TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE ANALYSE I

naar het college van

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

samengesteld door

Dr. W. van der Meiden

Uitgave 1969-1971

Bibl/ Mag

Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE ANALYSE I

NAAR HET COLLEGE VAN PROF. DR. N.G. DE BRUIJN
SAMENGESTELD DOOR DR. W. VAN DER MEIDEN

UITGAVE 1969

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Dictaat nr. 2.238 Prijs f 2,50

L I N E A I R E   A N A L Y S E   I

naar het college van Prof.dr. N.G. de Bruijn,
samengesteld door Dr. W. van der Meiden

Uitgave 1971

Inhoudsopgave

1. Lineaire analyse; inleiding

Lineaire analyse is een verzamelnaam voor een aantal onderwerpen uit de analyse die met elkaar gemeen hebben dat ze kunnen worden opgevat als beschouwingen over topologische vectorruimten.

De (in dit college) belangrijkste ruimten zijn de hilbertruimten en de banachruimten, die door specialisatie van vectorruimten worden verkregen. In het onderstaande overzicht, de ruimten-atlas, worden de specialisaties, onderling geordend, aangegeven: hoe lager, hoe specialer.

1. Vectorruimte	2. Topologische ruimte
3. Topologische vectorruimte	4. Metrische ruimte
6. Genormeerde vectorruimte	5. Volledige metrische ruimte
8. Inwendig-productruimte	7. Banachruimte
	9. Hilbertruimte

Alvorens tot de beschrijving van deze ruimten over te gaan vermelden we enige afspraken omtrent notatie:

Nt	de verzameling der natuurlijke getallen				
Gh	"	"	"	gehele	"
Rt	"	"	"	rationale	"
Rℓ	"	"	"	reële	"
Cm	"	"	"	complexe	"

In de te bespreken vectorruimten geven we de elementen bij voorkeur aan met de letters f, g, h, ...; het nulelement met $\mathcal{O}$. De complexe getallen, die de scalairen zijn voor de vectorruimten, noteren we met

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \ldots$.

Als φ een afbeelding is van een verzameling R in een verzameling S, dan gebruiken we $\overset{\leftarrow}{\varphi}$ in de volgende betekenis:

$$\text{als } q \in S, \quad \text{dan } \overset{\leftarrow}{\varphi}(q) := \{p \in R \mid \varphi(p) = q\}$$

$$\text{als } B \subset S, \quad \text{dan } \overset{\leftarrow}{\varphi}(B) := \{p \in R \mid \varphi(p) \in B\} .$$

Gemakshalve gebruiken we $\overset{\leftarrow}{\varphi}$ ook voor de inverse van φ, als die bestaat. De functie die voor alle x uit verzameling X gegeven is door een expressie E(x), geven we aan met $\Upsilon_{x \in X}\, E(x)$ (lambda-notatie van Church; het teken Υ i.p.v. λ is ingevoerd door Freudenthal).

Voorbeelden:

$$\Upsilon_{x \in R} \sin 2x, \quad \Upsilon_{x \in [0,1]} (x^2 + 3) .$$

Als $f := \Upsilon_{x \in R\ell} (x + y)^2$ dan is voor alle $a \in R\ell$

$$f(a) = (a + y)^2 .$$

Meestal is duidelijk welke X bedoeld is: dan schrijft men Υ_x i.p.v. $\Upsilon_{x \in X}$. Het toepassen van het symbool Υ_x noemt men wel "ont-x'en". Men kan ook dingen schrijven als

$$f := \Upsilon_{x \in R\ell} \; (\underline{\text{als}}\ x > 0\ \underline{\text{dan}}\ x\ \underline{\text{anders}}\ -2x) .$$

De notatie $\{p_n\}_{n \in Nt}$ voor rijen is nu eigenlijk overbodig: men kan $\Upsilon_{n \in Nt}\, p_n$ schrijven.

Het einde van een bewijs van een stelling wordt aangegeven met □.

1.1. Vectorruimte of lineaire ruimte

Een vectorruimte is een verzameling R die niet leeg is, en voorzien is van een algebraïsche structuur: de elementen van R kunnen worden opgeteld en ze kunnen worden vermenigvuldigd met elementen van een andere verzameling, scalairen genaamd. Als scalairen nemen we vrijwel uitsluitend de complexe getallen, soms ook de reëele getallen; in het laatste geval spreken we, ter onderscheiding, van een reële vectorruimte.

De elementaire eigenschappen van de reële n-dimensionale numerieke ruimte zijn in Wiskunde I en II behandeld. In overeenstemming met de bestaande conventie nemen we hier R^n als notatie voor de n-dimensionale numerieke ruimte:

$$R^n := \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \mid \forall_{i=1,\ldots,n}\ \alpha_i \in Cm\}\ .$$

R^n is een eenvoudig voorbeeld van een veel algemenere soort ruimten waarvan de elementen functies op een verzameling X zijn:

Zij X een willekeurige niet-lege verzameling, dan schrijven we Cm^X voor de verzameling van alle afbeeldingen van X in Cm; zij $f \in Cm^X$, $g \in Cm^X$ en $\alpha \in Cm$, dan voldoen de optelling en vermenigvuldiging met scalairen, gedefinieerd door

$$f + g := \Upsilon_x(f(x) + g(x))$$
$$\alpha f := \Upsilon_x(\alpha f(x))$$

aan de eisen voor een vectorruimte; in het bijzonder is σ, gedefinieerd door $\Upsilon_x 0$ de nulvector in zo'n ruimte, en bij iedere $f \in Cm^X$ is $-f$, gedefinieerd door $-f := \Upsilon_x(-f(x))$, de tegengestelde van f.

Cm^X heet een <u>functieruimte</u>. Ook lineaire deelruimten van Cm^X worden functieruimten genoemd.

Als men ook de productoperatie

$$f.g := \Upsilon_x(f(x)g(x))$$

beschouwt, spreekt men over een <u>functiealgebra</u>.

1.1.1. <u>Voorbeeld</u>: Zij $n \in Nt$ en $X := \{1,2,3,4,\ldots,n\}$. Dan is $Cm^X = R^n$.

1.1.2. <u>Voorbeeld</u>: Zij $X := Nt$; dan is Cm^X de verzameling van alle complexe rijen.

1.1.3. Voorbeeld: Zij $B(X) := \{f \in Cm^X \mid \exists_{N\in Nt} \forall_{x\in X} |f(x)| < N\}$; dan is $B(X)$ een lineaire deelruimte van Cm^X.

1.2. Topologische ruimte

Onder een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ verstaan we een niet-lege verzameling R waarin een klasse $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen is aangewezen die de volgende eigenschappen bezit:

i: $\emptyset \in \mathcal{T}$

ii: $R \in \mathcal{T}$

iii: $[U \in \mathcal{T} \ \& \ V \in \mathcal{T}] \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

iv: $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ voor iedere (eindige of oneindige) verzameling I.

Verzamelingen die tot de klasse $\mathcal{T}$ behoren heten open verzamelingen. Een verzameling heet gesloten als zijn complement open is.

Voor een willekeurige verzameling is

$\mathring{A}$, het inwendige van A, de vereniging van alle open verzamelingen die in A zijn bevat; $\mathring{A}$ is open.

$\bar{A}$, de afsluiting van A, de doorsnede van alle gesloten verzamelingen die A bevatten; $\bar{A}$ is gesloten.

Een verzameling A heet omgeving van een punt p, indien er een open verzameling, $U \in \mathcal{T}$, bestaat zó dat $p \in U \subset A$.

Iedere open verzameling U is omgeving voor alle punten $p \in U$. Een punt $p \in R$ heet verdichtingspunt van een verzameling $A \subset R$ indien voor iedere omgeving V van p geldt:

$$[V \setminus \{p\}] \cap A \neq \emptyset .$$

Voor een verzameling A zij A' de verzameling der verdichtingspunten; dan geldt $\bar{A} = A \cup A'$.

Zij $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte; een deelverzameling A van R heet <u>dicht in R</u> of <u>overal dicht</u> of kortweg <u>dicht</u> indien $\bar{A} = R$,
(d.w.z. $\forall_{U\in\mathcal{T}} \exists_{p\in A}\ p \in U$)

De topologische ruimte heet <u>separabel</u> indien er een aftelbare dichte deelverzameling A bestaat.

Een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ heet <u>compact</u> indien iedere open overdekking van R kan worden uitgedund tot een eindige overdekking.

Zij f een afbeelding van een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ in een topologische ruimte $(\tilde{R},\tilde{\mathcal{T}})$.
Als $p \in R$, heet f <u>continu in p</u> indien bij iedere $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{T}}$ met $f(p) \in \tilde{U}$ een $U \in \mathcal{T}$ bestaat zó dat $p \in U$ en $f(U) \subset \tilde{U}$.
Als f continu is in ieder punt $p \in R$ heet f <u>continu op R</u>.
f is dan en slechts dan continu op R als geldt:

$$\forall_{\tilde{U}\in\tilde{\mathcal{T}}}\ f^{\leftarrow}(\tilde{U}) \in \mathcal{T}.$$

Een topologische ruimte heet <u>hausdorff's</u> indien bij ieder tweetal verschillende punten $p \in R$ en $q \in R$ open verzamelingen $U \in \mathcal{T}$ en $V \in \mathcal{T}$ bestaan zó dat $p \in U$, $q \in V$ en $U \cap V = \emptyset$. In het vervolg hebben we vanaf 1.4 uitsluitend met hausdorffse ruimten te maken.

1.2.1. <u>Stelling</u>: Als $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte is en S is een niet-lege deelverzameling van R, dan is $\{U \cap S\}_{U\in\mathcal{T}}$ een topologie voor S. (Deze topologie heet de relatieve of geïnduceerde topologie.)

1.2.2. <u>Stelling</u>: Als R hausdorffs is en $S \subset R$, $S \neq \emptyset$, is S met de relatieve topologie ook hausdorffs.

1.2.3. <u>Stelling</u>: Als R separabel is en S is open in R, dan is S ook separabel.

1.2.4. <u>Stelling</u>: Als R compact is en S is gesloten in R, dan is S ook compact.

1.2.5. Voorbeeld: In Cm nemen we als open verzamelingen

i) $\emptyset$ en Cm

ii) alle cirkelschijven, zonder de rand (open cirkelschijven)

iii) alle verenigingen van open cirkelschijven.

Deze collectie deelverzamelingen van Cm is de topologie van Cm die in het hierna volgende steeds wordt gebruikt.

1.3. Topologische vectorruimte

Een topologische vectorruimte R is een lineaire ruimte die bovendien een topologie $\mathcal{T}$ bezit; en wel zo dat voldaan is aan de volgende voorwaarden:

i) De optelling is, als afbeelding van $R \times R$ in R, een continue functie; dat wil zeggen: als $f \in R$, $g \in R$ en W is een omgeving van $f + g$, dan zijn er omgevingen U van f en V van g zó dat $U + V \subset W$; hierin is

$$U + V := \{u + v \mid u \in U,\ v \in V\} .$$

ii) De vermenigvuldiging met scalairen, als afbeelding van $Cm \times R$ in R, is continu; dat wil zeggen: als $\gamma \in Cm$, $f \in R$ en W is een omgeving van γf, dan bestaan er omgevingen U van γ (in Cm) en V van f (in R) zó dat $UV \subset W$; hierin is

$$UV := \{\lambda v \mid \lambda \in U,\ v \in V\} .$$

Er bestaat een algemene theorie van topologische vectorruimten; wij gaan (in 1.6) over tot het speciale geval van de genormeerde lineaire ruimten.

1.4. Metrische ruimte

Een metrische ruimte (R,d) is een niet-lege verzameling R en een afbeelding $d : R \times R \to R\ell$ die voldoet aan i: $d(x,y) \geq 0$ voor alle $x \in R$, $y \in R$

ii: $d(x,y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$

iii: $d(x,y) = d(y,x)$

iv: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Onder de bol met middelpunt p ($p \in R$) en straal ρ ($\rho > 0$) verstaan we de verzameling

$$B_{p,\rho} := \{x \in R \mid d(p,x) < \rho\} .$$

Een niet-lege verzameling in (R,d) heet open als ze vereniging is van bollen. Nu geldt: Een metrische ruimte is een hausdorffse topologische ruimte. De topologie van de metrische ruimte heet de metrische topologie. De topologie die wij in Cm gebruiken (zie 1.2.5) wordt door een metriek bepaald: voor $\lambda \in Cm$, $\mu \in Cm$ is $d(\lambda,\mu) := |\lambda - \mu|$. Bollen in Cm zijn dus cirkelschijfjes (zonder rand). Deze topologie in Cm induceert er een in Rℓ; bollen in Rℓ zijn "open" intervallen (λ,μ).

Cm is separabel: zij $D := \{a + bi \mid a \in Rt,\ b \in Rt\}$, dan is $\bar{D} = Cm$ en, omdat Rt aftelbaar is, is ook D aftelbaar. Rℓ is (hoewel niet open in Cm, vergelijk 1.2.3) separabel: $\overline{Rt} = R\ell$.

In een metrische ruimte is de definitie van omgeving equivalent met: U is een omgeving van p als er een $\rho > 0$ bestaat zó dat $B_{p,\rho} \subset U$.

Een rij $\{p_n\}_{n \in Nt}$ in R heet convergent indien

$$\exists_{q \in R} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n \in Nt} \forall_{m \geq n}\ p_m \in B_{q,\varepsilon},$$

d.w.z. $\exists_{q \in R} \lim_{n \to \infty} d(q,p_n) = 0$.

Indien een rij $\{p_n\}_{n \in Nt}$ convergent is, is er in R ook precies één punt q met die eigenschap; dat punt q heet dan de limiet van de rij $\{p_n\}_{n \in Nt}$.

In een metrische ruimte definiëren we voor een verzameling A en een punt p:

$$d(p,A) := \inf\{d(p,x) \mid x \in A\} ;$$

dan geldt

$$\bar{A} = \{q \in R \mid d(q,A) = 0\} .$$

$\bar{A}$ kunnen we ook nog karakteriseren met behulp van de stelling: $q \in \bar{A}$ dan en slechts dan indien er een rij $\{p_n\}_{n \in Nt}$ in A is met $\lim_{n\to\infty} p_n = q$.

Een topologische ruimte heet <u>rij-compact</u> indien iedere rij $\{p_n\}_{n \in Nt}$ een convergente deelrij $\{p_{\varphi(n)}\}$ bevat. (Bij de notatie $p_{\varphi(n)}$ wordt onder φ een monotone afbeelding van Nt in Nt verstaan.)

1.4.1. <u>Stelling</u>: Als de metrische ruimte R compact is, is ze ook rijcompact; als ze rij-compact is, is ze compact.

<u>Bewijs</u>:

1) Zij R compact, en $\{p_n\}_{n \in Nt}$ een rij. Neem aan dat voor elke $q \in R$ geldt dat q niet de limiet is van enige deelrij. Dan heeft elke q een omgeving Ω waarvoor geldt $p_n \notin \Omega$ op hoogstens eindig vele uitzonderingen na. Daar R compact is, is R met eindig vele dergelijke Ω's te overdekken. Dit geeft een tegenspraak.

2) Zij R rij-compact. We definiëren nu, voor alle $\varepsilon > 0$, het begrip <u>ε-net</u>. Een ε-net $N(\varepsilon)$ is een eindige deelverzameling van R met de eigenschap dat voor elke $p \in R$ geldt $d(p,N(\varepsilon)) < \varepsilon$. We bewijzen dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een dergelijk ε-net bestaat: Fixeer ε en kies achtereenvolgens $p_1, p_2, \ldots$ zó dat $d(p_i,p_j) \geq \varepsilon$ voor alle i,j met $i \neq j$. Dit kan niet altijd zo doorgaan, want de oneindige rij $p_1, p_2, \ldots$ zou geen convergente deelrij kunnen hebben. Het proces breekt dus bij zekere n af: na $p_1, \ldots, p_n$ is geen p_{n+1} meer te vinden. Dit betekent dat $\{p_1, \ldots, p_n\}$ een ε-net is.

Laat nu $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ een open overdekking van R zijn. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat iedere bol $B(x,\varepsilon)$ geheel binnen een U_α ligt (een dergelijk getal heet Lebesgue getal van de overdekking). Want als zo'n ε niet bestaat, dan is er een rij $\{x_n\}_n$ in R zo dat géén van de bollen $B(x_n,n^{-1})$ binnen een U_α ligt. De rij $\{x_n\}_n$ bevat een convergente deelrij $\{x_{n_k}\}_k$ die naar $\bar{x}$ convergeert. Er bestaat dan een $\bar{\alpha} \in A$ zo dat $\bar{x} \in U_{\bar{\alpha}}$, en dus $B(\bar{x},\eta) \subset U_{\bar{\alpha}}$ voor een $\eta > 0$. Het is echter duidelijk dat $B(x_{n_k},n_k^{-1}) \subset B_{\bar{x},\eta}$ voor k voldoende groot, en dus $B(x_{n_k},n_k^{-1}) \subset U_{\bar{\alpha}}$ voor k groot genoeg: tegenspraak.

Bij het Lebesgue getal ε kiezen we een ε-net, bestaande uit $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Er bestaat dan een stel $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ in A zo dat $B(x_k,\varepsilon) \subset U_{\alpha_k}$ $(1 \le k \le n)$. Omdat de bollen $B(x_k,\varepsilon)$ de ruimte R overdekken, doen de U_{α_k}'s dat ook. $\square$

1.5. Volledige metrische ruimte

Zij (R,d) een metrische ruimte; een rij $\{p_n\}_{n\in Nt}$ heet fundamentaalrij als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{k\in Nt}\ \forall_{m>k}\ \forall_{n>k}\ d(p_m,p_n) < \varepsilon .$$

Iedere convergente rij is een fundamentaalrij; het omgekeerde is in een willekeurige metrische ruimte niet noodzakelijk het geval.

Een metrische ruimte heet volledig als iedere fundamentaalrij ook convergent is.

1.5.1. Stelling: Als R volledig is en S gesloten in R, dan is ook S volledig.

1.6. Genormeerde vectorruimte

Zij R een vectorruimte, en zij $\|\ \|$: R → Rℓ een functie die aan de volgende voorwaarden voldoet:

i) $\|f\| \ge 0$; als $\|f\| = 0$ dan $f = \mathcal{O}$;

ii) $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$;

iii) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

$\|\ \|$ heet een <u>norm</u> op R, en $(R, \|\ \|)$ heet een <u>genormeerde vectorruimte</u> of <u>genormeerde lineaire ruimte</u>.

1.6.1. <u>Stelling</u>: Door $d(f,g) := \|f-g\|$ wordt R tot een metrische ruimte.

1.6.2. <u>Stelling</u>: Door de metrische topologie die bij $\|\ \|$ hoort, wordt R tot een topologische vectorruimte.

<u>Bewijs</u>: Zij $f \in R$, $g \in R$ en W een omgeving van $f+g$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $f+g \in B_{f+g,\varepsilon} \subset W$. Nu geldt $B_{f,\frac{1}{2}\varepsilon} + B_{g,\frac{1}{2}\varepsilon} \subset B_{f+g,\varepsilon}$, d.w.z. dat $\|u-f\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $\|v-g\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ volgt

$$\|u+v-f-g\| = \|(u-f) + (v-g)\| \leqslant \|u-f\| + \|v-g\| < \varepsilon \ .$$

Dus de optelling in R is continu.

Zij $\gamma \in Cm$ en zij W een omgeving van γf; er is een $\varepsilon > 0$ zo dat

$$\gamma f \in B_{\gamma f,\varepsilon} \subset W \ .$$

Met $$\eta := \min\left\{ \frac{\varepsilon}{\|f\| + |\gamma| + 1},\ 1 \right\} ,$$

$\delta \in B_{\gamma,\eta}$ en $g \in B_{f,\eta}$ geldt

$$\begin{aligned}\|\gamma f - \delta g\| &= \|\gamma(f-g) + (\gamma-\delta)f + (\gamma-\delta)(g-f)\| \leqslant \\ &\leqslant |\gamma|\,\|f-g\| + |\gamma-\delta|\,\|f\| + |\gamma-\delta|\,\|g-f\| < \\ &< \eta\{\|f\| + |\gamma|\} + \eta^2 \leqslant \eta\{\|f\| + |\gamma| + 1\} \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

d.w.z. $B_{\gamma,\eta} \cdot B_{f,\eta} \subset B_{\gamma f,\varepsilon}$.

Dus ook de vermenigvuldiging met scalairen is in R continu. $\square$

1.6.3. <u>Opmerking</u>: Convergentie van een rij $\{f_n\}_{n \in Nt}$ in een genormeerde vectorruimte R wil zeggen: er is een element $g \in R$ zó dat $\|f_n - g\|$ convergeert naar 0 voor $n \to \infty$.

1.6.4. Voorbeelden

$R\ell$, met $\|\alpha\| := |\alpha|$, is een genormeerde reële vectorruimte.

Cm, met $\|\alpha\| := |\alpha|$, is een genormeerde vectorruimte.

R^n, met $\|\alpha\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2}$, is een genormeerde vectorruimte.

$B(X)$, met $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$, is een genormeerde vectorruimte, mits $X \neq \emptyset$; vgl. 1.1.3.

1.6.5. Ruimte van continue functies

Zij X een topologische ruimte, dan is

$$C(X) := \{f \in Cm^X \mid f \text{ continu op } X \text{ en } f \text{ begrensd op } X\} .$$

1.6.6. Stelling: $C(X)$ is een lineaire deelruimte van $B(X)$.

1.6.7. Voorbeelden:

$C([0,1])$, met $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt$, is een genormeerde vectorruimte.

$C([0,1])$, met $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$ is een genormeerde vectorruimte.

1.6.8. Stelling: In een genormeerde lineaire ruimte R is $\| \ \|$ een uniform continue functie.

Bewijs: Voor alle $f \in R$ is $\| \ \|$ continu in f, want

$$\|f - g\| < \varepsilon \Rightarrow \big|\|f\| - \|g\|\big| < \varepsilon \ . \qquad \square$$

1.7. Banachruimte

Een genormeerde lineaire ruimte R heet een Banachruimte (B-ruimte) wanneer R, als metrische ruimte, volledig is.

$R\ell$ en Cm zijn volledig; met behulp daarvan kan men bewijzen:

1.7.1. Stelling: R^n, voorzien van de norm $\| \ \|_2$: $\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^2}$, is een B-ruimte.

1.7.2. Stelling: Voor iedere niet-lege verzameling X is $B(X)$ met als norm $\| \ \|_\infty : \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ een B-ruimte.

Bewijs: (In het bewijs schrijven we $\| \ \|$ i.p.v. $\| \ \|_\infty$). $B(X)$ is een genormeerde lineaire ruimte (1.6.4).

Zij $\{f_n\}_{n \in \mathrm{Nt}}$ een fundamentaalrij in $B(X)$; dat wil zeggen

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon\ . \tag{1}$$

Daaruit volgt

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \forall_{x\in X}\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\ .$$

Dus: voor alle $x \in X$ is de rij $\{f_n(x)\}_{n\in \mathrm{Nt}}$ een fundamentaalrij in Cm. Aangezien Cm volledig is heeft de rij $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{Nt}}$ voor alle $x \in X$ een limiet; definieer $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$. We tonen nu achtereenvolgens aan:

i) $f \in B(X)$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Uit (1) volgt, voor $\varepsilon = 1$, N zó dat $\forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \|f_n - f_m\| < 1$ en $n = N+1$

$$\forall_{m>N}\ \|f_m - f_{N+1}\| < 1$$

zodat, wegens $\|f_m\| \leq \|f_m - f_{N+1}\| + \|f_{N+1}\|$,

$$\forall_{m>N}\ \|f_m\| < 1 + \|f_{N+1}\|$$

en dus $\forall_{x\in X}\ \forall_{m>N}\ |f_m(x)| < 1 + \|f_{N+1}\|$

en $\forall_{x\in X}\ |f(x)| \leq 1 + \|f_{N+1}\|$;

hieruit volgt $f \in B(X)$ en $\|f\| \leq 1 + \|f_{N+1}\|$.

Zij nu $\varepsilon > 0$, en N zó dat $\forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon$; dan geldt

$$\forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \forall_{x\in X}\ |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon\ ,$$

$$\forall_{n>N}\ \forall_{x\in X}\ |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon\ ,$$

$$\forall_{n>N}\ \|f_n - f\| \leq \varepsilon\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0\ . \qquad \square$$

1.7.3. <u>Opmerking</u>: Convergentie in de norm $\|\ \|_\infty$ is in $B(X)$ hetzelfde als uniforme convergentie

1.7.4. <u>Stelling</u>: Zij X een topologische ruimte en $C(X)$ voorzien van de norm $\|\ \|_\infty$; dan is $C(X)$ een B-ruimte.

<u>Bewijs</u>: $C(X)$ is een lineaire deelruimte van $B(X)$, (1.6.6). $C(X)$ is gesloten in $B(X)$: als $\{f_n\}_{n\in \mathrm{Nt}}$ een rij is in $C(X)$ die convergeert naar f, dan is f continu (wegens het uniforme karakter van de convergentie). Op grond van stelling 1.5.1 is $C(X)$ dus een B-ruimte. $\square$

1.8. <u>Inwendig-productruimte</u>

Een lineaire ruimte R heet <u>inwendig-productruimte</u> (<u>IP-ruimte</u>) indien een afbeelding

$$(\ ,\ )\ :\ R\times R \to \mathrm{Cm}$$

is gedefinieerd die voldoet aan de volgende voorwaarden ($f,g,h \in R$, $\lambda \in \mathrm{Cm}$):

i: $(f+g,h) = (f,h) + (g,h)$

ii: $(\lambda f,g) = \lambda(f,g)$

iii: $(f,g) = \overline{(g,f)}$

iv: $f \neq \sigma \Rightarrow (f,f) > 0$.

1.8.1. Voorbeelden

In R^n zij voor $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ en $\beta := (\beta_1,\dots,\beta_n)$,

$$(\alpha,\beta) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} \ .$$

In $C([0,1])$ kiest men een element r waarvoor $\forall_{x\in(0,1)}\ r(x) > 0$ en definieert

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}r(t)dt \ .$$

1.8.2. Stelling: Zij R een IP-ruimte; dan

v: $(\alpha f + \beta g,h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$

vi: $(f,\alpha g + \beta h) = \overline{\alpha}(f,g) + \overline{\beta}(f,h)$

vii: $(\sigma,f) = 0$

viii: $|(f,g)|^2 \leqslant (f,f)(g,g)$.

Bewijs: v en vi volgen direct uit i en ii; $(\sigma,f) = (0f,f) = 0(f,f) = 0$, dus ook vii geldt; viii geldt als $f = \sigma$.

Zij nu $\lambda \in$ Cm, $\mu \in$ Cm, $f \in R$, $g \in R$, en $f \neq \sigma$; dan is $(\lambda f + \mu g, \lambda f + \mu g) \geqslant 0$ op grond van iv en vii. Met behulp van de zojuist afgeleide regels v en vi volgt nu

$$\lambda\overline{\lambda}(f,f) + \lambda\overline{\mu}(f,g) + \overline{\lambda}\mu(g,f) + \mu\overline{\mu}(g,g) \geqslant 0 \ .$$

Stel $A := (f,f)$, $B := (f,g)$ en $C := (g,g)$ dan is $A > 0$, $C \geqslant 0$ en

$$A|\lambda|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\overline{\mu}B) + C|\mu|^2 \geqslant 0$$

voor alle $\lambda \in$ Cm en alle $\mu \in$ Cm; in het bijzonder is voor $\lambda = \overline{B}$ en $\mu = -A$

$$A|B|^2 - 2A|B|^2 + A^2C \geqslant 0$$

en wegens $A \neq 0$ volgt hieruit

$$|B|^2 \leqslant AC \ .$$

□

1.8.3. Stelling: In een IP-ruimte R is $\| \ \|$, gedefinieerd door $\|f\| := \sqrt{(f,f)}$, een norm. (Deze norm heet de IP-norm; als we in een IP-ruimte over een norm spreken, wordt (tenzij uitdrukkelijk anders vermeld) deze norm bedoeld.)

Bewijs: Door verificatie van de in 1.6 genoemde voorwaarden; dit is voor 1.6.i en 1.6.ii zeer eenvoudig en we bewijzen alleen 1.6.iii:
Uit het bewijs van stelling 1.8.2 nemen we de uitdrukking

$$(\lambda f+\mu g,\lambda f+\mu g) = \lambda\overline{\lambda}(f,f) + \lambda\overline{\mu}(f,g) + \overline{\lambda}\mu(g,f) + \mu\overline{\mu}(g,g)$$

en substitueren $\lambda = \mu = 1$:

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2|(f,g)| + \|g\|^2 \leq$$

$$\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \text{ , volgens 1.8.2.viii.}$$

$$\therefore \quad \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| . \qquad \square$$

Men kan dus iedere IP-ruimte als een genormeerde lineaire ruimte opvatten.

1.8.4. Stelling: In een IP-ruimte is $(\ ,\ )$ een continue functie.

Bewijs: Voor ieder paar f,g is $(\ ,\ )$ continu in het punt $\ulcorner f,g \urcorner \in R \times R$:

$$|(f+h,g+k)-(f,g)| = |(f,k)+(h,g)+(h,k)| \leq$$

$$\leq \|f\|\|k\| + \|h\|\|g\| + \|h\|\|k\| .$$

Zij $\varepsilon > 0$; neem $\eta := \min\left\{ \dfrac{\varepsilon}{\|f\|+\|g\|+1}, 1\right\}$, dan is (vergelijk bewijs 1.6.2) voor $\|h\| < \eta$ en $\|k\| < \eta$

$$|(f+h,g+k)-(f,g)| < \eta\{\|f\|+\|g\|\} + \eta^2 \leq \varepsilon . \qquad \square$$

1.8.5. Gevolg: Als $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ en $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ dan is

$$(f,g) = \lim_{n\to\infty}(f_n,g_n) \quad \text{en} \quad \|f\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n\| .$$

Vergelijk ook 1.6.8.

1.9. Hilbertruimte

Een IP-ruimte R heet <u>Hilbertruimte</u> (<u>H-ruimte</u>) indien ze met als norm de IP-norm een B-ruimte is.

1.9.1. <u>Voorbeeld</u>: R^n is een H-ruimte; volgens 1.8.1 is R^n een IP-ruimte; de IP-norm is

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f(i)\overline{f(i)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^2} ,$$

en met deze norm is R^n volgens 1.7.1 een B-ruimte.

1.9.2. <u>Voorbeeld</u>: Niet iedere IP-ruimte is een H-ruimte.

<u>Bewijs</u>: Beschouw $C([0,1])$ met $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$, dan is (vergelijk 1.8.1) $C([0,1])$ een IP-ruimte, waarin de IP-norm is:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Beschouw de rij $\{f_n\}_{n \in Nt}$ die wordt gedefinieerd door

$$\begin{aligned}
0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} &\quad : \quad f_n(t) = 1 , \\
\tfrac{1}{2} \leq t \leq \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^n} &\quad : \quad f_n(t) = 1 + 2^{n-1} - 2^n t , \\
\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \leq t \leq 1 &\quad : \quad f_n(t) = 0 ,
\end{aligned}$$

zodat

$$\forall_{n \in Nt}\ f_n \in C([0,1]) ; \quad \forall_{t \in [0,\frac{1}{2}]} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 1 ;$$

$$\forall_{t \in (\frac{1}{2},1]} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0 .$$

$\{f_n\}_n$ is een fundamentaalrij (stel $m \geq n$):

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_0^1 \{f_n(t) - f_m(t)\}^2 dt = \int_{2^{-1}}^{2^{-1}+2^{-n}} \{f_n(t) - f_m(t)\}^2 dt \leq 2^{-n} .$$

Als er een $f \in C([0,1])$ bestaat zo dat $\|f - f_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$, dan geldt voor $\frac{1}{2} < a < 1$

$$\int_a^1 |f(t) - f_n(t)|^2 dt \leq \|f - f_n\|^2 \to 0 \quad \text{als } n \to \infty . \qquad (*)$$

Voor n voldoende groot geldt $f_n(t) = 0$ als $a < t < 1$, zodat blijkbaar

$$\int_a^1 |f(t)|^2 dt = 0 .$$

Maar dat betekent $f(t) = 0$ als $a \leq t \leq 1$, en dus $f(t) = 0$ als $\frac{1}{2} < t \leq 1$.
Op analoge wijze vinden we $f(t) = 1$ als $0 \leq t < \frac{1}{2}$.
Dus f is zeker niet continu in $t = \frac{1}{2}$: tegenspraak. □

1.9.3. <u>Stelling</u>: In $C([0,1])$ is $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \|f\|_\infty^2$, met andere woorden: bij het gebruikelijke inproduct $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ voor $C([0,1])$ is $\|f\| \leq \|f\|_\infty$.

<u>Bewijs</u>: $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 dt = \|f\|_\infty^2$. □

1.9.4. Voorbeeld: Zij $R := \{f \in Cm^{Nt} \mid \exists_{n \in Nt} \forall_{m>n} f(m) = 0\}$.

Zij $(f,g) := \sum_{i=1}^{\infty} f(i)\overline{g(i)}$.

Overeenkomstig de conventie schrijven we de functiewaarden hier met een index: $\alpha \in R$ dan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots)$ en $(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i$.
R is een IP-ruimte, maar R is niet een H-ruimte.

Bewijs: R is een deelverzameling van Cm^{Nt}, en een lineaire deelruimte omdat met $\alpha \in R$, $\beta \in R$ en $\lambda \in Cm$ ook $\alpha + \beta \in R$ en $\lambda\alpha \in R$; R is dus een vectorruimte. Aan de voorwaarden voor $(\ ,\ )$ is triviaal voldaan; dus is R een IP-ruimte.
Beschouw de rij $\{\alpha^{(n)}\}_{n \in Nt}$ met $\alpha^{(n)} := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \ldots\right)$;
voor $n > m$ is

$$\|\alpha^{(n)} - \alpha^{(m)}\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = 2^{-2m} \cdot 3^{-1}\{1 - (\tfrac{1}{4})^{n-m}\} < 2^{-2m},$$

zodat $\{\alpha^{(n)}\}_{n \in Nt}$ een fundamentaalrij is.
Voor iedere $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p, 0, 0, 0, \ldots)$ uit R geldt evenwel

$$\|\alpha^{(n)} - \alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i|^2 \geq \sum_{i=p+1}^{\infty} |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i|^2$$

en voor $n > p$ staat hier

$$\|\alpha^{(n)} - \alpha\|^2 \geq \sum_{i=p+1}^{n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = 2^{-2p} \cdot 3^{-1}\{1 - (\tfrac{1}{4})^{n-p}\} \geq 2^{-2p-2}. \qquad \square$$

1.9.5. Voorbeeld: Zij $\ell^2 := \{\alpha \in Cm^{Nt} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty\}$ en in ℓ^2: $(\alpha,\beta) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i$.
ℓ^2 is een H-ruimte.

Bewijs:

i. ℓ^2 is een lineaire ruimte, want als $\alpha \in \ell^2$ en $\beta \in \ell^2$ dan

$$\forall_{n \in Nt}: \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i + \beta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (|\alpha_i| + |\beta_i|)^2 \leq 2\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2$$

wegens de bekende ongelijkheid $\forall_{a \in R\ell}\ \forall_{b \in R\ell}\ 2ab \leq a^2 + b^2$; nu

$$\forall_{n \in Nt} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i + \beta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2 \quad \therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i + \beta_i|^2 < \infty ;$$

evenzo, met $\lambda \in Cm$

$$\forall_{n \in Nt} \sum_{i=1}^{n} |\lambda\alpha_i|^2 = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \leq |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

dus ook

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda\alpha_i|^2 < \infty .$$

Dit wil zeggen:

$$[\alpha \in \ell^2,\ \beta \in \ell^2 \text{ en } \lambda \in Cm] \Rightarrow [\alpha + \beta \in \ell^2 \text{ en } \lambda\alpha \in \ell^2] .$$

ii. Uit $|\alpha_i\overline{\beta}_i| = |\alpha_i||\beta_i| \leq \frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)$ volgt dat voor $\alpha \in \ell^2$ en $\beta \in \ell^2$ de reeks $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\overline{\beta}_i$ absoluut convergeert; (,) is dus een afbeelding van $\ell^2 \times \ell^2$ in Cm.

(,) is een inproduct, hetgeen door verificatie van de vereiste eigenschappen blijkt; zo is bijvoorbeeld

$$(\alpha + \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i)\overline{\gamma}_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i\overline{\gamma}_i + \beta_i\overline{\gamma}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\overline{\gamma}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i\overline{\gamma}_i$$

omdat beide laatstgenoemde reeksen convergeren, zodat

$$(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma) \ ; \quad \text{enzovoorts.}$$

Nu (,) een inproduct blijkt te zijn is ook de IP-norm in ℓ^2 bekend:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2} .$$

iii. Tenslotte moeten we nog aantonen dat ℓ^2 in de IP-norm volledig is; zij $\{\alpha^{(n)}\}_{n \in Nt}$ een fundamentaalrij in ℓ^2;

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \|\alpha^{(n)}-\alpha^{(m)}\|<\varepsilon\ ,$$

equivalent met

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i^{(m)}|^2<\varepsilon^2 \qquad (1)$$

zodat

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \forall_{i\in \mathrm{Nt}}\ |\alpha_i^{(n)}-\alpha_i^{(m)}|^2<\varepsilon^2$$

hetgeen uitdrukt dat voor alle $i \in \mathrm{Nt}$ $\{\alpha_i^{(n)}\}_{n\in \mathrm{Nt}}$ een fundamentaalrij in $\mathbb{C}$m is; zij de limiet van deze rij α_i : $\alpha_i := \lim_{n\to\infty} \alpha_i^{(n)}$; en zij $\alpha := (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots)$. α is zeker een element van $\mathrm{Cm}^{\mathrm{Nt}}$; maar ook $\alpha \in \ell^2$, want uit (1) volgt

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \forall_{k\in \mathrm{Nt}}\ \sum_{i=1}^{k}|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i^{(m)}|^2<\varepsilon^2\ ,$$

en in deze eindige som volgt door limietovergang ($m\to\infty$)

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{k\in \mathrm{Nt}}\ \sum_{i=1}^{k}|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i|^2\leq\varepsilon^2$$

en door limietovergang ($k\to\infty$)

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i|^2\leq\varepsilon^2$$

dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in \mathrm{Nt}}\ \forall_{n>N}\ [\alpha^{(n)}-\alpha\in\ell^2\ \&\ \|\alpha^{(n)}-\alpha\|<\varepsilon]\ .$$

Omdat $\alpha^{(n)} \in \ell^2$ is nu $\alpha = \alpha^{(n)} - (\alpha^{(n)} - \alpha) \in \ell^2$; de fundamentaalrij $\{\alpha^{(n)}\}_{n\in \mathrm{Nt}}$ convergeert dus naar het element α van ℓ^2. □

De ruimte ℓ^2 staat model voor een grote klasse van hilbertruimten, namelijk die van alle oneindig dimensionale separabele hilbertruimten, waarvan een gedetailleerde bespreking nog volgt (zie § 2.2).

Een ander belangrijk voorbeeld van hilbertruimten is de ruimte $L^2(X)$ der kwadratisch integreerbare functies op een σ-finiete maatruimte $(X,\mathfrak{M},\mu)$; voor nadere bijzonderheden hierover zij verwezen naar de literatuur ([RN], [Z]).

2. Algemene eigenschappen van IP-ruimten

In dit hoofdstuk is R een IP-ruimte (tenzij uitdrukkelijk anders vermeld); $\| \ \|$ betekent IP-norm.

2.1. Orthonormalisering

Een deelverzameling Q van R heet een orthonormaalsysteem van R indien geldt

i. $\forall_{q \in Q} \ \|q\| = 1$

ii. $\forall_{q \in Q} \forall_{r \in Q} \ [q \neq r \Rightarrow (q,r) = 0]$.

Indien Q een aftelbare verzameling is kunnen we deze voorwaarden beschrijven met behulp van het Kroneckersymbool

$$\delta_{nm} : \ \forall_{n \in Nt} \ \delta_{nn} := 1 , \ \forall_{n \in Nt} \forall_{m \in Nt \setminus \{n\}} \ \delta_{nm} := 0$$

zodat $\{q_n\}_{n \in Nt}$ een orthonormaalsysteem is indien

i' + ii': $\forall_{n \in Nt} \forall_{m \in Nt} \ (q_n, q_m) = \delta_{nm}$.

2.1.1. Voorbeeld: In ℓ^2 is $Q(\ell^2) := \{q^{(p)} \in \ell^2 \mid p \in Nt \ \& \ \forall_{j \in Nt} \ q_j^{(p)} = \delta_{jp}\}$ een orthonormaalsysteem, maar niet het enige.

Als R een willekeurige lineaire ruimte is en $S \subset R$ dan verstaan we onder het opspansel L(S) van S de verzameling van alle eindige lineaire combinaties van de elementen van S:

$$L(S) := \{f \in R \mid \exists_{n \in Nt} \exists_{\alpha \in R^n} \exists_{(s_1, \ldots, s_n) \in S^n} \ f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i\}$$

waarbij we S^n gebruiken als notatie voor het Cartesische product van n factoren S.

2.1.2. Stelling: L(S) is een lineaire deelruimte van R en $S \subset L(S)$; $S = L(S)$ dan en slechts dan als S een lineaire deelruimte van R is.

<u>Bewijs</u>: Zij $f \in L(S)$ en $g \in L(S)$ dan zijn er $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\beta_1,\dots,\beta_m$ in Cm en $s_1,\dots,s_n$, $t_1,\dots,t_m$ in S zó dat

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \quad \text{en} \quad g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j t_j \ ;$$

dan is

$$f+g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j t_j \in L(S) \ .$$

Men verifieert evenzo dat, met $\lambda \in$ Cm, $\lambda f \in L(S)$. $L(S)$ is dus een lineaire deelruimte van R.

Als $f \in S$ is $f = 1.f$ met $1 \in$ Cm en $f \in S$; dus $S \subset L(S)$.

Als $L(S) = S$ is S blijkbaar een lineaire deelruimte.

Als S een lineaire deelruimte is, is $L(S) \subset S$ zodat dan $L(S) = S$. □

Een orthonormaalsysteem Q van R heet <u>totaal</u> indien $L(Q)$ in R dicht ligt: $\overline{L(Q)} = R$.

2.1.3. <u>Stelling</u>: In R^n is ieder orthonormaalsysteem Q met n elementen totaal.

<u>Bewijs</u>: Zij $Q = \{q^{(i)}\}_{i=1,\dots,n}$.

Uit $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q^{(i)}$ volgt

$$\forall_{j=1,\dots,n} \ 0 = (\sigma, q^{(j)}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q^{(i)}, q^{(j)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (q^{(i)}, q^{(j)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j \ ,$$

met andere woorden: Q is een onafhankelijk stelsel vectoren.

In WSK I is bewezen dat een onafhankelijk stelsel van n vectoren een basis is voor R^n:

$$R^n = L(Q) = \overline{L(Q)} \ .$$ □

2.1.4. <u>Stelling</u>: In ℓ^2 is $Q(\ell^2)$ totaal (zie 2.1.1).

Bewijs: Zij $\alpha \in \ell^2$ en $\varepsilon > 0$; bepaal N zó dat $\sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \varepsilon^2$, dan is

$$\|\alpha - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i q^{(i)}\|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{en} \quad \|\alpha - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i q^{(i)}\| < \varepsilon ,$$

$\therefore \quad \alpha \in \overline{L(Q)}$.

Dus $Q(\ell^2)$ is totaal. □

2.1.5. Voorbeeld: In ℓ^2 is $Q := Q(\ell^2) \setminus \{q^{(1)}\}$ niet totaal.

Bewijs: $\forall_{N \in \mathbb{N}t}\ \forall_{n=2,\ldots,N}\ \forall_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^{N-1}}\ \|q^{(1)} - \sum_{i=2}^{N} \alpha_i q^{(i)}\|^2 =$

$$= 1 + \sum_{i=2}^{N} |\alpha_i|^2 \geq 1 , \qquad \therefore \quad q^{(1)} \notin \overline{L(Q)} .$$ □

Zij $C_{\text{mod } 1} := \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = f(1)\}$.

(Merk op dat de elementen van $C_{\text{mod } 1}$ periodiek met periode 1 kunnen worden voortgezet tot continue functies op $\mathbb{R}\ell$; zo'n periodieke voortzetting van een $f \in C_{\text{mod } 1}$ geven we gemakshalve met dezelfde letter f aan.)

Voor $f \in C_{\text{mod } 1}$ en $g \in C_{\text{mod } 1}$ zij $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$.

Zij $q^{(n)}(t) := e^{2\pi i n t}$ voor alle $n \in \mathrm{Gh}$, en $Q := \{q^{(n)}\}_{n \in \mathrm{Gh}}$.

2.1.6. Stelling: $C_{\text{mod } 1}$ is een IP-ruimte en Q is een totaal orthonormaalsysteem in $C_{\text{mod } 1}$.

Bewijs: $C_{\text{mod } 1}$ is een lineaire deelruimte van $C([0,1])$ (dat kan men gemakkelijk zelf verifiëren) en $C([0,1])$ is bij het aangegeven product (,) een IP-ruimte (zie 1.8.1 en 1.9.2), zodat $C_{\text{mod } 1}$ ook een IP-ruimte is.

Wegens $\int_0^1 q^{(k)}(t)\overline{q^{(j)}(t)}dt = \int_0^1 e^{2\pi i t(k-j)}dt = \delta_{kj}$ is Q een orthonormaalsysteem.

Beschouw de voor alle $x \in R\ell$ gedefinieerde met periode 1 periodieke functies T_n $(n \in Nt)$ gedefinieerd door

$$T_n(x) := \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\left(\frac{1+\cos\ 2\pi x}{2}\right)^n$$

waarvoor het volgende geldt

$$\forall_{n \in Nt} \int_0^1 T_n(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T_n(x)dx = 1 \ ;$$

$$T_1(x) = 1 + \cos\ 2\pi x\ , \quad T_1 \text{ is even ;}$$

$$\forall_{n \in Nt}\ T_n(x) = \frac{(2^n)^2(n!)^2}{(2n)!}\left\{\frac{T_1(x)}{2}\right\}^n$$

Op $[0,\frac{1}{2}]$ is T_1 monotoon dalend; voor iedere $\delta \in (0,\frac{1}{2})$ geldt

$$a := \frac{T_1(\frac{\delta}{2})}{T_1(\delta)} > 1$$

en bijgevolg

$$\forall_{n \in Nt}\ [T_n \text{ is even, op } [0,\tfrac{1}{2}] \text{ monotoon dalend en } T_n(\tfrac{\delta}{2}) = a^n T_n(\delta)]\ .$$

Met behulp van deze betrekkingen bewijzen we eerst dat

$$T_n(x) \to \alpha(x)\ (n \to \infty) \text{ uniform voor } \delta \leq |x| \leq \tfrac{1}{2}\ ,$$

want uit

$$1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T_n(x)dx \geq \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{\frac{1}{2}\delta} T_n(x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\delta} T_n(x)dx \geq 2\int_0^{\frac{\delta}{2}} T_n(\tfrac{\delta}{2})dx = \delta a^n T_n(\delta)$$

volgt voor $\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}$

$$\forall_{n \in Nt}\ 0 \leq T_n(x) \leq T_n(\delta) \leq \frac{1}{\delta . a^n}\ . \qquad (1)$$

Vervolgens bewijzen we

$$\forall_{f \in C_{\text{mod }1}} \lim_{n \to \infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T_n(x)\{f(x+y) - f(y)\}dx = 0 \text{ uniform voor } y \in R\ell\ .$$

Zij daartoe $\varepsilon > 0$ en $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in R\ell\}$. f is continu op $R\ell$, uniform continu op een periode, en wegens de periodiciteit ook uniform continu op $R\ell$.

Bepaal nu $\delta \in (0,\frac{1}{2})$ zó dat

$$|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

en op grond van (1) $N \in Nt$ zó dat

$$\forall_{n \geq N} \forall_{x \in [\delta,\frac{1}{2}]} T_n(x) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} .$$

Dan is voor $n \geq N$ en $y \in R\ell$

$$\left|\int_\delta^{\frac{1}{2}} T_n(x)\{f(x+y) - f(y)\}dx\right| < \int_\delta^{\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} 2\|f\|_\infty dx < \frac{\varepsilon}{4} ,$$

evenzo $\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$

en

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} T_n(x)\{f(x+y) - f(y)\}dx\right| \leq \int_{-\delta}^{\delta} T_n(x)|f(x+y) - f(y)|dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} T_n(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

zodat

$$\forall_{n \geq N} \forall_y \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T_n(x)\{f(x+y) - f(y)\}dx\right| < \varepsilon ,$$

of

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T_n(x)\{f(x+y) - f(y)\}dx = 0 \quad \text{uniform op } R\ell .$$

Dit is weer equivalent met

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T_n(x)f(x+y)dx = f(y) \quad \text{uniform op } R\ell ,$$

en met

$$t_N(y) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T_N(x) f(x+y)\,dx$$

is bij de ε van zojuist

$$\|t_N - f\|_\infty < \varepsilon \;. \tag{2}$$

Nu is

$$t_N(y) = \int_{-\frac{1}{2}-y}^{\frac{1}{2}-y} T_N(x) f(x+y)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T_N(z-y) f(z)\,dz$$

en omdat

$$T_N(z-y) = \frac{2^N (N!)^2}{(2N)!} \{1 + \cos\, 2\pi(z-y)\}^N =$$

$$= \frac{2^N (N!)^2}{(2N)!} \{1 + \tfrac{1}{2} e^{2\pi i(z-y)} + \tfrac{1}{2} e^{2\pi i(y-z)}\}^N =$$

$$=: \sum_{k=-N}^{N} \varphi_k(z) e^{2\pi i k y}$$

is

$$t_n(y) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k y} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_k(z) f(z)\,dz$$

hetgeen aantoont dat $t_N \in L(Q)$.

In verband met 1.9.3 volgt uit (2)

$$\|t_N - f\| < \varepsilon \quad \text{of} \quad f \in \overline{L(Q)} \;;$$

hiermee is aangetoond dat Q totaal is. □

Een vector $f \in R$ heet <u>orthogonaal met</u> (of: <u>staat loodrecht op</u>) de deelverzameling S van R indien

$$\forall_{g \in S}\; (f,g) = 0 \;.$$

Als S een lineaire deelruimte van R is en $h \in S$, heet h <u>een projectie van $f \in R$ op S</u> indien $f - h$ loodrecht op S staat.

Het is direct in te zien dat er ten hoogste één projectie van f op S bestaat: zijn h_1 en h_2 projecties van f op S dan is

$$h_1 - h_2 \in S ,$$

$$h_1 - h_2 = (f - h_2) - (f - h_1)$$

en $\quad (h_1 - h_2, h_1 - h_2) = (f - h_2, h_1 - h_2) - (f - h_1, h_1 - h_2) = 0 ,$

zodat $\quad h_1 - h_2 = \sigma .$

2.1.7. <u>Stelling</u>: Als $Q := \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ een orthonormaalsysteem is in R, en $f \in R$ dan is $\sum_{i=1}^{n} (f, q_i) q_i$ de projectie van f op L(Q).

<u>Bewijs</u>: $\sum_{i=1}^{n} (f, q_i) q_i \in L(Q)$ en wegens

$$\forall_{j=1,\ldots,n} \quad \left(f - \sum_{i=1}^{n} (f, q_i) q_i, q_j\right) = (f, q_j) - \sum_{i=1}^{n} (f, q_i)(q_i, q_j) = 0$$

is $f - \sum_{i=1}^{n} (f, q_i) q_i$ orthogonaal met L(Q) zodat $\sum_{i=1}^{n} (f, q_i) q_i$ een projectie is van f op L(Q). □

2.1.8. <u>Stelling</u>: Als $F := \{f_n\}_{n \in Nt}$ een onafhankelijk stelsel vectoren in R is, dan bestaat er een orthonormaalsysteem $Q := \{q_n\}_{n \in Nt}$ in R zó dat $L(Q) = L(F)$.

<u>Bewijs</u>: $f_1 \neq \sigma$, zij $q_1 := \|f_1\|^{-1} f_1$, $h_2 := f_2 - (f_2, q_1) q_1$; dan is $h_2 \neq \sigma$; zij $q_2 := \|h_2\|^{-1} \cdot h_2$; nu is direct te verifiëren dat $\{q_1, q_2\}$ een orthonormaal stelsel is en dat

$$L(\{q_1, q_2\}) = L(\{f_1, f_2\}) .$$

Zij nu

$$h_3 := f_3 - \sum_{i=1}^{2} (f_3, q_i) q_i ,$$

dan is $h_3 \neq \sigma$; zij $q_3 := \|h_3\|^{-1} \cdot h_3$, dan is $\{q_1, q_2, q_3\}$ een orthonormaal stelsel en

$$L(\{q_1, q_2, q_3\}) = L(\{f_1, f_2, f_3\}) .$$

Stel dat het gelukt is om een stelsel $\{q_1, \ldots, q_n\}$ te construeren met de eigenschappen

$$A(n) : \{q_1, \ldots, q_n\} \text{ is orthonormaal}$$

$$B(n) : L(\{q_1, \ldots, q_n\}) = L(\{f_1, \ldots, f_n\}) .$$

Neem

$$h_{n+1} := f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (f_{n+1}, q_i) q_i .$$

Wegens $B(n)$ is

$$\sum_{i=1}^{n} (f_{n+1}, q_i) q_i \in L(\{f_1, \ldots, f_n\})$$

zodat $h_{n+1} \neq \sigma$.

Zij $q_{n+1} := \|h_{n+1}\|^{-1} \cdot h_{n+1}$ dan is $(j = 1, \ldots, n)$

$$(q_{n+1}, q_j) = \|h_{n+1}\|^{-1} (h_{n+1}, q_j) =$$

$$= \|h_{n+1}\|^{-1} \{(f_{n+1}, q_j) - \sum_{i=1}^{n} (f_{n+1}, q_i)(q_i, q_j)\}$$

$$= \|h_{n+1}\|^{-1} \{(f_{n+1}, q_j) - (f_{n+1}, q_j)\} = 0$$

en

$$(q_{n+1}, q_{n+1}) = \|h_{n+1}\|^{-2} (h_{n+1}, h_{n+1}) = 1 ,$$

zodat $A(n+1)$ geldt.

Uit de definities van h_{n+1} en q_{n+1} volgt in verband met $B(n)$ zowel

$$q_{n+1} \in L(\{f_1, \ldots, f_{n+1}\}) \quad \text{als} \quad f_{n+1} \in L(\{q_1, \ldots, q_{n+1}\}) .$$

Door volledige inductie is zo het stelsel $Q := \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}t}$ gedefinieerd; Q is op grond van het voorgaande orthonormaal en

$$L(Q) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(\{q_1,\dots,q_n\}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(\{f_1,\dots,f_n\}) = L(F) . \qquad \square$$

2.1.9. Opmerkingen: Als $F' := \{f_n\}_{n\in \mathbb{N}t}$ een deelverzameling is van R kan men F' door uitdunning over laten gaan in een onafhankelijk stelsel $F \subset F'$: Neem in de rij $f_1, f_2, \dots$ de eerste vector die $\neq \sigma$ is en noem die f_1'; neem vervolgens de eerstvolgende die niet tot $L(f_1')$ behoort, f_2'; neem vervolgens de eerste die niet tot $L(\{f_1', f_2'\})$ behoort, f_3'; enz. Als dit proces niet na eindig veel stappen eindigt ontstaat de situatie van stelling 2.1.8; als het proces na eindig veel stappen eindigt ontstaat een eindig onafhankelijk stelsel $F \subset F'$; in beide gevallen is $L(F) = L(F')$.

Het orthonormalisatieprocédé van stelling 2.1.8 is natuurlijk ook op eindige stelsels F van toepassing.

2.1.10. Voorbeeld: In $C([0,1])$ met inproduct $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ vormen de functies f_n $(n \in \mathbb{N}t \cup \{0\})$ met $f_n(t) := t^n$ een onafhankelijk stelsel. Door orthonormalisatie ontstaan hieruit de polynomen:

$$q_0(t) = 1 ;$$

$$h_1(t) \text{ (in de terminologie van 2.1.8) } = f_1(t) - \int_0^1 f_1(t)q_0(t)dt =$$

$$= t - \int_0^1 t\, dt = t - \tfrac{1}{2} ,$$

zodat

$$\|h_1\|^2 = \int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{12} \quad \text{en} \quad q_1(t) = 2\sqrt{3}(t-\tfrac{1}{2}) ;$$

$$h_2(t) = t^2 - \int_0^1 t^2 dt - 2\sqrt{3}(t-\tfrac{1}{2}) \int_0^1 2\sqrt{3}(t-\tfrac{1}{2})t^2 dt =$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - (t-\tfrac{1}{2}) = t^2 - t + \frac{1}{6} ,$$

zodat

$$\|h_2\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \tfrac{1}{6})\ dt = \frac{1}{180} \quad \text{en} \quad q_2(t) = 6\sqrt{5}(t^2 - t + \tfrac{1}{6})\ ;$$

op analoge wijze vinden we

$$h_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\ , \qquad \|h_3\|^2 = \frac{1}{2800}\ ,$$

$$q_3(t) = 20\sqrt{7}(t^3 - \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{3}{5}t - \tfrac{1}{20})\ ; \quad \text{enzovoorts.}$$

2.1.11. <u>Stelling</u>: Opdat de deelverzameling $F := \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ van de ruimte R afhankelijk is, is nodig en voldoende dat

$$\begin{vmatrix} (f_1,f_1) & (f_1,f_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (f_1,f_n) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (f_2,f_n) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (f_n,f_1) & (f_n,f_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (f_n,f_n) \end{vmatrix} = 0\ ;$$

(deze determinant staat bekend als de <u>determinant van Gram</u>.)

<u>Bewijs</u>: Als F afhankelijk is, is er een $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\sigma\}$ zó dat $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \sigma$ en is er één element van F, bijvoorbeeld f_1, dat lineair in de overige kan worden uitgedrukt: $f_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i f_i$. Voor de determinant van Gram, ω, geldt dan

$$\omega = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \begin{vmatrix} (f_i,f_1) & (f_i,f_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (f_i,f_n) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (f_2,f_n) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (f_n,f_1) & (f_n,f_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (f_n,f_n) \end{vmatrix} = 0\ .$$

Omgekeerd: als $\omega = 0$, zijn de rijvectoren in ω afhankelijk, er bestaat een $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in R^n \setminus \{\sigma\}$ zo dat

$$\forall_{k=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f_i,f_k) = 0$$

of

$$\forall_{k=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, f_k\right) = 0 \,;$$

hieruit volgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \,,\, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\right) = 0$$

of

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \sigma$$

en F is afhankelijk. □

Iedere niet triviale IP-ruimte bezit orthonormaal-systemen, dit volgt uit stelling 2.1.8.

2.1.12. Stelling: Opdat de (IP-)ruimte R een hoogstens aftelbaar totaal orthonormaalsysteem bevat is nodig en voldoende dat R separabel is.

Bewijs: Als R separabel is, is er een rij $\{f_n\}_{n\in Nt}$ in R met $\overline{\{f_n\}_{n\in Nt}} = R$ zodat zeker geldt $\overline{L(\{f_n\}_{n\in Nt})} = R$.
Door uitdunnen en orthonormaliseren van de rij $\{f_n\}_{n\in Nt}$ ontstaat het eindige of aftelbare orthonormaalsysteem Q met $\overline{L(Q)} = R$.
Is, omgekeerd, Q een eindig of aftelbaar totaal orthonormaalsysteem in R, dan is de verzameling $\tilde{L}(Q)$ van rationale eindige lineaire combinaties van elementen van Q een aftelbare verzameling (rationaal betekent hier: met behulp van complexe getallen waarvan zowel het reële als het imaginaire deel rationaal zijn).
Zij $f \in R$ en $\varepsilon > 0$; omdat Q totaal is, is er een eindig aantal elementen $q_1,\ldots,q_n \in Q$ en een $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in R^n$ zo dat $\|f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Bepaal rationale getallen β_j en γ_j $(j = 1,\dots,n)$ zó dat

$$\forall_{j=1,\dots,n}\ [\,|\beta_j - \mathrm{Re}\ \alpha_j| < \tfrac{\varepsilon}{4n}\ \&\ |\gamma_j - \mathrm{Im}\ \alpha_j| < \tfrac{\varepsilon}{4n}]$$

dan is

$$\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j - \sum_{j=1}^{n} (\beta_j + i\gamma_j) q_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - \beta_j - i\gamma_j|\,\|q_j\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dus

$$\|f - \sum_{j=1}^{n} (\beta_j + i\gamma_j) q_j\| < \varepsilon ,$$

m.a.w. $\overline{\tilde{L}(Q)} = R$ en R is separabel. □

2.1.13. <u>Stelling</u>: Als de vectoren $f_1,\dots,f_n$ onderling orthogonaal zijn, geldt

$$\|\sum_{j=1}^{n} f_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2$$

(stelling van Pythagoras).

<u>Bewijs</u>:
$$\|\sum_{j=1}^{n} f_j\|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} f_j , \sum_{k=1}^{n} f_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (f_j, f_k) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (f_j, f_j) = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2 .$$ □

2.1.14. <u>Stelling</u>: Als $\{q_n\}_{n \in Nt}$ een orthonormaal stelsel is in R geldt voor iedere $f \in R$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f, q_j)|^2 \leq \|f\|^2$$

(ongelijkheid van Bessel).

<u>Bewijs</u>: Voor $n \in Nt$ is volgens 2.1.7 en 2.1.13

$$\|f\|^2 = \|f - \sum_{j=1}^{n} (f, q_j) q_j\|^2 + \|\sum_{j=1}^{n} (f, q_j) q_j\|^2$$

$$\geq \|\sum_{j=1}^{n} (f, q_j) q_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(f, q_j)|^2 ,$$

dus

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f,q_j)|^2 \leq \|f\|^2 . \qquad \square$$

Men noemt de getallen (f,q_j) de <u>Fouriercoëfficiënten</u> van f ten opzichte van het orthonormaalsysteem Q.

2.1.15. <u>Stelling</u>: Als $\{q_1,\dots,q_n\}$ een (eindig) orthonormaalsysteem is in R dan geldt voor iedere $f \in R$

$$\forall_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in R^n} \; \|f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j\| \geq \|f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j\| ,$$

waarbij gelijkheid óptreedt juist dan als $\alpha_j = (f,q_j)$ $(1 \leq j \leq n)$.

<u>Bewijs</u>: $f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j = \left[f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j\right] + \sum_{j=1}^{n} [f,q_j) - \alpha_j] q_j$,

de tweede term is een element van $L(\{q_1,\dots,q_n\})$, de eerste staat loodrecht daarop; dus

$$\|f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j\|^2 = \|f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j\|^2 + \|\sum_{j=1}^{n} [(f,q_j) - \alpha_j]q_j\|^2$$

$$\geq \|f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j\|^2 . \qquad \square$$

2.1.16. <u>Stelling</u>: Als $\{q_n\}_{n\in Nt}$ een totaal orthonormaalsysteem is in R dan geldt voor iedere $f \in R$

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f,q_j)q_j .$$

<u>Bewijs</u>: Zij $\varepsilon > 0$ dan is er een $m \in Nt$ en een $(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in R^m$ zo dat

$$\|f - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q_j\| < \varepsilon ,$$

want $\{q_n\}_{n\in Nt}$ is totaal.

Voor $n > m$ geldt met $(\alpha_1,\dots,\alpha_m,0,\dots,0) \in R^n$ dat ook

$$\|f - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q_j - \sum_{j=m+1}^{n} 0.q_j\| < \varepsilon ,$$

met andere woorden

$$\forall_{n>m} \exists_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in R^n} \|f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j\| < \varepsilon .$$

Op grond van 2.1.15 geldt nu ook

$$\forall_{n>m} \|f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j\| < \varepsilon$$

zodat

$$\sum_{j=1}^{\infty} (f,q_j)q_j = f .$$ □

2.1.17. <u>Stelling</u>: In de (IP-)ruimte R met het orthonormaalsysteem $\{q_n\}_{n\in Nt}$ zijn de volgende voorwaarden equivalent:

i: $\{q_n\}_{n\in Nt}$ is totaal

ii: $\forall_{f\in R}\ f = \sum_{k=1}^{\infty} (f,q_k)q_k$

iii: $\forall_{f\in R}\ \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f,q_k)|^2$

iv: $\forall_{f\in R} \forall_{g\in R}\ (f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f,q_k)(q_k,g)$.

<u>Bewijs</u>:

i ⇒ ii: zie 2.1.16.

ii ⇒ i: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_n \|f - \sum_{k=1}^{n} (f,q_k)q_k\| < \varepsilon$.

ii ⇔ iii: Volgens 2.1.13, toegepast op de vectoren $(f,q_1)q_1,\dots,(f,q_n)q_n$,

$f - \sum_{1}^{n} (f,q_k)q_k$ is

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} (f,q_k)q_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f,q_k)|^2 .$$

iv ⇒ iii: Substitueer $g := f$.

iii ⇒ iv: Neem $\alpha \in$ Cm en pas iii. toe op $f + \alpha g$ en $f - \alpha g$,

$$(f + \alpha g, f + \alpha g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f + \alpha g, q_k)\overline{(f + \alpha g, q_k)}$$

$$(f - \alpha g, f - \alpha g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f - \alpha g, q_k)\overline{(f - \alpha g, q_k)} ,$$

waaruit door aftrekken ontstaat

$$2\,\mathrm{Re}\,[\bar{\alpha}(f,g)] = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[\bar{\alpha}(f,q_k)(q_k,g)]$$

of

$$\mathrm{Re}\left[\bar{\alpha}\left[(f,g) - \sum_{k=1}^{\infty} (f,q_k)(q_k,g)\right]\right] = 0$$

voor alle $\alpha \in$ Cm, dus

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f,q_k)(q_k,g) .$$

□

De implicaties i ⇒ iii en i ⇒ iv worden ieder wel de stelling van Parseval genoemd.

2.1.18. Stelling: Een totaal orthonormaalsysteem is een maximaal orthonormaalsysteem.

Bewijs: Zij Q een totaal orthonormaalsysteem, en zij $p \in R$, $\|p\| = 1$, $p \perp Q$. Daar Q totaal is, is er een $r \in L(Q)$ met $\|p - r\| < 1$. Aangezien $p \perp r$, geldt (st. 2.1.13) $\|p\|^2 + \|r\|^2 = \|p - r\|^2$, dus $\|p - r\| \geq 1$. Uit de tegenspraak volgt dat Q niet kan worden uitgebreid.

□

Ander bewijs (met 2.1.17, i ⇒ ii): $p = \sum_{1}^{\infty} (p,q_k)q_k = \sum_{1}^{\infty} 0.q_k = 0$.

2.1.19. <u>Stelling</u>: Als $\{q_n\}_{n\in Nt}$ een orthonormaalsysteem is in een H-ruimte R en als $\{\gamma_k\}_{k\in Nt}$ een rij complexe getallen is met $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$, dan is er een $f \in R$ zó dat

$$\forall_{k\in Nt}\ \gamma_k = (f,q_k) \quad \text{en} \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k q_k$$

(stelling van Riesz-Fischer).

<u>Bewijs</u>: Zij $f_n := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j q_j$ $(n \in Nt)$ dan is (met $m > n$) wegens

$$\|f_n - f_m\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |\gamma_j|^2$$

$\{f_n\}_{n\in Nt}$ een fundamentaalrij; zij $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Nu geldt met $n \geqslant k$

$$(f,q_k) = (f-f_n,q_k) + (f_n,q_k) = (f-f_n,q_k) + \gamma_k$$

zodat

$$|(f,q_k) - \gamma_k| \leqslant |(f-f_n,q_k)| \leqslant \|f-f_n\| ,$$

dus $\qquad (f,q_k) = \gamma_k \quad (k \in Nt)$. □

2.2. <u>Separabele hilbertruimten</u>

De separabele H-ruimten zijn volgens stelling 2.1.12 juist die H-ruimten die een hoogstens aftelbaar totaal orthonormaalsysteem bevatten. Wij geven ze aan met SH-ruimten. Gemakshalve zullen we in het vervolg (tenzij uit de tekst het tegendeel blijkt) steeds onderstellen dat we te maken hebben met SH-ruimten met een aftelbaar totaal orthonormaalsysteem. Om de gevallen met een eindig totaal orthonormaalsysteem te behandelen zijn doorgaans slechts kleine en niet-wezenlijke wijzigingen nodig.

In bijna alle volgende hoofdstukken zullen eerst (t.o.v. SH-ruimten) algemenere begrippen worden gedefinieerd en algemenere stellingen worden bewezen, die dan in een afzonderlijke paragraaf op SH-ruimten worden toegepast. Ook hier bespreken we nog enige consequenties van het voorgaande voor SH-ruimten; zij R dus een SH-ruimte.

2.2.1. Stelling: Als R geen eindige dimensie heeft, is R isomorf en isometrisch met ℓ^2.

Bewijs: Zij $\{q_n\}_{n\in Nt}$ een totaal orthonormaalsysteem, dan definiëren we de afbeelding $\varphi : R \to Cm^{Nt}$ door

$$\forall_{f\in R}\ \varphi(f) := ((f,q_1),(f,q_2),(f,q_3),\ldots) .$$

Wegens de stelling van Bessel (2.1.14) is $\sum_{j=1}^{\infty} |(f,q_j)|^2 < \infty$ zodat $\varphi(R) \subset \ell^2$.

Volgens de stelling van Riesz-Fischer (2.1.19) is $\varphi(R) = \ell^2$. De afbeelding φ is ook een-eenduidig, want uit $\varphi(f) = \varphi(g)$ volgt achtereenvolgens

$$\forall_{j\in Nt}\ (f,q_j) = g,q_j)$$

$$\forall_{j\in Nt}\ (f - g,q_j) = 0 ,$$

dus volgens 2.1.16

$$f - g = \mathscr{O}$$

dus $f = g$.

φ is homomorf:

$$\varphi(f+g) = \{(f+g,q_j)\}_j = \{(f,q_j)\}_j + \{(g,q_j)\}_j = \varphi(f)+\varphi(g)$$

en analoog

$$\varphi(\alpha f) = \alpha\varphi(f) .$$

φ is isometrisch:

$$(\varphi(f),\varphi(g)) = \sum_{j=1}^{\infty} (f,q_j)\overline{(g,q_j)} = (f,g)$$

volgens stelling 2.1.17, zodat ook $\|\varphi(f)\| = \|f\|$. □

Onder een lineaire functionaal van een (willekeurige) vectorruimte R verstaan we een lineaire afbeelding van R in Cm; de lineaire functionaal L heet begrensd indien R genormeerd is en

$$\exists_{M>0} \forall_{f\in R} \; |L(f)| \le M\|f\| \; .$$

2.2.2. <u>Stelling</u>: Voor de SH-ruimte R geldt:

i) Voor iedere $g \in R$ is $L_g := \forall_{f\in R} \; (f,g)$ een begrensde lineaire functionaal.

ii) Bij iedere begrensde lineaire functionaal L van R is een $g \in R$ zó dat

$$\forall_{f\in R} \; L(f) = (f,g) \; .$$

<u>Bewijs</u>:

i) L_g is een begrensde lineaire functionaal:

$$L_g(f + h) = (f + h,g) = (f,g) + (h,g) = L_g(f) + L_g(h) \; ,$$

$$L_g(\alpha f) = (\alpha f,g) = \alpha(f,g) = \alpha L_g(f) \; ,$$

$$|L_g(f)| = |(f,g)| \le \|f\|\|g\| \; ,$$

alles volgens de hoofdeigenschappen van IP-ruimten (vergelijk 1.8).

ii) Om een kort bewijs te kunnen geven grijpen we even vooruit op stelling 3.1.2a. Zij L een begrensde lineaire functionaal, en

$$S := \{x \in R \mid L(x) = 0\}.$$

S is een lineaire deelruimte van R, en S is gesloten: is nl. $y \notin S$, dan $L(y) \neq 0$, en voor alle x met $\|x - y\| < |L(y)| / M$ geldt nu

$$|L(x) - L(y)| < L(y)$$

dus $L(x) \neq 0$ dus $x \notin S$.

Daar S gesloten is, is S ook volledig. We nemen nu aan dat $S \neq R$ (anders is L de nulfunctionaal, en dus $L = \forall_f (f,\mathcal{O})$). Dan is er blijkens stelling 3.1.2a een $f \in R$ met $f \notin S$ en daarom is er een $h \in R$ met $h \neq \mathcal{O}$, $h \perp S$. Voor elke f is

$$L(L(h)f - L(f)h) = 0$$

dus $\qquad L(h)f - L(f)h \perp h \; .$

Dus

$$L(h)(f,h) = L(f)(h,h) ,$$

en dus

$$L(f) = (f, \frac{L(h)}{(h,h)} h) .$$

Hiermee is de stelling bewezen, met $g = \frac{L(h)}{(h,h)} h$.

2.2.3. Stelling: Bij ieder eindig of aftelbaar orthonormaalsysteem Q in de SH-ruimte R is een orthonormaalsysteem P in R zo dat $Q \cup P$ een totaal orthonormaalsysteem is.

Bewijs: Zij $\psi : R \to R$ gedefinieerd door

$$\forall_{f \in R}\ \psi(f) := f - \sum_{q \in Q} (f,q)q$$

(ga na dat $\sum_{q \in Q} (f,q)q \in R$, zie (2.1.9)) en zij $\{f_n\}_{n \in Nt}$ een rij die in R dicht is. Merk op dat $\psi(f) \perp q$ voor alle $q \in Q$.

$\{\psi(f_n)\}_{n \in Nt}$ is eveneens een rij in R, die door uitdunnen en orthonormaliseren overgaat in een (eindige of oneindige) rij $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$. P en Q zijn dan orthonormaalsystemen. Doordat elke $p \in P$ een lineaire combinatie van eindig vele $\psi(f_n)$ is, is $p \perp q$ voor alle $p \in P$, $q \in Q$.

Derhalve is $P \cup Q$ een orthonormaalsysteem.

Tenslotte bewijzen we nog dat $P \cup Q$ totaal is:

Zij $f \in R$ en $\varepsilon > 0$; bepaal f_n zó dat $\| f - f_n \| < \frac{\varepsilon}{2}$ en vervolgens de eindige deelverzameling S van Q zó dat:

$$\| f_n - \psi(f_n) - \sum_{q \in S} (f_n,q)q \| < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

met

$$\psi(f_n) = \Sigma_j \beta_j p_j$$

volgt hieruit

$$\| f - \Sigma_j \beta_j p_j - \sum_{q \in S} (f_n, q) q \| < \varepsilon$$

of

$$f \in \overline{L(P \cup Q)} \ . \qquad \square$$

3. Lineaire deelruimten en lineaire functionalen

Een deelverzameling S van een vectorruimte R heet lineaire deelruimte indien

i: $S \neq \emptyset$

ii: $S + S \subset S$

iii: $\mathbb{C}m . S \subset S$.

Als R genormeerd is en S bovendien gesloten is in de normtopologie, heet S gesloten lineaire deelruimte.

In aansluiting op §§ 1.4 en 1.5 geldt:

Een lineaire deelruimte S van een genormeerde vectorruimte R is dan en slechts dan gesloten als voor iedere rij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}t}$ in S die convergeert in R geldt dat $\lim_{n\to\infty} f_n \in S$.

Een lineaire deelruimte S van een B-ruimte R is dan en slechts dan gesloten als ze volledig is (zie 1.5.1).

3.1. Lineaire deelruimten in IP-ruimten

Zij R een IP-ruimte; we gebruiken de notatie $f \perp S$ voor een $f \in R$ en een $S \subset R$ indien $\forall_{g \in S}\ (f,g) = 0$; en evenzo betekent, met $S \subset R$ en $Q \subset R$, $S \perp Q$ dat

$$\forall_{f \in S}\ \forall_{g \in Q}\ (f,g) = 0 \ .$$

Als $S \subset R$ verstaan we onder het orthogonale complement van S ten opzichte van R de verzameling

$$R \ominus S := \{f \in R \mid f \perp S\} \ .$$

3.1.1. Stelling: Voor iedere deelverzameling S van R is $R \ominus S$ een gesloten lineaire deelruimte.

Bewijs: $\sigma \in R \ominus S$, zodat $R \ominus S \neq \emptyset$ is.

Als $f, g \in R \ominus S$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{C}m$ is

$$\forall_{h\in S}\ (\alpha f+\beta g,h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h) = 0$$

zodat $R \ominus S$ een lineaire deelruimte is.

Als $\forall_{n\in \mathbb{N}t}\ f_n \in R\ominus S$ en $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, is

$$\forall_{h\in S}\ (f,h) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n,h\right) = \lim_{n\to\infty}(f_n,h) = 0$$

wegens de continuïteit van het inproduct; met andere woorden: $f \in R\ominus S$.
Derhalve is $R\ominus S$ een gesloten lineaire deelruimte. □

Uit stelling 3.1.1 blijkt dat het begrip orthogonaal complement niet wederkerig is: als S niet een gesloten lineaire deelruimte is, geldt zeker niet $S = R\ominus (R\ominus S)$. Als S evenwel een volledige lineaire deelruimte is, geldt $S = R\ominus (R\ominus S)$, hetgeen hierna in stelling 3.1.2 zal worden bewezen; eerst wijzen we op een gevolg van stelling 3.1.2: Voor een H-ruimte, waar immers ieder gesloten deel volledig is, geldt voor iedere gesloten lineaire deelruimte S dat $S = R\ominus (R\ominus S)$ en in verband met stelling 3.1.1 tevens dat $R\ominus S$ weer volledig is.

3.1.2a. <u>Stelling</u>: Als S een volledige lineaire deelruimte van R is, geldt

$$\forall_{f\in R}\ \exists_{g\in S}\ f-g \perp S\ .$$

<u>Bewijs</u>: Definieer (bij vaste $f \in R$) $d := \inf\{\|f-g\| \mid g\in S\}$.
Er is een rij $\{g_n\}_{n\in \mathbb{N}t}$ in S zó dat $d = \lim\limits_{n\to\infty}\|f-g_n\|$; we kiezen $\varepsilon > 0$ en bepalen N zó dat $n > N \Rightarrow \|f-g_n\| < d+\varepsilon$.
Op grond van de in alle IP-ruimten geldende betrekking

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

geldt

$$\|g_n - g_m\|^2 = \|(f-g_m)-(f-g_n)\|^2 = 2\|f-g_m\|^2 + 2\|f-g_n\|^2 +$$
$$- \|2f-g_n-g_m\|^2 ,$$

zodat, aangezien $\frac{1}{2}g_m + \frac{1}{2}g_n \in S$,

$$\forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ \|g_n - g_m\|^2 < 2(d+\varepsilon)^2 + 2(d+\varepsilon)^2 - 4d^2 = 4\varepsilon(\varepsilon + 2d)\ ;$$

dit impliceert dat $\{g_n\}_{n\in \mathbb{N}t}$ een fundamentaalrij is in S, wegens de volledigheid van S convergent: er is een $g \in S$ met $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Op grond van de continuïteit van de norm is nu

$$\|f - g\| = \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = d\ .$$

Vervolgens bewijzen we nog dat $f - g \perp S$. Zij $h \in S$, $\|h\| = 1$. We ontbinden

$$f - g = (f - g,h)h + f - g - (f - g,h)h \qquad (*)$$

en stellen $g - (f - g,h)h = g_1$. Duidelijk is dat $g_1 \in S$.
Uit 2.1.13 (Pythagoras), toegepast op (*) volgt: Als $(f - g,h) \neq 0$, dan is

$$\|f - g\| > \|f - g_1\|\ .$$

Dit is in strijd met het feit dat $d = \|f - g\|$ infimum was, dus $(f - g,h) = 0$.
□

Voor deelverzamelingen S en Q van R is de som

$$S + Q := \{x + y \in R \mid x \in S,\ y \in Q\}$$

al eerder vermeld; indien S en Q lineaire deelruimten zijn en $S \cap Q = \{\sigma\}$, noemt men $S + Q$ de <u>directe som</u> van S en Q; in dat geval is iedere $x \in S + Q$ op precies één manier te schrijven als $x = s + q$ met $s \in S$ en $q \in Q$. Indien $S \perp Q$ noemt men $S + Q$ de <u>orthogonale som</u> van S en Q en schrijft dan gewoonlijk $S \oplus Q$ in plaats van $S + Q$; indien S en Q orthogonale lineaire deelruimten zijn, is $S \cap Q = \{\sigma\}$, zodat $S \oplus Q$ dan ook directe som is.

3.1.2b. Stelling: Als S een volledige deelruimte is van R is $R = S \oplus (R \ominus S)$.

Bewijs: Dat $R = S + (R \ominus S)$ is de inhoud van stelling 3.1.2a; omdat $S \perp R \ominus S$ is de som orthogonaal, en dus een directe som. □

3.1.2c. Stelling: Als S en Q orthogonale lineaire deelruimten zijn en $R = S \oplus Q$, is $S = R \ominus Q$; in het bijzonder geldt voor een volledige lineaire deelruimte S van R: $S = R \ominus (R \ominus S)$.

Bewijs: Uit $S \perp Q$ volgt $S \subset R \ominus Q$; als $f \in R \ominus Q$ schrijven we $f = g + h$, $g \in S$, $h \in Q$; dan is wegens $R \ominus Q \perp Q$

$$0 = (f,h) = (g+h,h) = (g,h) + (h,h)$$

terwijl $(h,g) = 0$, zodat $(h,h) = 0$, $h = \sigma$ en $f = g \in S$; hieruit volgen $R \ominus Q \subset S$ en $S = R \ominus Q$.
In het bijzonder geldt voor een volledige lineaire deelruimte S op grond van 3.1.2b dat $R = S \oplus (R \ominus S)$ zodat dan $S = R \ominus (R \ominus S)$. □

3.1.3. Opmerkingen:

De resultaten van 3.1.2a, b en c kunnen we ook nog anders formuleren. In verband met de in § 2.1 gegeven definitie van projectie kan men voor 3.1.2a lezen: Ieder element van R heeft een projectie in iedere volledige lineaire deelruimte.

Voor een volledige lineaire deelruimte S kan men op grond van het voorgaande de afbeelding $P_S : R \to S$ definiëren die aan ieder element $f \in R$ zijn projectie $P_S(f)$ in S toevoegt.

Dan geldt:

3.1.4. Stelling: P_S is een lineaire afbeelding.

<u>Bewijs:</u> $P_S(f)$ is eenduidig bepaald door te eisen dat

$$P_S(f) \in S \;, \quad f - P_S(f) \perp S \;.$$

Men ziet gemakkelijk in dat $\alpha P_S(f) + \beta P_S(g)$ voldoet aan de overeenkomstige eisen ten aanzien van $\alpha f + \beta g$, zodat

$$\alpha P_S(f) + \beta P_S(g) = P_S(\alpha f + \beta g) \;. \qquad \square$$

<u>Opmerking:</u> $P_S P_S = P_S$.

3.2. <u>Lineaire functionalen van genormeerde vectorruimten</u>

Zij R een genormeerde vectorruimte, dan is (zie § 2.2) een lineaire functionaal van R een lineaire afbeelding van R in Cm.

Een lineaire functionaal L heet <u>begrensd</u> als

$$\exists_{M>0} \; \forall_{f \in R} \; |L(f)| \leq M\|f\| \;.$$

In dit geval is $\{\frac{|L(f)|}{\|f\|} \mid f \in R \setminus \{\sigma\}\}$ een begrensde verzameling in $R\ell$, die, als $R \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$, een supremum heeft; we noemen

$$\|L\| := \sup\{\frac{|L(f)|}{\|f\|} \mid f \in R \setminus \{\sigma\}\}$$

de <u>norm</u> van L.

3.2.1. <u>Voorbeeld:</u> $L : C([0,1]) \to Cm$ wordt gedefinieerd door

$$L(f) := f(1) + \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt \;.$$

L is lineair:

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha f(1) + \beta g(1) + \int_0^{\frac{1}{2}} \{\alpha f(t) + \beta g(t)\}dt =$$

$$= \alpha L(f) + \beta L(g) \;.$$

We kunnen $C([0,1])$ op verschillende manieren normeren.

Bij $\| \ \|_\infty$ is L begrensd,

$$|L(f)| \leq |f(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty (1+\tfrac{1}{2}) \ ,$$

en $\|L\| = \frac{3}{2}$ want voor $e(t) := 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$ is

$$L(e) = 1 + \int_0^{\frac{1}{2}} dt = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\|e\|_\infty \ .$$

Bij $\| \ \|_1$ is L niet begrensd zoals blijkt door middel van de rij $\{f_n\}_{n \in Nt}$:

$$\left.\begin{array}{ll} f_n(t) := 0 \ , & 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n} \\ f_n(t) := 2n^2 t - 2n^2 + 2n \ , & 1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{array}\right\}$$

zodat

$$\forall_{n \in Nt} \ \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\,dt = 1 \ ,$$

$$\forall_{n>1} \ L(f_n) = 2n = 2n\|f_n\|_1$$

en

$$\forall_{n>1} \ |L(f_n)| = 2n\|f_n\|_1 \ .$$

3.2.2. Stelling: De verzameling R^* van begrensde lineaire functionalen van R is, opgevat als functieruimte (vergelijk 1.1) en voorzien van de zojuist gedefinieerde norm, een B-ruimte.

Bewijs: Als $L \in R^*$, $M \in R^*$, $\lambda \in Cm$ en $\mu \in Cm$ is

$$\begin{aligned}(\lambda L + \mu M)(\alpha f + \beta g) &= \lambda L(\alpha f + \beta g) + \mu M(\alpha f + \beta g) = \\ &= \lambda\{\alpha L(f) + \beta L(g)\} + \mu\{\alpha M(f) + \beta M(g)\} = \\ &= \alpha\{\lambda L(f) + \mu M(f)\} + \beta\{\lambda L(g) + \mu M(g)\} \\ &= \alpha(\lambda L + \mu M)(f) + \beta(\lambda L + \mu M)(g)\end{aligned}$$

zodat met L en M ook $\lambda L + \mu M$ een lineaire functionaal is; dat $\lambda L + \mu M$ begrensd is blijkt uit

$$|(\lambda L + \mu M)(f)| \leq |\lambda||L(f)| + |\mu||M(f)| \leq (|\lambda|\|L\| + |\mu|\|M\|)\|f\| ,$$

waaruit volgt dat R^* een vectorruimte is, en tevens dat

$$\|\lambda L + \mu M\| \leq |\lambda|\|L\| + |\mu|\|M\| ,$$

in het bijzonder voor $\lambda = \mu = 1$

$$\|L + M\| \leq \|L\| + \|M\| .$$

$\| \ \|$ voldoet aan de driehoeksongelijkheid en ook aan de andere te stellen eisen:

$\|L\| \geq 0$ is triviaal;

$|(\alpha L)(f)| = |\alpha||L(f)|$ zodat voor $f \neq \sigma$

$$\frac{|(\alpha L)(f)|}{\|f\|} = |\alpha| \cdot \frac{|L(f)|}{\|f\|} \quad \text{en} \quad \|\alpha L\| = |\alpha|\|L\| \ ;$$

het nulelement σ van R^* is de functionaal met

$$\forall_{f \in R}\ \sigma(f) = 0$$

zodat

$$\|\sigma\| = 0;$$

omgekeerd volgt uit $\|L\| = 0$ dat $\forall_{f \neq \sigma} |L(f)| = 0$ zodat $L = \sigma$.

Tenslotte moeten we nog bewijzen dat R^* volledig is. Zij $X := R \setminus \{\sigma\}$. Met elke $L \in R^*$ correspondeert een functie θ_L op X, nl.

$$\theta_L = \Upsilon_{f \in X} \frac{L(f)}{\|f\|} .$$

Op X werken we met de supremumnorm; bijgevolg is $\|\theta_L\|_\infty = \|L\|$. Een fundamentaalrij $L_1, L_2, \ldots$ in R^* correspondeert daardoor met een rij $\theta_{L_1}, \theta_{L_2}, \ldots$ die op X een fundamentaalrij is (in de zin van de sup-norm). Volgens stelling 1.7.2 is er nu een $\theta \in B(X)$ met $\|\theta_{L_n} - \theta\|_\infty \to 0$.

Definieer nu L door

$$L(f) = \|f\| \; \theta(f) \qquad (f \neq \sigma),$$

$$L(\sigma) = 0 \; .$$

Men gaat gemakkelijk na dat $L_n(f) \to L(f)$ voor elke f; derhalve is L een lineaire functionaal. De begrensdheid van L volgt uit het feit dat $\theta \in B(X)$ is. Uit $\|\theta_{L_n} - \theta\|_\infty \to 0$ volgt tenslotte dat $\|L_n - L\| \to 0$.

3.2.3. <u>Stelling</u>: Als $L \in R^*$ is L continu; omgekeerd: elke continue lineaire functionaal is begrensd.

<u>Bewijs</u>:

i) $$|L(f) - L(g)| = |L(f - g)| \leq \|L\|\|f - g\| \; .$$

ii) Neem $\varepsilon > 0$ en $\delta > 0$ zó dat

$$\forall_{f \in R} \; [\|f\| < \delta \Rightarrow |L(f) - L(\sigma)| < \varepsilon] \; .$$

Nu blijkt gemakkelijk dat $\|L\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$. □

3.2.4. <u>Stelling</u>: Zij R een B-ruimte en zij S een verzameling van begrensde lineaire functionalen van R. Neem aan dat

$$\forall_{f \in R} \; \exists_{M_f > 0} \; \forall_{L \in S} \; |L(f)| \leq M_f \; . \qquad (P)$$

Dan geldt

$$\exists_{M>0} \; \forall_{L \in S} \; \|L\| \leq M \; . \qquad (Q)$$

(Stelling van Banach-Steinhaus.)

<u>Bewijs</u>: We gebruiken de letter B om een gesloten bol aan te duiden; $\mathring{B}$ is het inwendige van zo'n bol. We zullen bewijzen dat

$$\exists_B\ \exists_{N>0}\ \forall_{L\in S}\ \forall_{\varphi\in\mathring{B}}\ |L(\varphi)| \le N\ , \tag{$*$}$$

maar laten eerst zien hoe (Q) uit (*) volgt.

Zij $g \in R$, $g \neq \mathfrak{O}$. Laat r de straal en f het middelpunt van B zijn. Dan is $f \in \mathring{B}$, $f + rg(2\|g\|)^{-1} \in \mathring{B}$, dus

$$|L(f)| \le N,\ \ |L(f) + \frac{r}{2\|g\|} L(g)| \le N,$$

zodat

$$|L(g)| \le 4r^{-1} N\|g\|\ .$$

Hiermee is (Q) bewezen met $M = 4r^{-1}N$.

Om (*) te bewijzen nemen we aan dat (*) niet waar is, dus

$$\forall_B\ \forall_{N>0}\ \exists_{L\in S}\ \exists_{\varphi\in \mathring{B}}\ |L(\varphi)| > N\ . \tag{**}$$

Als $\varphi \in \mathring{B}$, $|L(\varphi)| > N$, dan is er een bol B' met middelpunt φ, en met $B' \subset \mathring{B}$ zo dat $|L(f)| > N$ voor alle $f \in B'$ (daartoe neme men de straal van B' kleiner dan $\|L\|^{-1}(|L(\varphi)| - N)$). Dus uit (**) volgt

$$\forall_B\ \forall_{N>0}\ \exists_{L\in S}\ \exists_{B'\subset B}\ \forall_{f\in B'}\ |L(f)| > N\ .$$

We leiden daaruit af

$$\forall_B\ \forall_{N>0}\ \exists_{B'\subset B}\ \exists_{L\in S}\ [\text{straal } B' < \tfrac{1}{2}(\text{straal} B)\ \&\ \forall_{f\in B'}\ |L(f)| > N]\ .$$

Zij nu $B := \{f \in R \mid \|f\| \leq 1\}$

dan $\exists_{B_1\subset B}\ \exists_{L_1\in S}\ \forall_{f\in B_1}\ |L_1(f)| > 1$,

en B_1 heeft een straal $< \frac{1}{2}$; evenzo

$$\exists_{B_2\subset B}\ \exists_{L_2\in S}\ \forall_{f\in B_2}\ |L_2(f)| > 2\ ,$$

en de straal van $B_2 < \frac{1}{4}$.

Zo voortgaande vindt men een rij bollen $\{B_n\}_{n\in Nt}$ en een rij functionalen $\{L_n\}_{n\in Nt}$ in S; voor de middelpunten b_n van de bollen geldt:

$$\forall_{n>N}\,\forall_{m>N}\;\|b_n - b_m\| < \frac{1}{2^N}$$

zodat de rij $\{b_n\}_{n\in Nt}$ convergeert naar een $b \in R$. Daar $b_n, b_{n+1}, \ldots$ alle in B_n liggen, en B_n gesloten is, is ook $b \in B_n$. Derhalve is $L_n(b) > n$. Kies nu $n \geq M_h$, dan is een tegenspraak bereikt, dus (*) is bewezen. □

3.2.5. Opmerking: De stelling van Banach-Steinhaus geldt ook indien S een verzameling begrensde lineaire afbeeldingen van een B-ruimte R in een B-ruimte R' is; voor het bewijs zij verwezen naar de literatuur; in de engelstalige literatuur staat de stelling ook bekend als het "uniform boundedness principle". Het begrip "begrensde lineaire afbeelding" wordt in hoofdstuk 4 gepreciseerd.

3.2.6. Stelling: Als in de genormeerde lineaire ruimte R voor de rij $\{f_n\}_{n\in Nt}$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, dan geldt ook

$$\forall_{L\in R^*}\;\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)\;.$$

Bewijs: Triviaal, op grond van 3.2.3. □

De bewering van 3.2.6 is aanleiding voor een nieuwe definitie:
De rij $\{f_n\}_{n\in Nt}$ in de genormeerde lineaire ruimte R heet zwak convergent naar $f \in R$ (notatie $f_n \rightharpoonup f$) indien

$$\forall_{L\in R^*}\;\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)\;.$$

Stelling 3.2.6 kan worden geformuleerd als

$$[f_n \to f] \Rightarrow [f_n \rightharpoonup f]\;.$$

Het begrip zwakke convergentie hangt samen met het begrip zwakke topologie, dat in de functionaalanalyse een rol speelt; voor de détails raadplege men de literatuur (weak topology, schwache Topologie, topologie faible); [BN], [T], [W].

3.3. Lineaire functionalen van separabele hilbertruimten

De "zwakte" van het begrip zwakke convergentie blijkt al direct (zie hierna voorbeeld 3.3.1) als men probeert stelling 3.2.6 om te keren: zwakke convergentie impliceert niet noodzakelijk sterke convergentie. Deze § is gewijd aan de gevolgtrekkingen die men desondanks, althans in SH-ruimten, op grond van zwakke convergentie kan maken. Zij R een SH-ruimte.

3.3.1. Voorbeeld: Als $Q := \{q_n\}_{n\in Nt}$ een orthonormaalsysteem is in R, dan is $q_n \rightharpoonup \sigma$; op grond van 2.2.2 is $q_n \rightharpoonup \sigma$ equivalent met

$$\forall_{g\in R}\ (q_n,g) \to (\sigma,g) = 0$$

en dit is een gevolg van 2.1.14; dus $q_n \rightharpoonup \sigma$. Maar $\neg[q_n \to \sigma]$, want $\|q_n - \sigma\| = 1$ voor alle $n \in Nt$.

3.3.2. Stelling: Als $f_n \rightharpoonup f$ en $f_n \rightharpoonup g$ dan $f = g$.

Bewijs: Zij L_{f-g} de op grond van 2.2.2 bij $f - g$ behorende begrensde lineaire functionaal.

$$L_{f-g}(f_n) \to L_{f-g}(f)\ ,$$

$$L_{f-g}(f_n) \to L_{f-g}(g)\ ,$$

zodat

$$L_{f-g}(f) = L_{f-g}(g) \quad \text{en} \quad L_{f-g}(f-g) = 0$$

of

$$(f-g, f-g) = 0\ ;$$

hieruit volgt $f = g$. □

3.3.3. Stelling: Als $f_n \rightharpoonup f$ dan is $\{f_n\}_{n\in Nt}$ begrensd.

Bewijs: Nu is, weer op grond van 2.2.2,

$$\forall_{g\in R}\ (f_n,g) \to (f,g)$$

en ook

$$\forall_{g\in R}\ (g,f_n) \to (g,f)\ ,$$

zodat

$$\forall_{g \in R}\ L_{f_n}(g) \to L_f(g)$$

en

$$\forall_{g \in R}\ \exists_{M_g > 0}\ \forall_{n \in Nt}\ |L_{f_n}(g)| < M_g\ ,$$

zodat op grond van 3.2.4 (met $S := \{L_{f_n} \mid n \in Nt\}$)

$$\exists_{M>0}\ \forall_{n \in Nt}\ \|L_{f_n}\| \leq M$$

en

$$\forall_{n \in Nt}\ |L_{f_n}(f_n)| \leq M\|f_n\|\ ;$$

nu staat er

$$\forall_{n \in Nt}\ (f_n, f_n) \leq M\|f_n\|$$

en dit geeft

$$\forall_{n \in Nt}\ \|f_n\| \leq M$$ □

3.3.4. Stelling: Zij R een IP-ruimte (separabiliteit wordt niet ondersteld); zij $f_n \rightharpoonup f$ en $\forall_n\ \|f_n\| \leq 1$. Dan is ook $\|f\| \leq 1$.

Bewijs: Aangezien weer iedere $g \in R$ een $L_g \in R^*$ definieert geldt

$$(f, f_n) \to (f, f)$$

en ook

$$|(f, f_n)| \to (f, f)\ .$$

Nu is, op grond van 1.8.2.viii en het gegeven,

$$|(f, f_n)| \leq \|f\|\,\|f_n\| \leq \|f\|$$

zodat ook

$$\|f\|^2 \leq \|f\|\ ,$$

en hieruit volgt $0 \leq \|f\| \leq 1$. □

3.3.5. <u>Stelling</u>: Zij R een willekeurige IP-ruimte (separabiliteit of volledigheid worden <u>niet</u> ondersteld); zij S een volledige lineaire deelruimte, $\forall_{n\in Nt}\ f_n \in S$, $f_n \to f$; dan is $f \in S$.

<u>Bewijs</u>: f heeft volgens 3.1.2a een projectie g in S zodat $f = g+h$ met $g \in S$ en $h \in R \ominus S$.
Nu geldt op grond van $f_n \to f$ dat $(f_n,h) \to (f,h)$; maar $\forall_n\ (f_n,h) = 0$, dus $(f,h) = 0$ en wegens $(g,h) = 0$ moet $(h,h) = (f-g,h) = (f,h) - g(h) = 0$ zijn; hieruit volgt $h = \sigma$, $f = g \in S$. □

3.3.6. <u>Stelling</u>: Zij R een SH-ruimte en $\{f_n\}_{n\in Nt}$ een begrensde rij in R. Dan heeft $\{f_n\}_{n\in Nt}$ een zwak convergerende deelrij.

<u>Bewijs</u>: Het is geen beperking der algemeenheid te onderstellen dat

$$\forall_{n\in Nt}\ \|f_n\| < 1 .$$

Zij $\{q_j\}_{j\in Nt}$ een totaal orthonormaalsysteem in R (vergelijk 2.1.12). Dan geldt

$$\forall_{n\in Nt}\ |(f_n,q_1)| < 1$$

zodat de rij $\{(f_n,q_1)\}_{n\in Nt}$ in Cm een convergente deelrij bevat, $\{(f_n',q_1)\}_{n\in Nt}$.

$$\forall_{n\in Nt}\ |(f_n',q_2)| < 1 ,$$

de rij $\{(f_n',q_2)\}_{n\in Nt}$ in Cm bevat een convergente deelrij $\{(f_n'',q_2)\}_{n\in Nt}$.

$$\forall_{n\in Nt}\ |(f_n'',q_3)| < 1 ,$$

de rij $\{(f_n'',q_3)\}_{n\in Nt}$ bevat een convergente deelrij $\{(f_n''',q_3)\}_{n\in Nt}$; enz.
Met de aldus geconstrueerde deelrijen van $\{f_n\}_{n\in Nt}$

$$\begin{matrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 & \cdots \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & \cdots \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{matrix}$$

vormen we van de diagonaalelementen $f_j^{(j)}$ $(j \in Nt)$ een nieuwe rij; dan is de rij $\{(f_j^{(j)},q_k)\}_{j\in Nt}$ convergent voor iedere $k \in Nt$; zij $c_k := \lim_{j\to\infty}(f_j^{(j)},q_k)$ $(k \in Nt)$. Voor $N \in Nt$ is

$$\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{N} \lim_{j\to\infty} |(f_j^{(j)},q_k)|^2 = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |(f_j^{(j)},q_k)|^2$$

en

$$\forall_{j\in Nt} \left[\sum_{k=1}^{N} |(f_j^{(j)},q_k)|^2 \leq \|f_j^{(j)}\|^2 < 1 \right]$$

volgens 2.1.14, zodat

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |(f_j^{(j)},q_k)|^2 \leq 1$$

en bijgevolg

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq 1 \ .$$

Volgens 2.1.19 is er een $f \in R$ met $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k$.

Uit het voorgaande en de continuïteit van het inwendig product volgt nu dat

$$\forall_{k\in Nt} \ \lim_{j\to\infty}(f_j^{(j)},q_k) = (f,q_k) \ ;$$

dit heeft ten gevolge dat voor iedere $r \in L(\{q_n\}_{n\in Nt})$ geldt

$$\lim_{j\to\infty}(f_j^{(j)},r) = (f,r) \ .$$

Als $g \in R$ en $r \in L(\{q_n\}_{n \in Nt})$ is

$$|(f_j^{(j)},g) - (f,g)| \leq |(f_j^{(j)},r) - (f,r)| + |(f_j^{(j)},g-r) - (f,g-r)| \leq$$

$$\leq |(f_j^{(j)},r) - (f,r)| + \|f_j^{(j)}\|\|g-r\| + \|f\|\|g-r\| \leq$$

$$\leq |(f_j^{(j)},r) - (f,r)| + 2\|g-r\| .$$

Bij iedere $g \in R$ en $\varepsilon > 0$ kan men een $r \in L(\{q_n\}_{n \in Nt})$ vinden zó dat $\|g-r\| < \frac{\varepsilon}{3}$; bij deze r bepaalt men een N zo dat

$$j > N \Rightarrow |(f_j^{(j)},r) - (f,r)| < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

of

$$\forall_{g \in R} \lim_{j \to \infty} (f_j^{(j)},g) = (f,g) .$$

Volgens 2.2.2 impliceert dit $f_j^{(j)} \rightharpoonup f$. □

4. Lineaire operatoren

Een lineaire afbeelding T van een vectorruimte R in een vectorruimte S wordt gekarakteriseerd door de eigenschap

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} \forall_{\alpha \in Cm} \forall_{\beta \in Cm} [T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg] .$$

De verzameling van alle lineaire afbeeldingen van R in S geven we aan met $LO(R \to S)$. Als R en S genormeerd zijn, $T \in LO(R \to S)$ en

$$\exists_{M>0} \forall_{f \in R} \|Tf\| < M\|f\| ,$$

heet T begrensd; in dat geval heet

$$\|T\| := \sup \left\{ \frac{\|Tf\|}{\|f\|} \;\middle|\; f \in R \setminus \{\sigma\} \right\}$$

de norm van T. De verzameling van begrensde lineaire afbeeldingen van een genormeerde vectorruimte R in een genormeerde vectorruimte S geven we aan met $BLO(R \to S)$. Dus $BLO(R \to S) \subset LO(R \to S)$.

Als $T \in LO(R \to R)$ noemt men T gewoonlijk een lineaire operator van R; aangezien we ons in hoofdzaak met operatoren van (genormeerde) vectorruimten bezig houden, gebruiken we de notatie $LO(R)$ en $BLO(R)$ in plaats van $LO(R \to R)$ en $BLO(R \to R)$. Dus $BLO(R) \subset LO(R)$.

Als $T \in LO(R)$ verstaan we onder een eigenvector van T ieder element $f \in R \setminus \{\sigma\}$ met de eigenschap

$$\exists_{\lambda \in Cm} [Tf = \lambda f] .$$

Als f eigenvector is van T is er precies één $\lambda \in Cm$ met genoemde eigenschap; deze λ heet (de bij f behorende) eigenwaarde van T.

De beeldruimte $T(R) := \{g \in R \mid \exists_{f \in R}\, g = Tf\}$ is een lineaire deelruimte van R; voor iedere eigenwaarde λ van T is de eigenruimte

$$E_\lambda := \{f \in R \mid Tf = \lambda f\}$$

een lineaire deelruimte van R; in het bijzonder is

$$E_0 = \{f \in R \mid Tf = \emptyset\}$$

de <u>nulruimte</u> van T; als 0 geen eigenwaarde van T is, is $E_0 = \{\emptyset\}$.

4.1. Algemene eigenschappen van lineaire operatoren van een banachruimte

Als R en R' vectorruimten zijn, dan kunnen we in LO(R → R') een optelling definiëren; voor elementen $T \in LO(R \to R')$, $S \in LO(R \to R')$ zij

$$T + S := \forall_{f \in R} (Tf + Sf)$$

een vermenigvuldiging met scalairen wordt analoog gedefinieerd: met $\alpha \in Cm$ en $T \in LO(R \to R')$

$$\alpha T := \forall_{f \in R} (\alpha Tf) .$$

4.1.1. <u>Stelling</u>: LO(R → R') is, met de zojuist gedefinieerde optelling en vermenigvuldiging, een vectorruimte; als R en R' genormeerd zijn, is BLO(R → R') hiervan een lineaire deelruimte, die, voorzien van de boven gedefinieerde operatornorm, genormeerd is. Als R een B-ruimte is, is BLO(R → R') eveneens een B-ruimte.

<u>Bewijs</u>: We beperken ons tot het geval R' = R; het algemenere geval verloopt geheel analoog. Als $T \in LO(R)$, $S \in LO(R)$ en $\alpha \in Cm$ zijn $T + S$ en αT weer lineaire operatoren. Bijvoorbeeld

$$(T + S)(f + g) = T(f + g) + S(f + g) = Tf + Tg + Sf + Sg$$
$$= Tf + Sf + Tg + Sg = (T + S)f + (T + S)g .$$

LO(R) heeft ook de overige voor een vectorruimte noodzakelijke eigenschappen (zie voor deze laatste het WSK-I college).

Als $T \in BLO(R)$, $S \in BLO(R)$ en $\alpha \in Cm$, dan

$$\| (T + S)(f) \| = \| Tf + Sf \| \leq \| Tf \| + \| Sf \| \leq \{\| T \| + \| S \|\} \| f \|$$

en $\quad \|(\alpha T)(f)\| = \|\alpha Tf\| = |\alpha|\,\|Tf\| \leq |\alpha|\,\|T\|\,\|f\|$

zodat $\quad T+S \in BLO(R)\ ,\quad \alpha T \in BLO(R)\ ,\quad \|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$ en $\|\alpha T\| \leq |\alpha|\,\|T\|$.

BLO(R) is derhalve een lineaire deelruimte van LO(R); de operatornorm bezit naast de zojuist bewezen eigenschappen nog de volgende:

$$\|T\| \geq 0\ ;\quad \|T\| = 0 \Rightarrow \forall_{f\in R}\ \|Tf\| = 0$$

dus $\quad \|T\| = 0 \Rightarrow \forall_{f\in R}\ Tf = \sigma\ ,\quad$ dus $\quad \|T\| = 0 \Rightarrow T = 0\ ;$

$$\forall_{f\neq\sigma}\ \frac{\|(\alpha T)(f)\|}{\|f\|} = |\alpha|\ \frac{\|Tf\|}{\|f\|} \quad \text{zodat} \quad \|\alpha T\| = |\alpha|\,\|T\|\ ;$$

uit deze opsomming volgt dat BLO(R) een genormeerde vectorruimte is.

Stel nu dat R volledig is en dat $\{T_n\}_{n\in Nt}$ een fundamentaalrij is in BLO(R). Uit

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{m>N}\ \forall_{n>N}\ \|T_m - T_n\| < \varepsilon$$

volgt

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{m>N}\ \forall_{n>N}\ \forall_{f\in R}\ \|T_m f - T_n f\| \leq \varepsilon\|f\| \qquad (*)$$

zodat voor alle $f \in R$ de rij $\{T_n(f)\}_{n\in Nt}$ in R een fundamentaalrij, bijgevolg convergent is; zij T gedefinieerd door $Tf := \lim_{n\to\infty} T_n f$. T is dan een afbeelding van R in R, en lineair omdat

$$T(f+g) = \lim_{n\to\infty} T_n(f+g) = \lim_{n\to\infty}(T_n f + T_n g) = \lim_{n\to\infty} T_n f + \lim_{n\to\infty} T_n g$$

en $T(\alpha f) = \alpha Tf$ op analoge wijze.

Een fundamentaalrij is zeker begrensd; voor $f \neq \sigma$ volgt hieruit (met gebruikmaking van de continuïteit van de norm)

$$\frac{\|Tf\|}{\|f\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|T_n f\|}{\|f\|} \leq \sup\{\|T_n\| \mid n \in Nt\}$$

zodat $T \in BLO(R)$. Tenslotte volgt uit (*) door limietovergang $(m \to \infty)$ dat voor alle $f \in R \setminus \{\sigma\}$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>N}\ \|Tf - T_n f\| \leq \varepsilon\|f\|$$

of

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>N}\ \frac{\|(T - T_n)(f)\|}{\|f\|} \leq \varepsilon$$

zodat ook

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>N}\ \|T - T_n\| \leq \varepsilon$$

hetgeen uitdrukt dat de rij $\{T_n\}_{n\in Nt}$ convergeert met limiet T. □

In LO(R) kan men een vermenigvuldiging definiëren als volgt: voor ieder tweetal elementen $T \in LO(R)$ en $S \in LO(R)$ zij $(T \circ S)(f) := T(Sf)$; het is niet moeilijk om in te zien dat het tripel $(LO(R),+,\circ)$ een ring is en dat de operator I, gedefinieerd door

$$If := f \quad (f \in R)$$

het eenheidselement van deze ring is.

Omdat, ingeval R genormeerd is, voor $T \in BLO(R)$ en $S \in BLO(R)$

$$\|(T \circ S)(f)\| = \|T(Sf)\| \leq \|T\|\|Sf\| \leq \|T\|\|S\|\|f\|$$

is $\quad T \circ S \in BLO(R) \quad$ en $\quad \|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.

Bovendien is $\|If\| = \|f\|$ $(f \in R)$ zodat $I \in BLO(R)$ en $\|I\| = 1$.

Een vectorruimte X waarin bovendien een vermenigvuldiging $\circ$ is gedefinieerd zó dat

i: $(X,+,\circ)$ een ring is,

ii: $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ $(\lambda \in Cm,\ x \in X,\ y \in X)$,

noemt men een <u>algebra</u>; is X genormeerd en geldt bovendien

iii: $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ voor ieder tweetal elementen x en y van X,

dan noemt men X een <u>genormeerde algebra</u> (ook wel genormeerde ring); is X dan bovendien volledig in de metriek van de norm dan spreekt men van een <u>Banach-algebra</u>. In het geval dat de algebra een eenheidselement e bezit eist men gewoonlijk ook nog dat $\|e\| = 1$.

Het voorgaande kunnen we nu ook samenvatten in

4.1.2. <u>Stelling</u>: Voor een genormeerde vectorruimte R is BLO(R) een genormeerde algebra met eenheidselement; is R een B-ruimte dan is BLO(R) een Banachalgebra.

4.1.3. <u>Opmerking</u>: Voor het product $A \circ B$ van operatoren A en B schrijven we voortaan AB.

Analoog aan 3.2.3 geldt

4.1.4. <u>Stelling</u>: Een lineaire afbeelding T van een genormeerde ruimte R in een genormeerde ruimte S is dan en slechts dan continu als ze begrensd is.

4.1.5. <u>Voorbeeld</u>: Als men R^n opvat als IP-ruimte en $T \in LO(R^n)$, is T continu (zie WSK IVa) zodat $BLO(R^n) = LO(R^n)$.

Orthogonale lineaire afbeeldingen zijn gedefinieerd door de eigenschap $\forall_{f \in R^n} \|Tf\| = \|f\|$ zodat voor orthogonale afbeeldingen van R^n geldt $\|T\| = 1$. Kiest men in R^n een orthonormaalsysteem $\{q_j\}_{j=1,\ldots,n}$ als basis, dan kan men op eeneenduidige wijze $n \times n$-matrices toevoegen aan de elementen van $LO(R^n)$; optelling en vermenigvuldiging in $LO(R^n)$ corresponderen met optelling en vermenigvuldiging van matrices; zo blijkt dat de $n \times n$-matrices met de normering die uit het bovenstaande volgt een Banachalgebra met eenheidselement vormen.

Zij R een IP-ruimte, $T \in LO(R)$. T heet <u>hermitisch</u> indien

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} (Tf,g) = (f,Tg) .$$

4.1.6. <u>Voorbeeld</u>: Zij $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ in $C([0,1])$ en zij $\varphi \in C([0,1])$, φ reëel.

Definieer $(\Phi f)(x) := f(x)\varphi(x)$, $x \in [0,1]$, $f \in C([0,1])$. Dan is $\Phi \in LO(C([0,1]))$ en

$$(\Phi f,g) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\overline{g(t)}dt = \int_0^1 f(t)\overline{\varphi(t)g(t)}dt = (f,\Phi g) .$$

Φ is dus een hermitische operator van $C([0,1])$.

4.1.7. Stelling: Als R een IP-ruimte is en T een hermitische operator van R dan geldt

i: Alle eigenwaarden van T zijn reëel.

ii: Voor eigenvectoren f en g van T die behoren bij verschillende eigenwaarden geldt $f \perp g$.

Bewijs:

i: Als $f \in E_\lambda \setminus \{\sigma\}$ volgt uit $(Tf,f) = (f,Tf)$ dat $\lambda(f,f) = \overline{\lambda}(f,f)$ zodat $\lambda = \overline{\lambda}$.

ii: Met $\lambda \neq \mu$, $f \in E_\lambda \setminus \{\sigma\}$, $g \in E_\mu \setminus \{\sigma\}$ volgt uit $(Tf,g) = (f,Tg)$ dat $\lambda(f,g) = \overline{\mu}(f,g)$ zodat op grond van i. $(\lambda-\mu)(f,g) = 0$ en bijgevolg $(f,g) = 0$. □

4.1.8. Stelling: Als R een H-ruimte is en T een hermitische operator van R, dan geldt: $T \in BLO(R)$. (Stelling van Hellinger-Toeplitz.)

Bewijs: Bij ieder element $h \in R$ bestaat een begrensde lineaire functionaal L_h met $L_h(f) = (f,h)$ (zie 2.2.2; deel i. van deze bewering geldt in iedere IP-ruimte). Zij $S := \{L_{Tf} \mid \|f\| = 1\}$.

$$\forall_{g\in R}\ \forall_{f,\|f\|=1}\ [\,|L_{Tf}(g)| = |(g,Tf)| = |(Tg,f)| \leq \|Tg\|\|f\| = \|Tg\|\,]$$

zodat het ensemble S voldoet aan voorwaarde (P) in 3.2.4. Maar dan

$$\exists_{M>0}\ \forall_{f,\|f\|=1}\ \|L_{Tf}\| \leq M .$$

Als $h \neq \sigma$ en $f = \frac{h}{\|h\|}$ dan is $\|f\| = 1$; derhalve

$$\forall_{h\in R}\ \|L_{Th}\| \leq M\|h\|$$

en $\qquad \forall_{h\in R}\ \forall_{g\in R}\ |(g,Th)| = |L_{Th}(g)| \leq M\|g\|\|h\|$.

Substitueer g := Th, dan komt er

$$\forall_{h\in R}\ \|Th\|^2 \leq M\|Th\|\|h\|$$

zodat

$$\forall_{h\in R}\ \|Th\| \leq M\|h\| \ ;$$

dit wil zeggen $T \in BLO(R)$. □

4.2. Lineaire operatoren van separabele hilbertruimten

Zij R een SH-ruimte.

4.2.1. Stelling: Als $g \in R$ en $h \in R$, dan is $[\forall_{f\in R}\ (f,g) = (f,h)] \Rightarrow [g=h]$.

Bewijs: Als $(f,g) = (f,h)$ is $(f,g-h) = 0$; neemt men voor $f := g-h$ dan staat er $\|g-h\| = 0$. □

4.2.2. Stelling: Als $T \in BLO(R)$ is er precies één $T^* \in LO(R)$ zó dat

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ (Tf,g) = (f,T^*g) \ .$$

T^* heet de geadjungeerde (operator) van T.

Bewijs: Bij iedere $g \in R$ zij M_g gedefinieerd door $M_g(f) := (Tf,g)$. Men ziet gemakkelijk in dat $M_g \in LO(R \to Cm)$ (met andere woorden: M_g is een lineaire functionaal).

$$|M_g(f)| = |(Tf,g)| \leq \|Tf\|\|g\| \leq \|T\|\|f\|\|g\| \ ,$$

dus M_g is begrensd. Volgens 2.2.2 is er één $g^* \in R$ zodat

$$\forall_f\ M_g(f) = (f,g^*) \ .$$

Definieer nu $T^* : R \to R$ door

$$T^*g := g^* \quad , \quad (g \in R) \ .$$

Omdat voor alle $f \in R$

$$(f, T^*(\alpha g + \beta h)) = M_{\alpha g + \beta h}(f) = (Tf, \alpha g + \beta h) = \bar{\alpha}(Tf, g) + \bar{\beta}(Tf, h) =$$

$$= \bar{\alpha} M_g(f) + \bar{\beta} M_h(f) = \bar{\alpha}(f, T^*g) + \bar{\beta}(f, T^*h) = (f, \alpha T^*g + \beta T^*h)$$

geldt volgens 4.2.1

$$T^*(\alpha g + \beta h) = \alpha T^*g + \beta T^*h$$

en bijgevolg $T^* \in LO(R)$.

Als $S \in LO(R)$ en $\forall_f \forall_g \; (Tf, g) = (f, Sg)$ dan ook

$$\forall_f \forall_g \; (f, Sg) = (f, T^*g)$$

en op grond van 4.2.1

$$\forall_g \; Sg = T^*g$$

zodat $\quad S = T^*$. $\square$

4.2.3. <u>Stelling</u>: Als $T \in BLO(R)$ dan $T^* \in BLO(R)$, $(T^*)^* = T$ en $\|T^*\| = \|T\|$.

<u>Bewijs</u>: Uit $\forall_f \forall_g \; (Tf, g) = (f, T^*g)$ volgt met $f := T^*g$

$$\forall_g \; \|T^*g\|^2 = (TT^*g, g) \leq \|T\| \, \|T^*g\| \, \|g\|$$

en

$$\forall_g \; \|T^*g\| \leq \|T\| \, \|g\|$$

zodat

$$T^* \in BLO(R) \quad \text{en} \quad \|T^*\| \leq \|T\| .$$

$(T^*)^*$ noteren we met T^{**}; T^{**} is gedefinieerd door

$$\forall_f \forall_g \; (T^*f, g) = (f, T^{**}g)$$

zodat

$$\forall_f \forall_g \; (T^{**}g, f) = (g, T^*f) = (Tg, f)$$

en op grond van 4.2.1

$$\forall_g \; T^{**}g = Tg$$

of $\quad T^{**} = T$.

Nu is $\quad \|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^{*}\| \leq \|T\|$. □

4.2.4. <u>Opmerking</u>: Als T hermitisch is, is tengevolge van 4.1.8 en 4.2.2

$T = T^*$; het omgekeerde is triviaal.

4.2.5. <u>Stelling</u>: Voor $T \in BLO(R)$ en $S \in BLO(R)$ is

$$(TS)^* = S^*T^* .$$

<u>Bewijs</u>: Voor alle $f \in R$ en alle $g \in R$ is

$(TSf,g) = (Sf,T^*g) = (f,S^*T^*g)$. □

4.2.6. <u>Stelling</u>: Voor $T \in BLO(R)$ is TT^* hermitisch.

<u>Bewijs</u>: $(TT^*f,g) = (f,TT^*g)$ volgens 4.2.5 en 4.2.3. □

4.3. <u>Operatoren met eindige dubbelnorm</u>

Als R een IP-ruimte is en $T \in LO(R)$ zeggen we dat <u>T een geadjungeerde heeft</u> indien er een afbeelding T^* van R in R bestaat zó dat $\forall_f \forall_g \ (Tf,g) = (f,T^*g)$. Er is ten hoogste één dergelijke T^*; als er zo'n T^* is, is die lineair (ga dat na!) en heet weer de geadjungeerde van T.

4.3.1. <u>Voorbeelden</u>

Als T hermitisch is, is $T^* = T$ (4.2.4).

Als R een SH-ruimte is heeft iedere $T \in BLO(R)$ een geadjungeerde (4.2.2).

Niet iedere lineaire operator heeft een geadjungeerde. De IP-ruimte R die in 1.9.4 is gedefinieerd bestaat uit rijen complexe getallen $\{\alpha_j\}_{j\in Nt}$ waarvoor $\exists_{n\in Nt} \forall_{j>n} \ \alpha_j = 0$. In deze ruimte geven we een $T \in BLO(R)$ zonder geadjungeerde. Zij T de operator waarvoor $T(\{\alpha_j\}_j) := (\Sigma_j\alpha_j,0,0,0,\ldots)$ zodat $T \in LO(R)$; zij voor iedere $n \in Nt$ f_n het element van R waarvoor $\forall_{j=1,\ldots,n} \ \alpha_j = 1$, $\forall_{j>n} \ \alpha_j = 0$; zij g het element met $\alpha_1 = 1$, $\forall_{j>1} \ \alpha_j = 0$.

Nu is $\|f_n\| = n^{\frac{1}{2}}$ en $(Tf_n,g) = n$; als T^* een geadjungeerde is van T moet

$\forall_n\ (f_n, T^*g) = n$, $\forall_n\ \|f_n\|\,\|T^*g\| \geq n$ en $\forall_n\ \|T^*g\| \geq n^{\frac{1}{2}}$ gelden; dus bestaat er geen geadjungeerde van T.

4.3.2. Stelling: Als T een geadjungeerde T^* heeft, geldt

i: T^* is eenduidig bepaald.

ii: T^* heeft een geadjungeerde en $(T^*)^* = T$.

iii: Als $T \in BLO(R)$ dan ook $T^* \in BLO(R)$ en $\|T^*\| = \|T\|$.

Bewijs: Analoog aan het laatste deel van 4.2.2 en 4.2.3; want 4.2.1 geldt in iedere IP-ruimte. □

Als R een separabele IP-ruimte is geldt op grond van 2.1.12 dat R een hoogstens aftelbaar totaal orthonormaalsysteem Q bezit; in deze situatie geldt

4.3.3. Stelling: Als Q eindig is, is ieder totaal orthonormaalsysteem eindig; als Q aftelbaar is, is ieder totaal orthonormaalsysteem aftelbaar.

Bewijs: Zie vraagstuk 2.2.3. □

Zij nu in het vervolg van deze § R een separabele IP-ruimte met een totaal orthonormaalsysteem Q. In de volgende beweringen veronderstellen we dat Q aftelbaar is, $Q := \{q_j\}_{j \in Nt}$; het geval dat Q eindig is kan (met geringe notatiewijzigingen) geheel analoog worden behandeld.

4.3.4. Stelling: Als $T \in LO(R)$ en als T de geadjungeerde T^* heeft dan geldt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|T^*q_j\|^2 \leq \infty .$$

Bewijs: Stel eerst $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 < \infty$; voor alle $N \in Nt$ is

$$\sum_{j=1}^{N} \|T^*q_j\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} |(T^*q_j, q_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} |(q_j, Tq_k)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|Tq_k\|^2 ,$$

zodat ook

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|T^*q_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 ;$$

de omgekeerde ongelijkheid leidt men nu op analoge wijze af.
Indien $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 = \infty$ volgt uit het voorgaande dat ook $\sum_{j=1}^{\infty} \|T^*q_j\|^2 = \infty$. □

4.3.5. <u>Stelling</u>: Als $T \in LO(R)$ en als T de geadjungeerde T^* heeft dan geldt voor ieder totaal orthonormaalsysteem $S := \{s_k\}_{k \in Nt}$ dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Ts_k\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 .$$

<u>Bewijs</u>: Als $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 < \infty$ dan is voor alle $N \in Nt$

$$\sum_{k=1}^{N} \|T^*s_k\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |(T^*s_k, q_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} |(s_k, Tq_j)|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2$$

zodat ook

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T^*s_k\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2$$

en op grond van de vorige stelling

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Ts_k\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 ;$$

de omgekeerde ongelijkheid verkrijgt men nu op analoge wijze.
Als $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 = \infty$ volgt uit het voorgaande dat ook $\sum_{k=1}^{\infty} \|Ts_k\|^2 = \infty$. □

Een lineaire operator T van een separabele IP-ruimte R heet een <u>operator met eindige dubbelnorm</u> *indien T een geadjungeerde T^* heeft en er in R* een totaal orthonormaalsysteem $Q := \{q_j\}_j$ bestaat waarvoor $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 < \infty$.
Als T een eindige dubbelnorm heeft noemt men

$$|||T||| := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

de <u>dubbelnorm</u> van T; deze definitie is geoorloofd omdat ze niet van de keuze van het orthonormaalsysteem afhangt (4.3.5). Uit 4.3.4 volgt direct dat T* ook een eindige dubbelnorm heeft en dat $|||T^*||| = |||T|||$.

4.3.6. <u>Opmerkingen</u>: Aan de voorwaarde dat T een geadjungeerde heeft is door alle hermitische operatoren in een IP-ruimte en door alle begrensde lineaire operatoren van een SH-ruimte voldaan.

Een operator met eindige dubbelnorm van een SH-ruimte noemt men ook wel <u>Hilbert-Schmidt operator</u>.

4.3.7. <u>Stelling</u>: Als T een lineaire operator is met een eindige dubbelnorm, is T begrensd en $\|T\| \leq |||T|||$.

<u>Bewijs</u>: $\|Tf\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(Tf,q_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(f,T^*q_j)|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f\|^2 \|T^*q_j\|^2 =$

$$= \|f\|^2 \, |||T^*|||^2 = \|f\|^2 \, |||T|||^2$$

zodat $\forall_{f \neq 0} \ \frac{\|Tf\|}{\|f\|} \leq |||T|||$. □

4.4. <u>Compacte operatoren</u>

Zij R een genormeerde lineaire ruimte en $T \in LO(R)$. T heet <u>C-compact</u> indien voor iedere rij $\{f_n\}_{n \in Nt}$ met $\forall_{n \in Nt} \ \|f_n\| = 1$ geldt dat de rij $\{Tf_n\}_{n \in Nt}$ een convergente deelrij bevat. T heet <u>F-compact</u> als voor elke dergelijke rij f_n's geldt dat $\{Tf_n\}$ een deelrij heeft die fundamentaalrij is. Als R een Banachruimte is, vallen deze begrippen samen; men spreekt dan zonder meer over <u>compacte</u> operatoren.

4.4.1. <u>Stelling</u>: Als R een genormeerde lineaire ruimte en T een F-compacte operator van R is dan geldt $T \in BLO(R)$.

<u>Bewijs</u>: Als $\forall_{n \in Nt} \ \exists_{g_n \in R} \ \|Tg_n\| > n\|g_n\|$ is, met $f_n := \frac{g_n}{\|g_n\|}$, $\|f_n\| = 1$ en $\|Tf_n\| > n$ $(n \in Nt)$. Dus $T \notin BLO(R) \Rightarrow T$ niet compact. □

4.4.2. Stelling: Als $T \in LO(R)$ dan geldt:

T is dan en slechts dan C-compact (resp. F-compact) als voor iedere begrensde rij $\{f_n\}_{n\in Nt}$, de rij $\{Tf_n\}_{n\in Nt}$ een convergente deelrij (resp. fundamentaalrij) bevat.

Bewijs: We beperken ons tot het geval "C-compact". Dat de voorwaarde voldoende is, is triviaal. Zij nu T compact en $\{f_n\}_{n\in Nt}$ een begrensde rij:

$$\exists_M \forall_{n\in Nt} \|f_n\| < M.$$

Als $\lim_{n\to\infty} f_n = \sigma$ is wegens de continuïteit van T (zie 4.4.1 en 4.1.4) $\lim_{n\to\infty} Tf_n = \sigma$.

Als $\neg\left[\lim_{n\to\infty} f_n = \sigma\right]$, is $a := \lim_{n\to\infty} \sup\|f_n\| > 0$; kies een deelrij $\{f'_n\}_{n\in Nt}$ met $\lim_{n\to\infty}\|f'_n\| = a$ en zij $g_n := \dfrac{f'_n}{\|f'_n\|}$ $(n \in Nt)$; dan is $\forall_n \|g_n\| = 1$.

Nu heeft $\{Tg_n\}_{n\in Nt}$ een convergente deelrij $\{Tg'_n\}_{n\in Nt}$ en met $f''_n := g'_n$ is wegens $Tf''_n = \|f''_n\|Tg'_n$ ook de rij $\{Tf''_n\}_n$, die een deelrij is van $\{Tf_n\}_n$, convergent. □

4.4.3. Stelling: Als R een SH-ruimte is en T een compacte operator dan geldt:

$f_n \rightharpoonup \sigma \Rightarrow Tf_n \to \sigma$.

Bewijs: Stel dat $\neg[f_n \rightharpoonup \sigma \Rightarrow Tf_n \to \sigma]$ dan $[f_n \rightharpoonup o]$ & $\neg[Tf_n \to o]$ (P & Q)

Uit Q volgt dat $\lim_{n\to\infty} \sup\|Tf_n\| > 0$, zodat er een $\varepsilon > 0$ is en een deelrij $\{f'_n\}_{n\in Nt}$ met

$$\forall_{n\in Nt} \|Tf'_n\| > \varepsilon .$$

Nu is de rij $\{f_n\}_{n\in Nt}$ begrensd (stelling 3.3.3), bijgevolg is de rij $\{f'_n\}_{n\in Nt}$ begrensd en volgens 4.4.2 bevat $\{Tf'_n\}_n$ een convergente deelrij $\{Tf''_n\}_n$; zij $h := \lim_{n\to\infty} Tf''_n$. Nu geldt zowel

$$\lim_{n\to\infty} (Tf''_n, h) = (h,h) \geq \varepsilon$$

als $\lim_{n\to\infty} (Tf''_n, h) = \lim_{n\to\infty} (f''_n, T^*h) = 0$,

zodat de onderstelling P & Q niet waar is. □

4.4.4. <u>Stelling</u>: Als R een SH-ruimte is, $T \in LO(R)$ en als voor iedere rij $\{f_n\}_{n\in Nt}$ in R geldt dat

$$f_n \rightharpoonup \sigma \Rightarrow Tf_n \to \sigma$$

dan is T compact.

<u>Bewijs</u>: Als $\{g_n\}_{n\in Nt}$ een begrensde rij is in R, bevat ze volgens 3.3.6 een zwak convergente deelrij, zeg $\{g'_n\}_{n\in Nt}$ met $g'_n \rightharpoonup g$; dan is $g'_n - g \rightharpoonup \sigma$ en volgens het gegeven $Tg'_n \to Tg$. T is compact volgens 4.4.2. □

4.4.5. <u>Opmerking</u>: Voor de T van 4.4.4 geldt (op grond van 4.4.1) ook $T \in BLO(R)$.

4.4.6. <u>Stelling</u>: Als R een SH-ruimte is en T is een lineaire operator met eindige dubbelnorm, dan is T compact.

<u>Bewijs</u>: Zij $\{q_j\}_{j\in Nt}$ een totaal orthonormaalsysteem van R. Zij $\{f_n\}_{n\in Nt}$ een rij in R met $f_n \rightharpoonup \sigma$; dan is (wegens 3.3.3) $\{f_n\}_{n\in Nt}$ begrensd. Neem $M \in R\ell$ zó dat $\forall_{n\in Nt}\ \|f_n\| < M$.

Kies $\varepsilon > 0$ en $N \in Nt$ zó dat $\sum_{j=N+1}^{\infty} \|T^*q_j\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2M^2}$. Nu geldt voor iedere $n \in Nt$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |(Tf_n, q_j)|^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} |(f_n, T^*q_j)|^2 \leqslant \sum_{j=N+1}^{\infty} \|f_n\|^2 \|T^*q_j\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \sum_{j=N+1}^{\infty} \|T^*q_j\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} .$$

Op grond van $f_n \rightharpoonup \sigma$ geldt

$$\forall_{j\in Nt}\ \exists_{K(j)\in Nt}\ \forall_{n>K(j)}\ |(f_n, T^*q_j)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N} .$$

Als nu $K := \max\{K(j) \mid j = 1,2,\ldots,N\}$ geldt

$$\forall_{j=1,2,\ldots,N}\ \forall_{n>K}\ |(f_n, T^*q_j)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N}$$

zodat wegens

$$\|Tf_n\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(Tf_n, q_j)|^2 = \sum_{j=1}^{N} |(f_n, T^*q_j)|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} |(f_n, T^*q_j)|^2$$

voor alle $n > K$ geldt

$$\|Tf_n\|^2 < N\,\frac{\varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

hetgeen equivalent is met $Tf_n \to o$.

Op grond van 4.4.4 is T compact. □

4.4.7. <u>Stelling</u>: Zij R een genormeerde vectorruimte, $T \in LO(R)$, $\{T_n\}_{n\in Nt}$ een rij F-compacte operatoren in R en $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$; dan is T eveneens F-compact.

<u>Bewijs</u>: Volgens 4.4.1 is $\forall_{n\in Nt}\ T_n \in BLO(R)$ en volgens 4.1.1 is dan ook $T \in BLO(R)$.

Neem een rij $\{f_j\}_{j\in Nt}$ in R waarvoor $\forall_{j\in Nt}\ \|f_j\| = 1$. Uit de F-compactheid van T, volgt dat er een deelrij $\{f'_j\}_j$ bestaat waarvoor $\{T_1 f'_j\}_j$ fundamentaalrij is. Wegens de F-compactheid van T_2 bevat $\{f'_j\}_j$ een deelrij $\{f''_j\}_j$ waarvoor $\{T_2 f''_j\}_j$ fundamentaalrij is. Zo doorgaande verkrijgen we successieve deelrijen $\{f_j^{(k)}\}_{j\in Nt}$ zó dat $\{T_k f_j^{(k)}\}_j$ fundamentaalrij is voor alle $k \in Nt$.
Beschouw nu de diagonale deelrij $\{f_j^{(j)}\}_{j\in Nt}$, die een deelrij is van ieder der rijen $\{f_j^{(k)}\}_{j\in Nt}$, zodat

$$\forall_{k\in Nt}\ [\{T_k f_j^{(j)}\}_j \text{ fundamentaalrij is}]\ .$$

De rij $\{f_j^{(j)}\}_j$ is ook deelrij van de oorspronkelijke rij $\{f_j\}_j$, en we zullen laten zien dat $\{Tf_j^{(j)}\}_j$ fundamentaalrij is.

Zij $\varepsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}t$ zó dat $\|T_N - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$, dan geldt

$$\exists_{M \in \mathbb{N}t} \ \forall_{m>M} \ \forall_{n>M} \ \|T_N f_m^{(m)} - T_N f_n^{(n)}\| < \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Voor $m > M$ en $n > M$ geldt nu

$$\|Tf_m^{(m)} - Tf_n^{(n)}\| \leq \|Tf_m^{(m)} - T_N f_m^{(m)}\| + \|T_N f_m^{(m)} - T_N f_n^{(n)}\| +$$

$$+ \|T_N f_n^{(n)} - Tf_n^{(n)}\| \leq$$

$$\leq \|T - T_N\| \|f_m^{(m)}\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_N - T\| \|f_n^{(n)}\| < \varepsilon \ . \qquad \square$$

4.4.8. <u>Opmerking</u>: Als de R van 4.4.7 een SH-ruimte is, is een korter bewijs van 4.4.7 mogelijk:

<u>Bewijs</u>: Zij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}t}$ een rij in R met $f_n \rightharpoonup \sigma$; $\{f_n\}_n$ is dan begrensd, zij $\forall_{n \in \mathbb{N}t} \ \|f_n\| < M$. Bij $\varepsilon > 0$ kiezen we $N \in \mathbb{N}t$ zó dat $\|T_N - T\| < \frac{\varepsilon}{2M}$; omdat T_N compact is, is (volgens 4.4.3) $T_N f_n \to \sigma$ zodat

$$\exists_{K \in \mathbb{N}t} \ \forall_{n>K} \ \|T_N f_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Nu geldt voor alle $n > K$

$$\|Tf_n\| \leq \|T_N f_n\| + \|Tf_n - T_N f_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|T - T_N\| \|f_n\| < \varepsilon \ ,$$

zodat $Tf_n \to \sigma$; volgens 4.4.4 is T compact. $\square$

Voor willekeurige vectorruimten R en S, en $T \in LO(R \to S)$ noemt men T een <u>afbeelding</u> (of <u>operator</u>) <u>van eindige rang</u> indien de dimensie van $T(R)$ eindig is (de <u>rang</u> van T is dan de dimensie van $T(R)$).

4.4.9. <u>Voorbeeld</u>: Zij $R := C([0,1])$, beschouw de elementen φ en ψ van R die zijn gedefinieerd door $\varphi(x) := 1$, $\psi(x) := x$ $(0 \leq x \leq 1)$.

T wordt gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := f(0) + x(f(1)-f(0)) \quad (0 \leq x \leq 1;\ f \in R).$$

Nu $T \in LO(R)$ en $\forall_{f \in R}\ Tf = f(0)\varphi + (f(1)-f(0))\psi$ zodat $T(R) = L(\{\varphi,\psi\})$ en $\dim T(R) = 2$.

Het belang van het begrip "van eindige rang" zal blijken in 4.4.11; eerst komt

4.4.10. (Hulp)<u>stelling</u>: In een genormeerde vectorruimte R met $\dim R < \infty$ geldt dat $\{f \in R \mid \|f\| \leq 1\}$ rij-compact is.

<u>Bewijs</u>: We noteren $\widetilde{B}_{0,1} := \{f \in R \mid \|f\| \leq 1\}$.

Zij $N := \dim R$ en zij $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ een basis voor R. Iedere $f \in R$ is (op eenduidige wijze) te schrijven als $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$ met $\forall_{i=1,\ldots,N}\ \alpha_i \in$ Cm.

Definieer nu $\chi : R \to R^{2N}$ door

$$\chi(f) := (\mathrm{Re}\ \alpha_1,\ \mathrm{Im}\ \alpha_1,\ \mathrm{Re}\ \alpha_2,\ \mathrm{Im}\ \alpha_2,\ \ldots,\ \mathrm{Re}\ \alpha_N,\ \mathrm{Im}\ \alpha_N)\ .$$

Het is gemakkelijk in te zien dat χ een bijectie is.

Definieer vervolgens $\varphi : R^{2N} \to R\ell$ door

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{2N}) := \|(x_1 + ix_2)e_1 + (x_3 + ix_4)e_2 + \ldots + (x_{2N-1} + ix_{2N})e_N\|$$

dan is φ continu; $\varphi^{\leftarrow}(0) = \{(0,0,0,\ldots,0)\}$ wegens de onafhankelijkheid van $\{e_1, \ldots, e_N\}$ in R.

De verzameling

$$S := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{2N}) \in R^{2N} \mid \sum_{j=1}^{2N} x_j^2 = 1\}$$

bevat $(0,0,\ldots,0)$ niet en is begrensd en gesloten, dus compact, in R^{2N}; φ heeft bijgevolg op S een positief minimum, m. Nu is

$$\chi^{\leftarrow}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2 = 1 \right\}$$

en voor alle $f \in \chi^{\leftarrow}(S)$ geldt dus $\|f\| \geq m$. Voor een willekeurig element

$g = \sum_{i=1}^{N} \beta_i e_i$ van R geldt nu dat $\{|\beta_1|^2 + \ldots + |\beta_N|^2\}^{-\frac{1}{2}} g \in \chi^{\leftarrow}(S)$ zodat voor alle $g \in R$ geldt $\|g\| \geq m\sqrt{|\beta_1|^2 + \ldots + |\beta_N|^2}$ en hieruit volgt

$$\forall_{g \in R} \; \forall_{j=1,\ldots,N} \; |\beta_j| \leq \frac{\|g\|}{m} \; ;$$

en voor alle g met $\|g\| \leq 1$ geldt $\forall_{j=1,\ldots,N} \; |\beta_j| \leq \frac{1}{m}$.

Zij nu $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}t}$ een rij in $\widetilde{B}_{0,1}$, dan is de rij $\{\beta_{n1}\}_n$ begrensd in Cm, zodat $\{g_n\}_n$ een deelrij $\{g_n'\}_n$ bevat waarvoor $\{\beta_{n1}'\}_n$ convergeert; bij deze deelrij is $\{\beta_{n2}'\}_n$ begrensd in Cm, zodat er weer een deelrij $\{g_n''\}_n$ is waarvoor ook $\{\beta_{n2}''\}_n$ convergeert; enzovoorts: $\{g_n\}_n$ bevat een deelrij $\{g_n^{(N)}\}_n$ waarvoor $\{\beta_{nk}^{(N)}\}_n$ convergeert voor alle $k = 1,\ldots,N$; als nu $\beta_k := \lim_{n\to\infty} \beta_{nk}^{(N)}$ $(k = 1,\ldots,N)$ is $\sum_{j=1}^{N} \beta_k e_k = \lim_{n\to\infty} g_n^{(n)}$ en $\|\sum_{j=1}^{N} \beta_k e_k\| \leq 1$. Zo bevat iedere rij in $\widetilde{B}_{0,1}$ een convergente deelrij; $\widetilde{B}_{0,1}$ is rij-compact. □

4.4.11. <u>Stelling</u>: Als R een genormeerde lineaire ruimte is, $T \in BLO(R)$ en T is van eindige rang, dan is T C-compact (dus ook F-compact).

<u>Bewijs</u>: Voor $T = 0$ is de bewering triviaal; stel dus $T \neq 0$.

Kies een rij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}t}$ in R met $\forall_{n \in \mathbb{N}t} \|f_n\| = 1$. Dan geldt voor de rij $\left\{\frac{Tf_n}{\|T\|}\right\}_n$ dat $\forall_{n \in \mathbb{N}t} \left\|\frac{Tf_n}{\|T\|}\right\| \leq 1$ zodat

$$\forall_{n \in \mathbb{N}t} \; \frac{Tf_n}{\|T\|} \in \widetilde{B}_{0,1} \cap T(R)$$

en op grond van 4.4.10 bevat nu $\left\{\frac{Tf_n}{\|T\|}\right\}_n$ een convergente deelrij; dit impliceert dat $\{Tf_n\}_n$ een convergente deelrij bevat. □

5. Spectraaltheorie

Als R een lineaire ruimte is en $T \in LO(R)$ noemen we de verzameling

$$\sigma(T) := \{\gamma \in \mathbb{C} \mid \exists_{f \in R \setminus \{\sigma\}}\ Tf = \gamma f\}$$

het spectrum van T; het spectrum is de verzameling van eigenwaarden van T.

5.1. Het spectrum van een hermitische operator

R is een IP-ruimte, $T \in BLO(R)$ en T is hermitisch.

5.1.1. Stelling: De verzameling $\{\frac{(Tf,f)}{(f,f)} \in \mathbb{C} \mid f \in R \setminus \{\sigma\}\}$ in $\mathbb{C}$ omvat $\sigma(T)$, ligt in $\mathbb{R}$ en is begrensd.

Bewijs: Als $\lambda \in \sigma(T)$ dan is er een $f \in R \setminus \{\sigma\}$ met $Tf = \lambda f$; dan is

$$\lambda = \frac{\lambda(f,f)}{(f,f)} = \frac{(\lambda f,f)}{(f,f)} = \frac{(Tf,f)}{(f,f)} \ ;$$

$$\forall_f\ (Tf,f) = (f,Tf) = \overline{(Tf,f)} \in \mathbb{R} \ ;$$

$$\forall_f\ |(Tf,f)| \leq \|Tf\|\,\|f\| \leq \|T\|(f,f)$$

zodat

$$\forall_{f \neq \sigma}\ \frac{|(Tf,f)|}{(f,f)} \leq \|T\| \ .$$

□

Zij $m_T := \inf\{\frac{(Tf,f)}{(f,f)} \mid f \in R \setminus \{\sigma\}\}$

en $M_T := \sup\{\frac{(Tf,f)}{(f,f)} \mid f \in R \setminus \{\sigma\}\}$.

5.1.2. Stelling: $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$.

Bewijs: Als $c := \max\{|m_T|, |M_T|\}$ is voor $f \neq \sigma$

$$-c \leq -|m_T| \leq m_T \leq \frac{(Tf,f)}{(f,f)} \leq M_T \leq |M_T| \leq c$$

zodat

$$\forall_f\ |(Tf,f)| \leq c(f,f) \ .$$

Voor elke $f \in R$, $g \in R$ is

$$(T(f \pm g), f \pm g) = (Tf,f) \pm (Tf,g) \pm (Tg,f) + (Tg,g) ,$$

en na aftrekken vinden we

$$\begin{aligned} 2(Tf,g) + 2(Tg,f) &= (T(f + g), f + g) - (T(f - g), f - g) \\ &\leq c\|f + g\|^2 + c\|f - g\|^2 \\ &= 2c(\|f\|^2 + \|g\|^2) . \end{aligned} \qquad (*)$$

Laat nu $f \in R$ en neem voorlopig aan $Tf \neq \emptyset$. In (*) vervangen we f door $\frac{f}{\|f\|}$, g door $\frac{Tf}{\|Tf\|}$ en merken op dat $(Tg,f) = (g,Tf)$.
We vinden dan

$$4 \frac{(Tf,Tf)}{\|f\| . \|Tf\|} \leq 4c ,$$

zodat

$$\|Tf\| \leq c\|f\| .$$

Dit is natuurlijk ook juist als $Tf = \emptyset$. Dus $\|T\| \leq c$.

De omgekeerde ongelijkheid, $\|T\| \geq c$, volgt triviaal uit

$$\frac{|(Tf,f)|}{(f,f)} \leq \frac{\|Tf\|\,\|f\|}{(f,f)} \leq \|T\| \ . \qquad \square$$

5.1.3. <u>Stelling</u>: Als $R \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$ dan geldt

i: er is een rij $\{f_n\}_n$ in R met $\forall_n \; \|f_n\| = 1$ en $\lim_{n\to\infty} (Tf_n - M_T f_n) = \sigma$;

ii: er is een rij $\{g_n\}_n$ in R met $\forall_n \; \|g_n\| = 1$ en $\lim_{n\to\infty} (Tg_n - m_T g_n) = \sigma$;

iii: als $f \in R$ en $(Tf,f) = M_T(f,f)$ dan is $Tf = M_T f$;

iv: als $g \in R$ en $(Tg,g) = m_T(g,g)$ dan is $Tg = m_T g$.

<u>Bewijs</u>: Wegens $m_T = -M_{-T}$ en $M_T = -m_{-T}$ behoeven alleen i. en iii. een bewijs; wegens $\forall_{\alpha \in R\ell} \, [m_{T+\alpha I} = \alpha + m_T]$ is ook $m_T \geq 0$ geen beperking der algemeenheid; dan is (5.1.2) $\|T\| = M_T$.

i: Er is een rij $\{f_n\}_n$ met $\forall_n \; \|f_n\| = 1$ en $\lim_{n\to\infty} (Tf_n, f_n) = M_T$ op grond van de definitie van M_T. Nu is

$$\|Tf_n - M_T f_n\|^2 = \|Tf_n\|^2 - 2M_T(Tf_n,f_n) + M_T^2(f_n,f_n) =$$

$$= \|Tf_n\|^2 - 2\|T\|(Tf_n,f_n) + \|T\|^2 \leq$$

$$\leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|(Tf_n,f_n) \ .$$

De limiet van het rechterlid $(n \to \infty)$ is

$$2\|T\|^2 - 2\|T\| M_T = 0$$

zodat $\qquad Tf_n - M_T f_n \to \sigma \quad (n \to \infty)$.

iii: Als $(Tf,f) = M_T(f,f)$ is

$$\|Tf - M_T f\|^2 = \|Tf\|^2 - 2M_T(Tf,f) + M_T^2\|f\|^2 =$$

$$= \|Tf\|^2 - 2M_T^2\|f\|^2 + M_T^2\|f\|^2 =$$

$$= \|Tf\|^2 - \|T\|^2\|f\|^2 \leq 0 \;;$$

dus $\quad Tf = M_T f$. □

5.1.4. <u>Opmerking</u>: 5.1.3 drukt uit dat m_T en M_T eigenwaarden van T kunnen zijn; dat m_T en M_T niet altijd eigenwaarden zijn blijkt met $R := C([0,1])$ en het inproduct

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \;;$$

zij $\varphi(x) := x$ $(0 \leq x \leq 1)$ en T gedefinieerd door $Tf := \varphi f$. Dan is

$$\frac{(Tf,f)}{(f,f)} = \frac{\int_0^1 t|f(t)|^2 dt}{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} \qquad \text{en} \quad m_T = 0,\; M_T = 1 \;.$$

Men verifieert gemakkelijk dat 0 en 1 geen eigenwaarden van T zijn.

5.1.5. <u>Stelling</u>: Als $R \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$, T C-compact is en $\neq \sigma$, is er bij iedere $\mu \in \{m_T, M_T\} \setminus \{0\}$ een $f \in R$ met $\|f\| = 1$ en $Tf = \mu f$.

<u>Bewijs</u>: Omdat $T \neq \sigma$ is $\{m_T, M_T\} \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (5.1.2). Kies $\mu \in \{m_T, M_T\} \setminus \{0\}$; op grond van 5.1.3-i en -ii is er een rij $\{f_n\}_n$ met $\forall_n \; \|f_n\| = 1$ en $\lim_{n\to\infty} (Tf_n - \mu f_n) = \sigma$. Op grond van de compactheid van T is er een deelrij $\{f'_n\}_n$ waarvoor $\{Tf'_n\}_n$ convergeert, zeg $g := \lim_{n\to\infty} Tf'_n$. Dan is $g = \lim_{n\to\infty} \mu f'_n$ en wegens de continuïteit van T is $Tg = \lim_{n\to\infty} T\mu f'_n = \mu \lim_{n\to\infty} Tf'_n = \mu g$. □

5.1.6. <u>Voorbeeld</u>: Zij $R := \ell^2$ (zie 1.9.5). Zij q_j de rij $\{\delta_{jk}\}_{k\in Nt}$ (δ_{jk} is het Kroneckersymbool) ($j \in Nt$), dan is $Q := \{q_j\}_j$ een totaal orthonormaalsysteem in ℓ^2 en ieder element $f \in \ell^2$ kan geschreven worden als $f = \sum_{j=1}^{\infty} \cdot \gamma_j q_j$.

Nu definiëren we de operator T door

$$T\left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j q_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \gamma_j q_j$$

zodat

$$(Tf,f) = (\Sigma_j 2^{-j} \gamma_j q_j, \Sigma_k \gamma_k q_k) = \Sigma_j 2^{-j} |\gamma_j|^2 \leq \tfrac{1}{2} \Sigma_j |\gamma_j|^2$$

en voor $f \neq \sigma$ is

$$0 \leq \frac{(Tf,f)}{(f,f)} \leq \tfrac{1}{2} .$$

Omdat $(Tq_j, q_j) = 2^{-j}$ ($j \in Nt$) is $m_T = 0$ en $M_T = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ is eigenwaarde, en de eigenruimte bij $\frac{1}{2}$ is $L(\{q_1\})$; 0 is geen eigenwaarde want $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \gamma_j q_j = \sigma$ impliceert wegens het totaal-zijn van Q dat $\forall_{j \in Nt}\ 2^{-j} \gamma_j = 0$ zodat $\forall_j\ \gamma_j = 0$.

5.1.7. <u>Stelling</u>: Zij T C-compact. Als $n \in Nt$, als $\{f_1,\dots,f_n\}$ een orthonormaalsysteem is van eigenvectoren van T bij de eigenwaarden $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ en als $\tilde{R} := R \ominus L(\{f_1,\dots,f_n\})$, dan is de restrictie $\tilde{T}$ van T tot $\tilde{R}$ een begrensde, compacte, hermitische operator van $\tilde{R}$ waarvoor geldt $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$, $m_T \leq m_{\tilde{T}} \leq M_{\tilde{T}} \leq M_T$ en $\sigma(T) \setminus \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subset \sigma(\tilde{T}) \subset \sigma(T)$.

<u>Bewijs</u>: Als $g \in \tilde{R}$ is $\forall_{j=1,\dots,n}\ (Tg,f_j) = (g,Tf_j) = \overline{\lambda}(g,f_j) = 0$ zodat ook $Tg \in \tilde{R}$; $\tilde{T}$ is een lineaire operator van $\tilde{R}$.

Dat $\tilde{T}$ begrensd en hermitisch is, is triviaal.

Zij $\{g_n\}_n$ een begrensde rij in $\tilde{R}$ dan bezit $\{Tg_n\}_n$ een in R convergente deelrij $\{Tg_n'\}_n$ die volgens het voorgaande in $\tilde{R}$ ligt; aangezien $\tilde{R}$ gesloten is (3.1.1) convergeert $\{Tg_n'\}_n$ in $\tilde{R}$; $\tilde{T}$ is compact (4.4.2).

Van de overige beweringen volgt alleen de volgende niet direct uit de definities: $\sigma(T) \setminus \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subset \sigma(\widetilde{T})$. Als evenwel $\mu \in \sigma(T) \setminus \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ en $Tg = \mu g$, is $\forall_j\ g \perp f_j$ (4.1.7) zodat $g \in \widetilde{R}$ en $\mu \in \sigma(\widetilde{T})$. □

5.1.8. Stelling: Zij T C-compact; dan bestaat er onder de eigenvectoren van T behorende bij eigenwaarden $\neq 0$ een maximaal orthonormaalsysteem $\{f_j\}_j$ dat eindig of aftelbaar is; indien de bijbehorende (op grond van 4.1.7 reële) eigenwaarden zijn $\{\lambda_j\}_j$ geldt

i: (indien $\{f_j\}_j$ aftelbaar is) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

ii: $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$;

iii: $\forall_{f \in R}\ Tf = \Sigma_j\ \lambda_j(f,f_j)f_j$.

(Hoofdstelling voor compacte, hermitische operatoren.)

Bewijs: Als T de nuloperator is, is $\sigma(T) = \{0\}$ en is de uitspraak triviaal. Stel dus $T \neq O$ zodat $\|T\| > 0$. Kies (5.1.2) λ_1 uit m_T en M_T zó dat $|\lambda_1| = \|T\|$ en pas 5.1.5 toe: er is een $f_1 \in R$ met $\|f_1\| = 1$ en $Tf_1 = \lambda_1 f_1$.
Zij $R_1 := R \ominus L(\{f_1\})$ en T_1 de restrictie van T tot R_1; volgens de vorige stelling is T_1 een compacte begrensde hermitische operator van R_1; als $T_1 \neq O$ zijn er een λ_2 onder m_{T_1} en M_{T_1} zó dat $|\lambda_2| = \|T_1\|$ en een $f_2 \in R_1$ met $\|f_2\| = 1$ en $Tf_2 = T_1 f_2 = \lambda_2 f_2$. Als nu $R_2 := R \ominus L(\{f_1,f_2\})$, T_2 de restrictie is van T tot R_2 en $T_2 \neq O$ kan men weer een λ_3 en een $f_3 \in R_3$ vinden zó dat $|\lambda_3| = \|T_2\|$, $\|f_3\| = 1$ en $Tf_3 = \lambda_3 f_3$; enzovoort.
Bij deze constructie doen zich blijkbaar twee mogelijkheden voor:

(a): $\forall_{j \in Nt}\ T_j \neq O$,

$\neg$(a): $\exists_{n \in Nt}\ [\forall_{j=1,\dots,n}\ T_j \neq O\ \&\ T_{n+1} = O]$.

In het eerste geval ontstaat een orthonormale rij $\{f_j\}_{j \in Nt}$ van eigenvectoren bij eigenwaarden $\{\lambda_j\}_j$ waarvoor, wegens $\forall_{j>1}\ |\lambda_j| = \|T_{j-1}\|$ en stelling 5.1.7 (achtereenvolgens op iedere R_j toegepast) geldt

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \;\dots .$$

Aangezien $\{f_j\}_j$ begrensd en T compact is, bevat $\{Tf_j\}_j$ een convergente deelrij $\{Tf_j'\}_j$, zodat $\{\lambda_j' f_j'\}_j$ een fundamentaalrij is:

$$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{N \in \mathrm{Nt}}\ \forall_{m > N}\ \forall_{n > N}\ \|\lambda_m' f_m' - \lambda_n' f_n'\| < \varepsilon$$

en omdat $\forall_m \forall_n\ f_m \perp f_n$ volgt hieruit

$$\forall_{m > N}\ \forall_{n > N}\ |\lambda_m'|^2 + |\lambda_n'|^2 < \varepsilon^2$$

en $\qquad \forall_{n > N}\ |\lambda_n'| < \varepsilon$.

Omdat nu $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n' = 0$ en $\{|\lambda_n|\}_n$ monotoon is volgt hieruit

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0 .$$

Dat iedere eigenwaarde $\mu \neq 0$ van T in de gevonden verzameling $\{\lambda_j\}_j$ ligt volgt uit het feit dat iedere λ_j de (in absolute waarde) grootste eigenwaarde van T_{j-1} is, zodat, in geval $\neg$(a), het constructieproces niet afbreekt vóór μ als een λ_j is verkregen, en, in geval (a), wegens $|\lambda_n| \downarrow 0$,

$$\exists_{k \in \mathrm{Nt}}\ \exists_{\ell > k}\ |\lambda_{k-1}| > |\lambda_k| = |\lambda_{k+1}| = \dots = |\lambda_{\ell-1}| \geq |\mu| > |\lambda_\ell|$$

en μ moet voorkomen onder $\lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{\ell-1}$; dus $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$.

Als $f \in R$ zij $g_k := f - \sum\limits_{j=1}^{k} (f,f_j)f_j \quad (k \in \mathrm{Nt})$, zodat $g_k \in R_k$ en

$$\|Tg_k\| = \|T_k g_k\| \leq \|T_k\|\|g_k\| \leq |\lambda_{k+1}|\,\|f\| .$$

In geval $\neg$(a) (met de $n \in \mathrm{Nt}$ waarvoor het constructieproces afbreekt) $\|Tg_{n+1}\| = 0$, zodat $Tf = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \lambda_j (f,f_j)f_j$. In geval (a) is $\lim\limits_{n\to\infty} Tg_k = o$ zodat $Tf = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f,f_j)f_j$.

Dit impliceert wegens $\forall_j\ f_j = \frac{1}{\lambda_j} Tf_j \in T(R)$ dat $\{f_j\}_j$ in de IP-ruimte $T(R)$ totaal, en ingevolge 2.1.18 maximaal is. $\square$

In het nu volgende deel van deze paragraaf worden met $\{f_j\}_j$ en $\{\lambda_j\}_j$ de in 5.1.8 geconstrueerde stelsels eigenvectoren bij eigenwaarden $\neq 0$ bedoeld.

5.1.9. Stelling: Zij T C-compact. Dan is

$$E_0 = R \ominus L(\{f_j\}_j) = R \ominus \overline{L(\{f_j\})}$$

en $$L(\{f_j\}_j) \subset T(R) \subset \overline{L(\{f_j\}_j)}$$

zodat ook $E_0 = R \ominus T(R)$.

Bewijs: De tweede uitspraak volgt direct uit het voorgaande; als $g \in E_0$ is volgens 4.1.7

$$\forall_j \ (g,f_j) = 0 \ ,$$

zodat ook $\forall_{h \in L(\{f_j\}_j)} \ (g,h) = 0$ of $g \in R \ominus L(\{f_j\}_j)$ en volgens de continuïteit van het inproduct

$$\forall_{h \in \overline{L(\{f_j\}_j)}} \ (g,h) = 0 \quad \text{of} \quad g \in R \ominus \overline{L(\{f_j\}_j)} \ ;$$

als anderzijds $h \in R \ominus L(\{f_j\}_j)$ dan geldt $\forall_j \ (h,f_j) = 0$ zodat $Th = \Sigma_j \ \lambda_j(h,f_j)f_j = \sigma$ en $h \in E_0$; dus

$$E_0 \subset R \ominus \overline{L(\{f_j\}_j)} \subset R \ominus L(\{f_j\}) \subset E_0 \ . \qquad \square$$

5.1.10. Opmerkingen: Indien zich geval $\neg$(a) voordoet, dus zeker indien dim $R < \infty$, is

$$L(\{f_j\}_j) = T(R) = \overline{L(\{f_j\}_j)}$$

zodat $T(R)$ gesloten en volledig is en uit 5.1.9, 3.1.2b en 3.1.2c geconcludeerd kan worden tot

$$R = E_0 \oplus T(R) \quad \text{en} \quad T(R) = R \ominus E_0 \ .$$

Maar in geval (a) behoeft $T(R)$ niet gesloten te zijn, zelfs niet in een SH-ruimte (zie vraagstuk 5.1.5) en dan kan $R = E_0 \oplus T(R)$ evenmin gelden.

5.1.11. <u>Stelling</u>: Als R een SH-ruimte is en T compact, dan is er een totaal orthonormaalsysteem van eigenvectoren.

<u>Bewijs</u>: Vul $\{f_j\}_j$ volgens 2.2.3 aan met een orthonormaalsysteem $\{g_k\}_k$ tot een totaal orthonormaalsysteem van R; volgens 5.1.9 is dan $\{g_k\}_k \subset E_0$. □

5.1.12. <u>Stelling</u>: Zij R een SH-ruimte, $\{g_j\}_j$ een (eindig of aftelbaar, niet noodzakelijk totaal) orthonormaalsysteem in R, $\{\mu_j\}_j$ een (indien aftelbaar dan begrensde) verzameling in Cm; dan wordt door

$$Tf := \Sigma_j\ \mu_j(f,g_j)g_j \qquad (f \in R)$$

een lineaire operator T van R gedefinieerd waarvoor geldt $\|T\| = \sup_j|\mu_j|$, en

i: als $\forall_j\ \mu_j \in R\ell$ dan is T hermitisch;

ii: als $\lim_{j\to\infty} \mu_j = 0$ dan is T compact;

iii: $\Sigma_j\ |\mu_j|^2 < \infty$ dan en slechts dan als T eindige dubbelnorm heeft.

<u>Bewijs</u>: $\Sigma_j\ |\mu_j|^2|(f,g_j)|^2 \leq \|f\|^2 \sup_j|\mu_j|^2$ dus $Tf \in R$; T is duidelijk lineair; ook is $\|T\| \leq (\sup_j|\mu_j|^2)^{\frac{1}{2}} = \sup_j|\mu_j|$.

i:
$$\begin{aligned}(Tf,h) &= (\Sigma_j\ \mu_j(f,g_j)g_j,h) = \Sigma_j\ \mu_j(f,g_j)(g_j,h) = \\ &= \overline{\Sigma_j\ \mu_j(h,g_j)(g_j,f)} = \overline{(\Sigma_j\ \mu_j(h,g_j)g_j,f)} = \\ &= \overline{(Th,f)} = (f,Th)\ .\end{aligned}$$

ii: Zij T_n gedefinieerd door $T_n f := \sum_{j=1}^{n} \mu_j(f,g_j)g_j$ $(n \in Nt;\ f \in R)$, dan is $T_n(R) \subset L(\{g_j\}_{j=1,\dots,n})$ zodat $\dim T_n(R) < \infty$; met $\ell_n := \sup\{|\mu_j|\ |\ j > n\}$, waardoor $\lim_{n\to\infty} \ell_n = 0$, geldt

$$\|(T-T_n)f\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_j(f,g_j)g_j\|^2 \leq \ell_n^2\ \|f\|^2$$

zodat $\quad \|T-T_n\| \leq \ell_n \quad$ en $\quad T = \lim_{n\to\infty} T_n$;

T is compact volgens 4.4.7 en 4.4.11.

iii: Vul $\{g_j\}_j$ aan tot een totaal orthonormaalsysteem van eigenvectoren met $\{h_k\}_k$;

$$\forall_k \; Th_k = \Sigma_j \; \mu_j(h_k,g_j)g_j = \sigma$$

en
$$\Sigma_j \; \|Tg_j\|^2 + \Sigma_k \; \|Th_k\|^2 = \Sigma_j \; \|Tg_j\|^2 = \Sigma_j \; |\mu_j|^2 \; . \qquad \square$$

Een lineaire operator T van een IP-ruimte heet positief definiet, respectievelijk niet-negatief definiet indien

$$\forall_{f\neq\sigma} \; (Tf,f) > 0 \; , \text{ respectievelijk} \geq 0 \, .$$

5.1.13. Stelling: Voor de C-compacte operator T (zie 5.1.8) geldt: T is dan en slechts dan niet-negatief definiet als $\forall_j \; \lambda_j \geq 0$.

Bewijs: De voorwaarde is voldoende omdat uit $Tf = \Sigma_j \; \lambda_j(f,f_j)f_j$ volgt $(Tf,f) = \Sigma_j \; \lambda_j|(f,f_j)|^2$; als $\exists_j \; \lambda_j < 0$ is $(Tf_j,f_j) = \lambda_j\|f_j\|^2 < 0$, dus is de voorwaarde ook nodig. $\square$

5.1.14. Stelling: Zij R een SH-ruimte en T compact; dan is T dan en slechts dan positief definiet als $\{f_j\}_j$ totaal is en $\forall_j \; \lambda_j > 0$.

Bewijs: Uit $\forall_{f\neq\sigma} \; (Tf,f) > 0$ volgt $\forall_j \; \lambda_j(f_j,f_j) > 0$ en $\forall_j \; \lambda_j > 0$, en ook $\{\sigma\} = E_0 = R \ominus L(\{f_j\}_j)$; een op grond van 2.2.3 mogelijke aanvulling van $\{f_j\}_j$ tot totaal orthonormaalsysteem moet dus in $\{f_j\}_j$ bevat zijn, zodat $\{f_j\}_j$ totaal is; de voorwaarde is nodig. Omgekeerd, uit $\{f_j\}_j$ totaal en $\forall_j \; \lambda_j > 0$ volgt in verband met 2.1.17.iv en 5.1.8

$$(Tf,f) = \Sigma_j \; \lambda_j(f,f_j)\overline{(f,f_j)} = \Sigma_j \; \lambda_j|(f,f_j)|^2$$

zodat voor $f \neq \sigma$, waarvoor $\exists_j \; (f,f_j) \neq 0$, geldt

$$(Tf,f) > 0 \, . \qquad \square$$

5.2. <u>De vergelijking van Fredholm bij compacte hermitische operator</u>.

Zij R een IP-ruimte, T een C-compacte hermitische operator van R: zij $g \in R$ en $\mu \in Cm$. Bestaat er een $f \in R$ zó dat

$$f - \mu Tf = g \quad ?$$

(vergelijking van Fredholm van de tweede soort).

5.2.1. <u>Stelling</u>: Als $\mu^{-1} \notin \sigma(T)$ is de vergelijking van Fredholm eenduidig oplosbaar.

<u>Bewijs</u>: We passen 5.1.8 toe; zij $\{f_j\}_j$ het in 5.1.8 geconstrueerde orthonormaalsysteem van eigenvectoren, met eigenwaarden $\{\lambda_j\}_j$. Voor een oplossing f van de vergelijking is

$$\forall_j \ (f - \mu Tf, f_j) = (g, f_j)$$

waaruit na herleiden ontstaat

$$\forall_j \ (f, f_j) = \frac{(g, f_j)}{1 - \mu\lambda_j}$$

omdat $\forall_j \ \mu\lambda_j \neq 1$; nu is volgens 5.1.8

$$Tf = \Sigma_j \ \lambda_j \frac{(g, f_j)}{1 - \mu\lambda_j} f_j$$

en hieruit volgt direct de eenduidigheid van de oplossing: voor een tweede oplossing f^* zou immers $Tf^* = Tf$ moeten gelden, en de vergelijking van Fredholm leert dat dan

$$f = g + \mu Tf = g + \mu Tf^* = f^* .$$

Dus als f een oplossing is, is ze de enige, en dan is

$$f = g + \mu \ \Sigma_j \lambda_j \alpha_j f_j \ , \quad \text{met} \quad \alpha_j = \frac{(g, f_j)}{1 - \mu\lambda_j}.$$

We beginnen vervolgens van de andere kant, en veronderstellen niet meer dat f een oplossing is. Volgens (2.1.14) is $\Sigma_j |(g,f_j)|^2$ convergent; daar $1 - \mu\lambda_j \to 1$ en $1 - \mu\lambda_j \neq 0$ voor alle j, zijn ook $\Sigma_j |\alpha_j|^2$ en $\Sigma_j |\lambda_j\alpha_j|^2$ convergent. Stellen we $h_N = \Sigma_{j=1}^N \alpha_j f_j$, dan $Th_N = \Sigma_{j=1}^N \lambda_j\alpha_j f_j$, en zowel $\{h_N\}_N$ als $\{Th_N\}_N$ zijn fundamentaalrijen (vgl. bewijs van 2.1.19). Daar $\{h_N\}_N$ fundamentaalrij is, is het een begrensde rij; daar T C-compact is, heeft $\{Th_N\}_N$ een convergente deelrij. Men ziet gemakkelijk in dat een fundamentaalrij die een convergente deelrij bevat zèlf convergent is.
Er is dus ook een $f \in R$ met $g + \mu Th_N \to f$. Voor elke j is

$$(f,f_j) = \lim_{N\to\infty} (g + \mu Th_N, f_j) = (g,f_j) + \mu\lambda_j\alpha_j = \alpha_j \ .$$

Volgens (5.1.8) is nu $Tf = \Sigma_j\lambda_j\alpha_j f_j$. Maar $g + \mu Th_N \to f$ betekent dat $f = g + \mu\Sigma_j\lambda_j\alpha_j f_j$, zodat $f - \mu Tf = g$. □

5.2.2. <u>Stelling</u>: Als $\mu^{-1} \in \sigma(T)$ en $M := \{j \in Nt \mid \lambda_j = \mu^{-1}\}$, dan geldt dat de vergelijking

$$f - \mu Tf = g$$

dan en slechts dan oplosbaar is als $\forall_{j\in M}\ (g,f_j) = 0$.

<u>Bewijs</u>: In het bewijs geven we de sommatie $\Sigma_{j,\, j\notin M}$ aan met Σ'_j.

De voorwaarde is nodig: als f een oplossing is, zodat $f - \mu Tf = g$ geldt voor alle $i \in M$

$$(g,f_i) = (f,f_i) - \mu(Tf,f_i) = (f,f_i) - \mu\ \Sigma_j\ \lambda_j(f,f_j)(f_j,f_i) =$$

$$= (f,f_i) - \mu\lambda_i(f,f_i) = 0\ .$$

Zij nu omgekeerd $\forall_{i\in M}\ (g,f_i) = 0$.

Indien f een oplossing is, geldt het volgende:

i: Voor $h \in L(\{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}\}) = E_{\mu^{-1}}$ is ook $f+h$ een oplossing:

$$(f+h) - \mu T(f+h) = (f - \mu Tf) + (h - \mu Th) = g + o\ .$$

De oplossing is dus niet eenduidig.

ii: $\forall_{j \notin M}\ (f, f_j) = \dfrac{(g, f_j)}{1 - \mu\lambda_j}$, analoog aan het bewijs van 5.2.1, en

$$Tf = \Sigma_j' \frac{\lambda_j (g, f_j) f_j}{1 - \mu\lambda_j} + \Sigma_{j \in M}\ \mu^{-1} (f, f_j) f_j$$

zodat

$$f \in g + \mu \Sigma_j' \frac{\lambda_j (g, f_j) f_j}{1 - \mu\lambda_j} + E_{\mu^{-1}}\ .$$

In verband met de onder i) gemaakte opmerking is het voldoende om nog te bewijzen dat $g + \mu\ \Sigma_j' \dfrac{\lambda_j (g, f_j) f_j}{1 - \mu\lambda_j}$ aan de vergelijking voldoet; dit verloopt geheel analoog aan het overeenkomstige deel van bewijs 5.2.1. □

5.3. Integraaloperatoren

Zij $R := C([0,1])$ en zij $R' := C([0,1] \times [0,1])$. In R is als inproduct gedefinieerd:

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt\ ,$$

in R' wordt als inproduct gedefinieerd:

$$(K, L) := \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)\overline{L(x,y)}\,dx\,dy\ , \qquad (K \in R',\ L \in R')\ .$$

R en R' zijn dan (niet volledige) IP-ruimten (vergelijk 1.9.2), waar we naast de IP-normen nog beschikken over de maximumnormen; de maximumnorm in R' wordt gedefinieerd als

$$\|K\|_\infty := \max\{|K(x,y)|\ \mid\ x \in [0,1],\ y \in [0,1]\}\ , \quad (K \in R')\ .$$

Voor iedere $K \in R'$ wordt een operator T (of, indien misverstand kan rijzen, T_K) gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \qquad (x \in [0,1],\ f \in R)$$

want $Tf \in R$ en T is lineair: $T \in LO(R)$.

Men noemt T een <u>integraaloperator</u> van R. K heet de <u>kern</u> van T.

5.3.1. <u>Stelling</u>: T is begrensd en $\|T\| \leq \|K\| \leq \|K\|_\infty$.

<u>Bewijs</u>: Volgens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz is

$$\|Tf\|^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy\right)\left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy\right) dx$$

$$= \|f\|^2 \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 \,dx\,dy = \|f\|^2 \|K\|^2$$

zodat $\|T\| \leq \|K\|$; dat $\|K\| \leq \|K\|_\infty$ blijkt op dezelfde wijze als in R, zie 1.9.3. □

5.3.2. <u>Stelling</u>: Voor alle $f \in R$ is

$$\|Tf\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|f\| \ .$$

<u>Bewijs</u>: $$|(Tf)(x)| = \left| \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \right| \leq \|K\|_\infty \int_0^1 |f(y)|dy \ .$$

Nu is, weer met de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 |f(y)|\,dy = \int_0^1 |f(y)\cdot 1|\,dy \leq \left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 1^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|$$

zodat $\quad \forall_{x \in [0,1]} \ |(Tf)(x)| \leq \|K\|_\infty \|f\|$

en ook

$$\|Tf\|_\infty \le \|K\|_\infty \|f\| \ .$$

□

5.3.3. <u>Stelling</u>: T is limiet van een rij C-compacte operatoren, d.w.z. er bestaan C-compacte operatoren $T_1, T_2, \ldots$ met $\|T - T_n\| \to 0$.

<u>Bewijs</u>: Voor iedere $n \in \mathbb{N}$t zij $K_n \in Cm^{[0,1]\times[0,1]}$ gedefinieerd door

$$K_n(x,y) := n(\tfrac{j}{n} - x)\, K(\tfrac{j-1}{n}, y) + n(x - \tfrac{j-1}{n})\, K(\tfrac{j}{n}, y) \ ,$$

$$\frac{j-1}{n} \le x \le \frac{j}{n}, \quad 0 \le y \le 1; \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat $K_n \in R'$ en dat voor

$$\eta_n := \|K - K_n\|_\infty$$

op grond van de uniforme continuïteit van K op $[0,1]\times[0,1]$geldt

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0 \ .$$

Voor de bij K_n behorende integraaloperator T_n geldt volgens 5.3.1

$$\|T - T_n\| \le \|K - K_n\|_\infty = \eta_n \ ,$$

zodat

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n \ .$$

Tenslotte tonen we aan dat T_n van eindige rang is; daartoe beschouwen we $K_n(x,y)$ als een lineaire combinatie van een stelsel functies $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\} \subset R$ dat wordt gedefinieerd als volgt:

Zij $k = 0,1,2,\dots,n$ en $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Als $x \leqslant \frac{k-1}{n}$ is $g_k(x) := 0$,

als $\frac{k-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k}{n}$ is $g_k(x) := nx - k + 1$,

als $\frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n}$ is $g_k(x) := k + 1 - nx$,

als $x \geqslant \frac{k+1}{n}$ is $g_k(x) := 0$.

Men verifieert gemakkelijk dat $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} K(\frac{k}{n}, y) g_k(x)$ zodat

$$(T_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \int_0^1 K(\tfrac{k}{n}, y) f(y)\,dy$$

hetgeen inhoudt dat $T_n(R) \subset L(\{g_0, g_1, \dots, g_n\})$ en T_n is van eindige rang. Volgens 4.4.11 is T_n compact. □

5.3.4. Stelling: T is C-compact in de zin van de norm $\| \;\|$.

Bewijs: Zij $\{f_j\}_{j \in Nt}$ een rij in R waarvoor $\forall_j \; \|f_j\| = 1$. We gebruiken dezelfde K_n, η_n en T_n als in het vorige bewijs. Voor $\|T_n f_j\|$ geldt volgens 5.3.2 en de definitie van η_n

$$\|T_n f_j\|_\infty \leqslant \|K_n\|_\infty \leqslant \|K\|_\infty + \sup\{\eta_n \mid n \in Nt\} ,$$

zodat voor alle $n \in Nt$ de rij $\{T_n f_j\}_j$ een in de norm $\| \;\|_\infty$ begrensd deel van de eindig dimensionale deelruimte $T_n(R)$ van R is; dus bevat $\{f_j\}_j$ een deelrij $\{f_j'\}_j$ zodat $\{T_1 f_j'\}_j$ in $\| \;\|_\infty$ een fundamentaalrij is; $\{f_j'\}_j$ bevat een deelrij $\{f_j''\}_j$ zodat ook $\{T_2 f_j''\}_j$ in $\| \;\|_\infty$ een fundamentaalrij is; enzovoorts. Beschouw nu de diagonaalrij $\{f_j^{(j)}\}_j$; we laten zien dat $\{Tf_j^{(j)}\}_j$ in $\| \;\|_\infty$ een fundamentaalrij is:

$$\|Tf_i^{(i)} - Tf_j^{(j)}\|_\infty \leqslant \|Tf_i^{(i)} - T_n f_i^{(i)}\|_\infty + \|T_n f_i^{(i)} - T_n f_j^{(j)}\|_\infty + \|T_n f_j^{(j)} - Tf_j^{(j)}\|_\infty$$

voor alle $n \in Nt$; we passen nu stelling 5.3.2 toe op $T - T_n$, bedenken dat $\|K - K_n\|_\infty = \eta_n$ en krijgen

$$\|Tf_i^{(i)} - Tf_j^{(j)}\|_\infty \leq \eta_n\{\|f_i^{(i)}\| + \|f_j^{(j)}\|\} + \|T_n f_i^{(i)} - T_n f_j^{(j)}\|_\infty$$

$$= 2\eta_n + \|T_n f_i^{(i)} - T_n f_j^{(j)}\|_\infty .$$

Als $\varepsilon > 0$ bepalen we $N \in Nt$ zo dat $\eta_N < \frac{\varepsilon}{3}$ en vervolgens, daar $\{T_n f_j^{(j)}\}_j$ voor alle $n \in Nt$ in $\| \ \|_\infty$ een fundamentaalrij is, een $M \in Nt$ zo dat voor $i > M$ en $j > M$ geldt $\|T_N f_i^{(i)} - T_N f_j^{(j)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dan is

$$\forall_{i>M}\ \forall_{j>M}\ \|Tf_i^{(i)} - Tf_j^{(j)}\|_\infty < \varepsilon ,$$

dus $\{Tf_j^{(j)}\}_j$ is een fundamentaalrij in $\| \ \|_\infty$; nu is R met de norm $\| \ \|_\infty$ een volledige ruimte, zodat er een $h \in R$ met $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tf_n^{(n)} - h\|_\infty = 0$; volgens stelling 1.9.3 is dan ook $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tf_n^{(n)} - h\| = 0$.
T is dus compact. □

5.3.5. <u>Stelling</u>: De integraaloperator T van R heeft een geadjungeerde T*.

<u>Bewijs</u>: Zij $K^*(x,y) := \overline{K(y,x)}$ en

$$(T^*f)(x) := \int_0^1 K^*(x,y)f(y)dy ,$$

dan is

$$(f,T^*g) = \int_0^1 f(t) \overline{\int_0^1 K^*(t,y)g(y)dy}\, dt =$$

$$= \int_0^1 f(t) \int_0^1 K(y,t)\overline{g(y)}dy\, dt =$$

$$= \int_0^1 \overline{g(y)} \int_0^1 K(y,t)f(t)dt\, dy = (Tf,g) .$$ □

5.3.6. <u>Opmerking</u>: Uit 5.3.5 volgt direct dat, als $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, T hermitisch is.

5.3.7. <u>Opmerking</u>: T heeft eindige dubbelnorm, en $|||T||| = \|K\|$; zie vraagstuk 4.3.5.

Als $K \in R'$ en $L \in R'$ definiëren we

$$(K * L)(x,y) := \int_0^1 K(x,t)L(t,y)dt \ , \qquad x \in [0,1],\ y \in [0,1] \ .$$

$K * L$ heet de <u>convolutie</u> van K en L.

5.3.8. <u>Stelling</u>: $K * L \in R'$ en $T_{K * L} = T_K T_L$.

5.3.9. <u>Stelling</u>: De operatoren $\{T_K\}_{K \in R'}$ vormen een niet-commutatieve genormeerde algebra zonder eenheidselement.

5.3.10. <u>Opmerking</u>: Onder een integraalvergelijking verstaat men een vergelijking van bijvoorbeeld een der volgende typen:

i: $T_K f = g$

ii: $f - \mu T_K f = g$

iii: $T_K f = \mu f$

met gegeven μ en g en een bij een gegeven $K \in R'$ horende integraaloperator T_K.

De resultaten van dit hoofdstuk leveren dus een theorie van integraalvergelijkingen van type ii. en iii. op, ingeval T_K een hermitische integraaloperator is.

6. Invariante punten

Onder een invariant punt of vast punt ("fixed point") van een afbeelding T van een ruimte R in R verstaat met het element $f \in R$ indien daarvoor geldt $Tf = f$.

Een afbeelding T van een metrische ruimte R in R heet contractie van R indien er een α bestaat met $0 \le \alpha < 1$ en

$$\forall_{f\in R} \forall_{g\in R}\ d(Tf,Tg) \le \alpha d(f,g) .$$

Een dergelijke α heet een contractieconstante van T.

6.1. Contracties en vaste punten

6.1.1. Stelling: Zij R een niet-lege volledige metrische ruimte, T een contractie van R; dan is er in R precies één vast punt van T.
("fixed point" stelling van Banach).

Bewijs: Er is niet meer dan een vast punt:
Als $Tf = f$ en $Tg = g$ is, wegens $d(f,g) = d(Tf,Tg) \le \alpha d(f,g)$, $d(f,g) = 0$.
Aangezien $R \neq \emptyset$ is er een element $g \in R$; de rij $\{T^j g\}_{j\in Nt}$ is, wegens

$$d(T^n g, T^{n+p} g) \le \sum_{j=1}^{p} d(T^{n+j-1} g, T^{n+j} g) \le \sum_{j=1}^{p} \alpha^{n+j-1} d(g,Tg) \le$$

$$\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(g,Tg) \text{ voor alle } n \in Nt \text{ en alle } p \in Nt,$$

een fundamentaalrij: zij $f := \lim_{n\to\infty} T^n g$.
Daar $T^n g \to f$ is

$$d(T^n g,f) \to 0, \quad d(T^{n+1} g,f) \to 0 .$$

Verder is

$$d(T^{n+1} g,Tf) \le \alpha d(T^n g,f) \to 0 ,$$

dus ook $d(T^{n+1} g,Tf) \to 0$. Derhalve is $d(Tf,f) = 0$, dus $Tf = f$. $\square$

6.1.2. Stelling: Zij T een contractie van de B-ruimte R (T hoeft niet lineair te zijn). Dan geldt:

i) Bij iedere $g \in R$ is er precies één element $f \in R$ zó dat $(I - T)f = g$.

ii) Zij $Sg := f$ $(g \in R)$ dan heeft de afbeelding $S : R \to R$ de eigenschap $S(I - T) = (I - T)S = I$.

iii) Als α een contractieconstante van T is, geldt: voor alle $\lambda \in$ Cm met $|\lambda| < 1 - \alpha$ is S een contractie van R.

Bewijs:

i) Kies $g \in R$ en definieer de afbeelding K van R in R door $K_g f := g + Tf$. Wegens $\|K_g f - K_g h\| = \|Tf - Th\| \le \alpha\|f - h\|$ is K_g een contractie, zodat op grond van 6.1.1 er één f is met $K_g f = f$. Voor die f is $g = f - Tf = (I - T)f$.

ii) Het in i) bewezene drukt uit dat de afbeelding $I - T$ een bijectie is van R op R. Dan heeft ze een inverse, S, eveneens een bijectie van R in R, en daarvoor geldt $S(I - T) = (I - T)S = I$.

iii) Zij $|\lambda| < 1 - \alpha$, $f_1 \in R$ en $f_2 \in R$, $g_1 := (I - T)f_1$, $g_2 := (I - T)f_2$; dan is

$$f_1 - f_2 = g_1 - g_2 + Tf_1 - Tf_2 ,$$

$$\|f_1 - f_2\| \le \|g_1 - g_2\| + \alpha\|f_1 - f_2\|$$

$$(1 - \alpha)\|f_1 - f_2\| \le \|g_1 - g_2\|$$

$$(1 - \alpha)\|Sg_1 - Sg_2\| \le \|g_1 - g_2\|$$

zodat

$$\|\lambda Sg_1 - \lambda Sg_2\| \le \frac{|\lambda|}{1 - \alpha}\|g_1 - g_2\| . \qquad \square$$

6.1.3. Stelling: Zij T een begrensde lineaire operator van de B-ruimte R, en zij $\|T\| < 1$; dan geldt:

i) De vergelijking $(I - T)f = g$ is eenduidig oplosbaar voor alle $g \in B$.

ii) Er is een begrensde lineaire operator S van R zó dat

$$(I - T)S = S(I - T) = I \quad \text{en} \quad \|S\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} .$$

iii) $$\forall_{f \in B}\ Sf = f + \sum_{j=1}^{\infty} T^j f .$$

(Stelling van Carl Neumann.)

<u>Bewijs</u>: Aangezien T wegens $\|Tf - Th\| \leq \|T\|\|f - h\|$ een contractie is, heeft I - T volgens 6.1.2 een inverse S; de inverse van een lineaire operator is lineair; definieer nu bij vaste $g \in R$

$$K_g f := Tf + g ,$$

dan is K_g, wegens $\|K_g f - K_g h\| = \|Tf - Th\|$, een (niet-lineaire) contractie, waarvan het (eenduidig bepaalde) vaste punt Sg is, omdat

$$K_g Sg = TSg + g = (S - I)g + g = Sg .$$

Nu is, zoals in het bewijs van 6.1.1 is aangetoond,

$$Sg = \lim_{n\to\infty} K_g^n h$$

voor iedere $h \in R$, dus ook

$$Sg = \lim_{n\to\infty} K_g^n g .$$

Wegens $K_g^n g = g + \sum_{j=1}^{n} T^j g$ (zoals gemakkelijk met volledige inductie is te bewijzen) is dus

$$\forall_{g \in R}\ Sg = g + \sum_{j=1}^{\infty} T^j g .$$

Tenslotte:

$$\|Sg\| \leq \|g\| + \sum_{j=1}^{\infty} \|T\|^j \|g\| = \frac{\|g\|}{1 - \|T\|} . \qquad \square$$

6.1.4. Stelling: Zij R een B-ruimte; $U,V,K \in BLO(R)$; $UV = VU = I$; $\|K\| < \|V\|^{-1}$.
Dan is er een $W \in BLO(R)$ met $W(U - K) = (U - K)W = I$.

Bewijs: Zij $T := VK$, zodat $\|T\| \leq \|V\|\|K\| < 1$.
Volgens 6.1.3 heeft $I - T$ een inverse S zodat

$$(I - VK)S = I$$

en

$$(U - UVK)S = U$$

of

$$(U - K)S = U$$

en

$$(U - K)SV = I .$$

Neem $W := SV$, dan is $(U - K)W = I$, en ook

$$W(U - K) = SV(U - K) = S(I - VK) = S(I - T) = I . \qquad \square$$

6.2. De integraalvergelijking van Volterra

Zijn R en R' als in §5.3; zij $K \in R'$. R en R' zijn, met als norm $\| \ \|_\infty$, B-ruimten.

Onder de (bij K behorende) Volterra-operator van R verstaan we de integraaloperator V (of, indien misverstand kan rijzen, V_K) gedefinieerd door

$$(Vf)(x) := \int_0^x K(x,y)f(y)dy \qquad (f \in R,\ x \in [0,1]) .$$

De integraalvergelijking van Volterra luidt

$$f = \mu Vf + g$$

met een gegeven $\mu \in Cm$, $g \in R$ en Volterra-operator V.

6.2.1. <u>Stelling</u>: Als $|\mu| < \|V\|^{-1}$ is de Volterra-vergelijking eenduidig oplosbaar.

<u>Bewijs</u>: Omdat $\|\mu V\| = |\mu|\|V\| < 1$ voldoet μV aan de voorwaarden van 6.1.3; $I - \mu V$ heeft een inverse S en

$$f = Sg = g + \sum_{j=1}^{\infty} (\mu V)^j g \,. \qquad \square$$

We zullen laten zien dat de in 6.2.1 gevonden oplossing ook voldoet voor alle $\mu \in \mathbb{C}$m. Daartoe is het voldoende om aan te tonen dat ook dan $\sum_{j=1}^{\infty} (\mu V)^j g$ convergeert in R, omdat dan

$$(\mu V)(g + \sum_{j=1}^{\infty} (\mu V)^j g) + g = g + (\mu V)g + \sum_{j=2}^{\infty} (\mu V)^j g = g + \sum_{j=1}^{\infty} (\mu V)^j g \,.$$

Bij iedere K in R' definiëren we een functie $\bar{K} : [0,1]\times[0,1] \to$ Cm door

$$\bar{K}(x,y) := K(x,y) \quad \text{als} \quad 0 \le y \le x \le 1$$
$$\bar{K}(x,y) := 0 \quad \text{als} \quad 0 \le x < y \le 1 \,.$$

Aangezien $\bar{K}$ in het algemeen op de rechte $\{y = x\}$ niet continu is, geldt niet noodzakelijk $\bar{K} \in R'$; zij $\bar{R}' := \{\bar{K}\}_{K\in R'}$. Voor iedere $\bar{K} \in \bar{R}$ definieren we nog een $\tilde{K} \in \bar{R}'$ door

$$\tilde{K}(x,y) := \|\bar{K}\|_{\infty} \quad \text{als} \quad 0 \le y \le x \le 1$$
$$\tilde{K}(x,y) := 0 \quad \text{als} \quad 0 \le x < y \le 1 \,,$$

zodat voor alle $x \in [0,1]$ en $y \in [0,1]$ geldt $|\bar{K}(x,y)| \le \tilde{K}(x,y)$.

Het is niet moeilijk om in te zien dat, als $K \in R'$,

$$(V_K f)(x) = \int_0^1 \bar{K}(x,y) f(y)\,dy \,.$$

6.2.2. Stelling: Voor ieder tweetal $K \in R'$ en $L \in R'$ is

i: $$\overline{K} * \overline{L}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y \geq x \\ \int_y^x K(x,t)L(t,y)dt & \text{als } y \leq x \end{cases}$$

zodat $\overline{K} * \overline{L} \in R' \cap \overline{R}'$.

ii: $$|\overline{K} * \overline{L}(x,y)| \leq (\widetilde{K} * \widetilde{L})(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y \geq x \\ \|\overline{K}\|_\infty \|\overline{L}\|_\infty (x-y) & \text{als } y \leq x\,. \end{cases}$$

Bewijs: Door verificatie. □

We voeren de notatie $K^{(n)}$ in voor de convolutie van n factoren K, door volledige inductie gedefinieerd als

$$K^{(n)}(x,y) := \int_0^1 K^{(n-1)}(x,t)K(t,y)dt\ , \quad (n \geq 2)\,.$$

De schrijfwijze is ondubbelzinnig, omdat de convolutie een associatieve bewerking is (dit is een onderdeel van de bewering in 5.3.9).

Uit 6.2.2 volgt dan

6.2.3. Stelling: Als $K \in R$, geldt voor alle $n \geq 2$:

$$\overline{K}^{(n)} \in R' \cap \overline{R}' \quad \text{en} \quad |\overline{K}^{(n)}(x,y)| \leq \widetilde{K}^{(n)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y \geq x \\ \dfrac{\|\overline{K}\|_\infty^n (x-y)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{als } y \leq x \end{cases}$$

Bewijs: Door volledige inductie naar n. □

Tenslotte blijkt dan

6.2.4. Stelling: De in 6.2.1 genoemde reeks convergeert voor alle $\mu \in Cm$.

Bewijs: Op grond van 5.3.8 geldt

$$V_K^j g = V_{\overline{K}^{(j)}} g$$

zodat $$|\mu^j V_K^{(j)} g(x)| = |\mu^j \int_0^1 \overline{K}^{(j)}(x,y)g(y)dy| \leq \mu^j \frac{\|\overline{K}\|_\infty^j (x-y)^{j-1}}{(j-1)!} \|g\| \leq$$

$$\leq \frac{\mu^j \|\overline{K}\|_\infty^j \|g\|}{(j-1)!}$$

zodat ook
$$\|\mu^j V_K^{(j)} g\| \leq \frac{\mu^j \|\overline{K}\|_\infty^j \|g\|}{(j-1)!}$$

en de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} (\mu V_K)^j g$ convergeert voor iedere $\mu \in \mathbb{C}$ □

6.3. Over de oplossingen van differentiaalvergelijkingen

6.3.1. Stelling: Zij $I := [0,\infty)$ of $I := [0,\gamma]$ met $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$; zij $F \in C(I \times \mathbb{R})$; F voldoet aan een Lipschitzconditie, namelijk

$$\exists_{p \in C(I)} \forall_{u \in I} \forall_{v \in \mathbb{R}} \forall_{w \in \mathbb{R}} \; |F(u,v) - F(u,w)| \leq p(u)|v-w| \; ;$$

dan geldt

i) (Existentiestelling voor differentiaalvergelijkingen) Bij iedere $a \in \mathbb{R}$ is precies één $\psi_a \in C(I)$ die voldoet aan de volgende voorwaarden

$\psi_a(0) = a$,

ψ_a is differentieerbaar op I,

$\psi_a'(x) = F(x,\psi_a(x))$;

ii) Als $I = [0,\gamma]$, dan geldt: ψ_a hangt (in de supremumnormtopologie van C(I)) continu af van a.

Bewijs: We kunnen het geval $I = [0,\infty)$ buiten beschouwing laten; wat erover beweerd wordt is direct uit het andere geval af te leiden. Indien ψ_a bestaat moet ze, volgens de hoofdstelling der integraalrekening en de eerste en derde boven genoemde voorwaarden ook voldoen aan

$$\psi_a(x) = a + \int_0^x \psi_a'(t)dt = a + \int_0^x F(t,\psi_a(t))dt \; .$$

Definieer de afbeelding T van C(I) in C(I) door

$$(T\psi)(x) := \int_0^x F(t,\psi(t))dt \qquad (\psi \in C(I),\ x \in I)\ ,$$

en definieer in C(I) een norm $\| \ \|_q$ met behulp van een nog geschikt te kiezen, positieve functie $q \in C(I)$ door

$$\|\psi\|_q = \sup\{\,|\psi(x)q(x)| \mid x \in I\}\ , \qquad (\psi \in C(I))\ .$$

We bepalen q zó dat T een contractie is:

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\|_q = \sup\{q(x)\left|\int_0^x (F(t,\varphi(t)) - F(t,\psi(t)))dt\right| \;\Big|\; x \in I\} \le$$

$$\le \sup\{q(x) \int_0^x p(t)|\varphi(t) - \psi(t)|dt \;\Big|\; x \in I\} =$$

$$= \sup\{q(x) \int_0^x \frac{p(t)}{q(t)} |q(t)\varphi(t) - q(t)\psi(t)|dt \;\Big|\; x \in I\} \le$$

$$\le \sup\{q(x)\|\varphi - \psi\|_q \int_0^x \frac{p(t)}{q(t)}\, dt \;\Big|\; x \in I\}\ .$$

Nu bepalen we q, en wel zó dat q continu is, en bovendien

$$\exists_{\alpha\in(0,1)}\ \forall_{x\in I}\ \left|q(x) \int_0^x \frac{p(t)}{q(t)}\, dt\right| < \alpha \qquad ;$$

als bijvoorbeeld

$$q(x) := \exp\{-2 \int_0^x p(t)dt\}$$

voldoet $\alpha = \frac{1}{2}$, wegens

$$\forall_{x\in I}\ q(x) \int_0^x \frac{p(t)}{q(t)}\,dt = \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2\int_0^x p(t)dt}\right) \le \tfrac{1}{2}\ .$$

Het paar $(C(I),\|\ \|_q)$ is een B-ruimte, T een contractie van C(I), en volgens 6.1.2 heeft I − T een inverse S zó dat λS voor alle $\lambda \in$ Cm met $|\lambda| < 1-\alpha$ een contractie is. Nu is er dus voor iedere $a \in R\ell$ bij de functie f_a, gedefinieerd door $\forall_{x\in I}\ f_a(x) := a$, een element $\psi_a = Sf_a$, of $f_a = (I - T)\psi_a$, en dat wil zeggen:

$$\forall_{x\in I}\ a + \int_0^x F(t,\psi_a(t))dt = \psi_a(x)\ ,$$

zodat ψ_a voldoet aan de in i) genoemde voorwaarden.
Bovendien is, met $|\lambda| < \frac{1}{2}$,

$$\|\psi_a - \psi_b\|_q = \|Sf_a - Sf_b\|_q = \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda Sf_a - \lambda Sf_b\|_q \le \frac{1}{|\lambda|}\|f_a - f_b\|_q =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\ |a - b|\sup\{q(x)\ |\ x \in I\}\ ,$$

terwijl $\|\psi_a - \psi_b\|_\infty \le (\inf\{q(x)\ |\ x \in I\})^{-1}\|\psi_a - \psi_b\|_q$

zodat ψ_a continu afhangt van a. □

6.3.2. <u>Opmerkingen</u>: De keuze van het interval $I = [0,\gamma]$ met $\gamma > 0$ is geen beperking der algemeenheid; voor ieder interval $[\beta,\gamma]$ in $R\ell$ geldt een analoge bewering met een analoog bewijs.

De stelling houdt dan in dat de differentiaalvergelijking

$$y' = F(x,y)$$

door ieder punt $(\beta,\alpha) \in [\beta,\gamma] \times R\ell$ één oplossing heeft.

De stelling is zonder veel moeite te generaliseren tot stelsels van differentiaalvergelijkingen en tot het geval van complexwaardige functies.

6.4. De hoofdstelling voor impliciet gegeven functies

We beschouwen functies F van twee variabelen x,y. De partiële afgeleide naar y wordt met F_2 aangeduid.

6.4.1. Stelling: Zij F in een omgeving van (0,0) een continue reëelwaardige functie waarvan de partiële afgeleide F_2 in (0,0) continu is. Ondersteld is dat $F(0,0) = 0$, $F_2(0,0) \neq 0$. Dan zijn er getallen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ zó dat:

i) Er is precies één afbeelding ψ van $[-\alpha,\alpha]$ in $[-\beta,\beta]$ zó dat

$$F(x,\psi(x)) = 0 \quad \text{op} \quad [-\alpha,\alpha] .$$

Deze ψ is continu op $[-\alpha,\alpha]$, en voldoet aan $\psi(0) = 0$.

ii) Er is precies één continue afbeelding ψ van $[-\alpha,\alpha]$ in $R\ell$ die zowel voldoet aan $F(x,\psi(x)) = 0$ op $[-\alpha,\alpha]$ als aan $\psi(0) = 0$.

Bewijs: We beperken de zaak niet wezenlijk door te onderstellen dat $F_2(0,0) = 1$. We voeren in $H(x,y) := y - F(x,y)$, zodat $H(0,0) = 0$, $H_2(0,0) = 0$.

We beperken $\beta > 0$ zó dat H en H_2 in $[-\beta,\beta] \times [-\beta,\beta]$ gedefinieerd en continu zijn, terwijl daar bovendien $|H_2(x,y)| < \frac{1}{2}$.
Verder beperken we α zó dat $0 < \alpha < \beta$, en zó dat

$$|H(x,0)| < \tfrac{1}{2}\beta . \quad (-\alpha \leq x \leq \alpha) .$$

Als nu $x \in [-\alpha,\alpha]$, $y \in [-\beta,\beta]$, $y_2 \in [-\beta,\beta]$, dan is volgens de middelwaardestelling

$$|H(x,y_1) - H(x,y_2)| \leq \tfrac{1}{2}|y_2 - y_1| . \tag{1}$$

Verder is voor $x \in [-\alpha,\alpha]$, $y \in [-\beta,\beta]$

$$|H(x,y)| = |H(x,y) - H(x,0)| + |H(x,0)| < \tfrac{1}{2}|y| + \tfrac{1}{2}\beta < \beta . \tag{2}$$

We beschouwen de ruimte B van alle reëelwaardige functies φ op $[-\alpha,\alpha]$ met

$$\sup_{-\alpha\leq x\leq\alpha} |\varphi(x)| \leq \beta .$$

Dit is geen genormeerde lineaire ruimte, maar niettemin wordt het met

$$d(\varphi_1,\varphi_2) = \sup_{-\alpha\le x\le\alpha} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

een volledige metrische ruimte. De afbeelding

$$\varphi \to \Psi_x\ H(x,\varphi(x)) \qquad (3)$$

is daarin een contractie blijkens (1) en (2).

Volgens stelling 6.1.1 is er nu precies één $\psi \in B$ met de eigenschap dat $\psi(x) = H(x,\psi(x))$ voor alle $x \in [-\alpha,\alpha]$.

Vervolgens beschouwen we de deelverzameling

$$B^* := \{\varphi \in B \mid \varphi \text{ continu op } [-\alpha,\alpha] \text{ en } \varphi(0) = 0\}$$

met dezelfde afstandsdefinitie. Deze B^* wordt door de afbeelding (3) in zichzelf getransformeerd. Dientengevolge bezit ook B^* een vast punt; daar B er slechts één bezat, en $B^* \subset B$ is, is dit vaste punt van B^* hetzelfde als dat van B. Hiermee is i) bewezen.

We bewijzen nu ii). Uit i) volgt dat er zo'n ψ bestaat. Als er nog een andere zou zijn dan de bij i) gevondene, zou die ergens een waarde $> \beta$ of $< -\beta$ aannemen. Volgens de tussenwaardestelling zou die dan ook ergens in $[-\alpha,\alpha]$ een waarde $\pm\beta$ aannemen. Met andere woorden, er zouden getallen x_1, y_1 zijn met

$$|x_1| \le \alpha,\ |y_1| = \beta,\ y_1 = H(x_1,y_1)\ .$$

Volgens (2) is dan echter $|H(x_1,y_1)| < \beta$, dus $H(x_1,y_1) \neq y_1$. Tegenspraak.

6.4.2. Opmerkingen:

1) Als F_1 en F_2 beide bestaan en continu zijn, is ψ ook differentieerbaar, en $\psi'(x) = -\dfrac{F_1(x,\psi(x))}{F_2(x,\psi(x))}$; zie vraagstuk 6.4.1.

2) Stelling 6.4.1 kan worden gegeneraliseerd tot het geval dat F een functie is van $R^m \times R^n$ in R^n: als F differentieerbaar is, als $F(\mathcal{O}_n,\mathcal{O}_n) = \mathcal{O}_n$ en als $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} (\mathcal{O}_m,\mathcal{O}_m) \neq 0$, is er, locaal, een afbeelding

$\psi = (\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)$ van R^m in R^n met

i) ψ is continu

ii) $\psi(\mathcal{O}_m) = \mathcal{O}_n$

iii) $F(x,\psi(x)) = 0$;

zie vraagstuk 6.4.2.

Literatuur

[AG] Achieser, N.I. en Glasmann, I.M., Theorie der Operatoren im Hilbert-Raum; (BK 5403).

[BN] Bachman, G. en Narici, L., Functional analysis; (BK 6608).

[B] Berberian, S.K., Introduction to Hilbert Space; (BK 6116).

[Br] Bruijn, N.G. de, syllabus Hilbertruimten; (BK 5916).

[DS] Dunford, N. en Schwartz, J.T., Linear operators, I en II; (BK 5809).

[E] Edwards, R.E., Functional analysis; (BK 6507).

[Ha] Halmos, P.R., A Hilbert Space Problem Book; (BK 6701).

[He] Helmberg, G., Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space; (BK 6901).

[KA] Kantorowitsch, L.W. en Akilow, G.P., Funktionalanalysis in normierten Räumen; (BK 6408).

[RN] Riesz, F. en Nagy, B.Sz., Leçons d'analyse fonctionelle; (BK 5306).

[S] Schmeidler, W., Lineare Operatoren im hilbertschen Raum; (BK 5404).

[T] Taylor, A.E., Introduction to functional analysis; (BK 5808).

[W] Wilansky, R., Functional analysis; (BK 6413).

[Z] Zaanen, A.C., Linear analysis; (BK 5303).