TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

INLEIDING tot de ANALYSE

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

Najaarssemester 1962/63

Inhoudsbeschrijving

INLEIDING tot de ANALYSE

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

najaarssemester 1962/63

JdG, 19 Juli 2005

Jan de Graaf.

Syllabus Inleiding tot de Analyse

Deel van het college van Prof.dr.N.G.de Bruijn,

najaarssemester 1962/63.

Voor de bewijzen zie het geschreven dictaat!

Algebraische voorbereiding. Zij R een commutatieve ring met eenheidselement e. Een niet-lege deelverzameling M van R heet een ideaal als

1° voor alle $a \in M$ en $b \in M$ geldt $a-b \in M$.

2° voor alle $a \in M$ en $r \in R$ geldt $ar \in M$.

Twee elementen $a \in R$, $b \in R$ heten equivalent als $a-b \in M$. De equivalentieklassen heten restklassen mod M. Voor elk paar restklassen α, β is gedefinieerd een som $\alpha+\beta$ (d.i. de klasse die bestaat uit alle $a+b$ met $a \in M$, $b \in M$) en een product (d.i. de klasse die bestaat uit alle ab met $a \in M$, $b \in M$). Nu geldt:

Stelling 1. De verzameling der restklassen vormt een commutatieve ring met eenheidselement (de zg. restklassenring, notatie R/M).

Stelling 2. Nodig en voldoende opdat R/M een lichaam is, is dat er bij elke $a \in R \backslash M$ een $b \in R$ bestaat met $ab-e \in M$.

Hoofdstuk I. Theorie van het reële getal.

Notatie. R_t = lichaam der rationale getallen. N = verzameling der natuurlijke getallen. $\mathcal{R} = R_t^N$ = verzameling der afbeeldingen van N in R_t = = verzameling der rijen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ met rationale a_n's.

Stelling 1. Met de volgende definities van optelling en vermenigvuldiging:

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \ldots)$$
$$(a_1, a_2, \ldots)(b_1, b_2, \ldots) = (a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ \ldots)$$

is $\mathcal{R}$ een commutatieve ring met nulelement $(0,0,0,\ldots)$ en eenheidselement $(1,1,1,\ldots)$.

<u>Def.1</u> $(a_1, a_2, \ldots)$ heet begrensd als

$$\exists_{p \in R_t} (\forall_{n \in N} |a_n| < p).$$

<u>Def.2</u> $(a_1, a_2, \ldots)$ heet een nulrij als

$$\forall_{p \in R_t,\ p>0} \exists_{k \in N} \forall_{n \in N,\ n>k} |a_n| < p.$$

<u>Def.3</u> $(a_1, a_2, \ldots)$ heet een <u>fundamentaalrij</u> als

$$\forall_{p \in R_t,\ p>0} \exists_{k \in N} \forall_{m \in N,\ m>k} \forall_{n \in N,\ n>k} (|a_n - a_m| < p).$$

<u>Notatie</u>. $\mathcal{B}$ = verzameling der begrensde rijen; $\mathcal{N}$ = verzameling der nulrijen; $\mathcal{F}$ = verzameling der fundamentaalrijen.

<u>Hulpstelling 1</u>. $\mathcal{N} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{B}$

<u>Hulpstelling 2</u>. 1° $a \in \mathcal{B}$, $b \in \mathcal{B}$ dan $a+b \in \mathcal{B}$, $a-b \in \mathcal{B}$ en $ab \in \mathcal{B}$.

2° $a \in \mathcal{N}$, $b \in \mathcal{N}$ dan $a+b \in \mathcal{N}$, $a-b \in \mathcal{N}$.

3° $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{F}$ dan $a+b \in \mathcal{F}$, $a-b \in \mathcal{F}$.

4° $a \in \mathcal{B}$, $b \in \mathcal{N}$ dan $ab \in \mathcal{N}$.

5° $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{F}$ dan $ab \in \mathcal{F}$.

<u>Stelling 2</u>. $\mathcal{F}$ is een commutatieve ring met eenheidselement, en $\mathcal{N}$ is een ideaal in $\mathcal{F}$.

<u>Def.4</u> Is $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{F}$ $(a = (a_1, a_2, \ldots), b = (b_1, b_2, \ldots))$, dan betekent $a >^* b$ dat

$$\exists_{p \in R_t,\ p>0} \exists_{k \in N} \forall_{n \in N,\ n>k} (a_n - b_n > p).$$

<u>Hulpstelling 3</u>. Is $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{F}$ dan geldt precies één der volgende betrekkingen $a >^* b$, $a-b \in \mathcal{N}$, $b >^* a$.

<u>Hulpstelling 4.</u> Is $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{F}$, $d \in \mathcal{F}$, $a-c \in \mathcal{N}$, $b-d \in \mathcal{N}$, en $a >^* b$, dan is ook $c >^* d$.

<u>Def.5</u> Zijn σ en τ elementen van de restklassenring $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ dan betekent $\sigma > \tau$ dat er a en b bestaan met $a \in \sigma$, $b \in \tau$, $a >^* b$.

<u>Hulpstelling 5.</u> Is $\sigma \in \mathcal{F}/\mathcal{N}$, $\tau \in \mathcal{F}/\mathcal{N}$ dan geldt precies één der relaties $\sigma > \tau$, $\sigma = \tau$, $\tau > \sigma$.

<u>Hulpstelling 6.</u> Is $\sigma > \tau$ en $\tau > \rho$ dan is $\sigma > \rho$.

Is $\sigma > \tau$ en $\rho > 0$ dan is $\sigma\rho > \tau\rho$.

Is $\sigma > \tau$, ρ willekeurig, dan is $\sigma + \rho > \tau + \rho$.

<u>Stelling 3.</u> $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ is een <u>archimedisch geordend lichaam</u> (d.i. een lichaam met een relatie $>$ die aan hulpstellingen 5 en 6 voldoet, en bovendien aan het zg. axioma van Archimedes (of Eudoxus): Als $p > 0$, en σ willekeurig, dan is er in de rij ρ, $\rho+\rho$, $\rho+\rho+\rho$, $\rho+\rho+\rho+\rho$, ... een element $> \sigma$.

<u>Def.6</u> φ is de afbeelding van R_t in $\mathcal{F}/\mathcal{N}$, gedefinieerd door de afspraak: Voor elke $r \in R_t$ is $\varphi(r)$ de restklasse die $(r,r,r,\ldots)$ bevat.

<u>Hulpstelling 7.</u> φ beeldt R_t ééneénduidig in $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ af, met behoud van som, product, en ordening:

$\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s)$

$\varphi(rs) = \varphi(r)\,\varphi(s)$

$\varphi(0) =$ nulelement van $\mathcal{F}/\mathcal{N}$

$\varphi(1) =$ eenheidselement van $\mathcal{F}/\mathcal{N}$

$r > s \Longrightarrow \varphi(r) > \varphi(s)$.

<u>Def.7</u> Het <u>lichaam der reële getallen</u> (notatie R_e) is het archimedisch geordende lichaam dat uit $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ ontstaat door, voor elke $r \in R$, het element $\varphi(r)$ te vervangen door r zelf.

<u>Def.8</u> Is $\alpha \in R_e$, $\alpha_1 \in R_e$, $\alpha_2 \in R_e$, ... dan betekent de notatie $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ (of $\alpha_n \to \alpha$) dat

$$\forall_{\varepsilon \in R_e,\ \varepsilon > 0}\ \exists_{k \in N}\ \forall_{n \in N,\ n>k}\ (|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon).$$

<u>Hulpstelling 8</u>. Zij $a_n \in R_t$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ en $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathcal{F}$; verder zij α de klasse waartoe a behoort. Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (in de zin van def.8).

<u>Def.9</u> Is $\alpha_n \in R_e$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ en is

$$\forall_{\varepsilon \in R_e,\ \varepsilon > 0}\ \exists_{k \in N}\ \forall_{m \in N,\ m>k}\ \forall_{n \in N,\ n>k}\ (|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon),$$

dan heet de rij $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ een <u>fundamentaalrij</u>.

<u>Stelling 4</u>. (Cauchy) Zijn α_1, α_2, α_3, ... reële getallen die een fundamentaalrij vormen, dan is er een reëel getal α zó dat $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

<u>Notatie</u>. Van nu af aan stellen kleine latijnse letters reële getallen voor, tenzij uitdrukkelijk anders is vermeld.

<u>Stelling 5</u>. Is $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant b$, dan is er een a met $a_n \to a$.

<u>Stelling 6</u>. (Intervallennest) Voldoen de rijen $a_1, a_2, \ldots$, $b_1, b_2, \ldots$ aan

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \qquad (n = 1,2,3,\ldots),$$

dan is er een c met

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Is bovendien $b_n - a_n \to 0$, dan is er precies één dergelijke c.

Stelling 7. (Dedekind) Is R_e gesplitst in twee disjuncte niet-lege verzamelingen A en B, en is voldaan aan

$$\forall_{a\in A}\ \forall_{b\in B}\qquad (a < b),$$

dan is er een c met

$$\forall_x\ (x < c \Rightarrow x \in A),\quad \forall_y\ (y > c \Rightarrow y \in B).$$

Def.10 Laat V een deelverzameling van R_e zijn. Een getal $b \in R_e$ heet een bovengrens van V als $\forall_{v\in V}\ (v \leqslant b)$. We zeggen dat V naar boven begrensd is als V een bovengrens heeft.
(Analoog: benedengrens, naar beneden begrensd.)

Stelling 8. Is V niet leeg, en naar boven begrensd, dan is er in de verzameling der bovengrenzen van V een kleinste, de zg. kleinste bovengrens van V, of het supremum van V (notatie sup V). Hiervoor geldt dus

$$\forall_{v\in V}\qquad (v \leqslant \sup V)$$

$$\forall_{a < \sup V}\ \exists_{v\in V}\qquad v > a.$$

Analoog: Is V niet leeg en naar beneden begrensd, dan heeft V een grootste benedengrens (het infimum van V; notatie inf V).

Stelling 9. Is $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een rij, dan is er hoogstens één getal a met de volgende eigenschappen

$$\forall_{x>a}\quad (\text{slechts eindig vaak } a_n > x)$$

$$\forall_{x<a}\quad (\text{oneindig vaak } a_n > x).$$

Bestaat er niet zo een getal a dan is òf $a_n \to -\infty$ (d.w.z. $\forall_b\ \exists_k\ \forall_{n>k}\ (a_n < b)$), òf a_n is naar boven onbegrensd. In deze drie gevallen schrijven we resp. $\limsup a_n = a$, $\limsup a_n = -\infty$, $\limsup a_n = \infty$.

Stelling 10. Is $a_n \to a$, $b_n \to b$, dan is $a_n + b_n \to a + b$, $a_n b_n \to ab$; is bovendien $a_n \leqslant b_n$ (alle n), dan is $a \leqslant b$.

Hoofdstuk II. De numerieke n-dimensionale ruimte R_n.

Def.1 Een topologische ruimte is een verzameling R waarin sommige deelverzamelingen een bijzondere rol spelen; zij worden open verzamelingen genoemd, en worden verondersteld te voldoen aan

1° De lege verzameling is open, en R zèlf is open.

2° De vereniging van willekeurig vele open verzamelingen is open.

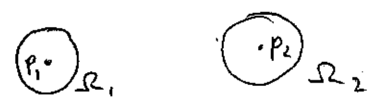
3° De doorsnede van twee open verzamelingen is open.

Notatie: doorgaans voor punten P, Q, voor verzamelingen V, W, in het bijzonder voor open verzamelingen Ω.

De elementen van R worden punten genoemd.

Is $P \in \Omega \subset R$, en Ω open, dan heet Ω een omgeving van P.

Het complement $R \setminus \Omega$ van een open verzameling Ω heet een gesloten verzameling.



Def.2 Een topologische ruimte R heet een Hausdorff-ruimte als bij elk puntenpaar P_1, P_2 ($P_1 \in R$, $P_2 \in R$, $P_1 \neq P_2$) omgevingen Ω_1 en Ω_2 van P_1 resp. P_2 bestaan zó dat de doorsnede van Ω_1 en Ω_2 leeg is.

Def.3 Zij R een topologische ruimte, en $P \in R$, $P_1 \in R$, $P_2 \in R$, ...
Dan betekent de notatie $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ (of $P_n \to P$) dat er bij elke omgeving Ω van P geldt

$$\forall_{\Omega \ni P} \; \exists_{k \in N} \; \forall_{m \in N,\, m>k} \; (P_m \in \Omega).$$

De rij P_1, P_2, ... heet convergent als er een P is met $P_n \to P$.

Stelling 1. Is V een gesloten deelverzameling van een topologische ruimte R, en is $P_1 \in V$, $P_2 \in V$, ..., en $P_n \to P$, $P \in R$, dan is ook $P \in V$.

Dat er maar één limiet is, is aan te tonen ~~door~~ als de top. ruimte een Hausdorffruimte is.

Stelling 2. Is R een Hausdorff-ruimte, dan heeft een convergente rij slechts één limiet.

Def.4 Laat R een verzameling zijn en laat voor elk paar elementen P, Q een reëel getal d(P,Q) gedefinieerd zijn (de elementen van R worden "punten" genoemd, en d(P,Q) heet de "afstand" van P tot Q). Men noemt R met deze afstand een metrische ruimte als voor alle P_1, P_2, $P_3 \in R$ is voldaan aan

$$d(P_1,P_2) = d(P_2,P_1),$$
$$d(P_1,P_2) > 0 \quad \text{als } P_1 \neq P_2, \quad d(P_1,P_1) = 0,$$
$$d(P_1,P_3) \leqslant d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3).$$

Def.5 Als P een punt is van een metrische ruimte R, en a een positief getal, dan heet de verzameling $B_{P,a}$, gedefinieerd door

$$B_{P,a} = \{ Q \mid Q \in R \;\&\; d(P,Q) < a \}$$

de open bol met middelpunt P en straal a.

Def.6 Is V een deelverzameling van een metrische ruimte R, en P een punt van V, dan heet P inwendig punt van V als er een a > 0 is met $B_{P,a} \subset V$.

Def.7 Een deelverzameling V van een metrische ruimte R heet open als elke $P \in V$ een inwendig punt van V is. $\forall_{p \in V} \exists_{a>0} (B(p,a) \subset V)$

Def.8 Een deelverzameling V van een metrische ruimte R heet begrensd als er een $P \in R$ en een a > 0 is zó dat $V \subset B_{P,a}$.

Stelling 3. Elke open bol is een open verzameling.

Stelling 4. Elke metrische ruimte is een Hausdorff-ruimte (als het begrip open verzameling door def.7 is vastgelegd).

Stelling 5. Is R een metrische ruimte, en $P \in R$, $P_1 \in R$, $P_2 \in R$, ..., dan is nodig en voldoende voor $P_n \to P$ dat

$$\forall_{\varepsilon \in R_e,\ \varepsilon > 0}\ \exists_{k \in N}\ \forall_{m \in N,\ m > k}\ (d(P_n, P) < \varepsilon).$$

Def.9 Een rij punten P_1, P_2, P_3, ... in een metrische ruimte heet fundamentaalrij als

$$\forall_{\varepsilon \in R_e,\ \varepsilon > 0}\ \exists_{k \in N}\ \forall_{m \in N,\ m > k}\ \forall_{q \in N,\ q > k}\ (d(P_m, P_q) < \varepsilon).$$

Stelling 6. In een metrische ruimte is elke convergente rij een fundamentaalrij.

Def.10 Een metrische ruimte heet volledig als elke fundamentaalrij convergeert.

Stelling 7. Is V een deelverzameling van de topologische ruimte R, dan is de doorsnede van alle gesloten verzamelingen W die voldoen aan $W \supset V$ weer een gesloten verzameling. Deze heet de afsluiting van V (notatie $\overline{V}$).

Stelling 8. a) $V_1 \subset V_2 \Rightarrow \overline{V}_1 \subset \overline{V}_2$.

b) V gesloten $\Rightarrow \overline{V} = V$.

c) $\overline{\overline{V}} = \overline{V}$.

Def.11 Is V een deel van een topologische ruimte R, en is $P \in R$ dan heet P een verdichtingspunt van V als $P \in V$ en elke omgeving van P een punt $Q \neq P$ met V gemeen heeft;

<u>geisoleerd punt van V</u> als $P \in V$, en er een omgeving van P bestaat die, behalve P zelf, niets met V gemeen heeft;

<u>randpunt van V</u> als elke omgeving van P zowel punten van V als van $R \setminus V$ bevat.

(De randpunten behoeven niet tot V te behoren.)

De verzamelingen van alle randpunten van V heet de <u>rand</u> van V.

<u>Stelling 9</u>. De afsluiting van een deel V van een topologische ruimte R ontstaat door aan V alle randpunten van V toe te voegen.

<u>Stelling 10</u>. Is V een deel van een metrische ruimte R, dan is $\overline{V}$ de verzameling van alle limieten van convergente rijen P_1, P_2, ... met $\forall_k$ ($P_k \in V$).

<u>Def.12</u> Als n een natuurlijk getal is, is R_n (de n-dimensionale numerieke ruimte) de verzameling van alle rijtjes

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad \text{met} \quad p_1 \in R_e, \dots, p_n \in R_e.$$

Met andere woorden $R_n = (R_e)^S$, waarin S een verzameling van n elementen is. Een rijtje $(p_1, \dots, p_n)$ stellen we vaak door één letter P voor. p_i heet de i-de component van P.

<u>Def.13</u> Als $P \in R_n$, $Q \in R_n$ dan definieren we

$$d_1(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2},$$

$$d_2(P,Q) = \max_{i=1,\dots,n} |p_i - q_i|,$$

$$d_3(P,Q) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|.$$

Hierin stellen de p_i en q_i de componenten van P en Q voor.

<u>Stelling 10</u>. Met elk der afstandsdefinities d_1, d_2, d_3 is R_n een metrische ruimte. Elk dezer afstandsdefinities geeft (via def.7) dezelfde collectie van open verzamelingen, en (via def.8) dezelfde begrensde verzamelingen.

<u>Opmerking</u>

In stelling 11 t/m stelling 18 wordt met één der afstandsbegrippen d_1, d_2, d_3 gewerkt; het is onverschillig welke.

<u>Stelling 11</u>. Is $P \in R_n$, $P_k \in R_n$ $(k = 1,2,3,\ldots)$, dan geldt

$$P_k \to P \iff \forall_i \; (p_{ki} \to p_i);$$

hierin is $P = (p_1,\ldots,p_n)$, $P_k = (p_{k1},\ldots,p_{kn})$.

<u>Stelling 12</u>. Is $P_k \in R_n$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ dan geldt

$$P_1, P_2, \ldots \text{ is fundamentaalrij} \iff \forall_i \; (p_{1i}, p_{2i}, \ldots \text{ is fundamentaalrij}).$$

<u>Stelling 13</u>. R_n is een volledige metrische ruimte.

<u>Def.14</u> Een deelverzameling V van R_n heet kompakt als V zowel gesloten is als begrensd.

<u>Stelling 14</u>. (Stelling van Heine en Borel) Laat V een kompakt deel van R_n zijn. Er is een collectie S van open deelverzamelingen van R_n gegeven. Deze collectie <u>overdekt</u> V, d.w.z. bij elke $P \in V$ is er een $\Omega \in S$ met $P \in \Omega$.

Dan is er een eindige deelcollectie van S (d.w.z. een verzameling van eindig vele Ω's uit S) die V reeds overdekt.

<u>Stelling 15</u>. Laat $V_1, V_2, \dots$ kompakte, niet-lege deelverzamelingen van R_n zijn, met $R_n \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \dots$. Dan is er een $P \in R_n$ met $\forall_{k \in N} (P \in V_k)$.

<u>Stelling 16</u>. (Stelling van Bolzano en Weierstrass) Is V een kompakt deel van R_n, en is $P_1, P_2, P_3, \dots$ een rij punten van V, dan is er een deelrij $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \dots$ $(i_1 < i_2 < i_3 < \dots)$ en een punt $P \in V$ met $\lim\limits_{k \to \infty} P_{i_k} = P$.

<u>Stelling 17</u>. Zij $V \subset R_n$, $W \subset R_n$, V kompakt, en niet leeg, W gesloten, en niet leeg. Dan is er een getal $d \geqslant 0$ (de zg. <u>afstand</u> van V en W zó dat

$$1^\circ \quad \forall_{P \in V} \, \forall_{Q \in W} \; d(P,Q) \geqslant d,$$

$$2^\circ \quad \exists_{P \in V} \, \exists_{Q \in W} \; d(P,Q) = d.$$

<u>Stelling 18</u>. Is $V \subset R_n$, $V' = \cancel{R_n \setminus V}$ $R \setminus V$, en zijn V en V' beide gesloten, dan is één van beide leeg.

[illegible] verzam. altijd open en altijd gesloten

<u>Opmerking</u>

Alle definities en stellingen betreffende R_n zijn in het geval $n = 1$ te interpreteren als definities en stellingen over de reële getallen, en in het geval $n = 2$ als definities en stellingen over complexe getallen.

Hoofdstuk III. Continue functies.

Notatie: is f een afbeelding van een verzameling V in een verzameling W, en is V_1 een deel van V, dan wordt het zg. beeld van V_1, nl.

$$\{f(P) \mid P \in V_1\}$$

door $f(V_1)$ voorgesteld.

Def.1 Laat R en R' metrische ruimten zijn, V een deel van R, en f een afbeelding van V in R'. Laat Q een punt van de afsluiting $\overline{V}$ zijn. We zeggen dat

$$\lim_{P \in V, P \to Q} f(P) = A$$

is, als A een punt van R' is, en er bij elke omgeving Ω' van A een omgeving Ω van Q bestaat zó dat $f(\Omega \cap V) \subset \Omega'$.

Stelling 1. Is (met de in def.1 gemaakte onderstellingen)

$$\lim_{P \in V, P \to Q} f(P) = A \quad \text{en} \quad \lim_{P \in V, P \to Q} f(P) = B,$$

dan is A = B.

Def.2 Is $V \subset R$, Q een inwendig punt van V, en f een afbeelding van V in R', dan is $\lim_{P \to Q}$ een afkorting voor $\lim_{P \in W, P \to Q}$, met $W = V \setminus \{Q\}$ (d.i. V minus het punt Q zèlf).

Stelling 2. Is $V \subset R$, f een afbeelding van V in R, $Q \in \overline{V}$, dan is de uitspraak "$\lim_{P \in V, P \to Q} f(P) = A$" equivalent met "voor elke rij $P_1, P_2, \ldots$ die aan $P_k \in V$, $P_k \to Q$ voldoet, geldt $f(P_k) \to A$."

Def.3 Zij $V \subset R$, f een afbeelding van V in R', $Q \in V$. We noemen f in Q continu t.o.v. V als

$$\lim_{P \in V, P \to Q} f(P) = f(Q).$$

Def.4 Zij $V \subset R$, f een afbeelding van V in R', Q een inwendig punt van V, dan heet f continu in Q als $\lim_{P \to Q} f(P) = f(Q)$.

Def.5 Zij $V \subset R$, f een afbeelding van V in R'. We noemen f continu op V als f in elk punt van V continu t.o.v. V is.

Stelling 3. (Continuiteit van samengestelde functies) Laat R, R', R'' metrische ruimten zijn en $V \subset R$, $W \subset R'$; f een afbeelding van V in W, g een afbeelding van W in R''. Zij $Q \in V$, f continu t.o.v. V in het punt Q, g continu t.o.v. W in het punt f(Q). Dan is de samengestelde functie gf (die V afbeeldt in R'') continu t.o.v. V in het punt Q.

Stelling 4. Zij n een natuurlijk getal, $V \subset R_n$, V kompakt, f een afbeelding van V in R_1, f continu op V. Dan is f uniform continu op V, d.w.z.

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\delta > 0} \; \forall_{P \in V} \; \forall_{Q \in V} \; (d(P,Q) < \delta \implies d(f(P), f(Q)) < \varepsilon)$$

Stelling 5. Onder de gegevens van stelling 4 geldt dat het beeld f(V) kompakt is.

Stelling 6. Is bovendien V niet leeg, dan is er (onder de gegevens van stelling 4) een $Q \in V$ met de eigenschap

$$\forall_{P \in V} \; (f(P) \leqslant f(Q)),$$

d.w.z. f neemt in Q een absoluut maximum aan.

<u>Stelling 7</u>. Zij R een metrische ruimte, $V \subset R$, en f een afbeelding van V in R_m, met componenten f_1, ..., f_m (d.w.z. $f(P) = (f_1(P), \ldots, f_m(P))$ voor alle $P \in V$; f_1, ..., f_m zijn afbeeldingen van V in R_1). Dan geldt

$$f \text{ continu op } V \Longleftrightarrow f_1, \ldots, f_m \text{ alle continu op } V.$$

<u>Def.6</u> Zij V een verzameling, en R' een metrische ruimte. Laat voor elke j ($j = 1,2,3,\ldots$) f_j een afbeelding zijn van V in R', en ook f zo'n afbeelding. We zeggen

"$f_j \to f$ uniform op V"

als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{k\in N}\ \forall_{j>k}\ \forall_{P\in V}\ (d(f_j(P), f(P)) < \varepsilon).$$

<u>Stelling 8</u>. Laat R en R' metrische ruimten zijn, $V \subset R'$, $Q \in V$, f, f_1, f_2, ... afbeeldingen van V in R', $f_j \to f$ uniform op V, en elke f_j continu in Q t.o.v. V. Dan is f continu in Q t.o.v. V.

<u>Stelling 9</u>. De afbeeldingen van R_2 in R_1, gedefinieerd door

$$(x,y) \to x+y$$
$$(x,y) \to xy$$
$$(x,y) \to x/y$$

zijn continu (de laatste met uitzondering van de punten $(x,0)$).

<u>Stelling 10</u>. De afbeeldingen van R_4 in R_2, gedefinieerd door

$$(x,y,z,w) \to (u,v) \quad \text{met} \quad u+iv = (x+iy) + (z+iw)$$
$$(x,y,z,w) \to (u,v) \quad \text{met} \quad u+iv = (x+iy)(z+iw)$$
$$(x,y,z,w) \to (u,v) \quad \text{met} \quad u+iv = (x+iy)/(z+iw)$$

zijn continu (de laatste met uitzondering van de punten $(x,y,0,0)$.

Stelling 11. (Tussenwaardestelling) Zij V het gesloten interval $[0,1]$, f een afbeelding van V in R_1, f continu op V, $f(0) < 0 < f(1)$. Dan is er een $c \in V$ met $f(c) = 0$.

Def.7 Een niet-lege open deelverzameling V van R_n heet een *gebied* als V niet de vereniging is van twee disjuncte niet-lege open verzamelingen.

Stelling 12. Is V een niet-leeg open deel van R_n, dan geldt: V is dan en slechts dan een gebied als er bij elk paar punten $P \in V$, $Q \in V$ een continue afbeelding f van $[0,1]$ in V bestaat met $f(0) = P$, $f(1) = Q$.

Erwe 300-304 Nee!

Stelling 13. Zij R een topologische ruimte, en f en g continue afbeeldingen van R in de reële getallen (resp. complexe getallen). Dan zijn ook de som h en het product k (gedefinieerd door $\forall_{x \in R}\ h(x) = f(x) + g(x)$, $\forall_{x \in R}\ k(x) = f(x) \cdot g(x)$) continue functies, en in punten waar de noemer niet nul is geldt hetzelfde voor het quotient.

Def.8 Zij $V \subset R_1$, en f een afbeelding van V in R_1. We noemen f *monotoon niet-dalend* als

$$\forall_{x \in V}\ \forall_{y \in V}\quad (x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$$

en *monotoon stijgend* als zelfs

$$\forall_{x \in V}\ \forall_{y \in V}\quad (x < y \Rightarrow f(x) < f(y)).$$

(Analoog monotoon niet-stijgend en monotoon dalend.)

Stelling 14. Is f monotoon niet-dalend op het interval (a,b), en is $c \in (a,b)$, dan bestaan in c de *linker-* en *rechterlimiet* van f, en die zijn resp. $\leqslant f(c)$ en $\geqslant f(c)$:

$$\lim_{x<c,\,x\to c} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x>c,\,x\to c} f(x).$$

<u>Def.9</u> De afstand tussen rechter- en linkerlimiet heet de <u>sprong</u> van f in het punt c.

<u>Stelling 15</u>. Is $V \subset R_1$, bevat V minstens twee getallen, en is

$$\forall_{a\in V}\ \forall_{b\in V}\ \forall_{c\in R_1} \quad (a < c < b \Longrightarrow c \in V),$$

dan is V een <u>interval</u> (d.i. een verzameling van één der typen (p,q), $(p,q]$, $[p,q)$, $[p,q]$, (p,∞), $[p,\infty)$, $(-\infty,q)$, $(-\infty,q]$, $(-\infty,-\infty)$).

<u>Stelling 16</u>. Is f monotoon stijgend en continu op een interval I, dan beeldt f dat interval ééneénduidig af op een interval J, en de inverse afbeelding beeldt J monotoon stijgend en continu af op I.

Rudin p. 92 ev.

<u>Stelling 17</u>. Voor elk complex getal z convergeert de reeks

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots;$$

en de som is een continue functie van z. Stelt men de som door exp (z) voor, dan is voor alle z_1 en z_2

$$\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2).$$

De functie exp beeldt de reële as $(-\infty,\infty)$ ééneénduidig en monotoon stijgend op $(0,\infty)$ af. De inverse afbeelding wordt log genoemd. We hebben $2 < \exp(1) < 3$; noemen we $\exp 1 = e$, dan is voor alle gehele getallen p, q (met $q \neq 0$) $\exp \frac{p}{q}$ het positieve getal waarvan de q-de macht e^p is. (Het kan dus geen kwaad voortaan e^z te schrijven in plaats van exp z.)

Def. 10 Voor alle complexe z is

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots .$$

Stelling 18. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$; $\cos z = \cos(-z)$; $\sin z = -\sin(-z)$; $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$; $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$. Voor reële x zijn $\cos x$ en $\sin x$ reëel, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Er bestaat één en slechts één reëel getal π met de eigenschappen dat $\cos \pi = -1$ en $\cos x$ monotoon dalend voor $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Nu is $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$, $e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.

Ewert I p. 211

Stelling 19. De afbeelding $w = e^{ix}$ beeldt het interval $0 \leqslant x < 2\pi$ ééneénduidig en continu af op de cirkel $|w| = 1$ in het complexe w-vlak; de inverse afbeelding is continu met uitzondering van het punt $w = 1$.

Def. 11 Is w een complex getal $\neq 0$ dan is arg w (het argument van w) de restklasse mod 2π die bestaat uit alle reële getallen x met de eigenschap dat $we^{-ix} = |w|$ ($|w|$ = modulus van w = het positieve getal met $w^2 = u^2 + v^2$, als $w = u + iv$ met u en v reëel).

Stelling 20. Is f een continue afbeelding van het interval $[a,b]$ in het complexe vlak, en is $f(t) \neq 0$ voor alle $t \in [a,b]$, dan is er een continue reële functie ϕ op $[a,b]$, met de eigenschap dat

$$f(t) = e^{\log|f(t)| + i\phi(t)}.$$

Voldoen ψ_1 en ψ_2 beide aan deze eis, dan is $\psi_1 - \psi_2$ een constant geheel veelvoud van 2π.

Def.12 Onder de in stelling 19 genoemde omstandigheden heet $\psi(b) - \psi(a)$ de argumentstoename van f over het interval [a,b].

Stelling 21. Is c een complex getal, dan is

$$\lim_{h\to o} \frac{e^{c+h} - e^{c}}{h} = e^{c},$$

en

$$\lim_{h\to o} \frac{\cos (c+h) - \cos c}{h} = - \sin c, \quad \lim_{h\to o} \frac{\sin (c+h) - \sin c}{h} = \cos c.$$

We mogen hierbij $\lim\limits_{h\to o}$ opvatten als $\lim\limits_{h\in R_1, h\to o}$ maar ook als $\lim\limits_{h\in R_2, h\to o}$

(R_1 = reële getallen, R_2 = complexe getallen).

Hoofdstuk III. Differentiatie.

Def.1 De reële of complexe functie f, gedefinieerd voor $a \leqslant x \leqslant b$, heet in een punt c ($c \in [a,b]$, $c \neq b$) rechtsdifferentieerbaar als

$$\lim_{h \to 0, h > 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

bestaat; deze limiet heet de rechterafgeleide in c. Analoog worden de begrippen "linksdifferentieerbaar" en "linkerafgeleide" gevormd. Bestaan in c zowel linker- als rechterafgeleide, en zijn deze gelijk, dan heet f differentieerbaar in c, en de gemeenschappelijke waarde heet de afgeleide in c (notatie $f'(c)$).

Voorbeeld van een nergens differentieerbare (continue) functie: definieer de functie g door $g(x) = 2|x|$ ($-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$), g periodiek met periode 1. Definieer f door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} g(4^n x);$$

dan is f nergens links- en nergens rechtsdifferentieerbaar.

Stelling 1. (Middelwaardestelling) Zij $b > a$. Is f een reële functie, continu op $[a,b]$, en differentieerbaar in elk punt van (a,b), dan is er een $c \in (a,b)$ met

Erné blz 140 e.v.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Stelling 2. Is $a < b$, en f reëel en differentieerbaar op (a,b), en $f'(x) > 0$ voor alle x op (a,b), dan is f monotoon stijgend op (a,b).

Stelling 3. Is $a < b$, f reëel en differentieerbaar op (a,b) en monotoon stijgend op (a,b), dan is $f'(x) \geqslant 0$ voor alle $x \in (a,b)$.

Stelling 4. Zijn f_1 en f_2 overal op (a,b) differentieerbaar en stemmen f_1' en f_2' overeen, dan is $f_1 - f_2$ een constante.

Stelling 5. Laat f en g reëel en differentieerbaar zijn op (a,b), en $g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$. En

$$(1) \qquad \lim_{x \to a, x>a} f(x) = \lim_{x \to a, x>a} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to a, x>a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Dan is
$$\lim_{x \to a, x>a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Stelling 6. Dezelfde stelling geldt als we (1) vervangen door

$$\lim_{x \to a, x>a} (g(x))^{-1} = 0.$$

Def.2 Laat f een reële of complexe functie van twee veranderlijken zijn, gedefinieerd in een omgeving van het punt (a,b). We noemen f totaal differentieerbaar in het punt (a,b) als er getallen A en B bestaan met

$$\exists_A \exists_B \forall_{\varepsilon>0} \exists_{h>0} \exists_{k>0} \forall_x \forall_y \{(|x-a| < h, |y-b| < k) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - f(a,b) - A(x-a) - B(y-b)| < \varepsilon|x-a| + \varepsilon|y-b|\}.$$

Stelling 7. Is f totaal differentieerbaar in het punt (a,b) dan is f daar continu, en bovendien partieël differentieerbaar naar x en y; de partiële afgeleiden zijn de in Def.2 genoemde A en B.

Stelling 8. Bestaan van f de beide partiële afgeleiden in een omgeving van het punt (a,b), en zijn deze afgeleide functies continu in (a,b), dan is f totaal differentieerbaar in dat punt.

Stelling 9. Zij F totaal differentieerbaar in het punt (0,0). Laat verder φ en ψ functies zijn van één veranderlijke, gedefinieerd in een omgeving van het getal 0 en differentieerbaar in 0. Laat, voor alle t uit een omgeving van 0, de functie g gedefinieerd zijn door $g(t) = F(\varphi(t), \psi(t))$. Dan is g differentieerbaar voor t = 0, en

$$g'(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{0,0} \varphi'(0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{0,0} \psi'(0).$$

Stelling 10. Laat $\frac{\partial f}{\partial g}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ bestaan in een omgeving van (0,0), en neem aan dat de laatstgenoemde functie continu is in (0,0). Dan bestaat ook $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ in dat punt, en

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{in } (0,0).$$

Stelling 11. Laat van de functie f van twee veranderlijken de partiële afgeleiden f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} bestaan in een omgeving van (0,0), en continu zijn in het punt (0,0). Neem aan dat $f'_x = f'_y = 0$ in (0,0). Kort af: $\Delta = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$. Dan geldt:

Is $\Delta(0,0) > 0$, $f''_{xx}(0,0) > 0$, dan heeft f een minimum in (0,0).
Is $\Delta(0,0) > 0$, $f''_{xx}(0,0) < 0$, dan heeft f een maximum in (0,0).
Is $\Delta(0,0) < 0$ dan is er in elke omgeving van (0,0) zowel een punt (x_1,y_1) met $f(x_1,y_1) > f(0,0)$ als een punt (x_2,y_2) met $f(x_2,y_2) < f(0,0)$.