TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

RIEMANN-INTEGRATIE
versus
LEBESGUE-INTEGRATIE

Naar het college van

Prof. Dr. Ir. M.L.J. Hautus

1973

Inhoudsbeschrijving

RIEMANN-INTEGRATIE
versus
LEBESGUE-INTEGRATIE

M.L.J. Hautus

1973

	Integratietheorie	1
§1.	Maat	2
§2.	Trapfuncties	5
§3.	Normen	8
§4.	Integreerbare functies	10
§5.	Convergentiestellingen van Lebesgue-integreerbare functies	13
§6.	Meetbare functies en verzamelingen	15
§7.	Verdere eigenschappen van integreerbare functies	19

JdG, 14 November 2005

Integratietheorie

De integraal is een generalisatie van het begrip oppervlakte. De oppervlakte van een rechthoek is hierbij het uitgangspunt. In § 1 zullen we het begrip lengte (of maat) bestuderen. In § 2 zullen we integralen van trapfuncties invoeren.

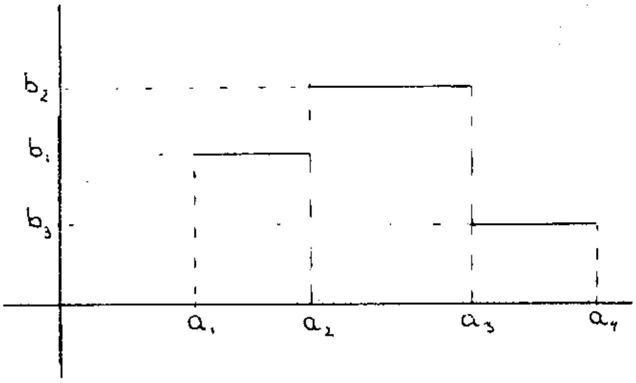
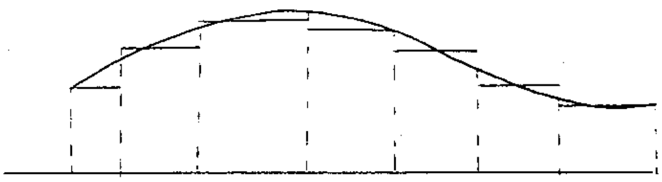


fig 1

Volgens de daar gegeven definitie is bijv. $(a_2-a_1)b_1 + (a_3-a_2)b_2 + (a_4-a_3)b_3$ de integraal van trapfunctie gegeven in fig. 1. Om van algemenere functies integralen te berekenen, benaderen we deze met trapfuncties. We hebben dan een maat nodig voor de afstand tussen de trapfunctie en de gegeven functie.



Zo'n maat wordt norm genoemd. In § 3 worden twee normen ingevoerd: de Riemann-norm en de Lebesgue-norm. Deze geven aanleiding tot twee verschillende integraalbegrippen: Riemann-integraal en de Lebesgue-integraal (§ 4).

§ 1. Maat.

Definitie 1.1. Γ is de verzameling bestaande uit $\emptyset$ en intervallen van de vorm $(a,b]$, waar $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Eigenschap 1.1. $A,B \in \Gamma \Rightarrow A \cap B \in \Gamma$.

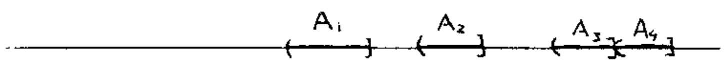
Definitie 1.2. De *lengte* $\lambda(A)$ van een element $A \in \Gamma$ wordt gedefinieerd door

$$\lambda(\emptyset) = 0,\ \lambda((a,b]) := b-a.$$

Eigenschap 1.2. Als $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Gamma$ onderling disjunct zijn en $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Gamma$, dan is

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i).$$

Definitie 1.3. Ω is de verzameling van alle verzamelingen van de vorm $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, waar de verzamelingen $A_i \in \Gamma$ $(i = 1,\ldots,n)$ onderling disjunct zijn.



Let wel dat de voorstelling $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ van een element $A \in \Omega$ als vereniging van disjuncte elementen van Γ niet eenduidig is.

Stelling 1.1. Als $A,B \in \Omega$ dan geldt $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \Omega$ (m.a.w. Ω is een *ring*).

Bewijs. Als $A = \cup A_i$, $B = \cup B_j$ met A_i's disjunct, B_j's disjunct, dan is $A \cap B = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$ waar $A_i \cap B_j \in \Gamma$ (Eigenschap 1.1), en $(A_i \cap B_j) \cap (A_\ell \cap B_k) = \emptyset$ als $(i,j) \neq (\ell,k)$. Dus $A \cap B \in \Omega$. Als $A \in \Omega$, $I \in \Gamma$ en $A \subset I$, dan is $I \setminus A \in \Omega$.
Zij nu $A,B \in \Omega$ en $A \cup B \subset I \in \Gamma$. We schrijven $C^* := I \setminus C$ voor elke $C \subset I$. Dan zien we:

$$A \cup B = (A^* \cap B^*)^* \in \Omega.$$

$$A \setminus B = A \cap B^* \in \Omega. \qquad \square$$

<u>Definitie 1.4.</u> Als $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ($A_i \in \Gamma$ onderling disjunct) dan definiëren we de *lengte* (of *maat*) van A door: $\lambda(A) := \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$.

Deze definitie is correct, want als $A = \cup A_i = \cup B_j$, dan geldt

$$A_i = A_i \cap A = A_i \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_j (A_i \cap B_j) = \bigcup_j D_{ij} ,$$

waar $D_{ij} := A_i \cap B_j \in \Gamma$.
Derhalve

$$\sum_i \lambda(A_i) = \sum_i \lambda(\bigcup_j D_{ij}) = \sum_i (\sum_j \lambda(D_{ij})).$$

Anderzijds is

$$\sum_j \lambda(B_j) = \sum_j (\sum_i \lambda(D_{ij})).$$

Dus

$$\sum_i \lambda(A_i) = \sum_j \lambda(B_j).$$

<u>Stelling 1.2.</u> Als $A_1,\dots,A_n \in \Omega$ onderling disjunct zijn, dan is

$$\lambda(\bigcup_i A_i) = \sum_i \lambda(A_i).$$

<u>Bewijs.</u> Zij $A_i = \bigcup_j B_{ij}$, waar $B_{ij} \in \Gamma$, $B_{ij} \cap B_{ik} = \emptyset$ als $j \neq k$. Dan geldt ook $B_{ij} \cup B_{\ell k} = \emptyset$ als $(i,j) \neq (\ell,k)$ omdat de A_i's disjunct zijn. Derhalve:

$$\lambda(\bigcup_i A_i) = \lambda(\bigcup_{i,j} B_{ij}) = \sum_{i,j} \lambda(B_{ij}) = \sum_i (\sum_j \lambda(B_{ij})) = \sum_i \lambda(A_i). \qquad \square$$

De in Stelling 1.2 geformuleerde eigenschap wordt de *additiviteit* van λ genoemd.

<u>Gevolg 1.1.</u> i) Als $A,B \in \Omega$, $A \subset B$, dan geldt $\lambda(A) \le \lambda(B)$.
ii) Als $A_1,\dots,A_n \in \Omega$, dan geldt $\lambda(\cup A_i) \le \sum_i \lambda(A_i)$.

<u>Bewijs.</u> i) $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, dus $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A) \ge \lambda(A)$. (Bedenk dat $\lambda(C) \ge 0$ voor alle $C \in \Omega$, en dat uit $A,B \in \Omega$ volgt $B \setminus A \in \Omega$.)

ii) $A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup (A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}))$.
Het rechterlid is een disjuncte vereniging. Dus

$$\lambda(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2 \setminus A_1) + \ldots + \lambda(A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)) \leq$$

$$\leq \lambda(A_1) + \lambda(A_2) + \ldots + \lambda(A_n).$$ □

De volgende eigenschap spreekt de σ-*additiviteit* van λ uit.

<u>Stelling 1.3.</u> Als $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ onderling disjunct zijn en $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$, dan geldt

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

<u>Bewijs.</u> Als $V_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, dan geldt $V_n \subset A$ en dus

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) = \lambda(V_n) \leq \lambda(A).$$

Hieruit volgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \leq \lambda(A).$$

Om de tegenovergestelde ongelijkheid te bewijzen, merken we op dat bij elke $\varepsilon > 0$ en elke verzameling $E \in \Omega$ er verzamelingen $P \in \Omega$, $Q \in \Omega$ bestaan met $\bar{P} \subset E \subset \mathring{Q}$ (hier is $\bar{P}$ de afsluiting van P en $\mathring{Q}$ het inwendige van Q), $\lambda(E) - \lambda(P) \leq \varepsilon$ en $\lambda(Q) - \lambda(E) \leq \varepsilon$. Derhalve kunnen we verzamelingen $B_i \in \Omega$ $(i = 1,2,\ldots)$ vinden met $A_i \subset \mathring{B}_i$ en $\lambda(B_i) - \lambda(A_i) \leq 2^{-i}\varepsilon$ en een verzameling $C \in \Omega$ met $\bar{C} \subset A$ en $\lambda(A) - \lambda(C) \leq \varepsilon$. Er geldt $\bar{C} \subset A = \cup A_i \subset \cup \mathring{B}_i$. Omdat $\bar{C}$ compact is en $\mathring{B}_i$ open, volgt uit de stelling van Heine-Borel, dat er een n bestaat met $C \subset \bar{C} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{B}_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Dus:

$$\lambda(A) \leq \lambda(C) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(B_i) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \{\lambda(A_i) + 2^{-i}\varepsilon\} + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) + 2\varepsilon.$$

Daar $\varepsilon > 0$ willekeurig is volgt hieruit het gestelde. □

Gevolg 1.2. Als $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $\cap A_i = \emptyset$, dan geldt $\lambda(A_i) \to 0$ $(i \to \infty)$.

Bewijs. Zij $B_i := A_i \setminus A_{i+1}$. Dan geldt

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Bovendien geldt voor elke n:

$$A_1 = \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cup A_{n+1}.$$

In beide gevallen zijn de verenigingen disjunct. Hieruit volgt

$$\lambda(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i)$$

en

$$\lambda(A_1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(B_i) + \lambda(A_n)$$

zodat

$$\lambda(A_n) = \sum_{n+1}^{\infty} \lambda(B_i) \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

□

§ 2. Trapfuncties

Definitie 2.1. Als $A \subset \mathbb{R}$, dan heet de functie 1_A gedefinieerd door

$$1_A(x) = \begin{array}{l} 1 \text{ als } x \in A \\ 0 \text{ als } x \notin A \end{array}$$

de *indicatorfunctie* van A.

Eigenschap 2.1. i) Als $A_1, \ldots, A_n$ onderling disjunct zijn, dan is

$$1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = 1_{A_1} + \ldots + 1_{A_n} .$$

ii) Als $A \subset B$, dan is $1_A \leq 1_B$.

<u>Definitie 2.2</u>. Een functie van de vorm $t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, waar $A_1,\dots,A_n \in \Gamma$ onderling disjunct zijn heet een *trapfunctie*. De verzameling van trapfuncties geven we aan met $\mathcal{T}$.

De representatie $t = \Sigma\alpha_i 1_{A_i}$ is niet eenduidig. Als $t = \Sigma\alpha_i 1_{A_i} = \Sigma\beta_j 1_{B_j}$ en $D_{ij} := A_i \cap B_j$, dan is $D_{ij} \in \Gamma$ en $A_i = \bigcup_j D_{ij}$, $B_j = \bigcup_i D_{ij}$ en dus $t = \sum_{i,j} \alpha_i 1_{D_{ij}} = \sum_{i,j} \beta_j 1_{D_{ij}}$. Derhalve is $\alpha_i = \beta_j$ wanneer $D_{ij} \neq \emptyset$. We vinden daarom

$$\sum_i \alpha_i \lambda(A_i) = \sum_{ij} \alpha_i \lambda(D_{ij}) = \sum_{i,j} \beta_j \lambda(D_{ij}) = \sum_j \beta_j \lambda(B_j).$$

De volgende definitie is dus gerechtvaardigd:

<u>Definitie 2.3</u>. Als $t = \Sigma\alpha_i 1_{A_i} \in \mathcal{T}$ (door deze formule geven we steeds aan dat $\alpha_i \in \mathbb{R}$ en dat $A_i \in \Gamma$ onderling disjunct zijn), dan heet

$$\int t := \int t(x)dx := \sum_i \alpha_i \lambda(A_i)$$

de *integraal* van t.

<u>Stelling 2.1</u>. Als $t,s \in \mathcal{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dan

i) $t + s \in \mathcal{T}$ en $\int(t+s) = \int t + \int s$.

ii) $\alpha t \in \mathcal{T}$ en $\int(\alpha t) = \alpha\int t$.

iii) ts, $|t|$, $\max(t,s)$, $\min(t,s) \in \mathcal{T}$.

iv) $t \geq 0 \Rightarrow \int t \geq 0$, $t \leq s \Rightarrow \int t \leq \int s$.

v) $|\int t| \leq \int |t|$.

<u>Bewijs</u>. Laat $t = \Sigma\alpha_i 1_{A_i}$, $s = \Sigma\beta_j 1_{B_j} \in \mathcal{T}$. Zij $I \in \Gamma$ zodanig dat $A_i \subset I$, $B_j \subset I$ voor alle i en j. Dan mogen we veronderstellen, dat $\cup A_i = I$, want anders is $I \setminus (\cup A_i) \in \Omega$, zeg $I \setminus (\cup A_i) = \bigcup_{i-n+1}^{p} A_i$, waar $A_{n+1},\dots,A_p \in \Gamma$ onderling disjunct zijn. Als we dan $\alpha_i := 0$ definiëren voor $i = n+1,\dots,p$, dan geldt $t = \sum_i^p \alpha_i t_{A_i}$ en $\cup A_i = I$. Op dezelfde manier kunnen we bereiken dat

$\cup B_j = I$. Zij nu $D_{ij} := A_i \cap B_j$. Dan geldt $A_i = \bigcup_j D_{ij}$ en $B_j = \bigcup_i D_{ij}$, dus

$$t = \Sigma\alpha_i 1_{D_{ij}}, s = \Sigma\beta_j 1_{D_{ij}}$$

en de verzamelingen D_{ij} zijn onderling disjunct, zodat

$$t + s = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) 1_{D_{ij}} \in \mathcal{T}$$

en

$$\int (t+s) = \sum_{ij} (\alpha_i + \beta_j)\lambda(D_{ij}) = \sum_{ij} \alpha_i \lambda(D_{ij}) + \sum_{ij} \alpha_j \lambda(D_{ij}) = \int t + \int s\ .$$

De andere beweringen volgen nu gemakkelijk. □

<u>Gevolg 2.1</u>. Als $A_i \in \Omega$ (niet noodzakelijk disjunct), $\alpha_i \in \mathbb{R}$ voor $i = 1,\ldots,n$, dan is $t := \Sigma\alpha_i 1_{A_i} \in \mathcal{T}$ en $\int t = \Sigma\alpha_i\lambda(A_i)$.

De volgende eigenschap zal in § 3 een belangrijke rol spelen:

<u>Stelling 2.2</u>. Als $t_1, t_2, \ldots \in \mathcal{T}$, $t \in \mathcal{T}$, $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots$ en $0 \le t \le \lim_{i\to\infty} t_i$, dan is $\int t \le \lim_{i\to\infty} \int t_i$. (De laatste limiet kan ∞ zijn.)

<u>Bewijs</u>. Zij $\varepsilon > 0$. We definiëren $Q := \{x \mid t(x) > 0\}$, $A_i := \{x \in Q \mid t_i(x) \le t(x) - \varepsilon\}$, $\beta := \max t$. Dan is $Q, A_i \in \Omega$ en $Q \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $\cap A_i = \emptyset$, zodat $\lambda(A_i) \to 0$ $(i \to \infty)$ (Gevolg 1.2). We concluderen dat

$$\int t_i \ge \int t_i 1_{Q\setminus A_i} \ge \int t 1_{Q\setminus A_i} - \varepsilon \int 1_{Q\setminus A_i} =$$

$$\int t 1_Q - \int t 1_{A_i} - \varepsilon(\lambda(Q) - \lambda(A_i)) \ge$$

$$\ge \int t - \beta\lambda(A_i) - \varepsilon\lambda(Q) \ge \int t - 2\varepsilon\lambda(Q) \text{ o.d.d.}$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is volgt het gestelde. □

§ 3. Normen

Definitie 3.1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We definiëren de *Riemann-norm* van f:

$$\|f\|_R := \inf\{\int t \mid t \in \mathcal{T},\ |f| \le t\}$$

en de *Lebesgue-norm* van f:

$$\|f\|_L := \inf\{\sum_1^\infty \int t_i \mid 0 \le t_i \in \mathcal{T},\ |f| \le \sum_1^\infty t_i\}\ .$$

In beide gevallen spreken we af dat $\inf \emptyset = \infty$. Ook zullen we $\|f\|_L = \infty$ stellen wanneer $\Sigma\int t_i$ divergeert voor elke rij $t_1, t_2, \ldots$ met $0 \le t_i \in \mathcal{T}$, $|f| \le \Sigma t_i$. Als een eigenschap of stelling zowel op $\|f\|_L$ als op $\|f\|_R$ van toepassing is zullen we $\|f\|$ schrijven.

Stelling 3.1.

i) $\|0\| = 0$

ii) $\|\,|f|\,\| = \|f\|$

iii) $|f| \le |g| \Rightarrow \|f\| \le \|g\|$

iv) $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$

v) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

vi) $\|\sum_{i=1}^\infty f_i\|_L \le \sum_{i=1}^\infty \|f_i\|_L$

vii) $\|f\|_L \le \|f\|_R$.

Bewijs. i), ii), iii), iv) zijn evident. De ongelijkheden in v), vi), vii) zijn triviaal als het rechterlid ∞ is (in vi) kan dat zijn omdat een van de termen ∞ is of omdat de reeks divergeert). v) volgt voor de Lebesgue-norm uit vi) (neem $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_i = 0$ $(i \ge 3)$). Voor de Riemann-norm gaat het bewijs als volgt: Zij $|f| \le s \in \mathcal{T}$, $\int s \le \|f\| + \varepsilon$, $|g| \le t \in \mathcal{T}$, $\int t \le \|g\| + \varepsilon$. Dan is $|f+g| \le t+s$ en dus

$$\|f+g\| \le \int(t+s) \le \|f\| + \|g\| + 2\varepsilon.$$

Bewijs van vi). Kies voor elke i een rij trapfuncties $t_{ij} \geq 0$ $(j = 1,2,\ldots)$ met $|f_i| \leq \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \int t_{ij} \leq \| f_i \| + 2^{-i}\varepsilon$. Dan geldt

$$|\sum_{i=1}^{\infty} f_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} t_{ij}$$

en dus

$$\| \sum_i f_i \| \leq \sum_{i,j} \int t_{ij} \leq \sum_i (\| f_i \| + 2^{-i}\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \| f_i \| + \varepsilon .$$

Bewijs van vii). Als we in de verzameling waarvan $\| f \|_L$ het infimum is, $t_1 = t$, $t_i = 0$ $(i \geq 2)$ nemen dan zien we dat deze verzameling groter is dan de verzameling waarvan $\| f \|_R$ het infimum is. □

Stelling 3.2. Als $t \in \mathcal{T}$, $t \geq 0$, dan geldt

$$\| t \|_L = \| t \|_R = \int t .$$

Bewijs. We weten al dat $\| t \|_L \leq \| t \|_R$. Ook geldt $\| t \|_R \leq \int t$, want $\int t$ is een van de getallen waarvan $\| t \|_R$ het infimum is. Rest ons te bewijzen $\int t \leq \| t \|_L$. We mogen aannemen, dat $\| t \|_L < \infty$. Zij $\varepsilon > 0$, $s_i \in \mathcal{T}$, $s_i \geq 0$, $t \leq \Sigma s_i$, $\Sigma \int s_i \leq \| t \|_L + \varepsilon$. We definiëren $t_n := \sum_{i=1}^{n} s_i$. Dan geldt $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots$ en $t \leq \lim_{n\to\infty} t_n$. Uit Stelling 2.2 volgt dus

$$\int t \leq \lim \int t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int s_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int s_i \leq \| t \|_L + \varepsilon . \qquad \square$$

Gevolg. Als $t \in \mathcal{T}$, dan geldt $|\int t| \leq \| t \|$.

Voorbeeld 3.1. i) Als $A = \{a\}$ (eenpuntsverzameling), dan is $\| 1_A \|_R = 0$ (en dus ook $\| 1_A \|_L = 0$), want $0 \leq 1_A \leq 1_{A_n}$, waar $A_n := (a - \frac{1}{n}, a]$ en $\int 1_{A_n} = \lambda(A_n) = \frac{1}{n}$.

ii) Als $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$ dan is $\| 1_A \|_R = \| 1_A \|_L = 0$, want $1_A = 1_{\{a_1\}} + \ldots + 1_{\{a_n\}}$ (Stelling 3.1.v).

iii) Als $A = \{a_1,a_2,\ldots\}$ aftelbaar is, dan is $\| 1_A \|_L = 0$, want

$$\| 1_A \|_L \leq \sum_{i=1}^{\infty} \| 1_{\{a_i\}} \|_L = 0 .$$

iv) Als $A = \mathbb{Q} \cap (0,1]$, dan is A aftelbaar en dus $\| 1_A \|_L = 0$. Maar $\| 1_A \|_R = 1$, want uit $1_A \le t$ volgt $t(x) \ge 1$ $(x \in (0,1])$. We zien tevens dat Stelling 3.1.vi) niet geldt voor de Riemann-norm.

v) Als $\| f \|_R < \infty$, dan is f begrensd en f heeft een compacte drager (de *drager* van een functie f is de afsluiting van $\{x \mid f(x) \ne 0\}$). Er bestaat dan immers een $t \in \mathcal{T}$ met $|f| \le t$.

vi) Zij $A_n := (n-1,n]$ $(n = 1,2,\ldots)$ en $f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} 1_{A_n}$. Dan is

$$\| f \|_L \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \| 1_{A_n} \| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Als $B_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ $(n = 1,2,\ldots)$ en $g = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} 1_{B_n}$, dan is

$$\| g \|_L \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \infty.$$

§ 4. Integreerbare functies

Definitie 4.1. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet *Riemann-integreerbaar* (korter: R-integreerbaar) als er een rij trapfuncties $t_1, t_2, \ldots$ bestaat met $\| f - t_n \|_R \to 0$ voor $n \to \infty$. f heet *Lebesgue-integreerbaar* (L-integreerbaar) als er een rij trapfuncties $t_1, t_2, \ldots$ bestaat met $\| f - t_n \|_L \to 0$ $(n \to \infty)$.

De verzameling van $\begin{cases} \text{Riemann-integreerbare} \\ \text{Lebesgue-} \quad " \end{cases}$ functies heet $\begin{cases} \mathcal{R} \\ \mathcal{L} \end{cases}$

Uit $\| g \|_L \le \| g \|_R$ volgt $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$.

We zien ook dat $\| g \|_R < \infty$ als $g \in \mathcal{R}$ en $\| g \|_L < \infty$ als $g \in \mathcal{L}$.
Immers $\| g \| \le \| t_n \| + \| g - t_n \|$.

Stelling 4.1. i) Als $t_n \in \mathcal{T}$, $\| f - t_n \|_L \to 0$ $(n \to \infty)$, dan bestaat $\lim_{n\to\infty} \int t_n$.
ii) Als ook $s_n \in \mathcal{T}$, $\| f - s_n \|_L \to 0$ $(n \to \infty)$, dan geldt $\lim_{n\to\infty} \int s_n = \lim_{n\to\infty} \int t_n$.

Bewijs. i) $|\int t_n - \int t_m| \le \| t_n - t_m \|_L \le \| f - t_n \|_L + \| f - t_m \|_L \to 0$ $(n,m \to \infty)$, zodat $(\int t_n)_{n=1}^{\infty}$ een fundamentaalrij is en derhalve convergent.
ii) $|\int t_n - \int s_n| \le \| t_n - s_n \| \le \| f - t_n \| + \| f - s_n \| \to 0$ $(n \to \infty)$, zodat $\lim \int t_n = \lim \int s_n$. □

Op grond van stelling 4.1 is de volgende definitie gerechtvaardigd.

Definitie 4.2. Als $f \in \mathcal{L}$ ($f \in \mathcal{R}$) en $\|f-t_n\|_L \to 0$ ($n \to \infty$) ($\|f-t_n\|_R \to 0$ ($n \to \infty$)), dan heet

$$\int f := \int f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int t_n$$

de *Lebesgue-integraal* (*Riemann-integraal*) van f.

Het is duidelijk dat voor $f \in \mathcal{R}$ de Lebesgue-integraal van f gelijk is aan de Riemann-integraal van f. Gewoonlijk spreken we kortweg over de *integraal* van f. Ook zien we dat voor $t \in \mathcal{T}$ de nieuwe integraal met die van Definitie 2.3 samenvalt (neem $t_n = t$ in Definitie 4.2).

Stelling 4.2. Als $f,g \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{R}$), $\alpha \in \mathbb{R}$, dan

i) $f+g \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{R}$) en $\int(f+g) = \int f + \int g$

ii) $\alpha f \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{R}$) en $\int(\alpha f) = \alpha \int f$

iii) $f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$
$f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$, $|\int f| \leq \int |f|$

iv) $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g) \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{R}$) .

Bewijs. Laat $\|f-t_n\| \to 0$, $\|g-s_n\| \to 0$.

i) Er geldt $\|(f+g)-(t_n+s_n)\| \leq \|f-t_n\| + \|g-s_n\| \to 0$, dus
$\int(f+g) = \lim \int(t_n+s_n) = \lim \int t_n + \lim \int s_n = \int f + \int g$.

ii) gaat analoog.

iii) Als $\|f-t_n\| \to 0$ en $s_n := |t_n|$, dan is $s_n \geq 0$ en $|f-s_n| \leq |f-t_n|$ en dus $\|f-s_n\| \leq \|f-t_n\| \to 0$. Hieruit volgt $\int f = \lim_{n\to\infty} \int s_n \geq 0$.

iv) $\| |f| - |t_n| \| \leq \|f-t_n\|$ (want $||f| - |t_n|| \leq |f-t_n|$, zie Stelling 3.1 iii), $\max(f,g) = \frac{1}{2}\{f+g + |f-g|\}$, $\min(f,g) = \frac{1}{2}\{f+g - |f-g|\}$. □

Stelling 4.3.

i) Als $f \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{R}$), $f \geq 0$ dan is $\int f = \|f\|_L$ ($\|f\|_R$).

ii) Als $f \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{R}$), dan is $|\int f| \leq \|f\|_L$ ($\|f\|_R$) .

Bewijs. i) Als $\|f-t_n\| \to 0$, $t_n \geq 0$ dan geldt $\|t_n\| \to \|f\|$, want $\big|\|f\| - \|t_n\|\big| \leq \|f-t_n\|$ (zie Stelling 3.1.v). Dus

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int t_n = \lim_{n\to\infty} \|t_n\| = \|f\|.$$

ii) $$\left|\int f\right| \leq \int |f| \leq \|f\|.$$ □

Als $f \in \mathcal{R}$, dan geldt $\|f\|_L = \|f\|_R$, immers:

$$\|f\|_L = \| |f| \|_L = \int |f| dx = \| |f| \|_R = \|f\|_R.$$

Hieruit volgt in het bijzonder, dat $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1]} \notin \mathcal{R}$ (zie Voorbeeld 3.1.iv). Wel geldt $f \in \mathcal{L}$, want $\|f-0\|_L = 0$ en $0 \in \mathcal{T}$. Ook zien we dat f begrensd is en compacte drager heeft als $f \in \mathcal{R}$ (want $\|f\|_R < \infty$). De functies f en g uit Voorbeeld 3.1.vi zijn echter wel L-integreerbaar. Bijvoorbeeld:

als $t_n := \sum_{k=1}^{n} k^{-2} 1_{A_k}$ dan geldt

$$\|f-t_n\|_L = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2} 1_{A_k}\|_L \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Stelling 4.4. Als $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\|f_n - f\|_L \to 0$ ($\|f_n - f\|_R \to 0$), dan is $f \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ en

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n .$$

Bewijs. Kies voor elke n een trapfunctie t_n met $\|f_n - t_n\| < \frac{1}{n}$. Dan geldt

$$\|f-t_n\| \leq \|f-f_n\| + \|f_n-t_n\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Dus f is integreerbaar. Verder $\left|\int f - \int f_n\right| \leq \|f-f_n\| \to 0$. □

Gevolg 4.1. Als $f,g \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ en $|g|$ is begrensd, dan is $fg \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$.

Bewijs. Als $t \in \mathcal{T}$, $s_n \in \mathcal{T}$, $\|g-s_n\| \to 0$, dan is $\|tg-ts_n\| \leq M\|g-s_n\| \to 0$, waar $M := \max|t|$. Bovendien geldt $ts_n \in \mathcal{T}$. Dus $tg \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$. Als $\|f-t_n\| \to 0$, dan geldt $\|fg-t_ng\| \leq N\|f-t_n\| \to 0$, waar $N := \sup|g|$. Bovendien is $t_n g \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ dus $fg \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$. □

§ 5. Convergentiestellingen van Lebesgue-integreerbare functies

In deze en de volgende paragraaf zullen we alleen over Lebesgue-normen, Lebesgue-integreerbare functies en Lebesgue-integralen spreken.
We zullen $\|f\|$ i.p.v. $\|f\|_L$ schrijven.

Stelling 5.1. Als $f_i \in \mathcal{L}$, $f_i \geq 0$, $f := \sum_{i=1}^{\infty} f_i$, $\|f\| < \infty$, dan is $f \in \mathcal{L}$ en $\int f = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i$.

Bewijs. Er geldt $\|f_1\| + \ldots + \|f_n\| = \int f_1 + \ldots + \int f_n = \int (f_1 + \ldots + f_n) =$ $= \|f_1 + \ldots + f_n\| \leq \|f\|$ omdat $0 \leq f_1 + \ldots + f_n \leq f$. Dus $\sum_1^{\infty} \|f_i\| < \infty$ en $\|f - (f_1 + \ldots + f_n)\| = \|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i\| \leq \sum_{n+1}^{\infty} \|f_i\| \to 0$ $(n \to \infty)$ (hier gaat het mis voor R-normen). Omdat $f_1 + \ldots + f_n \in \mathcal{L}$, volgt uit Stelling 4.4, dat $f \in \mathcal{L}$ en

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int (f_1 + \ldots + f_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \ . \qquad \square$$

Definitie 5.1. Een rij functies $(f_i)_1^{\infty}$ heet *gemajoreerd* als $f_i \in \mathcal{L}$ $(i = 1,2,\ldots)$ en $|f_i| \leq h$ voor zekere $h \in \mathcal{L}$.

Stelling 5.2 (Monotone-Convergentie-Stelling = MCS). Als $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, $f_i \in \mathcal{L}$, $f = \lim f_i$, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

a) $\|f\| < \infty$, b) $f \in \mathcal{L}$, c) $\lim \int f_i < \infty$, d) (f_i) is gemajoreerd.

Als deze beweringen gelden, dan is $\int f = \lim \int f_i$.

Bewijs. We tonen het volgende implicatieschema aan:

$$\begin{tikzcd} & & b \arrow[dr, Rightarrow] & \\ c \arrow[r, Rightarrow, shift left] & a \arrow[l, Rightarrow, shift left] \arrow[ur, Rightarrow] & & d \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $f_1 = 0$. Anders beschouwen we $u_i := f_i - f_1$, $u := f - f_1$. Dan is $0 = u_1 \leq u_2 \leq \ldots$, $u_i \in \mathcal{L}$, $u := \lim u_i$ en

a) $\|u\| < \infty \iff \|f\| < \infty$

b) $u \in \mathcal{L} \iff f \in \mathcal{L}$

c) $\lim \int u_i < \infty \iff \lim \int f_i < \infty$

d) (u_i) gemajoreerd $\iff$ (f_i) gemajoreerd

terwijl $\lim \int u_i = \lim \int f_i - \int f_1$.

Zij dus $f_1 = 0$. We definiëren $g_i := f_{i+1} - f_i$ $(i = 1,2,\ldots)$. Dan geldt

$$g_i \geq 0,\ g_i \in \mathcal{L},\ f = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \ .$$

"a $\Rightarrow$ b", "a $\Rightarrow$ c" : Als $\|f\| < \infty$, dan volgt uit Stelling 5.1, dat

$$f \in \mathcal{L},\ \int f = \sum_{1}^{\infty} \int g_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \int (f_{i+1} - f_i) = \lim_{i\to\infty} \int f_i \ .$$

"b $\Rightarrow$ d" : Als $f \in \mathcal{L}$, dan is (f_i) gemajoreerd door f.

"d $\Rightarrow$ a" : Als $f_i \leq h \in \mathcal{L}$, dan ook $f \leq h$, dus $\|f\| \leq \|h\| < \infty$.

"c $\Rightarrow$ a" : $\|f\| = \|\Sigma g_i\| \leq \Sigma \|g_i\| = \Sigma \int g_i = \lim \int f_i$. □

<u>Stelling 5.3</u> (Fatou). Laat $f_1, f_2, \ldots$ een gemajoreerde rij zijn. Dan geldt

i) $\sup f_i \in \mathcal{L},\ \int \sup f_i \geq \sup \int f_i$

ii) $\inf f_i \in \mathcal{L},\ \int \inf f_i \leq \inf \int f_i$

iii) $\underline{\lim}\, f_i \in \mathcal{L},\ \int \underline{\lim}\, f_i \leq \underline{\lim} \int f_i$

iv) $\overline{\lim}\, f_i \in \mathcal{L},\ \int \overline{\lim}\, f_i \geq \overline{\lim} \int f_i$.

<u>Bewijs</u>. Zij $|f_i| \leq h \in \mathcal{L}$.

i) Als $g_n := \max\limits_{i=1,\ldots,n} f_i$, dan geldt $g_n \in \mathcal{L}$, $g_1 \leq g_2 \leq \ldots$, $|g_n| \leq h$ en dus

(MCS) : $g := \lim g_n = \sup f_i \in \mathcal{L}$ en $\int g = \lim \int g_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} (\max\limits_{i=1,\ldots,n} f_i) = \sup \int f_i$

$(\max\limits_{i=1,\ldots,n} \int f_i \leq \int g_n$, omdat $f_i \leq g_n$ $(i = 1,\ldots,n))$.

ii) Vervang f_i door $-f_i$.

iii) Zij $g_n := \inf_{i \geq n} f_i$. Vanwege ii) geldt $g_n \in \mathcal{L}$ en $\int g_n \leq \inf_{i \geq n} \int f_i$.
Bovendien is $g_1 \leq g_2 \leq \ldots$, $|g_n| \leq h$. Derhalve (MCS) :

$$\underline{\lim}\, f_i = \lim_{n\to\infty} g_n =: g \in \mathcal{L} \quad \text{en}$$

$$\int g = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leq \lim_{n} (\inf_{i\geq n} \int f_i) = \underline{\lim} \int f_i \;.$$

iv) Vervang f_i door $-f_i$. □

Hieruit volgt onmiddellijk de bekende:

Gemajoreerde Convergentie Stelling (GCS) (Lebesgue). Als $f_1, f_2, \ldots$ een gemajoreerde rij is en $f_i \to f$, dan is $f \in \mathcal{L}$ en $\int f_i \to \int f$.

§ 6. Meetbare functies en verzamelingen

Meetbare functies zijn intuïtief gesproken functies die alleen daarom niet (Lebesgue-) integreerbaar zijn omdat ze te groot zijn. Zo is bijvoorbeeld de functie $f = 1$ niet Lebesgue-integreerbaar want $\|f\| = \infty$. Er geldt immers $f = \lim f_n$ waar $f_n := 1_{(-n,n]}$ een niet-dalende rij is. Omdat

$$\int f_n = 2n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

volgt uit MCS dat $\|f\| = \infty$.

We zullen het begrip meetbare functies definiëren d.m.v. een afknipoperator:

Definitie 6.1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Dan is

$$(K_N f)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{als } -N < x \leq N,\ |f(x)| \leq N \\ N & \text{"} \quad -N < x \leq N,\ f(x) > N \\ -N & \text{"} \quad -N < x \leq N,\ f(x) < -N \\ 0 & \text{"} \quad x \notin (-N,N]. \end{cases}$$

Definitie 6.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet *meetbaar* als $K_N f \in \mathcal{L}$ voor elke $N \in \mathbb{N}$.
De verzameling der meetbare functies heet $\mathcal{M}$.

Stelling 6.1. $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$.

Bewijs. Als $f \in \mathcal{L}$, dan is $K_N f = \min\{N1_{(-N,N]}, \max(-N1_{(-N,N]}, f)\} \in \mathcal{L}$. □

Stelling 6.2. Als $f_n \to f$, $f_n \in \mathcal{M}$, dan is $f \in \mathcal{M}$.

Bewijs. $K_N(f) = \lim K_N(f_n) \in \mathcal{L}$ (GCS), want de rij $(K_N(f_n))$ wordt gemajoreerd door $N1_{(-N,N]}$. □

Stelling 6.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is dan en slechts dan meetbaar als er een rij $f_1, f_2, \ldots$ met $f_i \in \mathcal{L}$ bestaat zodat $f_i \to f$.

Bewijs. Als $f_i \in \mathcal{L}$, $f = \lim f_i$, dan is $f \in \mathcal{M}$ vanwege Stellingen 6.1 en 6.2. Als $f \in \mathcal{M}$, dan geldt $K_n(f) \in \mathcal{L}$, $K_n(f) \to f$ $(n \to \infty)$. □

Gevolg 6.1. Als $f,g \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dan is $f+g$, αf, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g) \in \mathcal{L}$.

Uit Gevolg 4.1 volgt ook dat $fg \in \mathcal{M}$ als $f,g \in \mathcal{M}$, want $K_n(f)K_n(g) \to fg$ en $K_n(f)K_n(g) \in \mathcal{L}$.

Stelling 6.4. $f \in \mathcal{M}$, $\|f\| < \infty \iff f \in \mathcal{L}$.

Bewijs. " $\Leftarrow$ " is bekend, " $\Rightarrow$ " : Er geldt $K_N(|f|) \uparrow |f|$, en vanwege $|f| \in \mathcal{M}$: $K_N|f| \in \mathcal{L}$. Daar $\|f\| < \infty$ volgt uit MCS dat $|f| \in \mathcal{L}$. Hieruit volgt, dat de rij $K_n(f)$ (door $|f|$) gemajoreerd naar f convergeert voor $n \to \infty$, zodat $f \in \mathcal{L}$ vanwege GCS. □

Definitie 6.3. $A \subset \mathbb{R}$ heet (Lebesgue-) meetbaar als $1_A \in \mathcal{M}$. De verzameling van meetbare verzamelingen wordt aangegeven door Λ.

Stelling 6.5.

i) $\Omega \subset \Lambda$

ii) $\mathbb{R} \in \Lambda$

iii) $A \in \Lambda \Rightarrow \mathbb{R}\setminus A \in \Lambda$

iv) $A_1, A_2, \ldots \in \Lambda \Rightarrow \cap A_i, \cup A_i \in \Lambda$.

De eigenschappen ii), iii), iv) en $\emptyset \in \Lambda$ spreken uit dat Λ een σ-*algebra* is.

Bewijs. i) $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$.

ii) Uit de inleiding van deze paragraaf volgt dat $1 \in \mathcal{M}$.

iii) $1_{\mathbb{R}\setminus A} = 1 - 1_A$.

iv) $1_{\cup A_i} = \sup 1_{A_i}$

$1_{\cap A_i} = \inf 1_{A_i}$. □

Opmerking. Als $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{M}$, en $\sup f_i < \infty$, dan geldt $\sup f_i \in \mathcal{M}$ want $\sup f_i = \lim_{n\to\infty} \max_{i=1,\ldots,n} (f_1,\ldots,f_n)$. Analoog voor $\inf f_i$.

Definitie 6.4. De *maat* $\lambda(A)$ van een meetbare verzameling A wordt gedefinieerd door

$$\lambda(A) := \| 1_A \| .$$

Eigenschap 6.1. i) Op Ω valt λ samen met de in Definitie 1.4 gedefinieerde lengte.

ii) Als $A_1, A_2, \ldots \in \Lambda$ onderling disjunct zijn, dan is $\lambda(\cup A_i) = \Sigma\lambda(A_i)$, d.w.z. ook op Λ is λ σ-additief.

Dit volgt uit Stelling 5.1. Bedenk dat we een som ∞ definiëren als ze divergeert of als er termen in staan die ∞ zijn.

Definitie 6.5. Als $A \in \Lambda$ en $f \in \mathcal{M}$, dan is

$$_A\!\int f(x)dx := {}_A\!\int f := \int f1_A$$

als het rechterlid is gedefinieerd, d.w.z. als $f1_A \in \mathcal{L}$.

Als $A = (a,b]$, schrijven we

$$_a\!\int^b f(x)dx := {}_A\!\int f.$$

De notatie $_A\!\int f$ zullen we ook gebruiken als f niet op de hele $\mathbb{R}$ is gedefinieerd, maar wel $f1_A \in \mathcal{L}$ (f moet dan wel op A zijn gedefinieerd).

Stelling 6.6. Als $\| 1_A \| = 0$, dan is $A \in \Lambda$ en $\lambda(A) = 0$. Algemener, als $\|f\| = 0$, dan is $f \in \mathcal{L}$ en $\int f = 0$.

Bewijs. Neem $t_n = 0$. □

Stelling 6.7. Open en gesloten verzamelingen zijn meetbaar, $\lambda((a,b)) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = \lambda([a,b]) = b-a$, $\lambda(\{a\}) = 0$.

Bewijs. We hebben in Voorbeeld 3.1.i gezien dat $\| 1_{\{a\}} \| = 0$, dus $\{a\} \in \Lambda$, $\lambda(\{a\}) = 0$. Verder is $(a,b) = (a,b] \setminus \{b\}$, $[a,b) = (a,b) \cup \{a\}$, $[a,b] = \{a\} \cup (a,b]$. We zien in het bijzonder dat open intervallen meetbaar zijn. Omdat elke open verzameling te schrijven is als aftelbare of eindige vereniging van open intervallen volgt hieruit dat elke open verzameling meetbaar is (Stelling 6.5.iv). Uit Stelling 6.5.iii volgt nu dat elke gesloten verzameling in Λ is. □

We zien ook dat

$$_{\{a\}}\int f = \int f 1_{\{a\}} = \int f(a) 1_{\{a\}} = f(a)\lambda(1_{\{a\}}) = 0$$

en

$$_{[a,b]}\int f = {}_{(a,b]}\int f - {}_{\{a\}}\int f = {}_a\int^b f(x)dx.$$

Evenzo

$$_{(a,b)}\int f = {}_a\int^b f(x)dx.$$

De volgende stelling is vaak handig om na te gaan of een functie meetbaar is.

Stelling 6.8. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is dan en slechts dan meetbaar als $\{x \mid f(x) > \alpha\} \in \Lambda$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bewijs. " $\Rightarrow$ ". Als $f \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dan is f_n gedefinieerd door

$$f_n(x) := \min\{1, n(f(x) - \min(f(x), a))\}$$

meetbaar. Er geldt $f_n \to 1_A$, waar $A := \{x \mid f(x) > a\}$.
Dus $1_A \in \mathcal{M}$ en $A \in \Lambda$.
" $\Leftarrow$ ". Voor alle $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ is

$$A_{nk} := \{x \mid \frac{k-1}{n} < f(x) \le \frac{k}{n}\} \in \Lambda.$$

Er geldt $\bigcup_k A_{nk} = \mathbb{R}$. We definiëren

$$f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{n} 1_{A_{kn}} .$$

Dan is $f_n \in \mathcal{M}$ en $|f-f_n| \le \frac{1}{n}$, dus $f \in \mathcal{M}$. □

Gevolg 6.2. Monotone functies en continue functies zijn meetbaar.

In Stelling 6.8 kan men de verzameling $A(\alpha) := \{x \mid f(x) > \alpha\}$ vervangen door een van de verzamelingen: $B(\alpha) := \{x \mid f(x) < \alpha\}$, $C(\alpha) := \{x \mid f(x) \leq \alpha\}$, $D(\alpha) := \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$. Want $C(\alpha) = \mathbb{R} \setminus A(\alpha)$, $B(\alpha) = \mathbb{R} \setminus D(\alpha)$,

$$A(\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\alpha + \tfrac{1}{n}),\ D(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\alpha - \tfrac{1}{n}).$$

Gevolg 6.3. Als $f \in \mathcal{M}$, $f \neq 0$, dan $1/f \in \mathcal{M}$.

§ 7. Verdere eigenschappen van integreerbare functies

Definitie 7.1. We noemen $A \subset \mathbb{R}$ *Riemann-meetbaar* als $1_A \in \mathcal{R}$.

Voorbeeld 7.1. i) Als $A \in \Omega$, dan is A R-meetbaar.

ii) $\{a\}$, (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ zijn R-meetbaar.

Immers $\| 1_{\{a\}} - 0 \|_R = 0$, $1_{(a,b)} = 1_{(a,b]} - 1_{\{b\}}$, etc.

Definitie 7.2. Als S (R of L)-meetbaar is, en $f : S \to \mathbb{R}$ dan zeggen we dat f (R of L)-integreerbaar is, als de functie

$$f1_S := \begin{cases} f & \text{op } S \\ 0 & \text{buiten } S \end{cases}$$

(R of L)-meetbaar is.

Stelling 7.1. Een continue functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is R-integreerbaar.

Bewijs. We definiëren t_n door $t_n = 0$ buiten $(0,1]$, $t_n(x) = f(\frac{k}{n})$ op $(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ $(k = 1,\dots,n)$. Dan geldt $|f(x) - t_n(x)| \leq s_n(x)$ waar $s_n(x) = 0$ buiten $(-\frac{1}{n}, 1]$, $s_n(x) = f(0)$ op $(-\frac{1}{n}, 1]$

$$s_n(x) = \max_{\frac{k-1}{n} \leq \xi \leq \frac{k}{n}} |f(\xi) - f(\tfrac{k}{n})| \quad \text{voor } \frac{k-1}{n} \leq \xi \leq \frac{k}{n}.$$

Op grond van de uniforme continuïteit van f op $[0,1]$ geldt $s_n(x) \to 0$ $(n \to \infty,\ x \in (0,1])$ en dus $\| s_n \| \to 0$ $(n \to \infty)$. □

Opmerking. Dat f L-integreerbaar is volgt onmiddellijk uit Gevolg 6.2.

<u>Definitie 7.3</u>. Zij $f : \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}$, waar $S \subset \mathbb{R}$ en zij $\Upsilon_x\, f(x,y) \in \mathcal{L}$ voor elke $y \in S$. Als er een functie $h \in \mathcal{L}$ bestaat met $|f(x,y)| \le h(x)$ $((x,y) \in \mathbb{R} \times S)$, dan heet f *gemajoreerd* (door h).

<u>Stelling 7.2</u>. Zij $f : \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}$ gemajoreerd en laat $f(x,y) \to g(x)$ voor $y \to y_0$, $y \in S$, waar y_0 een verdichtingspunt van S is (of $y_0 = \infty$ en $\sup S = \infty$, resp. $y_0 = -\infty$, $\inf S = -\infty$). Dan geldt $g \in \mathcal{L}$ en $\int f(x,y)dx \to \int g(x)dx$ $(y \to y_0,\ y \in S)$.

<u>Bewijs</u>. Kies een rij $y_n \in S$ met $y_n \to y_0$. Dan is de rij (f_n) met $f_n(x) := f(x,y_n)$ gemajoreerd en $g = \lim_{n\to\infty} f_n$. Dus $g \in \mathcal{L}$ (GCS) en $\int f(x,y_n)dx \to \int g(x)dx$. Als $\int f(x,y)dx \to \int g(x)dx$ $(y \to y_0,\ y \in S)$ niet geldt, dan bestaat er een rij $z_n \in S$ met $z_n \to y_0$ zodat $\int f(x,z_n)dx \not\to g(x)dx$, maar dit is in strijd met GCS omdat $(\Upsilon_x\, f(x,z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gemajoreerd naar g convergeert. □

<u>Gevolg 7.1</u>. i) Als $f : \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}$ gemajoreerd is, S een interval (eindig of oneindig) en $\Upsilon_y\, f(x,y)$ is continu op S voor elke x, dan is $\Upsilon_y \int f(x,y)dx$ continu op S.

ii) Als $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continu is, dan is $\Upsilon_y \int f(x,y)dx$ continu.

iii) Als $f : \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}$, waar S een interval is en als de volgende voorwaarden gelden:

α) f is differentieerbaar naar y,

β) f_y is gemajoreerd,

γ) $F(y) := \int f(x,y)dx$ convergeert,

dan geldt

$$F'(y) = \int f_y(x,y)dx\ .$$

<u>Bewijs</u>. $\dfrac{F(y+h) - F(y)}{h} = \int g(x,y,h)dx$, waar

$$g(x,y,h) := h^{-1}\{f(x,y,h) - f(x,y)\} \to f_y(x,y) \qquad (h \to 0)$$

en

$$|g(x,y,h)| = |f_y(x,y+\theta h)| \le \varphi(x),$$

als φ een majorerende functie van f_y is. Uit Stelling 7.2 volgt nu

$$\int g(x,y,h)dx \to \int f_y(x,y)dx$$

voor $h \to 0$. □

iv) Als f en f_y continu zijn op $[a,b] \times [c,d]$, dan is

$$\frac{d}{dy} \ {}_a\!\int^b f(x,y)dx = {}_a\!\int^b f_y(x,y)dx.$$

<u>Stelling 7.3</u>. Als $f \in \mathcal{L}[a,b]$, dan is $F := \Upsilon_y \ {}_a\!\int^y f(x)dx$ continu op $[a,b]$ en $f(a) = 0$.

<u>Bewijs</u>. $F(y) = {}_a\!\int^b f(x,y)dx$, waar $f(x,y) := f(x)1_{[a,y]}(x)$.
Er geldt $|f(x,y)| \le f(x)$, zodat f gemajoreerd is. Verder is
$\lim_{h \downarrow 0} f(x,y_0+h) = f(x,y_0)$ zodat $\lim_{h \downarrow 0} F(y_0+h) = F(y_0)$ en

$\lim_{h \uparrow 0} f(x,y_0+h) = f(x,y_0) - f(x)1_{\{y_0\}}(x)$, zodat ook $\lim_{h \uparrow 0} F(y_0+h) = F(y_0)$. □

<u>Stelling 7.4</u>. Als $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ voor elke $a > 0$ L-integreerbaar is op $[0,a)$, dan geldt $f \in \mathcal{L}([0,\infty))$ dan en slechts dan als ${}_0\!\int^y |f(x)|dx$ begrensd is voor $0 \le y < \infty$. In dat geval geldt

$${}_0\!\int^\infty f(x)dx = \lim_{y\to\infty} {}_0\!\int^y f(x)dx .$$

<u>Bewijs</u>. Definieer $h(x,y) := f(x)1_{[0,y]}(x)$. Omdat $\Upsilon_x \ h(x,y) \in \mathcal{L}$ en $h(x,y) \to f(x)$ $(y \to \infty)$ geldt $f \in \mathcal{M}$. Als $f \in \mathcal{L}$, dan is wegens $|h(x,y)| \le |f(x)|$ de functie h gemajoreerd en ${}_0\!\int^y |f(x)|dx = {}_0\!\int^\infty |h(x,y)|dx \le \|f\|$,

$${}_0\!\int^y f(x)dx \to {}_0\!\int^\infty f(x)dx .$$

Als ${}_0\!\int^y |f(x)|dx$ begrensd is, dan is wegens MCS $\|f\| < \infty$ en dus $f \in \mathcal{L}$. □

Dr.Ir. M.L.J. Hautus,
November 1973.

Technische Hogeschool Eindhoven,
Onderafdeling der Wiskunde.