TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

LEBESGUE-INTEGRALEN

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

voorjaar 1966

Bibl Mug

Onderafdeling Wiskunde

Afd. Algemene Wetenschappen

LEBESGUE-INTEGRALEN

College van

prof. dr. N.G. de Bruijn

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Inhoudsbeschrijving

LEBESGUE-INTEGRALEN

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

voorjaar 1966

JdG, 18 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling der Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

LEBESGUE-INTEGRALEN. College van Prof.dr.N.G.de Bruijn.

We beschouwen een verzameling X, die we ook wel "de ruimte" zullen noemen. Elementen van X heten punten. Deelverzamelingen van X heten "puntverzamelingen" of kortweg verzamelingen. Ondanks deze meetkundige terminologie worden geen topologische eigenschappen van de ruimte X gepostuleerd.

Een verzameling van deelverzamelingen van X heet een klasse.

1. Semiringen.

Definitie 1.1. Is Γ een klasse, dan is $\Omega(\Gamma)$ de klasse bestaande uit alle verzamelingen van de vorm $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. ($A_i \in \Gamma$, A_i's disjunct).

Definitie 1.2. De klasse Γ heet een semiring als

1° $\emptyset \in \Gamma$

2° $(A \in \Gamma \;\&\; B \in \Gamma) \Rightarrow (A \cap B) \in \Omega(\Gamma) \;\&\; (A \setminus B) \in \Omega(\Gamma)$.

Voorbeelden.

1. $X = (-\infty, \infty)$; Γ bevat de lege verzameling, en verder alle cellen. Een cel is een interval $(a,b]$, waarbij a en b reëel zijn, met $-\infty < a < b < \infty$.
2. $X = R_n$, Γ als in voorbeeld 1. Een cel is nu een blokje $\{(x_1,\dots,x_n) \mid a_1 < x_1 \leqslant b_1, \dots, a_n < x_n \leqslant b_n\}$.
3. X = een willekeurige verzameling. Γ bevat alle deelverzamelingen die uit nul of één element van X bestaan.

<u>Stelling 1.1</u>. Is Γ een semiring, en schrijven we Ω i.p.v. $\Omega(\Gamma)$, dan is

1° $\Gamma \subset \Omega$

2° $A \in \Gamma$ & $B \in \Gamma \Rightarrow (A \cup B) \in \Omega(\Gamma)$

3° $P_i \in \Omega$, P_i's disjunct $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \in \Omega$

4° $P \in \Omega$, $A \in \Gamma \Rightarrow (P \setminus A) \in \Omega$ & $(P \cap A) \in \Omega$.

5° $A_i \in \Gamma$ $(i=1,2,3,\ldots)$, dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$.

<u>Bewijs</u>.

1° $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$, dus A heeft de vorm $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ met $A_i \in \Gamma$.

2° $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, enz.

3° triviaal.

4° Zij $P \in \Omega$, dus $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, A_i's $\in \Gamma$ en onderling disjunct. Verder $A \in \Gamma$. Dan is $P \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A)$. Stel $A_i \setminus A = P_i$, dan $P_i \in \Omega$, P_i's onderling disjunct. Derhalve ligt de vereniging der P_i's ook in Ω. Analoog: $(P \cap A) \in \Omega$.

5° De vereniging is in de volgende disjuncte delen te splitsen: A_1, $A_2 \setminus A_1$, $(A_3 \setminus A_2) \setminus A_1, \ldots$, en blijkens het voorafgaande behoort elk van deze delen tot $\Omega(\Gamma)$.

2. <u>Maat op een semiring</u>.

<u>Definitie 2.1</u>. Laat Γ een semiring zijn en laat aan elke $A \in \Gamma$ een getal $\mu(A)$ zijn toegevoegd. Er zij voldaan aan

1° $0 \leqslant \mu(A) \leqslant \infty$ voor alle $A \in \Gamma$.

2° $\mu(\emptyset) = 0$.

3° Is $A \in \Gamma$, $A_i \in \Gamma (i=1,2,\ldots)$, A_i's disjunct, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dan is

$$\mu(A) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Dan heet μ een <u>maat</u> op Γ. Geldt bovendien dat

4° X de vereniging is van aftelbaar vele disjuncte A_i's met $A_i \in \Gamma$ en $\mu(A_i) < \infty$ voor alle i, dan heet de maat μ <u>sigmafiniet</u>.

Voorbeelden.

1. $X = (-\infty, \infty)$; Γ bevat de lage verzameling en alle cellen. Op $(-\infty, \infty)$ is een reële, monotoon niet-dalende functie g gegeven. Nu is μ gedefinieerd door $\mu(\emptyset) = 0$, en (als $-\infty < a < b < \infty$)

$$\mu((a,b]) = g(b+0) - g(a+0);$$

hierbij betekent $g(b+0)$ resp. $g(a+0)$ de limiet van $g(x)$ wanneer x van rechts af tot b resp. a nadert. We zullen bewijzen dat μ een maat op Γ is (deze heet de Lebesgue-Stieltjes-maat; in het bijzondere geval dat $g(x) = x$ (voor alle x) krijgen we de "gewone" Lebesgue-maat).

Laat A een cel zijn die de vereniging is van een aftelbaar stel disjuncte cellen $A_1, A_2, \ldots$. Noteer $A = (a,b]$, $A_i = (a_i, b_i]$. Nagenoeg triviaal is dat $\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$, want er zijn cellen $B_1, \ldots, B_m$ te vinden zo dat

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m$$

een disjuncte splitsing van A is. Dus $\Sigma_1^\infty \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$. Neem nu eens aan dat $\Sigma_1^\infty \mu(A_i) < \mu(A)$. Dan is er een getal $p > 0$, zó dat voor alle n geldt $p + \Sigma_1^n \mu(A_i) < \mu(A)$.

Verkort A tot $A^* = [a+\delta, b]$ en verleng elke A_i tot $A_i^* = (a_i, b_i + \delta_i)$. Daarbij worden $\delta > 0$ en $\delta_i > 0$ zó gekozen dat $g(a+\delta) < \frac{1}{2} p + g(a+0)$, $g(b_i + \delta_i) < 2^{-i-1} p + g(b_i + 0)$. $A_1^*, A_2^*, \ldots$ zijn open, en A^* is kompakt. Volgens de stelling van Heine-Borel is er nu een n zó dat $(A_1^* \cup \ldots \cup A_n^*) \supset A^*$.

We maken van A_i^* weer een cel A_i^{**} door het rechtereindpunt toe te voegen en van A^* een cel A^{**} door het linkereindpunt weg te laten. Nog wordt A^{**} door $A_1^{**}, \ldots, A_n^{**}$ overdekt (niet noodzakelijk disjunct). En $\mu(A^{**}) > \mu(A) - \frac{1}{2} p$, $\mu(A_i^{**}) < \mu(A_i) + 2^{-i-1} p$.

Nu blijkt dat

$$\mu(A_1^{**}) + \ldots + \mu(A_n^{**}) - \mu(A^{**}) < -p + \tfrac{1}{2}p + \Sigma_1^n 2^{-i-1}p < 0.$$

We kunnen een stel $C_1, \ldots, C_n$ vinden ($C_i \in \Gamma$) zó dat $C_i \subset A_i^{**}$, terwijl de C's een disjuncte splitsing van A opleveren. Nu is $\mu(C_1) + \ldots + \mu(C_n) = \mu(A)$, in strijd met het voorafgaande.

2. X = willekeurig. Γ bestaat uit alle deelverzamelingen. Voor $A \in \Gamma$ is $\mu(A)$ = aantal elementen van A als A eindig is, en $\mu(A) = \infty$ als A oneindig is.

3. Norm van een reële functie.

X is een ruimte met semiring Γ, daarop een sigmafiniete maat.

Definitie 3.1. Als $S \subset X$, dan is de karakteristieke functie van S de op X gedefinieerde functie die 1 is op S en 0 op $X \setminus S$. Deze wordt gewoonlijk met χ_S aangeduid.

Gemakshalve zullen we de karakteristieke functie van S ook met S aanduiden. Dus $S(x) = 1$ als $x \in S$, $S(x) = 0$ als $x \notin S$.

Voorbeeld. Als S de vereniging is van $S_1, S_2, \ldots$, en als deze S_i's onderling disjunct zijn, dan is $S = \Sigma_1^\infty S_i$.

Als de vereniging van $T_1, T_2, \ldots$ de verzameling T bedekt, dan is $T \leqslant \Sigma_1^\infty T_i$.

Definitie 3.2. Zij f een op X gedefinieerde reële functie. We beschouwen alle mogelijke functies van de vorm $\Sigma_1^\infty \alpha_i A_i$, met $0 \leqslant \alpha_i < \infty$, $A_i \in \Gamma_i$, en met de eigenschap dat

$$\Sigma_1^\infty \alpha_i A_i(x) \geqslant |f(x)| \qquad \text{voor alle } x \in X.$$

Bij elk dezer sommen vormen we $\Sigma_1^\infty \alpha_i\, \mu(A_i)$. Het infimum van al al deze uitdrukkingen heet de <u>norm</u> van f (notatie $\|f\|$). Dus $0 \leqslant \|f\| \leqslant \infty$.

<u>Opmerking</u>. Bij elke f bestaat minstens één som $\Sigma_1^\infty \alpha_i A_i \geqslant |f|$. We kiezen nl. een stel $A_1, A_2, \dots$ met $A_1 + A_2 + \dots \geqslant X$, en nemen $A_1 + A_1 + A_2 + A_1 + A_2 + A_3 + + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_1 + \dots$.

<u>Stelling 3.1</u>.

1° Is $f(x) = 0$ voor alle x, dan is $\|f\| = 0$.

2° f en $|f|$ hebben dezelfde norm ($|f|$ is de functie met waarden $|f|(x) = |f(x)|$).

3° Is α een reëel getal, dan is $\|\alpha f\| = |\alpha| . \|f\|$.

4° Is $|f| \leqslant \Sigma_1^\infty |f_j|$, dan is $\|f\| \leqslant \Sigma_1^\infty \|f_j\|$; in het bijzonder is $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

<u>Bewijs</u>.

1° Neem voor alle A_i de lege verzameling, en de α_i alle nul. Dan is ook $\Sigma_1^\infty \alpha_i \mu(A_i) = 0$, enz.

2° In de definitie van $\|f\|$ komt slechts de absolute waarde van f voor, en daar de absolute waarde van $|f|$ weer $|f|$ is, hebben f en $|f|$ dezelfde norm.

3° Is $\alpha = 0$ dan is $\|\alpha f\| = \|0\| = 0$ volgens 1°; is $\alpha \neq 0$ dan vinden we <u>alle</u> voor de definitie van $\|\alpha f\|$ benodigde sommen $\Sigma_1^\infty \beta_i A_i(x)$ door de in de definitie van $\|f\|$ benodigde sommen met $|\alpha|$ te vermenigvuldigen. De verzameling der getallen waarvan bij de definitie van $\|\alpha f\|$ het infimum genomen moet worden is dus te vinden door de getallen van de overeenkomstige verzameling bij f allemaal met $|\alpha|$ te vermenigvuldigen.

4° We mogen aannemen dat alle $\|f_i\|$ eindig zijn, want anders is de bewering triviaal. Kies nu $\varepsilon > 0$. Bij elke j zoeken we α_{ij}'s en A_{ij}'s met $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} A_{ij} \geqslant |f_j|$, $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} \mu(A_{ij}) \leqslant \|f_j\| + 2^{-j} \varepsilon$. Nu is $\Sigma_{i=1}^{\infty} \Sigma_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} A_{ij} \geqslant |f|$, en $\Sigma_{i=1}^{\infty} \Sigma_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \mu(A_{ij}) \leqslant$ $\leqslant \Sigma_{j=1}^{\infty} \|f_j\| + \varepsilon$. Het linkerlid van de laatste ongelijkheid in één der sommen uit de collectie waarvan $\|f\|$ het infimum is. Dus $\|f\| \leqslant \Sigma_{j=1}^{\infty} \|f_j\| + \varepsilon$. Daar dit voor elke $\varepsilon > 0$ geldt, volgt het gestelde.

4. Trapfuncties.

Γ is een semiring in X, μ daarop een sigmafiniete maat.

Definitie 4.1. Een trapfunctie is een op X gedefinieerde reële functie die kan worden geschreven in de gedaante $\Sigma_1^{\infty} \beta_i B_i$, met $-\infty < \beta_i < \infty$, $B_i \in \Gamma$, waarbij voldaan is aan $X = \Sigma_1^{\infty} B_i$ (hetgeen betekent dat de B_i's twee aan twee disjunct zijn en samen X vormen) en bovendien voldaan is aan de voorwaarde $\Sigma_1^{\infty} |\beta_i| \mu(B_i) < \infty$.

Merk op dat de disjunctie niet was geëist bij de som $\Sigma \alpha_i A_i$ in def. 3.2; daar staat tegenover dat thans de β's ook negatief mogen zijn.

We moeten er rekening mee houden dat een trapfunctie vaak op meer dan één manier in de vorm $\Sigma \beta_i B_i$ kan worden geschreven.

Stelling 4.1. Zijn s en t trapfuncties, en zijn β en γ eindige getallen, dan is ook $\beta s + \gamma t$ een trapfunctie.

Bewijs. Zij $s = \Sigma_1^{\infty} \beta_i B_i$, $t = \Sigma_1^{\infty} \gamma_j C_j$ met $B_i \in \Gamma$, $C_j \in \Gamma$,

$\Sigma_1^\infty B_i = \Sigma_1^\infty C_j = X$, $\Sigma|\beta_i|\,\mu(B_i)$ en $\Sigma|\gamma_j|\,\mu(C_j)$ beide convergent. Nu zijn ook alle doorsneden $D_{ij} = B_i \cap C_j$ onderling disjunct (in plaats van $B_i \cap C_j$ mogen we ook B_iC_j schrijven, want de karakteristieke functie van D_{ij} is het product der karakteristieke functies van B_i en C_j). Verder is $X = \Sigma_{i=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty D_{ij}$. Laat $D_{ij} = \Sigma_{k=1}^\infty E_{ijk}$ zijn met $E_{ijk} \in \Gamma$ (dit kan, want B_i en C_j behoren tot Γ). Nu is $X = \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k E_{ijk}$, en $\beta s + \gamma t = \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k (\beta\beta_i + \gamma\gamma_j) E_{ijk}$.
En $\Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k |(\beta\beta_i + \gamma\gamma_j)|\,\mu(E_{ijk}) \leqslant |\beta|\,\Sigma_i|\beta_i|\,\mu(B_i) + |\gamma|\Sigma_j|\gamma_j|\mu(C_j)$, want $\mu(B_i) = \Sigma_j \Sigma_k \mu(E_{ijk})$ enz.

<u>Stelling 4.2</u>. Is $s = \Sigma\beta_iB_i$, $t = \Sigma\gamma_jC_j$, met $X = \Sigma_iB_i = \Sigma_jC_j$, $B_i \in \Gamma$, $C_j \in \Gamma$, $\Sigma_i|\beta_i|\,\mu(B_i) < \infty$, en ~~is~~ $s(x) \geqslant t(x)$ voor alle x, dan is $\Sigma_j|\gamma_j|\,\mu(C_j) < \infty$, $\Sigma\beta_i\mu(B_i) \geqslant \Sigma\gamma_j\mu(C_j)$.

<u>Bewijs</u>. We gebruiken de notaties uit het bewijs van st. 4.1, nu met $s = t$. Voor $x \in E_{ijk}$ is $s(x) = \beta_i$, $t(x) = \gamma_j$, dus als E_{ijk} niet leeg is, is $\beta_i \geqslant \gamma_j$. Dus steeds $\beta_i\mu(E_{ijk}) \geqslant \gamma_j\mu(E_{ijk})$. Nu is $\Sigma_i\beta_i\mu(B_i) = \Sigma_{ijk}\beta_i\mu(E_{ijk}) \geqslant \Sigma_{ijk}\gamma_j\,\mu(E_{ijk}) = \Sigma_j\gamma_j\,\mu(C_j)$. De sommatievolgorde mag worden verwisseld op grond van de absolute convergentie.

<u>Definitie 4.2</u>. Is $t = \Sigma\beta_iB_i$ (met $\Sigma B_i = X, \Sigma|\beta_i|\,\mu(B_i) < \infty$), dan heet $\Sigma\beta_i\,\mu(B_i)$ de <u>integraal</u> van t (voorlopige notatie $L(t)$).
Uit st.4.2. volgt dat deze definitie onafhankelijk is van de speciale representatie van t. Hebben we nl. $\Sigma\beta_iB_i = \Sigma\gamma_jC_j$, dan volgt $\Sigma\beta_i\,\mu(B_i) \geqslant \Sigma\gamma_j(C_j)$, doch evengoed $\Sigma\gamma_j\,\mu(C_j) \geqslant \Sigma\beta_i\mu(B_i)$.

<u>Stelling 4.3</u>. Met de notaties van st. 4.1. is $L(\beta s + \gamma t) = \beta L(s) + \gamma L(t)$.

Bewijs. Beide leden zijn te schrijven als

$$\Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k (\beta\beta_i + \gamma\gamma_j)\mu(E_{ijk})$$

(zie het bewijs van st.4.1), enz.

Stelling 4.4. Is t een trapfunctie en $t(x) \geqslant 0$ voor alle x, dan is $L(t) = \|t\|$ (en dus $\|t\| < \infty$).

Bewijs. Zij $t = \Sigma \beta_i B_i$, $X = \Sigma B_i$ dan alle $\beta_i \geqslant 0$, en $L(t) = \Sigma \beta_i \mu(B_i)$. Eén der in de definitie van $\|t\|$ benodigde sommen is $\Sigma \beta_i B_i$ zelf, dus $\|t\| \leqslant L(t)$.

Om $L(t) \leqslant \|t\|$ te bewijzen laten we iets algemener zien: als $t_1, t_2, \ldots$ niet-negatieve trapfuncties zijn, en $t_1 + t_2 + \ldots \geqslant t$, dan is $L(t_1) + L(t_2) + \ldots \geqslant L(t)$. (Specialisatie tot $t_i = \alpha_i A_i$ geeft dan wat we nodig hebben).

We bewijzen eerst:

Hulpstelling. Zijn s, s_1, s_2, ... niet-negatieve trapfuncties, $s_i s_j = 0$ $(i \neq j)$ en $s = \Sigma_1^\infty s_i$, dan is $L(s) = \Sigma_1^\infty L(s_i)$.

Bewijs. Splits s : $s = \Sigma \alpha_i A_i$, en splits elke s_i: $s_i = \Sigma_j \beta_{ij} B_{ij}$. Dan is $s = \Sigma_{i,j} \beta_{ij} B_{ij}$ **een splitsing van die (afgezien van 'n detail,** zie onder) toegelaten is voor de berekening van $L(s)$, dus $L(s) = \Sigma_{i,j} \beta_{ij}\, \mu(B_{ij}) = \Sigma_i (\Sigma_j \beta_{ij}\, \mu(B_{ij})) = \Sigma_i L(s_i)$.

Er is een kleine moeilijkheid gelegen in de B_{ij} waarbij $\beta_{ij} = 0$. De bovengenoemde splitsing moet daarom worden vervangen door

$$s = \Sigma^*_{i,j} \beta_{ij} B_{ij} + \Sigma^{**}_i \alpha_i A_i .$$

Hier betekent Σ^* dat de termen met $\beta_{ij} = 0$ zijn weggelaten, en Σ^{**} dat de termen met $\alpha_i > 0$ zijn weggelaten.

Laat nu $t, t_1, t_2, \ldots$ niet-negatieve trapfuncties zijn met $t_1 + t_2 + \ldots \geqslant t$. De onderstelling $t_i t_j = 0$ wordt nu niet gemaakt.

Kies een getal $\gamma (0<\gamma<1)$. Laat u_n de functie zijn beschreven door

$$u_n(x) = \begin{cases} t(x) & \text{als } t_1(x) + \ldots + t_n(x) \geqslant \gamma t(x), \\ 0 & \text{als } t_1(x) + \ldots + t_n(x) < \gamma\, t(x). \end{cases}$$

Nu is niet moeilijk te bewijzen dat elke u_n een trapfunctie is. Met $s_1 = u_1$, $s_2 = u_2 - u_1$, $s_3 = u_3 - u_2, \ldots$ is dus voldaan aan de eisen van de hulpstelling, want voor elke x geldt $u_n(x) = t(x)$ o.d.d. Dus $L(s_1) + L(s_2) + \ldots = L(t)$, waaruit volgt $L(u_n) \to L(t)$. Maar duidelijk is $t_1 + \ldots + t_n \geqslant \gamma u_n$, dus $L(t_1) + L(t_2) + \ldots \geqslant \gamma \lim L(u_n)$, dus $L(t_1) + L(t_2) + \ldots \geqslant \gamma L(t)$. Daar γ willekeurig was, blijkt $L(t_1) + L(t_2) + \ldots \geqslant L(t)$, q.e.d.

<u>Stelling 4.5</u>. Is t een trapfunctie, dan is ook $|t|$ (gedefinieerd door $|t|(x) = |t(x)|$) een trapfunctie. Zijn s en t trapfuncties, dan zijn ook $\max(s,t)$ en $\min(s,t)$ trapfuncties ($\max(s,t)$ is de functie die aan x toevoegt het grootste van de getallen $s(x)$ en $t(x)$).

<u>Bewijs</u>. De uitspraak over $|t|$ volgt direct uit def. 4.1. De uitspraken over max en min volgen nu uit st.4.1., want $\max(s,t) = \frac{1}{2}(s+t) + \frac{1}{2}|s-t|$, $\min(s,t) = \frac{1}{2}(s+t) - \frac{1}{2}|s-t|$.

<u>Stelling 4.6</u>. Voor elke trapfunctie geldt $|L(t)| \leqslant \|t\|$.

<u>Bewijs</u>. Zij $t_1 = |t|$, dan is $|L(t)| \leqslant L(t_1)$ (direct uit de definitie van $L(t)$), en $L(t_1) = \|t_1\|$ (st.4.4), $\|t_1\| = \|t\|$ (st.3.1,2^o).

5. <u>Sommeerbare functies</u>.

μ is een sigmafiniete maat op een semiring Γ in X.

<u>Definitie 5.1</u>. Een op X gedefinieerde reële functie f heet <u>sommeerbaar</u> als er bij elke $\varepsilon > 0$ een trapfunctie t bestaat met $\|f-t\| < \varepsilon$.

<u>Stelling 5.1</u>. Trapfuncties zijn sommeerbaar.

<u>Bewijs</u>. Volgt uit $\|0\| = 0$.

Stelling 5.2. Is f sommeerbaar, dan is $\|f\| < \infty$.

Bewijs. Kies een $\varepsilon > 0$ en daarbij een trapfunctie t. Nu is (st.3.1, 4° en st. 4.4) $\|f\| \leqslant \|f-t\| + \|t\| < \varepsilon + \|t\| < \infty$.

Stelling 5.3. Is f sommeerbaar dan is er precies één getal ξ met de eigenschap dat voor elke trapfunctie t geldt $|\xi - L(t)| \leqslant \|f-t\|$.

Bewijs. Kies $\varepsilon = n^{-1}$, en daarbij een trapfunctie t_n met $\|f-t_n\| < n^{-1}$. Nu is, als $n > m$, $\|t_n - t_m\| \leqslant 2m^{-1}$, dus (st.4.6) $|L(t_n - t_m)| \leqslant 2m^{-1}$. Daar $L(t_n - t_m) = L(t_n) - L(t_m)$ (st.4.3) zien we dat de getallen $L(t_1), L(t_2), \ldots$ een fundamentaalrij vormen. Noem $\lim L(t_n) = \xi$.

Zij t een willekeurige trapfunctie. Dan is voor elke n
$|L(t_n) - L(t)| \leqslant \|t_n - t\| \leqslant \|t_n - f\| + \|f - t\|$.
Door $n \to \infty$ te laten gaan zien we dat $|\xi - L(t)| \leqslant \|f-t\|$.

Het is duidelijk dat er maar één getal ξ is met genoemde eigenschap, want uit $|\xi - L(t_n)| \leqslant \|f-t_n\| < n^{-1}$ volgt dat $\xi = \lim L(t_n)$.

Opmerking. Is f zelf een trapfunctie dan kunnen we de in st. 5.3 genoemde t gelijk aan f nemen, zodat we vinden $\xi = L(f)$. We hebben nu dus het recht om te definiëren:

Definitie 5.2. Is f sommeerbaar, dan wordt het getal ξ uit st. 5.3 met $L(f)$ aangeduid en de integraal van f genoemd.

Stelling 5.4. Zijn f en g sommeerbaar, en zijn α en β (eindige) reële getallen, dan is ook $\alpha f + \beta g$ sommeerbaar, en $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$.

Bewijs. Zoek bij f en g trapfuncties s_n en t_n met $\|f-s_n\| < n^{-1}$, $\|g-t_n\| < n^{-1}$. Dan is $\|\alpha f + \beta g\| - (\alpha s_n + \beta t_n)\| \leqslant \|\alpha f - \alpha s_n\| + \|\beta g - \beta t_n\| \leqslant n^{-1}(|\alpha| + |\beta|)$. Dus $\alpha f + \beta g$ is sommeerbaar. En $L(\alpha f + \beta g) = \lim L(\alpha s_n + \beta t_n) = \alpha \lim L(s_n) + \beta \lim L(t_n) = \alpha L(f) + \beta L(g)$.

Stelling 5.5. Is f sommeerbaar, dan is $|L(f)| \leqslant \|f\|$. Is bovendien $f(x) \geqslant 0$ voor alle x, dan is $L(f) = \|f\|$.

Bewijs. De eerste bewering volgt door in st. 5.3 $t=0$ te nemen. Zij verder $f \geqslant 0$. Neem t_n met $\|f-t_n\| < n^{-1}$. Is $s_n = |t_n|$, dan is $|f-s_n| \leqslant |f-t_n|$, dus ook $\|f-s_n\| < n^{-1}$. Dus $|L(f) - L(s_n)| < n^{-1}$. St. 4.4 zegt $L(s_n) = \|s_n\|$, dus

$|L(f) - \|f\|| < |\|f\| - \|s_n\|| + n^{-1} < \|f-s_n\| + n^{-1} < 2n^{-1}$.

Opmerking. In het bijzonder is dus $|L(f)| \leqslant L(|f|)$.

Stelling 5.6. Is f sommeerbaar, dan is ook $|f|$ sommeerbaar. Zijn f en g beide sommeerbaar, dan zijn ook $\max(f,g)$ en $\min(f,g)$ sommeerbaar.

Bewijs. Als t een trapfunctie is met $\|f-t\| < \varepsilon$, dan is ook $|t|$ een trapfunctie, en $\| |f| - |t| \| < \varepsilon$ (want $||f|-|t|| \leqslant |f-t|$). Dus $|f|$ is sommeerbaar. De beweringen over max en min kunnen bewezen worden zoals bij st. 4.5.

6. Gemajoreerde convergentie.

μ is een sigmafiniete maat op een semiring Γ in X.

Stelling 6.1. Zij $f_n \geqslant 0$, f_n sommeerbaar. Laat de reeks $f_1(x)+f_2(x)+\dots$ voor alle x convergeren, en $F(x)$ tot som hebben. Neem aan dat $\|F\| < \infty$. Dan is F sommeerbaar, en

$$L(F) = L(f_1) + L(f_2) + \dots .$$

Bewijs. Kies een $\varepsilon > 0$. Bij f_n kiezen we een trapfunctie t_n met $\|f_n - t_n\| < 2^{-n}\varepsilon$. We mogen aannemen dat $t_n \geqslant 0$ (neem anders $s_n = |t_n|$).

We hebben nu

$$\|t_1\| + \dots + \|t_n\| = L(t_1) + \dots + L(t_n) = L(t_1 + \dots + t_n) =$$

$$= \|t_1 + \dots + t_n\| < \|f_1 + \dots + f_n\| + \|t_1 - f_1\| + \dots + \|t_n - f_n\| \leqslant$$

$< \|F\| + \varepsilon(2^{-1} + \dots + 2^{-n}) \leqslant \|F\| + \varepsilon$.

Hieruit volgt dat de reeks $\|t_1\| + \|t_2\| + \dots$ convergeert. Daar $\|f_1 - t_1\| + \|f_2 - t_2\| + \dots$ convergeert, is nu ook $\|f_1\| + \|f_2\| + \dots$ convergent. We hebben dus n zó te kiezen dat $\|f_{n+1}\| + \|f_{n+2}\| + \dots < \varepsilon$ is, en dan is ook $\|F - (f_1 + \dots + f_n)\| = \|f_{n+1} + f_{n+2} + \dots\| < \varepsilon$ (st. 3.1, 4°).

Nu is $\|F - (t_1 + \dots + t_n)\| < \varepsilon + \|f_1 - t_1\| + \|f_2 - t_2\| + \dots + \|f_n - t_n\| < 2\varepsilon$. Bij elke $\varepsilon > 0$ is dus een trapfunctie $t (= t_1 + \dots + t_n)$ te vinden met $\|F - t\| < 2\varepsilon$. Dus F is sommeerbaar.

Bij gegeven $\varepsilon > 0$ was voor voldoend grote n: $\|F - (f_1 + \dots + f_n)\| < \varepsilon$, en daaruit volgt (st. 5.4 en st. 5.5) $\|L(f) - (L(f_1) + \dots + L(f_n))\| < \varepsilon$ voor voldoend grote n. Derhalve is $L(F) = L(f_1) + L(f_2) + \dots$.

<u>Definitie 6.1</u>. We zeggen dat een rij functies $f_1, f_2, \dots$ op X <u>gemajoreerd convergeert</u> naar de functie f, als $\lim f_n(x) = f(x)$ voor elke $x \in X$ (we noemen dit <u>puntsgewijze</u> convergentie; er is geen uniformiteit geëist) en er een sommeerbare functie g bestaat zó dat

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \quad \text{voor alle n en alle x.}$$

<u>Stelling 6.2</u>. Zijn $f_1, f_2, \dots$ sommeerbaar, en convergeert f_n gemajoreerd naar f, dan is ook f sommeerbaar, en $\lim L(f_n) = L(f)$.

<u>Bewijs</u>. Zij $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ voor alle n en alle x, g sommeerbaar. In het geval dat $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$ volgt de stelling direct uit st. 6.1, want dan is $(f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \dots = f - f_1$, en $\|f - f_1\| \leqslant \|f\| + \|f_1\| \leqslant$ $\leqslant \|g\| + \|g\| < \infty$. Als $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \dots$ heeft men natuurlijk een analoge conclusie. In deze gevallen spreken we van monotone gemajoreerde convergentie.

We nemen nu het algemene geval. Noem, als $m \leqslant n$,

$$\max(f_m, f_{m+1}, \dots, f_n) = h_{mn}.$$

Dan is $-g \leqslant h_{mn} \leqslant g$, en h_{mn} sommeerbaar (st.5.6). Verder is $h_{mm} \leqslant h_{m,m+1} \leqslant h_{m,m+2} \leqslant \ldots \leqslant g$, dus $\lim_{n\to\infty} h_{mn}$ bestaat. We noemen die limiet h_m. We zien gemakkelijk in dat voor elke x geldt $h_m(x) \to f(x)$ als $m \to \infty$. De convergentie $h_{mn} \to h_m$ $(n \to \infty)$ is monotoon gemajoreerd, dus h_m is sommeerbaar.

We hebben $h_{mn} \geqslant h_{m+1,n}$ (als $n \geqslant m+1$), en dus ook $h_m \geqslant h_{m+1}$. Verder zijn alle h_m's $\geqslant -g$; de convergentie $h_m \to f$ is weer monotoon gemajoreerd, zodat f sommeerbaar is.

We kiezen $\varepsilon > 0$. Daar $L(h_m) \to L(f)$, kunnen we m zó groot nemen dat $L(h_m) \leqslant L(f) + \varepsilon$. Daar $f_n \leqslant h_{mn} \leqslant h_m$ voor alle $n > m$, is nu $L(f_n) \leqslant L(f) + \varepsilon$ voor alle $n > m$. Op dezelfde manier bewijzen we dat $L(f_n) \geqslant L(f) - \varepsilon$ is voor alle voldoend grote n, en daarmee is (aangezien ε willekeurig gekozen was) aangetoond dat $L(f_n) \to L(f)$.

7. Meetbare functies.

μ is een sigmafiniete maat op een semiring Γ in X.

Definitie 7.1. Een overal op X gedefinieerde reële functie f heet meetbaar als er een rij sommeerbare functies $f_1, f_2, \ldots$ is zó dat puntsgewijs $f_n(x) \to f(x)$.

Stelling 7.1. Is f sommeerbaar, dan is f meetbaar.

Stelling 7.2. Zijn f en g meetbaar, α en β reëel, dan zijn ook $\alpha f + \beta g$, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ meetbaar.

Bewijs. Als $f_n \to f$, $g_n \to g$, dan $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$, terwijl $\alpha f_n + \beta g_n$ sommeerbaar is. De andere uitspraken worden op analoge wijze bewezen.

Hulpstelling. Is $g \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, g meetbaar, h sommeerbaar, dan is $\min(g,h)$ sommeerbaar.

Bewijs. Is $g_n \to g$, g_n sommeerbaar, dan is ook $|g_n|$ sommeerbaar, en dan convergeert $\min(|g_n|, h)$ gemajoreerd (n.l. door h) naar $\min(g,h)$.

Stelling 7.3. Is f meetbaar en $\|f\| < \infty$, dan is f sommeerbaar.

Bewijs. Laat f meetbaar zijn, $\|f\| < \infty$, en bovendien $f \geqslant 0$. Nu is er een rij sommeerbare functies $f_1, f_2, \ldots$ met $f_n \geqslant 0$, $f_n \to f$. Noem $\min(f_n, f) = g_n$, dan is g_n sommeerbaar blijkens de hulpstelling. Is verder $k_n = \max(g_1, \ldots, g_n)$, dan is (blijkens st. 5.6) k_n sommeerbaar, $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant f$, $k_n \to f$. Uit st. 6.1, toegepast op $k_1 + (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2) + \ldots$, blijkt nu direct dat f sommeerbaar is.

De beperking $f \geqslant 0$ is niet wezenlijk. Is er niet aan voldaan, dan is f te schrijven als $\max(f, 0) - \max(-f, 0)$; beide stukken zijn meetbaar, $\geqslant 0$ en eindig van norm.

Stelling 7.4. Zijn $f_1, f_2, \ldots$ alle meetbaar, is $f_n \to f$ (puntsgewijs), dan is f meetbaar.

Bewijs. Is $f \geqslant 0$, f meetbaar, dan is er een rij sommeerbare functies $h_1, h_2, \ldots$ met $h_n \geqslant 0$, $h_1 + h_2 + \ldots = f$ (zie het begin van het bewijs van st. 7.3).

Is nu $f = f_1 + f_2 + \ldots$, $f_n \geqslant 0$, f_n meetbaar, dan is f de som van een dubbelreeks van niet-negatieve sommeerbare functies. Derhalve is f meetbaar.

Hieruit leren we: Is f de limiet van een monotone rij van meetbare functies, dan is f meetbaar. Het algemene geval is hierop weer terug te brengen: Is $f_n \to f$, en is $g_{mn} = \max_{m \leqslant k \leqslant n} f_k$, dan convergeert (bij vaste m) g_{mn} monotoon naar een limiet $g_m = \sup_{k \geqslant m} f_k$, zodat elke g_m meetbaar is. Als $m \to \infty$ convergeert g_m monotoon naar f, zodat ook f meetbaar is.

Wanneer wij ons tot niet-negatieve meetbare functies beperken, kunnen we ook aan niet sommeerbare functies een integraal toekennen, die zonder meer met de norm blijkt samen te vallen.

Definitie 7.2. Is f meetbaar, $\geqslant 0$ en niet sommeerbaar, dan schrijven we $L(f) = \infty$ en $\int_X f\,d\mu = \infty$.

Stelling 7.5. Zijn f, f_1, f_2,... meetbaar en $\geqslant 0$, dan is

(1) $L(\alpha f) = \alpha L(f)$ als $\alpha \geqslant 0$

(2) $L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$

(3) Is $f_1 + f_2 + \ldots = f$, dan is $L(f_1) + L(f_2) + \ldots = L(f)$.

(4) $L(f) = \|f\|$.

Bewijs. We beperken ons tot (3) en (4). Eerst (3): Is f sommeerbaar, dan is elke f_n sommeerbaar (st.3.1), en dan voert st. 6.1 tot het doel. Is $L(f) = \infty$, en is er een n met $L(f_n) = \infty$, dan zijn we eveneens klaar. Is tenslotte $L(f) = \infty$, en elke $L(f_n)$ eindig, dan is volgens st. 5.5 en st. 3.1 $\|f\| \leqslant \Sigma_1^\infty \|f_n\| = \Sigma_1^\infty L(f_n)$; was nu $\Sigma_1^\infty L(f_n) < \infty$, dan was $\|f\| < \infty$, dus volgens st. 7.3 was $L(f) < \infty$, waarmee een tegenspraak bereikt is.

Bewering (4) volgt direct uit st. 5.5 en st. 7.3.

Stelling 7.6. Constanten zijn meetbare functies.

Bewijs. Daar μ σ-finiet is, is $X = A_1 + A_2 + \ldots$, met elke A_i eindige maat. Elke A_i is een trapfunctie, dus sommeerbaar. Pas nu st. 7.4 toe.

Stelling 7.7. Is $A \in \Gamma$, dan is de functie A meetbaar, met $\mu(A) = L(A)$.

Bewijs. $X = A_1 + A_2 + \ldots$, met $\mu(A_i) < \infty$, dan $A = AA_1 + AA_2 + \ldots$, en elke AA_i ($= \min(A, A_i)$) is sommeerbaar. Dus A is meetbaar, en $L(A) = L(AA_1) + L(AA_2) + \ldots$ (st.7.5). Elke AA_i ligt in $\Omega(\Gamma)$, dus

A heeft de vorm $A = B_1 + B_2 + \ldots$ met $B_i \in \Gamma$, $\mu(B_i) < \infty$. Nu is $\mu(A) = \mu(B_1) + \mu(B_2) + \ldots = L(B_1) + L(B_2) + \ldots$, en volgens st. 7.5 is dat $L(A)$.

8. Meetbare verzamelingen.

Definitie 8.1. Een deelverzameling E van X heet meetbaar als zijn karakteristieke functie een meetbare functie is. De klasse van alle meetbare verzamelingen heet Λ.

Stelling 8.1. $\Gamma \subset \Lambda$, $X \in \Lambda$.

Bewijs. St. 7.7 en st. 7.6.

Definitie 8.2. Voor $E \in \Lambda$ definiëren we $\mu(E)$ door $\mu(E) = L(E)$ (dit kan $= \infty$ zijn, zie def. 7.2).

Opmerking. Voor $A \in \Gamma$ was μ reeds gedefinieerd, maar dan levert def.8.2 niets nieuws (zie st.7.7).

Stelling 8.2. Λ is een semiring, en voldoet zelfs aan

(a) $E \in \Lambda \Rightarrow X \setminus E \in \Lambda$

(b) $E_1, E_2, \ldots \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_1^\infty E_i \in \Lambda$ en $\bigcap_1^\infty E_i \in \Lambda$

(c) μ is op Λ een maat.

Bewijs. (a) Is E een meetbare functie, dan ook $1 - E$

(b) De karakteristieke functie van $\bigcup_1^n E_i$ is $\max(E_1, \ldots, E_n)$, en dus meetbaar, en de functie $\max(E_1, \ldots, E_n)$ convergeert puntsgewijs naar $\bigcup_1^\infty E_i$. Analoog voor de doorsnede. Uit (a) en (b) volgt: $E_1 \in \Lambda$, $E_2 \in \Lambda \Rightarrow E_1 \setminus E_2 \in \Lambda$, want $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap (X \setminus E_2)$.

(c) Als $E = E_1 + E_2 + \ldots$ dan is $L(E) = L(E_1) + L(E_2) + \ldots$ volgens st. 7.5. Verder is $0 \leqslant \mu(E) \leqslant \infty$ ($L(E) = \|E\|$, dus $\geqslant 0$).

Stelling 8.3. Heeft E de maat nul dan heeft elke deelverzameling van E de maat nul. (Met "E heeft de maat nul" bedoelen we: "E is meetbaar en heeft de maat nul"). En uit $\|E\| = 0$ volgt dat E de maat nul heeft.

Bewijs. Is $E_1 \subset E \in \Lambda$, $\mu(E) = 0$, dan $\|E\| = 0$ (st. 7.5) dus $\|E_1\| = 0$, dus E_1 is sommeerbaar ($\|E_1 - 0\| < \varepsilon$, en 0 is een trapfunctie), dus $E_1 \in \Lambda$, $\mu(E_1) = \|E_1\| = 0$.

Stelling 8.4. De functie f is dan en slechts dan meetbaar als voor elk reëel getal a geldt dat $\{x | f(x) > a\}$ meetbaar is.

We laten het bewijs achterwege. De stelling kan bijv. worden gebruikt om te bewijzen dat het product van twee meetbare functies weer meetbaar is. Of algemener: is $\varphi(u_1,\ldots,u_k)$ een continue functie van k variabelen $u_1,\ldots,u_k$, en zijn $f_1,\ldots,f_k$ meetbaar, dan is $\varphi(f_1,\ldots,f_k)$ meetbaar.

Opmerking. Gaan we uit van Λ i.p.v. Γ dan vinden we precies dezelfde norm, dezelfde sommeerbare functies, en dezelfde meetbare verzamelingen met dezelfde maat. We laten het bewijs achterwege.

Definitie 8.3. Is E meetbaar, en f sommeerbaar, dan is "de integraal van f over E" gedefinieerd door

$$\int_E f d\mu = L(fE).$$

(het is gemakkelijk in te zien dat het product fE sommeerbaar is).
In het bijzonder is, als f sommeerbaar is:

$$\int_X f d\mu = L(f).$$

9. Bijna overal.

Definitie 9.1. Laat $B(x)$ een uitspraak over het element x van X zijn. We zeggen dat $B(x)$ bijna overal geldt, of $B(x)$ geldt p.p. (= presque partout) als er een meetbare verzameling N is met $\mu(N) = 0$, zó dat $B(x)$ geldt voor alle $x \in X \setminus N$.

Stelling 9.1. Laat f een overal op X gedefinieerde functie zijn. Dan geldt

$$\|f\| = 0 \iff f(x) = 0 \text{ (p.p.)}.$$

Bovendien impliceert $\|f\| = 0$ dat f sommeerbaar is, en dat $L(f) = 0$.

Bewijs. Zij $\|f\| = 0$. Dan is f sommeerbaar, getuige de goede approximatie van f door de trapfunctie 0. Laat A_n de verzameling zijn van alle x met $n^{-1} < |f(x)| < (n-1)^{-1}$ voor $n > 1$ en $n^{-1} < |f(x)|$ voor $n = 1$. Dan is $n^{-1}.A_n \leqslant |f|$, dus $\|n^{-1}A_n\| \leqslant \|f\|$, dus $\|A_n\| = 0$, dus $\mu(A_n) = 0$.

Nu is ook $A_1 + A_2 + \ldots$ meetbaar, met maat $0+0+\ldots = 0$, dus $f = 0$ (p.p.). Neem vervolgens aan dat $f = 0$ (p.p.). Zij N de verzameling waarop $f \neq 0$. De karakteristieke functie N is dus sommeerbaar, met $\|N\| = 0$. Nu is $|f| \leqslant N+N+\ldots$, dus (st. 3.1, 4°) $\|f\| \leqslant 0 + 0 + \ldots$, dus $\|f\| = 0$.

We zullen in het vervolg ook wel functies beschouwen die overal gedefinieerd zijn met uitzondering van een verzameling van de maat nul, of die op een dergelijke verzameling als waarde ∞ hebben. We spreken af dat norm en integraal van dergelijke functies worden berekend door de ontbrekende functiewaarden willekeurig te kiezen; welke waarden doet er niet toe, want het verschil tussen twee mogelijke functies is steeds een nulfunctie.

Men kan trouwens ook direct def. 3.2 geldig verklaren voor dergelijke functies. Is nl. N een verzameling met maat nul, dan is $\|N\| = 0$.

De functie f die op N de waarde ∞ heeft en verder overal nul is, voldoet aan $|f| < N + N + N + \ldots$, zodat bij elke $\varepsilon > 0$ f kan worden gemajoreerd door een $\Sigma \alpha_i A_i$ met norm $< \varepsilon$. (Ga het bewijs van st.3.1, 4° na).

De kleine uitbreiding die we hier aan het functiebegrip hebben gegeven, brengt min of meer futiele wijzigingen in de stellingen die we tot nu toe hebben besproken. We zullen deze niet in discussie nemen.

We geven nog twee stellingen waarbij het begrip "bijna overal" een rol speelt.

<u>Stelling 9.2</u>. Laat $f_1, f_2, \ldots$ niet-negatieve sommeerbare functies op X zijn, met $\|f_1\| + \|f_2\| + \ldots < \infty$. Dan is $f_1 + f_2 + \ldots$ bijna overal convergent. De som F is sommeerbaar, en $L(F) = L(f_1) + L(f_2) + \ldots$.

<u>Bewijs</u>. Noem $\|f_1\| + \|f_2\| + \ldots = p$. Is p_1 een eindig getal $> p$, dan kunnen we (zie het bewijs van st. 3.1, 4°) een som $\Sigma \alpha_i A_i$ vinden met $\Sigma \alpha_i A_i \geqslant \Sigma_1^{\infty} f_i$ en $\Sigma \alpha_i \mu(A_i) < p_1$. Laat N de verzameling der x voorstellen waarvoor $\Sigma_1^{\infty} f_i(x) = \infty$. Dan is, voor elke $t > 0$

$$\Sigma_1^{\infty} \alpha_i A_i \geqslant tN,$$

dus $t \|N\| \leqslant p_1$. Daar t willekeurig is, blijkt nu $\|N\| = 0$.

Vervang nu op N elke f_i door 0. Dan is $\Sigma_1^{\infty} f_i$ overal convergent, en, als de som F_1 heet, is $\|F_1\| \leqslant p < \infty$. Volgens st. 6.1 is nu F_1 sommeerbaar, en $L(F_1) = L(f_1) + L(f_2) + \ldots$. Blijkens de bovengemaakte afspraken zijn deze resultaten direct op F zelf over te dragen.

<u>Opmerking</u>. Achteraf is (via st. 6.2) gemakkelijk in te zien dat de stelling ook geldt als het woord "niet-negatieve" wordt weggelaten.

<u>Stelling 9.3</u>. Is f sommeerbaar, dan is er een rij trapfuncties $s_1, s_2, \ldots$

met $\|f - \Sigma_1^n s_i\| \to 0$, $\Sigma_1^\infty \|s_i\| < \infty$, terwijl $\Sigma_1^\infty s_i(x)$ bijna overal absoluut convergeert, met $\Sigma_1^\infty s_i(x) = f(x)$ (p.p.).

Bewijs. We kunnen t_n zó kiezen dat $\|f - t_n\| < 2^{-n}$. Dan is met $s_1 = t_1$, $s_2 = t_2 - t_1$, $s_3 = t_3 - t_2, \ldots$ $\|s_n\| < 2^{1-n}$ $(n > 1)$, dus $\Sigma_1^\infty \|s_i\| < \infty$.

Blijkens st. 9.2 is $\Sigma_1^\infty s_i(x)$ bijna overal absoluut convergent. Noem de som F. Dan is $\|F - \Sigma_1^n s_i\| \leqslant \Sigma_{n+1}^\infty \|s_i\| < 2^{1-n}$, dus $\|F - f\| < 2^{2-n}$; daar n willekeurig is, is $\|F - f\| = 0$, dus $F = f$ (p.p.).

Opmerking. Daar elke trapfunctie als som van "treden" is te schrijven, blijkt vervolgens gemakkelijk dat elke sommeerbare f te schrijven is als

$$f = \Sigma_1^\infty \alpha_i A_i + g$$

met $A_i \in \Gamma$, $\Sigma |\alpha_i| \mu(A_i) < \infty$, $\|g\| = 0$ (A_i's behoeven niet disjunct te zijn).

10. Cartesisch product van maatruimten.

Definitie 10.1. a) Zijn X en Y willekeurige ruimten, dan is het cartesisch product $X \times Y$ gedefinieerd als de verzameling van alle paren $(x,y)(x \in X,\ y \in Y)$.

b) Is $S_1 \subset X$, $S_2 \subset Y$, dan is $S_1 \times S_2$ de deelverzameling van $X \times Y$ bestaande uit alle (x,y) met $x \in S_1$, $y \in S_2$.

c) Zijn Θ_1, Θ_2 klassen van deelverzamelingen van X resp. Y, dan is $\Theta_1 \times \Theta_2$ de klasse van alle $S_1 \times S_2$ $(S_1 \in \Theta_1,\ S_2 \in \Theta_2)$.

d) Zijn φ_1 en φ_2 functies op Θ_1 resp. Θ_2, dan is $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ op $\Theta_1 \times \Theta_2$ gedefinieerd door

$$\varphi(S) = \varphi_1(S_1)\,\varphi_2(S_2) \quad \text{als } S_1 \in \Theta_1,\ S_2 \in \Theta_2,\ S = S_1 \times S_2.$$

<u>Voorbeeld</u>. Γ_i = klasse van alle cellen op $(-\infty, \infty)$, plus de lege verzameling (i=1,2). Dan is $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ de collectie van alle tweedimensionale cellen, plus de lege verzameling.

<u>Stelling 10.1</u>. Is Γ_1 een semiring bij X, Γ_2 een semiring bij Y, dan is $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ een semiring bij $X \times Y$.

<u>Bewijs</u>. Kennelijk is $\emptyset \in \Gamma$. Stel nu $C_i = A_i \times B_i$, $A_i \in \Gamma_1$, $B_i \in \Gamma_2$ (i=1,2). Dan is $C_1 \cap C_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$, en daar $A_1 \cap A_2 \in \Omega(\Gamma_1)$, $B_1 \cap B_2 \in \Omega(\Gamma_2)$, is nu $C_1 \cap C_2 \in \Omega(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Verder is

$$C_1 \setminus C_2 = \{(A_1 \setminus A_2) \times B_2\} \cup \{(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)\} ,$$

en beide termen tussen accoladen zijn disjunct, omdat $A_1 \setminus A_2$ en $A_1 \cap A_2$ dat zijn. Deze termen liggen beide in $\Omega(\Gamma)$, zodat hun vereniging in $\Omega(\Gamma)$ ligt.

<u>Stelling 10.2</u>. Zijn (X, Γ_1, μ_1) en (Y, Γ_2, μ_2) sigmafiniete maatruimten, dan is $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ een sigmafiniete maat op $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

<u>Bewijs</u>. Zij $A \in \Gamma_1$, $A_n \in \Gamma_1$, $B \in \Gamma_2$, $B_n \in \Gamma_2$, en

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i = A \times B.$$

Op X beschouwen we de functies $\mu_2(B_i)A_i$, $\mu_2(B)A$ (dit zijn functies waarvan de waarden <u>gegeneraliseerde</u> reële getallen zijn). Voor elke x is er een deelverzameling I_x van de verzameling der natuurlijke getallen, bestaande uit alle i met $x \in A_i$. Nu is

$$\Sigma_{i \in I_x} B_i = \begin{cases} B \text{ als } x \in A, \\ 0 \text{ als } x \notin A. \end{cases}$$

Daar μ_2 een maat op Γ_2 is, vinden we

$$\Sigma_{i \in I_x} \mu_2(B_i) = \begin{cases} \mu_2(B) & \text{als } x \in A, \\ 0 & \text{als } x \notin A \end{cases}$$

en dit betekent dat

(10.1) $\Sigma_{i=1}^{\infty} \mu_2(B_i)A_i \quad = \quad \mu_2(B)A.$

Hieruit leiden we af met behulp van st. 7.5 (integratie over X), dat

(10.2) $\Sigma_1^{\infty} \mu_1(A_i)\,\mu_2(B_i) = \mu_1(A)\,\mu_2(B).$

Wegens $\mu_1(A_i)\,\mu_2(B_i) = \mu(A_i \times B_i)$ zien we nu dat μ een maat is op Γ.

<u>Opmerking</u>. Eigenlijk mogen we st.7.5 in het bovengenoemde geval niet toepassen als $\mu_2(B) = \infty$ en $\mu_1(A) > 0$, omdat we slechts functies hebben beschouwd die de waarde ∞ hebben op een verzameling met maat nul. We moeten in dat geval dus even apart laten zien dat de reeks in het linkerlid van (10.2) divergent is. Voor elk positief getal p is in ons geval

$$pA \leqslant \mu_2(B)A = \Sigma_{i=1}^{\infty} \mu_2(B_i)A_i,$$

dus $\|pA\| \leqslant \Sigma_{i=1}^{\infty} \|\mu_2(B_i)\,A_i\| = \Sigma_{i=1}^{\infty} \mu_2(B_i)\,\mu_1(A_i).$

Is de reeks rechts convergent (som s), dan is $\|A\| < p^{-1}s$ voor elke $p > 0$, dus $\|A\| = 0$, in strijd met de onderstelling.

<u>Stelling 10.3</u> (Fubini). *Laat f op $X \times Y$ gedefinieerd en sommeerbaar zijn. Bij bijna elke $x \in X$ is $f(x,y)$ een sommeerbare functie op Y. Met $\varphi(x) = \int_Y f(x,y)d\mu_2$ geldt dat φ sommeerbaar is over X, en dat*

$$\int_X \varphi(x)d\mu_1 = \int_{X \times Y} f(x,y)d\mu.$$

Bewijs.

1. We nemen eerst het bijzondere geval dat $\|f\| = 0$ (norm t.o.v. $X \times Y$). Laat $\phi(x)$ de norm (over Y) aanduiden van de functie f_x, d.i. de functie gedefinieerd door $f_x(y) = f(x,y)$. Bij elke $\varepsilon > 0$ kunnen we een som $\Sigma_1^\infty \gamma_i(A_i \times B_i)$ vinden met $\gamma_i \geqslant 0$, $A_i \in \Gamma_1$, $B_i \in \Gamma_2$, $\Sigma_1^\infty \gamma_i\, \mu(A_i \times B_i) < \varepsilon$, $\Sigma_1^\infty \gamma_i(A_i \times B_i) \geqslant |f|$. Nu is bij elke x (met de notatie van het bewijs van st. 10.2)

$$|f_x| \leqslant \Sigma_{i \in I_x} \gamma_i B_i \,.$$

Dus $\phi(x) \leqslant \Sigma_{i \in I_x} \gamma_i \mu_2(B_i)$, zodat

$$\phi(x) \leqslant \Sigma_1^\infty \gamma_i \mu_2(B_i) A_i \,.$$

Nu blijkt dat de norm van ϕ (over X) hoogstens gelijk is aan $\Sigma \gamma_i \mu_2(B_i) \mu_1(A_i)$, dus (wegens $\mu_1 \mu_2 = \mu$) $< \varepsilon$. Hiermee is bewezen dat (in voor de hand liggende notatie)

$$\| (\| f \|_Y) \|_X = 0$$

zodat in het geval $\|f\| = 0$ de stelling bewezen is.

2. Als f de karakteristieke functie van een $A \times B$ ($A \in \Gamma_1$, $B \in \Gamma_2$) is, is de stelling nagenoeg triviaal.

3. Onderstel dat $f = \Sigma_1^\infty \gamma_i(A_i \times B_i)$ met $A_i \in \Gamma_1$, $B_i \in \Gamma_2$, $\Sigma_1^\infty |\gamma_i|\, \mu(A_i \times B_i) < \infty$ (geen disjuncties verondersteld). Dan is weer $f_x = \Sigma^* \gamma_i B_i$, zodat f_x sommeerbaar is voor elke x die voldoet aan $\Sigma^* |\gamma_i| \mu_2(B_i) < \infty$; voor zulke x is $\varphi(x) = \Sigma^* \gamma_i \mu_2(B_i)$.

Een antwoord op de vraag voor wèlke x deze reeks convergeert, wordt geleverd door st. 9.2, toegepast op de ruimte X en de functies $f_1, f_2, \dots$ gedefinieerd door $f_i(x) = |\gamma_i| \mu_2(B_i) A_i(x)$. We hebben $\Sigma_1^\infty \| f_i \| = \Sigma_1^\infty |\gamma_i| \mu_2(B_i) \mu_1(A_i)$, hetgeen (wegens $\mu_1 \mu_2 = \mu$) convergent is. De reeks is dus voor bijna alle x convergent, en de som $\Sigma_1^\infty |\gamma_i| \mu_2(B_i) A_i$ is sommeerbaar over X.

Aangezien $\varphi(x) = \Sigma^* \gamma_i \mu_2(B_i) = \Sigma\, \gamma_i \mu_2(B_i) A_i$, blijkt dat φ sommeerbaar is, en dat $\int_X \varphi\, d\mu = \Sigma_1^\infty \gamma_i \mu_2(B_i) \mu_1(A_i)$. Ook in dit geval is de stelling bewezen.

4. Volgens st. 9.3 is het algemene geval tot de onder 1 en 3 genoemde terug te brengen.

Opmerking. Op soortgelijke wijze wordt de volgende variant van de stelling van Fubini bewezen: Is $f \geqslant 0$ en meetbaar over $X \times Y$, dan is voor bijna alle x de functie f een meetbare functie van y, en de integraal over Y is een meetbare functie φ van x, met weer als resultaat dat de "dubbelintegraal" gelijk is aan de herhaalde.

Met behulp van dit resultaat is weer af te leiden dat, uit

1° f meetbaar over $X \times Y$, en

2° $\int_X \left(\int_Y |f|\, d\mu_2 \right) d\mu_1 < \infty$,

reeds volgt dat f sommeerbaar is over $X \times Y$, zodat st. 10.3 kan worden toegepast.

Correcties en aanvullingen bij de syllabus over Lebesgue-integralen.

Blz.	regel	
3	2	lage moet zijn: lege.
3	3	Toevoegen: g is overal eindig.
4	4	A moet zijn: A^{**}
4	5	$\mu(A)$ moet zijn: $\mu(A^{**})$
4	Vóór 3.Norm ...	Tussenvoegen: Aanvulling I.
4	§3 regel 2	Achter "semiring Γ" toevoegen "μ is".
4	Def 3.2	In de eerste regel toevoegen: "f is overal eindig".
		In de derde regel: Γ_i moet zijn Γ.
6	2	g moet zijn: j in moet zijn: is
		Vóór: We moeten ... (5^{de} regel van onder) tussenvoegen: Aanvulling II.
	2 van onder	$\beta S + \gamma t$ moet zijn $\beta s + \gamma t$.
7		Stelling 4.2. en definitie 4.2. moeten vervangen worden door: Aanvulling III.
	2 van onder	$L(\beta S + \gamma t)$ moet zijn $L(\beta s + \gamma t)$
8	10	Voor $t_1, t_2, \ldots$ toevoegen: t,
	17	sidie moet zijn: s die
10	4 van onder	$\Vert$ achter βg verwijderen.
11	7	$< \Vert f-s_n \Vert$ moet zijn $\leq \Vert f-s_n \Vert$
	8	Achter $L(\vert f \vert)$ toevoegen: , als f sommeerbaar is (want dan is ook $\vert f \vert$ sommeerbaar blijkens st.5.6., en $L(\vert f \vert) = \Vert f \Vert$ blijkens st.5.5.).
	1 van onder	verwissel $<$ en $\leq$
12	11	$\Vert L(f) - (L(f_1) + \ldots + L(f_n)) \Vert < \varepsilon$ moet zijn: $\vert L(F) - (L(f_1) + \ldots + L(f_n)) \vert < \varepsilon$
15 16		van "Stelling 7.7." t/m "... is dat L(A)." vervangen door: Aanvulling IV.
18	3^{de} regel v/h bewijs:	$< (n-1)^{-1}$ moet zijn $\leq (n-1)^{-1}$.
19	2	$\vert f \vert < N + N + \ldots$ moet zijn $\vert f \vert \leq N + N + \ldots$
19	3	achter $< \varepsilon$: (alle $A_i \in \Gamma$)
21	9	$\ldots x B_2\}$ moet zijn $\ldots x B_1\}$
	2 van onder	vóór "$\Sigma_{i \in I_x} B_i$" toevoegen: "$\Sigma_i A_i(x) B_i =$ ".

Blz.	regel	
22	6 van onder	$\|A\| < p^{-1}s$ moet zijn $\|A\| \leq p^{-1}s$.
	3 van onder	Tussen "zijn" en "Bij bijna ..." invoegen: "Dan geldt:"
23	14	$\|(\|f\|_Y)\|_X = 0$ moet zijn: $\|(\|f_x\|_Y)\|_X = 0$.
	3 van onder	Achter "$f_x = \Sigma^* \gamma_i B_i$" toevoegen: "($\Sigma^*$ betekent $\Sigma_{i \in I_x}$)"
24	9	Tussen "Volgens" en "st 9.3" invoegen: "de opmerking na".

Aanvulling I

<u>Stelling 2.1</u>. Laat μ een sigmafiniete maat op Γ zijn, en laat $A \in \Gamma$. Dan zijn A en $X \backslash A$ disjunct te splitsen:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad X \backslash A = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

met $B_i \in \Gamma$, $C_i \in \Gamma$, $\mu(B_i) < \infty$, $\mu(C_i) < \infty$.

<u>Bewijs</u>: Zij $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ een disjuncte splitsing van de ruimte met $\mu(A_i) < \infty$ voor alle i. Neem nu

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap A_j) \quad \text{en} \quad X \backslash A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \backslash A);$$

daar $(A \cap A_j) \in \Omega(\Gamma)$, $(A_j \backslash A) \in \Omega(\Gamma)$, zijn deze $A \cap A_j$ en $A_j \backslash A$ weer disjunct te splitsen:

$$A \cap A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}, \quad A_j \backslash A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{jk}.$$

Daar $B_{jk} \subset A_j$ en $C_{jk} \subset A_j$ hebben B_{jk} en C_{jk} eindige maat.

Aanvulling II

<u>Voorbeeld</u>. Is $A \in \Gamma$, $\mu(A) < \infty$, dan is A een trapfunctie. We hebben nl. een disjuncte splitsing $X \backslash A = \Sigma_1^{\infty} C_i$, (zie st.2.1.) waaruit volgt: $A = 1.A + \Sigma_1^{\infty} 0.C_i$

Aanvulling III

<u>Stelling 4.2</u>. Zij gegeven $s = \Sigma\, \beta_i B_i$, $t = \Sigma\, \gamma_j C_j$ met $X = \Sigma_i B_i = \Sigma_j C_j$, $B_i \in \Gamma$, $C_j \in \Gamma$, $\Sigma_i |\beta_i| \mu(B_i) < \infty$. Dan geldt:

a. $\{\forall_{x \in X}\ t(x) \leq s(x)\ \&\ \Sigma_j |\gamma_j| \mu(C_j) < \infty\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma_j\, \gamma_j \mu(C_j) \leq \Sigma_i\, \beta_i \mu(B_i)$$

b. $\{\forall_{x \in X} \ |t(x)| \leqslant s(x)\} \Rightarrow \Sigma \ |\gamma_j| \mu(C_j) \leqslant \Sigma \ \beta_i \mu(B_i)$

Bewijs: a. We gebruiken de notaties uit het bewijs van st.4.1. Neem het linkerlid van de implicatie aan. Voor $x \in E_{ijk}$ is $s(x) = \beta_i$ en $t(x) = \gamma_j$, dus als E_{ijk} niet leeg is, is $\gamma_j \leqslant \beta_i$. Dus steeds geldt: $\gamma_j \mu(E_{ijk}) \leqslant \beta_i \mu(E_{ijk})$. Wegens de absolute convergentie van $\Sigma_j \ \gamma_j \mu(C_j)$ geldt

$$\Sigma_j \ \gamma_j \mu(C_j) = \Sigma_i \ \gamma_j \ \Sigma_{jk} \ \mu(E_{ijk}) = \Sigma_{ijk} \ \gamma_j \mu(E_{ijk})$$

en dit laatste is niet groter dan $\Sigma_{ijk} \ \beta_i \mu(E_{ijk}) = \Sigma_i \ \beta_i \mu(B_i)$

b. Nu geldt $|\gamma_j| \mu(E_{ijk}) \leqslant \beta_i \mu(E_{ijk})$ en dus is het rechterlid niet negatief. Derhalve is

$$\Sigma_{ijk} \ \beta_i \mu(E_{ijk}) = \Sigma_i \ \beta_i \mu(B_i) < \infty \quad \text{en we vinden}$$

$\Sigma_j \ |\gamma_j| \mu(E_{ijk}) < \infty$, dus $\Sigma_{ijk} \ |\gamma_j| \mu(E_{ijk}) = \Sigma_j \ |\gamma_j| \mu(C_j)$
Hieruit volgt $\Sigma_j \ |\gamma_j| \mu(C_j) \leqslant \Sigma_i \ \beta_i \mu(B_i)$

Definitie 4.2. Is $t = \Sigma \ \beta_i B_i$ (met $\Sigma \ B_i = X$, $\Sigma \ |\beta_i| \mu(B_i) < \infty$) dan heet $\Sigma \ \beta_i \mu(B_i)$ de integraal van t. (voorlopige notatie L(t)).

Uit st.4.2. volgt dat de definitie onafhankelijk is van de speciale representatie van t. Is nl. $\Sigma_i \ \beta_i B_i = \Sigma_j \ \gamma_j C_j$, dan volgt uit st.4.2. b dat $\Sigma_j \ |\gamma_j| \mu(C_j) < \infty$. Daarna uit st.4.2.a dat $\Sigma_j \ \mu(C_j) \leqslant$ $\leqslant \Sigma_i \ \beta_i \mu(B_i)$ en (door verwisseling van s en t) ook dat

$$\Sigma_j \ \gamma_j \mu(C_j) \geqslant \Sigma_i \ \beta_i \mu(B_i).$$

En uit $\leqslant$ en $\geqslant$ volgt $=$.

Aanvulling IV

<u>Stelling 7.7.</u> Is $A \in \Gamma$, dan is de functie A meetbaar, met $\mu(A) = L(A)$

<u>Bewijs.</u> We gebruiken de splitsing uit st.2.1. : $A = \Sigma_1^\infty B_j$,
$X \backslash A = \Sigma_1^\infty C_j$. Nu is voor elke n de som $t_n = \Sigma_{j=1}^n B_j$
een trapfunctie nl.: $t_n = \Sigma_{j=1}^n 1.B_j + \Sigma_{j=n+1}^\infty 0.B_j + \Sigma_{j=1}^\infty 0.C_j$
zodat t_n sommeerbaar is (st.5.1). Daar puntsgewijs $t_n \to A$, is A meetbaar. Elke B_j is een trapfunctie, dus sommeerbaar en dus meetbaar. Door nu st.7.5.(3) toe te passen komen we tot $\mu(A) = L(A)$.