$

zodat

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} (1-t)^{-\gamma} (1+t)^{-1+\gamma} dt + \frac{1-z}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{-\gamma} (1+t)^{-1+\gamma}}{t-z} dt \\ &= -\frac{1}{2i \sin \pi \gamma} + (1-z) \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2i \sin \pi \gamma} [(z-1)^{-\gamma} (z+1)^{-1+\gamma} - 1] \end{aligned}$$

2-de berekening met de theorie van Cauchy-integralen van § 1, 2 en 3.

Eigenschappen van  $\bar{\Psi}$

1.  $\bar{\Psi}$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  met snede  $[-1, 1]$
2.  $\bar{\Psi}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), |z| \rightarrow \infty$
3.  $\bar{\Psi}$  is begrensd bij  $z = +1$ .  
 $\bar{\Psi}(z) = O(|z+1|^{-1+\gamma})$  bij  $z = -1$ .
4. Plemelj:  $\bar{\Psi}^+(t_0) - \bar{\Psi}^-(t_0) = (1-t_0)^{-\gamma} (1+t_0)^{-1+\gamma}, -1 < t_0 < 1.$

x

Vergelyk  $\bar{\Psi}(z)$  met  $G(z) = (z-1)^{-\gamma} (z+1)^{-1+\gamma}, -\pi < \arg(z \pm 1) < \pi$ , waarbij ook  $G$  de snede  $[-1, 1]$  heeft.

Eigenschappen van  $G$

1.  $G$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  met snede  $[-1, 1]$
2.  $G(z) = O(1), |z| \rightarrow \infty$
3.  $G(z) = O(|z-1|^{-\gamma}) = O(1)$ , bij  $z = 1$ , dus begrensd bij  $z = 1$ .  
 $= O(|z+1|^{-1+\gamma})$  bij  $z = -1$ .
4. voor  $-1 < t_0 < 1$  volgt  
 $G^+(t_0) - G^-(t_0) = 2i \sin \pi \gamma (1-t_0)^{-\gamma} (1+t_0)^{-1+\gamma}$ , zie dit na.

Vorm de combinatie  $\Omega(z) = \bar{\Psi}(z) - \frac{1}{2i \sin \pi f} G(z)$

Eigenschap 4  $\Omega^*(t_0) - \Omega(t_0) = 0$ ,  $-1 < t_0 < 1$ .

$\Omega$  sluit continu aan over  $(-1, 1)$  en is dus volgens stelling A analytisch op  $(-1, 1)$ .

$\Omega$  is dan analytisch in  $\mathbb{C}$  behalve in de punten  $z = \pm 1$ .

Eigenschap 3.  $\Omega(z) = O(1)$  bij  $z = 1$   
 $= O(|z+1|^{-1+f})$  bij  $z = -1$ ,  $-1+f > -1$ .

$\Omega$  heeft geen polen in  $z = \pm 1$ , de singulariteiten in  $z = \pm 1$  zijn ophefbaar.

$\Omega$  is dan analytisch in  $\mathbb{C}$ , zodat  $\Omega$  een gehele functie is.

Eigenschap 2  $\Omega(z) = O(1)$ ,  $|z| \rightarrow \infty$

Met de stelling van Liouville volgt dan:  $\Omega(z) = A$ , constant.

Dan

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(z) &= \frac{1}{2i \sin \pi f} G(z) + A \\ &= \frac{1}{2i \sin \pi f} (z-1)^{-1+f} (z+1)^{-1+f} + A. \end{aligned}$$

Beschouw nu juist eigenschap 2.

$$\bar{\Psi}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Ontwikkel  $\bar{\Psi}$  naar machten van  $\frac{1}{z}$  voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(z) &= \frac{1}{2i \sin \pi f} z^{-1+f} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1+f} z^{-1+f} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1+f} + A \\ &= \frac{1}{2i \sin \pi f} \left[1 - \frac{1+f}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] \cdot \left[1 + \frac{-1+f}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] + A, \quad |z| \rightarrow \infty \\ &= \frac{1}{2i \sin \pi f} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] + A, \quad |z| \rightarrow \infty \\ &= O\left(\frac{1}{z}\right); \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \text{als } A = \frac{-1}{2i \sin \pi f}. \end{aligned}$$

Daarmede: 
$$\bar{\Psi}(z) = \frac{-1}{2i \sin \pi f} \left[1 - (z-1)^{-1+f} (z+1)^{-1+f}\right].$$

Opgave. Bepaal  $\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-t^2)^{n-1/2}}{t-z} dt, \quad n=0,1,2,\dots$

2-16-1994

5. Het Hilbertprobleem voor een contour.

Later in dit college wordt de theorie van de Cauchy-integraal gebruikt voor het oplossen van singuliere integraalvergelijkingen en van twee-dimensionale potentiaalproblemen en bi-potentiaalproblemen, dit zijn vergelijkingen van de vorm  $\Delta u = 0$ .

Het gebruik van Cauchy-integralen bij deze vergelijkingen leidt tot Hilbertproblemen. In deze paragraaf wordt de theorie van het Hilbert-probleem (H.P.) behandeld.

Ter inleiding enige begrippen.

Zij  $F$  analytisch voor  $|z| > R$ ; dan heeft  $F$  de Laurentreeks  $F(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j, |z| > R$ .

Zij  $a_k \neq 0, a_j = 0$  voor  $j > k$ . Dan heeft  $F$  graad  $k$  in  $z = \infty$ .

Als  $F$  een polynoom is, dan is de graad in  $\infty$  gelijk aan de graad van het polynoom.

Eigenschappen.

1. Als  $F$  van de graad  $k$  in  $\infty$  is, dan geldt  $|F(z)| \leq A|z|^k$  voor  $|z| > R_1$  of  $F(z) = O(z^k), |z| \rightarrow \infty$ .

2. Stelling van Liouville.

Zij  $F$  een gehele functie van de graad  $k$  in  $\infty$ , dan is  $F$  een polynoom van de graad  $k$  als  $k \geq 0$  en  $F = 0$  als  $k < 0$ .

Formulering van het Hilbertprobleem voor een contour  $L$

Gevraagd is de functie  $\Phi$  te bepalen die voldoet aan.

1.  $\Phi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  behalve op  $L$ ;
2.  $\Phi$  is van eindige graad in  $\infty$ ;
3. voor  $t \in L$  geldt



$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^+(t) &= G(t) \bar{\Phi}^-(t) && \text{(homogene H.P.)} \\ \text{of } \bar{\Phi}^+(t) &= G(t) \bar{\Phi}^-(t) + g(t) && \text{(inhomogene H.P.)} \end{aligned}$$

waarbij  $G$  en  $g$  gegeven Höldercontinue functies zijn, terwijl  $G \neq 0$  op  $L$ .

Het oplossen van het Hilbertprobleem gebeurt in drie stappen

Stap A Speciaal H.P.:  $\bar{\Phi}^+(t) - \bar{\Phi}^-(t) = \varphi(t), \varphi \in H, t \in L.$

Het de formules van Plemelj volgt onmiddellijk een particuliere oplossing

$$\bar{\Phi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

Voor het bepalen van de algemene oplossing wordt gesteld:  $\bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}_1(z) + \bar{\Psi}(z)$

Substitutie in het H.P.

$$\bar{\Phi}_1^+(t) + \bar{\Psi}^+(t) - \bar{\Phi}_1^-(t) - \bar{\Psi}^-(t) = \varphi(t), \quad t \in L$$

waaruit volgt dat  $\bar{\Psi}^+(t) - \bar{\Psi}^-(t) = 0, \quad t \in L.$

Dus  $\bar{\Psi}$  sluit continu aan over  $L$  en is daarmee analytisch op  $\mathbb{C} \setminus L$  (stelling A)

$\bar{\Psi}$  is <sup>ook</sup> een gehele functie met eindige graad in  $\infty$ , zodat met de stelling van Liouville volgt:  $\bar{\Psi}(z) = P(z), \quad P$  een willekeurig polynoom.

De algemene oplossing van het speciale H.P. wordt daarmee

$$\bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}_1(z) + P(z)$$

ofwel

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + P(z)$$

Stap B Homogeen H.P.:  $\bar{\Phi}^+(t) = G(t) \bar{\Phi}^-(t), \quad t \in L.$

Neem de logaritme:

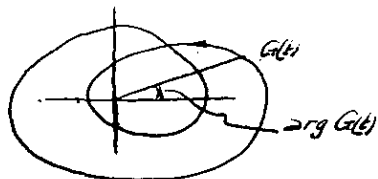
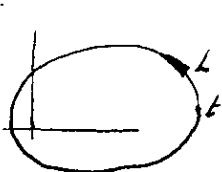
$$[\log \bar{\Phi}(t)]^+ - [\log \bar{\Phi}(t)]^- = \log G(t) \quad (G(t) \neq 0 \text{ op } L)$$

Er breekt nu een moeilijkheid op, want  $\log G(t)$  is in het algemeen niet eënwaardig.

Als  $t$  eenmaal  $L$  doorloopt, dan verandert  $\log G(t)$  met het bedrag

$$[\log G(t)]_L = i [\arg G(t)]_L = n \times 2\pi i \text{ met } n \in \mathbb{Z}$$

Voorbeeld.



in dit geval geldt

$$[\arg G(t)]_L = 4\pi.$$

In het algemeen definiëren we de Index van een functie, aangeduid met  $K$ .

$$\text{Ind } G(t) = \frac{1}{2\pi i} [\log G(t)]_L = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L = K, \text{ de index } K \text{ is geheel.}$$

$K$  heet ook index van HP

Voorbeeld.  $L: |t|=1, G(t) = t^n$

$$\text{Index: } K = \frac{1}{2\pi} [\arg t^n]_L = \frac{n}{2\pi} [\arg t]_L = n.$$

De functie  $G$  met index  $K$  wordt nu gemodificeerd zodat de index van de gemodificeerde functie nul wordt.

Kies een punt  $a_0 \in S^+$ ,  $S^+$  het binnengebied van  $L$ .

Voer in de functie  $G_0$ :  $G_0(t) = (t-a_0)^{-K} G(t)$ .

$$\text{dan geldt: } \text{Ind } G_0(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg (t-a_0)^{-K}]_L + \text{Ind } G(t) \\ = -K + K = 0.$$

De functie  $\log G_0(t)$  is éénwaardig en Höldercontinu. (zie Mushkelishvili, §6, punt 8°)

Voer in de functie  $\tilde{\Phi}_0$ :

$$\tilde{\Phi}_0(z) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(z), & z \in S^+ \\ (z-a_0)^K \tilde{\Phi}(z), & z \in S^- \end{cases}$$

Het homogene H.P. voor  $\tilde{\Phi}$  gaat over in een homogeen H.P. voor  $\tilde{\Phi}_0$ :

$$\tilde{\Phi}_0^+(t) = G(t) \tilde{\Phi}_0^-(t)$$

$$\text{dan } \tilde{\Phi}_0^+(t) = G(t) (t-a_0)^{-K} \tilde{\Phi}_0^-(t)$$

$$\text{ofwel } \tilde{\Phi}_0^+(t) = G_0(t) \tilde{\Phi}_0^-(t).$$

Neem de logaritme

$$[\log \tilde{\Phi}_0^+(t)]^+ - [\log \tilde{\Phi}_0^-(t)]^- = \log G_0(t),$$

waarbij  $\log G_0$  éénwaardig en Höldercontinu is.

Een particuliere oplossing:  $\log \Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G_0(t)}{t-z} dt =: \Omega(z)$

$$\text{dan } \Phi_0(z) = e^{\Omega(z)}, \text{ zodat } \Phi(z) = X(z) := \begin{cases} e^{\Omega(z)}, & z \in S^+, \\ (z-z_0)^{-K} e^{\Omega(z)}, & z \in S^-. \end{cases}$$

De functie  $X$  wordt de fundamentele oplossing van het homogene Hilbert-probleem genoemd.

Eigenschappen van  $X$ :

- $X(z) \neq 0$  in  $\mathbb{C}$ .
- $X(z)$  is van de graad  $-K$  in  $\infty$ .

Te bepalen is nog de algemene oplossing. Stel daartoe  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z)$ .

Homogeen H.P.  $X^+(t) \Psi^+(t) = G(t) X^-(t) \Psi^-(t)$ ,  $t \in L$ , waarbij  $X^+(t) = G(t) X^-(t) \neq 0$ .

dus:  $\Psi^+(t) = \Psi^-(t)$ ,  $t \in L$ .

(volgens A)

De functie  $\Psi$  sluit continu aan op  $L$ , dus  $\Psi$  is analytisch op  $L$ . Dan volgt  $\Psi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  dus geheel. De functie  $\Psi$  moet een eindige graad hebben in  $\infty$ . Met de stelling van Liouville volgt dan  $\Psi(z) = P(z)$ ,  $P$  een willekeurig polynoom.

De algemene oplossing van het homogene H.P. is dan

$$\Phi(z) = X(z) P(z).$$

Opmerking. Zij  $P$  van de graad  $k$ , dan heeft  $X(z) P(z)$  de graad  $-K+k$  in  $\infty$ . De fundamentele oplossing  $X(z)$  is de oplossing met minimale graad in  $\infty$ .

Stap C Inhomogeen H.P.:  $\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t)$ ,  $t \in L$ .

Stel  $X$  is de fundamentele oplossing van het homogene H.P., dus  $X^+(t) = G(t) X^-(t)$ ,  $t \in L$ .

Stel  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z)$ .

Het inhomogene H.P. gaat over in:  $X^+(t) \Psi^+(t) = G(t) X^-(t) \Psi^-(t) + g(t)$ ,  $t \in L$ .

Na deling volgt voor  $\Psi$  het H.P.:  $\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{g(t)}{X^+(t)}$ ,  $t \in L$ .

Met stap A:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt + P(z)$$

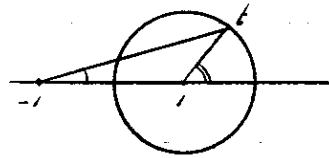
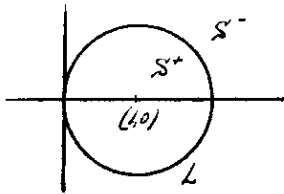
De algemene oplossing van het inhomogene H.P. is dan:

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{\chi^+(t)(t-z)} dt + \chi(z) P(z) \quad P(z) \text{ is willekeurig polynoom}$$

De eerste term is een particuliere oplossing van het inhomogene H.P., de tweede term is de algemene oplossing van het homogene H.P.

Voorbeeld H.P.

$$\bar{\Phi}^+(t) = (t^2-1) \bar{\Phi}^-(t) + \frac{t}{t-1}, \quad t \in L: |t-1|=1$$



Homogeen H.P.

$$\bar{\Phi}^+(t) = (t^2-1) \bar{\Phi}^-(t)$$

$$\text{Ind}(t^2-1) = \frac{1}{2\pi} \left[ \arg(t-1) + \arg(t+1) \right]_L = 1$$

Kies  $a_0 = 1$ , binnen  $L$ , en voor in: 
$$\bar{\Phi}_0(z) = \begin{cases} \bar{\Phi}(z), & z \in S^+ \\ (z-1)\bar{\Phi}(z), & z \in S^- \end{cases}$$

Het H.P. voor  $\bar{\Phi}_0$ : 
$$\bar{\Phi}_0^+(t) = (t^2-1) \frac{\bar{\Phi}_0^-(t)}{t-1} = (t+1) \bar{\Phi}_0^-(t), \quad t \in L, \text{ waarbij } \text{Ind}(t+1) = 0.$$

Neem de logaritme: 
$$[\log \bar{\Phi}_0(t)]^+ - [\log \bar{\Phi}_0(t)]^- = \log(t+1)$$

Oplossing:

$$\log \bar{\Phi}_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log(t+1)}{t-z} dt = \begin{cases} \log(z+1), & z \in S^+ \\ 0, & z \in S^- \end{cases}$$

Dan: 
$$\bar{\Phi}_0(z) = \begin{cases} z+1, & z \in S^+ \\ 1, & z \in S^- \end{cases} \text{ en } \bar{\Phi}(z) = \begin{cases} z+1, & z \in S^+ \\ \frac{1}{z-1}, & z \in S^- \end{cases} = \chi(z), \text{ waarbij}$$

$\chi$  de fundamentele oplossing van het homogene H.P. is. De graad van  $\chi$  in  $\infty$  is  $-1 = -K$ .

In het inhomogene H.P. stellen we  $\bar{\Phi}(z) = \chi(z) \Psi(z)$ , dan volgt

$$\chi^+(t) \Psi^+(t) = (t^2-1) \chi^-(t) \Psi^-(t) + \frac{t}{t-1}, \quad t \in L.$$

Substitueer:  $X^+(t) = t+1$

$$X^-(t) = \frac{1}{t-1}, \text{ dan volgt: } \bar{\Psi}^+(t) - \bar{\Psi}^-(t) = \frac{t}{t^2-1}, t \in L.$$

Voor  $\bar{\Psi}$  volgt:

$$\bar{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t dt}{(t^2-1)(t-z)} + P(z) = \begin{cases} \frac{1}{2(z+1)} + P(z), & z \in S^+ \\ \frac{-1}{2(z-1)} + P(z), & z \in S^- \end{cases}$$

De algemene oplossing van het H.P. wordt dan:

$$\Phi(z) = X(z) \bar{\Psi}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} + (z+1)P(z), & z \in S^+ \\ -\frac{1}{2(z-1)^2} + \frac{P(z)}{z-1}, & z \in S^- \end{cases} \quad \begin{array}{l} P(z) \text{ is willekeurig} \\ \text{poly. van } \end{array}$$

## 6. Het Hilbertprobleem voor een boog.

$L$  is een boog met eindpunten  $a$  en  $b$ .

Formulering van het H.P.

Gevraagd de functie  $\Phi$  die voldoet aan de volgende voorwaarden:

- 1)  $\Phi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$ , behalve op  $L$ ;
- 2)  $\Phi$  is van eindige graad in  $\infty$ ;
- 3) het gedrag van  $\Phi$  bij  $z=a$ ,  $z=b$  is één van de volgende vier

mogelijkheden:

- 3a)  $\Phi(z) = O(|z-a|^{-\delta_1})$  bij  $z=a$ ,  $\Phi(z) = O(|z-b|^{-\delta_2})$  bij  $z=b$ ,  $0 \leq \delta_1, \delta_2 < 1$ , probleem  $HP_0$ ;
- 3b)  $\Phi(z) = O(1)$ , begrensd bij  $z=a$ ,  $\Phi(z) = O(|z-b|^{-\delta_2})$  bij  $z=b$ ,  $0 \leq \delta_2 < 1$ , probleem  $HP(a)$ ;
- 3c)  $\Phi(z) = O(|z-a|^{-\delta_1})$  bij  $z=a$ ,  $\Phi(z) = O(1)$ , begrensd bij  $z=b$ ,  $0 \leq \delta_1 < 1$ , probleem  $HP(b)$ ;
- 3d)  $\Phi(z) = O(1)$ , begrensd, bij  $z=a$  en  $z=b$ , probleem  $HP(a, b)$ ;

$$4) \text{ voor } t \in L \text{ geldt: } \Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) \quad (\text{homogene H.P.})$$

$$\text{resp. } \Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t) \quad (\text{inhomogene H.P.}), \text{ waarbij}$$

$G$  en  $g$  gegeven Höldercontinue functies zijn en  $G(t) \neq 0, t \in L$ .

Hiermee zijn 4 homogene en 4 inhomogene H.P.'s geformuleerd.

De oplossing wordt gegeven in drie stappen.

Step A HP, voorwaarde 3a)  $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)$

met

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{\beta_1}(t-b)^{\beta_2}}, \quad 0 < \beta_1 < 1, \quad \varphi^* \in H.$$

Een particuliere oplossing:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

Deze oplossing voldoet aan de voorwaarden 1, 2 en 4.

Voorwaarde 3a: bij  $z=a$ ,  $\Phi(z) = \begin{cases} O(\log|z-a|) & \text{als } \beta_1=0, \text{ zie } \S 3, \\ O(|z-a|^{\beta_1}) & \text{als } 0 < \beta_1 < 1. \end{cases}$   
idem bij  $z=b$ .

Algemene oplossing.

Stel  $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Psi(z)$

Substitutie:  $\Phi_1^+(t) + \Psi^+(t) - \Phi_1^-(t) - \Psi^-(t) = \varphi(t), \quad t \in L.$

ofwel voor  $\Psi$ :  $\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = 0, \quad t \in L.$

De functie  $\Psi$  sluit dus continu aan over  $L$  en met de bekende argumenten volgt dan dat  $\Psi$  analytisch is in  $\mathbb{C}$  behalve in  $z=a$  en  $z=b$ .

Met voorwaarde 3a

$$\Psi(z) = \begin{cases} O(|z-a|^{-\delta_1}) & \text{bij } z=a, \quad -\delta_1 > -1 \\ O(|z-b|^{-\delta_2}) & \text{bij } z=b, \quad -\delta_2 > -1. \end{cases}$$

$\Psi$  heeft dus geen polen in  $z=a$  en  $z=b$  maar ophefbare singulariteiten.

De functie  $\Psi$  is dan geheel en van eindige graad in  $\infty$ , zodat met de stelling van

Liauville volgt:  $\Psi(z) = P(z)$ ,  $P$  een willekeurige polynoom.

De algemene oplossing van het HP is:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_1(z) + P(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + P(z). \end{aligned}$$

Step B. Homogeen HP:  $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L.$

Neem de logaritme:  $[\log \Phi(t)]^+ - [\log \Phi(t)]^- = \log G(t), \quad t \in L.$

De functie  $\log G$  is nu wel eënnwaardig, want  $L$  is een boog.

Ook nu  $\log G$  Hölder continu op  $L$ .

Oplassing:  $\bar{\Phi}_1(z) = e^{\Omega(z)}$ ,  $\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G(t)}{t-z} dt$ ,

De functie  $\bar{\Phi}_1$  voldoet aan de voorwaarden 1, 2 en 4; de graad van  $\bar{\Phi}_1$  in  $\infty$  is 0, immers  $\bar{\Phi}_1(z) \rightarrow 1$ ,  $z \rightarrow \infty$ .

De functie  $\bar{\Phi}_1$  voldoet in het algemeen niet aan voorwaarde 3.

Met §3:  $\Omega(z) = -\frac{\log G(a)}{2\pi i} \log(z-a) + \Omega_1(z)$ , bij  $z=a$ ,  $\Omega_1$  begrensd bij  $z=a$ .

$$= \frac{\log G(b)}{2\pi i} \log(z-b) + \Omega_2(z)$$
, bij  $z=b$ ,  $\Omega_2$  begrensd bij  $z=b$ .

De volgende notatie wordt nu gebruikt:  $-\frac{\log G(a)}{2\pi i} = \alpha_1 + i\beta_1$ ,

$$\frac{\log G(b)}{2\pi i} = \alpha_2 + i\beta_2$$

Daarmede:

$$\bar{\Phi}_1(z) = (z-a)^{\alpha_1 + i\beta_1} e^{\Omega_1(z)}$$
, bij  $z=a$ 

$$= (z-b)^{\alpha_2 + i\beta_2} e^{\Omega_2(z)}$$
, bij  $z=b$ .

De exponenten behoeren niet te voldoen aan:  $\alpha_1 > -1$ ,  $\alpha_2 > -1$ , zodat niet voldaan is aan voorwaarde 3a.

De functie  $\bar{\Phi}_1$  wordt nu gemodificeerd.

Voer in:  $\bar{\Psi}_1(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \bar{\Phi}_1(z)$ ,  $n_1$  en  $n_2$  geheel, nog nader te kiezen.

De functie  $\bar{\Psi}_1$  voldoet aan de voorwaarden 1, 2 en 4; de graad van  $\bar{\Psi}_1$  in  $\infty$  is  $n_1 + n_2$ , eindig.

Kies nu  $n_1$  en  $n_2$  zodanig dat aan de voorwaarde 3 is voldaan.

Vorbereiding: bij  $z=a$ :  $\bar{\Psi}_1(z) = (z-a)^{\alpha_1 + n_1 + i\beta_1} (z-b)^{n_2} e^{\Omega_1(z)}$ , bij  $z=a$ , waarbij  $(z-b)^{n_2} e^{\Omega_2(z)}$  begrensd is bij  $z=a$ .

dus:  $\bar{\Psi}_1(z) = O(|z-a|^{\alpha_1 + n_1})$  bij  $z=a$ .

eveneens geldt:

$$\frac{1}{\bar{\Psi}_1(z)} = O(|z-a|^{-\alpha_1 - n_1})$$
 bij  $z=a$ ,

immers

$$\frac{1}{\bar{\Psi}_1(z)} = (z-a)^{-\alpha_1 - n_1 - i\beta_1} (z-b)^{-n_2} e^{-\Omega_1(z)}$$
, waarbij  $(z-b)^{-n_2} e^{-\Omega_2(z)}$  begrensd is bij  $z=a$ .

Analoog:  $\Psi_1(z) = O(|z-b|^{d_2+n_2})$  bij  $z=b$  en

$$\frac{1}{\Psi_1(z)} = O(|z-b|^{-d_2-n_2}) \text{ bij } z=b.$$

De keuze van  $n_1$  en  $n_2$  is nu afhankelijk van welke van de voorwaarden 3) wordt gekozen.

Voor  $HP_0$ : kies  $n_1$  en  $n_2$  zodat  $-1 < d_1+n_1 \leq 0$  en  $-1 < d_2+n_2 \leq 0$ ;  $n_1$  en  $n_2$  liggen dan beide eënduidig vast.

Met deze  $n_1$  en  $n_2$ :  $X(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \Phi_1(z)$ , de fundamentele oplossing van  $HP_0$

Eigenschappen van  $X$ :

$$X(z) = \begin{cases} O(|z-a|^{d_1+n_1}) & \text{bij } z=a, d_1+n_1 > -1 \\ O(|z-b|^{d_2+n_2}) & \text{bij } z=b, d_2+n_2 > -1 \end{cases}, \text{ zodat}$$

voldaan is aan voorwaarde 3a). Reden van minimum  $d_1+n_1 \leq 0, d_2+n_2 \leq 0$  komt nog.

$$\frac{1}{X(z)} = \begin{cases} O(|z-a|^{-d_1-n_1}) & \text{bij } z=a, \\ O(|z-b|^{-d_2-n_2}) & \text{bij } z=b. \end{cases}$$

De functie  $X$  heeft op  $\infty$  de graad  $n_1+n_2 = -K$ ,  $K$  heet de index van  $HP_0$ .

De algemene oplossing van  $HP_0$

Stel  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z)$  en substitueer dit in het homogene  $HP_0$ .

dan  $X^+(t) \Psi^+(t) = G(t) X^-(t) \Psi^-(t), t \in L,$

zodat  $\Psi^+(t) = \Psi^-(t), t \in L.$

De functie  $\Psi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$ , behalve in  $z=a$  en  $z=b$ .

bij  $z=a$ :  $\Psi(z) = \frac{1}{X(z)} \Phi(z) = O(|z-a|^{-d_1-n_1}) \cdot O(|z-a|^{-\delta_1}) = O(|z-a|^{-\delta_1-d_1-n_1})$   
 waarbij  $-\delta_1-d_1-n_1 > -1$ , want  $-\delta_1 > -1$  en  $-d_1-n_1 \geq 0$ .

Idem bij  $z=b$

De functie  $\Psi$  is dan een gehele functie, met eindige graad in  $\infty$ . Met de stelling van Liouville volgt dan  $\Psi(z) = P(z)$ ,  $P$  een willekeurig polynoom.

De algemene oplossing van  $HP_0$ :  $\Phi(z) = X(z) P(z)$ .

Opmerking: de fundamentele oplossing  $X$  is de oplossing met minimale graad in  $\infty$ .



HP(a, b) voorwaarde 3d)

Kies  $n_1$  en  $n_2$  zo dat  $0 \leq \alpha_1 + n_1 < 1$  en  $0 \leq \alpha_2 + n_2 < 1$ .

Met deze  $n_1$  en  $n_2$ :

$X(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \tilde{\Phi}(z)$ , de fundamentele oplossing van het homogene HP(a, b).

Eigenschappen van  $X$ :

$$X(z) = O(|z-a|^{\alpha_1+n_1}) \text{ bij } z=a, \alpha_1+n_1 \geq 0$$

$$= O(|z-b|^{\alpha_2+n_2}) \text{ bij } z=b, \alpha_2+n_2 \geq 0, \text{ zodat } X \text{ begrensd is bij } z=a$$

en  $z=b$  en daarmee voldaan is aan voorwaarde 3d)

$$\frac{1}{X(z)} = O(|z-a|^{-\alpha_1-n_1}) \text{ bij } z=a,$$

$$= O(|z-b|^{-\alpha_2-n_2}) \text{ bij } z=b.$$

Index  $k_0 = -n_1 - n_2$ .

De algemene oplossing van HP(a, b)

Stel  $\tilde{\Phi}(z) = X(z) \tilde{\Psi}(z)$  en substitueer dit in het homogene HP(a, b),

$$\text{dan } \underline{X'(z)} \tilde{\Psi}'(z) = \underline{G(z)} \underline{X(z)} \tilde{\Psi}(z), \quad z \in L,$$

$$\text{zodat } \tilde{\Psi}'(z) = \tilde{\Psi}(z), \quad z \in L.$$

De functie  $\tilde{\Psi}$  is analytisch in  $\mathbb{C}$ , behalve in  $z=a$  en  $z=b$ .

$$\text{bij } z=a: \tilde{\Psi}(z) = \frac{1}{X(z)} \tilde{\Phi}(z) = O(|z-a|^{-\alpha_1-n_1}). \quad O(z) = O(|z-a|^{-\alpha_1-n_1}),$$

$$\text{waarbij } -\alpha_1-n_1 > -1, \text{ want } \alpha_1+n_1 < 1.$$

De functie  $\tilde{\Psi}$  heeft geen pool in  $z=a$ , maar een ophefbare singulariteit.

Idem bij  $z=b$ .

De functie  $\tilde{\Psi}$  is dan een gehele functie, met eindige graad in  $z$ . Met de stelling van

Liouville volgt dan:  $\tilde{\Psi}(z) = P(z)$ ,  $P$  een willekeurig polynoom.

De algemene oplossing van HP(a, b):  $\tilde{\Phi}(z) = X(z) P(z)$

HP(a) voorwaarde 3b)

Kies  $n_1$  en  $n_2$  zo dat  $0 \leq \alpha_1 + n_1 < 1$  en  $-1 < \alpha_2 + n_2 \leq 0$ .

Met deze  $n_1$  en  $n_2$ :

$X(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \tilde{\Phi}(z)$ , de fundamentele oplossing van het homogene HP(a)

De algemene oplossing van HP(a):  $\tilde{\Phi}(z) = X(z) P(z)$ ,  $P$  een willekeurig polynoom.

Index  $k_0 = n_1 - n_2$

HP(b) voorwaarde 3c)

Kies  $n_1$  en  $n_2$  zó dat:  $-1 < \alpha_1 + n_1 \leq 0$  en  $0 \leq \alpha_2 + n_2 < 1$ .

Met deze  $n_1$  en  $n_2$ :

$X(z) = (z-a)^{n_1} (z-b)^{n_2} \bar{\Phi}(z)$ , de fundamentele oplossing van het homogene HP(b)

De algemene oplossing van HP(b):  $\bar{\Phi}(z) = X(z) P(z)$ ,  $P$  een willekeurig polynoom.

Invan  $\kappa_2 = n_1 + n_2$ .

Stap C. Inhomogeen H.P.

$$\bar{\Phi}^+(t) = G(t) \bar{\Phi}^-(t) + g(t), \quad t \in L,$$

onder de voorwaarde 3x), waarbij  $x = a, b, c$  of  $d$ .

Bepaal de fundamentele oplossing  $X$  van het bijbehorende homogene H.P.,

dat  $X^+(t) = G(t) X^-(t)$ , onder dezelfde voorwaarde 3x).

Stel  $\bar{\Phi}(z) = X(z) \bar{\Psi}(z)$ .

Het inhomogene H.P. gaat dan over in

$$X^+(t) \bar{\Psi}^+(t) = G(t) X^-(t) \bar{\Psi}^-(t) + g(t), \quad \text{waarbij } X^+(t) = G(t) X^-(t), \text{ zodat}$$

$$\bar{\Psi}^+(t) - \bar{\Psi}^-(t) = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L.$$

Met stap A.

$$\bar{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt + P(z), \quad P \text{ een willekeurig polynoom.}$$

De algemene oplossing van het inhomogene H.P. wordt dan

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt + X(z) P(z),$$

Waarbij de tweede term de algemene oplossing van het homogene probleem is en de eerste term een particuliere oplossing van het inhomogene probleem is.

Deze oplossing voldoet aan de voorwaarden 1, 2 en 4.

Opgave. Verifieer dat  $\bar{\Phi}$  voldoet aan voorwaarde 3x).

Het gedrag van  $X$  bij  $z=a$  en  $z=b$  volgt uit stap B. Leid daaruit af het gedrag van  $X^+$  bij  $t=a$  en  $t=b$ . Het gedrag van  $\int_L \frac{g(t) dt}{X^+(t)(t-z)}$  bij  $z=a$  en  $z=b$  kan dan worden bepaald met de stof behandeld in §3.

Voorbeeld. Zij  $L = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ . Beschouw het volgende H.P. op  $L$ :

$$e^{i\gamma t} \Phi^+(t) - e^{-i\gamma t} \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \quad 0 < \gamma < 1, \quad g \in H \text{ op } L, \text{ onder de}$$

$$\text{voorwaarde I} \quad \begin{cases} \Phi(z) = O(1), \text{ begrensd, bij } z=1 \\ \Phi(z) = O(|z+1|^{-\delta}), \text{ bij } z=-1, \quad 0 < \delta < 1 \end{cases} \quad \text{Type HP(1).}$$

Homogene H.P.

$$e^{i\gamma t} \Phi^+(t) - e^{-i\gamma t} \Phi^-(t) = 0, \quad t \in L$$

$$\Phi^+(t) = e^{-2i\gamma t} \Phi^-(t), \quad t \in L.$$

Neem de logaritme:

$$[\log \Phi^+(t)]^+ - [\log \Phi^-(t)]^- = \log e^{-2i\gamma t} = -2i\gamma t.$$

met de oplossing:

$$\log \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{-2i\gamma t}{t-z} dt = -\gamma \log \frac{z-1}{z+1},$$

$$\text{dus } \Phi(z) = (z-1)^{-\gamma} (z+1)^{\gamma}.$$

Fundamentele oplossing:  $X(z) = (z-1)^{n_1-\gamma} (z+1)^{n_2+\gamma}$ ,  $n_1$  en  $n_2$  geheel.

Met voorwaarde I volgt:  $0 \leq n_1 - \gamma < 1$  en  $-1 < n_2 + \gamma \leq 0$ , zodat  $n_1 = 1$  en  $n_2 = -1$ ,

$$\text{dan } X(z) = (z-1)^{-\gamma} (z+1)^{-1+\gamma}.$$

Afspraak argumenten:  $-\pi < \arg(z \pm 1) < \pi$ .

De functie  $X$  heeft een snede  $(-\infty, 1]$  waarvan het deel  $(-\infty, -1)$  vervalt (wegen continue  
aanhechting)

De functie  $X$  is dan analytisch in  $\mathbb{C} \setminus L$ .

$$\text{Voor } -1 < t < 1: \quad X^{\pm}(t) = (1-t)^{-\gamma} (1+t)^{-1+\gamma} e^{\pm \pi i(1-\gamma)}$$

Stel in het inhomog. H.P.:  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z)$ , dan volgt na substitutie in het H.P.

$$e^{i\gamma t} X^+(t) \Psi^+(t) - e^{-i\gamma t} X^-(t) \Psi^-(t) = g(t), \quad t \in L$$

$$\text{ofwel } (1-t)^{-\gamma} (1+t)^{-1+\gamma} [e^{i\gamma t} e^{\pi i(1-\gamma)} \Psi^+(t) - e^{-i\gamma t} e^{-\pi i(1-\gamma)} \Psi^-(t)] = g(t).$$

zodat:  $\bar{\Psi}^+(t) - \bar{\Psi}^-(t) = -g(t) (t-1)^{-1+\alpha} (t+1)^{1-\alpha}$ ,  $t \in L$ .

Hieruit volgt direct de functie  $\bar{\Psi}$  en na vermenigvuldiging met  $X$  de algemene oplossing van het inhomogene H.P.

$$\bar{\Phi}(z) = (z-1)^{1-\alpha} (z+1)^{-1+\alpha} [G(z) + P(z)],$$

waarbij

$$G(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) (t-1)^{-1+\alpha} (t+1)^{1-\alpha}}{(t-z)} dt.$$

Verificatie van voorwaarde I.

Gedrag bij  $z=1$ :  $G(z) = O(|z-1|^{-1+\alpha})$  en  $\bar{\Phi}(z) = O(1)$

Gedrag bij  $z=-1$ :  $G(z) = O(1)$  en  $\bar{\Phi}(z) = O(|z+1|^{-1+\alpha})$ .

Opgaven.

1. Geef de oplossing van het H.P. uit het voorbeeld onder de voorwaarden  $\bar{\Phi}(z) = O(1)$ , begrensd, bij  $z=1$  en  $z=-1$ ; of onder andere condities.
2. Bepaal de oplossing van het H.P.

$$\bar{\Phi}^+(t) - \bar{\Phi}^-(t) = g(t), \quad t \in L = [-1, 1], \quad g \in H,$$

onder de voorwaarde:  $\bar{\Phi}$  is begrensd bij  $t = \pm 1$ .

Laat zien dat een oplossing alleen bestaat als  $g(\pm 1) = 0$ .

9-10-1992

7. Toepassingen van de theorie van het Hilbertprobleem.

Het Dirichlet probleem voor het halfvlak.

$$u = u(x, y)$$

Bepaal de functie  $u$ , welke voldoet aan

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} f(x), & |x| < a, \quad f \text{ reëelwaardig} \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

$u(x, y)$  is begrensd als  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty, y > 0$ .

De oplossing van dit Dirichlet probleem is éénwaardig; zie collig. PDV, §7.7.

De functie  $u$  is reëelwaardig. Vat de functie  $u$  op als reëel deel van een analytische functie.

Voer in:  $\Phi(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ ,  $z = x + iy$ ,

waarbij  $u$  en  $v$  voldoen aan de Cauchy-Riemann relaties:  $u_x = v_y$  en  $u_y = -v_x$ .

De functie  $\Phi$  is analytisch voor  $\text{Im } z > 0$ .

Zet de functie voort door de definitie  $\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}$ ,  $\text{Im } z < 0$ .

Uitgeschreven:  $\Phi(z) = \Phi(x+iy) = -\overline{\Phi(x-iy)} = -u(x,-y) + i v(x,-y)$   $y = \text{Im } z < 0$ .

De functies  $-u(x,-y)$  en  $v(x,-y)$  voldoen aan de CR-relaties, dus  $\Phi$  is analytisch voor  $\text{Im } z < 0$ .

Voor  $x \in \mathbb{R}$   $\Phi^+(x) = \lim_{z \rightarrow x+i0} \Phi(z) = u(x,0) + i v(x,0)$

$\Phi^-(x) = \lim_{z \rightarrow x-i0} \Phi(z) = -u(x,0) + i v(x,0)$ , waarbij  $u(x,0)$  bekend en  $v(x,0)$  onbekend is.

Elimineer  $v(x,0)$   $\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 2u(x,0) = \begin{cases} 2f(x), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

De functie  $\Phi$  sluit continu aan over de reële as voor  $|x| > a$  en is dus analytisch voor  $|x| > a, y=0$ .

De functie  $\Phi$  is dan analytisch in  $\mathbb{C}$  buiten  $[-a, a]$ , terwijl  $\Phi$  voldoet aan het H.P.

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 2f(x), \quad -a < x < a,$$

Lim. lim. waarbij  $\Phi(z)$  begrensd is voor  $|z| \rightarrow \infty$ . (Dit laatste volgt uit de begrensdheid van  $u(x,y)$  als  $z^2 + y^2 \rightarrow \infty$ )

De oplossing van het H.P. luidt

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{f(x)}{x-z} dx + C, \quad C \text{ constant.}$$

De constante  $C$  staat voor het nulledeurige polynoom  $P$ , dat begrensd is in  $\infty$  dus van de graad 0 is.

De oplossing moet nog voldoen aan

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})} \quad \text{voor } \text{Im } z > 0.$$

Nu geldt:

$$-\overline{\Phi(\bar{z})} = -\overline{\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{f(x)}{x-\bar{z}} dx - \bar{C}} = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{f(x)}{x-z} dx - \bar{C}$$

$$\text{terwijl } \Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{f(x)}{x-z} dx + C$$

Uit  $\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}$  volgt dan  $C = -\bar{C}$ , zodat  $C = iD$ ,  $D \in \mathbb{R}$ .

De oplossing wordt dan  $\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{f(t)}{x-z} dx + iD$ ,  $D \in \mathbb{R}$

De oplossing van het Dirichlet probleem

$$u(x,y) = \operatorname{Re} \bar{\Phi}(x+iy) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{f(t)}{t-x-iy} dt + iD \right]$$

$$= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{t-x+iy}{(t-x)^2+y^2} f(t) dt + iD \right]$$

zodat:  $u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2} dt$ . Zelfde resultaat in college PDV, §7.7.

dit resultaat blijft geldig als  $a = \infty$ , mits  $f(t)$  continu en begrensd is op  $(-\infty, \infty)$ .

Tuimvormig: zie links.

Het Dirichlet probleem voor een cirkelgebied.

$$u = u(x,y)$$

Bepaal de functie  $u$ , welke voldoet aan

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x_0, y_0) = f(t), \quad x_0 + iy_0 = t \in L, \quad L: |t| = 1.$$

De functies  $f$  en  $u$  zijn reëelwaardig.

Vat  $u$  op als het reële deel van een analytische functie  $\bar{\Phi}$

$$\bar{\Phi}(z) = u(x,y) + i v(x,y), \quad z = x+iy.$$

De functies  $u$  en  $v$  voldoen aan de C.R. relaties  $u_x = v_y$  en  $u_y = -v_x$ .

De functie  $\bar{\Phi}$  is analytisch in  $S^+$ :  $|z| < 1$ .

Zet  $\bar{\Phi}$  voort in  $S^-$ :  $|z| > 1$  door de definitie  $\bar{\Phi}(z) = \overline{\bar{\Phi}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ ,  $z \in S^-$ .

Uitgeschreven:

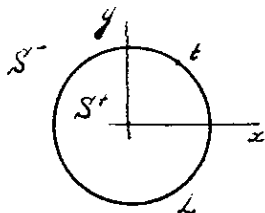
$$\bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}(x+iy) = \overline{\bar{\Phi}\left(\frac{1}{x-iy}\right)} = \overline{\bar{\Phi}\left(\frac{x+iy}{x^2+y^2}\right)}$$

$$= u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) - i v\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad |z| = \sqrt{x^2+y^2} > 1,$$

waarbij  $u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$  en  $-v\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$  voldoen aan de C.R. relaties. (Nagaan)

De functie  $\bar{\Phi}$  is analytisch voor  $|z| > 1$ , dus  $\bar{\Phi}$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  behalve op  $L$ :  $|z| = 1$ .

Het gedrag op  $\infty$ .  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \bar{\Phi}(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{\Phi}(0)$ , dus  $\bar{\Phi}$  is begrensd op  $\infty$ ,  $\bar{\Phi}$  is van de graad 0 op  $\infty$ .



Voor  $x_0 + iy_0 = t \in L$  geldt

$$\bar{\Phi}^+(t) = u(x_0, y_0) + iN(x_0, y_0)$$

$$\bar{\Phi}^-(t) = u(x_0, y_0) - iN(x_0, y_0), \text{ bedenk hierbij dat}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

Elimineer de onbekende  $N(x_0, y_0)$ , dan blijft voor  $\bar{\Phi}$  het volgende H.P.

$$\bar{\Phi}^+(t) + \bar{\Phi}^-(t) = 2u(x_0, y_0) = 2f(t), \quad t \in L, \quad L: |t|=1.$$

Homogene H.P.  $\bar{\Phi}^+(t) + \bar{\Phi}^-(t) = 0$ ,

met fundamentele oplossing:  $X(z) = \begin{cases} +1 & , z \in S^+ \\ -1 & , z \in S^- \end{cases}$ , (Nagaan!)

Stel  $\bar{\Phi}(z) = X(z) \bar{\Psi}(z)$  en substitueer dit in het inhomogene H.P.

$$X^+(t) \bar{\Psi}^+(t) + X^-(t) \bar{\Psi}^-(t) = 2f(t), \quad t \in L,$$

waaruit volgt  $\bar{\Psi}^+(t) - \bar{\Psi}^-(t) = 2f(t), \quad t \in L,$

met de oplossing

$$\bar{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2f(t)}{t-z} dt + P(z), \quad P \text{ een willekeurig polynoom.}$$

De algemene oplossing:  $\bar{\Phi}(z) = \pm \left[ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + P(z) \right], \quad z \in S^\pm$

De functie  $\bar{\Phi}$  is van de graad 0 op  $\infty$ , dus  $P(z) = C$ , een constante.

De oplossing moet voldoen aan:  $\bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)}$ , voor  $|z| > 1$ .

Neem  $z \in S^-$ , dan  $\frac{1}{z} \in S^+$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - \frac{1}{z}} dt + C \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\bar{t} - \frac{1}{z}} d\bar{t} + \bar{C} \end{aligned}$$

Stel langs  $L$ :  $t = e^{i\theta}$ , dan  $\bar{t} = e^{-i\theta} = \frac{1}{t}$

$$\text{en } dt = ie^{i\theta} d\theta \text{ zodat } d\bar{t} = -ie^{-i\theta} d\theta = -\frac{ie^{i\theta}}{e^{2i\theta}} d\theta = -\frac{dt}{t^2}.$$

Substitutie in de uitdrukking voor  $\overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)}$ :

$$\overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\frac{1}{t} - \frac{1}{z}} \cdot \frac{dt}{t^2} + \bar{C} = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{zf(t)}{t(t-z)} dt + \bar{C}$$

$$\text{ofwel: } \overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t} dt - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + \bar{C}.$$

$$\text{Anderzijds geldt voor } z \in S^-: \quad \Phi(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt - C.$$

Gelijkstellen levert:

$$C + \bar{C} = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t} dt, \text{ zodat } C = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t} dt + iD, \quad D \in \mathbb{R},$$

waarbij  $D$  een willekeurige constante is.

Substitutie van  $C$  in de uitdrukking voor  $\Phi$  levert uiteindelijk:

$$\overline{\Phi(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t+z}{t-z} \frac{f(t)}{t} dt + iD, \quad |z| < 1, \quad D \in \mathbb{R}; \text{ de formule van Schwarz.}$$

Stel  $z = re^{i\varphi}$  en  $t = e^{i\theta}$ , dan

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(re^{i\varphi})} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + re^{i\varphi}}{e^{i\theta} - re^{i\varphi}} \cdot \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta + iD \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2 - 2ir \sin(\theta-\varphi)}{1+r^2 - 2r \cos(\theta-\varphi)} \cdot f(e^{i\theta}) d\theta + iD. \end{aligned}$$

Voor de functie  $u$  volgt daaruit:

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \operatorname{Re}(\overline{\Phi(re^{i\varphi})}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1+r^2 - 2r \cos(\theta-\varphi)} d\theta, \text{ de oplossing van } x$$

het Dirichlet probleem voor de cirkel.

De uitdrukking voor de oplossing is de integraalformule van Poisson. (zie differentiaalvergelijkingen 2).

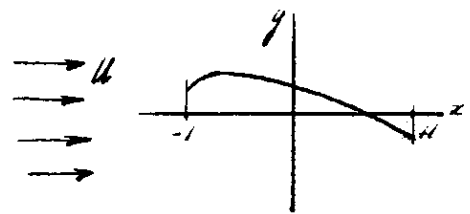
College PDV, § 7.8

Toewijzing. Inversieformules van Hilbert, zie aantekeningen in eigen map.



### Stroming om een profiel

Beschouwd wordt de stationaire, rotatievrije stroming van een incompressibele, niet-viscouse vloeistof om een dun, twee-dimensionaal profiel, voorgesteld door  $y = f(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .



Het profiel is geplaatst in een stromende vloeistof. De ongestoorde stroming vindt plaats met snelheid  $U$  in  $x$ -richting. Door het profiel wordt de stroming gestoord. Voor  $x^2+y^2 \rightarrow \infty$  nadert de gestoorde stroming de ongestoorde stroming.

De storing van de snelheid door het dunne profiel wordt voorgesteld door  $(u, v)$ . De totale snelheid is  $\underline{q} = (U+u, v)$ .

Voor een incompressibele stroming:  $\text{div } \underline{q} = 0$ ,  $u_x + v_y = 0$ .

Voor een rotatievrije stroming:  $\text{rot } \underline{q} = 0$ ,  $v_x - u_y = 0$ .

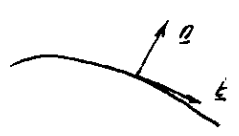
De basisvergelijkingen zijn dus  $u_x = -v_y$  en  $u_y = v_x$ , de Cauchy-Riemannrelaties voor de functies  $u$  en  $-v$ .

Definieer de functie  $\Phi$ :  $\Phi(z) = u(x,y) - i v(x,y)$ ,  $z = x+iy$ , de complexe snelheid.

De functie  $\Phi$  is analytisch buiten het profiel.

Op  $\infty$  is de stroming ongestoord, dus  $u, v \rightarrow 0$  voor  $x^2+y^2 \rightarrow \infty$ , zodat  $\Phi(z) \rightarrow 0$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .

De randvoorwaarde is: de normaalcomponent van de snelheid is nul op het profiel. Ofwel



$$\underline{q} \cdot \underline{n} = 0 \text{ op het profiel}$$

De raaklijn heeft richting  $\underline{t} = (1, f'(x))$  zodat de normaalvector  $\underline{n} = (-f'(x), 1)$

De randvoorwaarde wordt dan:

$$\underline{q} \cdot \underline{n} = -(U+u) f'(x) + v = 0 \text{ op het profiel.}$$

$$\text{Dus } v = (U+u) f'(x) \text{ op het profiel.}$$

#### Lineariseren.

Veronderstel dat  $u, v$  en  $f'(x)$  klein zijn, zodat producten van deze grootheden verwaarloosd mogen worden. De randvoorwaarde wordt na lineariseren:  $v = U f'(x)$  op het profiel.

Vervang het echte profiel door het ge-lineariseerde profiel:  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y=0$ , dan wordt de randvoorwaarde:  $v = U f'(x)$  op  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y=0$ .

Voor de functie  $\bar{\Phi}$  krijgen we dan het volgende probleem:

- 1)  $\bar{\Phi}$  is analytisch in  $\mathbb{C}$ , behalve op  $[-1, 1]$ , het geïntegreerde profiel;
- 2)  $\bar{\Phi}(z) \rightarrow 0$  als  $|z| \rightarrow \infty$ ;
- 3) uit de fysica volgt:  $\bar{\Phi}(z) = O(|z+1|^{-\delta})$  bij  $z = -1$ ,  $0 \leq \delta < 1$ ,  
 $= O(1)$  bij  $z = 1$ ; (Kutta-conditie).
- 4)  $N(x, 0^+) = N(x, 0^-) = U f'(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

16-16-1992

Door van de symmetrie in het probleem gebruik te maken kan worden gesteld:

$$N \text{ is even in } y: N(x, y) = N(x, -y).$$

Voor  $u$  volgt  $u_x = -v_y$  oneven in  $y$ , en  $u_y = v_x$  even in  $y$ , zodat  $u$  oneven is in  $y$   
 ofwel  $u(x, y) = -u(x, -y)$ .

$$\begin{aligned} \text{Voor } -1 < x < 1: \quad \bar{\Phi}^+(z) &= u(x, 0^+) - iN(x, 0^+) \\ \bar{\Phi}^-(z) &= u(x, 0^-) - iN(x, 0^-) \\ &= -u(x, 0^+) - iN(x, 0^+) \quad \text{met de symmetrierelaties.} \end{aligned}$$

Elimineer  $u(x, 0^+)$  dan

$$\bar{\Phi}^+(z) + \bar{\Phi}^-(z) = -2iN(x, 0^+) = -2iU f'(x), \quad -1 < x < 1.$$

Hilbert probleem voor  $\bar{\Phi}$ .

- 1)  $\bar{\Phi}$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  behalve op  $[-1, 1]$ ;
- 2)  $\bar{\Phi}(z) \rightarrow 0$  als  $|z| \rightarrow \infty$ ;
- 3)  $\bar{\Phi}(z) = O(|z+1|^{-\delta})$  bij  $z = -1$ ,  $0 \leq \delta < 1$ ,  
 $= O(1)$  bij  $z = +1$ ;
- 4) voor  $-1 < x < 1$ :  $\bar{\Phi}^+(z) + \bar{\Phi}^-(z) = -2iU f'(x)$ .

Homogeen, H.P.:  $\bar{\Phi}^+(z) + \bar{\Phi}^-(z) = 0$ ,  $\bar{\Phi}^+(z) = -\bar{\Phi}^-(z)$

Neem de logaritme:  $[\log \bar{\Phi}(z)]^+ - [\log \bar{\Phi}(z)]^- = \log(-1) = \pi i$

Oplossing:

$$\log \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\pi i}{x-z} dx = \frac{1}{2} \log \frac{z-1}{z+1}, \quad \bar{\Phi}(z) = (z-1)^{1/2} (z+1)^{-1/2}$$

Fundamentele oplossing:  $\chi(z) = (z-1)^{1/2} (z+1)^{-1/2}$

De fundamentele oplossing  $\chi$  moet voldoen aan voorwaarde 3).

Met de afspraak:  $-\epsilon < \arg(z \pm 1) < \epsilon$ , volgt dan

voor  $-1 < x < 1$ :  $\chi^{\pm}(x) = \pm i (1-x)^{1/2} (1+x)^{-1/2}$

Stel  $\Phi(z) = \chi(z) \Psi(z)$  en substitueer dit in het inhomogeen H.P.

$(1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} [\Psi^+(x) - \Psi^-(x)] = -2i u f(x)$

zodat:  $\Psi^+(x) - \Psi^-(x) = -2u f(x) (1-x)^{-1/2} (1+x)^{1/2}$ ,  $-1 < x < 1$

Algemee oplossing:  $\Phi(z) = (z-1)^{1/2} (z+1)^{1/2} \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^+ \frac{2u f(x) (1-x)^{-1/2} (1+x)^{1/2} dx}{(z-x)} + P(z) \right]$  x  
P een polynoom.

Voorwaarde 2):  $\Phi(z) \rightarrow 0$ , voor  $z \rightarrow \infty$ , zodat volgt:  $P=0$ .

Uit de voorstelling voor  $\Phi(x)$  volgen dan:  $\Phi^{\pm}(x)$ ,  $u(x, 0^{\pm})$  en  $v(x, 0^{\pm})$ .  
(met formules van Planché)

Opgave: Werk de oplossing verder uit voor het geval:  $f(x) = -dx$ ; een vlakke plaat die een hoek  $2\alpha$  met de stroming maakt.

De druk  $p$  in het medium volgt met de Wet van Bernoulli (gelineariseerd)

$P - P_{\infty} = -\rho u u$   $P_{\infty}$  is de druk in de ongestoorde stroming op grote afstand van het profiel en  $\rho$  is de dichtheid.

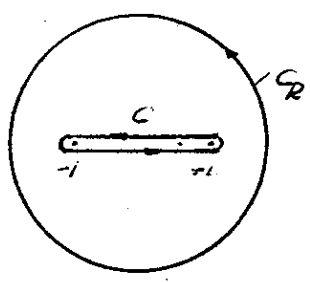
De opwaartse kracht of lift  $L$  op het profiel:

$L = \int_{-1}^+ [p(x, 0^-) - p(x, 0^+)] dx$   
 $= -\rho u \int_{-1}^+ [u(x, 0^-) - u(x, 0^+)] dx$

Bedenk, voor de berekening van  $L$ , dat  $v(x, 0^+) = v(x, 0^-)$ ,

dan:  $L = -\rho u \int_{-1}^+ [\Phi^-(x) - \Phi^+(x)] dx = -\rho u \int_C \Phi(z) dz$ , waarbij  $C$  een contour is om de snede.  $C$  wordt in positieve zin doorlopen.

In een figuur:



Met functietheorie kan het probleem verder worden behandeld. Neem  $C$  tot een cirkel  $C_R: |z|=R$ .

Dan volgt:  $L = -\rho U \int_{C_R} \Phi(z) dz$ . Voor de berekening van  $L: R \rightarrow \infty$ .

Ontwikkel  $\Phi(z)$  voor  $|z| > 1$ :

$$(z-1)^{1/2} (z+1)^{-1/2} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1/2} = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right), |z| \rightarrow \infty.$$

$$-\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} U f(x) (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} \frac{1}{z-z} dz = -\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} U f(x) (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} \left[ -\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} - \frac{x^2}{z^3} - \dots \right] dz$$

$$= \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), z \rightarrow \infty, \text{ waarbij } A = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} U f(x) (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} dx.$$

Dan:  $\Phi(z) = \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), |z| \rightarrow \infty$ .

en

$$\int_{C_R} \Phi(z) dz = \int_{C_R} \left[ \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] dz = 2\pi i A + O\left(\frac{1}{R}\right) \rightarrow 2\pi i A, \text{ voor } R \rightarrow \infty.$$

Voor de lift volgt dan:  $L = -\rho U \cdot 2\pi i A$   
 $= -2\rho U^2 \int_{-1}^{+1} f(x) (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} dx.$

Opgave. Het moment <sup>t.o.v. de oorsprong</sup> op het profiel is gedefinieerd door  $M = \int_{-1}^{+1} [p(x,0^-) - p(x,0^+)] x dx.$

Toon aan:  $M = 2\rho U^2 \int_{-1}^{+1} f(x) (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} dx$

Opgave. Merk  $L$  en  $M$  uit voor het geval:  $f(x) = -cx, -1 \leq x \leq 1$ . (vlakke plaat)

Literatuur: G.H. Veltkamp, The drag on a vibrating aerofoil in incompressible flow, I, II  
 Proc. K.N.A.W., Amsterdam, A61, 278-297 (1958).

J.B. Alblas, J.A. Geurst en J.A. Sparenburg, "Mathematische problemen uit de practijk: Singuliere integraalvergelijkingen", Colloquium Math. Curieum, 1957.  
 (Thema van Cauchy integraal en Hilbert probleem, verhoudingen met theorie van en elasticiteitstheorie)

8. Singuliere integraalvergelijkingen met Cauchy-kern.

Algemene gedaante:

$$a(t_0) \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(t_0, t) \varphi(t)}{t - t_0} dt = f(t_0), \quad t_0 \in L, \text{ waarbij } L \text{ een contour of een boog is.}$$

$a, K$  en  $f$  zijn gegeven Höldercontinue functies,  $\varphi$  is te bepalen.

De integraal  $\int_L$  is op te vatten als Cauchy-hoofdwaarde.

Algemene theorie: Muskhelishvili hoofdstuk 6 (contour) en 14 (boog).

In dit college worden drie speciale gevallen, aangeduid met  $I_A, I_B$  en  $\bar{I}$  behandeld.

Geval  $I_A$ : 
$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = f(t_0), \quad t_0 \in L, \quad L \text{ een contour.}$$

Opmerking: Muskhelishvili geeft in §27 drie methoden om de oplossing te bepalen.

Voor in:

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt$$

Eigenschappen van  $\bar{\Phi}$ : 1)  $\bar{\Phi}$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  behalve op  $L$ .

2)  $\bar{\Phi}(z) = O(\frac{1}{z}), |z| \rightarrow \infty$ .

3) Formules van Plemelj.

voor  $t_0 \in L$ : 
$$\bar{\Phi}^+(t_0) - \bar{\Phi}^-(t_0) = \varphi(t_0)$$

$$\bar{\Phi}^+(t_0) + \bar{\Phi}^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = f(t_0)$$

Voor de functie  $\bar{\Phi}$  hebben we dus het H.P.:

$$\bar{\Phi}^+(t_0) + \bar{\Phi}^-(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in L.$$

Het homogene H.P. heeft als fundamentele oplossing  $X(z) = \begin{cases} +1, & z \in S^+ \\ -1, & z \in S^- \end{cases}$  (Ga dit na!)

Stel  $\bar{\Phi}(z) = X(z) \Psi(z)$ . Het H.P. wordt:  $\bar{\Phi}^+(t) - \bar{\Phi}^-(t) = f(t)$ .

Oplossing:

$$\bar{\Phi}(z) = \pm \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - z} dt + P(z) \right], \quad z \in S^\pm, \quad P \text{ een polynoom.}$$

Eigenschap 2) :  $\Phi(z) = O(\frac{1}{z})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ . De functie is dus van de graad -1 op  $\infty$ , zodat  $P=0$ .

Daarmede volgt:

$$\Phi^{\pm}(t_0) = \pm \left[ \pm \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt \right],$$

zodat:  $\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt$ ,  $t_0 \in L$ . x

Opmerking. Vergelijk dit antwoord met  $\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0)$ ,  $t_0 \in L$  x

Opmerking. Substitueer de oplossing in de vergelijking:

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} \int_L \frac{f(t_1) dt_1}{t_1-t} = -\pi^2 f(t_0).$$

Vermiseling van integratievolgorde is niet toegestaan:  $\int_L \frac{dt}{t-t_0} \int_L \frac{f(t_1) dt_1}{t_1-t} \neq \int_L f(t_1) dt_1 \int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t_1-t)}$

Want het linkertlid is  $-\pi^2 f(t_0)$  en het rechterlid is 0, zoals direct volgt

$$\int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t_1-t)} = \frac{1}{t_1-t_0} \left\{ \int_L \frac{dt}{t-t_0} - \int_L \frac{dt}{t-t_1} \right\} = \frac{1}{t_1-t_0} \{ \pi i - \pi i \} = 0.$$

Het geldt de transformatieformule van Poincaré-Bertrand (1921, 1923):

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} \int_L \frac{\varphi(t_1, t_1)}{t_1-t} dt_1 = \int_L dt_1 \int_L \frac{\varphi(t_1, t_1)}{(t-t_0)(t_1-t)} dt - \pi^2 \varphi(t_0, t_0). \quad x$$

Voor het bonyt zie Muskhelishvili § 23.

Geval  $I_B$   $\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t_1)}{t-t_0} = f(t_0)$ ,  $-1 < t_0 < 1$ .

Gevraagd is een oplossing met integreerbare singulariteit in  $t = \pm 1$ .

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= O((1+t)^{-\delta_1}) \text{ bij } t = -1 \\ &= O((1-t)^{-\delta_2}) \text{ bij } t = +1, \quad 0 \leq \delta_{1,2} < 1. \end{aligned}$$

Voer in: 
$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

Eigenschappen van  $\Phi$ :

1)  $\Phi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  buiten  $[-1, 1]$ .

2)  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .

3)  $\Phi(z) = O(|z+1|^{-\delta_1})$  bij  $z \rightarrow -1$   
 $= O(|z-1|^{-\delta_2})$  bij  $z \rightarrow +1$ .

4) De formules van Plemelj:

voor  $-1 < t_0 < 1$

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0)$$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0)$$

Voor de functie  $\Phi$  hebben we dus het H.P.

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = f(t_0), \quad -1 < t_0 < 1$$

Skets van de oplossing:

fundamentele oplossing van het homogeen H.P.  $\chi(z) = (z-1)^{-\frac{1}{2}}(z+1)^{\frac{1}{2}}$  (denk aan eigenschap 3)).

stel  $\Phi(z) = \chi(z) \Psi(z)$  etc.

oplossing: 
$$\Phi(z) = (z-1)^{-\frac{1}{2}}(z+1)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{i f(t) (t-t^2)^{\frac{1}{2}}}{t-z} dt + P(z) \right],$$
  $P$  een polynoom.

met eigenschap 2)  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ , voor  $|z| \rightarrow \infty$ , dus  $P(z) = C$ ,  $C$  een willekeurige constante.

Bereken nu  $\Phi^{\pm}(t_0)$  voor  $-1 < t_0 < 1$ :

$$\Phi^{\pm}(t_0) = \pm i (1-t_0^2)^{-\frac{1}{2}} \left[ \pm \frac{1}{2} i f(t_0) (1-t_0^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{i f(t) (1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{t-t_0} dt + C \right]$$

hieruit volgt:

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} (1-t_0^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) (1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{t-t_0} dt + C^* (1-t_0^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad C^* \text{ constant.}$$

Opmerking. Als  $f(t) = 0$ , dan verkrijgen we de homogene integraalvergelijking:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = 0, \quad -1 < t_0 < 1,$$

met de oplossing:  $\varphi(t) = C^* (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$  x

Substitutie:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t-t_0} dt = 0, \quad -1 < t_0 < 1, \text{ hetgeen juist is. (zie voorbeeld § 4).}$$

Geval II.  $a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \begin{cases} 0, & \text{homogene integraalvergelijking,} \\ f(t_0), & \text{inhomogene} \end{cases} \quad t_0 \in L$

$L$  is een contour of de boog  $[-1, 1]$ .

$a$ ,  $b$  en  $f$  zijn gegeven Höldercontinue functies op  $L$ ,  $\varphi$  is te bepalen.

De integraal  $\int_L$  is Cauchy-Hoofdwaarde.

Voor het geval  $L$  de boog  $[-1, 1]$  is, wordt gevergd een oplossing  $\varphi$  met een gedrag bij  $t = \pm 1$  volgens een van de volgende vier mogelijkheden:

a)  $\varphi(t) = O(|t+1|^{-\delta_1})$  bij  $t = -1$ ,  $\varphi(t) = O(|t-1|^{-\delta_2})$  bij  $t = 1$ ,  $0 \leq \delta_{1,2} < 1$ .

b)  $\varphi(-1) = 0$ ,  $\varphi(t) = O(|t-1|^{-\delta_2})$  bij  $t = 1$ ,  $0 \leq \delta_2 < 1$ .

c)  $\varphi(t) = O(|t+1|^{-\delta_1})$  bij  $t = -1$ ,  $0 \leq \delta_1 < 1$ ,  $\varphi(1) = 0$ .

d)  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ .

Voor in de functie  $\Phi$  volgens:  $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$ .

Eigenschappen van  $\Phi$ : 1)  $\Phi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  behalve op  $L$ .

2)  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .

3) Voor het geval  $L$  de boog  $[-1, 1]$  is

3a)  $\Phi(z) = O(|z+1|^{-\delta_1})$  bij  $z = -1$ ,  $\Phi(z) = O(|z-1|^{-\delta_2})$  bij  $z = 1$ ,  $0 \leq \delta_{1,2} < 1$ .

b)  $\Phi(z) = O(1)$  bij  $z = -1$ ,  $\Phi(z) = O(|z-1|^{-\delta_2})$  bij  $z = 1$ ,  $0 \leq \delta_2 < 1$ .

c)  $\Phi(z) = O(|z+1|^{-\delta_1})$  bij  $z = -1$ ,  $0 \leq \delta_1 < 1$ ,  $\Phi(z) = O(1)$  bij  $z = 1$ .

d)  $\Phi(z) = O(1)$  bij  $z = -1$ ,  $\Phi(z) = O(1)$  bij  $z = 1$ .

4) De formules van Plemelj:

voor  $t_0 \in L$ :  $\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0)$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt.$$

Substitutie van de formules van Plemelj in de integraalvergelijking levert:

$$a(t_0) [\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)] + b(t_0) [\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)] = \begin{cases} 0 \\ f(t_0) \end{cases}, \quad t_0 \in L.$$



Vervangen we  $t_0$  door  $t$  dan krijgen we de vergelijking:

$$[a(t) + b(t)] \Phi^+(t) - [a(t) - b(t)] \Phi^-(t) = \begin{cases} 0 \\ f(t) \end{cases}, t \in L.$$

We veronderstellen:  $a(t) \pm b(t) \neq 0, t \in L.$

Delen door  $a(t) + b(t)$  levert de brude H.P.

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \Phi^-(t), t \in L, \text{ homogeen H.P.}$$

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}, t \in L, \text{ inhomogeen H.P.}$$

Bepaal de fundamentele oplossing  $X$  van het homogene H.P. Denk hierbij aan eigenschap 3x ( $x$  is  $a, b, c$  of  $d$ ).

De fundamentele oplossing  $X$  heeft de graad  $-k$  op  $\infty$ ,  $k$  de index van het H.P.

De algemene oplossing van het homogene H.P.  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z).$

De algemene oplossing van het inhomogene H.P.  $\Phi(z) = X(z) H(z) + X(z) P(z),$

waarbij  $H(z) = \int_{z_0}^z \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \cdot \frac{1}{X^+(t)} dt$  en  $P$  een polynoom is.

Eigenschap 4) van  $\Phi$  is sterker dan tot nu toe gebruiktelijk was:

$$\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), |z| \rightarrow \infty, \Phi \text{ is dus van de graad } -1 \text{ op } \infty.$$

Dit legt beperkingen op aan het polynoom  $P$ , afhankelijk van de index  $k$ .

onderscheid de beide volgende gevallen:

1.  $k \geq 0$ . Zij  $P$  een polynoom van de graad  $l$ . Dan is  $X(z) P(z)$  van de graad  $-k+l$  in  $\infty$ .

Eis:  $-k+l \leq -1$ , omdat  $l \leq k-1$ .

Het polynoom  $P$  voldoet dus aan:  $P(z) = P_{k-1}(z)$ , waar  $P_{k-1}$  een willekeurig polynoom van de graad  $\leq k-1$  is. Als  $k=0$ , dan  $P_{k-1} \equiv 0$ .

De term  $X(z) H(z)$  heeft de graad  $-k-1 \leq -1$ , hetgeen in orde is.

2.  $k < 0$ . De functie  $X(z) P(z)$  heeft de graad  $-k+l$  in  $\infty$ .

Eis:  $-k+l \leq -1$ , omdat  $l \leq k-1$ , dus  $P(z) \equiv 0$ .

Dan is de algemene oplossing van het homogene H.P.:  $\Phi = 0$ . (triviale oplossing)

Het inhomogene H.P. heeft als oplossing:  $\Phi(z) = X(z) H(z)$  en de vraag is nu of dit een graad  $\leq -1$  heeft.

De graad van  $X$  is  $-k$ , de graad van  $X(z) H(z)$  is  $\leq -1$  mits de graad van  $H(z) \leq k-1$ .

Ontwikkel  $H(z)$  voor grote  $|z|$ :

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{t}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{z^{n+1}},$$

dan  $H(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n-1}$ , waarbij  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^n f(t)}{[a(t)+b(t)] X^+(t)} dt$

De graad van  $H$  moet  $\leq K-1$  zijn.

De hoogste macht in de ontwikkeling is  $z^{-K}$  en heeft coëfficiënt  $c_n$ , met  $n = -K$ .

Ers:  $c_n = 0$ , voor  $n = 0, 1, \dots, -K-1$ , beteen een voorwaarde voor de functie  $f$  is.

Onder deze voorwaarden is de oplossing van het inhomogene H.P.  $\bar{\Phi}(z) = X(z)H(z)$ .

De oplossing van de integraalvergelijking volgt met de formule van Plemelj:

$$\bar{\Phi}^+(t_0) - \bar{\Phi}^-(t_0) = \varphi(t_0), \quad t_0 \in L.$$

De oplossing van de homogene integraalvergelijking wordt:

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= (X^+(t_0) - X^-(t_0)) P_{K-1}(t_0), \quad K \geq 1 \\ &= 0, \quad K \leq 0 \quad (\text{de triviale oplossing}). \end{aligned}$$

De oplossing van de inhomogene integraalvergelijking wordt:

$$\varphi(t_0) = \frac{(X^+(t_0) + X^-(t_0)) f(t_0)}{2(a(t_0) + b(t_0)) X^+(t_0)} + \frac{X^+(t_0) - X^-(t_0)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{(a(t) + b(t)) X^+(t)} \frac{dt}{t-t_0} + \begin{cases} (X^+(t_0) - X^-(t_0)) P_{K-1}(t_0), & K \geq 1 \\ 0, & K \leq 0. \end{cases}$$

Als  $K < 0$  moet voldaan worden aan de voorwaarden:  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^n f(t)}{(a(t) + b(t)) X^+(t)} dt = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, -K-1$ .

Zie Muskhelishvili § 49, functionaalanalyse.

23-10-1992

Voorbeeld.

Contour  $L$ , vergelijking  $a \varphi(t_0) + \frac{b}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0)$ ,  $t_0 \in L$ ;  
 $a$  en  $b$  zijn reële constanten  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

Cauchy integraal:

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

Eigenschappen van  $\Phi$ : 1)  $\Phi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$ , behalve op  $L$

2)  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .

3) Plemelj: voor  $t_0 \in L$ :  $\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0)$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt.$$

De integraalvergelijking gaat over in:

$$a [\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)] + ib [\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)] = f(t_0), \quad t_0 \in L.$$

H.P.  $(a+ib)\Phi^+(t) - (a-ib)\Phi^-(t) = f(t)$ ,  $t \in L$ .

Homogene H.P.  $(a+ib)\Phi^+(t) - (a-ib)\Phi^-(t) = 0$ ,  $t \in L$ .

neem de logaritme:  $[\log \Phi^+(t)]^+ - [\log \Phi^-(t)]^- = \log \frac{a-ib}{a+ib}$ ,

de logaritme levert geen problemen, de index  $K=0$ .

oplossing:

$$\log \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log \frac{a-ib}{a+ib}}{t-z} dt = \begin{cases} \log \frac{a-ib}{a+ib}, & z \in S^+ \text{ (binnen } L) \\ 0, & z \in S^- \text{ (buiten } L) \end{cases}$$

Fundamentele oplossing:

$$X(z) = \begin{cases} \frac{a-ib}{a+ib}, & z \in S^+ \\ 1, & z \in S^- \end{cases}$$

Stel  $\Phi(z) = X(z) \Psi(z)$ .

Het inhomogene H.P. wordt:  $(a+ib) \frac{a-ib}{a+ib} \Psi^+(t) - (a-ib) \Psi^-(t) = f(t)$ ,  $t \in L$

ofwel:  $\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{f(t)}{a-ib}$ ,  $t \in L$ .

De oplossing wordt:

$$\Phi(z) = \frac{a-ib}{a+ib} \left[ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a-ib} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + P(z) \right], \quad z \in S^+$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a-ib} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + P(z), \quad z \in S^-$$

Met eigenschap 2):  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ , volgt  $P=0$ .

Hiermede volgt:

$$\Phi^+(t_0) = \frac{1}{a+ib} \left[ \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt \right]$$

$$\Phi^-(t_0) = \frac{1}{a-ib} \left[ -\frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt \right]$$

Oplossing integraalvergelijking: 
$$\varphi(t) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \frac{a}{a^2+b^2} f(t_0) - \frac{b}{\pi(a^2+b^2)} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt, t_0 \in L.$$

Voorbeeld: Boog  $L = [-1, 1]$

Vergelijking: 
$$\cos \pi y \varphi(t_0) + \frac{\sin \pi y}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), -1 < t_0 < 1, 0 < y < 1.$$

Geraagd is de oplossing  $\varphi$  die voldoet aan  $\varphi(1) = 0$  en  $\varphi(t) = O((1+t)^{-\delta})$  bij  $t = -1, 0 \leq \delta < 1$ .

Voer in de Cauchy-integraal:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

Eigenschappen van  $\Phi$ :

- 1)  $\Phi$  is analytisch in  $\mathbb{C}$ , behalve op  $[-1, 1]$ .
- 2)  $\Phi(z) = O(\frac{1}{z})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .
- 3)  $\Phi(z) = O(1)$ , begrensd, bij  $z=1$ ,  
 $= O((z+1)^{-\delta})$ , bij  $z=-1, 0 \leq \delta < 1$ .
- 4) Formules van Plemelj:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) &= \varphi(t_0) + \\ \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \end{aligned} \right\} -1 < t_0 < 1.$$

De integraalvergelijking gaat over in:

$$\cos \pi y [\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)] + i \sin \pi y [\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)] = f(t_0), -1 < t_0 < 1.$$

H.P. 
$$e^{\pi i y} \Phi^+(t) - e^{-\pi i y} \Phi^-(t) = f(t), -1 < t < 1.$$

b. 38, 39

Dit voorbeeld komt overeen met dat van §6; de oplossing heeft hetzelfde gedrag bij  $z = \pm 1$ .

Oplossing:

$$\Phi(z) = (z-i)^{-1+y} (z+i)^{-1-y} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) (t-i)^{-1+y} (t+i)^{-1-y}}{t-z} dt + P(z) \right], P \text{ een polynoom.}$$

Met eigenschap 2):  $\Phi(z) = O(\frac{1}{z})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ , zodat volgt  $P=0$ .

Hieruit volgt:

$$\Phi^{\pm}(t_0) = e^{\pm \pi i (1-\rho)} (1-t_0)^{-\rho} (1+t_0)^{-\rho} \left[ \mp \frac{1}{2} f(t_0) (1-t_0)^{-\rho} (1+t_0)^{-\rho} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) (1-t)^{-\rho} (1+t)^{-\rho}}{t-t_0} dt \right]$$

De oplossing van de integraalvergelijking wordt:

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) \\ &= \cos \pi \rho \cdot f(t_0) - \frac{\sin \pi \rho}{\pi} (1-t_0)^{-\rho} (1+t_0)^{-\rho} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) (1-t)^{-\rho} (1+t)^{-\rho}}{t-t_0} dt, \quad -1 < t_0 < 1. \end{aligned} \quad \times$$

### §9. Potentiaalprobleem voor twee strips

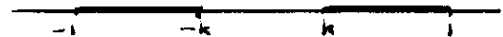
Het gaat in deze paragraaf over singuliere integraalvergelijkingen over een dubbel interval van het type:

$$I: \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) u(t) \log |x-t| dt = f(x), \quad k < |x| < 1,$$

of

$$II: \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \frac{u(t)}{t-x} dt = g(x), \quad k < |x| < 1.$$

De twee intervallen zijn:  $-1 < x < -k$  en  $k < x < 1$



Literatuur: A.K. Gautsien & H.E. Olmstead, On the solution of the integral equation for the potential of two strips; SIAM, J. Math. Anal. **2**, 293-306 (1971).

F.G. Tricomi, The integral equation for a double interval, ZAMP **2**, 402-406 (1951)

L. Lemia, The solution of singular integral equations over a multiple interval and applications to multiple diaphragms in rectangular waveguides, SIAM, J. Appl. Math. **16**, 417-438 (1968).

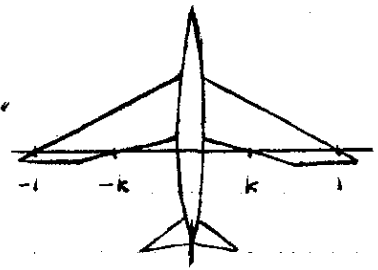
Gautsien & Olmstead en Tricomi herleiden I en II tot een singuliere integraalvergelijking over één interval van het type als in geval I<sub>B</sub> uit §8. De oplossing van het laatste is bekend.

In dit college wordt het probleem behandeld met Cauchy-integralen en de theorie van het H.P.

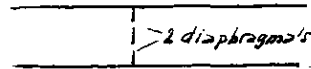
Integraalvergelijking

I komt voor bij potentiaalproblemen voor 2 strips.

II komt voor in de aerodynamica: "smept-back wings"  
 Lift bepaald door functie  $u(t)$  die voldoet aan (II).



III komt ook voor bij een dubbel diafagma in een golfpijp  
 (zie Lemma) Functie  $u(t)$   
 beschrijft veld in de openingen.



De integraalvergelijking I is over te voeren in II door te differentiëren naar  $x$ .

$$\left( \int_{-l}^{-k} + \int_k^l \right) \frac{u(t)}{t-x} dt = f(x), \quad k < |x| < l, \text{ een vergelijking van type II. } \times$$

De integraal is Cauchy-Hoofdwaarde.

Het differentiëren is geoorloofd op grond van het volgende lemma.

Lemma: Zij  $\varphi$  gedefinieerd op  $[a, b]$ , zij  $\varphi^*(t) = \frac{\varphi(t)}{(t-a)^{\alpha}(b-t)^{\beta}}$ ,  $\varphi^* \in L^1$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ .

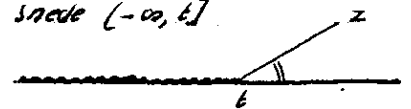
Den geldt:  $\frac{d}{dx} \int_a^b \varphi(t) \log|x-t| dt = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{x-t} dt$ ,  $a < x < b$ , Cauchy-hoofdwaarde.

Voor het bewijs zie Muskhelishvili, §13.

Alternatief bewijs:

Voer in  $\int_a^b \varphi(t) \log(z-t) dt =: F(z)$ , met de afspraak voor  $\log(z-t)$ :

$-\pi < \arg(z-t) < \pi$ , snede  $(-\infty, b]$



De functie  $F$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  met snede  $(-\infty, b]$ .

Buiten de snede:

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{z-t} dt =: \Phi(z), \quad \Phi \text{ analytisch in } \mathbb{C} \text{ met snede } [a, b].$$

Neem de limiet voor  $z \rightarrow x \pm i0$ ,  $a < x < b$ :  $\lim_{z \rightarrow x \pm i0} \arg(z-t) = \begin{cases} \pm \pi, & x < t < b \\ 0, & a < t < x \end{cases}$

Dan geldt voor  $F(z)$ :

$$\lim_{z \rightarrow x \pm i0} F(z) = F^\pm(x) = \int_a^b \varphi(t) \log|x-t| dt \pm \pi i \int_x^b \varphi(t) dt$$

en  $\lim_{z \rightarrow x \pm i0} F'(z) = \lim_{z \rightarrow x \pm i0} \Phi(z) = \Phi^\pm(x) = \mp \pi i \varphi(x) + \int_a^b \frac{\varphi(t)}{x-t} dt,$

uniform in  $x$  op elk gesloten deelinterval van  $(a, b)$

Hat anders geformuleerd:

$$\lim_{y \rightarrow 0} F(x \pm iy) = F^\pm(x), \quad a < x < b$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} F'(x \pm iy) = \Phi^\pm(x), \quad a < x < b, \quad \text{uniform in } x.$$

(conclusie: (naar analogie van termsgewijs differentieëren van reeksen)

$F^\pm$  is differentieerbaar voor  $a < x < b$ , met  $\frac{d}{dx} [F^\pm(x)] = \Phi^\pm(x)$ .

Uitgeschreven:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_a^b \varphi(t) \log|x-t| dt \pm \pi i \int_x^b \varphi(t) dt \right] = \mp \pi i \varphi(x) + \int_a^b \frac{\varphi(t)}{x-t} dt, \quad a < x < b, \quad x \text{ ofwel}$$

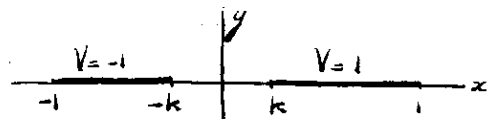
$$\frac{d}{dx} \int_a^b \varphi(t) \log|x-t| dt = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{x-t} dt, \quad a < x < b. \quad \square$$

Keren we terug naar het potentiaalprobleem voor twee strips.

Een twee-dimensionaal probleem, potentiaal  $V = V(x,y)$ . De strips zijn geleidend

$$V = -1 \quad \text{voor } -1 < x < -k, \quad y = 0$$

$$V = +1 \quad \text{voor } k < x < 1, \quad y = 0$$



Gevraagd is de functie  $V = V(x,y)$  en de ladingsdichtheid op de strips.

Formulering:

$$\begin{cases} V_{xx} + V_{yy} = 0 & \text{buiten de strips} \\ V(x,0) = \text{sgn}(x), \quad k < |x| < 1 \\ V(x,y) \text{ begrensd voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Uit het college partiële differentiaalvergelijkingen: de oplossing is eenduidig.

In differentiaalvergelijkingen 2 is afgeleid:

een eenheidslading in  $(\xi, \eta)$ , twee dimensionaal, heeft een potentiaal  $S$  in  $(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} \text{waarbij } S(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{2\pi} \log r \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \text{ de fundamentele oplossing.} \end{aligned}$$

Zie ook college PDV § 7.4

Noemen we  $\varphi(t)$  de ladingdichtheid op de strip, dan

$$V(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \left( \int_{-1}^k + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log \sqrt{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

De functie  $V$  is harmonisch.

De randvoorwaarde:  $V(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log |x-t| dt = \text{sgn}(x)$ ,  $k < |x| < 1$ .

De randvoorwaarde geeft de integraalvergelijking

$$(1) \quad \left( \int_{-1}^k + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log |x-t| dt = -2\pi \text{sgn}(x), \quad k < |x| < 1.$$

Differentieer naar  $x$ :

$$(2) \quad \left( \int_{-1}^k + \int_k^1 \right) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = 0, \quad k < |x| < 1.$$

De vergelijking (2) is geformuleerd uitgaande van vergelijking (1) door differentiatie. Uit vergelijking (2) hoeft echter niet vergelijking (1) te volgen.

Naar analogie van:  $f(x) = g(x)$ ,  $a < x < b \iff \begin{cases} f(x) = g'(x), & a < x < b \\ f(x_0) = g(x_0), & \text{voor een } x_0 \in (a, b) \end{cases}$

zijn de beide volgende formuleringen gelijkwaardig:

$$\text{Integraalvergelijking (1)} \iff \begin{cases} \text{Integraalvergelijking (2)} \\ \text{Integraalvergelijking (1) in een punt van } [k, 1] \text{ én in een} \\ \text{punt van } [-1, -k]. \end{cases}$$

Neem  $\pm 1$  voor de punten:

$$(3) \quad \begin{cases} \left( \int_{-1}^k + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log(1-t) dt = -2\pi \\ \left( \int_{-1}^k + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log(1+t) dt = 2\pi \end{cases}$$



Dan geldt de volgende gelijkwaardigheid:

$$\text{Integraalvergelijking (1)} \iff \begin{cases} \text{Integraalvergelijking (2)} \\ \text{Conditie (3)} \end{cases}$$

Oplassing van integraalvergelijking (2):

Gerraagd wordt een oplossing  $\varphi$  die de volgende eigenschappen heeft:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= O((1-t)^{\alpha_1}) \text{ bij } t=1 \\ &= O((1+t)^{\alpha_2}) \text{ bij } t=-1 \\ &= O((t-k)^{\alpha_3}) \text{ bij } t=k \\ &= O((t+k)^{\alpha_4}) \text{ bij } t=-k, \text{ waarbij } 0 \leq \alpha_{1,2,3,4} < 1. \end{aligned}$$

Voer in de Cauchy integraal: 
$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^{-1} \right) \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

De functie  $\bar{\Phi}$  heeft de volgende eigenschappen:

- 1)  $\bar{\Phi}$  is analytisch buiten  $[-1, -k] \cup [k, 1]$ .
- 2)  $\bar{\Phi}(z) = O(\frac{1}{z})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .
- 3)  $\bar{\Phi}(z) = O(|z-1|^{\alpha_1})$  bij  $z=1$   
 $= O(|z+1|^{\alpha_2})$  bij  $z=-1$   
 $= O(|z-k|^{\alpha_3})$  bij  $z=k$   
 $= O(|z+k|^{\alpha_4})$  bij  $z=-k$ ,  $0 \leq \alpha_{1,2,3,4} < 1$ .

4) Formules van Plemelj;

voor  $k < |x| < 1$ : 
$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^+(x) - \bar{\Phi}^-(x) &= \varphi(x) \\ \bar{\Phi}^+(x) + \bar{\Phi}^-(x) &= \frac{1}{\pi i} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^{-1} \right) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt. \end{aligned}$$

Substitutie in integraalvergelijking (2) levert het homogene

H.P. 
$$\bar{\Phi}^+(x) + \bar{\Phi}^-(x) = 0, \quad k < |x| < 1, \text{ dus } \bar{\Phi}^+(x) = -\bar{\Phi}^-(x), \text{ voor } k < |x| < 1.$$

dan: 
$$[\log \bar{\Phi}(x)]^+ - [\log \bar{\Phi}(x)]^- = \log(-1) = \pi i,$$

zodat

$$\log \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^{-1} \right) \frac{\pi i}{t-z} dt = \frac{1}{2} \log \frac{z+k}{z+1} + \frac{1}{2} \log \frac{z-1}{z-k}.$$

Voor  $\bar{F}$  volgt:  $\bar{F}(z) = (z+k)^{1/2} (z+1)^{-1/2} (z-1)^{1/2} (z-k)^{-1/2}$

De fundamentele oplossing:  $X(z) = (z+k)^{\alpha_1+1/2} (z+1)^{\alpha_2-1/2} (z-1)^{\alpha_3+1/2} (z-k)^{\alpha_4-1/2}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  en  $\alpha_4$  geheel.

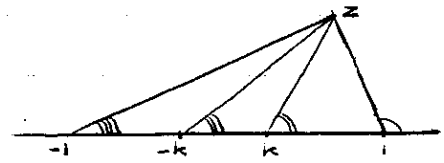
Met eigenschap (3):  $-1 < \alpha_1 + 1/2 \leq 0$ ,  $-1 < \alpha_2 - 1/2 \leq 0$ ,  $-1 < \alpha_3 + 1/2 \leq 0$  en  $-1 < \alpha_4 - 1/2 \leq 0$ ,  
 dus  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = -1$  en  $\alpha_4 = 0$ .

Daarmede:

$$X(z) = (z^2 - k^2)^{-1/2} (z^2 - 1)^{-1/2}$$

Voor de argumenten maken we de volgende afspraak

$$\begin{aligned} -\pi < \arg(z \pm 1) < \pi \\ -\pi < \arg(z \pm k) < \pi \end{aligned}$$



met snede  $(-\infty, 1]$ .

Beschouw de volgende tabel:

$z = x \pm i0$	$k < x < 1$	$-k < x < k$	$-1 < x < -k$	$x < -1$
$\arg(z-1)$	$\pm \pi$	$\pm \pi$	$\pm \pi$	$\pm \pi$
$\arg(z-k)$	0	$\pm \pi$	$\pm \pi$	$\pm \pi$
$\arg(z+k)$	0	0	$\pm \pi$	$\pm \pi$
$\arg(z+1)$	0	0	0	$\pm \pi$
$\arg X(z)$	$\mp \pi/2$	$\mp \pi$	$\mp 3\pi/2$	$\mp 2\pi$

Met behulp van de tabel volgt voor de limietwaarden

$$X^\pm(x) = \lim_{z \rightarrow x \pm i0} X(z)$$

$$\begin{aligned} k < x < 1: X^+(x) &= e^{-\pi i/2} |x^2 - k^2|^{-1/2} |x^2 - 1|^{-1/2} = \mp i (1-x^2)^{-1/2} (x^2 - k^2)^{-1/2} \\ -k < x < k: X^+(x) &= e^{\pm \pi i} |x^2 - k^2|^{-1/2} |x^2 - 1|^{-1/2} = - (1-x^2)^{-1/2} (k^2 - x^2)^{-1/2} \\ -1 < x < -k: X^+(x) &= e^{\mp 3\pi i/2} |x^2 - k^2|^{-1/2} |x^2 - 1|^{-1/2} = \pm i (1-x^2)^{-1/2} (x^2 - k^2)^{-1/2} \\ x < -1: X^+(x) &= e^{\mp 2\pi i} |x^2 - k^2|^{-1/2} |x^2 - 1|^{-1/2} = (x^2 - 1)^{-1/2} (x^2 - k^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Voor  $-k < x < k$  en voor  $x < -1$  geldt  $X^+(x) = X^-(x)$ , zodat over deze beide delen van de snede  $(-\infty, 1]$  de functie continu is en, met stelling A, daar dus analytisch is.

De functie  $X$  is dus analytisch in  $\mathbb{C}$  met uitzondering van de snedes  $[-1, -k]$  en  $[k, 1]$ .

Op de snedes geldt:

$$(4) \quad X^{\pm}(x) = \mp i \operatorname{sgn}(x) [R(x)]^{-1/2}, \quad k < |x| < 1, \quad \text{waarbij } R(x) = (1-x^2)(x^2-k^2).$$

De algemene oplossing van het homogene H.P. wordt

$$\Phi(z) = X(z) P(z), \quad P \text{ een polynoom.}$$

Het polynoom  $P$  wordt bepaald met eigenschap 2) van  $\Phi$ :  $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), |z| \rightarrow \infty$ .

Er geldt:  $X(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right), |z| \rightarrow \infty$ , dus  $P(z) = A^* + B^* z$ , polynoom van de graad 1.

De oplossing van het H.P.

$$\Phi(z) = (A^* + B^* z) X(z), \quad A^* \text{ en } B^* \text{ nog willekeurige constanten.}$$

Voor de functie  $\varphi$  volgt:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \Phi^+(x) - \Phi^-(x) \\ &= (A^* + B^* x) (X^+(x) - X^-(x)) \\ &= (A^* + B^* x) (-2i) \operatorname{sgn}(x) [R(x)]^{-1/2} \quad \text{voor } k < |x| < 1. \end{aligned}$$

Schrijf verder  $-2iA^* = A$  en  $-2iB^* = B$ , dan geldt voor de oplossing  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = (A + Bx) \operatorname{sgn}(x) [R(x)]^{1/2}, \quad k < |x| < 1, \quad \text{met willekeurige constanten } A \text{ en } B, \quad \text{waarbij } R(x) = (1-x^2)(x^2-k^2).$$

Deze oplossing van integraalvergelijking (2) moet voldoen aan de condities (3).

$$\text{Herschrijf (3): } \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log(1+t) dt = -2\pi$$

$$\left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \varphi(t) \log(1+t) dt = 2\pi$$

Dit stelsel is gelijkwaardig met het stelsel

$$\left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) [\varphi(-t) + \varphi(t)] \log(1+t) dt = 0$$

$$\left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) [\varphi(t) - \varphi(-t)] \log(1+t) dt = 4\pi.$$

Substitueer  $\varphi$ :

$$\varphi(t) + \varphi(-t) = [(A + Bt) \operatorname{sgn}(t) + (A - Bt) \operatorname{sgn}(-t)] [R(t)]^{1/2} = 2B |t| [R(t)]^{1/2}$$

$$\varphi(t) - \varphi(-t) = [(A + Bt) \operatorname{sgn}(t) - (A - Bt) \operatorname{sgn}(-t)] [R(t)]^{1/2} = 2A \operatorname{sgn}(t) [R(t)]^{1/2}$$

dan:

$$2B \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) |t| [R(t)]^{1/2} \log(1+t) dt = 0, \quad \text{waaruit volgt: } B=0$$

$$\text{en } 2A \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \operatorname{sgn}(t) [R(t)]^{1/2} \log(1+t) dt = 4\pi, \quad \text{waaruit de constante } A \text{ volgt.}$$

Dat de constante  $B=0$  komt overeen met de verwachting dat  $\varphi$  oneven in  $x$  is.

Berekening van  $I = \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) \operatorname{sgn}(t) [R(t)]^{-k} \log(1+t) dt$

Op de snedes geldt

$$(4) X^+(z) = z^i \operatorname{sgn}(z) [R(z)]^{-k}, \quad k < |z| < 1$$

$$\text{dus } X^-(t) - X^+(t) = 2i \operatorname{sgn}(t) [R(t)]^{-k}, \quad k < |t| < 1.$$

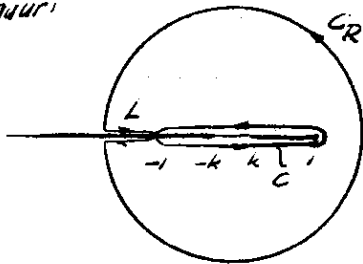
Dan

$$I = \frac{1}{2i} \left( \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \right) [X^-(t) - X^+(t)] \log(1+t) dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 [X^-(t) - X^+(t)] \log(1+t) dt, \quad \text{want } X^-(t) - X^+(t) = 0 \text{ voor } -k < t < k.$$

$$= \frac{1}{2i} \int_C X(z) \log(1+z) dz, \quad \text{waarbij } C \text{ een contour om } [-1, 1] \text{ is.}$$

Figuur:



De integrand  $X(z) \log(1+z)$  is analytisch in  $\mathbb{C}$  behalve op de snedes  $[-1, -k]$  en  $[k, 1]$  t.g.v.  $X(z)$

en  $[-\infty, -1]$  t.g.v.  $\log(1+z)$ .

Deformeer de contour  $C$  tot  $C_1 = C + L$ ,

waarbij  $C_R: |z| = R, -\pi < \arg z < \pi$

en  $L$ : lus om de snede  $(-\infty, -1]$ .

$$\text{Dan: } I = \frac{1}{2i} \int_{C_1} X(z) \log(1+z) dz$$

$$\text{Voor } R \rightarrow \infty: \int_{C_R} X(z) \log(1+z) dz = O\left(\frac{\log R}{R^2}\right) \cdot 2\pi R \rightarrow 0 \text{ voor } R \rightarrow \infty.$$

$$\text{Dus } I = \frac{1}{2i} \int_L X(z) \log(1+z) dz, \quad R \rightarrow \infty$$

Stel  $z = x \pm i0, -\infty < x \leq -1$ , dan  $X(z) = X^{\pm}(z) = (z^2-1)^{-k} (z^2-k^2)^{-k}$  en  $\log(1+z) = \log|1+x| \pm \pi i$

Dus:

$$I = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{-1} (x^2-1)^{-k} (x^2-k^2)^{-k} \left[ \{ \log|1+x| + \pi i \} - \{ \log|1+x| - \pi i \} \right] dx$$

$$= \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1} \sqrt{x^2-k^2}} = \pi \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}} =: \pi K(k).$$

(substitutie  $x = \frac{1}{t}$ )

De integraal  $K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}$  is de volledige elliptische integraal van de eerste soort.

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{na de substitutie } t = \sin \theta, \text{ waarbij } k, \text{ de modulus, } 0 < k < 1.$$

De constante  $A$  volgt dan uit  $A \cdot K(k) = 2\pi$ , zodat  $A = \frac{2}{K(k)}$ .

De oplossing  $\varphi$  wordt dan:

$$\varphi(x) = \frac{2}{K(k)} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{x^2-k^2}}, \quad k < |x| < 1.$$

De lading op de strips per lengte-eenheid:

$$Q = \pm \int_k^1 \varphi(x) dx, \quad + \text{ voor } x \in [k, 1] \text{ en } - \text{ voor } x \in [-1, -k].$$

$$= \pm \frac{2}{K(k)} \int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{x^2-k^2}} = \pm \frac{2}{K(k)} J(k).$$

Stel  $x = \sqrt{1-t^2}$  in  $J(k) = \int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{x^2-k^2}}$ , dan

$$J(k) = \int_0^{\sqrt{1-k^2}} \frac{t dt}{t \sqrt{1-k^2-t^2} \sqrt{1-t^2}}, \quad \text{stel } t = s \sqrt{1-k^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-k^2)-(1-k^2)s^2}} \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-(1-k^2)s^2}} ds$$

$$= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2} \sqrt{1-(1-k^2)s^2}} = K(\sqrt{1-k^2}) = K(k'), \quad \text{waarbij } k' = \sqrt{1-k^2}, \text{ de complementaire modulus is}$$

Voor de lading  $Q$  volgt dan:  $Q = \pm \frac{2K(k')}{K(k)}$

Het potentiaalverschil is  $1 - (-1) = 2$ , de capaciteit  $C = \frac{K(k')}{K(k)}$ .

Iets over elliptische integralen.

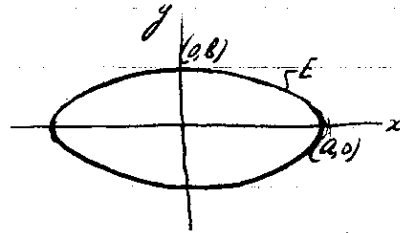
Volledige elliptische integraal van de eerste soort:  $K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$ ,  $0 \leq k \leq 1$ .

Volledige elliptische integraal van de tweede soort:  $E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$ ,  $0 \leq k \leq 1$ .

Literatuur: F. Oberhettinger & W. Magnus: *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik*, Springer, Berlin, 1959.  
P.F. Byrd & H.D. Friedman.

Voorbeeld: de omtrek van een ellips.

ellips:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > b > 0$ .



stel:  $x = a \cos \theta$

$y = b \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Omtrek:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \theta} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d\theta = 4a E\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$$

Voor  $a = b$  gaat de ellips over in een cirkel:

$$E(0) = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \text{ en } L = 4a \frac{\pi}{2} = 2\pi a.$$

Voor  $b = 0$ :  $E(1) = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 1$  en  $L = 4a$ .

Voorbeeld: de mathematische slinger.

$m$ : de massa

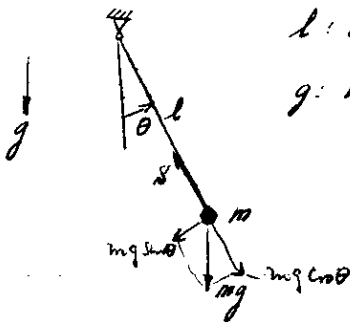
$l$ : de lengte

$g$ : versnelling van de zwaartekracht.

Bewegingsvergelijkingen:

$$ml \ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$s = mg \cos \theta$$



Benaderde oplossing:  $\sin \theta \approx \theta$  voor kleine uitwijkingen

dan:  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$  met oplossing:  $\theta(t) = A \cos(t\sqrt{g/l}) + B \sin(t\sqrt{g/l})$

de slingertijd:  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ .

Exacte oplossing:  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ , begincondities  $\theta(0) = \theta_0$  en  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

Vermenigvuldig met  $\dot{\theta}$  en integreer vanuit  $t=0$ , dan volgt:

$$\dot{\theta}^2 = 2g/l (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

zodat:

$$\dot{\theta} = -\sqrt{2g/l} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T, \quad T \text{ de slingertijd.}$$

Den  $\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = -\sqrt{2g/l} \int_0^t dt'$  dus  $\int_{\theta(t)}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = t\sqrt{2g/l}$ .

De slingertijd  $T$  volgt dan met de relatie  $\theta(\frac{1}{2}T) = 0$ ,

zodat:

$$\frac{T}{4} \sqrt{2g/l} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta)}}$$

Stel:  $\sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}\theta_0 \sin \varphi$ , zodat  $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}\theta d\theta = \sin \frac{1}{2}\theta_0 \cos \varphi d\varphi$  dus  $d\theta = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\theta_0 \cos \varphi}{\cos \frac{1}{2}\theta} d\varphi$ .

waarbij  $\cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 \sin^2 \varphi}$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ .

Den:

$$\frac{T}{4} \sqrt{2g/l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \frac{1}{2}\theta_0 \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{2} K(\sin \frac{1}{2}\theta_0)$$

zodat:  $T = 4\sqrt{l/g} K(\sin \frac{1}{2}\theta_0)$ .

Nauwkeurigheid:

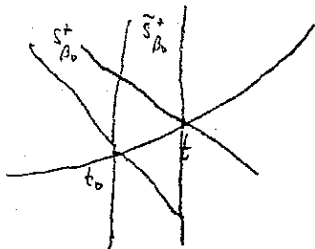
$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \theta + O(k^4)] d\theta, \quad k \rightarrow 0$$

$$= \frac{\pi}{2} [1 + \frac{1}{4}k^2 + O(k^4)], \quad k \rightarrow 0.$$

dan:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g} [1 + \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 + O(\sin^4 \frac{1}{2}\theta_0)], \quad \theta_0 \rightarrow 0.$$

Continuïteit van  $\Phi^{\pm}(t_0)$  op  $L$ . Kies twee punten  $t_0$  en  $t$  op  $L$ .



$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_{\rho_0}^+}} \Phi(z) = \Phi^+(t_0), \quad \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in \tilde{S}_{\rho_0}^+}} \Phi(z) = \Phi^+(t)$$

Bij  $\varepsilon > 0$  is er een  $\Delta$  omgevingsgebied van  $t_0$ , zodat

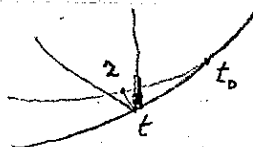
$$|\Phi(z) - \Phi^+(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ voor } |z - t_0| < \Delta, z \in S_{\rho_0}^+;$$

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ voor } |z - t| < \Delta, z \in \tilde{S}_{\rho_0}^+.$$

Van  $|t - t_0|$  voldoende klein, zeg  $|t - t_0| < \delta$ , hebben de binnenvan "overlapping" en bestaat er een  $z_0 \in S_{\rho_0}^+ \cap \tilde{S}_{\rho_0}^+$  met  $|z_0 - t_0| < \Delta$ ,  $|z_0 - t| < \Delta$ . Bovendien is dan  $|\Phi(z_0) - \Phi^+(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|\Phi(z_0) - \Phi^+(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , en dus  $|\Phi^+(t) - \Phi^+(t_0)| < \varepsilon$  voor  $|t - t_0| < \delta$ . Dit betekent dat  $\Phi^+(t)$  continu is in  $t_0$ .

Nadering langs willekeurige pad

$z \in$  sector  $S_{\rho_0}^+$  rond  $t$



$$\lim_{z \rightarrow t} \Phi(z) = \Phi^+(t).$$

door bij  $\varepsilon > 0$  is er een  $\Delta_1$  zodat  $|\Phi(z) - \Phi^+(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$  voor  $|z - t| < \Delta_1$ ,

$\Phi^+(t)$  is continu in  $t_0$ ; dus bij  $\varepsilon > 0$  is er een  $\Delta_2$  zodat  $|\Phi^+(t) - \Phi^+(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  voor  $|t - t_0| < \Delta_2$ .

Van  $|z - t_0|$  voldoende klein, zeg  $|z - t_0| < \delta$ , geldt  $|z - t| < \Delta_1$ ,  $|t - t_0| < \Delta_2$ , en

vervolgens  $|\Phi(z) - \Phi^+(t_0)| < \varepsilon$ . Dus  $\lim_{z \rightarrow t_0} \Phi(z) = \Phi^+(t_0)$ .



Lemma. Zij  $f(z)$  enkelvoudig in een geradenradius omgeving van  $z=a$ , en zij  $f(z) = O(|z-a|^{-\delta})$  met  $\delta > 1$ . Dan heeft  $f(z)$  in  $z=a$  een ophefbare singulariteit.

Bewijs. Ontwikkel  $f(z)$  in een Laurentreeks met middelpunt  $z=a$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad K = \text{Jordan kromme positief rond } a.$$

Neem voor  $K$  de cirkel  $|w-a| = \rho$  en onderzoek  $c_{-m}$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$ :

$$|c_{-m}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_K |f(w)| |w-a|^{-m-1} |dw| \leq \text{const. } \rho^{m+\delta}, \quad \rho^{m+\delta} \rightarrow 0 \text{ als } \rho \rightarrow 0.$$

Dus  $c_{-m} = 0$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$  en het hoofddeel van de Laurentreeks ontbreekt. Dit bewijst dat de singulariteit in  $z=a$  ophefbaar is.

Toelichting. Beschouw de functie  $F(z) = \exp[\Phi(z)]$ . Deze is analytisch in  $\mathbb{C}$   
 buiten  $[-a, a]$ , terwijl uit  $|F(z)| = \exp[\operatorname{Re} \Phi(z)] = \exp \operatorname{Re} \Phi(z)$  volgt dat  $F(z)$  begrensd is  
 voor  $|z| \geq a$ . De functie  $G(z) = F(\frac{1}{z})$  is dan analytisch in begrensd op de gereduceerde  
 omgeving  $0 < |z| < \frac{1}{a}$ . Met Functiontheorie, zitting 5.13, volgt  $\lim_{z \rightarrow 0} G(z) = l$  bestaat  
 (op lijken ingeboren in  $z=0$ ). Vervolgens is dan  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = l \neq 0$  en  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = \log l$   
 (een of andere tek van de logaritme; met peron hoofdwanda), zodat  $\Phi(z)$  begrensd is voor  $|z| \rightarrow \infty$ .

Toetsing. Cauchy integraal over reële  $\omega$ .

Cauchy integraal  $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$ ;  $\varphi(t) \in H$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(\infty)$ ,  $\varphi(t) - \varphi(\infty) = O(|t|^{-\alpha})$  als  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $\alpha > 0$

Integraal tevens als  $\Phi(z) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-A}^A \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$ , zgn. Cauchy hoofdenwaarts t.o.v.  $\omega$ .

40<sup>A</sup>

Uitsluiting:  $\Phi(z) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-A}^A \frac{\varphi(t) - \varphi(\infty)}{t-z} dt + \frac{\varphi(\infty)}{2\pi i} \int_{-A}^A \frac{dt}{t-z} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(\infty)}{t-z} dt + \frac{1}{2} \varphi(\infty)$ ,  $\Re z \geq 0$ .

Formules van Planché blijven gelden.

Gedrag van  $\Phi(z) \rightarrow \infty$  van  $\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$ , met  $f(t) = O(|t|^{-\alpha})$  als  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $\alpha > 0$ .

Randtoets  $\Psi(z) = O(|z|^{-\alpha})$  als  $0 < \alpha < 1$ ,  $\Psi(z) = O(|z|^{-\alpha} \log |z|)$  als  $\alpha = 1$ ,  $\Psi(z) = O(|z|^{-\alpha})$  als  $\alpha > 1$ .

Burg. Voor  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\tau = \frac{1}{t}$ ,  $\Psi(z) = \Psi(1/\tau) = \tilde{\Psi}(\tau)$ ,  $f(t) = f(1/\tau) = \tilde{f}(\tau)$ , dan is

$$\tilde{\Psi}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(t)}{t - \frac{1}{\tau}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(1/\tau)}{\frac{1}{\tau} - 1/\tau} d\tau = -\frac{\tau}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\tau)}{\tau - 1} d\tau$$

Bedenk dat  $\tau^{-1} \tilde{f}(\tau) = O(|\tau|^{-\alpha})$  als  $\tau \rightarrow 0$ . Beschouw het gedrag van  $\tilde{\Psi}(\tau)$  bij  $\tau = 0$  en schrijf de

$$\tilde{\Psi}(\tau) = -\frac{\tau}{2\pi i} \left( \int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^0 + \int_0^A + \int_A^{\infty} \right) \frac{\tau^{-1} \tilde{f}(\tau)}{\tau - 1} d\tau = I_1(\tau) + I_2(\tau) + I_3(\tau) + I_4(\tau)$$

Het is duidelijk dat  $I_2(\tau) = O(\tau)$ ,  $I_4(\tau) = O(\tau)$  in de omgeving van  $\tau = 0$ .

Het gedrag van de integralen  $I_1(\tau)$  en  $I_3(\tau)$  bij  $\tau = 0$  volgt met de resultaten van § 3:

$$I_{2,3}(\tau) = \int O(\tau^{-\alpha}) = O(\tau^{-\alpha}) \text{ als } 0 < \alpha < 1,$$

$$I_{2,3}(\tau) = \int O(\tau^{-\alpha}) = O(\tau^{-\alpha} \log |\tau|) \text{ als } \alpha = 1,$$

$$I_{2,3}(\tau) = \int O(\tau^{-\alpha}) = O(\tau^{-\alpha}) \text{ als } \alpha > 1.$$

Voorbeelden (i)  $f(t) = e^{-t}$ ,  $t > 0$ ;  $f(t) = 0$ ,  $t < 0$ ; met  $0 < \gamma < 1$ .

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t-z} dt = \frac{e^{\pi\gamma}}{2\pi i} z^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \Re z > 0$$

$$(ii) f(t) = \frac{1}{t+i}, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ -\frac{2\pi i \cos \frac{\pi z}{2}}{2^z} \pm \frac{\pi i 2}{2^z} \right], \quad 0 < \Re z < 1, \quad -\pi < \Im z < \pi$$

$$(iii) f(t) = \frac{1}{t+i}, \quad \Psi(z) = \frac{i}{2 \pm i}, \quad \Im z \geq 0$$

Speciaal geval. Beschouw  $\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$ , met  $f(t)$  reëelwaardig.  $\Phi(z)$  analytisch voor  $\Im z > 0$ .

Schrijf  $\Phi(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  in gebruik de formules van Planché:  $\Phi^+(x) = u(x, 0+) + i v(x, 0+) = f(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$

Gevolg  $u(x, 0+) = f(x)$ ,  $v(x, 0+) = g(x)$ ,  $-g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$ ,  $-v(x, 0+) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0+)}{t-x} dt$

$-g$  is Hilbert transform van  $f$ . Algemeen:  $-v(x, 0+)$  is Hilbert transform van  $u(x, 0+)$ .

Toetsen op  $\Psi(z) - i \Phi(z) = -v(x, y) + i u(x, y)$ :  $u(x, 0+) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t, 0+)}{t-x} dt$ ,  $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt$ .

$f$  is Hilbert transform van  $g$ .

Kramers-Kronig relaties voor reële en imaginaire deel van complex belangrijke.

Zie B.W. Ross, Analytic functions and distributions in physics and engineering.

Wiley, New York, 1968, Chapter II.

Opgave. Zij  $L$  de eenheidscirkel. Beschouw de integraalerges, het punt  $t_0$  op de cirkel.

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt = \varphi(t_0).$$

Laat zien dat dit door de substituties  $t = e^{i\theta}$ ,  $t_0 = e^{i\theta_0}$  overgaat in de inverse formules van Hilbert.

Wegen  $X^+(t_0) = \frac{a(t_0) - b(t_0)}{a(t_0) + b(t_0)} X^-(t_0)$  gilt

$$\frac{(X^+(t_0) + X^-(t_0)) f(t_0)}{2(a(t_0) + b(t_0)) X^+(t_0)} = \frac{a(t_0) f(t_0)}{a^2(t_0) - b^2(t_0)}$$

16 mei 2002

## Elliptische integralen en elliptische functies

(college van J. Boersma)

Betrokken wiskundigen: Legendre (1811), Abel (1827), Jacobi (1827),

Literatuur:

Weierstrass (1893).

E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, 4th Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1958, Chapters XX-XXII.

P.F. Byrd and M.D. Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer, Berlin, 1954.

D.F. Lawden, Elliptic functions and applications, Springer, Berlin, 1989.

### Notaties

#### Elliptische integralen:

onvolledige elliptische integraal van de eerste soort

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}};$$

onvolledige elliptische integraal van de tweede soort

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\sin \varphi} \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt;$$

volledige elliptische integraal van de eerste soort

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}} = K(k) = K;$$

volledige elliptische integraal van de tweede soort

$$E(k) = E(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = E(k) = E.$$

$k$  heet de modulus; meestal is  $0 \leq k \leq 1$ .

$$K(0) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad K(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = \infty \text{ (divergent)}$$

$k' = \sqrt{1-k^2}$  heet de complementaire modulus.

Korte notaties:  $K(k') = K'(k) = K'$ ;  $E(k') = E'(k) = E'$ .

## Elliptische functies volgens Jacobi:

$$\operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z, k), \operatorname{cn} z = \operatorname{cn}(z, k), \operatorname{dn} z = \operatorname{dn}(z, k);$$

$$\text{relaties: } \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, k^2 \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1.$$

$k$  heet weer de modulus.

## Elliptische functie $\operatorname{sn} z$

Definitie. De elliptische functie  $w = \operatorname{sn} z$  is de inverse functie van de elliptische integraal

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}} = F(\operatorname{arcsin} w, k);$$

hierbij zijn  $z$  en  $w$  complex:  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ .

In het speciale geval  $k=0$  komt er

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsin} w \implies w = \operatorname{sn} z,$$

Zodat  $\operatorname{sn}(z, 0) = \sin z$ .

## Beschouw de afbeelding

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad \operatorname{Im} w > 0,$$

van  $\operatorname{Im} w > 0$  op een gebied in het  $z$ -vlak. Volgens FT 4.5 is  $z$  een analytische functie van  $w$  op  $\operatorname{Im} w > 0$ , met afgeleide

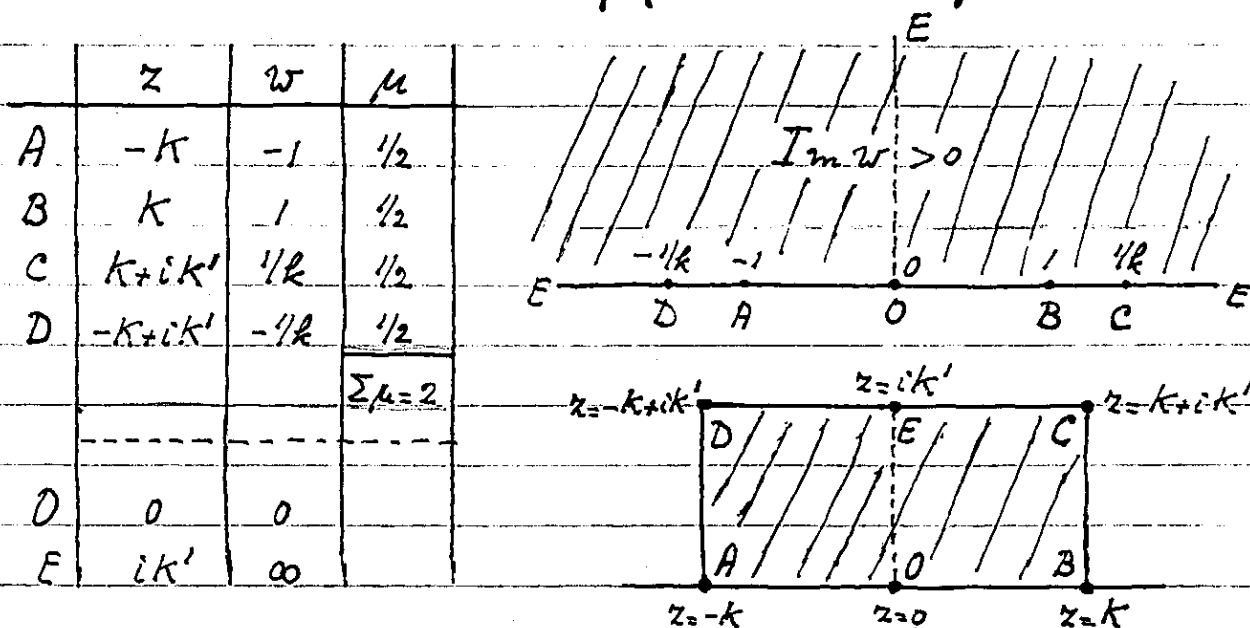
$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2} \sqrt{1-k^2 w^2}} = -\frac{1}{k} (w-1)^{-1/2} (w+1)^{-1/2} \left(w-\frac{1}{k}\right)^{-1/2} \left(w+\frac{1}{k}\right)^{-1/2}, \quad \operatorname{Im} w > 0;$$

hierbij is gebruikt dat  $\sqrt{1-w^2} = -i\sqrt{w^2-1}$ ,  $\sqrt{1-k^2 w^2} = -i\sqrt{k^2 w^2-1}$  voor  $\operatorname{Im} w > 0$ .  
Vergelijk met de formule van Schwarz-Christoffel voor de afbeelding van  $\operatorname{Im} w > 0$  op een polygon gebied. Op de reële as van het  $w$ -vlak liggen de bijzondere punten

$$A: w = -1, \quad B: w = 1, \quad C: w = 1/k, \quad D: w = -1/k;$$

dere corresponderen met de hoekpunten van het polygon gebied in het  $z$ -vlak. Uit de navolgende tabel blijkt dat in alle 4 hoekpunten de

buitenhoeck gelijk is aan  $\mu\pi = \pi/2$ ; het polygoon gebied is dus een rechthoek. In de figuren hieronder zijn corresponderende punten in het  $w$ -vlak en in het  $z$ -vlak aangegeven met dezelfde letter.



Toelichting. We bepalen het beeld van de positieve reële as en de positieve imaginaire as van het  $w$ -vlak.

Lijnstuk  $OB$ ,  $0 < w < 1$ ;  $z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} > 0$ ;

$O: w=0 \iff z=0$ ;  $B: w=1 \iff z = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = K(k) = k$ ;

$OB: 0 < w < 1 \iff$  lijnsegment  $[0, k]$  in  $z$ -vlak.

Lijnstuk  $BC$ ,  $1 < w < 1/k$ ;  $z = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} + \int_1^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$   
 $= k + i \int_1^w \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{1-k^2t^2}}$ ;

met een geschikte substitutie volgt

$$\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{1-k^2t^2}} = K(k') = K'(k) = k'$$

zodanig

$C: w = 1/k \iff z = k + ik'$ ;

$BC: 1 < w < 1/k \iff$  lijnsegment  $[k, k+ik']$  in  $z$ -vlak.

Halfrechte  $CE$ ,  $1/k < w < \infty$ ;



$$z = \left( \int_0^1 + \int_1^{1/k} + \int_{1/k}^w \right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}$$

$$= K + ik' - \int_{1/k}^w \frac{dt}{\sqrt{t^2-1} \sqrt{k^2 t^2-1}};$$

met een geschikte substitutie ( $t = 1/(ks)$ ) volgt

$$\int_{1/k}^w \frac{dt}{\sqrt{t^2-1} \sqrt{k^2 t^2-1}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-k^2 s^2} \sqrt{1-s^2}} = K,$$

zodat

$$E: w = \infty \iff z = K + ik' - K = ik';$$

CE:  $1/k < w < \infty \iff$  lijnsegment  $[K + ik', ik']$  in  $z$ -vlak.

Opmerking Voor  $w > 1/k$  (op CE) is te schrijven

$$z = K + ik' - \int_{1/k}^w \frac{dt}{\sqrt{t^2-1} \sqrt{k^2 t^2-1}} + \int_w^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1} \sqrt{k^2 t^2-1}}$$

$$= ik' + \int_w^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1} \sqrt{k^2 t^2-1}}.$$

Ontwikkeling voor  $w > 1/k$  geeft

$$z = ik' + \int_w^{\infty} \left[ \frac{1}{kt^2} + O(t^{-4}) \right] dt = ik' + \frac{1}{kw} + O(w^{-3}), \quad (w \rightarrow \infty).$$

Voor inversie van deze ontwikkeling volgt

$$w = \frac{1/k}{z - ik'} \left[ 1 + O((z - ik')^2) \right], \quad (z \rightarrow ik').$$

Hieruit is af te lezen dat  $w = \infty$  een enkelvoudige pool heeft in  $z = ik'$  met  $\text{Res}_{z=ik'} \infty z = 1/k$ . □

Positieve imaginaire os OE,  $w = iv, v > 0$ ;

$$z = \int_0^{iv} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}} = i \int_0^v \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{1+k^2 t^2}};$$

met een geschikte substitutie volgt

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{1+k^2 t^2}} = K(k') = K'(k) = k',$$

zodat

$$E: w = i\infty \iff z = ik';$$

$$OE: w = iv, v > 0 \iff \text{lijnsegment } [0, ik'] \text{ in } z\text{-vlak.}$$

Opmerking. Met behulp van de substitutie  $t = 1/(ks)$  volgt

$$\int_0^{\infty} \frac{-dt}{\sqrt{k} \sqrt{1+t^2} \sqrt{1+k^2 t^2}} = \int_0^{\sqrt{k}} \frac{ds}{\sqrt{1+k^2 s^2} \sqrt{1+s^2}},$$

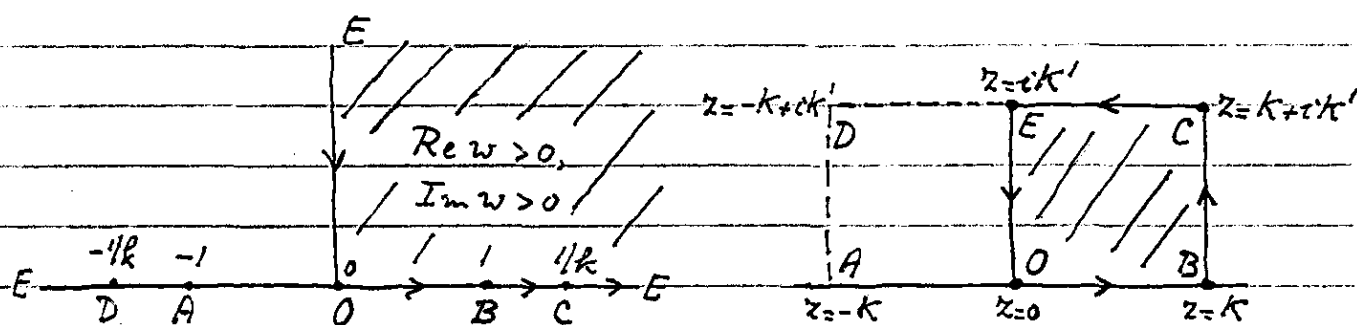
waarna

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{1+k^2 t^2}} = 2 \int_0^{\sqrt{k}} \frac{ds}{\sqrt{1+k^2 s^2} \sqrt{1+s^2}} = k'.$$

Hieruit is af te lezen de correspondentie

$$w = i/\sqrt{k} \iff z = \frac{1}{2} ik', \quad \text{zodat } \operatorname{sn}\left(\frac{1}{2} ik'\right) = i/\sqrt{k}. \quad \square$$

De voorgaande afbeeldingsresultaten zijn samengevat in de figuren hieronder.



Spiegeling aan OE leidt tot de figuren op p.3 met de verdere correspondenties

$$A: w = -1 \iff z = -k; \quad D: w = -1/k \iff z = -k + ik'$$

Maak nu gebruik van VFT 2.9, 2.7. De functie

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad \operatorname{Im} w > 0,$$

is een conforme afbeelding van  $\operatorname{Im} w > 0$  op de rechthoek

$$R_1 = \{z = x + iy \mid -k < x < k, 0 < y < k'\}. \quad \text{[die ook conform is]}$$

Deze afbeelding heeft een inverse afbeelding,  $w = \operatorname{sn} z$ , van  $R_1$  op  $\operatorname{Im} w > 0$ .

De functie  $\operatorname{sn} z$  is analytisch op  $R_1$ , afgezien van een enkelvoudige

pool in  $z = ik'$  met  $\operatorname{Res} \operatorname{sn} z = 1/k$ .

Hier volgt een tabel  $z = ik'$  van waarden van  $\operatorname{sn} z$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} 0 = 0, \quad \operatorname{sn} K = 1, \quad \operatorname{sn}(K + iK') = 1/k, \quad \operatorname{sn}(iK') = \infty, \\ \operatorname{sn}(-K) = -1, \quad \operatorname{sn}(-K + iK') = -1/k, \quad \operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}iK'\right) = i/\sqrt{k}. \end{aligned}$$

De afgeleide van  $\operatorname{sn} z$  wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\operatorname{sn} z) &= \frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2} \sqrt{1-k^2 w^2}} = \\ &= \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 z} = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z. \end{aligned}$$

Analoog is af te leiden: De functie

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad \operatorname{Im} w < 0,$$

is een conforme afbeelding van  $\operatorname{Im} w < 0$  op de rechthoek

$$R_2 = \{z = x + iy \mid -K < x < K, -K' < y < 0\}.$$

De inverse functie,  $w = \operatorname{sn} z$ , beeldt  $R_2$  af op  $\operatorname{Im} w < 0$ . Voorts is  $\operatorname{sn} z$  analytisch op  $R_2$ , afgezien van een enkelvoudige pool in  $z = -iK'$  met

$$\operatorname{Res}_{z=-iK'} \operatorname{sn} z = 1/k.$$

Vereinig  $R_1, R_2$  en het lijnstuk  $AB$  tot de rechthoek

$$R = \{z = x + iy \mid -K < x < K, -K' < y < K'\}.$$

Van is de functie  $\operatorname{sn} z$  gedefinieerd als een analytische functie op  $R$ , afgezien van enkelvoudige polen in  $z = \pm iK'$  met  $\operatorname{Res}_{z=\pm iK'} \operatorname{sn} z = 1/k$ .

De afbeelding  $w = \operatorname{sn} z$  voert  $R$  over in  $\{\operatorname{Im} w > 0\} \cup \{\operatorname{Im} w < 0\} \cup \{AB\}$ , d.i. in het  $w$ -vlak met snedes  $(-\infty, -1]$  en  $[1, \infty)$  langs de reële as.

### Analytische voortzetting van $\operatorname{sn} z$

De volgende eigenschappen worden afgeleid met het spiegelingprincipe van

$$1) \text{ Zij } z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad w = \operatorname{sn} z, \quad z \in \mathbb{R}. \quad \boxed{\text{Schwarz.}}$$

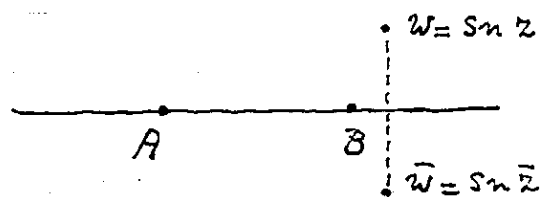
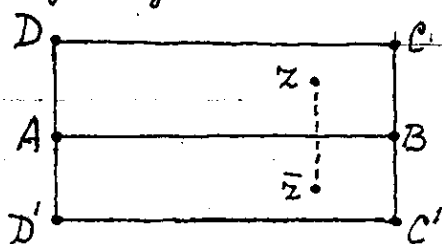
Met de substitutie  $t = -s$  volgt

$$\int_0^{-w} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}} = - \int_0^w \frac{ds}{\sqrt{1-s^2} \sqrt{1-k^2 s^2}} = -z.$$

Derhalve is

$$\operatorname{sn}(-z) = -w = -\operatorname{sn} z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

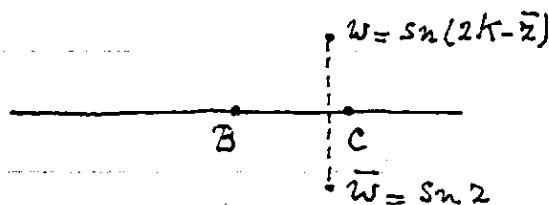
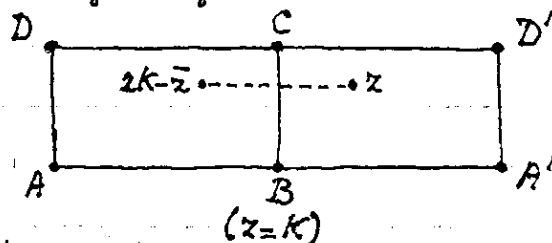
2) Spiegelning aan AB:



Uit de figuren is af te lezen

$$\overline{\operatorname{sn} z} = \operatorname{sn} \bar{z}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

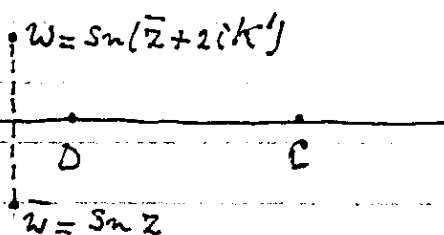
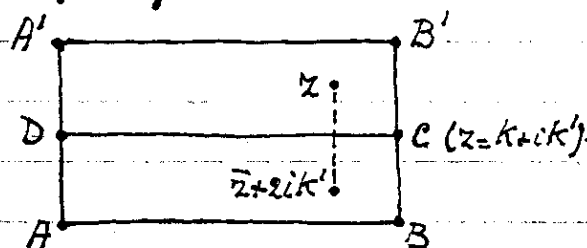
3) Spiegelning aan BC:



Uit de figuren is af te lezen

$$\operatorname{sn} z = \bar{w} = \overline{\operatorname{sn}(2k - \bar{z})} = \operatorname{sn}(2k - z) = -\operatorname{sn}(z - 2k).$$

4) Spiegelning aan CD:



Uit de figuren is af te lezen

$$\operatorname{sn} z = \bar{w} = \overline{\operatorname{sn}(\bar{z} + 2ik')} = \operatorname{sn}(z - 2ik').$$

De functie  $\operatorname{sn} z$  is in eerste instantie gedefinieerd en analytisch op de rechthoek  $R = \{z = x + iy \mid -K < x < K, -K' < y < K'\}$ . Vandaar uit wordt de functie  $\operatorname{sn} z$  analytisch voortgezet met behulp van de eigenschappen 3) en 4):  $\operatorname{sn} z = -\operatorname{sn}(z - 2K)$ ,  $\operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z - 2iK')$ . De voortgezette functie  $\operatorname{sn} z$  is analytisch in het hele complexe  $z$ -vlak afgezien van enkelvoudige polen in  $z = iK' + 2mK + 2inK'$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , met  $\operatorname{Res} \operatorname{sn} z = (-1)^m / k$ .

$z = iK' + 2mK + 2inK'$

Uit de eigenschappen 3) en 4) volgen de periodiciteitsrelaties

$$\sin(z + 4K) = \sin z, \quad \sin(z + 2iK') = \sin z.$$

De functie  $\sin z$  heet dubbel-periodiek met perioden  $4K, 2iK'$ .

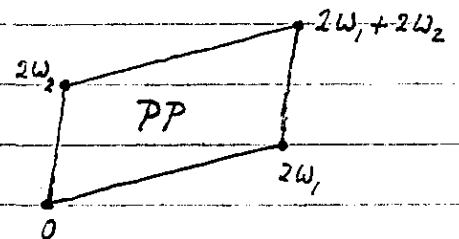
### Dubbel-periodieke functies

Laat  $\omega_1$  en  $\omega_2$  twee getallen (reëel of complex) zijn, waarvan de verhouding  $\omega_2/\omega_1$  niet zuiver reëel is. Een functie  $f(z)$  waarvoor geldt

$$f(z + 2\omega_1) = f(z), \quad f(z + 2\omega_2) = f(z),$$

voor alle  $z \in \mathbb{C}$ , wordt een dubbel-periodieke functie van  $z$  genoemd, met perioden  $2\omega_1, 2\omega_2$ . De functie  $f(z)$  is volledig

bepaald door haar waarden op een periode - parallelogram (PP), d.i. het parallelogram met hoekpunten  $0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_1 + 2\omega_2$ , of een translatie daarvan.



Een dubbel-periodieke functie die analytisch is in het complex vlak, afgezien van polen, wordt een elliptische functie genoemd. We geven nog twee eigenschappen van de (algemene) elliptische functie.

Eigenschap 1. Een elliptische functie zonder polen is constant.

Bewijs. Een elliptische functie zonder polen is analytisch en begrensd op een PP, en dus op  $\mathbb{C}$ . Met de stelling van Liouville (FT 7.4) volgt dat de functie constant is.  $\square$

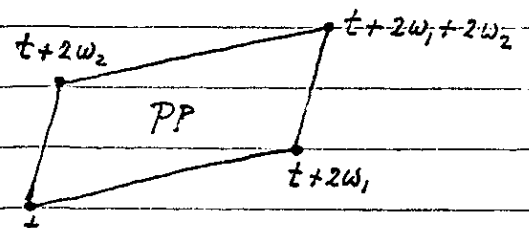
Eigenschap 2. De som van de residuen van een elliptische functie,  $f(z)$ , in haar polen in een PP is 0.

Bewijs. Kies een PP met hoekpunten

$t, t + 2\omega_1, t + 2\omega_2, t + 2\omega_1 + 2\omega_2$ , zo dat

op de rand  $C$  geen polen van  $f(z)$  liggen.

Bereken nu



$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \left\{ \int_t^{t+2\omega_1} + \int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_2}^t \right\} f(z) dz = \\ &= \int_t^{t+2\omega_1} [f(z) - f(z+2\omega_2)] dz - \int_t^{t+2\omega_2} [f(z) - f(z+2\omega_1)] dz = 0. \end{aligned}$$

Anderzijds is

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res } f(z) \text{ in de polen in } PP. \quad \square$$

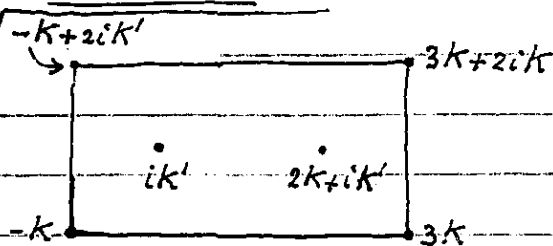
De orde van een elliptische functie is het aantal polen van de functie in een PP; hierbij wordt een  $k$ -voudige pool  $k$  keer geteld.

Orde 1 komt niet voor. Immers, een elliptische functie van orde 1 zou één enkelvoudige pool hebben in een PP, met residu 0 (op grond van Eigenschap 2); de pool is dan een ophefbare singulariteit.

De eenvoudigste elliptische functies zijn die van orde 2. Deze worden onderscheiden in twee klassen:

- (i) elliptische functies met twee enkelvoudige polen in een PP, met tegengestelde residuen, ook bekend als elliptische functies volgens Jacobi;
- (ii) elliptische functies met één dubbele pool in een PP, met residu 0, ook bekend als elliptische functies volgens Weierstrass.

De elliptische functie  $\text{sn } z$  (volgens Jacobi) heeft als PP bijv. de rechthoek met hoekpunten  $-k, 3k, -k+2ik', 3k+2ik'$ . In PP heeft  $\text{sn } z$  twee enkelvoudige polen in  $z = ik'$  en  $z = 2k+ik'$ , met  $\text{Res } \text{sn } z = 1/k$  en



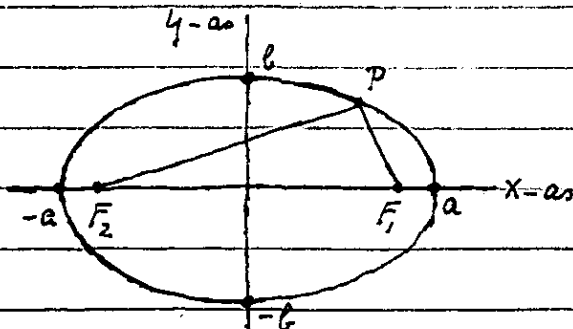
$\text{Res}_{z=2k+ik'} \text{sn } z = -1/k$

Toepassing van elliptische functies: Brownse beweging in een rechthoek, Trefethen's Problem 10; zie pp. 12-14.

Omtrek van een ellips

De ellips met vergelijking

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (a \geq b)$$



heeft een halve grote as  $a$  en een halve kleine as  $b$ .

De brandpunten  $F_1$  en  $F_2$  hebben coördinaten  $(\pm c, 0)$  met  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . De ellips bestaat uit de punten  $P$ , waarvoor  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ .

Parametriseer de ellips volgens

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

De omtrek  $L$  van de ellips wordt nu gegeven door

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d\theta = \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - b^2/a^2) \sin^2 \theta} d\theta = 4a E(\sqrt{1 - b^2/a^2}) = 4a E(c/a), \end{aligned}$$

waarin  $E(\cdot)$  de volledige elliptische integraal van de tweede soort voorstelt. In het speciale geval  $a=b$  is de ellips een cirkel met omtrek

$$L = 4a E(0) = 4a \int_0^{\pi/2} d\theta = 2\pi a.$$

### Exacte behandeling van de mathematische slinger

Een slinger met massa  $m$  en lengte  $l$  slingert om een verticale evenwichtsstand. De uitwijking t.o.v. de verticaal wordt beschreven door de hoek

$$\theta = \theta(t), \text{ waarin } t \text{ de tijd voorstelt.}$$

De bewegingsvergelijking luidt

$$ml \ddot{\theta} = -mg \sin \theta,$$

waarin  $g$  de versnelling van de zwaartekracht voorstelt.

Als beginvoorwaarden wordt genomen  $\theta = \theta_0$ ,  $\dot{\theta} = 0$  voor  $t=0$ .

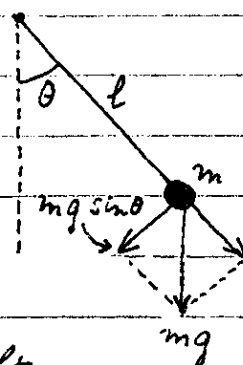
In het geval van "kleine" uitwijkingen, stellen we  $\sin \theta \approx \theta$ , waardoor de bewegingsvergelijking overgaat in  $\ddot{\theta} + (g/l)\theta = 0$ . Als benaderde oplossing vinden we  $\theta = \theta_0 \cos(t\sqrt{g/l})$  en de bijbehorende slingertijd is  $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

Vervolgens bepalen we de exacte slingertijd  $T$ . Vermenigvuldig de bewegingsvergelijking

$$\ddot{\theta} = -(g/l) \sin \theta$$

met  $2\dot{\theta}$  en integreer vanuit  $t=0$ . Dan komt er

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0); \quad \dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \quad \text{voor } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T.$$



Verdere integratie geeft

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = -\sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^t dt, \quad \int_{\theta(t)}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = t \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Voor  $t = T/4$  is de slinger terug in de evenwichtsstand  $\theta = 0$ , zodat

$$\frac{T}{4} \sqrt{\frac{2g}{l}} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Met de substitutie  $\sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}\theta_0 \sin \varphi$  is de laatste integraal te herleiden tot

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} &= \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta)}} = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{2} K(\sin \frac{1}{2}\theta_0). \end{aligned}$$

Aldus vinden we voor de trillingstijd de exacte uitkomst

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(\sin \frac{1}{2}\theta_0),$$

waarin  $\theta_0$  de maximale uitwijkingshoek is.

Voor  $K(k)$  geldt de ontwikkeling

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} [1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \theta + O(k^6)] d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + O(k^6) \right], \quad (k \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Hieruit volgt voor  $T$  de ontwikkeling

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{1}{2}\theta_0 + O(\sin^6 \frac{1}{2}\theta_0) \right], \quad (\theta_0 \rightarrow 0).$$

Merk op dat de eerste term precies overeenstemt met de eerdere benadering  $T_0$ .



## Solution of Trefethen's Problem 10

J. Boersma

Department of Mathematics and Computing Science  
Eindhoven University of Technology  
P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands

Trefethen's Problem 10 as proposed in [1] reads:

A particle at the center of a  $10 \times 1$  rectangle undergoes Brownian motion (i.e., 2D random walk with infinitesimal step lengths) till it hits the boundary. What is the probability that it hits at one of the ends rather than at one of the sides?

*Solution.* The analytical part of the solution is found by an approach taken from Zauderer [2, Section 1.3]. Generalize the problem as follows: A particle at  $(x, y) = (0, K'/2)$  undergoes Brownian motion in the rectangular domain  $D = \{(x, y) \mid -K < x < K, 0 < y < K'\}$  till it hits the boundary of  $D$ ; here,  $K = K(k)$  and  $K' = K(k')$  are complete elliptic integrals of the first kind with modulus  $k$  and  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . The question is to determine the probability  $p$ , say, that the particle hits at one of the ends  $x = \pm K$  rather than at one of the sides  $y = 0$  or  $y = K'$ .

Introduce the Green's function  $G(x, y)$  with singularity at  $(x, y) = (0, K'/2)$ , specified by

$$\begin{aligned} \Delta G &= G_{xx} + G_{yy} = -\delta(x)\delta(y - K'/2) \text{ in } D, \\ G(x, y) &= 0 \text{ along the boundary of } D. \end{aligned}$$

Then, according to Zauderer [2, Section 1.3], the probability  $p$  is given by

$$p = -2 \int_0^{K'} \frac{\partial G}{\partial x}(K, y) dy.$$

The Green's function  $G(x, y)$  is determined by use of the conformal mapping  $\zeta = \operatorname{sn}(z, k) = \operatorname{sn} z$ , where  $z = x + iy$ ; for the theory of the Jacobian elliptic function  $\operatorname{sn} z$ , see Byrd and Friedman [3, pp. 18-28]. The mapping  $\zeta = \operatorname{sn} z$  transforms  $D$  into the half-plane  $\operatorname{Im} \zeta > 0$ , and sends  $z = iK'/2$  to  $\zeta = \operatorname{sn}(iK'/2) = i/\sqrt{k}$  by [3, form. 129.50, 122.11]. Then it easily follows that  $G(x, y)$  is given by

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\operatorname{sn} z - i/\sqrt{k}}{\operatorname{sn} z + i/\sqrt{k}} \right|, \quad z = x + iy.$$

Determine the harmonic conjugate

$$H(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \arg \left( \frac{\operatorname{sn} z - i/\sqrt{k}}{\operatorname{sn} z + i/\sqrt{k}} \right), \quad z = x + iy,$$

which is related to  $G(x, y)$  by the Cauchy-Riemann equations  $\partial G/\partial x = \partial H/\partial y$ ,  $\partial G/\partial y = -\partial H/\partial x$ . Then the probability  $p$  can be evaluated as

$$p = -2 \int_0^{K'} \frac{\partial H}{\partial y}(K, y) dy = -2H(K, K') + 2H(K, 0).$$

By use of the known values  $\operatorname{sn} K = 1$ ,  $\operatorname{sn}(K + iK') = 1/k$ , from [3, form. 122.02, 122.07], we find the following expressions for  $p$ :

$$p = \frac{2}{\pi} [\arctan(1/\sqrt{k}) - \arctan(\sqrt{k})] = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan(\sqrt{k}) = \frac{4}{\pi} \arctan \left( \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right).$$

By means of Whittaker and Watson [4, p. 486] the rightmost expression can be expanded as

$$p = \frac{4}{\pi} \arctan \left( \frac{2 \sum_{n=0}^{\infty} (q')^{(2n+1)^2}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (q')^{4n^2}} \right) = \frac{8}{\pi} q' + O(q'^3),$$

where  $q' = e^{-\pi K/K'}$ .

To solve the original problem, the modulus  $k$  is to be chosen such that  $2K/K' = 10$  or  $K(k)/K(k') = 5$ . The latter equation has the solution  $k = \sqrt{1 - k_{25}^2}$ , where  $k_{25}$  is a so-called singular modulus; generally, the singular modulus  $k_N$  satisfies  $K(\sqrt{1 - k_N^2})/K(k_N) = \sqrt{N}$ . It so happens that the value of  $k_{25}$  is explicitly known from Borwein and Borwein [5, p. 162]:  $k_{25} = (\sqrt{5} - 2)(3 - 2 \cdot 5^{1/4})/\sqrt{2}$ . Then the probability  $p$  for a  $10 \times 1$  rectangle is found to be

$$p = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan(\sqrt{1 - k_{25}^2}) = 3.8375879792512261034 \times 10^{-7}$$

to 20 significant digits. In the present case  $q' = e^{-5\pi}$  and the corresponding approximation

$$p \approx \frac{8}{\pi} e^{-5\pi} = 3.837587979251342 \dots \times 10^{-7}$$

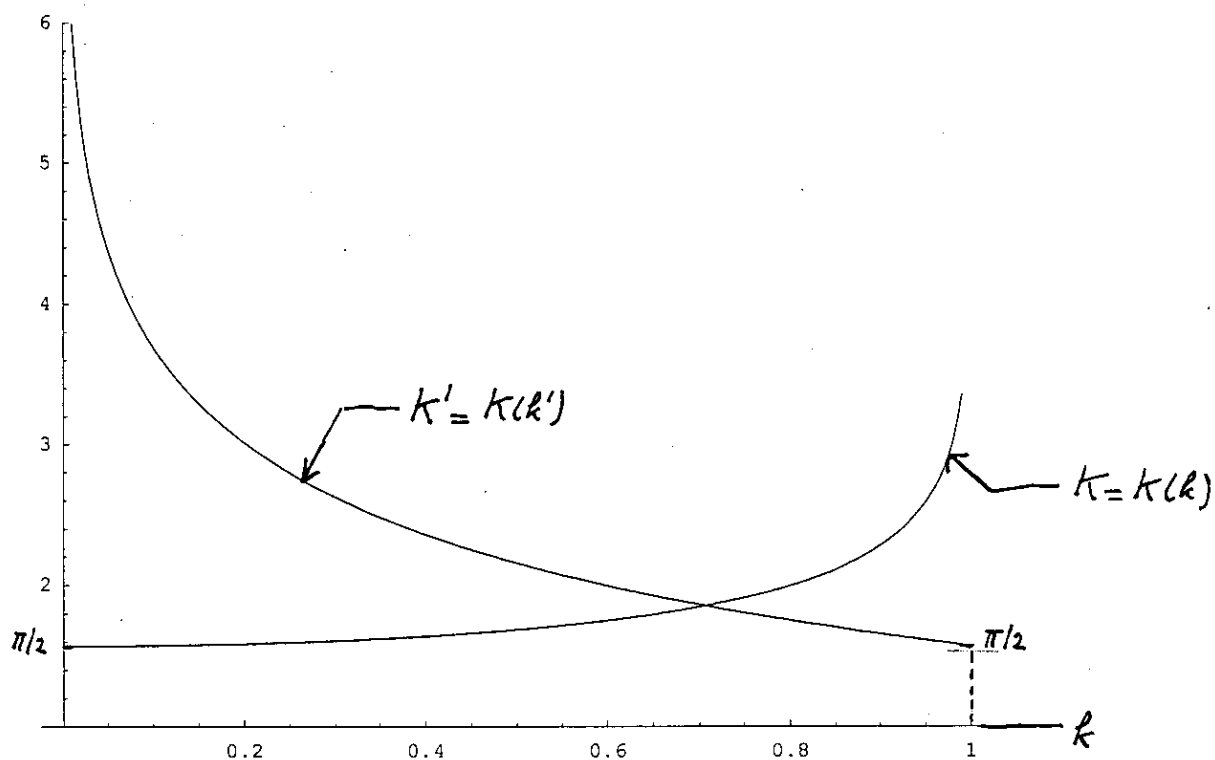
has already 13 correct digits.

Several singular moduli  $k_N$  are known from [5]. This permits an easy calculation of the probability  $p$  for a  $2\sqrt{N} \times 1$  rectangle.

#### References

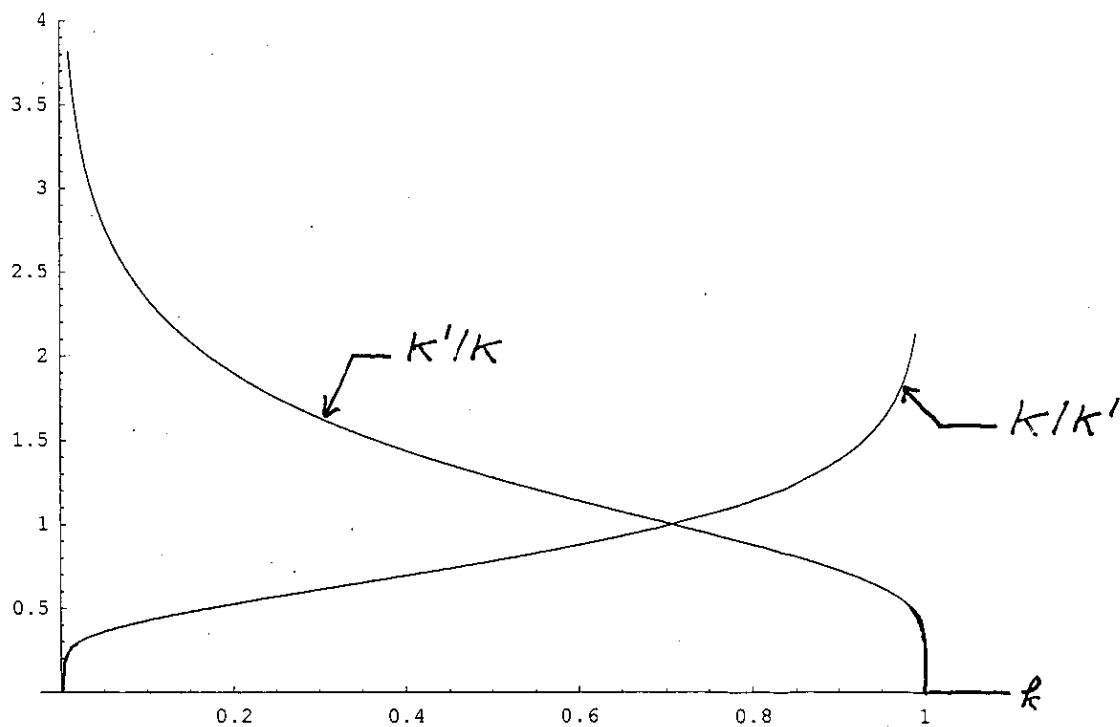
- [1] L.N. Trefethen, The hundred-dollar, hundred-digit challenge problems, SIAM News, Vol. 35, Number 1, p. 3, January/February 2002.
- [2] E. Zauderer, Partial differential equations of applied mathematics, Second edition, Wiley, New York, 1989.
- [3] P.F. Byrd and M.D. Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer, Berlin, 1954.
- [4] E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, Fourth edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [5] J.M. Borwein and P.B. Borwein, Pi and the AGM, Wiley, New York, 1987.

```
In[10]:= Plot[{EllipticK[k^2], EllipticK[1 - k^2]}, {k, 0.01, 0.99},
  PlotRange -> {1, 6}, PlotPoints -> 200, AspectRatio -> 3/4]
```



Out[10]= - Graphics -

```
In[15]:= Plot[{EllipticK[1 - k^2] / EllipticK[k^2], EllipticK[k^2] / EllipticK[1 - k^2]},
  {k, 0.01, 0.99}, PlotRange -> {0, 4}, PlotPoints -> 200, AspectRatio -> 3/4]
```



Out[15]= - Graphics -

Plots von  $sn(x, k)$ ,  $cn(x, k)$ ,  $dn(x, k)$  von  $-2K(k) \leq x \leq 2K(k)$ ,

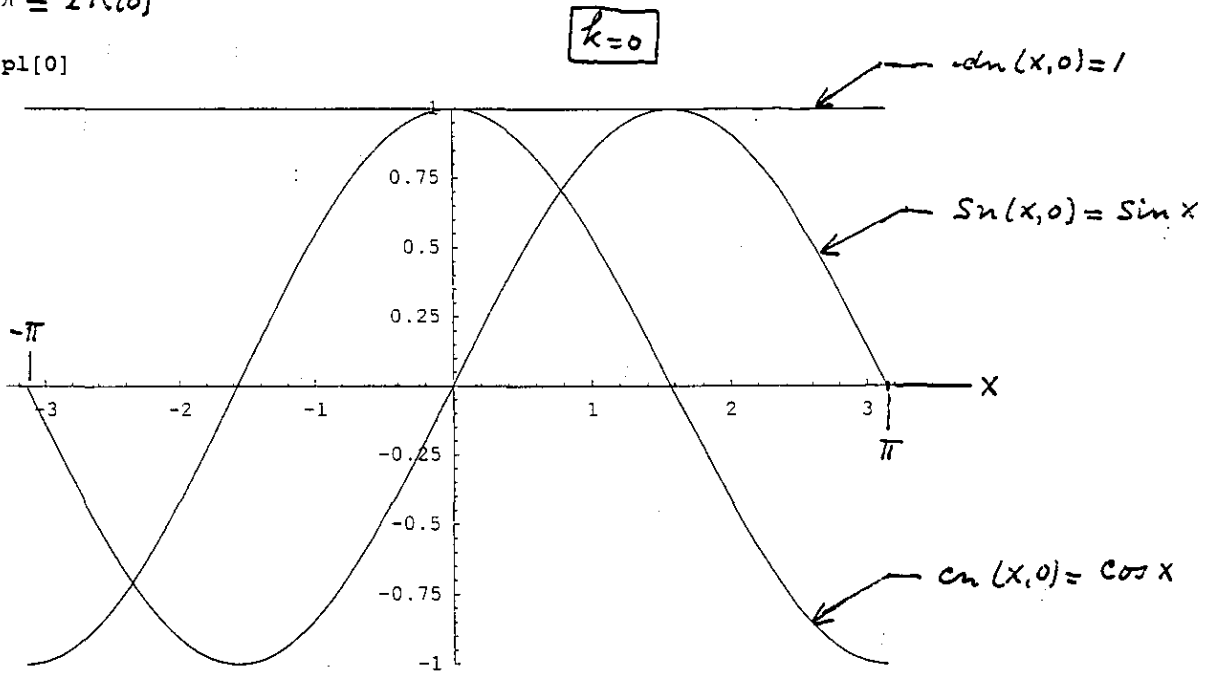
$k=0, k=0.45.$

```
In[3]:= pl[k_] := Plot[{JacobiSN[x, k^2], JacobiCN[x, k^2], JacobiDN[x, k^2]},
  {x, -2*EllipticK[k^2], 2*EllipticK[k^2]}, PlotRange -> {-1, 1}, PlotPoints -> 400]
```

```
In[7]:= 2*EllipticK[0]
```

```
Out[7]=  $\pi = 2K(0)$ 
```

```
In[8]:= pl[0]
```

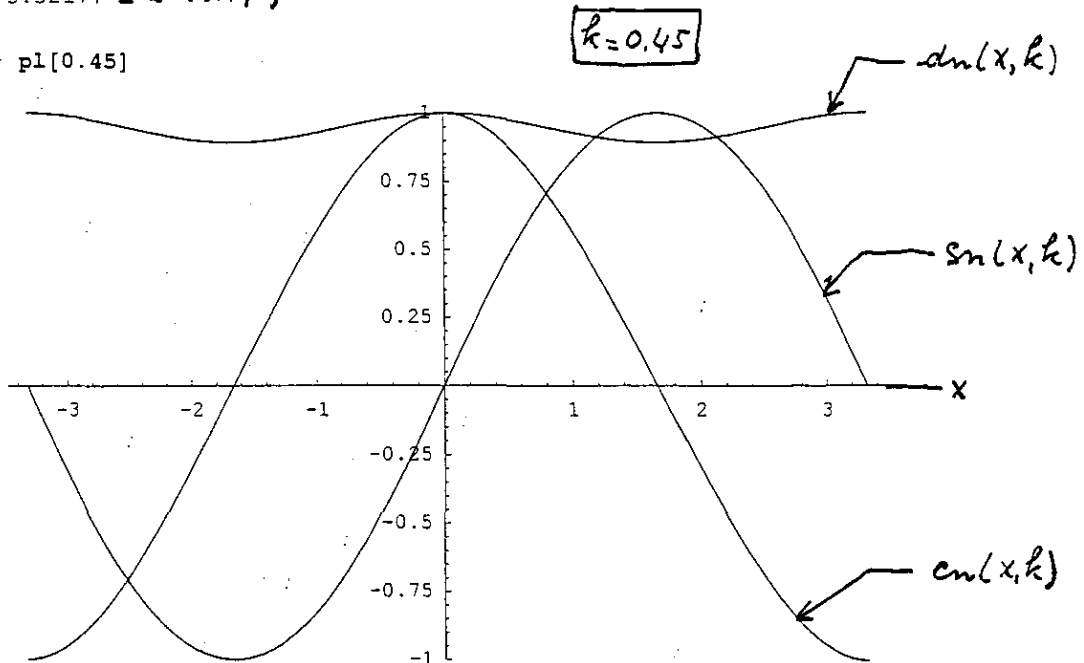


Out[8]= - Graphics -

```
In[9]:= 2*EllipticK[0.2025]
```

```
Out[9]= 3.32177 = 2K(0.45)
```

```
In[10]:= pl[0.45]
```



Out[10]= - Graphics -

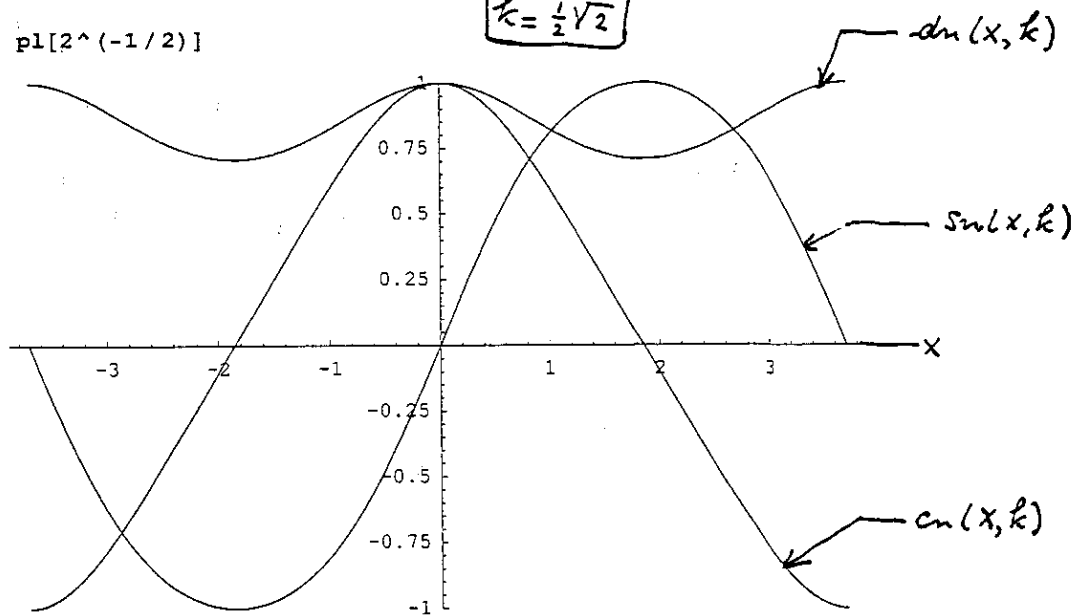
$k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $k_2 = 0.95$ .

In[12]:= 2\*EllipticK[0.5]

Out[12]= 3.70815 =  $2K(\frac{1}{2}\sqrt{2})$

In[13]:= pl[2^(-1/2)]

$k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$



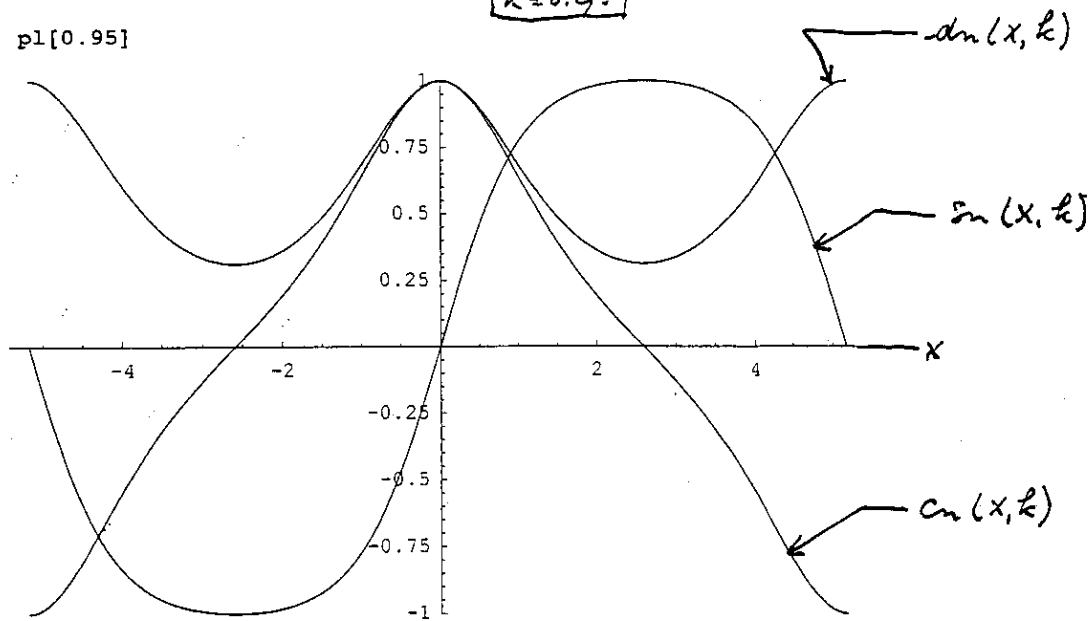
Out[13]= - Graphics -

In[14]:= 2\*EllipticK[0.9025]

Out[14]= 5.18002 =  $2K(0.95)$

In[15]:= pl[0.95]

$k = 0.95$



Out[15]= - Graphics -