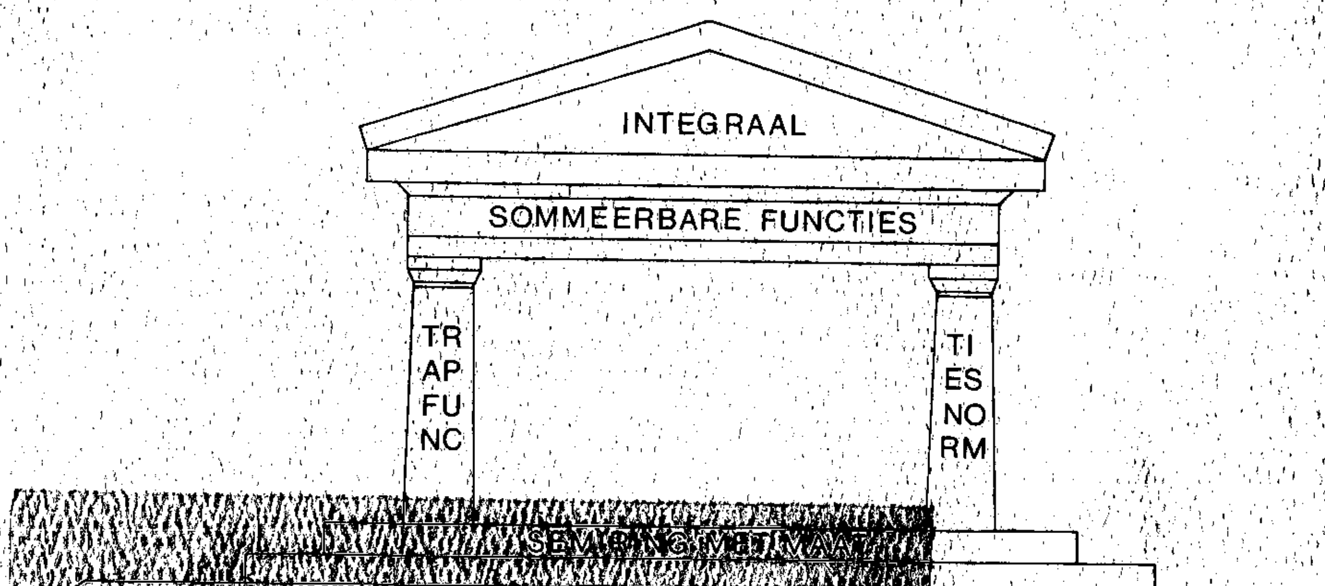
THE
Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.239
Prijs f. 4,00

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Maattheorie en Lebesgue-integratie

Syllabus van het college van
dr.ir. P. van der Steen



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

MAATTHEORIE

en

LEBESGUE-INTEGRATIE

Dr. Ir. P. van der Steen

voorjaarssemester 1982

Inhoudsbeschrijving

MAATTHEORIE en LEBESGUE-INTEGRATIE

Dr. Ir. P. van der Steen

voorjaarssemester 1982

JdG, 20 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Maattheorie en Lebesgue-integratie

Syllabus van het college van dr. ir. P. van der Steen

Voorjaarssemester 1982

mei '83

0. Inleiding.

We beschouwen een verzameling X, die we ook wel de ruimte zullen noemen. Elementen van X heten punten. Deelverzamelingen van X, dus elementen van P(X), heten "puntverzamelingen" of kortweg verzamelingen. Deze terminologie is meetkundig, maar er worden geen topologische eigenschappen van de ruimte X gepostuleerd.

Een verzameling van deelverzamelingen van X (d.i. een element van P(P(X))) heet een klasse.

1. Semiringen.

1.1. Definitie. Is Γ een klasse, dan is $\Omega(\Gamma)$ de klasse bestaande uit alle deelverzamelingen van de vorm $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ($A_i \in \Gamma$, A_i's onderling disjunct).

1.2. Definitie. De klasse Γ heet een semiring als

1°. $\emptyset \in \Gamma$

2°. $(A \in \Gamma \wedge B \in \Gamma) \Rightarrow (A \cap B \in \Omega(\Gamma) \wedge A \setminus B \in \Omega(\Gamma))$.

1.3. Voorbeelden.

1. $X = \mathbb{R}$, Γ bevat de lege verzameling, en verder alle cellen. Een cel is een interval $(a,b]$ ("rechtskoppige spelden"), waarbij a en b reëel zijn met $a < b$.

2. $X = \mathbb{R}$, Γ bevat $\emptyset$ en alle verzamelingen $(k,l]$ met $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$.

3. $X = \mathbb{R}$, Γ bevat $\emptyset$ en verder alle verzamelingen $(n,n+1]$ met $n \in \mathbb{Z}$.

4. $X = \mathbb{R}^n$, Γ als in voorbeeld 1. Een cel is nu een blokje

$$\{(x_1,\dots,x_n) \mid a_1 < x_1 \le b_1,\dots,a_n < x_n \le b_n\}.$$

1.4. Stelling. Is Γ een semiring, en schrijven we Ω i.p.v. $\Omega(\Gamma)$, dan is

1°. $\Gamma \subset \Omega$

2°. $(A \in \Gamma \wedge B \in \Gamma) \Rightarrow (A \cup B \in \Omega)$

3°. $P_i \in \Omega$, P_i's onderling disjunct $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \in \Omega$

4°. $(P \in \Omega,\ A \in \Gamma) \Rightarrow (P \setminus A \in \Omega \wedge P \cap A \in \Omega)$

5°. $A_i \in \Gamma\ (i = 1,2,3,\ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$

6°. $P_i \in \Omega\ (i = 1,2,3,\ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \in \Omega$

7°. $P_1 \in \Omega$, $P_2 \in \Omega \Rightarrow P_1 \cap P_2 \in \Omega$.

<u>Bewijs</u>.

1°. $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$, dus A heeft de vorm $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ met $A_i \in \Gamma$.

2°. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, enzovoorts.

3°. triviaal (aftelbaar $\times$ aftelbaar = aftelbaar).

4°. Zij $P \in \Omega$, dus $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \Gamma$ en onderling disjunct. Zij verder $A \in \Gamma$. Dan is $P \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A$. Stel $A_i \setminus A = P_i$, dan is $P_i \in \Omega$ en de P_i's zijn onderling disjunct. Derhalve ligt de vereniging der P_i's ook in Ω. Analoog $P \cap A \in \Omega$.

5°. De vereniging is in de volgende disjuncte delen te splitsen: A_1, $A_2 \setminus A_1$, $(A_3 \setminus A_2) \setminus A_1, \ldots$, en blijkens het voorafgaande behoort elk van deze delen tot Ω. Pas nu 3° toe.

6°. Dit volgt direct uit 5°.

7°. Dit volgt uit 4° en 6°. □

1.5. Enkele voorbeelden bij deze stelling ontlenen we aan de verzameling van <u>Cantor</u>. Haal uit $[0,1)$ het interval $[0.1,\ 0.2)$ weg (ternaire schrijfwijze); daarna $[0.01,\ 0.02)$ en $[0.21,\ 0.22)$ etc. Wat overblijft zijn de ternaire getallen die (in kortste schrijfwijze) geen enkele 1 bevatten. Noem deze verzameling S. S bevat <u>geen</u> <u>enkel</u> interval, dus $S \notin \Omega$. Wèl is $[0,1) \setminus S \in \Omega$. Met rechtskoppige spelden kan óók zo'n voorbeeld gemaakt worden.

Bij stelling $1.4.4^\circ$ geldt dus <u>niet</u> $P \in \Omega,\ A \in \Gamma \Rightarrow A \setminus P \in \Omega$.

Bij stelling $1.4.6^\circ$ geldt dus <u>niet</u> $P_i \in \Omega \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} P_i \in \Omega$. Neem als voorbeeld $P_i = [0,1)$ minus de eerste i Cantor intervallen. De $\bigcap_i P_i$ is nu S zelf, en $S \notin \Omega$.

2. Maat op een semiring.

2.1. Voorbereiding. Onder de verzameling van gegeneralizeerde reële getallen $\overline{\mathbb{R}}$ verstaan we $\mathbb{R} \cup \{\infty,-\infty\}$. In het systeem van de niet-negatieve gegeneralizeerde reële getallen voldoen optelling en vermenigvuldiging (met $0.\infty = 0$) aan de gewone regels; aftrekking is niet steeds mogelijk.

Als $\forall_{i\in\mathbb{N}} [0 \le a_i \le \infty]$, dan is $0 \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i \le \infty$.

Stellingen over herhaalde reeksen en dubbelreeksen gelden voor niet-negatieve gegeneralizeerde reële getallen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right),$$

enzovoorts.

2.2. Definitie. Laat Γ een semiring zijn, en laat aan elke $A \in \Gamma$ een gegeneralizeerd getal $\mu(A)$ zijn toegevoegd. Er zij voldaan aan

1°. $0 \le \mu(A) \le \infty$ voor alle $A \in \Gamma$

2°. $\mu(\emptyset) = 0$

3°. Is $A \in \Gamma$, $A_i \in \Gamma (i = 1,2,\ldots)$, A_i's onderling disjunct, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dan is $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Dan heet μ een maat op Γ.

Gevolg. μ is monotoon (d.i. $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$). Dit volgt uit definitie $1.2.2^\circ$.

2.3. Definitie. Als Γ een semiring van deelverzamelingen van X is, en μ een maat op Γ, dan zeggen we dat (X,Γ,μ) een maatruimte is. Als bovendien X vereniging is van aftelbaar vele A_i's met $A_i \in \Gamma$ en $\mu(A_i) < \infty$, dan heet (X,Γ,μ) sigmafiniet.

Opmerking. Als (X,Γ,μ) een sigmafiniete maatruimte is, dan is X te schrijven als vereniging van aftelbaar veel onderling disjuncte A_i's met $A_i \in \Gamma$ en $\mu(A_i) < \infty$. Dit blijkt uit het bewijs van $1.4.5^\circ$ en de monotonie van μ.

2.4. <u>Definitie</u>. Als (X,Γ_1,μ_1) en (X,Γ_2,μ_2) maatruimten zijn, en als voldaan is aan $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ en $\forall_{A\in\Gamma_1}[\mu_1(A) = \mu_2(A)]$, dan heet (X,Γ_2,μ_2) een <u>voortzetting</u> van (X,Γ_1,μ_1).

2.5. <u>Voorbeelden</u>.

1°. $X = \mathbb{R}$; Γ bevat de lege verzameling en alle cellen. Op $\mathbb{R}$ is een reële, monotoon niet-dalende, overal eindige functie g gegeven. Nu is μ gedefinieërd door $\mu(\emptyset) = 0$, en (als $-\infty < a < b < \infty$)

$$\mu((a,b]) = g(b+0) - g(a+0);$$

hierbij betekent $g(b+0)$ resp. $g(a+0)$ de limiet van $g(x)$ wanneer x van rechts af tot b resp. a nadert. Merk op dat $\forall_x g(x+0)$ overal rechtscontinu is. We zullen bewijzen dat μ een maat op Γ is (deze heet <u>Lebesgue-Stieltjes-maat</u>; in het bijzondere geval dat $g(x) = x$ (voor alle x) krijgen we de "gewone" <u>Lebesgue-maat</u>).

Laat A een cel zijn die de vereniging is van een aftelbaar stel disjuncte cellen $A_1, A_2, \ldots$. Noteer $A = (a,b]$, $A_i = (a_i, b_i]$. Nagenoeg triviaal is dat $\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) \le \mu(A)$, want er zijn cellen $B_1,\ldots,B_m$ te vinden zo dat

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m$$

een disjuncte splitsing van A is. Dus $\Sigma_1^\infty \mu(A_i) \le \mu(A)$. Zij $p > 0$. We zullen laten zien dat $\Sigma_1^\infty \mu(A_i) > \mu(A) - p$.

Verkort A tot $A^* = [a+\delta,b]$ en verleng elke A_i tot $A_i^* = (a_i, b_i+\delta_i)$. Daarbij worden $\delta > 0$ en $\delta_i > 0$ zó gekozen dat $g(a+\delta+0) < \frac{1}{2}p + g(a+0)$, $g(b_i+\delta_i+0) < 2^{-i-1}p + g(b_i+0)$. $A_1^*, A_2^*,\ldots$ zijn open, en A^* is compact. Volgens de stelling van Heine-Borel is er nu een n zo dat $(A_1^* \cup \ldots \cup A_n^*) \supset A^*$.

We maken van A_i^* weer een cel A_i^{**} door het rechtereindpunt toe te voegen en van A^* een cel A^{**} door het linkereindpunt weg te laten. Dan wordt A^{**} door $A_1^{**},\ldots,A_n^{**}$ overdekt (niet noodzakelijk disjunct). En $\mu(A^{**}) > \mu(A) - \frac{1}{2}p$, $\mu(A_i^{**}) < \mu(A_i) + 2^{-i-1}p$. Nu blijkt dat

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \mu(A) > \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i^{**}) - \mu(A^{**}) - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i-1}p - \tfrac{1}{2}p \ .$$

We kunnen een stel $C_1,\ldots,C_n$ vinden ($C_i \in \Gamma$) zó dat $C_i \Subset A_i^{**}$, terwijl de C's een disjuncte splitsing van A^{**} opleveren. Nu volgt uit $\Sigma_{i=1}^n \mu(C_i) = \mu(A^{**})$ dat $\Sigma_{i=1}^n \mu(A_i) - \mu(A) > -p$.

<u>Opmerking</u>. Als we $\mathbb{R}$ door $\mathbb{Q}$ vervangen, werkt voorbeeld 1° niet meer, zelfs niet bij het gewone geval $\mu((a,b]) = b - a$ (met $(a,b]$ bedoelen we nu de rationale getallen $> a$ en $\le b$). Om dat te laten zien kiezen we een $\varepsilon > 0$ en een aftelling $r_1, r_2, \ldots$ van $\mathbb{Q}$. Neem $A_0 = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$, en voor $i > 0$

$$A_i = \begin{cases} \emptyset \text{ als } r_i \in A_0 \cup \ldots \cup A_{i-1} \\ (s_i, r_i] \text{ anders,} \end{cases}$$

met $s_i = r_i - \frac{\varepsilon}{2^i} d_L(r_i, A_0 \cup \ldots \cup A_{i-1})$, $d_L(r,S)$ = linkerafstand van r tot $S = \inf_{s \in S, s < r} |r - s|$. Nu is $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = (0,1]$, $\Sigma_1^\infty \mu(A_i) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots = \varepsilon$, en het is een <u>disjuncte</u> splitsing zodra $\varepsilon < 1$.

2°. X is een willekeurige verzameling, Γ bestaat uit alle deelverzamelingen. Voor $A \in \Gamma$ is $\mu(A)$ = aantal elementen van A als A eindig is, en $\mu(A) = \infty$ als A oneindig is. Deze μ heet telmaat.

3°. X is een willekeurige verzameling. $\Gamma = \emptyset \cup \{\{x\} \mid x \in X\}$ (singletons). Neem $\mu(A)$ willekeurig ≥ 0 als $A \in \Gamma$, $A \neq \emptyset$, en $\mu(\emptyset) = 0$.

4°. Neem X, Γ als in voorbeeld $2.5.1^\circ$, en φ continu, $\varphi \ge 0$. Kies $\mu((a,b]) = \int_a^b \varphi(x)dx$. Dit is voorbeeld $2.5.1^\circ$ met $\int_0^x \varphi(t)dt = g(x)$.

5°. Kies in voorbeeld $2.5.1^\circ$ $g(x) = [x]$. Nu is $\mu((a,b])$ het aantal gehele getallen in $(a,b]$.

6°. $X = \mathbb{R}$, Γ_2 bestaat uit de lege verzameling en alle cellen, Γ_1 bevat de lege verzameling en alle cellen met gehele eindpunten; $\mu_2((a,b]) = g(b) - g(a)$ met $g = \Psi_x (x + \frac{1}{4}\sin \pi x)$, $\mu_1((k,l]) = l - k$ (als k en l geheel zijn en $l > k$). Nu is (X,Γ_2,μ_2) een voortzetting van (X,Γ_1,μ_1).

2.6. Stelling. Laat (X,Γ,μ) een sigmafiniete maatruimte zijn, en laat $A \in \Gamma$. Dan zijn A en $X\backslash A$ disjunct te splitsen:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad X\backslash A = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

met $B_i \in \Gamma$, $C_i \in \Gamma$, $\mu(B_i) < \infty$, $\mu(C_i) < \infty$.

Bewijs. Zij $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ een disjuncte splitsing van de ruimte met $\mu(A_j) < \infty$ voor alle j (zie 2.3, opmerking). Neem nu

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap A_j) \quad \text{en} \quad X\backslash A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j\backslash A) \ ;$$

daar $A \cap A_j \in \Omega(\Gamma)$, $A_j\backslash A \in \Omega(\Gamma)$, zijn deze $A \cap A_j$ en $A_j\backslash A$ wéér disjunct te splitsen:

$$A \cap A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}, \quad A_j\backslash A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{jk} \ .$$

Daar $B_{jk} \subset A_j$ en $C_{jk} \subset A_j$ hebben B_{jk} en C_{jk} eindige maat (zie 2.2, gevolg). $\square$

3. Norm van een gegeneralizeerde functie.

3.1. (X,Γ,μ) is een sigmafiniete maatruimte.

3.2. Definitie. Als $S \subset X$, dan is de karakteristieke functie van S de op X gedefinieerde functie die 1 is op S en 0 op $X\backslash S$. Deze wordt gewoonlijk met χ_S aangeduid.

Gemakshalve zullen we de karakteristieke functie van S ook met S aanduiden. Dus $S(x) = 1$ als $x \in S$, $S(x) = 0$ als $x \notin S$. Uit de context blijkt doorgaans direct of met S de verzameling dan wel de functie is bedoeld.

3.3. Voorbeeld. Als S de vereniging is van $S_1, S_2, \ldots$, en als deze S_i's onderling disjunct zijn, dan is $S = \Sigma_1^{\infty} S_i$.

Als de vereniging van $T_1, T_2, \ldots$ de verzameling T bedekt, dan is $T \le \Sigma_1^{\infty} T_i$.

3.4. Definitie. Zij f een afbeelding van X in $\overline{\mathbb{R}}$. We beschouwen alle mogelijke functies van de vorm $\Sigma_1^{\infty} \alpha_i A_i$, met $0 \le \alpha_i < \infty$, $A_i \in \Gamma$, en met de eigenschap dat voor alle x

$$\sum_1^\infty \alpha_i A_i(x) \geq |f(x)| .$$

Bij elk dezer sommen vormen we $\Sigma_1^\infty \alpha_i \mu(A_i)$. Het infimum van al deze uitdrukkingen heet de norm van f (notatie $\|f\|$). Dus $0 \leq \|f\| \leq \infty$.

Opmerking. Bij elke f bestaat minstens één som $\Sigma_1^\infty \alpha_i A_i \geq |f|$. We kiezen nl. een stel $A_1, A_2, \ldots$ met $A_1 + A_2 + \ldots \geq X$, en nemen

$$A_1 + A_1 + A_2 + A_1 + A_2 + A_3 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_1 + \ldots .$$

3.5. Stelling.

1°. f en $|f|$ hebben dezelfde norm.

2°. Is α een reëel getal, dan is $\|\alpha f\| = |\alpha| . \|f\|$.

3°. Is $|f| \leq \Sigma_1^\infty |f_i|$, dan is $\|f\| \leq \Sigma_1^\infty \|f_i\|$.

4°. Als $|f| \leq |g|$, dan is $\|f\| \leq \|g\|$.

Bewijs.

1°. In de definitie van $\|f\|$ komt slechts de absolute waarde van f voor, en daar de absolute waarde van $|f|$ weer $|f|$ is, hebben f en $|f|$ dezelfde norm.

2°. Is $\alpha = 0$ dan is $\|\alpha f\| = \|0\| = 0$; is $\alpha \neq 0$ dan vinden we alle voor de definitie van $\|\alpha f\|$ benodigde sommen $\Sigma_1^\infty \beta_i A_i(x)$ door de in de definitie van $\|f\|$ benodigde sommen met $|\alpha|$ te vermenigvuldigen. De verzameling der getallen waarvan bij de definitie van $\|\alpha f\|$ het infimum genomen moet worden is dus te vinden door de getallen van de overeenkomstige verzameling bij f allemaal met $|\alpha|$ te vermenigvuldigen.

3°. We mogen aannemen dat alle $\|f_i\|$ eindig zijn, want anders is de bewering triviaal. Kies nu $\varepsilon > 0$. Bij elke i zoeken we getallen $\alpha_{ij} \geq 0$ en A_{ij}'s met $\Sigma_{j=1}^\infty \alpha_{ij} A_{ij} \geq |f_i|$, $\Sigma_{j=1}^\infty \alpha_{ij} \mu(A_{ij}) \leq \|f_i\| + 2^{-i}\varepsilon$.
Nu is $\Sigma_{i=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \alpha_{ij} A_{ij} \geq |f|$, en $\Sigma_{i=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \alpha_{ij} \mu(A_{ij}) \leq \Sigma_{i=1}^\infty \|f_i\| + \varepsilon$. Het linkerlid van de laatste ongelijkheid is één der sommen uit de collectie waarvan $\|f\|$ het infimum is. Dus $\|f\| \leq \Sigma_{i=1}^\infty \|f_i\| + \varepsilon$. Daar dit voor elke $\varepsilon > 0$ geldt, volgt het gestelde.

4°. Volgt uit 3°: $|f| \leq |g|$ impliceert $|f| \leq |g| + |0| + |0| + \ldots$, enz.□

3.6. Definitie. Een deel N van X heet een nulverzameling als voor de karakteristieke functie geldt $\|N\| = 0$.

3.7. Stelling.

1°. Is N_1 een nulverzameling en $N_2 \subset N_1$, dan is N_2 ook een nulverzameling.
2°. Zijn N_1 en N_2 nulverzamelingen, dan ook $N_1 \cap N_2$ en $N_1 \backslash N_2$.
3°. Zijn $N_1, N_2, \ldots$ nulverzamelingen, dan is $\cup_{j=1}^{\infty} N_j$ het ook.

Bewijs. 1° volgt uit 3.5.4°; 2° uit 1°; 3° uit 3.5.3°. □

3.8. Definitie. Laat $B(x)$ een predicaat op X zijn. We zeggen dat $B(x)$ bijna overal geldt, of $B(x)$ geldt p.p. (= presque partout), of kortweg $B(\text{p.p.})$ als er een nulverzameling N is zó dat $B(x)$ geldt voor alle $x \in X \backslash N$.

Opmerking. Als $B_1(\text{p.p.})$, $B_2(\text{p.p.}), \ldots$, dan geldt $\forall_n\ [B_n]$ (p.p.) (dit volgt uit 3.7.3°).

3.9. Definitie. Een gegeneralizeerde functie is een functie waarvan het definitiegebied van de vorm $X \backslash N$ is, waarin N een nulverzameling, en waarvan het waardengebied bestaat uit de gegeneralizeerde reële getallen.

Men zegt ook wel dat zo'n functie bijna overal gedefinieerd is.

Bij relaties tussen gegeneralizeerde functies, zoals $f_1 \geq f_2$, $f_1 + f_2 = f_3$ bedoelen we dat de aangeduide betrekking tussen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ (die pas zin heeft als x in alle betrokken definitiegebieden ligt) voor bijna elke x geldt. Behalve de uitzonderingen wegens gebrek aan gedefinieerde waarden mogen er dus nog andere zijn; alles bij elkaar vormen ze nog slechts een nulverzameling. Als we er extra de aandacht op willen vestigen, schrijven we nog wel $f_1 \geq f_2$ (p.p.) i.p.v. $f_1 \geq f_2$, etc..

3.10. Definitie. Als f_1 en f_2 gegeneralizeerde functies zijn, met definitiegebieden $X \backslash N_1$, $X \backslash N_2$, dan wordt onder $\max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2)$, de op $X \backslash (N_1 \cup N_2)$ gedefinieerde gegeneralizeerde functies verstaan met waarden $\max(f_1(x), f_2(x))$, $\min(f_1(x), f_2(x))$. Als $f_2 \geq 0$, dan is $\rho(f_1, f_2)$ de op $X \backslash (N_1 \cup N_2)$ gedefinieerde functie met de waarden

$$\rho(f_1,f_2)(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{als} \quad |f_1(x)| \leq f_2(x) \\ f_2(x) & \text{als} \quad f_1(x) > f_2(x) \\ -f_2(x) & \text{als} \quad f_1(x) < -f_2(x) \end{cases} .$$

Zijn f_1 en f_2 p.p. eindig, en zijn α_1,α_2 eindige getallen dan is $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ de functie met waarden $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, gedefinieerd overal op $X\backslash(N_1 \cup N_2)$ waar $f_1(x)$ en $f_2(x)$ eindig zijn.

3.11. Definitie. Als f een gegeneralizeerde functie is, dan is $\|f\|$ gedefinieerd als $\|f_0\|$, waarbij $f_0(x) = f(x)$ voor alle x waar f(x) gedefinieerd is en $f_0(x) = 0$ voor alle x waar f(x) niet gedefinieerd is.

3.12. Opmerking. Met behulp van 3.7 is gemakkelijk in te zien dat stelling 3.5 ook geldt als f,g,f_i gegeneralizeerde functies zijn.

3.13. Stelling. Laat f een gegeneralizeerde functie zijn.

1°. Als $f(x) = 0$ (p.p.) dan is $\|f\| = 0$.

2°. Als $\|f\| = 0$ dan is $f(x) = 0$ (p.p.).

3°. Als $\|f\| < \infty$ dan is $|f(x)| < \infty$ (p.p.).

Bewijs.

1°. Als N een verzameling is met $f(x) = 0$ voor $x \in X\backslash N$, dan is $|f| \leq N + N + N + \ldots$, dus $\|f\| \leq \|N\| + \|N\| + \ldots$. Uit $\|N\| = 0$ volgt dus $\|f\| = 0$.

2°. Als N de verzameling is van alle x met $f(x) \neq 0$, dan is $N \leq |f| + |f| + \ldots$, dus $\|N\| \leq \|f\| + \|f\| + \ldots$. Uit $\|f\| = 0$ volgt dus $\|N\| = 0$.

3°. Als S de verzameling is van alle x met $|f(x)| = \infty$ dan is (voor elke $n \in \mathbb{N}$) $nS \leq |f|$, dus $n\|S\| \leq \|f\|$. Uit $\|f\| < \infty$ volgt dus $\|S\| = 0$. □

3.14. Opmerking. Als f en g bijna overal gelijk zijn dan is $\|f - g\| = 0$ dus $\|f\| = \|g\|$.

3.15. Opmerking. Bij de gewone Lebesgue-maat zijn alle aftelbare verzamelingen nulverzamelingen, en ook de verzameling van Cantor (zie 1.5) is een nulverzameling.

4. Trapfuncties.

4.1. (X,Γ,μ) is een sigmafiniete maatruimte.

4.2. Definitie. Een trapfunctie is een overal op X gedefiniëerde reële functie van de gedaante $\Sigma_1^\infty \beta_i B_i$, met $-\infty < \beta_i < \infty$, $B_i \in \Gamma$, waarbij voldaan is aan $X = \Sigma_1^\infty B_i$ (hetgeen betekent dat de B_i's twee aan twee disjunct zijn en samen X vormen), en bovendien voldaan is aan de voorwaarde $\Sigma_1^\infty |\beta_i| \ \mu\ (B_i) < \infty$.

Merk op dat de disjunctie en absolute convergentie niet was geëist bij de som $\Sigma\alpha_i A_i$ in definitie 3.4; daar staat tegenover dat thans de β_i's ook negatief mogen zijn.

De verzameling der trapfuncties geven we aan met T.

4.3. Voorbeeld. Is $A \in \Gamma$, $\mu(A) < \infty$, dan is A een trapfunctie. We hebben namelijk een disjuncte splitsing $X \setminus A = \Sigma_1^\infty C_i$ (zie stelling 2.6), waaruit volgt: $A = 1.A + \Sigma_1^\infty 0.C_i$.

4.4. We moeten er rekening mee houden dat een trapfunctie vaak op mêêr dan een manier in de vorm $\Sigma\beta_i B_i$ geschreven kan worden. We vinden dan wel dezelfde waarde van $\Sigma\beta_i \ \mu(B_i)$, zoals blijkt uit

Hulpstelling. Als $X = \Sigma_1^\infty B_i = \Sigma_1^\infty C_j$, alle $B_i \in \Gamma$, alle $C_j \in \Gamma$, $\Sigma_1^\infty \beta_i B_i = \Sigma_1^\infty \gamma_j C_j$, $\Sigma_1^\infty |\beta_i| \ \mu\ (B_i) < \infty$, dan is ook $\Sigma_1^\infty |\gamma_j| \ \mu\ (C_j) < \infty$, en $\Sigma_1^\infty \beta_i \ \mu(B_i) = \Sigma_1^\infty \gamma_j \ \mu\ (C_j)$.

Bewijs. Laat α een getal zijn dat in de rij $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ voorkomt. Zij

$$I := \{i \in \mathbb{N} \mid \beta_i = \alpha\} , \quad J := \{j \in \mathbb{N} \mid \gamma_j = \alpha\}.$$

Dan is

$$\sum_{i\in I} B_i = \sum_{j\in J} C_j.$$

Bij elk paar i,j vormen we E_{ijk}'s (uit Γ) met

$$B_i \cap C_j = \sum_{k\in\mathbb{N}} E_{ijk}.$$

Nu is

$$B_i = \sum_{j\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} E_{ijk}\ ,\ C_j = \sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathbb{N}} E_{ijk},$$

dus

$$\mu(B_i) = \sum_{j\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_{ijk}),\ \mu(C_j) = \sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_{ijk}),$$

zodat

$$\sum_{i\in I} \mu(B_i) = \sum_{j\in J} \mu(C_j).$$

Als we dit met $|\alpha|$ vermenigvuldigen en over de aftelbaar vele waarden van α sommeren, komt er $\Sigma|\beta_i|\ \mu(B_i) = \Sigma|\gamma_j|\ \mu(C_j)$.

Als we met α inplaats van $|\alpha|$ vermenigvuldigen en optellen, komt er $\Sigma\beta_i\ \mu\ (B_i) = \Sigma\gamma_j\ \mu\ (C_j)$, want op grond van de inmiddels vastgestelde absolute convergentie is de hergroepering van termen toegestaan. □

4.5. Definitie. Als t een trapfunctie is, en $t = \Sigma\beta_i B_i$ (met $\Sigma B_i = X$, $\Sigma\ |\beta_i|\ \mu\ (B_i) < \infty$) dan heet $\Sigma\beta_i\ \mu\ (B_i)$ de integraal van t (voorlopige notatie L(t); volgens de hulpstelling uit 4.4 hangt de waarde van $\Sigma\beta_i\ \mu\ (B_i)$ alleen van t af, en niet van de speciale representatie).

4.6. Stelling. Als s en t trapfuncties zijn, en β en γ eindige getallen, dan zijn ook $\beta s + \gamma t$, $|s|$, max (s,t), min (s,t) trapfuncties, en $L(\beta s + \gamma t) = \beta L(s) + \gamma L(t)$. Is verder φ een afbeelding van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ met $|\varphi(u)| \leq C\ |u|$ voor alle u (met constante C), dan is ook $\varphi(s)$ een trapfunctie.

Bewijs. We beginnen met het laatste: als $s = \Sigma\beta_i B_i$, $\Sigma|\beta_i|\mu(B_i) < \infty$, dan is $\varphi(s) = \Sigma\ \varphi(\beta_i)B_i$, $\Sigma|\varphi(\beta_i)\ |\ \mu\ (B_i) < \infty$.

De uitspraak over $|s|$ is een bijzonder geval: neem $\varphi := \Psi_u|u|$.

Als $s = \Sigma\beta_i B_i$, $t = \Sigma\gamma_j C_j$, dan vormen we weer (zie 4.4)

$$B_i \cap C_j = \Sigma_k\ E_{ijk},$$

zodat $\beta s + \gamma t = \Sigma_i\ \Sigma_j\ \Sigma_k(\beta\beta_i + \gamma\gamma_j)\ E_{ijk}$.

Gemakkelijk blijkt dat

$$\sum_i \sum_j \sum_k |\beta\beta_i + \gamma\gamma_j| \ \mu(E_{ijk}) \le |\beta| \sum_i |\beta_i| \ \mu(B_i) + |\gamma| \sum_j |\gamma_j| \mu(C_j) < \infty ,$$

zodat $\beta s + \gamma t$ een trapfunctie is. De integraal is

$$L(\beta s + \gamma t) = \sum_i \sum_j \sum_k (\beta\beta_i + \gamma\gamma_j) \ \mu \ (E_{ijk});$$

en dit laat zich (wegens de absolute convergentie) schrijven als

$$\sum_i \beta\beta_i \ \mu \ (B_i) + \sum_j \gamma\gamma_j \mu(C_j),$$

en dat is $\beta L(s) + \gamma L(t)$.

Tenslotte is

$$\max (s,t) = \tfrac{1}{2} (s+t) + \tfrac{1}{2}|s-t|, \ \min (s,t) = \tfrac{1}{2} (s+t) - \tfrac{1}{2}|s-t|. \qquad \square$$

4.7. <u>Stelling</u>. Is t een trapfunctie en $t(x) \ge 0$ voor alle x, dan is $L(t) = \|t\|$ (en dus $\|t\| < \infty, L(t) \ge 0$).

<u>Bewijs</u>. Zij $t = \Sigma\beta_i B_i$, $X = \Sigma B_i$ dan zijn alle $\beta_i \ge 0$ (althans als $B_i \ne \emptyset$) en $L(t) = \Sigma\beta_i\mu(B_i)$. Eén der in de definitie van $\|t\|$ benodigde sommen is $\Sigma\beta_i B_i$ zelf, dus $\|t\| \le L(t)$.

Om $L(t) \le \|t\|$ te bewijzen laten we iets algemener zien: als $t, t_1, t_2, \ldots$ niet-negatieve trapfuncties zijn, en $t_1 + t_2 + \ldots \ge t$, dan is $L(t_1) + L(t_2) + \ldots \ge L(t)$. (Specialisatie tot $t_i = \alpha_i A_i$ geeft dan wat we nodig hebben: $\|t\| = \inf \{\Sigma L(\alpha_i A_i) | \Sigma\alpha_i A_i \ge t\} \ge L(t)$).

We bewijzen eerst:

<u>Hulpstelling</u>. Zijn $s, s_1, s_2, \ldots$ niet-negatieve trapfuncties, $s_i s_j = 0 (i \ne j)$ en $s = \Sigma_1^\infty s_i$, dan is $L(s) = \Sigma_1^\infty L(s_i)$.

<u>Bewijs</u>. We splitsen $s_i = \Sigma_j \beta_{ij} B_{ij} + \Sigma_j 0.C_{ij}$, $s = \Sigma_j \beta_j B_j + \Sigma_j \ 0. \ C_j$ waarin alle β_{ij} en alle $\beta_j > 0$ zijn, terwijl $X = \Sigma_j B_{ij} + \Sigma_j C_{ij}$ (alle i) en

$X = \Sigma_j B_j + \Sigma_j C_j$. Uit de gegevens volgt dat

$$X = \sum_i \sum_j B_{ij} + \sum_j C_j,$$

$$s = \sum_i \sum_j \beta_{ij} B_{ij} + \sum_j 0.\ C_j.$$

Bijgevolg is

$$L(s) = \sum_i \sum_j \beta_{ij}\mu(B_{ij}) = \sum_i (\sum_j \beta_{ij}\mu(B_{ij})) = \sum_i L(s_i). \qquad \square$$

Laat nu $t, t_1, t_2, \ldots$ niet-negatieve trapfuncties zijn met $t_1 + t_2 + \ldots \geq t$. De onderstelling $t_i t_j = 0$ wordt nu niet gemaakt. We nemen een getal γ met $0 < \gamma < 1$. Definiëer

$$u_n(x) = \begin{cases} t(x) & \text{als } \gamma^{-1}(t_1(x) + \ldots + t_n(x)) \geq t(x), \\ 0 & \text{als } \gamma^{-1}(t_1(x) + \ldots + t_n(x)) < t(x). \end{cases}$$

Deze u_n is een trapfunctie, hetgeen in te zien is door voor s de trapfunctie $\gamma^{-1}(t_1 + \ldots + t_n)$ te nemen en bij s en t de simultane splitsing van X (zie het bewijs van stelling 4.6) te maken.

We stellen vervolgens $s_1 = u_1$, $s_2 = u_2 - u_1$, $s_3 = u_3 - u_2$, ... Voor elke $x \in X$ geldt dat alle $u_n(x)$ van zekere index af gelijk zijn aan $t(x)$, terwijl $u_n(x)$ met lagere index nul zijn; dit betekent dat er precies één $s_n(x)$ de waarde $t(x)$ heeft, en alle andere de waarde 0 (tenzij ook $t(x) = 0$, dan zijn alle $s_n(x)$ nul). De $s_1, s_2, \ldots$ zijn nu trapfuncties die aan de voorwaarden van de hulpstelling voldoen met som t, zodat $L(s_1) + L(s_2) + \ldots = L(t)$. Dus $\lim_{n\to\infty} L(u_n) = L(t)$. Daar $\gamma^{-1}(t_1 + \ldots + t_n) \geq u_n$, is $\gamma^{-1}(L(t_1) + L(t_2) + \ldots) \geq$ $\geq L(t)$. Daar γ willekeurig was, blijkt $L(t_1) + L(t_2) + \ldots \geq L(t)$. $\square$

4.8. <u>Stelling</u>. Voor elke trapfunctie t geldt $|L(t)| \leq \|t\|$.

<u>Bewijs</u>. Zij $t_1 = |t|$, dan is $|L(t)| \leq L(t_1)$ (direct uit de definitie van $L(t)$), en $L(t_1) = \|t_1\|$ (stelling 4.7), $\|t_1\| = \|t\|$ (stelling 3.5.1°). $\square$

4.9. Stelling. Als $\forall_{A\in\Gamma}[A \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A) > 0]$, dan is $(T, \|\ \|)$ een genormeerde lineaire ruimte, en L is een begrensde lineaire functionaal van T.

Bewijs. Triviaal. □

5. Sommeerbare functies.

5.1. (X,Γ,μ) is een sigmafiniete maatruimte.

5.2. Definitie. Een sommeerbare functie is een gegeneralizeerde functie f met de eigenschap dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een trapfunctie t bestaat met $\|f - t\| < \varepsilon$.

5.3. Stelling. Trapfuncties zijn sommeerbaar.

Bewijs. Dit volgt uit $\|0\| = 0$. □

Opmerking. $\|f\| = 0 \Rightarrow f$ is sommeerbaar. Als f sommeerbaar is, en $f(x) = g(x)$ (p.p.), dan is g sommeerbaar.

5.4. Voorbeeld. Iedere continue functie op $\mathbb{R}$ met begrensde drager (de drager van f is de afsluiting van de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$) is sommeerbaar bij elke Lebesgue-Stieltjes-maat (zie voorbeeld 2.5.1).

5.5. Stelling. Is f sommeerbaar, dan is $\|f\| < \infty$.

Bewijs. Kies een $\varepsilon > 0$ en daarbij een trapfunctie t. Nu is (zie stelling 3.5.3° en stelling 4.7) $\|f\| \leq \|f - t\| + \|t\| < \varepsilon + \|t\| < \infty$. □

Opmerking 1. Het omgekeerde is niet altijd waar.

Opmerking 2. Uit stelling 3.13.3° volgt dat sommeerbare functies bijna overal eindig zijn. We kunnen daarom altijd over de som van twee sommeerbare functies spreken.

5.6. Stelling. Is f sommeerbaar dan is er precies één getal ξ met de eigenschap dat voor elke trapfunctie t geldt $|\xi - L(t)| \leq \|f - t\|$.

Bewijs. Kies $\varepsilon = n^{-1}$ en daarbij een trapfunctie t_n met $\|f - t_n\| < n^{-1}$. Nu is, als $n > m$, $\|t_n - t_m\| \leq 2m^{-1}$, dus (stelling 4.8) $|L(t_n - t_m)| \leq 2m^{-1}$. Daar $L(t_n - t_m) = L(t_n) - L(t_m)$ (stelling 4.6) zien we dat de getallen $L(t_1), L(t_2), \ldots$ een fundamentaalrij vormen. Noem $\lim L(t_n) = \xi$.

Zij t een willekeurige trapfunctie. Dan is voor elke n

$$|L(t_n) - L(t)| \leq \|t_n - t\| \leq \|t_n - f\| + \|f - t\|.$$

Door $n \to \infty$ te laten gaan zien we dat $|\xi - L(t)| \leq \|f - t\|$.

Het is duidelijk dat er maar één getal ξ is met de in de stelling genoemde eigenschap, want uit $|\xi - L(t_n)| \leq \|f - t_n\| < n^{-1}$ volgt dat $\xi = \lim L(t_n)$. □

5.7. Opmerking. Is f zelf een trapfunctie dan kunnen we de in stelling 5.6 genoemde t gelijk aan f nemen, zodat we vinden $\xi = L(f)$. We hebben nu dus het recht om te definiëren:

Definitie. Is f sommeerbaar, dan wordt het getal ξ uit stelling 5.6 met $L(f)$ aangeduid en de integraal van f genoemd.

5.8. Stelling. Zijn f en g sommeerbaar, en zijn α en β (eindige) reële getallen, dan is ook $\alpha f + \beta g$ sommeerbaar, en $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$.

Bewijs. Zoek bij f en g trapfuncties s_n en t_n met $\|f - s_n\| < n^{-1}$, $\|g - t_n\| < n^{-1}$. Dan is (vgl. 3.10 en 5.5 opmerking 2)

$$\|\alpha f + \beta g - (\alpha s_n + \beta t_n)\| \leq \|\alpha f - \alpha s_n\| + \|\beta g - \beta t_n\| \leq n^{-1}(|\alpha| + |\beta|).$$

Dus $\alpha f + \beta g$ is sommeerbaar. En

$$L(\alpha f + \beta g) = \lim L(\alpha s_n + \beta t_n) =$$

$$= \alpha \lim L(s_n) + \beta \lim L(t_n) = \alpha L(f) + \beta L(g)\ .$$ □

Opmerking. Als f sommeerbaar is, en $f(x) = g(x)$ (p.p.), dan is $L(f) = L(g)$ (zie 5.3, opmerking).

5.9. Stelling. Is f sommeerbaar, dan is $|L(f)| \le \|f\|$. Is bovendien $f \ge 0$, dan is $L(f) = \|f\|$, dus $L(f) \ge 0$.

Bewijs. De eerste bewering volgt door in stelling 5.6 $t = 0$ te nemen. Zij verder $f \ge 0$. Neem t_n met $\|f - t_n\| < n^{-1}$. Is $s_n = |t_n|$, dan is $|f - s_n| \le |f - t_n|$, dus ook $\|f - s_n\| < n^{-1}$. Daarom is $|L(f) - L(s_n)| < n^{-1}$. Stelling 4.7 zegt $L(s_n) = \|s_n\|$, dus

$$|L(f) - \|f\|| < |\|f\| - \|s_n\|| + n^{-1} \le \|f - s_n\| + n^{-1} < 2n^{-1}.$$

Door $n \to \infty$ te nemen zien we dat $L(f) = \|f\|$. □

5.10. Stelling. Als f en g sommeerbaar zijn, en $f \ge g$, dan is $L(f) \ge L(g)$.

Bewijs. Volgens stelling 5.9 is $L(f - g) \ge 0$. Het gestelde volgt nu uit stelling 5.8. □

5.11. Stelling. Laat φ een afbeelding van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ zijn met $\varphi(0) = 0$, terwijl er een C is zó dat voor alle $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ geldt

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \le C|u - v|.$$

Dan is, als f sommeerbaar is, ook $\varphi(f)$ sommeerbaar; in het bijzonder geldt dat als f sommeerbaar is, ook $|f|$ het is. (Merk op dat $\varphi(f)$ p.p. gedefinieerd is).

Bewijs. Als t een trapfunctie is, is ook $\varphi(t)$ een trapfunctie blijkens stelling 4.6. Verder volgt uit $\|f - t\| < \varepsilon$ dat $\|\varphi(f) - \varphi(t)\| \le C\,\varepsilon$, zodat $\varphi(f)$ met willekeurige precisie door trapfuncties te benaderen is.

De functie $\varphi = \Psi_x |x|$ levert de uitspraak over $|f|$. □

5.12. Opmerking. Als f sommeerbaar is, is $|L(f)| \le L(|f|)$. Dit volgt uit stelling 5.9 en 5.11, want $|f|$ is sommeerbaar en $|L(f)| \le \|f\| = L(|f|)$.

5.13. Stelling. Als f en g sommeerbaar zijn, dan zijn max (f,g) en min (f,g) dat ook. Als verder $g \geq 0$ is, dan is ook $\rho(f,g)$ sommeerbaar (zie 3.10).

Bewijs. Omdat

$$\max(f,g) = \tfrac{1}{2}(f+g) + \tfrac{1}{2}|f-g|,$$

$$\min(f,g) = \tfrac{1}{2}(f+g) - \tfrac{1}{2}|f-g|,$$

$$\rho(f,g) = \tfrac{1}{2}|f+g| - \tfrac{1}{2}|f-g|$$

volgen de beweringen uit stelling 5.8 en 5.11. □

5.14. Voorbeelden.

1. Beschouw $\mathbb{R}$ met de gewone Lebesgue-maat (zie voorbeeld 2.5.1). Laat f continu op $\mathbb{R}$ zijn, en laat er een M bestaan zó dat $\int_a^b |f(x)|dx < M$ voor alle a,b met $-\infty < a < b < \infty$ (met de integraal is de gewone Riemann-integraal bedoeld). Dan is f sommeerbaar, en $L(f) = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^b f(x)dx$.

2. Laat $-\infty < a_1 < \ldots < a_n < \infty$, $c_1 > 0,\ldots,c_n > 0$, en vorm g met $g(x) = 0$ op $(-\infty, a_1)$, $g(x) = c_1 + \ldots + c_k$ op $[a_k, a_{k+1})$ $(1 \leq k < n)$, $g(x) = c_1 + \ldots + c_n$ op $[a_n, \infty)$. Met deze functie vormen we de Lebesgue-Stieltjes-maat uit 2.5.1. Laat f een overal gedefinieerde afbeelding van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ zijn. Dan is f sommeerbaar in de zin van deze maat, en $L(f) = c_1 f(a_1) + \ldots + c_n f(a_n)$.

6. Gemajoreerde convergentie.

6.1. (X,Γ,μ) is een sigmafiniete maatruimte.

6.2. Stelling. Zij $f_n \geq 0$, f_n sommeerbaar. Laat de reeks $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ p.p. $F(x)$ tot som hebben. Neem aan dat $\|F\| < \infty$. Dan is F sommeerbaar, en $L(F) = L(f_1) + L(f_2) + \ldots$.

Bewijs. Uit stelling 5.9 en 3.5.4° (monotonie van de norm) volgt

$$\|f_1\| + \ldots + \|f_n\| = L(f_1) + \ldots + L(f_n) = L(f_1 + \ldots + f_n) = \|f_1 + \ldots + f_n\| \le \|F\|,$$

dus $\Sigma_1^\infty \|f_k\| < \infty$.

Kies $\varepsilon > 0$ en daarbij n met $\Sigma_{n+1}^\infty \|f_k\| < \varepsilon$. Dan is

$$\|F - (f_1 + \ldots + f_n)\| = \|f_{n+1} + \ldots\| \le \|f_{n+1}\| + \ldots < \varepsilon. \tag{1}$$

Bij elke f_k kiezen we een trapfunctie t_k met $\|f_k - t_k\| < 2^{-k}\varepsilon$. Nu is $\|F - (t_1 + \ldots + t_n)\| < \varepsilon + (\frac{\varepsilon}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n}) < 2\varepsilon$. Daar dit voor elke ε kan, zien we dat F sommeerbaar is. Verder leidt (1) volgens stelling 5.9 tot

$$|L(F) - L(f_1 + \ldots + f_n)| < \varepsilon,$$

en daaruit volgt $L(F) = L(f_1) + L(f_2) + \ldots$. □

Opmerking. Als het gegeven $\|F\| < \infty$ wordt vervangen door $\|f_1\| + \|f_2\| + \ldots < \infty$ blijft de stelling geldig, daar $\|F\| \le \|f_1\| + \|f_2\| + \ldots$.

6.3. Definitie 1. Als $f, f_1, f_2, \ldots$ gegeneralizeerde functies zijn, en als voor bijna elke x geldt $f_n(x) \to f(x)$, dan zeggen we dat f_n puntsgewijs naar f convergeert. Notatie $f_n \to f$.

Definitie 2. Als $f, f_1, f_2, \ldots$ gegeneralizeerde functies zijn waarvoor geldt $f_n \to f$, en er is een gegeneralizeerde functie g zó dat $\|g\| < \infty$ en $|f_n| \le g$ voor alle n, dan zeggen we dat f_n gemajoreerd naar f convergeert.

6.4. Stelling (Lebesgue). Zijn $f_1, f_2, \ldots$ sommeerbaar, en convergeert f_n gemajoreerd naar f, dan is ook f sommeerbaar, en $\lim L(f_n) = L(f)$; zelfs geldt $\|f_n - f\| \to 0$.

Bewijs. Zij $|f_n| \le g$ voor alle n, $\|g\| < \infty$. In het geval dat $f_1 \le f_2 \le \ldots$ volgt de stelling direct uit stelling 6.2, want dan is $(f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \ldots = f - f_1$, en $\|f - f_1\| \le \|f\| + \|f_1\| \le \|g\| + \|g\| < \infty$. Als $f_1 \ge f_2 \ge \ldots$ hebben we natuurlijk een analoge conclusie. In deze gevallen spreken we van monotone gemajoreerde convergentie.

We nemen nu het algemene geval. Noem, als $m \le n$,

$$\max(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n) = h_{mn} .$$

Dan is $-g \le h_{mn} \le g$, en h_{mn} sommeerbaar (stelling 5.13). Verder is $h_{mn} \le h_{m,m+1} \le h_{m,m+2} \le \ldots \le g$, dus $\lim_{n\to\infty} h_{mn}$ bestaat. We noemen die limiet h_m. De convergentie $h_{mn} \to h_m$ $(n \to \infty)$ is monotoon en gemajoreerd, dus h_m is sommeerbaar.

We hebben $h_{mn} \ge h_{m+1,n}$ (als $n \ge m+1$), en dus ook $h_m \ge h_{m+1}$. We zien gemakkelijk in dat $h_m \to f$ als $m \to \infty$. Verder zijn alle h_m's $\ge -g$; de convergentie $h_m \to f$ is weer monotoon en gemajoreerd, zodat f sommeerbaar is, en $L(h_m) \to L(f)$.

We kiezen $\varepsilon > 0$. Daar $L(h_m) \to L(f)$, kunnen we m zó groot nemen dat $L(h_m) \le L(f) + \varepsilon$. Daar $f_n \le h_{mn} \le h_m$ voor alle $n > m$, is nu $L(f_n) \le L(f) + \varepsilon$ voor alle $n > m$. Op dezelfde manier (door de convergentie $-f_n \to -f$ te beschouwen) bewijzen we dat $L(f_n) \ge L(f) - \varepsilon$ is voor alle voldoend grote n, en daarmee is (aangezien ε willekeurig gekozen was) aangetoond dat $L(f_n) \to L(f)$.

De toevoeging "zelfs $\| f_n - f \| \to 0$" blijkt door op te merken dat $|f_n - f| \to 0$ (puntsgewijs), $|f_n - f| \le 2g$, zodat $L(|f_n - f|) \to 0$, en dat betekent dat $\| f_n - f \| \to 0$. □

7. Meetbare functies.

7.1. (X,Γ,μ) is een sigmafiniete maatruimte.

7.2. Definitie. Een meetbare functie is een gegeneralizeerde functie f waarvoor er een rij sommeerbare functies $f_1, f_2, \ldots$ bestaat met $f_n \to f$ (zie 6.3 definitie 1).

Opmerking. Als de ruimte niet sigmafiniet is, geeft deze definitie niet wat we hebben willen (zelfs de functie $\Psi_{x\in S} 1$ is dan niet meetbaar). Dan is het beter om als definitie te kiezen: "f is meetbaar als voor elke niet-negatieve sommeerbare g geldt dat $\rho(f,g)$ (zie 3.10) sommeerbaar is".

7.3. Stelling. Is f sommeerbaar, dan is f meetbaar.

Bewijs. Triviaal.

7.4. Stelling. Zijn f en g meetbaar, dan zijn ook $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ en (als $g \geq 0$, zie 3.10) $\rho(f,g)$ meetbaar. Zijn f en g bovendien p.p. eindig, en α en β reële getallen, dan is $\alpha f + \beta g$ meetbaar.

Bewijs. Als $f_n \to f$, $g_n \to g$, f_n sommeerbaar, g_n sommeerbaar, dan is $\max(f_n,g_n) \to \max(f,g)$, terwijl $\max(f_n,g_n)$ sommeerbaar is (stelling 5.13). De andere uitspraken worden op analoge wijze bewezen. □

7.5. Hulpstelling. Als f meetbaar is en $g \geq 0$ en sommeerbaar, dan is $\rho(f,g)$ sommeerbaar.

Bewijs. Laat $f_n \to f$, f_n sommeerbaar. Volgens stelling 5.13 is $\rho(f_n,g)$ sommeerbaar. Nu is $\rho(f_n,g) \to \rho(f,g)$ gemajoreerd (namelijk door g). Pas stelling 6.4 toe. □

7.6. Stelling. Constanten zijn meetbare functies.

Bewijs. Daar (X,Γ,μ) sigmafiniet is, is $X = A_1 + A_2 + \dots$, met elke A_i eindige maat. Elke A_i is een trapfunctie, dus sommeerbaar. Volgens definitie 7.2 is X een meetbare functie. □

7.7. Stelling. Zijn $f_1, f_2, \dots$ alle meetbaar en is $f_n \to f$, dan is f meetbaar.

Bewijs. Zij $X = A_1 + A_2 + \dots$, $A_i \in \Gamma$, $\mu(A_i) < \infty$ $\quad (i = 1,2,\dots)$, en definieer $h_n := \rho(f_n, n(A_1 + \dots + A_n))$. De h_n's zijn blijkens hulpstelling 7.5 sommeerbaar, en voldoen aan $h_n \to f$. Volgens definitie 7.2 is f meetbaar. □

7.8. Stelling. Als f meetbaar en p.p. eindig is, en φ is een continue afbeelding van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dan is $\varphi(f)$ meetbaar en p.p. eindig.

Bewijs. We mogen zonder beperking veronderstellen dat $\varphi(0) = 0$ (stelling 7.4 en 7.6). Bij elke $n \in \mathbb{N}$ construeren we een continue φ_n met de volgende eigenschappen

(i) φ_n is stuksgewijs lineair op $\mathbb{R}$

(ii) $|\varphi(u) - \varphi_n(u)| < n^{-1}$ $(-n \leq u \leq n)$

(iii) φ_n is constant buiten $[-n,n]$

(iv) $\varphi_n(0) = 0$.

Neem een rij sommeerbare functies f_n met $f_n \to f$. Als u, $u_n (n \in \mathbb{N})$ reële getallen zijn met $u_n \to u$, dan is $\varphi_n(u_n) \to \varphi(u)$ (want op den duur is $|\varphi_n(u_n) - \varphi(u_n)| < n^{-1}$). Derhalve is $\varphi_n(f_n) \to \varphi(f)$. Daar $\varphi_n(f_n)$ sommeerbaar is (stelling 5.11), is $\varphi(f)$ meetbaar. Dat $\varphi(f)$ p.p. eindig is, is triviaal. □

7.9. Stelling. Laat φ, φ_n $(n \in \mathbb{N})$ afbeeldingen zijn van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, en neem aan dat $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ voor alle x. Voor alle n zij φ_n continu. Als f meetbaar en p.p. eindig is, dan is $\varphi(f)$ dat ook.

Bewijs. Voor iedere n is $\varphi_n(f)$ meetbaar (stelling 7.8), en $\varphi_n(f) \to \varphi(f)$. Derhalve is (stelling 7.7) $\varphi(f)$ meetbaar. Dat $\varphi(f)$ p.p. eindig is, is triviaal. □

Voorbeelden.

1. Kies $\varphi := \forall_x |x|$. Er volgt met 7.8: als f meetbaar is en p.p. eindig, dan is $|f| = \varphi(f)$ dat ook.

2. Als f en g meetbaar en p.p. eindig zijn, dan is fg het ook. Kies namelijk sommeerbare f_n's en g_n's met $f_n \to f$, $g_n \to g$. Nu volgt met 5.8, 5.5, opmerking 2, 7.4 en 7.8 dat

$$f_n\, g_n = \tfrac{1}{4}(f_n + g_n)^2 - \tfrac{1}{4}(f_n - g_n)^2$$

meetbaar is. Daar $f_n\, g_n \to f\, g$ is volgens 7.7 ook $f\, g$ meetbaar (en p.p. eindig).

3. Als f meetbaar en p.p. eindig is, en $a \in \mathbb{R}$, dan is $\chi_{(-\infty,a)}(f)$ meetbaar. Dit volgt gemakkelijk uit stelling 7.9.

7.10. Stelling. Is f meetbaar en $\|f\| < \infty$, dan is f sommeerbaar.

Bewijs. Kies een rij sommeerbare functies f_n met $f_n \to f$. Elke $|f_n|$ is sommeerbaar (5.11), en dus is $\rho(f,|f_n|)$ sommeerbaar (7.5). Omdat $\rho(f,|f_n|) \leq |f|$ is $\rho(f,|f_n|) \to f$ gemajoreerd. Pas stelling 6.4 toe. □

7.11. Wanneer wij ons tot niet-negatieve meetbare functies beperken, kunnen we ook aan niet sommeerbare functies een integraal toekennen, die zonder meer met de norm blijkt samen te vallen.

Definitie. Is f meetbaar, ≥ 0 en niet sommeerbaar, dan schrijven we $L(f) = \infty$.

7.12. Stelling. Zijn $f, f_1, f_2, \ldots$ meetbaar en ≥ 0, dan is

(1) $L(\alpha f) = \alpha L(f)$ als $\alpha \geq 0$

(2) $L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$

(3) Is $f_1 + f_2 + \ldots = g$, dan is g meetbaar en $L(f_1) + L(f_2) + \ldots = L(g)$.

~~(3') Is $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ en $g = \lim f_n$, dan is g meetbaar en $L(g) = \lim L(f_n)$.~~

(4) $L(f) = \| f \|$.

Bewijs. We beperken ons tot (3) en (4). Eerst (3): De meetbaarheid van g blijkt uit stelling 7.7. Is g sommeerbaar, dan is elke f_n sommeerbaar (stelling 3.7 en 7.10), en dan voert stelling 6.2 tot het doel. Is $L(g) = \infty$, en er is een n met $L(f_n) = \infty$, dan zijn we eveneens klaar. Is tenslotte $L(g) = \infty$, en elke $L(f_n)$ eindig, dan is volgens stelling 5.9 en stelling 3.5 $\| g \| \leq \Sigma_1^\infty \| f_n \| = \Sigma_1^\infty L(f_n)$; was nu $\Sigma_1^\infty L(f_n) < \infty$, dan was $\| g \| < \infty$, dus volgens stelling 7.10 was $L(g) < \infty$, waarmee een tegenspraak bereikt is.

Bewering (4) volgt direct uit stelling 5.9 en stelling 7.10.

7.13. Stelling. Is $A \in \Gamma$, dan is de functie A meetbaar, met $\mu(A) = L(A)$.

Bewijs. Volgens stelling 2.6 is A te schrijven als $A = B_1 + B_2 + \ldots$, waar $B_i \in \Gamma$, $\mu(B_i) < \infty$ voor elke i. Dus A is meetbaar, en

$$\mu(A) = \mu(B_1) + \mu(B_2) + \ldots = L(B_1) + L(B_2) + \ldots = L(A)$$

volgens stelling 7.12. □

7.14. Voorbeeld. Bij de gewone Lebesgue-maat kunnen niet-meetbare functies worden gevormd als men het keuze-axioma aanneemt: Kies in elke restklasse van $\mathbb{R} \bmod \mathbb{Q}$ een getal s met $0 < s < 1$. De gekozen getallen vormen een verzameling S. Laat $q_1, q_2, \ldots$ een aftelling zijn van $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Noteer $S_i := \{s + q_i \mid s \in S\}$. Nu zijn $S_1, S_2, \ldots$ disjunct, en $[0,1] \subset \cup_{i=1}^\infty S_i \subset [-1,2]$. Geef de karakteristieke functie van S_i met f_i aan. Dan is $f_i \geq 0$, $\| f_i \| \leq 1$. Als f_i meetbaar was, dan was $L(f_1) = L(f_2) = \ldots$, $1 \leq L(f_1 + f_2 + \ldots) \leq 3$, dus $1 \leq L(f_1) + L(f_1) + \ldots \leq 3$. Dit is absurd.

8. Meetbare verzamelingen.

8.1. (X, Γ, μ) is een sigmafiniete maatruimte.

8.2. Definitie. Een deelverzameling E van X heet meetbaar als zijn karakteristieke functie een meetbare functie is. De klasse van alle meetbare verzamelingen heet Λ.

8.3. Stelling. $\Gamma \subset \Lambda$, $X \in \Lambda$.

Bewijs. Dit volgt uit stelling 7.13 en stelling 7.6. □

8.4. Definitie. Voor $E \in \Lambda$ definiëren we $\mu(E)$ door $\mu(E) = L(E)$ (dit kan $= \infty$ zijn, zie definitie 7.11).

Opmerking. Voor $A \in \Gamma$ was μ reeds gedefinieerd, maar dan levert definitie 8.4 niets nieuws (zie stelling 7.13).

8.5. Definitie. Een collectie $\Delta \in P(P(X))$ heet een sigma-algebra als

(a) $E \in \Delta \Rightarrow X \setminus E \in \Delta$

(b) $E_1, E_2, \ldots \in \Delta \Rightarrow \bigcup_1^\infty E_i \in \Delta$

(c) $\emptyset \in \Delta$.

Opmerkingen.

1. Uit (a) en (b) volgt nog

(d) $E_1, E_2, \ldots \in \Delta \Rightarrow \bigcap_1^\infty E_i \in \Delta$.

2. Elke sigma-algebra is een semiring.

8.6. Stelling. Λ is een sigma-algebra en μ is een maat op Λ.

Bewijs. Is E een meetbare functie, dan ook $1 - E$.

De karakteristieke functie van $\bigcup_1^n E_i$ is $\max(E_1, \ldots, E_n)$, en dus meetbaar, en de functie $\max(E_1, \ldots, E_n)$ convergeert puntsgewijs naar $\bigcup_1^\infty E_i$.

Als $E = E_1 + E_2 + \ldots$ dan is $L(E) = L(E_1) + L(E_2) + \ldots$ volgens stelling 7.12. Verder is $0 \leq \mu(E) \leq \infty$ (want $L(E) = \|E\|$, dus $L(E) \geq 0$).

8.7. Opmerkingen.

1. (X, Λ, μ) is een voortzetting van (X, Γ, μ) (zie 2.4).

2. Ga uit van Λ i.p.v. Γ. We vinden precies dezelfde norm, dezelfde sommeerbare functies en dezelfde meetbare verzamelingen met dezelfde maat. We geven geen bewijs.

8.8. Stelling. Meetbare verzamelingen met maat nul zijn nulverzamelingen, en elke nulverzameling is meetbaar met maat nul.

Bewijs.

(1) Als E meetbaar is, $\mu(E) = 0$, dan is $L(E) = 0$, dus $\|E\| = 0$. Volgens

3.6 is E een nulverzameling.

(2) Als E een nulverzameling is, dan is $E(x) = 0$ p.p., dus E is sommeerbaar met $\|E\| = L(E) = 0$ (zie stelling 3.13.1°). □

Opmerking. In plaats van "E is meetbaar met maat nul" zeggen we ook kortweg: E heeft maat nul.

8.9. Stelling. De gegeneralizeerde functie f is dan en slechts dan meetbaar als voor elk gegeneralizeerd reëel getal a geldt dat $E_a := \{x \mid f(n) < a\}$ meetbaar is.

Bewijs. "dan". Definieer $A_1 := \{x \mid f(x) = \infty\}$ en $A_2 := \{x \mid f(x) = -\infty\}$; men ziet gemakkelijk dat deze verzamelingen meetbaar zijn (b.v. $A_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \mid f(x) < -n\}$). Zij vervolgens voor $n \in \mathbb{N}$ gedefinieerd $\psi_n(x) := n^{-1}[nx]$ $(x \in \mathbb{R})$, $\psi_n(\infty) = n$, $\psi_n(-\infty) = -n$. Dan is

$$\psi_n(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} \chi_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})}(f) + n\chi_{A_1} - n\chi_{A_2} ,$$

en uit het gegeven volgt dat $\psi_n(f)$ meetbaar is. Omdat verder $\psi_n(f) \to f$ is, volgens stelling 7.7, ook f meetbaar.

"slechts dan". Neem eerst aan $a < \infty$. Laat $b > a$, $b \in \mathbb{R}$ en $g := \min(f, bX)$. Dan is g meetbaar en $E_a = \{x \mid g(x)\} < a\}$, terwijl $g(x) < \infty$ voor elke $x \in X$. Laat $h_n := n\{\max(g, aX) - \max(g, (a-\frac{1}{n})X)\}$. Dan $h_n \to E_a$, dus E_a is meetbaar.

Tenslotte, $E_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, dus ook E_∞ meetbaar. □

8.10. Opmerking. Stelling 8.9 kan bijvoorbeeld worden gebruikt om te bewijzen dat $\varphi(f_1,\dots,f_k)$ meetbaar is als $f_1,\dots,f_k$ meetbaar en p.p. eindig zijn en φ een reële continue functie van k variabelen is.

8.11. Definitie. Is E meetbaar, en fE hetzij sommeerbaar hetzij meetbaar en ≥ 0, dan heet L(fE) "de integraal van f over E". Notatie:

$$\int_E f d\mu := L(fE) .$$

In het bijzonder, als f sommeerbaar en E meetbaar is, dan is fE sommeerbaar, en

$$\int_E f d\mu = L(fE) , \int_X f d\mu = L(f) .$$

8.12. Stelling. Laat $f_1, f_2, \ldots$ meetbare functies zijn. Als $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq 0$, dan is $\lim f_n$ meetbaar , en $\int_X \lim f_n \, d\mu \leq \lim \int_X f_n \, d\mu$. Als het rechterlid eindig is geldt zelfs het gelijkteken.

Bewijs. De meetbaarheid van $\lim f_n$ blijkt uit stelling 7.7. Verder is voor alle k: $\int_X \lim f_n \, d\mu \leq \int f_k \, d\mu$, zodat de gewenste ongelijkheid volgt. Als $\lim \int_X f_n \, d\mu$ eindig is, is f_k vanaf zekere index sommeerbaar, en dan kunnen we stelling 6.4 toepassen. □

8.13. Stelling. (Lemma van Fatou). Laat f_n meetbaar zijn, $f_n \geq 0$ $(n = 1,2,\ldots)$. Dan is $\liminf f_n$ meetbaar, en

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu.$$

Bewijs. Voor elke rij gegeneralizeerde reële getallen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geldt

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \min (a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}). \qquad (*)$$

Daarom is

$$\liminf f_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} g_{n,k}$$

waarin $g_{n,k} = \min (f_{n+1}, \ldots, f_{n+k})$. Deze $g_{n,k}$ is meetbaar (vgl. stelling 7.4); bij vaste n gaat $g_{n,k}$ niet-stijgend naar een limiet g_n, en g_n gaat niet-dalend naar een limiet g. Nu is $g = \liminf f_n$. Wegens stelling 7.7 is g meetbaar, en (met 8.12 en 7.12)

$$\int_X g_n \, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_X g_{n,k} \, d\mu, \quad \int_X g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \; ;$$

verder is

$$\int_X g_{n,k} \, d\mu \leq \min \left(\int_X f_{n+1} \, d\mu , \ldots, \int_X f_{n+k} \, d\mu \right),$$

zodat

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \min \left(\int_X f_{n+1} \, d\mu, \dots, \int_X f_{n+k} \, d\mu \right),$$

en nu geeft (*) het gewenste resultaat. □

Opmerking. Als we $\mathbb{R}$ met de gewone Lebesgue-maat beschouwen, en $f_n = \chi_{(n,n+1]}$, dan is $\int_X \liminf f_n \, d\mu < \liminf \int_X f_n \, d\mu$, en beide leden zijn eindig.

Als $f_n = n^{-1}\chi_{(-\infty,\infty)}$ dan is het linkerlid 0, het rechterlid ∞.

9. Reeksen die in norm convergeren.

9.1. Zij (X,Γ,μ) een sigmafiniete maatruimte.

9.2. Stelling. Laat $f_1, f_2, \dots$ sommeerbare functies zijn met $\|f_1\| + \|f_2\| + \dots < \infty$. Dan is voor bijna alle x de reeks $f_1(x) + f_2(x) + \dots$ absoluut convergent. De som S is sommeerbaar, en $L(S) = L(f_1) + L(f_2) + \dots$.

Bewijs. Definiëer de gegeneralizeerd reële functie g door $g(x) = \sum |f_k(x)|$. Dan is (stelling 3.5.3°) $\|g\| \le \sum_1^\infty \|f_k\| < \infty$. Volgens stelling 3.13.3° is g bijna overal eindig.

De sommeerbaarheid en de uitspraak over de integralen zijn gevolg van stelling 6.4. □

9.3. Stelling. Als f sommeerbaar is, is er een rij getallen $\alpha_i \in \mathbb{R}$ en een rij $A_i \in \Gamma$ met $\sum |\alpha_i| \mu(A_i) < \infty$, en

$$f = \sum \alpha_i A_i \qquad \text{(p.p.)}.$$

Bewijs. We kunnen een rij trapfuncties t_n zó kiezen dat $\|f - t_n\| < 2^{-n}$.

Dan is met $s_1 = t_1, s_2 = t_2 - t_1, s_3 = t_3 - t_2, \ldots, \|s_n\| < 2^{1-n}$ $(n > 1)$, dus $\sum_1^\infty \|s_i\| < \infty$. Blijkens stelling 9.2 is $\sum_1^\infty s_i(x)$ bijna overal absoluut convergent. Noem de som F. Dan is $\|F - \sum_1^n s_i\| \le \sum_{n+1}^\infty \|s_i\| < 2^{1-n}$, dus $\|F - f\| < 2^{2-n}$; daar n willekeurig is, is $\|F - f\| = 0$, dus $F = f$ (p.p.). Schrijf nu voor $i \in \mathbb{N}$

$$s_i = \sum_{j=1}^\infty \alpha_{ij} A_{ij}$$

met $\sum_{j=1}^\infty |\alpha_{ij}|\mu(A_{ij}) < 2^{1-i}$. Daar $\sum_{i=1}^\infty (\sum_{j=1}^\infty |\alpha_{ij}|\mu(A_{ij})) < \infty$, is de dubbelreeks bijna overal absoluut convergent (stelling 9.2), dus bijna overal is

$$\sum_{i=1}^\infty (\sum_{j=1}^\infty \alpha_{ij} A_{ij}) = \sum_{i=1}^\infty s_i = F .$$

Door van de dubbelreeks een herhaalde reeks te maken volgt het gestelde. □

10. De ruimte L_p.

10.1. (X,Γ,μ) is een sigmafiniete maatruimte.

10.2. Definitie. Als f meetbaar is, dan definiëren we

$$\operatorname{esssup} f := \inf \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \le a \quad \text{p.p.}\}.$$

10.3. Definitie. Als $1 \le p < \infty$, dan is

$$L_p^* := \{f \mid f \text{ is meetbaar}, \| |f|^p \| < \infty\};$$

als $f \in L_p^*$, dan is $|f|^p$ sommeerbaar (volgt uit stelling 7.8 en stelling 7.10). Verder definiëren we

$$L_\infty^* := \{f \mid f \text{ is meetbaar}, \operatorname{esssup}|f| < \infty\};$$

de elementen van L_∞^* noemen we essentieel begrensde functies.

10.4. Definitie. Als f meetbaar is en $1 \le p \le \infty$, dan wordt de p-norm van f gedefiniëerd door

$$\|f\|_p := \| |f|^p \|^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty) ,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname{esssup} |f| .$$

Opmerkingen.

1. Als $f \in L_p^*$, dan is $\|f\|_p < \infty$.

2. Als f meetbaar is, dan geldt $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ p.p. (voor $1 \le p < \infty$ volgt dit uit 3.13; het geval $p = \infty$ is triviaal).

3. Als f meetbaar is, dan is $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ (p.p.).

10.5. Definitie. Laat $1 \le p \le \infty$. Als $f, g \in L_p^*$, dan zeggen we $f \sim g$ als $f - g = 0$ (p.p.). Dit is een equivalentierelatie in L_p^*; de verzameling van equivalentieklassen geven we aan met L_p. Als $f \in L_p$, dan definiëren we $\|f\|_p := \|f_1\|_p$ waar f_1 een representant is van de klasse f. Op dezelfde manier behandelen we integralen.

10.6. Als $1 \le p \le \infty$, dan kiezen we q zó dat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (bv. $p = \infty \Leftrightarrow q = 1$; $p = 1 \Leftrightarrow q = \infty$; $p = 2 \Leftrightarrow q = 2$). We hebben nu

Ongelijkheid. Als $0 \le a < \infty$, $0 \le b < \infty$ en $1 < p < \infty$, dan is $a^{p^{-1}} . b^{q^{-1}} \le ap^{-1} + bq^{-1}$; met = dan en slechts dan als $a = b$.

Bewijs. Zie Algebra en Analyse 5.9.7. □

10.7. Stelling (Hölder). Als f en g meetbaar zijn, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ met $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, dan is $\|f.g\| \le \|f\|_p . \|g\|_q$.

Bewijs. De stelling is triviaal als $f = 0$ p.p. of $g = 0$ p.p.. Stel $1 < p < \infty$, $0 < \|f\|_p \le \infty$, $0 < \|g\|_q \le \infty$. Als $\|f\|_p = \infty$ of $\|g\|_q = \infty$, volgt de ongelijkheid onmiddellijk. Neem dus aan dat $0 < \|f\|_p < \infty$, $0 < \|g\|_q < \infty$. Voor $x \in X$ is nu volgens 10.6

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \ \|g\|_q} \le \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^{\,p}} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^{\,q}}.$$

Door beide leden over X te integreren volgt dan

$$\frac{\|fg\|}{\|f\|_p\|g\|_q} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 ,$$

en dit is de gevraagde ongelijkheid. De gevallen $p = 1$ resp. $q = 1$ zijn gemakkelijk afzonderlijk in te zien. □

Opmerking. Als $1 < p < \infty$ en $f \in L_p$, $g \in L_q$, kan men bewijzen dat $\|fg\| = \|f\|_p\|g\|_q$ slechts als $|f|^p$ en $|g|^q$ essentiëel evenredig zijn. Het geval $p = 1$ is ingewikkelder.

10.8. Stelling. (Minkowsky). Als $1 \le p \le \infty$ en $f \in L_p$, $g \in L_p$, dan is

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bewijs. Het geval p=1 volgt uit stelling 3.5.3°; als $p = \infty$ is de stelling triviaal. We veronderstellen daarom $1 < p < \infty$. Nu is

$$\int_X |f+g|^p d\mu \le \int_X |f+g|^{p-1}|f|d\mu + \int_X |f+g|^{p-1}|g|d\mu.$$

Toepassing van stelling 10.7 op de eerste term geeft

$$\int_X |f+g|^{p-1}|f|d\mu \le \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} . \|f\|_p.$$

Iets dergelijks geldt voor de tweede term. Optelling levert

$$\int_X |f+g|^p\,d\mu \le \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

ofwel

$$\| f + g \|_p \le \| f \|_p + \| g \|_p .$$ □

Opmerking (zonder bewijs). Als $1 < p < \infty$, geldt het gelijkteken slechts als f en g p.p. evenredig zijn. Als $p = 1$ geldt het gelijkteken als $f \ge 0$, $g \ge 0$.

10.9. Opmerkingen.

1. Bij de discrete maatruimte (waar X een aftelbare verzameling is en elk punt maat 1 heeft, vgl. voorbeeld 2.5.3°) gaat L_p over in ℓ^p (vgl. Lineaire Analyse I, 2.1.9 voorbeeld 4 en voorbeeld 5.1.5). Stelling 10.7 wordt de reeks-ongelijkheid van Hölder, stelling 10.8 de reeksongelijkheid van Minkowsky.

2. In het algemeen zal niet $(L_{p_1} \subset L_{p_2}) \vee (L_{p_2} \subset L_{p_1})$.

10.10. Stelling. L_p is een genormeerde lineaire ruimte met $\| \ \|_p$ als norm $(1 \le p \le \infty)$.

Bewijs. Triviaal. □

10.11. Stelling. L_2 is een IP-ruimte (zie Lineaire Analyse I, 4.1.1)indien we als inwendig product nemen

$$(f,g) := \int_X f \cdot g \, d\mu \qquad (f,g \in L_2).$$

Bewijs. Triviaal. □

10.12. We zullen nu laten zien dat L_p volledig is met $\| \ \|_p$ (Banachruimte, zie Lineaire Analyse I, 3.1.1); in het bijzonder geldt dat L_2 een Hilbertruimte is (Lineaire Analyse I, 5.1.1). Eerst komt

Stelling. Laat $1 \le p \le \infty$. Als $g_1, g_2, \ldots$ niet-negatieve meetbare functies zijn met $\|g_1\|_p + \|g_2\|_p + \ldots < \infty$, en $G_n = \Sigma_1^n g_k$, $G = \Sigma_1^\infty g_k$, dan is G een p.p. eindige, meetbare functie met

$$\|G\|_p \le \|g_1\|_p + \ldots , \quad \|G - G_n\|_p \to 0.$$

Bewijs.

a) Zij $1 \le p < \infty$ en noem $f_1 := g_1{}^p$, $f_n := (g_1 + \ldots + g_n)^p - (g_1 + \ldots + g_{n-1})^p$ $(n > 1)$. Dan is

$$\|f_1\| + \ldots + \|f_n\| = L(f_1) + \ldots + L(f_n) =$$

$$= L((g_1 + \ldots + g_n)^p) = \|g_1 + \ldots + g_n\|_p{}^p \le$$

$$(\|g_1\|_p + \|g_2\|_p + \ldots)^p < \infty.$$

Volgens stelling 9.2 is nu $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ p.p. eindig; noem de (meetbare) som $F(x)$, dan is $\|f_1 + \ldots + f_n\| \to \|F\|$, en we zien dat $F^{p^{-1}} = G$. Deze G is meetbaar volgens stelling 7.8. Daar $f_1 + \ldots + f_n = (g_1 + \ldots + g_n)^p$, is $\|g_1 + \ldots + g_n\|_p{}^p \to \|G\|_p{}^p$. Daaruit volgt $\|G\|_p \le \|g_1\|_p + \|g_2\|_p + \ldots$. Evenzo geldt $\|G - G_n\|_p \le \|g_{n+1}\|_p + \ldots$, dus $\lim_{n\to\infty} \|G - G_n\|_p = 0$.

b) Laat nu $p = \infty$. Voor iedere k is $|g_k(x)| \le \|g_k\|_\infty$ met uitzondering van een verzameling N_k $(\mu(N_k) = 0)$. Daarom is, op het complement van de verzameling $N_1 \cup N_2 \cup \ldots$, $\Sigma_1^\infty\, g_k(x)$ uniform convergent. Nu is $G(x) = \Sigma_1^\infty\, g_k(x)$ p.p. eindig, en $|G(x)| \le \|g_1\|_\infty + \|g_2\|_\infty + \ldots$ p.p. Eveneens geldt $\|G - G_n\|_\infty \le \|g_{n+1}\|_\infty + \ldots$, dus $\lim_{n\to\infty} \|G - G_n\|_\infty = 0$. □

10.13. Stelling. Zij $1 \le p \le \infty$. Als $h_n \in L_p$ en $\|h_1\|_p + \|h_2\|_p + \ldots < \infty$, dan is er een $H \in L_p$ met

$$\|H - H_n\|_p \to 0,\ H_n \to H \text{ p.p.},\ \|H\|_p \le \sum_1^\infty \|h_n\|_p,$$

waar $H_n = h_1 + \ldots + h_n$.

Bewijs. Noem $g_k := |h_k|$. Uit stelling 10.12 volgt dat $\Sigma_1^\infty\, g_k$ p.p. eindig is, daarom is $H = \Sigma_1^\infty\, h_k$ p.p. gedefiniëerd. Deze H is weer meetbaar. Nu is

$$\|H\|_p \le \|\sum_1^\infty |h_k|\,\|_p \le \|\sum_1^\infty h_k\|_p .$$

Analoog geldt

$$\|H - H_n\|_p \le \sum_{n+1}^\infty \|h_k\|_p \to 0 .$$

□

Opmerking. Uit Lineaire Analyse I 3.1.3 is bekend dat dit de volledigheid van L_p inhoudt.

10.14. Stelling. Laat $1 \leq p \leq \infty$. Iedere fundamentaalrij op L_p heeft een p.p. convergente en tegelijk norm-convergente deelrij.

Bewijs. Zij $f_n \in L_p$ met $\| f_n - f_m \|_p \to 0$ $(n \to \infty, m \to \infty)$. Kies indices $m_1, m_2, \ldots$ met

$$\| f_{m_2} - f_{m_1} \|_p \leq \tfrac{1}{2}, \; \| f_{m_3} - f_{m_2} \|_p \leq \tfrac{1}{4}, \; \ldots \; .$$

Als nu $F = f_{m_1} + (f_{m_2} - f_{m_1}) + (f_{m_3} - f_{m_2}) + \ldots$, dan is (blijkens stelling 10.13) $F \in L_p$, en $f_{m_k} \to F$ p.p. . □

Opmerking. Deze F heeft nog als eigenschap dat $\| F - f_n \|_p \to 0$.

10.15. Definitie. De maatruimte (X,Γ,μ) heet separabel als er een aftelbaar deel Γ_0 van Γ bestaat zó dat

$$\forall_{A \in \Gamma, \mu(A) < \infty} \; \forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{E \in \Omega(\Gamma_0)} \; [\mu(A \dotdiv E) < \varepsilon].$$

10.16. Voorbeeld. Neem voor X de reële rechte en voor Γ de verzameling van spelden (zie voorbeeld 1.3.1). Als maat μ nemen we de Lebesgue-Stieltjes-maat uit voorbeeld 2.5.1. Nu is (X,Γ,μ) een separabele maatruimte.

10.17. Stelling. Laat $1 \leq p < \infty$ en zij $f \in L_p$. Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een stel onderling disjuncte verzamelingen $B_1, \ldots, B_n$ met $B_i \in \Gamma$, $\mu(B_i) < \infty$, en een stel bijbehorende getallen β_i zó dat $\| f - \Sigma_{i=1}^{n} \beta_i B_i \|_p < \varepsilon$.

Bewijs. Zij $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\psi(x) = \begin{cases} x^p & x \geq 0 \\ -|x|^p & x < 0 \end{cases} .$$

Voor alle x en y is nu $|\psi(x-y)| \le 2^p|\psi(x)-\psi(y)|$ (voor $x \ge y \ge 0$ of $x \le y \le 0$ volgt dit uit $\psi(0) = 0$ en de convexiteit van ψ op $[0,\infty)$ met constante 1 in plaats van 2^p; als x en y verschillend teken hebben, kunnen we gebruik maken van $|\psi(a+b)| = (a+b)^p \le 2^p(\max(a,b))^p \le 2^p(a^p+b^p) = 2^p|\psi(a)+\psi(b)|$ voor $a > 0$, $b > 0$).

Zij $\varepsilon > 0$ en $f \in L_p$. Volgens stelling 7.8 is $\psi(f)$ meetbaar en verder is $\|\psi(f)\|_1 < \infty$, zodat $\psi(f)$ sommeerbaar is (stelling 7.10). Kies getallen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ en disjuncte verzamelingen $B_1, B_2, \ldots$ met $B_i \in \Gamma$ zó dat

$$X = \sum B_i,\ \mu(B_i) < \infty,\ \sum|\gamma_i|\ \mu(B_i) < \infty,$$

$$\|\psi(f) - \sum \gamma_i B_i\|_1 < 2^{-p}.(\tfrac{\varepsilon}{2})^p.$$

Schrijf verder $\gamma_i = \psi(\beta_i)$ (ψ is monotoon stijgend), en definiëer $t := \sum \beta_i B_i$. Dan is $t \in L_p$, en we vinden nu

$$\|\psi(f) - \psi(t)\|_1 \le 2^{-p}(\tfrac{\varepsilon}{2})^p\ ,\ \|\psi(f-t)\|_1 \le (\tfrac{\varepsilon}{2})^p\ .$$

Daarom is $\|f-t\|_p \le \frac{\varepsilon}{2}$. Tenslotte is

$$\|\sum_1^\infty \beta_i B_i - \sum_1^n \beta_i B_i\|_p = (\sum_{n+1}^\infty |\beta_i|^p \mu(B_i))^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

als n voldoende groot is. Hiermee is de stelling bewezen. □

Opmerkingen.

1. Met behulp van deze stelling is te bewijzen: als (X,Γ,μ) separabel is, en $1 \le p < \infty$, dan is L_p separabel (zie Lineaire Analyse I, 1.3.4).

2. Met behulp van 1 kan men laten zien: als (X,Γ,μ) separabel is, dan bestaat er een aftelbaar deel Λ_0 van Λ zó dat

$$\forall_{A\in\Lambda,\mu(A)<\infty}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{E\in\Lambda_0}\ [\mu(A \dotdiv E) < \varepsilon].$$

11. Cartesisch product van maatruimten.

11.1. Definitie.

a) Zijn X en Y willekeurige ruimten, dan is het cartesisch product $X \times Y$ gedefinieerd als de verzameling van alle paren $(x,y)(x \in X,\ y \in Y)$.

b) Is $S_1 \subset X$, $S_2 \subset Y$, dan is $S_1 \times S_2$ de deelverzameling van $X \times Y$ bestaande uit alle (x,y) met $x \in S_1$, $y \in S_2$.

c) Zijn θ_1, θ_2 klassen van deelverzamelingen van X resp. Y, dan is $\theta_1 \times \theta_2$ de klasse van alle $S_1 \times S_2$ $(S_1 \in \theta_1,\ S_2 \in \theta_2)$.

d) Zijn φ_1 en φ_2 niet-negatieve gegeneralizeerd reëelwaardige functies op θ_1 resp. θ_2 met $\emptyset \in \theta_1$, $\emptyset \in \theta_2$, $\varphi_1(\emptyset) = \varphi_2(\emptyset) = 0$, dan is $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ op $\theta_1 \times \theta_2$ gedefiniëerd door

$$\varphi(S) = \varphi_1(S_1)\varphi_2(S_2) \quad (S_1 \in \theta_1,\ S_2 \in \theta_2,\ S = S_1 \times S_2).$$

11.2. Voorbeeld. Γ_i = klasse van alle cellen op $(-\infty,\infty)$ plus de lege verzameling $(i = 1,2)$. Dan is $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ de collectie van alle tweedimensionale cellen plus de lege verzameling.

11.3. Stelling. Is Γ_1 een semiring bij X, Γ_2 een semiring bij Y, dan is $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ een semiring bij $X \times Y$.

Bewijs. Kennelijk is $\emptyset \in \Gamma$. Stel nu $C_i = A_i \times B_i$, $A_i \in \Gamma_1$, $B_i \in \Gamma_2$ $(i=1,2)$. Dan is $C_1 \cap C_2 = (A_1 \cap A_2)\times(B_1 \cap B_2)$, en daar $A_1 \cap A_2 \in \Omega(\Gamma_1)$, $B_1 \cap B_2 \in \Omega(\Gamma_2)$, is nu $C_1 \cap C_2 \in \Omega(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Verder is

$$C_1 \setminus C_2 = \{(A_1 \setminus A_2) \times B_1\} \cup \{(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)\};$$

de termen tussen accoladen zijn disjunct, omdat $A_1 \setminus A_2$ en $A_1 \cap A_2$ dat zijn. Deze termen liggen beide in $\Omega(\Gamma)$, zodat hun vereniging in $\Omega(\Gamma)$ ligt. □

11.4. Stelling. Zijn (X,Γ_1,μ_1) en (Y,Γ_2,μ_2) sigmafiniete maatruimten, dan is $\mu = \mu_1 \times \mu$ een sigmafiniete maat op $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

<u>Bewijs</u>. Eerst laten we zien dat μ sigmafiniet is: als $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \supset X, \mu_1(A_i) < \infty$, $\Sigma_{j=1}^{\infty} B_j \supset Y$, met $\mu_2(B_j) < \infty$, dan is $\cup_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} A_i \times B_j \supset X \times Y$, met $\mu(A_i \times B_j) < \infty$. Zij vervolgens

$$A \in \Gamma_1,\ A_i \in \Gamma_1,\ B \in \Gamma_2,\ B_i \in \Gamma_2,$$

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i = A \times B.$$

Op X beschouwen we de functies $\mu_2(B_i)A_i$, $\mu_2(B)A$ (dit zijn functies waarvan de waarden gegeneralizeerde reële getallen zijn). Voor elke x is

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i(x)B_i = A(x)B.$$

Daar μ_2 een maat op Γ_2 is, en elke $A_i(x)$ nul of één is, geldt volgens 7.12.3° en 7.13 voor elke x

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(B_i)A_i(x) = \mu_2(B)A(x).$$

Links en rechts staan meetbare niet-negatieve gegeneralizeerde functies. Door integratie over X blijkt dat

$$\Sigma_1^{\infty} \mu_1(A_i)\ \mu_2(B_i) = \mu_1(A)\ \mu_2(B).$$

Wegens $\mu_1(A_i)\mu_2(B_i) = \mu(A_i \times B_i)$ zien we nu dat μ een maat is op Γ. □

11.5. <u>Stelling</u> (Fubini). Laat f op $X \times Y$ gedefiniëerd en sommeerbaar zijn. Dan geldt bij bijna elke $x \in X$ dat $f_x := \natural_y f(x,y)$ een sommeerbare functie op Y is. Met $\varphi := \natural_x \int_Y f_x\, d\mu_2$ geldt dat φ sommeerbaar is over X, en dat

$$\int_X \varphi d\ \mu_1 = \int_{X\times Y} f d\mu.$$

<u>Bewijs.</u> We geven de normen op X, Y, $X \times Y$ met $\|\ \|_X$, $\|\ \|_Y$, $\|\ \|_{X\times Y}$ aan.

1. Zij f een willekeurige functie op $X \times Y$. Bij elke $\varepsilon > 0$ vinden we een som $\Sigma_1^{\infty} \gamma_i(A_i \times B_i)$ met $\gamma_i \geq 0$, $A_i \in \Gamma_1$, $B_i \in \Gamma_2$, $\Sigma_1^{\infty} \gamma_i\mu(A_i \times B_i) \leq \|f\|_{X\times Y} + \varepsilon$, $\Sigma_1^{\infty} \gamma_i(A_i \times B_i) \geq |f|$. Nu is

$$|f_x| \le \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i(x) B_i \ ,$$

dus, met $\psi(x) := \|f_x\|_Y$, blijkt achtereenvolgens

$$\psi(x) \le \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i(x)\mu_2(B_i) \ , \quad \|\psi\|_X \le \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \mu_1(A_i)\mu_2(B_i) \ ,$$

en daarom is $\| \Psi_x \|f_x\|_Y \|_X \le \|f\|_{X\times Y}$. Voor het speciale geval dat $\|f\|_{X\times Y} = 0$ is de stelling dus bewezen.

2. Neem aan dat $f = \Sigma_1^\infty \gamma_i A_i \times B_i$ overal op $X \times Y$ met $A_i \in \Gamma_1$, $B_i \in \Gamma_2$ en $\Sigma_1^\infty |\gamma_i| \mu(A_i \times B_i) < \infty$. Op X beschouwen we de functie $g_i = \gamma_i \mu_2(B_i) A_i$. Wegens $\Sigma_1^\infty \|g_i\|_X < \infty$ is volgens stelling 9.2 en stelling 6.4

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |g_i(x)| < \infty \qquad \text{(p.p. } x) \ ,$$

$$\text{(ii)} \quad \int_X \sum_{i=1}^{\infty} g_i d\mu_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \mu(A_i \times B_i) \ .$$

Uit (i) volgt wederom met stelling 9.2 en stelling 6.4 dat voor bijna alle x de functie $\Sigma_1^\infty \gamma_i A_i(x) B_i$ sommeerbaar is over Y en dat

$$\int_Y \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i(x) B_i d\mu_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \mu_2(B_i) A_i(x) \ .$$

Volgens (ii) is de integraal hiervan over X gelijk aan $\Sigma_1^\infty \gamma_i \mu(A_i \times B_i)$, zodat voor deze f de stelling bewezen is.

3. Volgens stelling 9.3 is het algemene geval tot de onder 1 en 2 genoemde terug te brengen. □

11.6. <u>Opmerking</u>. We vermelden nog de volgende variant van de stelling van Fubini. Is $f \ge 0$ en meetbaar over $X \times Y$, dan is voor bijna alle x de functie f een meetbare functie van y, en de integraal over Y is een meetbare functie van van x, met weer als resultaat dat de "dubbelintegraal" gelijk is aan de herhaalde.

Met behulp van dit resultaat is weer af te leiden, dat uit

1°. f meetbaar over $X \times Y$

2°. $\int_X (\int_Y |f| d\mu_2) d\mu_1 < \infty$

reeds volgt dat f sommeerbaar is over $X \times Y$, zodat stelling 11.5 kan worden toegepast.

12. Totaaladditieve verzamelingsfuncties en de stelling van Radon-Nikodym.

12.1. Zij X een ruimte, Λ een sigma-algebra voor X (zie 8.5).

Definitie. Een afbeelding ν van Λ in $\mathbb{R}$ heet een (eindige) totaaladditieve verzamelingsfunctie ((finite) signed measure) indien voor iedere rij $E_1, E_2, \ldots$ op Λ met E_i's onderling disjunct geldt

$$\nu\left(\sum_1^\infty E_i\right) = \sum_1^\infty \nu(E_i)$$

met absolute convergentie rechts.

Opmerkingen.

1. Door alle $E_i = \emptyset$ te nemen, blijkt $\nu(\emptyset) = 0$.

2. Als bovendien $\nu(E) \geq 0$ voor alle $E \in \Lambda$, dan is ν een (eindige) maat op Λ.

3. Men beschouwt ook wel gevallen waarbij $\nu(E)$ ook $+\infty$ kan zijn. Men eist daarbij dat de negatieve termen uit $\Sigma\nu(E_i)$ een convergente reeks vormen. We zullen ons hier niet mee bezighouden.

12.2. Voorbeeld. Bekijk een semiring met maat: (X,Γ,μ). Neem voor Λ de collectie der μ-meetbare verzamelingen. Laat f sommeerbaar zijn. Neem nu voor elke $E \in \Lambda$

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu .$$

Dan is ν totaaladditief. Als nl. $E = \sum_1^\infty E_i$ dan is

$$f.\chi_E = \lim(f\chi_{E_1} + \ldots + f\chi_{E_n}) ,$$

en de convergentie is gemajoreerd (nl. door $|f|$).

12.3. Stelling. Als ν een totaaladditieve verzamelingsfunctie is, dan is X disjunct te splitsen als $X = X_1 + X_2$ met $X_1 \in \Lambda$, $X_2 \in \Lambda$, en

$$\forall_{Y\in\Lambda}\ [Y \subset X_1 \Rightarrow \nu(Y) \geq 0]\ ,$$

$$\forall_{Y\in\Lambda}\ [Y \subset X_2 \Rightarrow \nu(Y) \leq 0]\ .$$

Bewijs. Een $A \in \Lambda$ heet sterk negatief als $\nu(A) < 0$ en voor alle B met $B \in \Lambda$, $B \subset A$ geldt $\nu(B) \leq 0$. We laten zien dat er bij elke $E \in \Lambda$ met $\nu(E) < 0$ een sterk negatieve A met $A \subset E$ te vinden is.

We construeren daartoe een rij $E_1, E_2, \ldots$ van onderling disjuncte verzamelingen, met $E_i \in \Lambda$, $E_i \subset E$ voor alle i. De E_i's worden successievelijk gekozen volgens dit principe: Laat $E_1, \ldots, E_{i-1}$ reeds gekozen zijn en zij

$$\alpha := \sup\{\nu(F) \mid F \in \Lambda,\ F \subset E\backslash(E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1})\}\ .$$

We nemen voor E_i een verzameling die voldoet aan $E_i \in \Lambda$, $E_i \subset E\backslash(E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1})$, $\nu(E_i) > \min(1, \frac{1}{2}\alpha)$ als $\alpha > 0$, en als $\alpha = 0$ nemen we $E_i = \emptyset$.

Noem $H = E_1 + E_2 + \ldots$, dan is $\nu(H) \geq 0$ en $\nu(H) = \Sigma\nu(E_i) < \infty$, dus $\nu(E_i) \to 0$. Kennelijk is $\nu(E\backslash H) < 0$; als verder F voldoet aan $F \subset E\backslash H$ dan is $\nu(F) \leq 0$, want anders was voor grote i voldaan aan $\nu(E_i) < \min(1, \frac{1}{2}\nu(F))$, in strijd met de constructie van E_i. Dus $E\backslash H$ is sterk negatief.

Laat $\beta := \inf\{\nu(A) \mid A \in \Sigma,\ A$ sterk negatief$\}$. Neem een rij $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van sterk negatieve verzamelingen zo dat $\nu(A_n) \downarrow \beta$. Laat $X_2 := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dan is X_2 zèlf sterk negatief met $\nu(X_2) = \nu(A_n) + \nu(X_2\backslash A_n) \leq \nu(A_n)$ voor elke n. Dus $\nu(X_2) = \beta$ en β is eindig.

Laat $X_1 := X\backslash X_2$. Als nu $Y \in \Lambda$, $Y \subset X_1$, dan is $\nu(Y) \geq 0$. Want was $\nu(Y) < 0$, dan bevatte Y een sterk negatieve Z, en dan was $X_2 \cup Z$ sterk negatief met $\nu(X_2 \cup Z) = \nu(X_2) + \nu(Z) < \beta$. □

Gevolg. Definieer μ_1 en μ_2 door

$$\mu_1 = \forall_{A\in\Lambda}\ \nu(A \cap X_1)\ ,\quad \mu_2 = \forall_{A\in\Lambda}\ -\nu(A \cap X_2)\ ,$$

dan zijn μ_1 en μ_2 eindige maten. Omgekeerd: als μ_1 en μ_2 eindige maten op de sigma-algebra Λ zijn, dan is $\mu_1 - \mu_2$ totaal additief.

12.4. Stelling. Laat ν en μ totaaladditief zijn op de sigma-algebra Λ, en $\mu(E) \geq 0$ voor alle $E \in \Lambda$ (μ is dus een eindige maat, d.w.z. een maat met $\mu(X) < \infty$). Dan is er een afbeelding F van de reële getallen in Λ zó dat voor alle reële u en v

$$E \in \Lambda,\ E \subset F(u) \Rightarrow \nu(E) \leq u\mu(E) \tag{1}$$

$$E \in \Lambda,\ E \subset (X\backslash F(u)) \Rightarrow \nu(E) \geq u\mu(E) \tag{2}$$

$$u < v \Rightarrow F(u) \subset F(v), \tag{3}$$

en als $N_1 := \bigcap_{u\in\mathbb{R}} F(u)$, $N_2 := X\backslash \bigcup_{u\in\mathbb{R}} F(u)$ dan is $N_1 \in \Lambda$, $N_2 \in \Lambda$ en

$$\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0,\ \nu(N_1) \leq 0,\ \nu(N_2) \geq 0\ . \tag{4}$$

Bewijs. Bij elke $r \in \mathbb{Q}$ is $\Psi_{E\in\Lambda}\ (\nu(E) - r\mu(E))$ totaaladditief. Volgens 12.3 is er dus een W_r met

$$Y \in \Lambda,\ Y \subset W_r \Rightarrow \nu(Y) \leq r\mu(Y)\ ,$$

$$Y \in \Lambda,\ Y \subset X\backslash W_r \Rightarrow \nu(Y) \geq r\mu(Y)\ .$$

Als $u \in \mathbb{R}$ definiëren we $F(u) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}, r<u} W_r$, waaruit volgt $F(u) \in \Lambda$. Verder volgt (2): als $E \in \Lambda$, $E \subset X\backslash F(u)$ dan is $E \subset X\backslash W_r$ voor alle r met $r < u$, dus $\nu(E) \geq r\mu(E)$ voor alle r met $r < u$, dus $\nu(E) \geq u\mu(E)$. En (1) blijkt door een E met $E \subset F(u)$ disjunct te splitsen als $E = E_1 + E_2 + \ldots$, waarin $E_i \subset W_{r_i}$, en $r_1, r_2, \ldots$ een aftelling is van de rationale getallen $< u$. Voor elke E_i is $\nu(E_i) \leq r_i\mu(E_i)$ dus $\nu(E_i) \leq u\mu(E_i)$. Door over i te sommeren zien we dat $\nu(E) \leq u\mu(E)$.

Uit de definitie van F(u) volgt (3) onmiddellijk. Verder volgt eruit dat

$$\bigcap_{u\in\mathbb{R}} F(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F(-n),\quad \bigcup_{u\in\mathbb{R}} F(u) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} W_r$$

en dus $N_1 \in \Lambda$, $N_2 \in \Lambda$. Verder: als $E \subset N_2$, dan is $E \subset X\backslash W_r$ voor alle r, dus $\nu(E) \geq r\mu(E)$ voor alle r. Daar $\nu(E)$ en $\mu(E)$ eindig zijn, is $\nu(E) \geq 0$, $\mu(E) = 0$. Als $E \subset N_1$ dan is $E \subset F(-n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $\nu(E) \leq -n\mu(E)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $\nu(E) \leq 0$, $\mu(E) = 0$. □

12.5. Stelling. Zij Λ een sigma-algebra op X, laat ν totaaladditief op Λ zijn en neem aan dat μ (een niet-noodzakelijk eindige) sigmafiniete maat op Λ is. Dan is er een t.o.v. μ sommeerbare functie f en een $N \in \Lambda$ met $\mu(N) = 0$ zó dat voor elke $E \in \Lambda$ geldt

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu + \nu(E \cap N) . \tag{5}$$

Bewijs. Eerst veronderstellen we $\mu(X) < \infty$.

We gebruiken de F uit stelling 12.4, en nemen

$$N := N_1 \cup N_2,$$

zodat $\mu(N) = 0$. Bij elk natuurlijk getal k hebben we de disjuncte splitsing

$$X = N + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n,k}, \quad B_{n,k} = F\left(\frac{n+1}{k}\right) \backslash F\left(\frac{n}{k}\right) .$$

Uit (1) en (2) van stelling 12.4 volgt nu

$$\frac{n}{k}\, \mu(D) \le \nu(D) \le \frac{n+1}{k} \mu(D) \tag{6}$$

voor elke D met $D \in \Lambda$, $D \subset B_{n,k}$. Hieruit blijkt de absolute convergentie van $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{k}\, \mu(B_{n,k})$. Daarom is

$$t_k := 0.N + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{k}\, B_{n,k}$$

een trapfunctie (de begrippen trapfunctie, sommeerbare functie etc. zijn genomen t.o.v. de semiring Λ en maat μ).

Als $x \in X \backslash N$ dan ligt x in een der $B_{n,1}$; er zijn dus u's met $x \in F(u)$ en u's met $x \notin F(u)$, zodat $\inf\{u \in \mathbb{R} \mid x \in F(u)\}$ gedefinieerd en eindig is. Stel nu

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{u \in \mathbb{R} \mid x \in F(u)\} & (x \in X \backslash N) \\ 0 & (x \in N) . \end{cases}$$

Voor alle n,k is

$$\frac{n}{k} \le f(x) \le \frac{n+1}{k} \qquad (x \in B_{n,k}),$$

want als $x \in B_{n,k}$ dan is $x \in F(\frac{n+1}{k})$, $x \notin F(\frac{n}{k})$. Dus

$$t_k \le f \le t_k + \frac{1}{k} .$$

De constant k^{-1} heeft de eindige μ-norm $\mu(X)/k$, zodat $\| f - t_k \| \to 0$ als $k \to \infty$. Dus f is μ-sommeerbaar.

Als $D \in \Lambda$, $D \subset B_{n,k}$, dan is

$$\frac{n}{k}\, \mu(D) \le \int_D f\, d\mu \le \frac{n+1}{k}\, \mu(D) .$$

Samen met (6) geeft dit

$$\Big| \int_D f(x) d\mu - \nu(D) \Big| \le \frac{1}{k}\, \mu(D) .$$

Door nu een $E \in \Lambda$ te schrijven als

$$E = (E \cap N) + \sum_n E \cap B_{n,k} ,$$

blijkt dat $|\nu(E) - \nu(E \cap N) - \int_E f(x) d\mu| \le \frac{1}{k}\, \mu(X)$. Door k naar ∞ te laten gaan, blijkt (5).

Als $\mu(X) = \infty$ is, gaat men als volgt te werk (schetsmatig). Men splitst $X = X_1 + X_2 + \ldots$, met eindige $\mu(X_m)$'s, en definieert de eindige maat μ_1 door

$$\mu_1(E) = \sum_m \frac{\mu(X_m \cap E)}{2^m(1 + \mu(X_m))} \qquad (E \in \Lambda) .$$

Men kan het afgeleide resultaat toepassen op μ_1; we vinden een functie f_1 (μ_1-sommeerbaar) en een verzameling N_1 (μ_1-meetbaar) met $\mu_1(N_1) = 0$ is zó dat

$$\nu(E) = \int_E f_1 d\mu_1 + \nu(E \cap N_1) \qquad (E \in \Lambda) .$$

Merk op dat $\mu(N_1) = 0$. Met $\beta := \sum_m \frac{X_m}{2^m(1 + \mu(X_m))}$ vinden we dan

$$\nu(E) = \int_E f_1 \beta d\mu + \nu(E \cap N_1) \qquad (E \in \Lambda) ,$$

en de functie $f_1\beta$ is μ-sommeerbaar. $\square$

12.6. Opmerking 1. Als ν de eigenschap heeft dat $\nu(E) \geq 0$ voor alle $E \in \Lambda$, dan wordt $f \geq 0$ (p.p. in μ-zin). Als nl. niet $f \geq 0$ (p.p. in μ-zin), dan is er een $E \in \Lambda$ met $\int_E f d\mu < 0$, etc.

Opmerking 2. Op $X \backslash N$ is f op nulfuncties na eenduidig bepaald: als f_1 en f_2 voldoen aan $\nu(E) = \int_E f_1 d\mu + \nu(E \cap N) = \int_E f_2 d\mu + \nu(E \cap N)$ voor alle $E \in \Lambda$, dan kunnen we opmerking 1 toepassen op $f_1 - f_2$ en $f_2 - f_1$.

12.7. Definitie. We zeggen dat ν absoluut continu is t.o.v. μ als voor elke $A \in \Lambda$ geldt $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

12.8. Stelling (Radon-Nikodym). Laat Λ een sigma-algebra op X zijn, ν totaaladditief op Λ, μ een sigmafiniete maat op Λ. Dan geldt: ν is dan en slechts dan absoluut continu als er een μ-sommeerbare functie f bestaat zó dat voor alle $E \in \Lambda$

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu .$$

Bewijs. Stelling 12.5 plus voorbeeld 12.2. □

13. Sobolev ruimten.

13.1. In deze paragraaf beschouwen we afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}$. De begrippen norm, trapfunctie, sommeerbaar, meetbaar etc. worden dan op de voor de hand liggende wijze aangepast. Vele stellingen zoals stelling 6.4, 7.7 en 10.13 blijven geldig; een stelling als het lemma van Fatou (8.13) gaat echter niet meer op.

13.2. We nemen een open deelverzameling G van $\mathbb{R}^n$. Deze is vereniging van aftelbaar vele cellen, en dus meetbaar. Met de gewone Lebesgue-maat μ is (G,Λ,μ) een maatruimte ($\Lambda = \{E \cap G \mid E$ meetbaar in $\mathbb{R}^n\}$).

We merken op: als f sommeerbaar is over $\mathbb{R}^n$, dan is zijn restrictie tot G (gemakshalve ook weer f genoemd) sommeerbaar over G, en $\int_{\mathbb{R}^n} f \chi_G d\mu = \int_G f \, d\mu$. We kunnen ook $L_p(G)$ (met $1 \leq p \leq \infty$) desgewenst opvatten als de collectie der $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ met $f = 0$ bijna overal buiten G.

De rand van G wordt door ∂G voorgesteld. Merk op dat zo'n rand gecompliceerd kan zijn, en bijvoorbeeld wel eens uit stukken van verschillende dimensie kan bestaan. Ook behoeft niet $\mu(\partial G) = 0$ te zijn.

13.3. Definitie. Als $m \in \{0,1,2,\ldots\}$, bestaat $C^m(G)$ uit alle op G gedefinieerde complexwaardige functies waarvan de partiële afgeleiden tot en met de m-de orde overal op G bestaan en continu zijn (zoals bekend impliceert dit dat de gemengde partiële afgeleiden onafhankelijk van de volgende der differentiaties zijn).

13.4. Definitie. Als $m \in \{0,1,2,\ldots\}$, is $C^m(\bar{G})$ gedefinieerd als de verzameling der $f \in C^m(G)$ waarvan de partiële afgeleiden tot en met de m-de orde uniform continu zijn.

13.5. Opmerking. Als f uniform continu is op G, dan kan f tot een continue functie op de afsluiting $\bar{G}$ worden voortgezet. Dit verklaart de notatie.

13.6. Definitie. $C_0^\infty(G)$ is de verzameling der op G gedefinieerde complexwaardige oneindig vaak differentieerbare functies f met compacte in G gelegen drager (vgl. 5.4).

Opmerking. "Oneindig vaak differentieerbaar" wil nog niet zeggen "analytisch". De enige analytische functie in C_0^∞ is de nulfunctie. Een voorbeeld van een niet-analytische geven we in $\mathbb{R}$. Laat $p(x)$ gedefinieerd zijn als 0 voor $x \geq 1$ en $x \leq -1$, en als $\exp((x^2-1)^{-1})$ voor $-1 < x < 1$. Neem

$$q(x) = \int_{-\infty}^{2x-1} p(t)dt \ .$$

Dan is $q \in C^\infty$, $q(x) = 0$ $(x \leq 0)$, $q(x) = A$ $(x \geq 1)$ met een constante $A > 0$. Voor $0 < x < 1$ is $0 < q(x) < A$. Is nu G een open interval, met $a \in G$, $b \in G$, en $a < c < d < b$, en nemen we

$$f_{a,c,d,b}(x) = A^{-2}.q(\frac{x-a}{c-a}).q(\frac{b-x}{b-d}) \ ,$$

dan is $f_{a,c,d,b} \in C_0^\infty(G)$.
Deze functie heeft de waarde 1 op (c,d), de waarde 0 buiten (a,b), en de overblijvende waarden liggen tussen 0 en 1.

13.7. Stelling. Als $1 \leq p < \infty$, ligt $C_0^\infty(G)$ dicht in $L_p(G)$.

Bewijs. G is vereniging van aftelbaar vele geheel in G gelegen cellen (met bijv. rationale coördinaten). Deze is als disjuncte vereniging van cellen te schrijven (vgl. bewijs van 1.4.5): $G = A_1 + A_2 + \ldots$. Als $f \in L_p(G)$ dan is $\Sigma_i \int_{A_i} |f|^p d\mu < \infty$. Bij elke $\varepsilon > 0$ is er dus een N met

$$\| f - \sum_{i=1}^{N} f.A_i \|_p = (\sum_{N+1}^{\infty} \int_{A_i} |f|^p d\mu)^{1/p} < \varepsilon \, .$$

Elke $f.A_i$ kan in de zin van L_p benaderd worden door een trapfunctie met eindig vele treden (zie stelling 10.17); die treden kan men binnen A_i houden. We laten nu nog zien dat voor elke cel A de karakteristieke functie in de zin van L_p kan worden geapproximeerd door functies uit C_0^∞ met drager binnen A. In het één-dimensionale geval gaat dit met functies φ die op een groot deelinterval de waarde 1 hebben en daarbuiten oneindig vaak differentieerbaar blijven met waarden tussen 0 en 1, zó dat in de grenspunten van A alle afgeleiden nul zijn (vgl. opmerking 13.6). In het n-dimensionale geval gaat het met functies van de vorm $\Psi_{(x_1,\ldots,x_n)}\ \varphi(x_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_n)$, waarbij elk der φ_i aan de zojuist gegeven beschrijving voldoet. $\square$

Opmerking. $C_0^\infty(G) \subset C^m(\bar{G}) \subset C^m(G)$.

13.8. Van nu af aan onderstellen we dat G begrensd is.

Laat $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ een vector zijn met $\alpha_i \in \{0,1,\ldots\}$. Vaak korten we af $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, en stellen $|\alpha| := \alpha_1 +\ldots+ \alpha_n$. Met $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$ zullen we de differentiaaloperator $(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\ldots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$ bedoelen.

Als $f \in C^m(\bar{G})$, $|\alpha| \leq m$ dan is kennelijk $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f \in C^{m-|\alpha|}(\bar{G})$.

13.9. Definitie. Als $m \in \{0,1,\ldots\}$ en $u,v \in C^m(\bar{G})$, definiëren we het Sobolev-inproduct van de orde m als

$$(u,v)_{Sm} := \sum_{\alpha,|\alpha|\leq m} \int_G ((\frac{\partial}{\partial x})^\alpha u)\overline{((\frac{\partial}{\partial x})^\alpha v)}d\mu \, .$$

(De som loopt over alle stellen $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ met $\alpha_i \geq 0$, α_i geheel, $\alpha_1 +\ldots+ \alpha_n \leq m$). Natuurlijk is $(u,v)_{S0}$ het gewone inproduct.

Met $\|u\|_{Sm}$ bedoelen we $((u,u)_{Sm})^{\frac{1}{2}}$. Dit is de gewone IP-norm (vgl. Lineaire Analyse I, 4.1.4).

13.10. Stelling. $C^m(\bar{G})$ is met het Sm-inproduct een IP-ruimte.

Bewijs. Het enige niet geheel triviale is: als $\|u\|_{Sm} = 0$ dan is $\|u\|_{S0} = 0$ (dit blijkt door alle termen met $|\alpha| > 0$ weg te laten). □

13.11. Hulpstelling. Laat $u_1, u_2, \ldots$ een Sm-fundamentaalrij in $C^m(\bar{G})$ zijn, en laat $\|u_k\|_{S0} \to 0$. Dan is $\|u_k\|_{Sm} \to 0$.

Bewijs. We bewijzen slechts het geval $n = 1$, $m = 1$; het algemene geval is analoog. Zij $\varepsilon > 0$. Daar $u_1, \ldots$ een S1-fundamentaalrij is, is $\|u_k' - u_l'\|_{S0}^2 + \|u_k - u_l\|_{S0}^2 < \varepsilon^2$ als k en l voldoende groot zijn. Daar $\|u_k\|_{S0} \to 0$ blijkt nu dat $u_1', u_2', \ldots$ een S0-fundamentaalrij is. Wegens de volledigheid van $L_2(G)$ is er een $v \in L_2(G)$ met $\|u_k' - v\|_{S0} \to 0$. Voor elke $\varphi \in C_0^\infty(G)$ is dus $(u_k',\varphi)_{S0} \to (v,\varphi)_{S0}$. Maar door partiële integratie blijkt dat $(u_k',\varphi)_{S0} = -(u_k,\varphi')_{S0}$, en wegens $\|u_k\|_{S0} \to 0$ is $(u_k,\varphi')_{S0} \to 0$, zodat $(v,\varphi) = 0$. Daar $C_0^\infty(G)$ dicht ligt in $L_2(G)$ (stelling 13.7) is $v = 0$, dus $\|u_k'\|_{S0} \to 0$. Nu is bewezen $\|u_k'\|_{S0}^2 + \|u_k\|_{S0}^2 \to 0$, dus $\|u_k\|_{S1} \to 0$. □

13.12. Definitie. $H^m(G)$ is de completering van de IP-ruimte $C^m(\bar{G})$ met inproduct $(\ ,\ )_{Sm}$ (zie Lineaire Analyse I, 1.6.).

Opmerking. Het inproduct $(\ ,\ )_{Sm}$ is tot $H^m(G)$ voort te zetten (vgl. Lineaire Analyse I, 1.6.5), en $H^m(G)$ wordt daarmee een Hilbertruimte. $C^m(\bar{G})$ ligt dicht in deze ruimte.

13.13. Stelling. Er is een één-éénduidige lineaire afbeelding φ van $H^m(G)$ in $L_2(G)$, met $\varphi(f) = f$ voor alle $f \in C^m(\bar{G})$.

Bewijs. Als $f \in H^m(G)$ dan is f een equivalentieklasse van Sm-fundamentaalrijen. Als $u_1, u_2, \ldots$ en $v_1, v_2, \ldots$ zulke fundamentaalrijen zijn dan zijn het ook fundamentaalrijen in $L_2(G)$ en, daar $\|u_k - v_k\|_{S0} \le \|u_k - v_k\|_{Sm}$, hebben ze dezelfde limiet. Noem die $\varphi(f)$.

Als $f,g \in H^m(G)$ met $\varphi(f) = \varphi(g)$, en als $\{u_k\}$ resp. $\{v_k\}$ fundamentaalrijen uit f en g zijn, dan is $\|u_k - v_k\|_{S0} \to 0$. Uit hulpstelling 13.11 volgt dat $\{u_k\}$ en $\{v_k\}$ equivalent zijn, dus $f = g$. □

Opmerking. Het ligt voor de hand de "abstracte" elementen van $H^m(G)$ met hun φ-beelden te identificeren. Dan is $C^m(\bar{G}) \subset H^m(G) \subset L_2(G)$. $C^m(\bar{G})$ ligt Sm-dicht in de Sm-Hilbertruimte $H^m(G)$, en $C^m(\bar{G})$ ligt SO-dicht in de SO-Hilbertruimte $L_2(G)$ (dit laatste volgt uit stelling 13.7). Voor $f \in H^m(G)$ is $\|f\|_{Sm} \geq \|f\|_{SO}$ (omdat dit op $C^m(\bar{G})$ geldt).

13.14. Definitie. Als $u \in L_2(G)$, $v \in L_2(G)$ en als voor elke $\varphi \in C_0^\infty(G)$ geldt $(u, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi)_{SO} = -(v,\varphi)_{SO}$ dan heet v de zwakke afgeleide van u naar x_i. (Analoog vóor hogere orde van de afgeleide: $(u,(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \varphi)_{SO} = (-1)^{|\alpha|}(v,\varphi)_{SO}$).

Opmerking. v is op nulfuncties na eenduidig bepaald (dit volgt uit stelling 13.7).

Opmerking. Als bijv. $u \in C_0^\infty(G)$, is de gewone afgeleide ook zwakke afgeleide.

13.15. Stelling. Als $u \in H^m(G)$, $|\alpha| \leq m$ dan is er een $v \in L_2(G)$ (zelfs $\in H^{m-|\alpha|}(G)$) met $v = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha_{zw} u$ (zwakke afgeleide), en $\|v\|_{S,m-|\alpha|} \leq \|u\|_{Sm}$.

Bewijs. Neem $u_1,u_2,\ldots$ in $C^m(\bar{G})$ met $\|u_j - u\|_{Sm} \to 0$. Met $v_j = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha u_j$ is nu $\{v_j\}$ een $S(m - |\alpha|)$-fundamentaalrij die in de zin van $S(m - |\alpha|)$ naar een $v \in H^{m-|\alpha|}(G)$ convergeert.

Neem een $\varphi \in C_0^\infty(G)$, dan is

$$(u_j,(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \varphi)_{SO} = (-1)^{|\alpha|}(v_j,\varphi)_{SO} .$$

Daar $u_j \to u$ en $v_j \to v$ ook in de zin van SO gelden, is limietovergang mogelijk. Uit $\|v_j\|_{S,m-|\alpha|} \leq \|u_j\|_{Sm}$ volgt verder (continuïteit van de norm in een IP-ruimte) $\|v\|_{S,m-|\alpha|} \leq \|u\|_{Sm}$. □

13.16. Definitie. $H_0^m(G)$ is de Sm-afsluiting van $C_0^\infty(G)$ binnen $H^m(G)$.

Opmerking. $H_0^m(G)$ is gesloten deelruimte van een Hilbertruimte, en dus zelf een Hilbertruimte (vgl. Lineaire Analyse I, 1.6.2).

13.17. Stelling. Als $u \in H^m(G)$, $v \in H_0^m(G)$, $|\alpha| \le m$, en als $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha_{zw}$ de zwakke afgeleide voorstelt, dan is

$$((\frac{\partial}{\partial x})^\alpha_{zw} u, v)_{S0} = (-1)^{|\alpha|} (u, (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha_{zw} v)_{S0} .$$

Bewijs. Neem $u_j \in C^m(\bar{G})$ met $\| u_j - u \|_{Sm} \to 0$, $v_j \in C_0^\infty(G)$ met $\| v_j - v \|_{Sm} \to 0$. Door de integralen over de gehele $\mathbb{R}^n$ uit te strekken en herhaald partieel te integreren zien we

$$((\frac{\partial}{\partial x})^\alpha u_j, v_j)_{S0} = (-1)^{|\alpha|} (u_j, (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha v_j)_{S0} .$$

Verder is volgens stelling 13.15

$$\| (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha u_j - (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha_{zw} u \|_{S,m-|\alpha|} = \| (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha_{zw} (u_j - u) \|_{S,m-|\alpha|} \le \| u_j - u \|_{Sm} ,$$

en iets dergelijks geldt voor v_j, zodat de limietovergang gemaakt kan worden. □

13.18. Opmerking. Als $m > 0$ is $H_0^m(G)$ een echte deelruimte van $H^m(G)$. Kies namelijk $m = 1$, en G een open verzameling in $\mathbb{R}$. Kies verder $v = \Psi_x\ 1$ en $u = \Psi_x\ x$, dan is $v \in H^m(G)$, $u \in H^m(G)$. Was nu $v \in H_0^m(G)$, dan zou (met stelling 13.17) $(v,v)_{S0} = -(u,v')_{S0} = 0$.

Als $m = 0$ is daarentegen $H_0^m(G) = H^m(G) = L_2(G)$, daar $C_0^\infty(G)$ dicht in $L_2(G)$ ligt.

13.19. Inbeddingsstellingen. De inbeddingsstellingen van Sobolev zeggen dat onder zekere voorwaarden functies uit $H^m(G)$ in wezen continue functies zijn. We bewijzen eerst een hulpstelling (kleine uitbreiding van een stelling van Peletier en Wessels, J. Math. Anal. Appl. 23 (1968)).

13.20. Stelling. Als m,n positief geheel zijn, p reëel, $1 < p < \infty$, en $mp > n$ dan is er een constante $C_{m,n,p}$ met de volgende eigenschap:

Als $K \subset G \subset \mathbb{R}^n$, G open, $b \in G$, K meetbaar, K stervormig t.o.v. b (d.w.z. als $b + c \in K$, $0 \le t \le 1$ dan $b + tc \in K$), $f \in C^m(\bar{G})$ dan is

$$|f(b)| \le C_{m,n,p} \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_K |R^{|\alpha|} (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f|^p d\mu \right)^{1/p} (\mathrm{vol}(K))^{-1/p} ,$$

waarin vol(K) het volume van K voorstelt, en $R = \sup_{x \in K} \| x - b \|$.

<u>Bewijs</u>. We onderstellen $b = 0$ (wat geen wezenlijke beperking is). Kies $x \in K$; kort af $\varphi = \Psi_{t\in[0,1]} f(tx)$. Op φ passen we de ontwikkeling van Taylor toe

$$\varphi(0) = \varphi(1) - \frac{\varphi'(1)}{1!} + \frac{\varphi''(1)}{2!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{\varphi^{(m-1)}(1)}{(m-1)!} + (-1)^m \int_0^1 \frac{t^{m-1}\varphi^{(m)}(t)}{(m-1)!}\,dt.$$

Met $Z(x) := \max_{|\alpha|\le m} R^{|\alpha|} |(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x)|$ blijkt

$$|f(0)| \le A_{m,n}\{Z(x) + \int_0^1 t^{m-1} Z(tx)\,dt\}$$

met een constante $A_{m,n}$. We nemen een reëel getal a met $aq > -1$, waarin q bepaald is door $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Hiermee passen we de ongelijkheid van Hölder toe:

$$\left(\int_0^1 t^{m-1} Z(tx)\,dt\right)^p \le \left(\int_0^1 t^{aq}\,dt\right)^{p/q} \left(\int_0^1 t^{(m-1-a)p} (Z(tx))^p\,dt\right)^{p/p} .$$

Wegens de ongelijkheid $(u + v)^p \le 2^p(u^p + v^p)$ $(u \ge 0,\ v \ge 0)$ is nu

$$|f(0)|^p \le (2A_{m,n})^p\{(Z(x))^p + (aq+1)^{-p/q} \int_0^1 t^{(m-1-a)p}(Z(tx))^p\,dt\} \quad .(1)$$

Dit geldt voor alle x in K. We schatten eerst

$$\int_K dx \int_0^1 t^{(m-1-a)p}(Z(tx))^p\,dt \le \int_0^1 t^{(m-1-a)p-n}\,dt \int_{tK} |Z(y)|^p\,dy \le$$

$$\le ((m-1-a)p - n + 1)^{-1} \int_K |Z(y)|^p\,dy$$

als a voldoet aan $(m - 1 - a)p - n > -1$. We kunnen inderdaad aan deze voorwaarden voldoen: $aq > -1$ betekent $(a + 1)p > 1$, dus a dient tussen 1 en $(mp - n) + 1$ te liggen, hetgeen wegens $mp > n$ mogelijk is. Fixeer bijv. $a = -1 + (mp - n + 2)/(2p)$. Nu vinden we door (1) over K te integreren, met zekere constante $B_{m,n,p}$,

$$(\mathrm{vol}(K)).|f(0)|^p \leq B_{m,n,p} \int_K (Z(x))^p dx$$

waaruit de stelling onmiddellijk volgt. □

Opmerking. Voor $p = 2$ blijkt dat er een constante $D_{m,n}$ is met

$$|f(b)| \leq D_{m,n} \|f\|_{Sm} \cdot (\mathrm{vol}(K))^{-\frac{1}{2}}.\max(1,R^m) \ . \tag{2}$$

13.21. Stelling. Laat $2m > n$, $u \in H^m(G)$. Dan geldt

(i) Er is een $v \in C^0(G)$ met $v = u$ (p.p.)

(ii) Als er een $c > 0$ bestaat zó dat voor elke $b \in G$ een $K \subset G$ bestaat, stervormig t.o.v. b, met diam(K), vol(K) $\geq c$ dan is zelfs $v \in C^0(\bar{G})$, en er bestaat een getal C, onafhankelijk van u, met

$$\sup_{b\in G} |v(b)| \leq C\|u\|_{Sm} \ .$$

Bewijs. (i) Neem een $b_0 \in G$, en een bol $B_{b_0,r} \subset G$. Laat B de bol met halve straal voorstellen: $B = B_{b_0,\frac{1}{2}r}$. Neem nu in (2) het sup over B (bij elke $b \in B$ kunnen we voor K de bol $B_{b,\frac{1}{2}r}$ nemen):

$$\sup_{b\in B} |f(b)| \leq E_{m,n,r} \|f\|_{Sm} \ . \tag{3}$$

Hieruit volgt dat elke Sm-fundamentaalrij $\{u_k\}$ uit $C^m(G)$ op B uniform convergeert naar een continue functie v. We nemen voor $\{u_k\}$ een fundamentaalrij die naar u convergeert. Daar dan ook $\|u_k - u\|_{S0} \to 0$, is $\|u - v\|_{S0} = 0$, dus $u = v$ (p.p.).

(ii) We kunnen nu (3) bewijzen met $\sup\limits_{b\in G}$ in plaats van $\sup\limits_{b\in B}$; de rest van het bewijs gaat hetzelfde. □

13.22. Literatuur.

S. Agmon, Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, Princeton, 1965.

A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, New York, 1969.

R.A. Adams, Sobolev spaces, Acad. Press, New York, 1975.

Opgaven bij het college Maattheorie en Lebesque-integratie (voorjaar 1980).

Tenzij anders vermeld, wordt voor $\mathbb{R}$ de semiring der rechtskoppige spelden met de gewone Lebesgue-maat genomen, en de bijbehorende norm wordt met $\| \ \|$ aangegeven. Integralen van op $\mathbb{R}$ gedefinieerde sommeerbare (of niet-negatieve, meetbare) functies f worden genoteerd als $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$.

1. Is de klasse van open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ een semiring ?

2. Beschouw $\mathbb{R}$ met de semiring Γ van rechtskoppige spelden en de Lebesgue maat. Laat $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $h \in \mathbb{R}$ en

$$f_h := \forall_{x \in \mathbb{R}} f(x + h) \ .$$

Bewijs dat $\|f\| = \|f_h\|$.

3. Beschouw $\mathbb{R}$ met de gewone Lebesgue maat. Laat $E \subset \mathbb{R}$. Bewijs dat E een nulverzameling is d.e.s.d. als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een rij $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van open intervallen bestaat zó dat $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty}$ lengte $(I_n) < \varepsilon$.

4. Beschouw $\mathbb{N}$ met $\Gamma := P(\mathbb{N})$. Laat $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ een rij niet-negatieve reële getallen zijn, en definieer $\mu(A) := \sum_{k \in A} a_k$ voor $A \in \Gamma$. Bewijs dat $(\mathbb{N},\Gamma,\mu)$ een maatruimte is. Beschrijf de nulverzamelingen.

5. Laat $-\infty < a_1 < \ldots < a_n < \infty$, $c_1 > 0, \ldots , c_n > 0$. Laat $g := \forall_{x \in \mathbb{R}} \sum_{a_k \leq x} c_k$.
Vorm de Lebesgue-Stieltjesmaat uit 2.5.1.
(i) Als A een speld is die geen enkel punt a_k bevat, dan is $\|A\| = 0$.
(ii) Laat $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ en veronderstel $f(a_k) = 0$ $(1 \leq k \leq n)$. Bewijs dat $\|f\| = 0$.

6. Beschouw $\mathbb{R}$ met als semiring $\{\emptyset\} \cup \{(n,n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
Op deze semiring nemen we een maat μ gedefinieerd door

$$\mu((n,n+1]) = 1 \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$
$$\mu(\emptyset) = 0 \ .$$

Welke functies zijn trapfuncties, en welke zijn sommeerbaar, meetbaar?
Vergelijk de resultaten met die uit Opgave 7.

7. In Voorbeeld 2.5.1 nemen we $g := \Upsilon_{x \in \mathbb{R}}[x]$. Welke functies zijn meetbaar (sommeerbaar) bij de door g voortgebrachte Lebesgue-Stieltjes-maat μ_g? Bepaal $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_g$ voor functies f die sommeerbaar zijn bij μ_g.

8. Beschouw de situatie van Opgave 4. Neem $a_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$. Bewijs dat $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ sommeerbaar is d.e.s.d. als $\sum_{N=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$.

9. Laat (X,Γ,μ) een maatruimte zijn. Laat $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sommeerbaar zijn en $\varepsilon > 0$. Bewijs dat er een trapfunctie t is met eindig veel treden waarvoor $\|f - t\| < \varepsilon$. (t heeft eindig veel treden als $t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i E_i$ met $\sum_{i=1}^{\infty} E_i = X$, $E_i \in \Gamma (i \in \mathbb{N})$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \mu(E_i) < \infty$ en $\alpha_i \neq 0$ voor ten hoogste eindig veel i's.)

10. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ als $x \notin [0,1]$, en veronderstel dat f (eigenlijk) Riemannintegreerbaar is over $[0,1]$. Neem aan dat $f(0) = 0$. Laat $\varepsilon > 0$. Bewijs door onder- en bovensommen te beschouwen dat er Lebesgue-trapfuncties t_1 en t_2 bestaan zó dat $t_1 \leq f \leq t_2$ en $\|t_2 - t_1\| < \varepsilon$. Concludeer dat f sommeerbaar is op $\mathbb{R}$ en dat de Lebesgueintegraal van f over $\mathbb{R}$ gelijk is aan de Riemannintegraal $\int_0^1 f(x)dx$. Waarom is de beperking $f(0) = 0$ onbelangrijk?

11. Werk de Voorbeelden 5.14 (i) en (ii) uit. (Vgl. de Opgaven 10 en 5.)

12. Definieer $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) := 2x \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) - \frac{2\pi}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right) \qquad (x \in (0,1]\ ,$$

$$f(0) := 0 .$$

Bewijs dat $\int_0^1 f(x)dx$ bestaat als (oneigenlijke) Riemannintegraal, maar dat f niet sommeerbaar is op $[0,1]$.

13. Laat (X,Γ,μ) een sigmafiniete maatruimte zijn, en f een over X sommeerbare functie. Bewijs dat

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\Gamma}\ [\mu(A) < \delta \Rightarrow \left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon] .$$

(Aanwijzing: benader f (in norm) door trapfuncties met eindig veel treden, of door begrensde functies.)

14. Laat f sommeerbaar zijn op $[0,1]$. Bewijs dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor elke verdeling $V = [x_0, x_1, \ldots x_n]$ van $[0,1]$ met $\Delta(V) < \delta$ geldt

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| > \int_0^1 |f(t)|dt - \varepsilon .$$

(Aanwijzing: neem eerst aan dat f een trapfunctie is met eindig veel treden.)

15. Als f sommeerbaar is op $[0,1]$ en $F := \forall_{x\in[0,1]} [{}_0\int^x f(t)dt]$, dan is F van begrensde variatie op $[0,1]$, en de totale variatie van F op $[0,1]$ is $\int_0^1 |f(t)|dt$. (Gebruik Opgave 14.)

16. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sommeerbaar zijn. Laat $\varepsilon > 0$. Bewijs dat er een continue reële g op $\mathbb{R}$ bestaat die 0 is buiten een begrensd interval en waarvoor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon. \text{ (Gebruik Opgave 9.)}$$

17. Zij (X,Γ,μ) een sigmafiniete maatruimte, en laat f en g sommeerbare functies zijn. Bewijs dat

(i) Als $f \geq 0$, $g \geq 0$, dan is $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$.

(ii) Als $f.g = 0$, dan is $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$.

Zijn (i) en (ii) ook nog waar als f en g niet beide sommeerbaar zijn?

18. Is $\forall_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{\sin x}{x}$ sommeerbaar over $\mathbb{R}$ (zie ook Algebra en Analyse, 7.3.13) ?

19. Laat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van sommeerbare functies op $[0,1]$ zijn die uniform naar een functie f convergeert. Is f sommeerbaar ?

20. Geef een voorbeeld van een sigmafiniete maatruimte en een rij functies die uniform naar nul convergeert maar niet gemajoreerd.
Geef een voorbeeld van een sigmafiniete maatruimte en een rij functies die in geen enkel punt naar nul convergeert, maar wel in norm naar nul convergeert.

21. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \frac{x}{n})^n e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-x^2} dx$.

22. Bepaal $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + x} dx$.

23. In Algebra en Analyse 7.6.9 wordt de stelling van Arzela gegeven. Laat zien dat deze stelling direct volgt uit de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie.

24. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sommeerbaar zijn. Bewijs dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + h) - f(x)| dx \to 0 \qquad \text{als } h \to 0 .$$

(Gebruik Opgave 9 of Opgave 16.)

25. Laat $x > 0$. Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt .$$

(Vgl. Algebra en Analyse 7.6.28.)

26. Laat f meetbaar zijn op $\mathbb{R}$, $f(t) = O(e^{t^2})$ $(t \in \mathbb{R})$ en continu in 0. Bewijs dat

$$\sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2} f(t) dt \to f(0)\sqrt{\pi} \qquad \text{als } n \to \infty .$$

(Vgl. Algebra en Analyse 7.10.34.)

27. Laat f sommeerbaar zijn op $\mathbb{R}$ en definieer

$$F := \Upsilon_{x\in\mathbb{R}} \int_0^{x} f(t) dt .$$

Bewijs dat F continu is. (Aanwijzing: Opgave 9, 12 of 13.)

28. Laat (X,Γ,μ) een sigmafiniete maatruimte zijn. Als f over X meetbaar en begrensd is en g over X sommeerbaar is, dan is f.g over X sommeerbaar.

29. Laat (X,Γ,μ) een sigmafiniete maatruimte zijn. Als f over X meetbaar is, E een meetbare verzameling met $\mu(E) > 0$, en $f(x) > 0$ als $x \in E$, dan is $\int_E f d\mu > 0$.
(Aanwijzing: beschouw $E_n := \{x \in E \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$; er is tenminste één $n \in \mathbb{N}$ met $\mu(E_n) > 0$.)

30. Laat f sommeerbaar zijn over $\mathbb{R}$. Definieer

$$\hat{f} := \forall_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)dt \right] .$$

(Integralen voor complexwaardige functies worden op voor de hand liggende manier ingevoerd. De functie $\hat{f}$ heet Fouriergetransformeerde van f.)
Bewijs dat $\hat{f}$ continu is.

31. Als f sommeerbaar is over $\mathbb{R}$, dan is

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt)dt = 0 ,$$

of ook $\hat{f}(x) \to 0$ als $x \to \infty$ (notatie van Opgave 30.). Dit is het Lemma van Riemann-Lebesgue.

32. Zij $f \in L_2(\mathbb{R})$. Er geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{1 + x^2} f(x)dx = 0 .$$

33. Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergeert, dan is

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Bewijs dit (zie Algebra en Analyse, 7.6.11).

34. Laat $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Neem aan dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$

$$\Psi_{y \in \mathbb{R}}\ f(x,y)$$

sommeerbaar is over $\mathbb{R}$, en dat

$$\forall_{y \in \mathbb{R}}\ \forall_{x_0 \in \mathbb{R}}\ [\lim_{x \to x_0} f(x,y) = f(x_0,y)] \ .$$

a) Als er een g bestaat met eindige norm zó dat

$$\Psi_{y \in \mathbb{R}}\ |f(x,y)| \ \leq \ g$$

voor iedere $x \in \mathbb{R}$, dan is $\Psi_{x \in \mathbb{R}}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ continu.

(Aanwijzing: Als $x_0 \in \mathbb{R}$, en $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is een rij in $\mathbb{R}$ met $x_n \to x_0$, dan is $\Psi_{y \in \mathbb{R}}\ f(s_n,y) \to \Psi_{y \in \mathbb{R}}\ f(x_0,y)$ gemajoreerd.)

b) Als f differentieerbaar is naar x, dan is $\Psi_{y \in \mathbb{R}}\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ meetbaar over $\mathbb{R}$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. Als we bovendien aannemen dat er een h bestaat met eindige norm zó dat

$$\Psi_{y \in \mathbb{R}}\ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| \ \leq \ h$$

voor iedere $x \in \mathbb{R}$, dan is

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y)\,dy \ .$$

(Aanwijzing: Zie de aanwijzing bij a), en gebruik de stelling van het gemiddelde.)

35. Laat (X,Γ,μ) een σ-finiete maatruimte zijn, f een meetbare functie op X waarvoor $f, f^2, \ldots$ sommeerbaar zijn en $\int f^k d\mu = 1 \quad (k \in \mathbb{N})$. Bewijs dat f de karakteristieke functie is van een meetbare verzameling met maat 1. (Bekijk o.a. $f\chi_E$ met $E := \{x \in X \mid f(x) > 1\}$.)

36. Zij (X_1,Γ_1,μ_1) een sigmafiniete maatruimte, zij X_2 een niet-lege verzameling, en zij f een één-éénduidige afbeelding van X_1 in X_2.
Dan is $\Gamma_2 := \{f(A) \mid A \in \Gamma_1\}$ een semiring op X_2, en $\mu_2 := \Upsilon_{B\in\Gamma_2}\ \mu_1(f^{\leftarrow}(B))$ is een maat op (X_2,Γ_2) waarvoor geldt $\mu_2(f(A)) = \mu_1(A)$ als $A \in \Gamma_1$. Neem vervolgens aan dat X_1 door f op X_2 wordt afgebeeld. Dan is (X_2,Γ_2,μ_2) een sigmafiniete maatruimte, en als h een op X_2 gedefinieerde gegeneralizeerd reële functie is, dan is $\|h\|_2 = \|h \circ f\|_1$ (de indices slaan op de betrokken maten). Verder is een op X_2 gedefinieerde functie g sommeerbaar (over X_2) dan en slechts dan als $g \circ f$ zulks over X_1 is, en voor de integralen geldt

$$\int_{X_2} g d\mu_2 = \int_{X_1} g \circ f \, d\mu_1 .$$

37. Laat (X,Γ,μ) een σ-finiete maatruimte zijn, $f : X \to [0,\infty]$ meetbaar. Bewijs dat er een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van niet-negatieve sommeerbare functies bestaat zo dat $f_n \uparrow f$ (b.o.).

38. (i) Laat (X,Γ,μ) een σ-finiete maatruimte zijn, f een niet-negatieve μ-sommeerbare functie op X. Laat Σ de klasse van μ-meetbare verzamelingen zijn, en definieer

$$\nu(E) := \int_E f \, d\mu \qquad (E \in \Sigma) .$$

Dan is (X,Γ,ν) een maatruimte met $\nu(X) < \infty$.

(ii) Vervang in het bovenstaande f door een niet-negatieve μ-meetbare functie. Dan is (X,Σ,ν) weer een maatruimte.

39. Een Borelverzameling in $\mathbb{R}$ is een element van de kleinste σ-algebra die alle open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ bevat (vgl. Kansrekening en Statistiek, Deel 1, Def. 1.2.5). Laat (X,Γ,μ) een σ-finiete maatruimte zijn en $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ meetbaar. Bewijs dat voor elke Borelverzameling $A \subset \mathbb{R}$ de verzameling $\{x \in X \mid f(x) \in A\}$ meetbaar is.

40. (i) Bewijs dat $\int_0^{\pi} \frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\,(\frac{1}{2}t)}\,dt = \frac{\pi}{2}$ $\quad (n = 0,1,\ldots)$.

(ii) Gebruik het feit dat $\forall_{t\in(0,1]} \left(\frac{1}{2\sin\,(\frac{1}{2}t)} - \frac{1}{t}\right)$ sommeerbaar is op $[0,\pi]$ samen met het lemma van Riemann-Lebesgue (Opgave 31) om af te leiden dat $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

41. Laat (X,Γ,μ) een σ-finiete maatruimte zijn. Laat $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Laat $g \in L_q$. Bewijs dat door

$$L_g := \forall_{f\in L_p} \left(\int fg\,d\mu\right)$$

een begrensde lineaire functionaal wordt gedefinieerd op L_p (L_p heeft de p-norm), en dat $\|L_g\| = \|g\|_q$.

42. Laat (X,Γ,μ) een σ-finiete maatruimte zijn, en veronderstel $\mu(X) < \infty$. Laat $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ meetbaar en begrensd zijn. Bewijs dat $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ als $p \to \infty$.

43. (i) Als $f \in L(\mathbb{R})$, en f is begrensd op $\mathbb{R}$, dan is $f \in L_p(\mathbb{R})$ voor $1 \le p \le \infty$.

(ii) Algemener: Als (X,Γ,μ) een σ-finiete maatruimte is, $1 \le p < q \le \infty$, en $f \in L_p \cap L_q$, dan $f \in L_r$ als $r \in [p,q]$. Bovendien is $\forall_{r\in[p,q]} \|f\|_r$ een log-convexe functie.

44. Bewijs dat $L^p(0,1) \subset L(0,1)$ als $1 \le p \le \infty$.

45. Neem tweemaal $\mathbb{R}$ met de semiring Γ van rechtskoppige spelden en de gewone Lebesgue-maat. Op $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vormen we de productmaat (de Lebesgue maat op $\mathbb{R}^2$). Bewijs dat elke continue reële functie op $\mathbb{R}^2$ meetbaar is. Geef een karakterisering van nulverzamelingen in $\mathbb{R}^2$ analoog aan die in Opgave 3.

46. Laat (X,Γ,μ_1) en (Y,Γ_2,μ_2) σ-finiete maatruimten zijn. Vorm de productmaatruimte $(X\times Y,\Gamma_1\times\Gamma_2,\mu_1\times\mu_2)$. Schrijf $Y = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$ met $B_k \in \Gamma_2$, $\mu_2(B_k) < \infty$ $(k \in \mathbb{N})$ (Vgl. Stelling 2.6.)

(i) Als E een nulverzameling is in X, dan is $E\times B_k$ een nulverzameling in $X\times Y$ $(k \in \mathbb{N})$, en dus is $E\times Y$ ook een nulverzameling.

(ii) Als t een trapfunctie is op X, dan is $\tilde{t}$ met $\tilde{t}(x,y) := t(x)\chi_{B_k}(y)$ $((x,y) \in X\times Y)$ een trapfunctie op $X\times Y$.

47. Laat $f(x,y) := (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$ voor $(x,y) \in (0,1] \times (0,1]$.
Bewijs dat

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy = - \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx \neq 0 .$$

$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = ?\right)$ Conclusie ?

48. Laat $p > 0$, $q > 0$. Definieer f op $[0,\infty) \times [0,\infty)$ door

$$f(x,y) := \begin{cases} e^{-x}(x-y)^{p-1} & (0 \le y < x) , \\ 0 & (0 \le x < y) . \end{cases}$$

Bewijs dat f sommeerbaar is op $[0,\infty) \times [0,\infty)$ en leid af dat $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q)$.

49. Laat $f,g \in L_1(\mathbb{R})$. Bewijs m.b.v. de stelling van Fubini-Tonelli dat door

$$h := \forall_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$$

een element h van L_1 wordt gedefinieerd, en dat $\|h\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.
Voor de Fouriergetransformeerden (zie Opgave 30) geldt $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ (puntsgewijs product).

50. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (1-\cos x) e^{-xt} t \; dt \right) dx$$

door verwisseling van integratievolgorde. Motiveren !

Zo ook met

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx = (\Gamma(p))^{-1} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \sin x .\; e^{-xt} t^{p-1} dt \right) dx$$

voor $1 < p < 2$.

Hetzelfde voor

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \sin x . e^{-ax} . e^{-tx} dt \right) dx$$

voor $a > 0$.

51. Zij φ een over $\mathbb{R}$ sommeerbare niet-negatieve functie. Definieer

$$g := \forall_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \; .$$

Als μ_g de door g voortgebrachte Lebesgue-Stieltjes-maat is (2.5.1), dan is voor iedere bij μ_g sommeerbare functie f

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \; .$$

(Aanwijzing (zie ook het bewijs van de stelling van Fubini):

(i) Als $\|f\|_{\mu_g} = 0$ (hier is de norm ten opzichte van de maat μ_g bedoeld), dan is $\|f \cdot \varphi\| = 0$.

(ii) Als overal op $\mathbb{R}$

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$$

met $\alpha_i \in \mathbb{R}$, A_i's van de vorm $(a,b]$ en $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \mu_g(A_i) < \infty$,

dan is (gemajoreerde convergentie)

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_g = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_g(A_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx .$$

(iii) Voor het algemene geval gebruike men Stelling 9.2.)

52. Als (X_1,Γ_1,μ_1) en (X_2,Γ_2,μ_2) twee sigmafiniete maatruimten zijn, en f en g zijn sommeerbaar over X_1 resp. X_2, dan is

$$f \otimes g := \Upsilon_{(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2} f(x_1)g(x_2)$$

sommeerbaar over $X_1 \times X_2$, en er geldt

$$\int_{X_1 \times X_2} f \otimes g \; d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} f \, d\mu_1 . \int_{X_2} g \, d\mu_2 .$$

Zijn f en g meetbaar over X_1 resp. X_2, dan is $f \otimes g$ meetbaar over $X_1 \times X_2$.

(Aanwijzing: gebruik Opgave 46.)

53. Werk opmerking 11.6 uit.
(Aanwijzingen: (i) als $f_n \to f$ (zie 6.3, definitie 1), dan is volgens 11.5.1 voor bijna alle x

$$f_n(x,y) \to f(x,y) \qquad \text{(bijna alle } y\text{)}.$$

(ii) Om de uitspraak over de integralen te bewijzen, neme men een rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van over $X \times Y$ sommeerbare niet-negatieve functies met $f_n \uparrow f$.
(Gebruik 7.12.(3) (drie keer) en 11.5 .))

54. (Partiële integratie). Laat f en g sommeerbaar zijn over $\mathbb{R}$, en definieer

$$f_1 := \Psi_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt ,$$

$$g_1 := \Psi_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x} g(t)dt .$$

Nu is

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x)g(x) + f(x)g_1(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt. \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt .$$

(Aanwijzing: Als $S := \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, t \leq x\}$, dan is χ_S meetbaar en begrensd over $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pas de resultaten van Opgave 28 en 52 toe, en verwissel integratievolgorde in

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(t)\chi_S(x,t)dt)dx.)$$

55. Laat X een ruimte zijn, Λ een σ-algebra van deelverzamelingen van X, ν een totaaladditieve functie op Λ, $A \in \Lambda$. Definieer

$$\nu_A := \Psi_{E\in\Lambda}\ \nu(E \cap A) .$$

Bewijs dat ν_A totaal additief is op Λ .

56. Laat X een ruimte zijn, Λ een σ-algebra van deelverzamelingen van X, ν een totaal additieve functie op Λ. Bewijs dat ν begrensd is, d.w.z.

$$\sup \{|\nu(E)| \mid E \in \Lambda\} < \infty$$

(Stel van niet; kies E zo dat $|\nu(E)|$ veel groter dan $|\nu(X)|$, dan is ν niet begrensd op E of op X \ E; ga verder met een stuk waarop ν niet begrensd is. Vgl. het eerste deel van het bewijs van 12.3.)

57. Beschouw $\mathbb{N}$ met $\Lambda := P(\mathbb{N})$. Laat $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een rij niet-negatieve reële getallen zijn, en $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een rij reële getallen met $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$. Definieer $\mu(A) := \sum_{k\in A} a_k$ en $\nu(A) := \sum_{k\in A} b_k$ voor $A \in \Lambda$.

Volgens Opgave 4 is $(\mathbb{N},\Lambda,\mu)$ een maatruimte. Bewijs dat ν een eindige totaal-additieve verzamelingsfunctie is op Λ. Wanneer is ν absoluut continu t.o.v. μ? Beschrijf voor dit speciale geval een f en N zoals in Stelling 12.5.