TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE ANALYSE I

samengesteld naar het college van

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

met medewerking van

Ir. A.J.E.M. Janssen

Najaarssemester 1978

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Lineaire analyse I

Syllabus samengesteld naar het
college van prof. dr. N. G. de Bruijn
met medewerking van ir. A. J. E. M. Janssen

Dictaatnr. 2.238 Prijs f 5,-

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Lineaire Analyse I

Syllabus samengesteld naar het college van
Prof. Dr. N.G. de Bruijn

met medewerking van Ir. A.J.E.M. Janssen

Najaarssemester 1978

juni 78

Inhoudsopgave

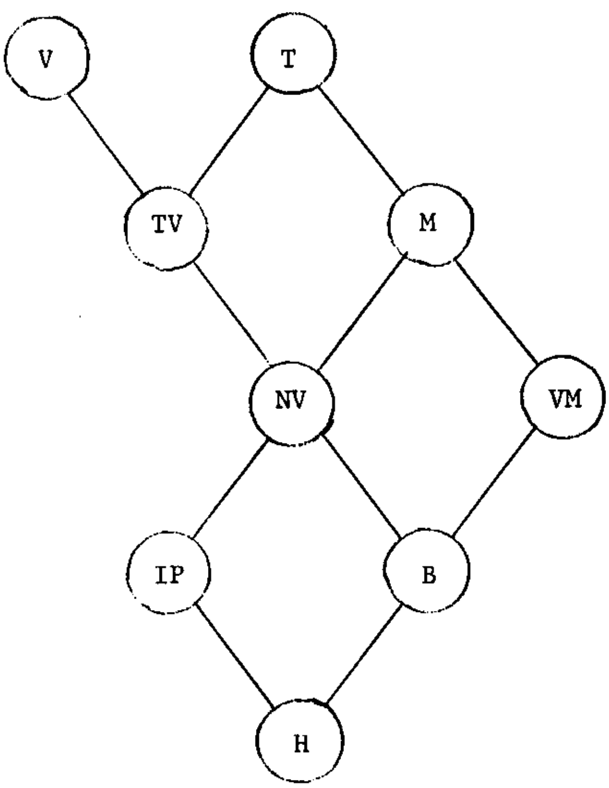
Inhoudsopgave (vervolg)

1. Inleiding tot de lineaire analyse

1.1. Inleiding en notatie

1.1.1. Functionaalanalyse is een deel van de analyse dat met meetkundige begrippen werkt. De overgang van analyse naar meetkunde ontstaat doordat men zekere klassen van objecten uit de analyse "ruimten" noemt en de objecten zèlf "punten". De objecten kunnen bijv. zijn: functies van zekere soort, oneindige rijen, afbeeldingen.

1.1.2. Lineaire analyse is het deel van de functionaalanalyse dat met lineaire ruimten werkt. In plaats van "punten" zegt men daar ook "vectoren". Datgene wat het analytische karakter erin brengt, is de topologische structuur van zulke ruimten. We zullen in dit college aandacht besteden aan een aantal klassen van ruimten; de onderlinge samenhang staat in het volgende schema, waarin naar beneden lopende lijnen verdere specialisatie aanduiden.



Afkortingen:
V : Vectorruimte
T : Topologische ruimte
TV : Topologische vectorruimte
M : Metrische ruimte
VM : Volledige metrische ruimte
NV : Genormeerde vectorruimte
IP : Inproductruimte
B : Banachruimte
H : Hilbertruimte

1.1.3. Alvorens tot de beschrijving van deze ruimten over te gaan vermelden we enige afspraken omtrent notatie:

$\mathbb{N}$ de verzameling der natuurlijke getallen
$\mathbb{Z}$ " " " gehele "
$\mathbb{Q}$ " " " rationale "
$\mathbb{R}$ " " " reële "
$\mathbb{C}$ " " " complexe "

In de te bespreken vectorruimten geven we de elementen bij voorkeur aan met de letters f, g, h,... . De complexe getallen die de scalairen zijn voor de vectorruimten, noteren we met α, β, $\gamma,\ldots,\lambda,\mu,\ldots$.

1.1.4. Als φ een afbeelding is van een verzameling R in een verzameling S, dan gebruiken we $\overleftarrow{\varphi}$ in de volgende betekenis:

als $q \in S$, dan $\overleftarrow{\varphi}(q) := \{p \in R \mid \varphi(p) = q\}$

als $B \subset S$, dan $\overleftarrow{\varphi}(B) := \{p \in R \mid \varphi(p) \in B\}$.

Gemakshalve gebruiken we $\overleftarrow{\varphi}$ ook voor de inverse van φ, als die bestaat.

De functie die voor alle x uit verzameling X gegeven is door een expressie E(x), geven we aan met $\Upsilon_{x\in X}\, E(x)$ (lambda-notatie van Church; het teken Υ i.p.v. λ is ingevoerd door Freudenthal).

1.1.5. <u>Voorbeelden:</u>

$$\Upsilon_{x\in\mathbb{R}} \sin 2x,\quad \Upsilon_{x\in[0,1]} (x^2+3) .$$

Als $f := \Upsilon_{x\in\mathbb{R}} (x+y)^2$ dan is voor alle $a \in \mathbb{R}$

$$f(a) = (a+y)^2 .$$

Meestal is duidelijk welke X bedoeld is: dan schrijft men Υ_x i.p.v. $\Upsilon_{x\in X}$.
Het toepassen van het symbool Υ_x noemt men wel "ont-x'en".
De notatie $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ voor rijen is nu eigenlijk overbodig: men kan $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, p_n$ schrijven. Vaak zullen we de rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, p_n$ aangeven met $p_1, p_2, \ldots$.

1.1.6. Het einde van een bewijs van een stelling wordt aangegeven met $\square$.

1.2. Vectorruimte of lineaire ruimte

1.2.1. Een vectorruimte is een verzameling R die niet leeg is, en voorzien is van een algebraïsche structuur: de elementen van R kunnen worden opgeteld en ze kunnen worden vermenigvuldigd met elementen van een andere verzameling, scalairen genaamd. Als scalairen nemen we vrijwel uitsluitend de complexe getallen, soms ook de reële getallen; in het laatste geval spreken we, ter onderscheiding, van een "vectorruimte over $\mathbb{R}$" (men noemt dit wel "reële vectorruimte", wat een bedenkelijke term is). Algemener kan men lineaire algebra bedrijven in een "vectorruimte over een commutatief lichaam K"; in dit college komt zulks niet voor.

Het begrip vectorruimte onderstellen we bekend. In telegramstijl formuleren we een stel eisen dat het begrip vectorruimte vastlegt:

(i) $f + (g+h) = (f+g) + h$; (ii) $f + g = g + f$; (iii) $f + 0 = f$;

(iv) $0 \cdot f = 0$; (v) $1 \cdot f = f$; (vi) $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$;

(vii) $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$; (viii) $(\lambda\mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$.

Merk op dat deze eigenschappen tot gevolg hebben dat de ruimte een additieve abelse groep is t.a.v. de vectoroptelling.

We maken in dit dictaat geen verschil in notatie tussen het complexe getal 0 en de vector 0. Uit de formules is steeds duidelijk welke van de twee bedoeld is.

1.2.2. Een <u>algebra</u> (het woord wordt hier in een andere betekenis gebruikt dan bijv. in "lineaire algebra") is een vectorruimte R waarin ook voor elementen onderling een product $\cdot$ is gedefinieerd: als $f \in R$, $g \in R$ dan $f \cdot g \in R$. Men eist daarbij

(i) $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$; (ii) $f \cdot (g+h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$;

(iii) $(g+h) \cdot f = (g \cdot f) + (h \cdot f)$; (iv) $(\lambda f) \cdot (\mu g) = \lambda\mu (f \cdot g)$.

Als ook nog (v) $f \cdot g = g \cdot f$ geldt, heet de algebra <u>commutatief</u>. Soms is er een $e \in R$ met $e \cdot f = f \cdot e = f$ voor alle $f \in R$. We noemen dan e het <u>eenheidselement</u> van de algebra (er is hooguit één zo'n e).

1.2.3. <u>Definitie</u>. Een <u>lineaire deelruimte</u> van een vectorruimte R is een deelverzameling R_1 van R met de eigenschappen

(i) Als $f \in R_1$, $g \in R_1$ dan $f + g \in R_1$;

(ii) Als $f \in R_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ dan $\alpha f \in R_1$

(m.a.w. R_1 is "gesloten" t.a.v. optelling en scalaire vermenigvuldiging).

1.2.4. <u>Stelling</u>. Als R_1 een lineaire deelruimte van de vectorruimte R is, dan is R_1 (met de uit R overgenomen optelling en scalaire vermenigvuldiging) een lineaire ruimte.

1.2.5. Zij X een willekeurige niet-lege verzameling. In $\mathbb{C}^X$, de verzameling van alle afbeeldingen van X in $\mathbb{C}$, kunnen we een optelling en vermenigvuldiging met scalairen definiëren door

$$f + g := \Upsilon_x\, (f(x) + g(x)) \qquad (f \in \mathbb{C}^X,\ g \in \mathbb{C}^X)\ ,$$

$$\alpha f := \Upsilon_x\, (\alpha f(x)) \qquad (\alpha \in \mathbb{C},\ f \in \mathbb{C}^X)\ .$$

Men gaat gemakkelijk na dat $\mathbb{C}^X$ nu een vectorruimte is; in het bijzonder is het element gedefinieerd door $\Upsilon_x\, 0$ de nulvector in zo'n ruimte. Bij iedere $f \in \mathbb{C}^X$ is $-f$, gedefinieerd door $-f := \Upsilon_x\, (-f(x))$, de tegengestelde van f.

$\mathbb{C}^X$ heet een <u>functieruimte</u>. Ook lineaire deelruimten van $\mathbb{C}^X$ worden functieruimten genoemd (als men ook de productoperatie $f \cdot g = \Upsilon_x\, (f(x)g(x))$ beschouwt, heeft men een <u>functiealgebra</u>).

1.2.6. <u>Voorbeeld</u>: De complexe "numerieke" n-dimensionale ruimte wordt met R^n aangeduid:

$$R^n := \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \mid \alpha_1 \in \mathbb{C},\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}\}\ .$$

In dit geval is $X = \{1,2,\ldots,n\}$.

1.2.7. <u>Voorbeeld</u>: Zij $X := \mathbb{N}$; dan is $\mathbb{C}^X$ de verzameling van alle complexe rijen.

1.2.8. Voorbeeld: De verzameling $\mathbb{C}_e^X$ van functies op X die in hoogstens eindig veel punten van X van nul verschillen, vormen een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^X$.

1.2.9. Voorbeeld: De functieruimte B(X) van alle begrensde complexwaardige functies op X is een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^X$. De reëelwaardige vormen echter geen lineaire deelruimte.

1.2.10. Voorbeeld: Als X := [0,1] dan is de ruimte C([0,1]) van alle complexwaardige continue functies een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^X$.

1.2.11. Laat S een deelverzameling van de vectorruimte R zijn. Met het lineaire opspansel van S bedoelen we de verzameling

$$L(S) := \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \mathbb{C}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}, s_1 \in S, \ldots, s_n \in S\} .$$

Men ziet gemakkelijk dat L(S) een lineaire deelruimte van R is. Verder geldt dat $S \subset L(S)$, en $S = L(S)$ dan en slechts dan als S een lineaire deelruimte van R is.

De elementen van S heten (lineair) onafhankelijk als voor ieder eindig stel verschillende elementen $s_1, \ldots, s_n$ van S en ieder stel complexe getallen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0,0,\ldots,0)$ geldt dat $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \neq 0$.

We zeggen dat R eindig-dimensionaal is indien er een eindige verzameling $S \subset R$ bestaat zó dat $L(S) = R$. Indien bovendien de elementen van S lineair onafhankelijk zijn, is de dimensie van R (dim(R)) het aantal elementen van S (uit de elementaire lineaire algebra volgt dat de dimensie van R onafhankelijk van de gekozen verzameling S is). In dat geval zeggen we dat de elementen van S een basis vormen voor R.

Indien er geen eindige verzameling $S \subset R$ bestaat met $L(S) = R$, zeggen we dat R oneindig-dimensionaal is en we noteren dit met $\dim(R) = \infty$.

1.2.12. Definitie. Als R en S vectorruimten zijn, en T een afbeelding van R in S is, en als T voldoet aan

$$T(f+g) = T(f) + T(g), \quad T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

dan heet T een lineaire afbeelding (ook wel: lineaire operator. Als $S = \mathbb{C}$ spreekt men meestal van "lineaire functionalen"). Meestal schrijft men Tf in plaats van T(f).

De collectie van alle lineaire afbeeldingen van R in S heet LO(R $\to$ S). Daarin worden optelling en scalaire vermenigvuldiging vastgelegd door

$$T_1 + T_2 := \Psi_{f \in R}\, (T_1 f + T_2 f) \;,$$

$$\lambda T \quad := \Psi_{f \in R}\, \lambda(Tf) \quad .$$

Verder kan men de nuloperator van LO(R $\to$ S) definiëren door $\Psi_{f \in R}\, 0$.

<u>Stelling</u>. LO(R $\to$ S) is een vectorruimte.

In plaats van LO(R $\to$ R) schrijven we ook wel LO(R). In LO(R) is een product te definiëren door

$$T_1 \circ T_2 := \Psi_{f \in R}\, T_1(T_2 f) \;.$$

We zullen voortaan $T_1 T_2$ schrijven in plaats van $T_1 \circ T_2$.

<u>Stelling</u>. LO(R) is een algebra.

1.2.13. Als $T \in$ LO(R) verstaan we onder een <u>eigenvector</u> van T ieder element $f \in R \backslash \{0\}$ met de eigenschap

$$\exists_{\lambda \in \mathbb{C}}\, [Tf = \lambda f] \;.$$

Als f eigenvector is van T is er precies één $\lambda \in \mathbb{C}$ met genoemde eigenschap; deze λ heet (de bij f behorende) <u>eigenwaarde</u> van T.

De beeldruimte $T(R) := \{g \in R \mid \exists_{f \in R}\, [g = Tf]\}$ is een lineaire deelruimte van R; voor iedere eigenwaarde λ van T is de <u>eigenruimte</u>

$$E_\lambda := \{f \in R \mid Tf = \lambda f\}$$

een lineaire deelruimte van R; in het bijzonder is

$$E_0 = \{f \in R \mid Tf = 0\}$$

de <u>nulruimte</u> van T; als 0 geen eigenwaarde van T is, is $E_0 = \{0\}$. Verder definiëren we het <u>spectrum</u> van T

$$\sigma(T) := \{\gamma \in \mathbb{C} \mid \exists_{f \in R \backslash \{0\}}\, [Tf = \gamma f]\} \;.$$

$\sigma(T)$ is de verzameling der eigenwaarden van T.

1.2.14. <u>Stelling</u>. Als R en S vectorruimten zijn, en als $T \in LO(R \to S)$ bijectief is, dan is de inverse afbeelding lineair (dus $T^{\leftarrow} \in LO(S \to R)$).

<u>Bewijs</u>. Laat $f \in S$, $g \in S$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Bij f en g behoren $f_1 \in R$ en $g_1 \in R$ met $Tf_1 = f$, $Tg_1 = g$. Nu is $T(f_1 + g_1) = f + g$, dus $f_1 = T^{\leftarrow}f$, $g_1 = T^{\leftarrow}g$, $f_1 + g_1 = T^{\leftarrow}(f+g)$, zodat $T^{\leftarrow}(f+g) = T^{\leftarrow}f + T^{\leftarrow}g$. En verder is $T(\alpha f_1) = \alpha(Tf_1) = \alpha f$, dus $T^{\leftarrow}(\alpha f) = \alpha f_1 = \alpha T^{\leftarrow}f$. □

1.2.15. Als R een lineaire ruimte is definiëren we de <u>eenheidsoperator</u> I door $I := \Psi_{f \in R}\, f$. In de algebra LO(R) is I het eenheidselement: $IT = TI = T$ voor alle $T \in LO(R)$.

1.2.16. <u>Stelling</u>. Laat R een lineaire ruimte zijn, en $T \in LO(R)$. Beschouw de volgende voorwaarden :

(i) Er is een afbeelding U van R in zichzelf zó dat $UT = I$.

(ii) Er is een afbeelding V van R in zichzelf zó dat $TV = I$.

(iii) T is injectief (d.i. $T^{\leftarrow}(0) = \{0\}$, of "0 is geen eigenwaarde van T").

(iv) T is surjectief (d.i. $T(R) = R$).

(v) T heeft een lineaire tweezijdige inverse, d.i. er is een $W \in LO(R)$ met $TW = WT = I$.

Dan gelden

$$(i) \Rightarrow (iii)\ ,\quad (ii) \Rightarrow (iv)\ ,$$

$$(i) \wedge (ii) \Leftrightarrow (iii) \wedge (iv) \Leftrightarrow (v)\ .$$

Uit (v) volgt bovendien: er is precies één afbeelding U van R in zichzelf met $UT = I$, en die is lineair en tweezijdige inverse van T. Het overeenkomstige geldt voor $TV = I$.

<u>Bewijs</u>. Neem eerst (i) aan. Neem een f met $Tf = 0$. Dan is $UTf = 0$, dus $If = 0$ dus $f = 0$.

Neem nu (ii) aan. Dan geldt voor elke $f \in R$ dat $T(Vf) = f$, dus $f \in T(R)$.

Neem nu (iii) en (iv) aan. Dan beeldt T de ruimte R één-éénduidig op zichzelf af, zodat er een inverse $T^{\leftarrow}$ is. Deze is lineair (1.2.14). Noemen we die W dan is $TW = WT = I$. Uit (iii) ∧ (iv) volgt dus (v), en daaruit weer (i) ∧ (ii).

Neem nog eens (v) aan, dus $WT = TW = I$. Dan is, als $UT = I$, ook $U = U(TW) = (UT)W = W$; als $TV = I$, dan is $V = (WT)V = W(TV) = W$. □

Opmerking. Als $\dim(R) < \infty$ dan is ook (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) (denk bijv. aan de stelling $\dim(T^{\leftarrow}(0)) + \dim(T(R)) = \dim(R)$).

1.2.17. Laat R en S vectorruimten zijn en $T \in LO(R \to S)$. Men zegt dat T van eindige rang is indien de dimensie van $T(R)$ eindig is (de rang van T is dan de dimensie van $T(R)$).

1.2.18. Voorbeeld: Zij $R := C([0,1])$ (zie 1.2.10), en beschouw de elementen φ en ψ van R die zijn gedefinieerd door $\varphi(x) := 1$, $\psi(x) := x$ $(0 \le x \le 1)$.

T wordt gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := f(0) + x(f(1) - f(0)) \qquad (0 \le x \le 1;\ f \in R)\ .$$

Nu is $T \in LO(R)$ en $\forall_{f \in R}\ [Tf = f(0)\varphi + (f(1) - f(0))\psi]$ zodat $T(R) = L(\{\varphi,\psi\})$. Kennelijk is T van eindig rang: $\dim(T(R)) = 2$.

1.2.19. Voor deelverzamelingen S en Q van de vectorruimte R definiëren we de som

$$S + Q := \{g + h \mid g \in S,\ h \in Q\}\ .$$

Indien S en Q lineaire deelruimten zijn en $S \cap Q = \{0\}$ noemt men S+Q de directe som van S en Q; in dat geval is iedere $f \in S + Q$ op precies één manier te schrijven als $f = g + h$ met $g \in S$ en $h \in Q$.

Als $S + Q = R$ een directe som is, kunnen we de afbeeldingen P_S en P_Q definiëren door

$$P_S f = g,\ P_Q f = h \qquad (f \in S + Q,\ f = g + h)\ .$$

P_S en P_Q heten projectie-operatoren op S en Q. Het zijn lineaire operatoren, die voldoen aan

$$P_S(R) = S\ ,\ P_Q(R) = Q\ ;$$

$$P_S P_S = P_S\ ,\ P_Q P_Q = P_Q\ ;$$

$$P_S P_Q = P_Q P_S = 0\ ,\ P_S + P_Q = I\ .$$

1.2.20. Laat R een vectorruimte zijn, en S een lineaire deelruimte. We zullen het begrip factorruimte (ook wel quotiëntruimte genoemd) definiëren.
We voeren daartoe in R een equivalentiebegrip in: f en g (beide in R) heten equivalent mod S als $f - g \in S$. De collectie der equivalentieklassen heet R/S.

Als $p \in R/S$, $q \in R/S$, $f_1 \in p$, $f_2 \in p$, $g_1 \in q$, $g_2 \in q$, $\alpha \in \mathbb{C}$, en r de equivalentieklasse met $f_1 + g_1 \in r$, s de klasse met $\alpha f_1 \in s$, dan is ook $f_2 + g_2 \in r$, $\alpha f_2 \in s$. Dat wil zeggen dat s en r onafhankelijk zijn van de keuze van f_1 en g_1 in p resp. q. We definiëren nu de som $p + q$ en het scalaire product αp door r resp. s.

1.2.21. Stelling. Met de zojuist gegeven definities is R/S een lineaire ruimte. De afbeelding die aan elke $f \in R$ de equivalentieklasse p met $f \in p$ toevoegt, is een lineaire afbeelding van R in R/S. De nulruimte van deze afbeelding is S.

1.3. Topologische ruimte

1.3.1. Onder een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ verstaan we een niet-lege verzameling R waarin een klasse $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen is aangewezen die de volgende eigenschappen bezit:

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(ii) $R \in \mathcal{T}$

(iii) $[U \in \mathcal{T} \wedge V \in \mathcal{T}] \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

(iv) $\forall_{i\in I}\, [U_i \in \mathcal{T}] \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ voor iedere (eindige of oneindige) verzameling I.

Verzamelingen die tot de klasse $\mathcal{T}$ behoren heten open verzamelingen. Een verzameling heet gesloten als zijn complement open is.

1.3.2. Voor een willekeurige verzameling is

$\mathring{A}$, het inwendige van A, de vereniging van alle open verzamelingen die in A zijn bevat; $\mathring{A}$ is open.
$\bar{A}$, de afsluiting van A, de doorsnede van alle gesloten verzamelingen die A bevatten; $\bar{A}$ is gesloten.

1.3.3. Een verzameling A heet <u>omgeving</u> van een punt p, indien er een open verzameling, $U \in \mathcal{T}$, bestaat zó dat $p \in U \subset A$.

Iedere open verzameling U is omgeving voor alle punten $p \in U$. Een punt $p \in R$ heet <u>verdichtingspunt</u> van een verzameling $A \subset R$ indien voor iedere omgeving V van p geldt dat V een punt van $A\backslash\{p\}$ bevat. Voor een verzameling A zij A' de verzameling der verdichtingspunten; dan geldt $\bar{A} = A \cup A'$.

Als $p_1,p_2,p_3,\ldots$ alle in R liggen en elke omgeving van p, op hoogstens eindig veel uitzonderingen na, alle punten $p_1,p_2,\ldots$ bevat, zeggen we dat de rij naar p <u>convergeert</u>. De rij $p_1,p_2,\ldots$ heet dan <u>convergent</u>.

1.3.4. Zij $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte; een deelverzameling A van R heet <u>dicht in R</u> of <u>overal dicht</u> of kortweg <u>dicht</u> indien $\bar{A} = R$, d.w.z. dat iedere niet-lege open verzameling een punt van A bevat.

De topologische ruimte heet <u>separabel</u> indien er een aftelbare dichte deelverzameling A bestaat.

1.3.5. Een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ heet <u>compact</u> indien iedere open overdekking van R kan worden uitgedund tot een eindige overdekking.

Een topologische ruimte heet <u>rij-compact</u> indien iedere rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, p_n$ een convergente deelrij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, p_{\varphi(n)}$ heeft. (Bij de notatie $p_{\varphi(n)}$ wordt onder φ een monotone afbeelding van $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ verstaan.)

1.3.6. Zij f een afbeelding van een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ in een topologische ruimte $(\tilde{R},\tilde{\mathcal{T}})$.

Als $p \in R$, heet f <u>continu in p</u> indien bij iedere $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{T}}$ met $f(p) \in \tilde{U}$ een $U \in \mathcal{T}$ bestaat zó dat $p \in U$ en $f(U) \subset \tilde{U}$.

Als f continu is in ieder punt $p \in R$ heet f <u>continu op R</u>. f is dan en slechts dan continu op R als geldt:

$$\forall_{\tilde{U}\in\tilde{\mathcal{T}}}\ [f^{\leftarrow}(\tilde{U}) \in \mathcal{T}]\ .$$

1.3.7. Een topologische ruimte heet een hausdorffruimte indien bij ieder tweetal verschillende punten $p \in R$ en $q \in R$ open verzamelingen $U \in \mathcal{T}$ en $V \in \mathcal{T}$ bestaan zó dat $p \in U$, $q \in V$ en $U \cap V = \emptyset$. In een hausdorffruimte geldt: als een rij p_n zowel naar p als naar q convergeert, is $p = q$. We schrijven dan ook wel $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ of $p_n \to p\ (n \to \infty)$.

1.3.8. Stelling. Als (R,T) een topologische ruimte is en S is een niet-lege deelverzameling van R, dan is $\{U \cap S \mid U \in T\}$ een topologie voor S. (Deze topologie heet de **relatieve** of geïnduceerde topologie, zie [AL] 5.1.9.)

1.3.9. Stelling. Als R een hausdorffruimte is en $S \subset R$, $S \neq \emptyset$, is S met de relatieve topologie ook een hausdorffruimte.

1.3.10. Stelling. Als R separabel is en S is open in R, dan is S met de relatieve topologie ook separabel.

1.3.11. Stelling. Als R compact is en S is gesloten in R, dan is S met de relatieve topologie ook compact.

1.3.12. Voorbeeld van een topologie: In $\mathbb{C}$ nemen we als open verzamelingen

(i) alle cirkelschijven, zonder de rand (open cirkelschijven)

(ii) alle verenigingen van open cirkelschijven.

Deze collectie deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ is de topologie van $\mathbb{C}$ die in het hierna volgende steeds wordt gebruikt.

1.4. Topologische vectorruimte

1.4.1. Een topologische vectorruimte R is een lineaire ruimte die bovendien een topologie T bezit; en wel zó dat voldaan is aan de volgende voorwaarden:

(i) De optelling is, als afbeelding van $R \times R$ in R, een continue functie; dat wil zeggen: als $f \in R$, $g \in R$ en W is een omgeving van $f + g$, dan zijn er omgevingen U van f en V van g zó dat $U + V \subset W$; hierin is

$$U + V := \{u + v \mid u \in U,\ v \in V\} .$$

(ii) De vermenigvuldiging met scalairen, als afbeelding van $\mathbb{C} \times R$ in R, is continu; dat wil zeggen: als $\gamma \in \mathbb{C}$, $f \in R$ en W is een omgeving van γf, dan bestaan er omgevingen U van γ (in $\mathbb{C}$) en V van f (in R) zó dat $UV \subset W$; hierin is

$$UV := \{\lambda v \mid \lambda \in U,\ v \in V\} .$$

Er bestaat een algemene theorie van topologische vectorruimten; wij zullen ons beperken tot het speciale geval van de genormeerde lineaire ruimten.

1.5. Metrische ruimte en semimetrische ruimte

1.5.1. Een semimetrische ruimte (R,d) is een niet-lege verzameling R met een afbeelding $d\colon R \times R \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

(i) $d(x,y) \geq 0$

(ii) $d(x,x) = 0$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

voor iedere $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$. Indien bovendien voor iedere $x \in R$, $y \in R$ geldt

(v) $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$

dan heet de ruimte metrisch. Men noemt $d(x,y)$ de afstand van x tot y.

1.5.2. Als R een (semi)metrische ruimte is, dan verstaan we onder de bol met middelpunt p ($p \in R$) en straal ρ ($\rho > 0$) de verzameling

$$B_{p,\rho} := \{x \in R \mid d(p,x) < \rho\} .$$

Een niet-lege verzameling in (R,d) heet open als ze vereniging is van bollen. Nu geldt: een semimetrische ruimte is een topologische ruimte en een metrische ruimte is een hausdorffruimte. De topologie van een (semi)metrische ruimte heet (semi)metrische topologie.

1.5.3. Voorbeeld: De topologie die wij in $\mathbb{C}$ gebruiken (zie 1.3.12) wordt door een metriek bepaald: voor $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$ is $d(\lambda,\mu) := |\lambda - \mu|$. Bollen in $\mathbb{C}$ zijn dus cirkelschijfjes (zonder rand). Deze topologie in $\mathbb{C}$ induceert er een in $\mathbb{R}$; bollen in $\mathbb{R}$ zijn open intervallen (λ,μ).

$\mathbb{C}$ is separabel: zij $D := \{a + ib \mid a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\}$, dan is $\bar{D} = \mathbb{C}$, en omdat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is, is ook D aftelbaar. $\mathbb{R}$ is (hoewel niet open in $\mathbb{C}$, vergelijk 1.3.10) separabel: $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

1.5.4. In een metrische ruimte (maar ook al in een semimetrische ruimte) is de definitie van omgeving equivalent met: U is een omgeving van p als er een $\rho > 0$ bestaat zó dat $B_{p,\rho} \subset U$. Een rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\ p_n$ in R is dus convergent indien

$$\exists_{q\in R}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{m\geq n}\ [d(q,p_m) < \varepsilon]$$

en dit is hetzelfde als

$$\exists_{q\in R}\ [\lim_{m\to\infty} d(q,p_m) = 0] \ .$$

Als de ruimte metrisch is (dus hausdorffs) heeft een convergente rij slechts één limiet.

Als we voor een verzameling A en een punt p definiëren

$$d(p,A) := \inf\{d(p,x) \mid x \in A\} \ ,$$

dan geldt

$$\bar{A} = \{q \in R \mid d(q,A) = 0\} \ .$$

$\bar{A}$ kunnen we ook nog karakteriseren met behulp van de stelling: $q \in \bar{A}$ dan en slechts dan indien er een rij $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\ p_n$ in A is met $\lim_{n\to\infty} p_n = q$.

1.5.5. Stelling. Als de metrische ruimte R compact is, is ze ook rijcompact; als ze rijcompact is, is ze compact.

Bewijs. 1) Zij R compact, en $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\ p_n$ een rij. Neem aan dat voor elke $q \in R$ geldt dat q niet de limiet is van enige deelrij. Dan heeft elke q een omgeving Ω waarvoor geldt $p_n \notin \Omega$ op hoogstens eindig vele uitzonderingen na. Daar R compact is, is R met eindig vele dergelijke Ω's te overdekken. Dit geeft een tegenspraak.

2) Zij nu gegeven dat R rijcompact is en laat $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een open overdekking van R zijn.

Definieer voor elke $p \in R$

$$\theta(p) := \sup\{x \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge \exists_{\alpha\in A}\ [B_{p,2x} \subset U_\alpha]\} \ .$$

Het is eenvoudig in te zien dat

(a) $\theta(p) > 0 \qquad (p \in R)$,

(b) $\theta(q) \geq \theta(p) - d(p,q) \qquad (p \in R,\ q \in R \text{ en } d(p,q) < \theta(p))$.

We kiezen nu $p_1 \in R$, $p_2 \in R, \ldots$ achtereenvolgens zó dat

$$p_{n+1} \notin B_{p_1,\theta(p_1)} \cup \ldots \cup B_{p_n,\theta(p_n)} \ .$$

Als dit proces afbreekt is R eindig overdekbaar.
Als het niet afbreekt bestaat er een convergente deelrij, waarvan we de limiet p noemen.
Kies nu p_n en p_m zō dat $m > n$ en $d(p_n,p) < \frac{1}{4}\theta(p)$, $d(p_m,p) < \frac{1}{4}\theta(p)$.
Uit (b) volgt dat $\theta(p_n) \geq \frac{1}{2}\theta(p)$.
Verder is vanwege de constructie van de rij $d(p_n,p_m) \geq \theta(p_n)$. Dit is echter in strijd met

$$d(p_n,p_m) \leq d(p_n,p) + d(p_m,p) < \tfrac{1}{2}\theta(p) \ .$$

Het proces breekt dus af zodat R compact is. □

1.5.6. Opmerking. Stelling 1.5.5 geldt ook voor een semimetrische ruimte.

1.6. Volledige (semi)metrische ruimte

1.6.1. Zij (R,d) een semimetrische ruimte; een rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, p_n$ heet fundamentaalrij als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{k\in\mathbb{N}}\ \forall_{m>k}\ \forall_{n>k}\ [d(p_m,p_n) < \varepsilon] \ .$$

Iedere convergente rij is een fundamentaalrij; het omgekeerde is in een willekeurige semimetrische of metrische ruimte niet noodzakelijk het geval.

Een semimetrische of metrische ruimte heet volledig als iedere fundamentaalrij convergent is.

1.6.2. Stelling. Als R (semimetrisch of metrisch) volledig is en S gesloten in R, dan is ook S volledig.

1.6.3. We gaan uit van een semimetrische ruimte (R,d). We zullen nu een metrische ruimte maken door equivalentieklassenvorming. Als $x \in R$, $y \in R$, $d(x,y) = 0$ schrijven we $x \sim y$; nu is $\sim$ een equivalentierelatie. Zij R^* de collectie van alle equivalentieklassen. Als $u \in R^*$, $v \in R^*$ dan is voor alle $x \in u$, $y \in v$ het getal $d(x,y)$ hetzelfde. Is nl. ook $x' \in u$, $y' \in v$ dan is

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \ ,$$

dus $d(x,y) \leq d(x',y')$, en om dezelfde reden ook $d(x',y') \leq d(x,y)$.
We definiëren nu de afstand $d^*(u,v)$ van u en v als deze waarde $d(x,y)$.

1.6.4. <u>Stelling</u>. (R^*,d^*) is een metrische ruimte. Als (R,d) volledig is, is (R^*,d^*) het ook.

1.6.5. We gaan weer uit van een semimetrische ruimte (R,d). We vormen de collectie F, bestaande uit alle fundamentaalrijen uit (R,d).

Als $x = (x_1,x_2,\ldots)$, $y = (y_1,y_2,\ldots)$ fundamentaalrijen zijn, dan is $d(x_1,y_1)$, $d(x_2,y_2),\ldots$ ook een fundamentaalrij, want

$$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m) .$$

Daar de $d(x_n,y_n)$ reële getallen zijn, heeft deze fundamentaalrij een limiet.

We definiëren nu de afstand van x en y door

$$d_F(x,y) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) .$$

Als $x \in R$, dan is de rij $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x$ een fundamentaalrij; we noemen deze $\mathrm{inj}(x)$; de afbeelding inj is een injectie van R in F.

1.6.6. <u>Stelling</u>. (F,d_F) is een volledige semimetrische ruimte, en de injectie inj voldoet aan $d(a,b) = d_F(\mathrm{inj}(a),\mathrm{inj}(b))$ voor alle a en b uit R, en $\mathrm{inj}(R)$ ligt dicht in (F,d_F).

<u>Bewijs</u>. Gemakkelijk controleren we $d_F(x,y) \ge 0$, $d_F(x,x) = 0$, $d_F(x,y) = d_F(y,x)$, $d_F(x,z) \le d_F(x,y) + d_F(y,z)$ voor alle x,y,z uit F. Dat $d_F(\mathrm{inj}(a),\mathrm{inj}(b)) = d(a,b)$ is triviaal.

Als $x \in F$, $x = (x_1,x_2,\ldots)$, en $\varepsilon > 0$ dan is er een $m \in \mathbb{N}$ zó dat voor $n \ge m$ geldt $d(x_n,x_m) < \varepsilon$. Kort $\mathrm{inj}(x_m)$ af tot u, dus als $u = (u_1,u_2,\ldots)$ dan is $u_i = x_m$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Nu is $d_F(x,u) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,u_n)$; voor $n \ge m$ is $d(x_n,u_n) < \varepsilon$, zodat $d_F(x,u) \le \varepsilon$. Hiermee is bewezen:

$$\lim_{m\to\infty} d_F(x,\mathrm{inj}(x_m)) = 0 . \tag{1}$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $\mathrm{inj}(R)$ dicht ligt in F: als $x \in F$ dan liggen de $\mathrm{inj}(x_1)$, $\mathrm{inj}(x_2),\ldots$ in $\mathrm{inj}(R)$.

Laat nu $u_1,u_2,\ldots$ een fundamentaalrij in (F,d_F) zijn (dus $u_k \in F$ voor elke k). Kies bij elke k een $v_k \in \mathrm{inj}(R)$ met $d_F(u_k,v_k) < k^{-1}$. Nu is ook $v_1,v_2,\ldots$ een fundamentaalrij in (F,d_F). Zij $v_k = \mathrm{inj}(a_k)$, dan is wegens $d(a_k,a_l) = d_F(v_k,v_l)$ de rij $a = a_1,a_2,\ldots$ een fundamentaalrij in R, zodat $a \in F$. Wegens (1) geldt $d_F(a,v_m) \to 0$ $(m \to \infty)$. Hieruit volgt $d_F(a,u_m) \to 0$, zodat de rij $u_1,u_2,\ldots$ convergeert. Dus (F,d_F) is volledig. $\square$

1.6.7. Als we op de (F,d_F) het proces van 1.6.3 toepassen krijgen we een volledige metrische ruimte (F^*,d_F^*). Beschouw de afbeelding proj die aan elke $x \in R$ toevoegt de equivalentieklasse waartoe inj(x) behoort; deze klasse bevat alle fundamentaalrijen $y = (y_1,y_2,\ldots)$ (met $y_k \in R$) met de eigenschap dat $d_F(y,\mathrm{inj}(x)) = 0$, dus $d(y_k,x) \to 0$, d.w.z. alle fundamentaalrijen die naar x convergeren. Merk op dat $d(x,y) = d_F^*(\mathrm{proj}(x),\mathrm{proj}(y))$, hieruit volgt dat $\mathrm{proj}(x) = \mathrm{proj}(y)$ slechts als $d(x,y) = 0$.

Als (R,d) niet alleen semimetrisch maar ook metrisch is, is proj(x) een inbedding van (R,d) in de volledige metrische ruimte (F^*,d_F^*), met de volgende eigenschappen: (i) $d(x,y) = d_F^*(\mathrm{proj}(x),\mathrm{proj}(y))$ voor alle $x,y \in R$, (ii) het beeld proj(R) ligt dicht in (F^*,d_F^*). Om deze redenen noemen we (F^*,d_F^*) een <u>completering</u> van (R,d). Men kan (door in gedachten proj(x) met x te identificeren) deze completering als een uitbreiding van (R,d) zien.

1.6.8. <u>Opmerkingen</u>. 1. Elke uniform continue afbeelding $R \to \mathbb{C}$ kan tot een uniform continue afbeelding $F \to \mathbb{C}$ worden voortgezet.

2. Als R een genormeerde vectorruimte (zie 2.1) is, dan kan de normering tot F worden voortgezet.

3. Als R een IP-ruimte is (zie 4.1) kan de inproductstructuur tot F worden voortgezet.

4. De onder 1,2,3 genoemde voortzettingen liggen (als F eenmaal gekozen is) eenduidig vast.

2. Genormeerde vectorruimte

2.1. Inleiding en voorbeelden

2.1.1. Laat R een vectorruimte zijn waarin bij elke $f \in R$ een getal $\|f\| \geq 0$ gegeven is. Neem aan

(i) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ voor alle $f \in R$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

(ii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Dan heet $\curlyvee_f \|f\|$ een <u>seminorm</u> op R. Als bovendien geldt

(iii) $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$

dan heet het een <u>norm</u>, en het paar $(R, \| \ \|)$ heet een <u>genormeerde vectorruimte</u>.

2.1.2. <u>Stelling</u>. Als $\| \ \|$ een norm (resp. seminorm) is op R, dan wordt R met de afstandsdefinitie

$$d(f,g) := \|f - g\|$$

een metrische (resp. semimetrische) ruimte.

2.1.3. Volgens 1.5.2 leidt deze afstandsdefinitie tot een topologie. We zullen in $(R, \| \ \|)$ steeds met deze topologie werken. Merk op dat nu

$$f_n \to f \quad \text{en} \quad \|f_n - f\| \to 0$$

equivalent zijn.

2.1.4. Van nu af aan zullen we ons beperken tot gevallen waarin (iii) geldt (ofschoon de overige gevallen niet wezenlijk moeilijker zijn).
R is dan een hausdorffruimte, zodat we over <u>de</u> limiet van een convergente rij kunnen spreken (vgl. 1.3.7).

2.1.5. <u>Stelling</u>. Als $(R, \| \ \|)$ een genormeerde vectorruimte is, is het een topologische vectorruimte (d.w.z. $f + g$ hangt continu van f en g af, en αf hangt continu van α en f af). Ook $\curlyvee_f \|f\|$ is een continue functie op R.

Bewijs. (i) Als $\| f - f_0 \| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\| g - g_0 \| < \frac{1}{2}\varepsilon$ dan is $\| (f+g) - (f_0 + g_0) \| < \varepsilon$,

(ii) We schrijven

$$\| \alpha f - \alpha_0 f_0 \| = \| (\alpha - \alpha_0)(f - f_0) + (\alpha - \alpha_0) f_0 + \alpha_0 (f - f_0) \| \le$$

$$\le |\alpha - \alpha_0| \cdot \| f - f_0 \| + |\alpha - \alpha_0| \cdot \| f_0 \| + |\alpha_0| \cdot \| f - f_0 \| .$$

Laat α_0 en f_0 gefixeerd zijn. Neem voor δ de functie gegeven door $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / 3(\| f_0 \| + |\alpha_0| + 1 + \varepsilon)$. Dan blijkt: als $|\alpha - \alpha_0| < \delta(\varepsilon)$, $\| f - f_0 \| < \delta(\varepsilon)$, dan is $\| \alpha f - \alpha_0 f_0 \| < \varepsilon$.

(iii) Als $\| f - f_0 \| < \varepsilon$ dan is ook $\big| \| f \| - \| f_0 \| \big| < \varepsilon$ wegens

$$\| f \| \le \| f_0 \| + \| f - f_0 \|, \; \| f_0 \| \le \| f \| + \| f_0 - f \| . \qquad \square$$

2.1.6. Voorbeelden:

1. $\mathbb{C}$ met $\| \alpha \| := |\alpha|$ is een genormeerde vectorruimte.

2. Als X een niet-lege verzameling is, dan is $B(X)$ (zie 1.2.9) een genormeerde vectorruimte, wanneer men als norm neemt

$$\| f \| := \sup\{ |f(x)| \mid x \in X \} .$$

3. Laat op de lineaire ruimte R de uitdrukking $\| \;\; \|$ voldoen aan (i) en (iii) van 2.1.1, en neem aan dat de verzameling

$$\{ f \in R \mid \| f \| \le 1 \}$$

convex is. Dan is $\| \;\; \|$ een norm.

4. Zij $p > 1$. In de numerieke R^n (zie 1.2.6) hebben we de zg. p-norm (zie [AL] 5.10.63):

$$\| (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \|_p = (|\alpha_1|^p + \ldots + |\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

5. Het limietgeval voor $p \to \infty$ is de sup-norm:

$$\lim_{p \to \infty} (|\alpha_1|^p + \ldots + |\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{1 \le j \le n} |\alpha_j| .$$

Deze norm is de sup-norm uit voorbeeld 2 (met $X = \{1, \ldots, n\}$), en wordt meestal met $\| \;\; \|_\infty$ aangeduid.

6. Als X een topologische ruimte is, definiëren we C(X) als

$$C(X) := \{f \in B(X) \mid f \text{ continu op } X\} .$$

C(X) bestaat dus uit de begrensde continue functies, en de norm is de sup-norm.

7. Op C([0,1]) wordt een norm gevormd door

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt .$$

2.1.7. In een eindigdimensionale ruimte zijn vele normen mogelijk. Uit de volgende stelling kan men afleiden dat ze allemaal dezelfde topologie vastleggen.

<u>Stelling</u>. Als R een vectorruimte is met eindige dimensie, en als $\| \;\|$ en $\| \;\|^*$ normen zijn in R dan zijn er positieve getallen m en M zó dat voor alle $f \in R$

$$m\|f\|^* \leq \|f\| \leq M\|f\|^* .$$

<u>Bewijs</u>. We zullen beide normen vergelijken met eenzelfde norm. Laat $e_1,\dots,e_n$ basisvectoren van R zijn, en definieer voor $f = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$$\|f\|' = (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Nu is $\| \;\|'$ een norm op R. We zien verder dat $\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\|$ continu afhangt van $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, want

$$\big|\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\| - \|\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n\|\big| \leq$$

$$\leq \| |\alpha_1 - \beta_1| e_1 + \dots + |\alpha_n - \beta_n| e_n \| \leq$$

$$|\alpha_1 - \beta_1| \, \|e_1\| + \dots + |\alpha_n - \beta_n| \, \|e_n\| .$$

Het "boloppervlak" gevormd door alle $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ met $|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 1$ (d.i. met $\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\|' = 1$) is een begrensde, gesloten verzameling in R^n (we kunnen het ook als een echt boloppervlak in een reële $\mathbb{R}^{2n}$ beschrijven). Op dit oppervlak heeft elke continue functie een maximum en een minimum: er zijn dus getallen m_0 en M_0 zó dat

$$m_0 \leq \|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\| \leq M_0$$

en de grenzen worden aangenomen. Uit $\| f \| = 0$ volgt $f = 0$; derhalve kan m_0 niet ≤ 0 zijn, zodat m_0 en M_0 beide positief zijn.

We kunnen hetzelfde met $\| \quad \|^*$ doen, dat geeft m_0^* en M_0^*. Met $m = m_0/M_0^*$, $M = M_0/m_0^*$ is nu de stelling bewezen. □

2.1.8. Stelling. Als $(R, \| \quad \|)$ een genormeerde lineaire ruimte is, met $\dim(R) < \infty$, dan is

$$\{f \in R \mid \| f \| \leq 1\}$$

een compacte verzameling in $(R, \| \quad \|)$.

Bewijs. We vergelijken $\| \quad \|$ met $\| \quad \|'$ uit 2.1.7. Elke oneindige rij die in de zin van $\| \quad \|$ begrensd is, is ook in de zin van $\| \quad \|'$ begrensd. Er is dus een in de zin van $\| \quad \|'$ convergente deelrij; deze is dan ook weer in de zin van $\| \quad \|$ convergent. □

2.1.9. Stelling. Laat $(R, \| \quad \|)$ een genormeerde lineaire ruimte zijn, en S een lineaire deelruimte met eindige dimensie. Dan is S een gesloten deelverzameling in R.

Bewijs. Laat $f_1 \in S$, $f_2 \in S, \ldots, f_n \to f$ (natuurlijk in de zin van $\| \quad \|$), met $f \in R$. We moeten bewijzen dat $f \in S$.

Uit $f_n \to f$ volgt dat $\| f_n \|$ begrensd is. Uit de vorige stelling volgt nu dat $\Upsilon_{n \in \mathbb{N}}\, f_n$ in $(S, \| \quad \|)$ een convergente deelrij heeft, met limiet g, $g \in S$. Daar deze rij ook naar f convergeert, is $f = g$, dus $f \in S$. □

2.2. Lineaire afbeeldingen van een genormeerde vectorruimte

2.2.1. Laat $(R, \| \quad \|_R)$ en $(S, \| \quad \|_S)$ genormeerde lineaire ruimten zijn. Een $T \in LO(R \to S)$ heet begrensd als er een M bestaat zó dat voor alle $f \in R$ geldt $\| Tf \|_S \leq M \| f \|_R$. Als T begrensd is definiëren we als norm van T:

$$\| T \| := \sup_{f \in R, f \neq 0} \| Tf \|_S / \| f \|_R . \qquad (*)$$

We zullen meestal de normen in S en R gewoon met $\| \quad \|$ aangeven.

Als T begrensd is, en $\alpha \in \mathbb{C}$, dan is αT begrensd en $\| \alpha T \| = |\alpha| . \| T \|$.

Als T begrensd is, en $f \in R$, dan is (wegens definitie van "sup")

$$\|Tf\| \le \|T\| \cdot \|f\| .$$

Als T_1 en T_2 begrensd zijn dan is voor alle $f \in R$

$$\|(T_1 + T_2)f\| \le \|T_1 f\| + \|T_2 f\| \le \|T_1\| \, \|f\| + \|T_2\| \, \|f\|$$

en daaruit volgt dat ook $T_1 + T_2$ begrensd is, en $\|T_1 + T_2\| \le \|T_1\| + \|T_2\|$.

2.2.2. Stelling. De verzameling $BLO(R \to S)$ van alle begrensde lineaire afbeeldingen van R in S is (met de in (*) gedefinieerde norm), een genormeerde vectorruimte.

2.2.3. Lineaire functionalen. De elementen van $BLO(R \to \mathbb{C})$ zijn begrensde lineaire functionalen (in $\mathbb{C}$ hebben we de norm $\|\alpha\| = |\alpha|$). De ruimte $BLO(R \to \mathbb{C})$ wordt veelal de geadjungeerde ruimte van R genoemd en met R^* aangeduid. Vaak (maar niet altijd) is de geadjungeerde van R^* gelijkwaardig met R.

2.2.4. Voorbeelden: Zij $R = C([0,1])$, en

$$L := \forall_{f \in R} \left(f(1) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt\right) .$$

Nemen we in R de sup-norm $\| \ \|_\infty$ dan is L begrensd:

$$|L(f)| \le (1 + \tfrac{1}{2}) \, \|f\|_\infty .$$

Nemen we echter de norm $\| \ \|_1$ (gegeven door $\|f\|_1 = {}_0\int^1 |f(t)|dt$) dan is L niet begrensd. We kunnen nl. f's aangeven waarvoor $f(0)/ \|f\|_1$ groot is: neem $f(x) = 0$ $(\frac{1}{n} \le x \le 1)$, $f(0) = 1$, f lineair op $[0,\frac{1}{n}]$.

2.2.5. Stelling. Als $T \in LO(R \to S)$ dan geldt T begrensd $\Leftrightarrow$ T continu.
Bewijs. Als T begrensd is, dan volgt uit $\|Tf - Tg\| \le \|T\| \|f - g\|$ voor alle $f \in R$, $g \in R$ de continuïteit van T. Als T continu is, dan is er (wegens $T0 = 0$) een $\delta > 0$ zó dat $\|Tf\| \le 1$ als $f \in R$, $\|f\| \le \delta$, en nu blijkt dat $\|Tf\| \le \delta^{-1} \|f\|$ voor alle $f \in R$. □

2.2.6. Voorbeeld: Als $T \in LO(R^n)$, is T continu, en $BLO(R^n) = LO(R^n)$.

2.2.7. Stelling. Als in de genormeerde lineaire ruimte R voor de rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, f_n$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, dan geldt ook

$$\forall_{L\in R^*}\ [\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)]\ .$$

Bewijs. Triviaal, op grond van 2.2.5. □

2.2.8. De bewering van 2.2.7 is aanleiding voor een nieuwe definitie: De rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, f_n$ in de genormeerde lineaire ruimte R heet zwak convergent naar $f \in R$ (notatie $f_n \rightharpoonup f$) indien

$$\forall_{L\in R^*}\ [\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)]\ .$$

Stelling 2.2.7 kan worden geformuleerd als

$$[f_n \to f] \Rightarrow [f_n \rightharpoonup f]\ .$$

2.2.9. Stelling. Laat R en S genormeerde vectorruimten zijn, en laat $T \in BLO(R \to S)$. Als $f_1 \in R$, $f_2 \in R, \ldots$ en $f_n \rightharpoonup 0$, dan geldt $Tf_n \rightharpoonup 0$.
Bewijs. Als $L \in S^*$, dan is $\Upsilon_f\, L(Tf) \in R^*$, en derhalve is $L(Tf_n) \to 0$. □

2.3. Compacte operatoren

2.3.1. Laat R en S genormeerde lineaire ruimten zijn, en $T \in LO(R \to S)$. T heet compact als voor elke begrensde rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, f_n$ geldt dat $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, Tf_n$ een convergente deelrij bevat.

2.3.2. Voorbeeld: Als R een genormeerde lineaire ruimte is en T een begrensde lineaire functionaal is (dus $S = \mathbb{C}$), dan is T compact.

2.3.3. Stelling. Als T compact is dan is $T \in BLO(R \to S)$.

Bewijs. Als T niet begrensd is, is er een begrensde rij $f_1, f_2, \ldots$ met $\|Tf_n\| \to \infty$. Dan bevat $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, Tf_n$ geen convergente deelrij. □

2.3.4. Stelling. Als $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, f_n$ een fundamentaalrij is, en T compact, dan is $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, Tf_n$ convergent.

Bewijs. Volgens 2.3.3 is T begrensd, en daarom is $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, Tf_n$ weer een fundamentaalrij. En een fundamentaalrij die een convergente deelrij bevat, is convergent. □

2.3.5. <u>Stelling</u>. Als R en S genormeerde vectorruimten zijn, $T \in BLO(R \to S)$, en T van eindige rang (zie 1.2.17), dan is T compact.

<u>Bewijs</u>. Het beeld van de eenheidsbol is een begrensde verzameling in een eindigdimensionale ruimte, waarin elke begrensde rij een convergente deelrij heeft (zie 2.1.8). $\square$

3. Banachruimte

3.1. Inleiding en voorbeelden

3.1.1. Een genormeerde lineaire ruimte $(R, \| \ \|)$ heet een Banachruimte (ook wel afgekort tot B-ruimte) als R volledig is t.o.v. de norm $\| \ \|$.

3.1.2. Stelling. Als R eindige dimensie heeft, en $\| \ \|$ een norm op R is, dan is $(R, \| \ \|)$ een Banachruimte.

Bewijs. Als $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\ f_n$ een fundamentaalrij in R is, dan is $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\ f_n$ begrensd en heeft dus (2.1.8) een convergente deelrij. Maar dan is $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\ f_n$ zèlf convergent. □

3.1.3. Stelling. Laat $(R, \| \ \|)$ een genormeerd lineaire ruimte zijn. Dan is nodig en voldoende voor de volledigheid van die ruimte, dat alle absoluut convergente reeksen convergent zijn. (Een reeks $f_1 + f_2 + \dots$ met termen uit R heet absoluut convergent als $\sum_1^\infty \|f_k\|$ convergeert).

Bewijs. 1. Neem aan dat $(R, \| \ \|)$ volledig is en dat $\sum_1^\infty \|f_k\|$ convergeert. Nu is $\Psi_n\ (f_1 + \dots + f_n)$ een fundamentaalrij, aangezien voor $n > m$

$$\|(f_1 + \dots + f_n) - (f_1 + \dots + f_m)\| \leq \|f_{m+1}\| + \dots + \|f_n\|$$

en dat is willekeurig klein als m voldoende groot is. Daar elke fundamentaalrij convergeert, is nu $f_1 + f_2 + \dots$ convergent.

2. Neem aan dat alle absoluut convergente reeksen convergeren.

Laat $g_1, g_2, \dots$ een fundamentaalrij zijn. Laat (voor elke $k \in \mathbb{N}$) N_k een natuurlijk getal zijn met de eigenschap dat $\|g_n - g_m\| < 2^{-k}$ voor alle n en m die groter zijn dan N_k. Kies nu een stijgende rij van natuurlijke getallen $n_1, n_2, n_3, \dots$ zó dat $n_k > N_k$ voor alle k. De reeks

$$(g_{n_2} - g_{n_1}) + (g_{n_3} - g_{n_2}) + \dots$$

is absoluut convergent: de norm van de k-de term is $< 2^{-k}$. Derhalve bestaat nu $\lim_{k\to\infty} g_{n_k}$. De rij $g_1, g_2, \dots$ is dus een fundamentaalrij die een convergente deelrij heeft, en is daarom zèlf convergent. □

3.1.4. Stelling. Als X een niet-lege verzameling is, dan is B(X) (de op X begrensde complexwaardige functies met sup-norm, zie voorbeeld 2.1.6.2) een Banachruimte.

Bewijs. We bewijzen hier slechts de volledigheid. Laat $g_k \in B(X)$ $(k \in \mathbb{N})$, $\|g_1\| + \|g_2\| + \ldots = M < \infty$. Voor elke $x \in X$ is nu $|g_1(x)| + |g_2(x)| + \ldots$ convergent, met som $\leq M$. We mogen dus definiëren

$$f := \forall_{x\in X} \; (g_1(x) + g_2(x) + \ldots) \;,$$

en zien dat $f \in B(X)$, $\|f\| \leq M$. Verder is voor elke x

$$\|f - \sum_1^n g_k\| = \sup_{x\in X} |f(x) - \sum_1^n g_k(x)| \leq \sup_{x\in X} \sum_{n+1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \sum_{n+1}^{\infty} \|g_k\| \;.$$

Hieruit is af te lezen dat $\sum_1^n g_k \to f$, en daarmee is bewezen dat in B(X) elke absoluut convergente reeks convergeert. □

3.1.5. Opmerking 1. Convergentie in B(X) is hetzelfde als uniforme convergentie op X.

Opmerking 2. Stelling 3.1.4 kan, met hetzelfde bewijs, worden uitgebreid tot het geval van alle begrensde afbeeldingen van X in een B-ruimte.

3.1.6. Stelling. Zij X een topologische ruimte en C(X) voorzien van de norm $\| \;\; \|_\infty$ (zie 2.1.6.6); dan is C(X) een B-ruimte.

Bewijs. C(X) is een lineaire deelruimte van B(X). C(X) is gesloten in B(X): als $\forall_{n\in\mathbb{N}} \; f_n$ een rij is in C(X) die convergeert naar f, dan is f continu (wegens het uniforme karakter van de convergentie). Op grond van stelling 1.6.2 is C(X) dus een B-ruimte. □

3.1.7. Opmerking. De op [0,1] differentieerbare functies vormen geen volledige deelruimte van B([0,1]). Men kan nl. rijen van differentieerbare functies construeren die uniform convergeren naar een functie die niet overal differentieerbaar is (zelfs naar een functie die nergens differentieerbaar is).

3.2. Lineaire afbeeldingen van een genormeerde vectorruimte in een Banachruimte

3.2.1. Stelling. Als R en S genormeerde lineaire ruimten zijn, en S volledig, dan is BLO(R $\to$ S) (zie 2.2.2) volledig. In het bijzonder geldt dat de geadjungeerde ruimte R^* (zie 2.2.3) volledig is.

Bewijs. Laat $T_1, T_2, \ldots$ in BLO(R $\to$ S) liggen, en $\|T_1\| + \|T_2\| + \ldots < \infty$.
Als $f \in R$ dan is $\|T_n f\| \le \|T_n\| \cdot \|f\|$, dus $\|T_1 f\| + \|T_2 f\| + \ldots$ is convergent. Daar S volledig is, is nu $T_1 f + T_2 f + \ldots$ convergent. Noem

$$T := \Upsilon_{f \in R} \, (T_1 f + T_2 f + \ldots) .$$

Deze T is lineair, en ook begrensd, want voor alle $f \in R$ is $\|Tf\| \le (\|T_1\| + \|T_2\| + \ldots)\|f\|$. Verder is voor alle $f \in R$

$$\|(T - (T_1 + \ldots + T_n))f\| \le \|T_{n+1} f + \ldots\| \le (\|T_{n+1}\| + \ldots)\|f\| ,$$

dus

$$\|T - (T_1 + \ldots + T_n)\| \le \|T_{n+1}\| + \ldots .$$

Hieruit volgt $\|T - (T_1 + \ldots + T_n)\| \to 0$, dus $\sum_1^\infty T_k = T$. z.c. 5.13 □

3.2.2. Definitie. Een genormeerde lineaire ruimte, die een productoperatie $\cdot$ heeft zó dat $(X, +, \cdot)$ een algebra is (zie 1.2.2) heet een genormeerde algebra indien

$$\|x \cdot y\| \le \|x\| \, \|y\| \qquad (x \in X, \; y \in X) .$$ vergelijk met 2.1.1 ii)

Als bovendien X een Banachruimte is, spreekt men van een Banachalgebra. In het geval dat de algebra een eenheidselement e heeft, eist men gewoonlijk dat $\|e\| = 1$.

3.2.3. Stelling. Als R een genormeerde vectorruimte is, is BLO(R) een genormeerde algebra. In geval R een Banachruimte is, is BLO(R) een Banachalgebra.

Bewijs. Uit 1.2.12 en 1.2.15 weten we dat LO(R) een algebra met eenheidselement I is. Het is triviaal dat $I \in$ BLO(R) en dat $\|I\| = 1$. Derhalve is BLO(R) een genormeerde algebra. Als R bovendien een Banachruimte is, volgt uit 3.2.1 dat BLO(R) een Banachalgebra is. □

3.2.4. <u>Stelling</u> (Banach-Steinhaus). Zij R een B-ruimte en S een verzameling van begrensde lineaire functionalen van R. Indien er voor iedere $f \in R$ een $M_f > 0$ bestaat met de eigenschap

$$\forall_{L\in S}\ [\,|L(f)| \le M_f\,]\ ,$$

dan bestaat er een $M > 0$ zó dat

$$\forall_{L\in S}\ [\,\|L\| \le M\,]\ .$$

$\forall_{L\in S}\ \exists_{M_L>0}\ \forall_{f\in R}\ \|L\|\le M_L$

$\forall_{f\in R}\ \exists_{M_f>0}\ \forall_{L\in S}\ |Lf|\le M_f$

$\Rightarrow \exists_{M>0}\ \forall_{L\in S}\ \|L\|\le M$

<u>Bewijs</u>. Neem aan dat

$$\left\{\frac{L(f)}{\|f\|}\ \middle|\ f \in R\backslash\{0\},\ L \in S\right\}$$

een niet begrensde verzameling in $\mathbb{C}$ is. We kunnen dan achtereenvolgens $f_1 \in R$, $L_1 \in S$, $f_2 \in R$, $L_2 \in S, \ldots$ vinden met

$$\|f_1\| = \frac{1}{2}\ ,\quad |L_1(f_1)| > 1\ ,$$

$$\|f_k\| = \frac{1}{2^k(1 + \|L_1\| + \ldots + \|L_{k-1}\|)}\ ,\quad |L_k(f_k)| > 2^k + \left(M_{f_1} + \ldots + M_{f_{k-1}}\right).$$

De reeks $f_1 + f_2 + \ldots$ is convergent. Noem de som f.

Gebruikmakende van

$$\|f_{m+1} + f_{m+2} + \ldots\| \le \frac{1}{2^m\,\|L_m\|}$$

vinden we dat

$$|L_m(f_m)| \le |L_m(f)| + |L_m(f_1)| + \ldots + |L_m(f_{m-1})| + |L_m(f_{m+1} + \ldots)|$$

$$\le M_f + M_{f_1} + \ldots + M_{f_{m-1}} + 1\ .$$

Maar uit de definitie van de rijen $\Upsilon_{m\in\mathbb{N}}\ f_m$ en $\Upsilon_{m\in\mathbb{N}}\ L_m$ volgt dat op den duur

$$|L_m(f_m)| > M_f + 1 + (M_{f_1} + \ldots + M_{f_{m-1}})\ .$$

Dit is een tegenspraak. □

3.2.5. <u>Opmerking</u>. De stelling van Banach-Steinhaus geldt ook indien S een verzameling begrensde lineaire afbeeldingen van een B-ruimte R in een B-ruimte R' is; het bewijs is analoog aan dat van 3.2.4. In de engelstalige literatuur staat de stelling ook bekend als het "uniform boundedness principle".

3.2.6. <u>Stelling.</u> Zij R een genormeerde lineaire ruimte, en zij S een Banachruimte. Zij $T_n \in LO(R \to S)$ en (zie 2.3.1) T_n compact $(n=1,2,\ldots)$; zij verder $T \in BLO(R \to S)$ en $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$. Dan is T compact.

<u>Bewijs:</u> Laat $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, f_n$ een begrensde rij zijn. Kies een deelrij die door T_1 op een convergente rij wordt afgebeeld. Kies uit die deelrij een deelrij die door T_2 op een convergente rij wordt afgebeeld, etc.
De diagonaalrij $h_1, h_2, \ldots$ (i.e. de deelrij van $f_1, f_2, \ldots$ die verkregen wordt door uit de n^e deelrij het n^e element te kiezen $(n=1,2,\ldots)$) voldoet aan

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ [\Upsilon_n\, T_k h_n \text{ is convergent}].$$

Zij $\varepsilon > 0$, en kies $k \in \mathbb{N}$ met $\|T_k - T\| < \frac{\varepsilon}{4M}$ (waarin $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|h_n\|$).
Er is een n_0 zó dat voor alle $n > n_0$, $m > n_0$

$$\|T_k h_m - T_k h_n\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

en dus is voor $n > n_0$, $m > n_0$

$$\|Th_m - Th_n\| < \|T - T_k\|\ \|h_m - h_n\| + \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, Th_n$ een fundamentaalrij is. Daar S volledig is, is deze rij convergent. □

4. Inwendig-productruimte

4.1. Inleiding en voorbeelden

4.1.1. Een lineaire ruimte R heet <u>inwendig-productruimte</u> (<u>IP-ruimte</u>) indien een afbeelding

$$(\,,\,) : R \times R \to \mathbb{C}$$

is gedefinieerd die voldoet aan de volgende voorwaarden ($f,g,h \in R$, $\lambda \in \mathbb{C}$):

(i) $(f+g,h) = (f,h) + (g,h)$

(ii) $(\lambda f,g) = \lambda(f,g)$

(iii) $(f,g) = \overline{(g,f)}$

(iv) $f \neq 0 \Rightarrow (f,f) > 0$.

Een eindig-dimensionale IP-ruimte heet ook wel een <u>unitaire</u> ruimte. Een eindig-dimensionale ruimte over $\mathbb{R}$ noemen we een <u>euclidische</u> ruimte.

Als $(f,g) = 0$, dan zeggen we dat f <u>loodrecht staat</u> op g.

4.1.2. <u>Voorbeelden</u>:

(i) In R^n zij voor $\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ en $\beta := (\beta_1,\ldots,\beta_n)$

$$(\alpha,\beta) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\bar{\beta}_i \,,$$

(ii) In $C([0,1])$ kiest men een element r waarvoor $\forall_{x\in(0,1)}\, [r(x) > 0]$ en definieert

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}r(t)dt \,.$$

4.1.3. <u>Stelling</u>. Zij R een IP-ruimte; dan

(v) $(\alpha f + \beta g,h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$

(vi) $(f,\alpha g + \beta h) = \bar{\alpha}(f,g) + \bar{\beta}(f,h)$

(vii) $(0,f) = 0$

(viii) $|(f,g)|^2 \le (f,f)(g,g)$ (Cauchy-Schwarz-Buniakowski) .

Bewijs. (v) en (vi) volgen direct uit (i) en (ii); $(0,f) = (0f,f) = 0(f,f) = 0$, dus ook (vii) geldt; (viii) geldt als $f = 0$.

Zij nu $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $f \in R$, $g \in R$, en $f \neq 0$ dan is $(\lambda f + \mu g, \lambda f + \mu g) \geq 0$ op grond van (iv) en (vii). Met behulp van de zojuist afgeleide regels (v) en (vi) volgt nu

$$\lambda\bar{\lambda}(f,f) + \lambda\bar{\mu}(f,g) + \bar{\lambda}\mu(g,f) + \mu\bar{\mu}(g,g) \geq 0 \; .$$

Stel $A := (f,f)$, $B := (f,g)$ en $C := (g,g)$ dan is $A > 0$, $C \geq 0$ en

$$A|\lambda|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\bar{\mu}B) + C|\mu|^2 \geq 0$$

voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ en alle $\mu \in \mathbb{C}$, in het bijzonder is voor $\lambda = \bar{B}$ en $\mu = -A$

$$A|B|^2 - 2A|B|^2 + A^2C \geq 0$$

en wegens $A \neq 0$ volgt hieruit

$$|B|^2 \leq AC \; .$$

□

4.1.4. Stelling. In een IP-ruimte R is $\| \ \|$, gedefinieerd door $\|f\| := \sqrt{(f,f)}$, een norm. (Deze norm heet de IP-norm; als we in een IP-ruimte over een norm spreken, wordt (tenzij uitdrukkelijk anders vermeld) deze norm bedoeld.)

Bewijs. Door verificatie van de in 2.1.1 genoemde voorwaarden; dit is voor 2.1.1 (i) en 2.1.1 (iii) zeer eenvoudig en we bewijzen alleen 2.1.1 (ii):

Als $h = f + g$ dan is $(h,h) = (h,f) + (h,g)$, dus

$$\|h\|^2 \leq |(h,f)| + |(h,g)| \leq \|h\|\cdot\|f\| + \|h\|\cdot\|g\|$$

volgens 4.1.3 (viii), zodat

$$\|h\| \leq \|f\| + \|g\| \; .$$

Men kan dus iedere IP-ruimte als een genormeerde lineaire ruimte opvatten. □

4.1.5. Stelling. In $C([0,1])$ is ${}_0\!\int^1 |f(t)|^2dt \leq \|f\|_\infty^2$ (zie 2.1.6.6 en 7), met andere woorden: bij het gebruikelijke inproduct $(f,g) := {}_0\!\int^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ voor $C([0,1])$ is $\|f\| \leq \|f\|_\infty$.

Bewijs. ${}_0\!\int^1 |f(t)|^2dt \leq {}_0\!\int^1 \|f\|_\infty^2 dt = \|f\|_\infty^2$. □

4.1.6. Stelling. In een IP-ruimte is (,) een continue functie.

Bewijs. Voor ieder paar f,g is (,) continu in het punt $\ulcorner f,g \urcorner \in R \times R$:

$$|(f+h,g+k) - (f,g)| = |(f,k) + (h,g) + (h,k)| \leq$$
$$\leq \|f\| \, \|k\| + \|h\| \, \|g\| + \|h\| \, \|k\| \, .$$

Zij $\varepsilon > 0$; neem $\eta := \min \{\frac{\varepsilon}{\|f\| + \|g\| + 1}, 1\}$, dan is (vergelijk bewijs 2.1.5) voor $\|h\| < \eta$ en $\|k\| < \eta$

$$|(f+h,g+k) - (f,g)| < \eta\{\|f\| + \|g\|\} + \eta^2 \leq \varepsilon \, .$$ □

4.1.7. Gevolg. Als $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ en $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ dan is

$$(f,g) = \lim_{n\to\infty} (f_n,g_n) \quad \text{en} \quad \|f\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| \, .$$

Vergelijk ook 2.1.5.

4.2. Orthonormaalsystemen in een IP-ruimte

4.2.1. Een deelverzameling Q van de IP-ruimte R heet een orthonormaalsysteem van R indien geldt

(i) $\forall_{q\in Q} [\|q\| = 1]$

(ii) $\forall_{q\in Q} \forall_{r\in Q} [q \neq r \Rightarrow (q,r) = 0]$.

Meestal bedoelt men met "orthonormaalsysteem" niet een verzameling maar een rij. Als men zegt dat $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, q_n$ een orthonormaalsysteem is, betekent dat $(q_n,q_m) = \delta_{nm}$ (Kroneckersymbool) voor alle n en m. In het bijzonder: als men zegt dat $\{q_1,\ldots,q_n\}$ een orthonormaalsysteem is, bedoelt men de rij $q_1,\ldots,q_n$.

4.2.2. Voorbeeld: We definiëren

$$\ell_e^2 := \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} [f(n) = 0]\}$$

met als inproduct

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\overline{g(n)} \qquad (f \in \ell_e^2,\ g \in \ell_e^2)\ .$$

De elementen van ℓ_e^2 zijn zg. afbrekende rijen.

In ℓ_e^2 definiëren we voor elke $p \in \mathbb{N}$ de eenheidsvector

$$q^{(p)} := \Upsilon_{j\in\mathbb{N}}\ \delta_{jp}\ .$$

Nu is $\Upsilon_{p\in\mathbb{N}}\ q^{(p)}$ een orthonormaalsysteem van ℓ_e^2.

4.2.3. Definitie. Een orthonormaalsysteem Q van R heet totaal indien $L(Q)$(zie 1.2.11) dicht in R ligt: $\overline{L(Q)} = R$.

4.2.4. Voorbeeld: Het systeem uit 4.2.2 is totaal in ℓ_e^2.

4.2.5. Stelling. In R^n is ieder orthonormaalsysteem Q met n elementen totaal.

Bewijs. Elk orthonormaalsysteem is een onafhankelijk stelsel:
Als $Q = \{q_1,\ldots,q_n\}$ orthonormaal is, en $\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n = 0$, dan is voor elke j $(1 \le j \le n)$ $(\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n, q_j) = 0$, dus $\alpha_j = 0$.

In de elementaire lineaire algebra is bewezen dat elk onafhankelijk stelsel van n vectoren een basis voor R^n is: $R^n = L(Q)$. □

4.2.6. Opmerking. Orthogonale lineaire afbeeldingen zijn gedefinieerd door de eigenschap $\forall_{f\in R^n} [\|Tf\| = \|f\|]$, zodat voor orthogonale afbeeldingen van R^n geldt $\|T\| = 1$. Kiest men in R^n een orthonormaalsysteem $\{q_1,\ldots,q_n\}$ als basis, dan kan men op één-éénduidige wijze $n\times n$-matrices toevoegen aan de elementen van $LO(R^n)$; optelling en vermenigvuldiging in $LO(R^n)$ corresponderen met optelling en vermenigvuldiging van matrices; zo blijkt dat de $n\times n$-matrices met de normering die uit 2.2.1 volgt een Banachalgebra met eenheidselement vormen (zie 3.2.2).

4.2.7. In de ruimte $C([0,1])$ met als inproduct

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad (f \in C([0,1]),\ g \in C([0,1]))$$

beschouwen we het orthonormaalsysteem dat bij de complexe Fourieranalyse behoort. Voor elk geheel getal n definiëren we

$$q^{(n)} := \Psi_{x\in[0,1]}\, e^{2\pi i n x}\ .$$

Deze vormen een orthonormaalsysteem want

$$(q^{(k)},q^{(\ell)}) = \int_0^1 e^{2\pi i(k-\ell)x}\,dx = \delta_{k\ell}\ .$$

4.2.8. Stelling. Het systeem $\Psi_{n\in\mathbb{Z}}\, q^{(n)}$ is een totaal orthonormaal systeem in $C([0,1])$.

Bewijs. We beschouwen de deelruimte

$$C_{\text{mod }1} := \{f \mid f\in C([0,1]),\ f(0)=f(1)\}$$

die dicht ligt in $C([0,1])$. We laten zien dat elke $f\in C_{\text{mod }1}$ zelfs uniform door eindige lineaire combinaties der $q^{(n)}$'s kan worden benaderd.

We kunnen elke f uit $C_{\text{mod }1}$ voortzetten tot een continue functie op $(-\infty,\infty)$ die periodiek is met periode 1. Zijn f en g functies uit $C_{\text{mod }1}$, en geven we de voortzettingen ook met f en g aan, dan geldt voor elk reëel getal a dat $(f,g) = \int_a^{a+1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Het inproduct is dus een integraal over een periode, en het doet er niet toe wèlke.

Neem een f uit $C_{\text{mod }1}$, en een $\varepsilon > 0$. Er is een $M > 0$ zó dat $|f(x)| \le M$ $(-\infty < x < \infty)$, en, wegens de stelling over de uniforme continuïteit, is er een $\delta > 0$ zó dat

$$|f(y+x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (-\delta < x < \delta,\ -\infty < y < \infty)\ .$$

We mogen aannemen dat $\delta < \frac{1}{2}$.

Laat T een functie uit $C_{\text{mod }1}$ zijn die voldoet aan $T(x) \ge 0$ (alle x), $\int_{-\frac12}^{\frac12} T(x)dx = 1$. Dan is voor alle y:

$$\left|\int_{-\frac12}^{\frac12} T(x)(f(y+x) - f(y))dx\right| \le \varepsilon + 2M\int_{\delta}^{\frac12} T(x)dx + 2M\int_{-\frac12}^{-\delta} T(x)dx\ .$$

We nemen $T(x) = c_n^{-1}\,\Psi_x\,(1+\cos 2\pi x)^n$ waarin $c_n = \int_0^1 (1+\cos 2\pi x)^n dx$, en n zó groot is gekozen dat

$$\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} T(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} T(x)dx < \varepsilon/M .$$

Het lukt om n zodanig te kiezen, want als x op een der intervallen $[\delta,\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2},-\delta]$ ligt, is

$$(1+\cos 2\pi x)^n < \left(\frac{1+\cos 2\pi\delta}{1+\cos \pi\delta}\right)^n . \delta^{-1} \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{\frac{1}{2}\delta} (1+\cos 2\pi t)^n dt < a^n . \delta^{-1} c_n$$

met een a die tussen 0 en 1 ligt en niet van n afhangt.

We hebben nu bereikt dat

$$\left| f(y) - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T(x) f(y+x) dx \right| \leq 5\varepsilon \qquad (-\infty < y < \infty) .$$

De functie $\Psi_y \quad {}_{-\frac{1}{2}}\!\int^{\frac{1}{2}} T(x) f(x+y)\, dx$ is een lineaire combinatie van $q^{(-n)}, q^{(-n+1)}, \ldots, q^{(n)}$. Want T(x) heeft de vorm $\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\, e^{-2\pi ikx}$, zodat

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T(x) f(y+x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T(x-y) f(x) dx = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi iky}\, \alpha_k \beta_k ,$$

met $\beta_k = {}_{-\frac{1}{2}}\!\int^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi ikx} f(x)dx$. □

4.3. Orthonormalisering in een IP-ruimte

4.3.1. Laat R een IP-ruimte. Een vector $f \in R$ heet <u>orthogonaal met</u> (of: <u>staat loodrecht op</u>) de deelverzameling S van R indien $(f,g) = 0$ voor iedere $g \in S$. Als S een lineaire deelruimte van R is en $h \in S$, heet h een <u>loodrechte projectie van $f \in R$ op S</u> indien $f - h$ loodrecht op S staat. We zeggen in het vervolg "projectie" in plaats van "loodrechte projectie".

Het is direct in te zien dat er hoogstens één projectie van f op S bestaat: zijn h_1 en h_2 projecties van f op S dan is

$$h_1 - h_2 \in S, \; h_1 - h_2 = (f - h_2) - (f - h_1) \; ,$$

$$(h_1 - h_2, \; h_1 - h_2) = (f - h_2, \; h_1 - h_2) - (f - h_1, \; h_1 - h_2) = 0$$

zodat $h_1 - h_2 = 0$.

4.3.2. Stelling. Als $Q := \{q_1, \ldots, q_n\}$ een orthonormaalsysteem is in R, en $f \in R$, dan is $\sum_{i=1}^{n} (f,q_i)q_i$ de projectie van f op L(Q).

Bewijs. Als $f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i$ loodrecht op L(Q) staat, dan is het inproduct met elke q_j nul, dus $(f,q_j) - \alpha_j = 0$ $(j = 1,\ldots,n)$. Inderdaad staat ook $f - \sum_{i=1}^{n} (f,q_i)q_i$ loodrecht op L(Q). □

4.3.3. Stelling. Als $F := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} f_n$ een onafhankelijk stelsel vectoren in R is, dan bestaat er een orthonormaalsysteem $Q := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} q_n$ in R zó dat L(Q) = L(F) (orthonormaliseringsprocédé van Erhard Schmidt).

Bewijs. $f_1 \neq 0$, zij $q_1 := \|f_1\|^{-1} f_1$, $h_2 := f_2 - (f_2,q_1)q_1$; dan is $h_2 \neq 0$; zij $q_2 := \|h_2\|^{-1} h_2$; nu is direct te verifiëren dat $\{q_1,q_2\}$ een orthonormaal stelsel is en dat

$$L(\{q_1,q_2\}) = L(\{f_1,f_2\}) \; .$$

Zij nu

$$h_3 := f_3 - \sum_{i=1}^{2} (f_3,q_i)q_i \; ,$$

dan is $h_3 \neq 0$; zij $q_3 := \|h_3\|^{-1} h_3$, dan is $\{q_1,q_2,q_3\}$ een orthonormaal stelsel en

$$L(\{q_1,q_2,q_3\}) = L(\{f_1,f_2,f_3\}) \; .$$

Stel dat het gelukt is om een stelsel $\{q_1,\ldots,q_n\}$ te construeren met de eigenschappen

$$A(n) : \{q_1,\ldots,q_n\} \text{ is orthonormaal}$$

$$B(n) : L(\{q_1,\ldots,q_n\}) = L(\{f_1,\ldots,f_n\}) \; .$$

Neem

$$h_{n+1} := f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (f_{n+1},q_i)q_i \ .$$

Wegens B(n) is

$$\sum_{i=1}^{n} (f_{n+1},q_i)q_i \in L(\{f_1,\dots,f_n\})$$

zodat $h_{n+1} \neq 0$. Zij $q_{n+1} := \|h_{n+1}\|^{-1} h_{n+1}$ dan is $(j = 1,\dots,n)$

$$(q_{n+1},q_j) = \|h_{n+1}\|^{-1}(h_{n+1},q_j) =$$

$$= \|h_{n+1}\|^{-1} \{(f_{n+1},q_j) - \sum_{i=1}^{n} (f_{n+1},q_i)(q_i,q_j)\}$$

$$= \|h_{n+1}\|^{-1} \{(f_{n+1},q_j) - (f_{n+1},q_j)\} = 0$$

en

$$(q_{n+1},q_{n+1}) = \|h_{n+1}\|^{-2}(h_{n+1},h_{n+1}) = 1 \ ,$$

zodat A(n+1) geldt.

Uit de definities van h_{n+1} en q_{n+1} volgt in verband met B(n) zowel

$$q_{n+1} \in L(\{f_1,\dots,f_{n+1}\}) \quad \text{als} \quad f_{n+1} \in L(\{q_1,\dots,q_{n+1}\}) \ ,$$

zodat ook B(n+1) bewezen is.

Op deze manier is het stelsel $Q := \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ recursief gedefinieerd; *Q is op grond van het voorgaande orthonormaal en*

$$L(Q) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(\{q_1,\dots,q_n\}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(\{f_1,\dots,f_n\}) = L(F) \ . \qquad \square$$

4.3.4. Opmerkingen. Als $F' := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een deelverzameling is van R kan men F' door uitdunning over laten gaan in een onafhankelijk stelsel $F \subset F'$: Neem in de rij $f_1,f_2,\dots$ de eerste vector die $\neq 0$ is en noem die f_1'; neem vervolgens de eerstvolgende die niet tot $L(f_1')$ behoort, f_2'; neem vervolgens de eerste die niet tot $L(\{f_1',f_2'\})$ behoort, f_3'; enz. Als dit proces niet na eindig veel stappen eindigt ontstaat de situatie van stelling 4.3.3; als het proces na eindig veel stappen eindigt ontstaat een eindig onafhankelijk stelsel $F \subset F'$; in beide gevallen is $L(F) = L(F')$.

Het orthonormaliseringsprocédé van stelling 4.3.3 is natuurlijk ook op eindige stelsels F van toepassing.

4.3.5. Voorbeeld: In $C([0,1])$ met inproduct $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ vormen de functies f_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) met $f_n(t) := t^n$ een onafhankelijk stelsel. Door orthonormalisatie ontstaan hieruit de polynomen:

$$q_0(t) = 1 \;;$$

$$h_1(t) \text{ (in de terminologie van 4.3.3) } = f_1(t) - \int_0^1 f_1(t)q_0(t)dt =$$

$$= t - \int_0^1 t\,dt = t - \tfrac{1}{2} \,,$$

zodat

$$\|h_1\|^2 = \int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{12} \quad \text{en} \quad q_1(t) = 2\sqrt{3}(t-\tfrac{1}{2});$$

$$h_2(t) = t^2 - \int_0^1 t^2 dt - 2\sqrt{3}(t-\tfrac{1}{2}) \int_0^1 2\sqrt{3}(t-\tfrac{1}{2})t^2 dt =$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - (t-\frac{1}{2}) = t^2 - t + \frac{1}{6} \,,$$

zodat

$$\|h_2\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})dt = \frac{1}{180} \text{ en } q_2(t) = 6\sqrt{5}(t^2 - t + \frac{1}{6}) \;;$$

op analoge wijze vinden we

$$h_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20} \,, \; \|h_3\|^2 = \frac{1}{2800} \,,$$

$$q_3(t) = 20\sqrt{7}(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}) \;; \text{ enzovoorts.}$$

4.3.6. Lineaire afhankelijkheid van vectoren is aan hun inwendige producten te zien:

Stelling. Opdat het stel $F := \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ in de ruimte R afhankelijk is, is nodig en voldoende dat

$$\begin{vmatrix} (f_1,f_1) & (f_1,f_2) & \dots & (f_1,f_n) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) & \dots & (f_2,f_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_n,f_1) & (f_n,f_2) & \dots & (f_n,f_n) \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

(deze determinant staat bekend als de determinant van Gram).

Bewijs. Als F afhankelijk is, is er een $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^n\backslash\{0\}$ zō dat $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$ en is er een element van F, bijvoorbeeld f_1, dat lineair in de overige kan worden uitgedrukt: $f_1 = \sum_{i=2}^n \beta_i f_i$. Voor de determinant van Gram, ω, geldt dan

$$\omega = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \begin{vmatrix} (f_i,f_1) & (f_i,f_2) & \dots & (f_i,f_n) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) & \dots & (f_2,f_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_n,f_1) & (f_n,f_2) & \dots & (f_n,f_n) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Omgekeerd: als $\omega = 0$, zijn de rijvectoren in ω afhankelijk, er bestaat een $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^n\backslash\{0\}$ zō dat

$$\forall_{k=1,\dots,n} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i, f_k) = 0 \right]$$

of

$$\forall_{k=1,\dots,n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, f_k \right) = 0 \right] \ ;$$

hieruit volgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \right) = 0$$

of

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$$

en F is afhankelijk. □

4.3.7. Laat R resp. S twee IP-ruimten zijn met inproducten (,) resp. [,]. We zeggen dat R en S isomorf zijn indien er een lineaire afbeelding φ van R in S bestaat die één-éénduidig en op is. φ heet dan een isomorfisme van R en S.

Indien er een isomorfisme φ van R en S bestaat zó dat voor iedere $f_1 \in R$, $f_2 \in R$

$$[\varphi f_1, \varphi f_2] = (f_1, f_2) ,$$

zeggen we dat R en S isometrisch zijn en φ heet een isometrie van R en S.

4.3.8. Stelling. Als $n \in \mathbb{N}$ en R een IP-ruimte is met dim(R) = n, dan is R isomorf en isometrisch met de numerieke R^n uit voorbeeld 4.1.2 (i).

Bewijs. Er bestaat een onafhankelijk stelsel van n vectoren in R, dus (4.3.3) ook een orthonormaalsysteem $\{q_1,\dots,q_n\}$. De afbeelding

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \to \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n \qquad ((\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^n)$$

is nu lineair, één-éénduidig, op en isometrisch. □

4.3.9. Stelling. Opdat de IP-ruimte R een hoogstens aftelbaar totaal orthonormaalsysteem bevat is nodig en voldoende dat R separabel is.

Bewijs. Als R separabel is, is er een stelsel $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in R met $\overline{\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = R$ zodat zeker geldt $\overline{L(\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})} = R$. Door uitdunnen en orthonormaliseren van het stelsel $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ontstaat het eindige of aftelbare orthonormaalsysteem Q met $\overline{L(Q)} = R$. Dat wil zeggen dat Q totaal is.

Is, omgekeerd, Q een eindig of aftelbaar totaal orthonormaalsysteem in R, dan is de verzameling $\tilde{L}(Q)$ van rationale eindige lineaire combinaties van elementen van Q een aftelbare verzameling (rationaal betekent hier: met behulp van complexe getallen waarvan zowel het reële als het imaginaire deel rationaal zijn).

Zij $f \in R$ en $\varepsilon > 0$; omdat Q totaal is, is er een eindig aantal elementen $q_1,\dots,q_n \in Q$ en een $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ zō dat $\| f - \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j \| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Bepaal rationale getallen β_j en γ_j $(j = 1,\dots,n)$ zō dat

$$\forall_{j=1,\dots,n} \left[|\beta_j - \mathrm{Re}\, \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{4n} \wedge |\gamma_j - \mathrm{Im}\, \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{4n} \right]$$

dan is

$$\| \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j - \sum_{j=1}^n (\beta_j + i\gamma_j) q_j \| \le \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \beta_j - i\gamma_j| \, \| q_j \| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dus

$$\| f - \sum_{j=1}^n (\beta_j + i\gamma_j) q_j \| < \varepsilon ,$$

m.a.w. $\overline{\widetilde{L}(Q)} = R$ en R is separabel. □

4.3.10. Stelling. Als de vectoren $f_1,\dots,f_n$ onderling orthogonaal zijn, geldt

$$\| \sum_{j=1}^n f_j \|^2 = \sum_{j=1}^n \| f_j \|^2$$

(stelling van Pythagoras).

Bewijs. $\| \sum_{j=1}^n f_j \|^2 = \left(\sum_{j=1}^n f_j, \sum_{k=1}^n f_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (f_j, f_k) =$

$$= \sum_{j=1}^n (f_j, f_j) = \sum_{j=1}^n \| f_j \|^2 .$$ □

4.3.11. Gevolg. Als $q_1,\dots,q_n$ orthonormaal zijn, en $f \in R$, dan is

$$\| f \|^2 = \| f - \sum_{j=1}^n (f,q_j) q_j \|^2 + \sum_{j=1}^n |(f,q_j)|^2 ,$$

want $q_1,\dots,q_n$, $f - \sum_{j=1}^n (f,q_j) q_j$ zijn onderling orthogonaal (zie 4.3.2).

4.3.12. Stelling. Als $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\, q_n$ een orthonormaal stelsel is in R dan geldt voor iedere $f \in R$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f,q_j)|^2 \leq \|f\|^2$$

(ongelijkheid van Bessel).

Bewijs. Uit 4.3.11 volgt dat voor elke n geldt

$$\sum_{j=1}^{n} |(f,q_j)|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Laat nu n naar oneindig gaan. □

4.3.13. Definitie. Als $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\, q_n$ een orthonormaal stelsel is in R, en $f \in R$, dan heet de reeks

$$\sum_{j=1}^{\infty} (f,q_j)q_j$$

(waarvan de convergentie nog ter discussie staat), de Fourierreeks van f. De coëfficiënten (f,q_j) heten de Fouriercoëfficiënten van f (t.o.v. dat orthonormaalsysteem).

We zeggen dat een reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q_j$ (met $\alpha_j \in \mathbb{C}$) convergeert en som f heeft, als

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j\| = 0 .$$

We drukken dit ook uit door eenvoudig te zeggen dat $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q_j$ (merk op dat een convergente reeks slechts één som kan hebben).

4.3.14. Stelling. Als $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\, q_n$ een orthonormaalsysteem is, en $f \in R$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(j \in \mathbb{N})$, en $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q_j$, dan is $(f,q_k) = \alpha_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Bewijs. Fixeer k. Voor $n \geq k$ is

$$(f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j \, , q_k) = (f,q_k) - \alpha_k .$$

Als $n \to \infty$, gaat het linkerlid naar 0. Dus $(f,q_k) = \alpha_k$. □

4.3.15. Stelling. Als $\{q_1,\ldots,q_n\}$ een (eindig) orthonormaalsysteem is in R, en $f \in R$, $\alpha_1 \in \mathbb{C},\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$, dan is

$$\| f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j \| \geq \| f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j \|$$

met gelijkheid slechts als $\alpha_j = (f,q_j)$ $(j = 1,\ldots,n)$.

Bewijs. $f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j = \left[f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j \right] + \sum_{j=1}^{n} [(f,q_j) - \alpha_j]q_j$.

Het rechterlid bestaat uit $n+1$ termen, die loodrecht op elkaar staan. Pas op de som van die $n+1$ termen de stelling van Pythagoras toe. □

4.3.16. Stelling. In de IP-ruimte R met het orthonormaalsysteem $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\, q_n$ zijn de volgende voorwaarden equivalent:

(i) $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is totaal,

(ii) $\forall_{f\in R} [f = \sum_{k=1}^{\infty} (f,q_k)q_k]$,

(iii) $\forall_{f\in R} [\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f,q_k)|^2]$,

(iv) $\forall_{f\in R} \forall_{g\in R} [(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f,q_k)(q_k,g)]$.

Bewijs. (i) ⇒ (iii). Neem (i) aan. Neem een $f \in R$ en een $\varepsilon > 0$; zoek daarbij $n, \alpha_1,\ldots,\alpha_n$ zó dat $\| f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j \| < \varepsilon$. Volgens 4.3.15 is nu $\| f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j \| < \varepsilon$. Uit 4.3.11 blijkt nu dat er bij elke ε een n is zó dat $\left| \| f \|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(f,q_j)|^2 \right| < \varepsilon^2$. Hieruit volgt (iii).

(ii) ⇔ (iii). Direct uit 4.3.11.

(ii) ⇒ (i). Uit (ii) volgt dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een eindige lineaire combinatie is, nl. een $\sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j$, die tot f een afstand $< \varepsilon$ heeft.

(ii) ⇒ (iv). Volgt direct uit

$$|(f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j, g)| \leq \| f - \sum_{j=1}^{n} (f,q_j)q_j \| \cdot \| g \| .$$

(iv) ⇒ (iii). Dit volgt door g in (iv) te specialiseren tot f. □

4.3.17. Een orthonormaalsysteem heet maximaal als het niet lukt er vectoren aan tot te voegen zó dat het een orthonormaalsysteem blijft.

Elk totaal orthonormaalsysteem is maximaal. Is nl. $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ een totaal orthonormaalsysteem, en is p een vector met $(p, q_j) = 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$, dan is (zie 4.3.16 (ii)) $p = 0$. Het lukt dus niet om Q uit te breiden.

4.3.18. We geven nu een voorbeeld van een maximaal orthonormaalsysteem dat niet totaal is. In ℓ_e^2 (zie 4.2.2) nemen we

$$v_1 = (1, -2, 0, 0, \dots)$$

$$v_2 = (1, 0, -4, 0, 0, \dots)$$

$$v_3 = (1, 0, 0, -8, 0, \dots) \text{ etc.}$$

Laat $q_1, q_2, q_3, \dots$ het orthonormaalsysteem zijn dat hieruit door orthonormaliseren ontstaat.

Zij $p \in \ell_e^2$, p loodrecht op alle q_i. Dan is p loodrecht op alle v_i. Verder is $p = (a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$. Uit $p \perp v_n$ blijkt $a_1 = 0$, uit $p \perp v_1$ blijkt nu $a_2 = 0$, uit $p \perp v_2$ blijkt $a_3 = 0, \dots$ enz. Dit sluit $\|p\| = 1$ uit. Het systeem is dus maximaal.

De afstand van $(1,0,0,\dots)$ tot $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ bedraagt

$$|1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)|^2 + 4|\lambda_1|^2 + \dots + 2^{2n}|\lambda_n|^2 .$$

Dit is niet $< \frac{1}{4}$, want anders zou $|\lambda_1|^2 < \frac{1}{16}, \dots, |\lambda_n|^2 < 2^{-2n-2}$, en dus

$$|\lambda_1 + \dots + \lambda_n| < \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots < \frac{1}{2} ,$$

zodat $|1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)| > \frac{1}{2}$. We hebben dus een vector $(1,0,0,\dots)$ die niet willekeurig goed is te benaderen door lineaire combinaties van de v_i's. Dus het systeem $q_1, q_2, \dots$ is niet totaal.

Om een inzicht te geven in de constructie van dit voorbeeld: in de grotere ruimte ℓ^2 (zie 5.1.5) is $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$ een vector die loodrecht op alle v's staat.

4.4. Lineaire deelruimten in een IP-ruimte

4.4.1. Zij R een IP-ruimte; we gebruiken de notatie $f \perp S$ voor een $f \in R$ en een $S \subset R$ indien f loodrecht op S staat (zie 4.3.1); en evenzo betekent, met $S \subset R$ en $Q \subset R$, $S \perp Q$ dat

$$\forall_{f \in S} \forall_{g \in Q} [(f,g) = 0] .$$

Als $S \subset R$ verstaan we onder het orthogonale complement van S ten opzichte van R de verzameling

$$R \ominus S := \{f \in R \mid f \perp S\} .$$

4.4.2. Indien S en Q deelverzamelingen zijn van een IP-ruimte R, en $S \perp Q$, dan noemt men $S + Q$ (zie 1.2.19) de orthogonale som van S en Q, gewoonlijk genoteerd met $S \oplus Q$. Indien S en Q orthogonale lineaire deelruimten zijn, is $S \cap Q = \{0\}$, zodat $S \oplus Q$ dan ook directe som is.

4.4.3. Stelling. Voor iedere deelverzameling S van R is $R \ominus S$ een gesloten lineaire deelruimte.

Bewijs. $0 \in R \ominus S$, zodat $R \ominus S \neq \emptyset$ is.

Als $f,g \in R \ominus S$ en $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ is

$$\forall_{h \in S} [(\alpha f + \beta g,h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h) = 0]$$

zodat $R \ominus S$ een lineaire deelruimte is.

Als $\forall_{n \in \mathbb{N}} [f_n \in R \ominus S]$ en $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, is

$$\forall_{h \in S} [(f,h) = (\lim_{n\to\infty} f_n,h) = \lim_{n\to\infty} (f_n,h) = 0]$$

wegens de continuïteit van het inproduct; met andere woorden: $f \in R \ominus S$. Derhalve is $R \ominus S$ een gesloten lineaire deelruimte. □

4.4.4. Uit stelling 4.4.3 blijkt dat het begrip orthogonaal complement niet wederkerig is: als S niet een gesloten lineaire deelruimte is, geldt zeker niet $S = R \ominus (R \ominus S)$. Als S evenwel een volledige lineaire deelruimte is, geldt $S = R \ominus (R \ominus S)$, hetgeen hierna in stelling 4.4.8 zal worden bewezen. In de later te bespreken Hilbertruimte (volledige IP-ruimte, zie hoofdstuk 5) waar elke gesloten verzameling volledig is (stelling 1.6.2), geldt dus voor iedere gesloten lineaire deelruimte S dat $S = R \ominus (R \ominus S)$ en in verband met stelling 4.4.3 tevens dat $R \ominus S$ weer volledig is.

4.4.5. Stelling. Als S een lineaire deelruimte van de IP-ruimte R is, als $f \in R$, $g \in S$, en als

$$\forall_{h \in S} [\| f - h \| \geq \| f - g \|]$$

dan is $f - g \perp S$.

Bewijs. Neem $k \in S$. We willen bewijzen dat $(f-g,k) = 0$, en daartoe is het geen bezwaar aan te nemen dat $\| k \| = 1$. We projecteren nu $f - g$ op de door k opgespannen eendimensionale deelruimte: $f - g = (f - g,k)k + p$, waarbij $p \perp k$. Volgens stelling 4.3.10 (Pythagoras) is

$$|(f - g,k)|^2 = \| f - g \|^2 - \| p \|^2 .$$

Het rechterlid is ≤ 0 omdat p te schrijven is als $f - h$ met $h \in S$. □

4.4.6. Stelling. Als S een volledige lineaire deelruimte van de IP-ruimte R is, en $f \in R$ dan is er een $g \in S$ met $f - g \perp S$.

Bewijs. Zij $d := \inf\{\| f - h \| \mid h \in S\}$. Bij elke $n \in \mathbb{N}$ kiezen we een $g_n \in S$ met $\| f - g_n \| < d + 2^{-n}$.

Op grond van de in elke IP-ruimte geldende betrekking

$$\| a + b \|^2 + \| a - b \|^2 = 2\| a \|^2 + 2\| b \|^2$$

geldt

$$\| g_{n+1} - g_n \|^2 = \| (f - g_{n+1}) - (f - g_n) \|^2 =$$

$$= 2\| f - g_{n+1} \|^2 + 2\| f - g_n \|^2 - 4\| f - \tfrac{1}{2}(g_{n+1} + g_n) \|^2 \leq$$

$$\leq 2(d + 2^{-n})^2 + 2(d + 2^{-n})^2 - 4d^2 = 2^{-n+3}\, d + 2^{-2n+2},$$

zodat $\sum_{n=1}^{\infty} \| g_{n+1} - g_n \|$ convergeert. Er is dus een $g \in S$ met $\| g_n - g \| \to 0$ (want S is volledig). Uit de continuïteit van de norm (stelling 2.1.5) volgt nu $\| f - g \| = d$. Wegens 4.4.5 is nu $f - g \perp S$. □

4.4.7. Stelling. Als S en Q orthogonale lineaire deelruimten van de IP-ruimte R zijn, en $R = S \oplus Q$, dan is $S = R \ominus Q$.

Bewijs. Uit $S \perp Q$ volgt $S \subset R \ominus Q$. Als $f \in R \ominus Q$ dan is $f \in R$, $f \perp Q$; splits $f = g + h$, $g \in S$, $h \in Q$, dan blijkt $(h,h) = (h,f) - (h,g) = 0 - 0 = 0$, dus $h = 0$, en daarom is $f = g \in S$. □

4.4.8. Stelling. Als S een volledige deelruimte van de IP-ruimte R is, dan is $R = S \oplus (R \ominus S)$, $S = R \ominus (R \ominus S)$.

Bewijs. Uit stelling 4.4.6 volgt $R = S + (R \ominus S)$; en uit de definitie van $R \ominus S$ volgt $S \perp R \ominus S$. Derhalve $R = S \oplus (R \ominus S)$. Uit stelling 4.4.7 volgt dat nu ook $S = R \ominus (R \ominus S)$. □

4.5. De geadjungeerde van een operator

4.5.1. Zij R een IP-ruimte.

4.5.2. Definitie. Als $T \in LO(R)$, $S \in LO(R)$ en als voor alle $f \in R$, $g \in R$

$$(Tf,g) = (f,Sg)$$

dan heten S en T geadjungeerde operatoren.

4.5.3. Opmerking. Uit $(Tf,g) = (f,Sg)$ volgt $(Sg,f) = (g,Tf)$; als S en T geadjungeerd zijn dan zijn ook T en S geadjungeerd.

4.5.4. Voorbeelden: (i) Zij $R = C([0,1])$ met het gebruikelijke inproduct. Met een vaste $\varphi \in C([0,1])$ definiëren we de "vermenigvuldingsoperator" V_φ door

$$V_\varphi f = \Upsilon_x (\varphi(x)f(x)) .$$

Als φ en ψ voldoen aan $\varphi(x) = \overline{\psi(x)}$ $(0 \le x \le 1)$ dan zijn V_φ en V_ψ geadjungeerd.

(ii) Zij $R = C([0,1] \times [0,1])$. Op R nemen we als inproduct

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x,y)\, \overline{L(x,y)}\, dxdy \qquad (K \in R,\ L \in R) .$$

Indien $K \in R$ dan definiëren we de "integraaloperator" T_K door

$$T_K f = \Upsilon_x \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \qquad (f \in C([0,1])) .$$

K heet de kern van T_K. Als K en L voldoen aan $K(x,y) = \overline{L(y,x)}$ $(0 \le x \le 1,$ $0 \le y \le 1)$ dan zijn T_K en T_L geadjungeerd.

4.5.5. Voorbeeld van een lineaire operator zonder geadjungeerde. We beschouwen de ruimte ℓ_e^2 (zie 4.2.2) en definiëren T door

$$T(\Psi_j\ \alpha_j) := (\sum_j \alpha_j, 0, 0, \ldots) \qquad (\alpha \in \ell_e^2)\ .$$

Als $n \in \mathbb{N}$ dan schrijven we f_n voor het element van ℓ_e^2 met $\forall_{j=1,\ldots,n}\ [\alpha_j = 1]$, $\forall_{j>n}\ [\alpha_j = 0]$. Er geldt nu

$$\| f_n \| = n^{\frac{1}{2}}\ ,\ (Tf_n, f_1) = n \qquad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Als S geadjungeerde van T is, dan moet voor iedere $n \in \mathbb{N}$

$$(f_n, S f_1) = n,\ \| f_n \| \cdot \| S f_1 \| \geq n \text{ en dus } \| S f_1 \| \geq n^{\frac{1}{2}}\ .$$

Derhalve bestaat er geen geadjungeerde van T.

4.5.6. Hulpstelling. Als $g \in R$, $h \in R$ de eigenschap hebben dat voor alle $f \in R$ $(f,g) = (f,h)$, dan is $g = h$.

Bewijs. Neem $f = g - h$. □

4.5.7. Stelling. Bij elke $T \in LO(R)$ is er hoogstens één $S \in LO(R)$ met T geadjungeerd. Als er zo'n S bestaat, heet die de geadjungeerde van T, en wordt met T^* aangeduid.

Bewijs. Als $(Tf,g) = (f,S_1 g)$ en $(Tf,g) = (f,S_2 g)$ voor alle f, dan is $(f,S_1 g) = (f,S_2 g)$ voor alle f, dus $S_1 g = S_2 g$. □

4.5.8. Stelling. Als T een geadjungeerde heeft, heeft T^* er ook een, en $(T^*)^* = T$.

Bewijs. Zie 4.5.3. □

4.5.9. Stelling. Als S en T geadjungeerden hebben, en $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$, dan hebben $\alpha S + \beta T$ en ST ook geadjungeerden, nl. $\bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*$ resp. $T^* S^*$.

Bewijs. Als voor alle f,g geldt $(Sf,g) = (f,S^*g)$, $(Tf,g) = (f,T^*g)$, dan is

$$((\alpha S + \beta T)f,g) = \alpha(f,S^*g) + \beta(f,T^*g) = (f,(\bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*)g)\ ,$$

$$(STf,g) = (S(Tf),g) = (Tf,S^*g) = (f,T^*(S^*g)) = (f,(T^*S^*)g)\ . \qquad □$$

4.5.10. Stelling. Als $T \in BLO(R)$, en als T een geadjungeerde T^* heeft, dan is ook $T^* \in BLO(R)$, en $\|T^*\| = \|T\|$.

Bewijs. Voor alle $f \in R$, $f \neq 0$, geldt

$$\|T^*f\|^2 = (T^*f, T^*f) = (T(T^*f), f) ,$$

dus

$$\|T^*f\|^2 \leq \|T(T^*f)\| \, \|f\| \leq \|T\| \, \|T^*f\| \, \|f\| ,$$

waaruit volgt

$$\|T^*f\| / \|f\| \leq \|T\| .$$

Door supremum te nemen zien we dat $\|T^*\| \leq \|T\|$. Daar ook T de geadjungeerde van T^* is, geldt evenzo $\|T\| \leq \|T^*\|$. Dus $\|T\| \leq \|T^*\| \leq \|T\|$, zodat $\|T^*\| = \|T\|$. □

4.5.11. Definitie. Als $T \in LO(R)$, en als T zichzelf tot geadjungeerde heeft, dus $(Tf,g) = (f,Tg)$ voor alle $f,g \in R$, dan heet T hermitisch.

Als T hermitisch is en bovendien $(Tf,f) \geq 0$ voor alle $f \in R$, dan heet T niet-negatief definiet hermitisch.

Als T hermitisch is en bovendien $(Tf,f) > 0$ voor alle $f \in R$, $f \neq 0$, dan heet T positief definiet hermitisch.

4.5.12. Voorbeelden: (i) Als de φ uit 4.5.4 uitsluitend reële waarden heeft, is V_φ hermitisch. Als $\varphi(x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq 1)$ dan is V_φ niet-negatief definiet, als $\varphi(x) > 0$ $(0 \leq x \leq 1)$ dan is V_φ positief definiet.

(ii) Als de K uit 4.5.4 voldoet aan $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ voor $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, dan is T_K hermitisch.

(iii) Als $R = S \oplus Q$ (zie 4.4.2) dan zijn de operatoren P_S en P_Q (zie 1.2.19) hermitisch. Want als f en g naar S en Q gesplitst zijn als $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$ met $f_1 \in S$, $g_1 \in S$ en $f_2 \in Q$, $g_2 \in Q$ dan is

$$(P_S f,g) = (f_1,g_1+g_2) = (f_1,g_1) ,$$

$$(f,P_S g) = (f_1+f_2,g_1) = (f_1,g_1) .$$

Dus P_S is hermitisch, evenals P_Q.

4.5.13. Stelling. Als $T \in LO(R)$ een geadjungeerde heeft dan zijn T^*T en TT^* niet-negatief definiet hermitisch.

Bewijs. Voor $f \in R$ en $g \in R$ geldt

$$((T^*T)f,g) = (T^*(Tf),g) = (Tf,Tg) = (f,T^*(Tg)) = (f,(T^*T)g) ,$$

dus T^*T is hermitisch. Voor TT^* (die niet altijd gelijk is aan T^*T) geldt hetzelfde (vergelijk 4.5.3). Verder is

$$(T^*Tf,f) = (Tf,Tf) = \|Tf\|^2 \geq 0 ,$$

$$(TT^*f,f) = (T^*f,T^*f) = \|T^*f\|^2 \geq 0 .$$ □

4.5.14. Stelling. Als T hermitisch is zijn alle eigenwaarden van T reëel (zie 1.2.13); eigenvectoren f en g die bij verschillende eigenwaarden behoren staan loodrecht op elkaar.

Bewijs. Als $Tf = \lambda f$, dan is $(Tf,f) = (f,Tf)$, dus $\lambda(f,f) = \bar{\lambda}(f,f)$. Als f eigenvector is, is $f \neq 0$, dus $\lambda = \bar{\lambda}$.

Als $Tf = \lambda f$, $Tg = \mu g$ dan is $\lambda(f,g) = (Tf,g) = (f,Tg) = \bar{\mu}(f,g)$, dus $(\lambda - \bar{\mu})(f,g) = 0$. Als verder $f \neq 0$, $g \neq 0$ dan zijn λ en μ reëel, dus als $\lambda \neq \mu$ dan is $(f,g) = 0$. □

4.5.15. Zij nu in het vervolg van deze paragraaf R een separabele IP-ruimte met een totaal orthonormaalsysteem Q. In de volgende beweringen veronderstellen we dat Q aftelbaar is, $Q := \{q_j \mid j \in \mathbb{N}\}$; het geval dat Q eindig is kan (met geringe notatiewijzigingen) geheel analoog worden behandeld.

4.5.16. Stelling. Als $T \in LO(R)$ en als T de geadjungeerde T^* heeft dan geldt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Tq_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|T^*q_j\|^2 \leq \infty .$$

Bewijs. Stel eerst $\sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 < \infty$; voor alle $N \in \mathbb{N}$ is (zie 4.3.16)

$$\sum_{j=1}^{N} \| T^* q_j \|^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} |(T^* q_j, q_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} |(q_j, Tq_k)|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \| Tq_k \|^2 ,$$

zodat ook

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| T^* q_j \|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 ;$$

de omgekeerde ongelijkheid leidt men nu op analoge wijze af.
Indien $\sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 = \infty$ volgt uit het voorgaande dat ook $\sum_{j=1}^{\infty} \| T^* q_j \|^2 = \infty$. □

4.5.17. Stelling. Als $T \in LO(R)$ en als T de geadjungeerde T^* heeft dan geldt voor ieder totaal orthonormaalsysteem $S := \{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| Ts_k \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 .$$

Bewijs. Als $\sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 < \infty$ dan is voor alle $N \in \mathbb{N}$ (zie 4.3.16)

$$\sum_{k=1}^{N} \| T^* s_k \|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |(T^* s_k, q_j)|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} |(s_k, Tq_j)|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2$$

zodat ook

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| T^* s_k \|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2$$

en op grond van stelling 4.5.16

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| Ts_k \|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 ;$$

de omgekeerde ongelijkheid verkrijgt men nu op analoge wijze.
Indien $\sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 = \infty$ volgt uit het voorgaande dat ook $\sum_{k=1}^{\infty} \| Ts_k \|^2 = \infty$. □

4.5.18. Definitie. Een lineaire operator T van een separabele IP-ruimte R heet een operator met eindige dubbelnorm indien T een geadjungeerde T^* heeft en er in R een totaal orthonormaalsysteem $\{q_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ bestaat waarvoor $\sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 < \infty$.

Als T een eindige dubbelnorm heeft noemt men

$$|||T||| := \{ \sum_{j=1}^{\infty} \| Tq_j \|^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

de dubbelnorm van T; deze definitie is geoorloofd omdat ze niet van de keuze van het orthonormaalsysteem afhangt (4.5.17). Uit 4.5.16 volgt direct dat T^* ook een eindige dubbelnorm heeft en dat $|||T^*||| = |||T|||$.

4.5.19. Stelling. Als T een lineaire operator is met een eindige dubbelnorm, is T begrensd en $\| T \| \le |||T|||$.

Bewijs.

$$\| Tf \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(Tf,q_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(f,T^*q_j)|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \| f \|^2 \| T^*q_j \|^2 =$$

$$= \| f \|^2 \, |||T^*|||^2 = \| f \|^2 \, |||T|||^2$$

zodat

$$\forall_{f \neq 0} \left[\frac{\| Tf \|}{\| f \|} \le |||T||| \right] . \qquad \square$$

4.6. Opmerkingen over zwakke convergentie (zie 2.2.8)

4.6.1. In een IP-ruimte R geldt voor elke $g \in R$ dat

$$L_g := \Psi_{f \in R} \, (f,g)$$

een begrensde lineaire functionaal is, want voor $f \in R$, $h \in R$, $\alpha \in \mathbb{C}$ vinden we achtereenvolgens

$$L_g(f+h) = (f+h,g) = (f,g) + (h,g) = L_g(f) + L_g(h) ,$$

$$L_g(\alpha f) = (\alpha f,g) = \alpha(f,g) = \alpha L_g(f) ,$$

$$|L_g(f)| = |(f,g)| \le \| f \| \, \| g \| .$$

Uit $f_n \rightharpoonup f$ volgt dus $(f_n,g) \to (f,g) \qquad (g \in R)$.

4.6.2. Stelling. Als $f_n \rightharpoonup f$ en $f_n \rightharpoonup g$ dan $f = g$.

Bewijs. Zij L_{f-g} de op grond van 4.6.1 bij $f-g$ behorende begrensde lineaire functionaal. Dan geldt

$$L_{f-g}(f_n) \to L_{f-g}(f) ,$$
$$L_{f-g}(f_n) \to L_{f-g}(g) ,$$

zodat

$$L_{f-g}(f) = L_{f-g}(g) \quad \text{en} \quad L_{f-g}(f-g) = 0$$

of

$$(f-g, f-g) = 0 .$$

Hieruit volgt $f = g$. □

4.6.3. Stelling. Zij R een IP-ruimte (separabiliteit of volledigheid worden niet ondersteld); als $f_n \rightharpoonup f$ en $\|f_n\| \le 1$ $(n \in \mathbb{N})$ dan is ook $\|f\| \le 1$.

Bewijs. Merk op dat $(f_n,f) \to (f,f)$. Derhalve is ook $|(f,f_n)| \to |(f,f)|$. Nu is op grond van 4.1.3 (viii) en het gegeven

$$|(f,f_n)| \le \|f\| \, \|f_n\| \le \|f\|$$

zodat ook

$$\|f\|^2 \le \|f\| ,$$

en hieruit volgt $0 \le \|f\| \le 1$. □

4.6.4. Stelling. Zij R een willekeurige IP-ruimte (separabiliteit of volledigheid worden niet ondersteld); zij S een volledige lineaire deelruimte. Als $f_n \rightharpoonup f$ en $f_n \in S$ $(n \in \mathbb{N})$ dan is ook $f \in S$.

Bewijs. f heeft volgens 4.4.6 een projectie g in S: $f = g + h$ met $g \in S$ en $h \in R \ominus S$. Nu geldt op grond van $f_n \rightharpoonup f$ dat $(f_n,h) \to (f,h)$, maar $(f_n,h) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Dus $(f,h) = 0$ en wegens $(g,h) = 0$, $(h,h) = (f-g,h) = (f,h) - (g,h) = 0$ moet $h = 0$. Hieruit volgt dat $f = g \in S$. □

5. Hilbertruimte

5.1. Inleiding en voorbeelden

5.1.1. Een IP-ruimte R heet Hilbertruimte (H-ruimte) indien ze met de IP-norm een B-ruimte is. Als R bovendien separabel is, is R een separabele Hilbertruimte (SH-ruimte).

5.1.2. Voorbeeld: R^n is een H-ruimte; volgens 4.1.2 (i) is R^n een IP-ruimte; de IP-norm is

$$\| f \| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f(i)\overline{f(i)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^2} ,$$

en met deze norm is R^n volgens 3.1.2 een B-ruimte.

5.1.3. Voorbeeld: Niet iedere IP-ruimte is een H-ruimte.

Bewijs. Beschouw $C([0,1])$ met $(f,g) := {}_0\int^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$, dan is (vergelijk 4.1.2 en 4.1.5) $C([0,1])$ een IP-ruimte, waarin de IP-norm is:

$$\| f \| = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Beschouw de rij $\Psi_{n\in\mathbb{N}}\ f_n$ die wordt gedefinieerd door

$$\begin{aligned} 0 \le t \le \tfrac{1}{2} &: f_n(t) = 1 , \\ \tfrac{1}{2} \le t \le \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^n} &: f_n(t) = 1 + 2^{n-1} - 2^n t , \\ \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \le t \le 1 &: f_n(t) = 0 , \end{aligned}$$

zodat

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ [f_n \in C([0,1])] \ ; \ \forall_{t\in[0,\frac{1}{2}]}\ [\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 1] \ ;$$

$$\forall_{t\in(\frac{1}{2},1]}\ [\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0] \ .$$

$\Psi_{n\in\mathbb{N}}\, f_n$ is een fundamentaalrij, want stel $m \geq n$, dan is

$$\| f_n - f_m \|^2 = \int_0^1 \{f_n(t) - f_m(t)\}^2 dt =$$

$$= \int_{2^{-1}}^{2^{-1}+2^{-n}} \{f_n(t) - f_m(t)\}^2 dt \leq 2^{-n} .$$

Als er een $f \in C([0,1])$ bestaat zó dat $\| f - f_n \| \to 0$ $(n \to \infty)$, dan geldt voor $\frac{1}{2} < a < 1$

$$\int_a^1 |f(t) - f_n(t)|^2 dt \leq \| f - f_n \|^2 \to 0 \text{ als } n \to \infty .$$

Voor n voldoende groot geldt $f_n(t) = 0$ als $a < t < 1$, zodat blijkbaar

$$\int_a^1 |f(t)|^2 dt = 0 .$$

Maar dat betekent $f(t) = 0$ als $a \leq t \leq 1$, en dus $f(t) = 0$ als $\frac{1}{2} < t \leq 1$. Op analoge wijze vinden we $f(t) = 1$ als $0 \leq t < \frac{1}{2}$. Dus f is zeker niet continu in $t = \frac{1}{2}$: tegenspraak. □

5.1.4. Voorbeeld: Uit 4.2.2 weten we dat ℓ_e^2 een IP-ruimte is. Het is echter geen Hilbertruimte.

Bewijs. Definieer voor $n = 1,2,\ldots$.

$$f_n := \Psi_{k\in\mathbb{N}}\; 2^{-n}\,\delta_{kn}.$$

Er geldt $\| f_n \| = 2^{-n}$, en dus is $\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \| < \infty$. De rij $\Psi_n \sum_{k=1}^{n} f_k$ heeft geen limiet in ℓ_e^2 aangezien voor iedere $f = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p,0,0,\ldots) \in R$ en iedere $n > p$

$$\| \sum_{k=1}^{n} f_k - f \| \geq 2^{-p-1}.$$

5.1.5. Voorbeeld: Zij $\ell^2 := \{\alpha \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty\}$ en in ℓ^2 : $(\alpha,\beta) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\bar{\beta}_i$.
ℓ^2 is een H-ruimte.

Bewijs. (i) ℓ^2 is een lineaire ruimte, want als $\alpha \in \ell^2$ en $\beta \in \ell^2$ dan

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i+\beta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (|\alpha_i|+|\beta_i|)^2 \leq 2\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right]$$

wegens de bekende ongelijkheid $\forall_{a\in\mathbb{R}} \forall_{b\in\mathbb{R}} [2ab \leq a^2 + b^2]$; nu is

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i + \beta_i|^2 \leq 2\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2\right]$$

zodat $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i + \beta_i|^2$ convergeert; evenzo geldt voor $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} |\lambda\alpha_i|^2 = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \leq |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2\right]$$

dus ook $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda\alpha_i|^2$ is convergent. Dit wil zeggen:

$$[\alpha \in \ell^2,\ \beta \in \ell^2 \wedge \lambda \in \mathbb{C}] \Rightarrow [\alpha + \beta \in \ell^2 \wedge \lambda\alpha \in \ell^2] .$$

(ii) Uit $|\alpha_i\bar{\beta}_i| = |\alpha_i|\ |\beta_i| \leq \frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)$ volgt dat voor $\alpha \in \ell^2$ en $\beta \in \ell^2$ de reeks $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\bar{\beta}_i$ absoluut convergeert; (,) is dus een afbeelding van $\ell^2 \times \ell^2$ in $\mathbb{C}$.

(,) is een inproduct, hetgeen door verificatie van de vereiste eigenschappen blijkt; zo is bijvoorbeeld

$$(\alpha+\beta,\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i+\beta_i)\bar{\gamma}_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i\bar{\gamma}_i + \beta_i\bar{\gamma}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\bar{\gamma}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i\bar{\gamma}_i$$

omdat beide laatstgenoemde reeksen convergeren, zodat

$$(\alpha+\beta,\gamma) = (\alpha,\gamma) + (\beta,\gamma) \text{ ; enzovoorts .}$$

Nu (,) een inproduct blijkt te zijn is ook de IP-norm in ℓ^2 bekend:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2} \ .$$

(iii) Tenslotte moeten we nog aantonen dat ℓ^2 in de IP-norm volledig is.

Zij $\alpha^{(1)} \in \ell^2$, $\alpha^{(2)} \in \ell^2, \ldots$ en onderstel dat $\sum_{h=1}^{\infty} \|\alpha^{(h)}\| < \infty$.
Noteer $\alpha^{(h)} = (\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}, \ldots) = \Psi_{i\in\mathbb{N}}\ \alpha_i^{(h)}$. Voor elke j is

$$\sum_{h=1}^{\infty} |\alpha_j^{(h)}| \le \sum_{h=1}^{\infty} \|\alpha^{(h)}\| ,$$

dus $\sum_{h=1}^{\infty} \alpha_j^{(h)}$ convergeert. We definiëren nu

$$\beta := \Psi_{j\in\mathbb{N}} \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_j^{(h)} \ .$$

Voor $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $p < q$ geldt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{h=p+1}^{q} \alpha_j^{(h)} \Big|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|\alpha^{(p+1)} + \ldots + \alpha^{(q)}\| \le \|\alpha^{(p+1)}\| + \ldots + \|\alpha^{(q)}\|.$$

Laat eerst $q \to \infty$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{h=p+1}^{\infty} \alpha_j^{(h)} \Big|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{h=p+1}^{\infty} \|\alpha^{(h)}\| \ .$$

We vinden zo voor $p = 0,1,\ldots$ dat

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{h=p+1}^{\infty} \alpha_j^{(h)} \Big|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{h=p+1}^{\infty} \|\alpha^{(h)}\| < \infty \ .$$

Door $p = 0$ te nemen zien we dat $\beta \in \ell^2$. Tenslotte geldt

$$\|\beta - (\alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(p)})\| \le \sum_{h=p+1}^{\infty} \|\alpha^{(h)}\| \to 0 \qquad (p \to \infty)$$

en dus is de reeks $\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \ldots$ convergent met som β. □

5.1.6. De ruimte ℓ^2 staat model voor een grote klasse van Hilbertruimten, namelijk die van alle oneindig dimensionale separabele Hilbertruimten, waarvan een gedetailleerde bespreking nog volgt.

Een ander belangrijk voorbeeld van Hilbertruimten is de ruimte $L^2(X)$ der kwadratisch integreerbare functies op een σ-finiete maatruimte (X,M,μ); voor nadere bijzonderheden hierover zij verwezen naar de literatuur ([RN], [Z] en de syllabus Maattheorie en Lebesgue-integratie).

5.1.7. De ruimte der afbrekende rijtjes, ℓ^2_e (zie 4.2.2), is een lineaire deelruimte van ℓ^2. Verder zien we dat de inproducten van ℓ^2_e en ℓ^2 overeenstemmen. De in 4.2.2 gedefinieerde verzameling

$$Q = \{q^{(p)} \mid p \in \mathbb{N}\}, \quad q^{(p)} := \Psi_{j\in\mathbb{N}}\ \delta_{jp} \qquad (p \in \mathbb{N})$$

is derhalve een orthonormaalsysteem van ℓ^2_e zowel als van ℓ^2.

5.1.8. <u>Stelling</u>. Q is een totaal orthonormaalsysteem voor ℓ^2.

<u>Bewijs</u>. Zij $\alpha \in \ell^2$ en $\varepsilon > 0$; bepaal N zó dat $\sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \varepsilon^2$, dan is

$$\|\alpha - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i q^{(i)}\|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{en} \quad \|\alpha - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i q^{(i)}\| < \varepsilon ,$$

zodat $\alpha \in \overline{L(Q)}$. Dus Q is totaal. □

5.1.9. (Vervallen).

5.1.10. Stelling (Riesz-Fischer). Als $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een orthonormaalsysteem is in een H-ruimte R en als $\Upsilon_{k\in\mathbb{N}}\ \gamma_k$ een rij complexe getallen is met $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$, dan is er een $f \in R$ zó dat

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ [\gamma_k = (f,q_k)] \quad \text{en} \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k q_k \ .$$

Bewijs. Zij $f_n := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j q_j$ $(n \in \mathbb{N})$ dan is (met $m > n$) wegens

$$\| f_n - f_m \|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |\gamma_j|^2$$

$\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\ f_n$ een fundamentaalrij; zij $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Nu geldt met $n \geq k$

$$(f,q_k) = (f - f_n,q_k) + (f_n,q_k) = (f - f_n,q_k) + \gamma_k \ .$$

Gebruikmakende van de continuïteit van het inproduct (stelling 4.1.6) vinden we zo dat $(f,q_k) = \gamma_k$ $(k \in \mathbb{N})$. □

5.1.11. Stelling. Als de SH-ruimte R geen eindige dimensie heeft, is R isomorf en isometrisch met ℓ^2 (vergelijk 4.3.7 en 4.3.8).

Bewijs. Zij $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een totaal orthonormaalsysteem, dan definiëren we de afbeelding $\varphi: R \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ door

$$\varphi := \Upsilon_{f\in R}\ ((f,q_1),(f,q_2),(f,q_3),\ldots) \ .$$

Wegens de stelling van Bessel (4.3.12) is $\sum_{j=1}^{\infty} |(f,q_j)|^2 < \infty$ zodat $\varphi(R) \subset \ell^2$.

Volgens de stelling van Riesz-Fischer (5.1.10) is $\varphi(R) = \ell^2$. De afbeelding φ is ook één-éénduidig, want uit $\varphi(f) = \varphi(g)$ volgt achtereenvolgens

$$\forall_{j\in\mathbb{N}}\ [(f,q_j) = (g,q_j)]$$

$$\forall_{j\in\mathbb{N}}\ [(f - g,q_j) = 0] \ ,$$

dus volgens 4.3.16 geldt $f - g = 0$, zodat $f = g$.

Verder hebben we voor $j \in \mathbb{N}$

$$\varphi(f+g) = \Upsilon_j\ (f+g,q_j) = \Upsilon_j\ (f,q_j) + \Upsilon_j (g,q_j) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

en analoog

$$\varphi(\alpha f) = \alpha\varphi(f) \ ,$$

zodat φ een isomorfisme is. Tenslotte is φ isometrisch want (4.3.16 (iv))

$$(\varphi(f),\varphi(g)) = \sum_{j=1}^{\infty} (f,q_j)\overline{(g,q_j)} = (f,g) \ . \qquad \square$$

5.1.12. Stelling. Bij ieder eindig of aftelbaar orthonormaalsysteem Q in de SH-ruimte R is een orthonormaalsysteem P in R zó dat $Q \cup P$ een totaal orthonormaalsysteem is.

Bewijs. Zij $\psi : R \to R$ gedefinieerd door

$$\psi := \Upsilon_{f\in R} \ (f - \sum_{q\in Q} (f,q)q)$$

(ga na dat $\sum_{q\in Q} (f,q)q \in R$, zie 4.3.12 en 5.1.10) en zij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} \ f_n$ een rij die in R dicht is. Merk op dat $\psi(f) \perp q$ voor alle $q \in Q$. $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} \ \psi(f_n)$ is eveneens een rij in R, die door uitdunnen en orthonormaliseren overgaat in een (eindige of oneindige) rij $P = \{p_1,p_2,\ldots\}$. P en Q zijn dan orthonormaalsystemen. Doordat elke $p \in P$ een lineaire combinatie van eindig vele $\psi(f_n)$ is, is $p \perp q$ voor alle $p \in P$, $q \in Q$. Derhalve is $P \cup Q$ een orthonormaalsysteem.

Tenslotte bewijzen we nog dat $P \cup Q$ totaal is. Zij $f \in R$ en $\varepsilon > 0$; bepaal f_n zó dat $\| f - f_n \| < \frac{\varepsilon}{2}$ en vervolgens de eindige deelverzameling S van Q zó dat

$$\| f_n - \psi(f_n) - \sum_{q\in S} (f_n,q)q \| < \frac{\varepsilon}{2} \ ;$$

met

$$\psi(f_n) = \Sigma_j \beta_j p_j$$

volgt hieruit

$$\| f - \Sigma_j \beta_j p_j - \sum_{q\in S} (f_n,q)q \| < \varepsilon \ .$$

Dit betekent dat $f \in \overline{L(P \cup Q)}$. $\square$

5.1.13. Stelling. Als R een SH-ruimte is en L is een begrensde lineaire functionaal van R, dan bestaat er een $g \in R$ zō dat $L = L_g$. (Uit 4.6.1 weten we reeds dat $L_g = \Psi_{f \in R}\ (f,g)$ een begrensde lineaire functionaal is voor iedere $g \in R$.)

Bewijs. Laat L een begrensde lineaire functionaal zijn. Als $L(f) = 0$ voor alle f dan voldoet $g = 0$ aan de eis. Neem nu aan dat er een f_0 is met $L(f_0) \neq 0$.

Laat S de nulruimte van L zijn: $S = \{x \in R \mid L(x) = 0\}$. S is een gesloten lineaire deelruimte van R, want L is continu: als $L(x) \neq 0$ dan is er een omgeving van x waarop L van nul verschilt.

Daar S gesloten is, is S volledig (stelling 1.6.2). Volgens stelling 4.4.6 is er nu een $g \in S$ met $f_0 - g \perp S$. Noem $h = f_0 - g$, dan is $h \perp S$, $L(h) = L(f_0) \neq 0$, dus $h \neq 0$.

Laat $f \in S$. Aangezien $L(L(f)h - L(h)f) = 0$ volgt dat $L(f)h - L(h)f \in S$, en wegens $h \perp S$ betekent dit

$$L(f)(h,h) = L(h)(f,h).$$

Hieruit volgt de stelling met $g = \overline{L(h)}\, \|h\|^{-2} h$. □

5.2. Zwakke convergentie in separabele Hilbertruimten

5.2.1. De "zwakte" van het begrip zwakke convergentie (zie 2.2.8) blijkt al direct (zie hierna voorbeeld 5.2.2) als men probeert stelling 2.2.7 om te keren: zwakke convergentie impliceert niet noodzakelijk sterke convergentie. Deze paragraaf is gewijd aan de gevolgtrekkingen die men desondanks, althans in SH-ruimten, op grond van zwakke convergentie kan maken. Zij R een SH-ruimte.

5.2.2. Voorbeeld: Als $Q := \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een orthonormaalsysteem is in R, dan is $q_n \rightharpoonup 0$, want op grond van 5.1.13 is $q_n \rightharpoonup 0$ equivalent met

$$\forall_{g \in R}\ [(q_n,g) \to (0,g) = 0]$$

en dit is een gevolg van 4.3.12. Maar $\neg[q_n \to 0]$, want $\|q_n - 0\| = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

5.2.3. Stelling. Als $f_n \longrightarrow f$, dan is $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, f_n$ een begrensde rij.

Bewijs. Voor alle $g \in R$ is, op grond van 4.6.1, $(f_n,g) \to (f,g)$ en ook $(g,f_n) \to (g,f)$ zodat $L_{f_n}(g) \to L_f(g)$ en dus is er een $M_g > 0$ met

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ [|L_{f_n}(g)| \le M_g]\ .$$

Op grond van 3.2.4 (met $S := \{L_{f_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$) bestaat er een $M > 0$ zó dat

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ [\|L_{f_n}\| \le M]\ .$$

Derhalve geldt $(f_n,f_n) \le M\|f_n\|$ en dus $\|f_n\| \le M$ $(n \in \mathbb{N})$. □

5.2.4. Stelling. Iedere begrensde rij in R heeft een zwak convergente deelrij.

Bewijs. Zij $f_n \in R$, $\|f_n\| \le 1$ $(n = 1,2,\ldots)$. Kies een rij $r_1,r_2,\ldots$ die dicht ligt in R. Er bestaat een deelrij $f_1',f_2',\ldots$ van $f_1,f_2,\ldots$ waarvoor $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\,(r_1,f_n')$ convergeert; er bestaat een deelrij $f_1'',f_2'',\ldots$ van $f_1',f_2',\ldots$ waarvoor $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\,(r_2,f_n'')$ convergeert, enzovoorts. We beschouwen nu de diagonaalrij $f_1',f_2'',f_3''',\ldots$ en noemen die $h_1,h_2,h_3,\ldots$. Er geldt

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ [\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\,(r_k,h_n) \text{ is convergent}]\ .$$

Laat nu $g \in R$. We zullen laten zien dat $(g,h_1),(g,h_2),\ldots$ convergeert. Zij hiertoe $\varepsilon > 0$ en bepaal j zó dat $\|r_j - g\| < \frac{1}{4}\varepsilon$. Kies vervolgens m_0 zó dat voor $m > m_0$, $n > m_0$ geldt $|(r_j,h_n) - (r_j,h_m)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dan is voor $m > m_0$, $n > m_0$

$$|(g,h_n) - (g,h_m)| \le \frac{\varepsilon}{2} + |(r_j - g, h_n - h_m)| < \varepsilon\ ,$$

want $\|h_n - h_m\| < 2$. De rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\,(g,h_n)$ is dus een fundamentaalrij op $\mathbb{C}$ en derhalve convergent.

Definieer nu

$$L := \Upsilon_{g\in R}\ \lim_{n\to\infty}\,(g,h_n)\ .$$

Daar $|L(g)| \leq \|g\|$ $(g \in R)$ volgt gemakkelijk dat L een begrensde lineaire functionaal is. Volgens stelling 5.1.13 bestaat er dus een $h \in R$ met

$$L(g) = \lim_{n\to\infty} (g,h_n) = (g,h)$$

voor alle $g \in R$. En daarom (weer gebruikmakend van 5.1.13) is $h_n \rightharpoonup h$. □

5.3. Geadjungeerde operatoren in een separabele Hilbertruimte

5.3.1. In deze paragraaf is R een SH-ruimte.

5.3.2. Stelling. Als $T \in BLO(R)$, dan heeft T een geadjungeerde.

Bewijs. Zij $g \in R$. Dan is $\Psi_f\ (Tf,g)$ een lineaire functionaal die begrensd is wegens

$$|(Tf,g)| \leq \|T\|\,\|f\|\,\|g\| \ .$$

Nu is er volgens 5.1.13 een (eenduidig bepaalde) $h \in R$ zó dat

$$\forall_{f\in R}\ [(Tf,g) = (f,h)].$$

Definieer nu de afbeelding S door $Sg = h$. We behoeven nog slechts te laten zien dat S lineair is: Als $(Tf,g_1) = (f,h_1)$, $(Tf,g_2) = (f,h_2)$ voor alle f, dan is

$$(Tf,\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \bar{\alpha}_1(f,h_1) + \bar{\alpha}_2(f,h_2) = (f,\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) \ . \qquad \square$$

5.3.3. Stelling. Als de lineaire operator T een geadjungeerde heeft, dan is T begrensd.

Bewijs. Beschouw de collectie begrensde lineaire functionalen

$$S := \{L_{Th} \mid h \in R, \|h\| = 1\} \ .$$

(De notatie is die uit 4.6.1 : $L_g = \Psi_f\ (f,g)$.) Voor elke $f \in R$ geldt

$$\forall_{L\in S}\ [|L(f)| \leq \|T^* f\|] \ ,$$

want

$$|L_{Th}(f)| = |(f,Th)| = |(T^* f,h)| \leq \|T^* f\|\,\|h\| \ .$$

Volgens stelling 3.2.4 is er nu een $M > 0$ zó dat voor alle $L \in S$ geldt $\|L\| \leq M$. Hieruit volgt dat voor alle h met $\|h\| = 1$ en voor alle $f \in R$ geldt

$$|(f,Th)| \leq M \|f\| .$$

Voor $f = Th$ volgt hieruit $\|Th\| \leq M$. Daar dit voor alle h met $\|h\| = 1$ geldt, blijkt nu dat $\|T\| \leq M$. □

5.3.4. <u>Gevolg</u> (stelling van Hellinger en Toeplitz). Als R een separabele Hilbertruimte is en T is hermitisch, dan is T begrensd.

6. Compacte operatoren in een IP-ruimte

6.1. Inleiding

6.1.1. We zetten nu onze beschouwingen uit 2.3 en 3.2.6 voort.

6.1.2. Stelling. Als R een SH-ruimte is, $T \in LO(R)$ en T compact, dan geldt voor elke rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} f_n$

$$f_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow Tf_n \to 0.$$

Bewijs. T is begrensd (stelling 2.3.3), en dus volgt uit stelling 2.2.9 dat $Tf_n \rightharpoonup 0$. De rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} f_n$ is begrensd (stelling 5.2.3) en T is compact, dus elke deelrij van $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} Tf_n$ heeft een convergente deelrij. De limiet van zo'n deelrij kan niet anders dan 0 zijn (want $Tf_n \rightharpoonup 0$; gebruik stelling 2.2.8 en stelling 4.6.2). En omdat elke deelrij van Tf_n een naar nul convergente deelrij heeft, is $TF_n \to 0$. □

6.1.3. Stelling. Als R een SH-ruimte is, $T \in LO(R)$ en als voor iedere rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} f_n$ in R geldt dat

$$f_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow Tf_n \to 0$$

dan is T compact.

Bewijs. Als $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} g_n$ een begrensde rij is in R, bevat ze volgens 5.2.4 een zwak convergente deelrij, zeg $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} g_n'$ met $g_n' \rightharpoonup g$; dan is $g_n'-g \rightharpoonup 0$ en volgens het gegeven $Tg_n' \to Tg$. T is compact volgens 2.3.1. □

6.1.4. Stelling. Als R een SH-ruimte is en T is een lineaire operator met eindige dubbelnorm (ook wel Hilbert-Schmidt operator genaamd), dan is T compact.

Bewijs. Zij $q_1, q_2 \ldots$ een totaal orthonormaalsysteem voor R. Voor $n = 1,2,\ldots$ definiëren we

$$T_n := \Upsilon_f \sum_{j=1}^{n} (Tf,q_j)q_j.$$

Voor elke $f \in R$ is

$$\|(T_n - T)f\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |(Tf,q_j)|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |(f,T^*q_j)|^2 \leq$$

$$\leq \; \|f\|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \|T^*q_j\|^2 .$$

Uit stelling 4.5.16 volgt dat $\sum_{j=1}^{\infty} \|T^*q_j\|^2 < \infty$, en daaruit blijkt dat $\|T - T_n\| \to 0$ als $n \to \infty$. De operatoren T_n zijn van eindige rang, en dus (volgens stelling 2.3.5) compact. De compactheid van T volgt nu uit stelling 3.2.6. □

6.2. Ontwikkeling naar eigenfuncties

6.2.1. R is een IP-ruimte, $T \in BLO(R)$ en T is hermitisch.

6.2.2. Hulpstelling. Zij $\|T\| = 1$. Er is bij elke $\varepsilon > 0$ een $f \in R$ zó dat $\|Tf - f\| < \varepsilon \|f\|$ of $\|Tf + f\| < \varepsilon \|f\|$.

Bewijs. Fixeer $g \in R$ met $g \neq 0$, $\|Tg\|^2 > (1-\varepsilon^4)\|g\|^2$.
We beschouwen

$$\|T^2g - g\|^2 = \|T^2g\|^2 - 2(T^2g,g) + \|g\|^2 .$$

Wegens $\|T^2g\| \leq \|T\|\,\|Tg\| = \|Tg\|$ en $(T^2g,g) = \|Tg\|^2$ blijkt

$$\|T^2g - g\|^2 \leq \|g\|^2 - \|Tg\|^2 < \varepsilon^4 \|g\|^2 .$$

Neem aan dat niet geldt $\|Tg - g\| < \varepsilon \|g\|$. Dan voldoet $h := Tg - g$ aan

$$\|h\| \geq \varepsilon\|g\|, \|Th + h\| = \|T^2g - Tg + Tg - g\| < \varepsilon^2 \|g\|,$$

dus $\|Th + h\| < \varepsilon \|h\|$. □

6.2.3. Stelling. Zij T behalve hermitisch ook compact, en $\|T\| > 0$. Dan is een der getallen $\|T\|$, $-\|T\|$ een eigenwaarde van T.

Bewijs. Volgens 6.2.2 is er een rij $f_1, f_2, \ldots$ met

$$\|f_k\| = 1, \; \|Tf_k - \lambda f_k\| \to 0, \; \lambda = \|T\| \text{ of } \lambda = -\|T\| .$$

Kies van $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, Tf_k$ een convergente deelrij. Nu convergeert de corresponderende deelrij van $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, \lambda f_k$, dus ook die van $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, f_k$. Noemen we de limiet f, dan is $\|f\| = 1$ en uit $\|Tf_k - \lambda f_k\| \to 0$ blijkt dat $Tf - \lambda f = 0$. □

6.2.4. Stelling. Zij T behalve hermitisch ook compact.

(i) Voor elke $\alpha > 0$ geldt dat er hoogstens eindig veel eigenwaarden λ met $|\lambda| > \alpha$ zijn.

(ii) Bij elke eigenwaarde $\neq 0$ heeft de eigenruimte eindige dimensie.

Bewijs. (i) Neem het tegendeel aan. Dan is er een rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, f_n$ met $\|f_n\| = 1$, $\|Tf_n\| > \alpha$, en de Tf_n zijn onderling loodrecht (4.5.14). Daaruit volgt dat $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\, Tf_n$ geen convergente deelrij heeft.

(ii) Als dit niet geldt, is er een aftelbaar orthonormaalsysteem $f_1, f_2, \ldots$ met $Tf_k = \lambda f_k$ voor alle k, en $\lambda \neq 0$. De Tf_k's zijn onderling loodrecht, en $\|Tf_k\| \geq |\lambda|$. Conclusie als bij (i). □

6.2.5. Stelling. Laat T hermitisch en compact. Er is een orthonormaalsysteem $g_1, g_2, \ldots$ en een rij reële getallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ met $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ zó dat $Tg_k = \lambda_k g_k$ $(k=1,2,\ldots)$ en zó dat elke eigenvector met eigenwaarde $\neq 0$ van T lineaire combinatie is van eindig veel g_i's, die alle eenzelfde eigenwaarde hebben. Tenzij het orthonormaalsysteem eindig is, geldt $\lambda_k \to 0$.

Bewijs. Volgt direct uit 6.2.4. □

6.2.6. Stelling. Zij T hermitisch en compact. Dan geldt voor elke $f \in R$ (met de notatie van 6.2.5)

$$Tf = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, g_k) g_k$$

(als de rij $g_1, g_2, \ldots$ eindig is, moet de oneindige som door een eindige worden vervangen).

Bewijs. Voor $n = 1,2,3,\ldots$ definiëren we de operator T_n door

$$T_n f = \sum_{k=1}^{n} (Tf, g_k) g_k = \sum_{k=1}^{n} (f, Tg_k) g_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f, g_k) g_k \,.$$

T_n is hermitisch en compact (eindige rang, zie 2.3.5), dus ook $T - T_n$. Als $\|T - T_n\| \neq 0$ heeft $T - T_n$ een eigenvector g met eigenwaarde λ, waarbij $\lambda = \pm \|T - T_n\|$.

Voor $f \in R$, $k \le n$ geldt $(T_n f, g_k) = (Tf, g_k)$. Derhalve staat $(T - T_n)g$, dus ook g, loodrecht op $g_1, \ldots, g_n$. Daaruit volgt weer $T_n g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (g, g_k) g_k = 0$. Dus g is eigenvector van T zelf, met eigenwaarde $\pm \| T - T_n \|$. Daar $g \perp g_1, \ldots, g_n$, is g geen lineaire combinatie van de onder $g_1, \ldots, g_n$ voorkomende eigenvectoren bij λ; onder $g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots$ komt er dus nog minstens één voor. Hieruit blijkt

$$\| T - T_n \| \le \sup_{k \ge n} |\lambda_k| .$$

Dit garandeert dat $\| T - T_n \| \to 0$, zodat $T_n f \to Tf$ voor elke f. Als reeds $\| T - T_n \| = 0$ was, is $Tf = T_n f$ voor elke f. □

6.2.7. Stelling. Als R een SH-ruimte is en T is een compacte, hermitische operator van R dan bestaat er een totaal orthonormaalsysteem van eigenvectoren van T.

Bewijs. We gebruiken de notatie uit 6.2.6. Volgens stelling 5.1.12 bestaat er een eindig of aftelbaar orthonormaalsysteem V zó dat $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup V$ totaal is in R. Zij nu $f \in V$. Toepassing van stelling 6.2.6 levert nu

$$Tf = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, g_k) g_k = 0 .$$

Derhalve is iedere $f \in V$ eigenvector van T bij de eigenwaarde nul. □

6.2.8. Stelling. Zij R een SH-ruimte, $g_1, g_2, \ldots$ een (eindig of aftelbaar, niet noodzakelijk totaal) orthonormaalsysteem in R, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ een (indien aftelbaar dan begrensde) rij in $\mathbb{C}$; dan wordt door

$$Tf := \Sigma_j \mu_j (f, g_j) g_j \qquad (f \in R)$$

een lineaire operator T van R gedefinieerd waarvoor geldt $\| T \| = \sup_j |\mu_j|$, $T^* f = \Sigma_j \bar{\mu}_j (f, g_j) g_j$, en

(i) als $\forall_j \, [\mu_j \in \mathbb{R}]$, dan is T hermitisch;

(ii) als $\lim_{j \to \infty} \mu_j = 0$, dan is T compact;

(iii) $\Sigma_j \, |\mu_j|^2 < \infty$ dan en slechts dan als T eindige dubbelnorm heeft.

Bewijs. Er geldt $\Sigma_j \, |\mu_j|^2 \, |(f, g_j)|^2 \le \| f \|^2 \sup |\mu_j|^2$, dus $Tf \in R$ volgens 5.1.10; T is duidelijk lineair; ook is $\| T \| \le (\sup_j |\mu_j|^2)^{\frac{1}{2}} = \sup_j |\mu_j|$. Daar $Tg_j = \mu_j g_j$ is $\| T \| = \sup_j |\mu_j|$. Verder is voor $f \in R$, $h \in R$

$$(Tf,h) = (\Sigma_j\mu_j(f,g_j)g_j,h) = \Sigma_j\mu_j(f,g_j)(g_j,h) =$$

$$= \Sigma_j(f, \bar{\mu}_j(h,g_j)g_j) = (f,\Sigma_j\bar{\mu}_j(h,g_j)g_j).$$

Hieruit volgt de uitspraak over T^*.

(i) Volgt direct uit het voorafgaande.

(ii) Zij T_n gedefinieerd door $T_nf := \sum_{j=1}^n \mu_j(f,g_j)g_j$ $(n \in \mathbb{N}; f \in R)$, dan is, evenals in 6.2.6, T_n van eindige rang; met $\ell_n := \sup\{|\mu_j| \mid j > n\}$, waardoor $\lim_{n\to\infty} \ell_n = 0$, geldt

$$\|(T - T_n)f\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_j(f,g_j)g_j\|^2 \le \ell_n^2 \|f\|^2$$

zodat $\|T - T_n\| \le \ell_n$ en $T = \lim_{n\to\infty} T_n$. Pas nu stelling 3.2.6 en 2.3.5 toe.

(iii) Vul $g_1,g_2,\ldots$ aan tot een totaal orthonormaalsysteem (zie 5.1.12) met behulp van $h_1,h_2,\ldots$. Dan is voor iedere j

$$Th_j = \sum_k \mu_k(h_j,g_k)g_k = 0 .$$

Verder is

$$\sum_k \|Tg_k\|^2 + \sum_j \|Th_j\|^2 = \sum_k \|Tg_k\|^2 = \sum_k |\mu_k|^2 .$$

□

6.2.9. Stelling. Voor de compacte hermitische operator T uit 6.2.6 geldt: T is dan en slechts dan niet-negatief definiet (zie 4.5.11) als $\lambda_k \ge 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Bewijs. De voorwaarde is voldoende omdat uit $Tf = \sum_k \lambda_k(f,g_k)g_k$ volgt dat $(Tf,f) = \sum_k \lambda_k |(f,g_k)|^2$; als voor zekere $k \in \mathbb{N}$ geldt $\lambda_k < 0$, dan is $(Tg_k,g_k) = \lambda_k \|g_k\|^2 < 0$, dus de voorwaarde is ook nodig. □

6.2.10. Stelling. Zij R een SH-ruimte en T compact en hermitisch. Deze T is dan en slechts dan positief definiet als $\Psi_{k\in\mathbb{N}}\, q_k$ totaal is en $\lambda_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Bewijs. Indien voor iedere $f \neq 0$ geldt $(Tf,f) > 0$, is in het bijzonder $0 < (Tg_k,g_k) = \lambda_k \|g_k\|^2$ en daarom $\lambda_k > 0$ $(k = 1,2,\dots)$. Als $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ overeenkomstig 6.2.7 met behulp van een orthonormaalsysteem V aangevuld is tot een totaal orthonormaalsysteem, dan geldt voor iedere $f \in V$ dat $(Tf,f) = (0,f) = 0$, dus $f = 0$. Hieruit volgt dat $V = \emptyset$ en dat $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ totaal is.

Omgekeerd: als $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ totaal is en $\lambda_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$ dan is (zie 4.3.16 (iv) en 6.2.6)

$$(Tf,f) = \sum_k \lambda_k (f,g_k)\overline{(f,g_k)} = \sum_k \lambda_k \, |(f,g_k)|^2 > 0$$

als $f \neq 0$. □

6.3. De vergelijking van Fredholm bij een compacte hermitische operator in een IP-ruimte

6.3.1. Zij R een lineaire ruimte en $T \in LO(R)$. Als $\mu \in \mathbb{C}$, dan heet $f - \mu Tf = 0$ een Fredholmvergelijking van de eerste soort; onbekenden zijn $f \in R$ en $\mu \in \mathbb{C}$. Als $g \in R$ dan heet de vergelijking $f - \mu Tf = g$ een vergelijking van de tweede soort, en $Tf = g$ heet een vergelijking van de derde soort.

We bekijken hier de vergelijking van de tweede soort in het geval dat R een IP-ruimte is, en T een compacte hermitische operator. Volgens 6.2.6 is er een orthonormaalsysteem $g_1,g_2,\dots$ en zijn er een stel getallen $\lambda_1,\lambda_2,\dots$ (alle $\neq 0$) zó dat voor elke $f \in R$ geldt

$$Tf = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f,g_j) g_j \, .$$

6.3.2. Stelling. Laat $g \in R$, $\mu \in \mathbb{C}$ en zij T een compacte hermitische operator van de IP-ruimte R.

(i) Als f oplossing is van de vergelijking $f - \mu Tf = g$, dan bestaan er getallen $c_1,c_2,\dots \in \mathbb{C}$ zó dat

$$f = g + \mu \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j \quad , \qquad (1)$$

$$(1 - \mu\lambda_j)c_j = \lambda_j (g,g_j) \, . \qquad (2)$$

(ii) Als $c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ een rij is die aan (2) voldoet, is $\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j$ convergent en

$$f := g + \mu \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j \tag{3}$$

voldoet aan $f - \mu Tf = g$.

<u>Bewijs</u>. (i) Laat f een oplossing van $f - \mu Tf = g$ zijn. Dan is $(f - \mu Tf, g_j) = (g, g_j)$ dus $(1 - \mu\lambda_j)(f, g_j) = (g, g_j)$ voor iedere $j \in \mathbb{N}$. Verder is

$$f = g + \mu Tf = g + \mu \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, g_j) g_j \ .$$

Met $c_j := \lambda_j (f, g_j)$ is nu aan (1) en (2) voldaan.

(ii) Laat $c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ aan (2) voldoen. Definieer

$$\gamma_j := \frac{(g, g_j)}{1 - \mu\lambda_j} \qquad \text{als } \mu\lambda_j \neq 1 ,$$

$$\gamma_j := 0 \qquad \text{als } \mu\lambda_j = 1 .$$

Wegens $\sum_{j=1}^{\infty} |(g, g_j)|^2 < \infty$ en $\lambda_j \to 0$ is nu $\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^2 < \infty$. De rij

$$\Psi_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j g_j$$

is een fundamentaalrij (vergelijk bewijs van 5.1.10) en die wordt door T in een convergerende rij omgezet (stelling 2.3.4). Daar slechts eindig veel λ_j's voldoen aan $1 - \mu\lambda_j = 0$ toont dit de convergentie van $\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j$ aan.

Tenslotte is, als f gegeven is door (3),

$$f - \mu Tf =$$

$$= g + \mu \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j - \mu \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, g_j) g_j = g$$

wegens $c_j - \lambda_j (f, g_j) = c_j - \lambda_j ((g, g_j) + \mu c_j) = 0$ (zie 2). □

6.3.3. Stelling. Zij $g \in R$, T hermitisch en compact, en $\mu\lambda_j \neq 1$ voor alle j (als $\mu \neq 0$ betekent dit dat $\mu^{-1} \notin \sigma(T)$). Dan is $f - \mu Tf = g$ eenduidig oplosbaar.

Bewijs. Er is nu precies één stel c_j's dat aan (2) voldoet. □

6.3.4. Stelling. Als $g \in R$, T hermitisch en compact, en als $j_1,\dots,j_k$ de indices zijn waarvoor $\mu\lambda_j = 1$, dan geldt: De vergelijking $f - \mu Tf = g$ is dan en slechts dan oplosbaar als

$$(g,g_{j_1}) = \dots = (g,g_{j_k}) = 0 .$$

Bewijs. Uit stelling 6.3.2. □

6.4. Integraaloperatoren

6.4.1. Zij $R := C([0,1])$ en zij $R' := C([0,1] \times [0,1])$. In R is als inproduct gedefinieerd:

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt ,$$

in R' is als inproduct gedefinieerd (zie 4.5.4 (ii)) :

$$(K,L) := \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)\overline{L(x,y)}dxdy \qquad (K \in R',\ L \in R') .$$

R en R' zijn dan (niet-volledige) IP-ruimten (vergelijk 5.1.3), waar we naast de IP-normen nog beschikken over de maximumnormen; de maximumnorm in R' wordt gedefinieerd als

$$\|K\|_\infty := \max\{|K(x,y)| \mid x \in [0,1],\ y \in [0,1]\} \qquad (K \in R') .$$

Terwille van de duidelijkheid zullen we $C([0,1])$ met IP-norm door R voorstellen, en met sup-norm ($\|\ \|_\infty$) door S. Als we nu bijv. T als element van $BLO(R \to S)$ voorstellen, dan is zijn norm gelijk aan $\sup(\|Tf\|_\infty / \|f\|_2)$.

6.4.2. Zoals reeds in 4.5.4 (ii) werd gezegd, wordt voor iedere $K \in R'$ de integraaloperator T (of, indien misverstand kan rijzen, T_K) gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \qquad (x \in [0,1],\ f \in R) .$$

In 4.5.4 (ii) is reeds geconstateerd dat $T \in LO(R)$.

6.4.3. Stelling. $\sup(\| T_K f \|_2 / \| f \|_2) \le \| K \|_2 \le \| K \|_\infty$;
het eerste lid is de norm van T in $BLO(R \to R)$.

Bewijs. Volgens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz (zie [AL] 7.10.13) is

$$\| T_K f \|_2^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \right|^2 dx \le$$

$$\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \right) \left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy \right) dx = \| K \|_2^2 \, \| f \|_2^2 .$$

Zie 4.1.5 voor de ongelijkheid $\| K \|_2 \le \| K \|_\infty$. □

6.4.4. Stelling. $\sup(\| T_K f \|_\infty / \| f \|_2) \le \| K \|_\infty$;
het linkerlid is de norm van T t.o.v. $BLO(R \to S)$.

Bewijs. Voor elke $x \in [0,1]$ is (weer volgens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz)

$$|(T_K f)(x)|^2 = \left| \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \right|^2 \le \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \int_0^1 |f(y)|^2 dy \le$$

$$\le \| K \|_\infty^2 \, \| f \|_2^2 .$$ □

6.4.5. Stelling. Er is een rij begrensde operatoren van eindige rang $T_1, T_2, \ldots$ zó dat (in de zin van $BLO(R \to S)$)

$$\| T_K - T_n \| \to 0 .$$

Bewijs. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ zij $K_n \in \mathbb{C}^{[0,1]\times[0,1]}$ gedefinieerd door

$$K_n(x,y) := n(\frac{j}{n} - x)K(\frac{j-1}{n}, y) + n(x - \frac{j-1}{n})K(\frac{j}{n}, y) ,$$

$$\frac{j-1}{n} \le x \le \frac{j}{n}, \quad 0 \le y \le 1; \quad j = 1,2,\ldots,n .$$

Het is gemakkelijk in te zien dat $K_n \in R'$ en dat voor

$$\eta_n := \| K - K_n \|_\infty$$

op grond van de uniforme continuïteit van K op $[0,1] \times [0,1]$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0 .$$

Voor de bij K_n behorende integraaloperator T_n geldt volgens 6.4.4

$$\| T_K - T_n \| \le \| K - K_n \|_\infty = \eta_n ,$$

zodat $\| T_K - T_n \| \to 0$. Tenslotte tonen we aan dat T_n van eindige rang is; daartoe beschouwen we $K_n(x,y)$ als een lineaire combinatie van een stelsel functies $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\} \subset R$ dat wordt gedefinieerd als volgt:

Zij $k = 0,1,2,\ldots,n$ en $0 \le x \le 1$.
Als $x \le \frac{k-1}{n}$ is $g_k(x) := 0$,

als $\frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n}$ is $g_k(x) := nx - k + 1$,

als $\frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n}$ is $g_k(x) := k + 1 - nx$,

als $x \ge \frac{k+1}{n}$ is $g_k(x) := 0$.

Men verifieert gemakkelijk dat $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} K(\frac{k}{n}, y) g_k(x)$ zodat

$$(T_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \int_0^1 K(\frac{k}{n}, y) f(y) dy$$

hetgeen inhoudt dat $T_n(R) \subset L(\{g_0, g_1, \ldots, g_n\})$ en T_n is van eindige rang. $\square$

6.4.6. Stelling. T is een compacte afbeelding van R in S.

Bewijs. S is volledig. De T_n's uit stelling 6.4.5 zijn compact (zie 2.3.5), zodat stelling 3.2.6. kan worden toegepast. □

6.4.7. Stelling. T is een compacte afbeelding van R in R.

Bewijs. Elke in R begrensde rij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\ f_n$ heeft volgens 6.4.6 een deelrij $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\ f'_n$ waarvoor $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\ Tf'_n$ in de zin van $\|\ \|_\infty$ convergeert. Dan is ook $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\ Tf'_n$ in de zin van $\|\ \|_2$ convergent. □

6.4.8. Stelling. De integraaloperator T_K heeft eindige dubbelnorm, en wel $|||T_K||| = \left({}_0\int^1 {}_0\int^1 |K(x,y)|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$.

Bewijs. Laat $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}}\ q_n$ een totaal orthonormaalsysteem voor $C([0,1])$ zijn en definieer voor $k \in \mathbb{N}$: $p_k(x) = {}_0\int^1 K(x,y)q_k(y)dy$ $(x \in [0,1])$. Volgens 4.3.16 is

$$\sum_{k=1}^{\infty} |p_k(x)|^2 = \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy .$$

Het rechterlid hangt continu van x af, ook de p_k's zijn continu. Derhalve geldt dat de functies

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |p_k(x)|^2$$

continu zijn op $[0,1]$; ze voldoen aan $\sum_{k=1}^{\infty} |p_k(x)|^2 - f_n(x) \downarrow 0$ en volgens de stelling van Dini is deze convergentie uniform ([AL] 5.6.12). Daaruit volgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |p_k(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |p_k(x)|^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dxdy ,$$

vanwege de stelling van Fubini ([AL] 7.7.6). Daar $p_k = T_K q_k$ blijkt dat $|||T_K|||$ de in de stelling aangegeven eindige waarde heeft. Omdat T_K een geadjungeerde heeft is nu de stelling bewezen. □

6.4.9. Als $K \in R'$ en $L \in R'$ definiëren we analoog aan het matrixproduct

$$(K * L)(x,y) := \int_0^1 K(x,t)L(t,y)dt \qquad (x \in [0,1],\ y \in [0,1]) .$$

6.4.10. Stelling. $K * L \in R'$ en $T_{K*L} = T_K T_L$.

6.4.11. Stelling. De operatoren $\{T_K \mid K \in R'\}$ vormen een niet-commutatieve genormeerde algebra zonder eenheidselement (zie 3.2.2).

6.4.12. Opmerking. Onder een integraalvergelijking verstaat men een vergelijking van bijvoorbeeld een der volgende typen:

(i) $\mu T_K f = f$

(ii) $f - \mu T_K f = g$

(iii) $T_K f = g$

met gegeven μ en g en een bij een gegeven $K \in R'$ horende integraaloperator T_K.

De resultaten van dit hoofdstuk leveren dus een theorie op voor integraalvergelijkingen van type (i) en (ii), ingeval T_K een hermitische integraaloperator is.

7. Invariante punten

7.1. Contracties en vaste punten

7.1.1. Onder een invariant punt of vast punt ("fixed point") van een afbeelding T van een ruimte R in R verstaat men een element $f \in R$ waarvoor geldt $Tf = f$.

Een afbeelding T van een metrische ruimte R in R heet contractie van R indien er een α bestaat met $0 \le \alpha < 1$ en

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} [d(Tf,Tg) \le \alpha d(f,g)] .$$

Een dergelijke α heet een contractieconstante van T.

7.1.2. Stelling. Zij R een niet-lege volledige metrische ruimte, T een contractie van R; dan is er in R precies één vast punt van T ("fixed point" stelling van Banach).

Bewijs. Er is niet meer dan één vast punt:
Als $Tf = f$ en $Tg = g$ is,dan is $d(f,g) = 0$ wegens $d(f,g) = d(Tf,Tg) \le \alpha d(f,g)$.

Aangezien $R \neq \emptyset$ is er een element $g \in R$; de rij $\forall_{j \in \mathbb{N}} \; T^j g$ is, wegens

$$d(T^n g, T^{n+p} g) \le \sum_{j=1}^{p} d(T^{n+j-1} g, T^{n+j} g) \le \sum_{j=1}^{p} \alpha^{n+j-1} d(g,Tg) \le$$

$$\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(g,Tg) \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ en alle } p \in \mathbb{N},$$

een fundamentaalrij: zij $f := \lim_{n \to \infty} T^n g$.

Daar $T^n g \to f$ is

$$d(T^n g,f) \to 0, \; d(T^{n+1} g,f) \to 0 .$$

Verder is

$$d(T^{n+1} g,Tf) \le \alpha d(T^n g,f) \to 0 ,$$

dus ook $d(T^{n+1} g,Tf) \to 0$. Derhalve is $d(Tf,f) = 0$, dus $Tf = f$. □

7.1.3. Stelling. Zij T een contractie van de B-ruimte R (T hoeft niet lineair te zijn). Dan geldt:

(i) Bij iedere $g \in R$ is er precies één element $f \in R$ zó dat $(I-T)f = g$.

(ii) Zij $Sg := f$ ($g \in R$) dan heeft de afbeelding $S : R \to R$ de eigenschap $S(I-T) = (I-T)S = I$.

(iii) Als α een contractieconstante van T is, geldt: voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ met $|\lambda| < 1-\alpha$ is λS een contractie van R.

Bewijs. (i) Kies $g \in R$ en definieer de afbeelding K_g van R in R door $K_g f := g + Tf$. Wegens $\|K_g f - K_g h\| = \|Tf - Th\| \le \alpha\|f - h\|$ is K_g een contractie, zodat op grond van 7.1.2 er één f is met $K_g f = f$. Voor die f is $g = f - Tf = (I - T)f$.

(ii) Het in (i) bewezene drukt uit dat de afbeelding $I - T$ een bijectie is van R op R. Dan heeft ze een inverse, S, eveneens een bijectie van R in R, en daarvoor geldt $S(I - T) = (I - T)S = I$.

(iii) Zij $|\lambda| < 1-\alpha$, $f_1 \in R$ en $f_2 \in R$, $g_1 := (I - T)f_1$, $g_2 := (I - T)f_2$; dan is

$$f_1 - f_2 = g_1 - g_2 + Tf_1 - Tf_2 ,$$

$$\|f_1 - f_2\| \le \|g_1 - g_2\| + \alpha\|f_1 - f_2\| ,$$

$$(1-\alpha)\,\|f_1 - f_2\| \le \|g_1 - g_2\| ,$$

$$(1-\alpha)\,\|Sg_1 - Sg_2\| \le \|g_1 - g_2\| ,$$

zodat

$$\|\lambda Sg_1 - \lambda Sg_2\| \le \frac{|\lambda|}{1-\alpha}\|g_1 - g_2\| .$$ □

7.1.4. Stelling. Zij R een B-ruimte, $T \in BLO(R)$. Neem aan dat $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ convergeert. Dan is er precies één $S \in BLO(R)$ met $(I-T)S = S(I-T) = I$. Deze voldoet aan

$$\|S - (I + T + T^2 + \ldots + T^n)\| \to 0 \tag{1}$$

en dus voor alle f

$$Sf = f + \sum_{n=1}^{\infty} T^n f .$$

Bewijs. Daar BLO(R) volledig is (zie 3.2.1) en $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ convergeert, is ook $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ convergent. Noem de som S, zodat (1) geldt. Daar

$$(I-T)(I+T+\ldots+T^n) = (I+T+\ldots+T^n)(I-T) = I - T^{n+1}$$

blijkt nu $(I-T)S = S(I-T) = I$.

De eenduidigheid van S is reeds bewezen in 1.2.16. □

7.1.5. Opmerking. Het bijzondere geval dat $\|T\| < 1$ kan ook uit 7.1.3 worden afgeleid.

7.1.6. Stelling. Zij R een B-ruimte, laat U,K afbeeldingen van R in R zijn. Neem aan dat U een bijectie is met inverse V, en dat KV een contractie is. Dan geldt

(i) $U-K$ is een bijectie.

(ii) Zijn U,K lineair, dan is $(U-K)^{-1}$ lineair.

(iii) Als bovendien $V \in BLO(R)$, dan is $(U-K)^{-1}$ begrensd.

Bewijs. (i) Volgens 7.1.3 is $I-KV$ een bijectie van R. Nu is ook $I-KV)U$ een bijectie.

(ii) Volgens stelling 1.2.14 is $(U-K)^{-1}$ nu ook lineair.

(iii) Laat α zó zijn dat KV een α-contractie is. Dan is (zie 7.1.3), voor λ met $|\lambda| < 1-\alpha$, de afbeelding $\lambda(I-KV)^{-1}$ een contractie. Met $V \in BLO(R)$ is nu ook $(U-K)^{-1} = (U(I-KV))^{-1} = (I-KV)^{-1}V$ begrensd. □

7.1.7. Opmerking. 1. Als V en K in BLO(R) liggen, dan is $\|V\| < \|K\|^{-1}$ voldoende opdat KV een contractie is.

2. Stelling 7.1.6 kan ook bewezen worden als verondersteld wordt dat VK (in plaats van KV) een contractie is. Dan moet bij (i) wèl aangenomen worden dat U lineair is, omdat anders niet noodzakelijk $U(I - VK) = U - K$ geldt.

7.2. De integraalvergelijking van Volterra

7.2.1. Laat R en R' als in 6.4; zij $K \in R'$. R en R' zijn, met als norm $\| \ \|_\infty$, B-ruimten.

Onder de (bij K behorende) Volterra-operator van R verstaan we de integraaloperator V (of, indien misverstand kan rijzen, V_K) gedefinieerd door

$$(Vf)(x) := \int_0^x K(x,y)f(y)dy \qquad (f \in R,\ x \in [0,1])\ .$$

De integraalvergelijking van Volterra luidt $f = \mu Vf + g$ met een gegeven $\mu \in \mathbb{C}$, $g \in R$ en Volterra-operator V.

7.2.2. Stelling. Als $f \in R$ dan is $Vf \in R$.

7.2.3. Definieer voor $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

$$\hat{K}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < y\ , \\ K(x,y) & \text{als } x \ge y\ . \end{cases}$$

Als $K_1 \in R'$, $K_2 \in R'$, en

$$K_3(x,y) = \int_0^1 \hat{K}_1(x,t)\hat{K}_2(t,y)dt \qquad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$$

dan is $K_3 = \hat{K}_3 = \hat{K}_1 * \hat{K}_2$ (zie 6.4.9).

7.2.4. Laat $\hat{K}^{(2)} := \hat{K} * \hat{K}$, $\hat{K}^{(3)} := \hat{K}^{(2)} * \hat{K}$, enz., en laat $\hat{K}(x,y) \le M$ $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$. Dan is

$$|\hat{K}^{(n)}(x,y)| \le \begin{cases} \dfrac{M^n\ |x-y|^{n-1}}{(n-1)!} & (x \ge y) \\ 0 & x < y. \end{cases}$$

Dit is gemakkelijk door inductie te bewijzen.

7.2.5. Stelling. Voor elke $\mu \in \mathbb{C}$, $g \in R$ is de vergelijking $f = \mu Vf + g$ eenduidig oplosbaar.

Bewijs. Uit 6.4.10 en 7.2.4 volgt

$$\| (\mu V)^n \| \le |\mu|^n M^n/(n-1)!$$

Derhalve is $\sum_0^\infty \| (\mu V)^n \|$ convergent, zodat stelling 7.1.4 van toepassing is. □

7.2.6. Opmerking. Uit 7.2.5 volgt dat V geen eigenwaarden $\neq 0$ heeft. Dit is niet in strijd met 6.2.6 want V is (afgezien van het geval $V = 0$) niet hermitisch.

Het getal 0 kan wèl eigenwaarde zijn. Voorbeeld: Zij p een continue functie met ${}_0\int^1 p(t)dt = 0$, $p(1) = 0$. Neem $K(x,y) = xp(y/x)$ als $0 \leq y < x$, $K(x,y) = 0$ als $0 \leq x \leq y$. Dan is de constante 1 een eigenfunctie van V met eigenwaarde 0.

7.3. Oplossingen van differentiaalvergelijkingen als vaste punten van een operator

7.3.1. Stelling. Zij $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$; $I := [0,\gamma]$; $F \in C(I \times \mathbb{C})$. We onderstellen dat F aan een Lipschitz-conditie voldoet: er is een $p \in C(I)$ zó dat

$$|F(u,v) - F(u,w)| \leq p(u) \quad |v-w|$$

voor alle $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}$. Nu geldt:

(i) Bij elke $a \in \mathbb{C}$ is er precies één $\psi_a \in C(I)$ die op I differentieerbaar is en voldoet aan

$$\psi_a'(x) = F(x,\psi_a(x)), \quad \psi_a(0) = a \,. \qquad (*)$$

(ii) De afbeelding $\Psi_{a\in\mathbb{C}}\ \psi_a$ beeldt $\mathbb{C}$ continu in $C(I)$ (met sup-norm-topologie) af.

Bewijs. (i) Uit (*) volgt

$$\psi_a(x) = a + \int_0^x \psi_a'(t)dt = a + \int_0^x F(t,\psi_a(t))dt \,;$$

we zien nu dat voor elke $\psi \in C(I)$ het stel voorwaarden

$$\psi \text{ differentieerbaar op } I, \ \psi(0) = a, \ \psi'(x) = F(x,\psi(x)) \text{ op } I$$

equivalent is met de éne voorwaarde

$$\psi(x) = a + \int_0^x F(t,\psi(t))dt \,. \qquad (**)$$

We beschouwen op C(I) de operator

$$T := \curlyvee_{\psi\in C(I)} \curlyvee_{x\in I} \int_0^x F(t,\psi(t))dt \,,$$

en kiezen in C(I) als norm

$$\|\psi\|_{(q)} := \sup_{x\in I} |\psi(x)q(x)| \,,$$

waarbij q een positieve functie uit C(I) is die we nog zŏ zullen fixeren dat T een contractie wordt.

Voor $\varphi \in C(I)$, $\psi \in C(I)$ is

$$\|T\varphi - T\psi\|_{(q)} = \sup_{x\in I} (q(x) \int_0^x |F(t,\varphi(t)) - F(t,\psi(t))| dt) \le$$

$$\le \sup_{x\in I} (q(x) \int_0^x \frac{p(t)}{q(t)} |q(t)(\varphi(t) - \psi(t))| dt) \le$$

$$\le \|\varphi - \psi\|_{(q)} \cdot \sup_{x\in I} (q(x) \int_0^x \frac{p(t)}{q(t)} dt) \,.$$

Met

$$q(x) := \exp(-2 \int_0^x p(t)dt)$$

wordt bereikt dat

$$q(x) \int_0^x \frac{p(t)}{q(t)} dt = \tfrac{1}{2}(1 - \exp(-2 \int_0^x p(t)dt)) \le \tfrac{1}{2} \,,$$

en dus dat $\|T\varphi - T\psi\|_{(q)} \le \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|_{(q)}$ is. Aangezien $(C(I), \|\ \|_{(q)})$ een Banachruimte is, zien we dat (stelling 7.1.3) I - T een inverse S heeft met de eigenschap dat λS een contractie is voor elke λ met $|\lambda| < \frac{1}{2}$. Nemen we nu voor f_a de constante $\curlyvee_{x\in I}\, a$ dan zien we dat de vergelijking $(I - T)\psi_a = f_a$ als enige oplossing heeft $\psi_a = Sf_a$. Dit wil zeggen dat (**) precies één oplossing heeft.

(ii) Daar $\frac{1}{4}S$ een contractie is, geldt

$$\|\psi_a - \psi_b\|_{(q)} = \|Sf_a - Sf_b\|_{(q)} \le 4\|f_a - f_b\|_{(q)}$$

en derhalve

$$\|\psi_a - \psi_b\|_\infty \le 4\|f_a - f_b\|_\infty \left(\sup_{x\in I} q(x)/\inf_{x\in I} q(x)\right) . \qquad \square$$

7.3.2. Opmerking. Als we voor I nemen $[0,\infty)$ dan blijft het eerste deel van de stelling van kracht; het tweede deel loopt echter mis op de mogelijke onbegrensdheid van de factor (sup q/inf q).

7.4. De hoofdstelling voor impliciet gegeven functies

7.4.1. Hulpstelling. Laat X een topologische ruimte en Y een Banachruimte zijn. Laat $\beta > 0$, en laat $Y_\beta := \{y \in Y \mid \|y\| \le \beta\}$.
G is een afbeelding van $X \times Y_\beta$ in Y die voldoet aan

(i) $\|G(x,0)\| \le \frac{1}{2}\beta \qquad (x \in X)$,

(ii) $\|G(x,y_1) - G(x,y_2) - (y_1-y_2)\| \le \frac{1}{2}\|y_1-y_2\|$

voor alle $x \in X$, $y_1 \in Y_\beta$, $y_2 \in Y_\beta$,

(iii) G is continu in de eerste variable.

Dan is er bij elke $x \in X$ precies één $y \in Y_\beta$ met $G(x,y) = 0$. Stellen we deze door $\psi(x)$ voor, dan is ψ continu op X.

Bewijs. Zij R de verzameling van alle afbeeldingen van X in Y_β.
In R definiëren we de metriek d door

$$d(\varphi_1,\varphi_2) = \sup_{x\in X} \|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\| \qquad (\varphi_1\in R, \varphi_2\in R).$$

Definieer $H(x,y) = y - G(x,y)$ voor $x \in X$ en $y \in Y_\beta$. Voor alle $x \in X$ en $y \in Y_\beta$ is

$$\|H(x,y)\| \le \|H(x,y) - H(x,0)\| + \|H(x,0)\| \le \beta,$$

en bijgevolg is $\Psi_{x\in X}\, H(x,\varphi(x)) \in R$ voor iedere $\varphi \in \mathbf{R}$, en de afbeelding

$$T:= = \Psi_{\varphi\in R}\, \Psi_{x\in X}\, H(x,\varphi(x))$$

is een contractie van R. Daar R een volledige metrische ruimte is (zie 3.1.5, opmerking 2), is er volgens 7.1.2 precies één $\psi \in R$ met $T\psi = \psi$. Daaruit blijkt dat er precies één $\psi \in R$ is met $\forall_{x\in X}\,[G(x,\psi(x)) = 0]$.

We bewijzen nu dat deze ψ continu is. Zij $x_0 \in X$ gefixeerd. Voor iedere $x \in X$ geldt (wegens $\psi = T\psi$)

$$\|\psi(x) - \psi(x_0)\| = \|H(x,\psi(x)) - H(x_0,\psi(x_0))\| \leq$$

$$\leq \|H(x,\psi(x)) - H(x,\psi(x_0))\| + \|H(x,\psi(x_0)) - H(x_0,\psi(x_0))\|.$$

Door gebruikmaking van (ii) wordt dit

$$\tfrac{1}{2}\|\psi(x)-\psi(x_0)\| \leq \|H(x,\psi(x_0)) - H(x_0,\psi(x_0))\| = \|G(x,\psi(x_0))-G(x_0,\psi(x_0))\|,$$

en aangezien G continu is in de eerste variabele, blijkt zo dat ψ continu is in x_0. □

7.4.2. We beschouwen nu het speciale geval dat $X = \mathbb{R}^m$ en $Y = \mathbb{R}^n$ met de gewone inproductnormen ($\|\ \|_X$ resp. $\|\ \|_Y$). Verder definiëren we voor $\alpha > 0$ de verzamelingen

$$X_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_X \leq \alpha\}$$

$$Y_\alpha := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_Y \leq \alpha\},$$

<u>Stelling</u> (Impliciete-functie-stelling). In $X \times Y$ beschouwen we in een omgeving van (0,0) de n continue reële functies $F_1,\ldots,F_n$, die we samennemen tot de vectorwaardige functie F. Laat gegeven zijn dat in deze omgeving elk dezer $F_i(x,y)$ continu differentieerbaar is naar $y_1,\ldots,y_n$. Zij verder gegeven dat $F(0,0) = 0$, en dat de functionaalmatrix $A = (A_{ij})_{ij} = (\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0))_{ij}$ regulier is. Dan bestaat er een getal $\alpha > 0$ zó dat er precies één continue afbeelding $\psi\colon X_\alpha \to Y$ is met $\forall_{x\in X_\alpha}\,[F(x,\psi(x)) = 0]$ en $\psi(0) = 0$.

Bewijs. Als $G := A^{-1}F$, dan is G partieel differentieerbaar naar y in een omgeving van $(0,0)$, en de afgeleiden zijn daar continu. Stellen we $H(x,y) = y - G(x,y)$, dan zijn alle partiële afgeleiden van H naar de y_j's nul in het punt $(0,0)$. Er is dus een $\alpha > 0$ en een $\beta > 0$ zó dat voor alle $x \in X_\alpha$, $y \in Y_\beta$ voldaan is aan $\left|\frac{\partial H_i}{\partial y_j}\right| \le \frac{1}{2}n^{-1}$ $(i,j = 1,\ldots,n)$.

Hieruit is af te leiden (met behulp van het gemiddelde theorema) dat voor alle $x \in X_\alpha$, $y_1^{(1)} \in Y_\beta$, $y^{(2)} \in Y_\beta$

$$\| H(x,y^{(1)}) - H(x,y^{(2)}) \|_Y \le \tfrac{1}{2}\| y^{(1)} - y^{(2)} \|_Y \, .$$

Daar $H(0,0) = 0$ kunnen we bovendien veronderstellen dat α zó klein is dat

$$\| H(x,0)\|_Y \le \tfrac{1}{4}\beta \; , \text{ dus } \| G(x,0) \|_Y \le \tfrac{1}{4}\beta$$

voor $x \in X_\alpha$.

Uit hulpstelling 7.4.1. volgt nu dat er precies één afbeelding ψ van X_α in Y_β is met $G(x,\psi(x)) = 0$ voor $x \in X_\alpha$. Deze ψ voldoet dan ook aan $F(x,\psi(x)) = 0$ voor $x \in X_\alpha$, en daar $\psi(0) \in Y_\beta$ en $F(0,\psi(0)) = 0$ geldt nog $\psi(0) = 0$. Verder is ψ continu.

Laat φ een continue afbeelding zijn van X_α in $\mathbb{R}^n$ met $G(x,\varphi(x)) = 0$, $\varphi(0) = 0$ (nu is niet gegeven dat de waarden van φ in Y_β liggen). Neem aan dat ergens op X_α geldt $\|\varphi(x)\|_Y > \beta$. Daar $\max_{x \in X_\gamma} \|\varphi(x)\|_Y$ continu afhangt van $\gamma \in [0,\alpha]$ en $\varphi(0) = 0$, is er een $\delta \in (0,\alpha)$ te vinden met $\max_{x \in X_\delta} \|\varphi(x)\|_Y = \beta$.

Voor $x \in X_\delta$ is dan

$$\| H(x,\varphi(x)) - H(x,0)\|_Y \le \tfrac{1}{2} \|\varphi(x)\|_Y \le \tfrac{1}{2}\beta,$$

en dus $\| H(x,\varphi(x))\|_Y \le \frac{3}{4}\beta$. Derhalve is $\|\varphi(x)\|_Y \le \frac{3}{4}\beta$ voor $x \in X_\delta$ wegens $G(x,\varphi(x)) = 0$. Dit levert een tegenspraak met $\max_{x \in X_\delta} \|\varphi(x)\|_Y = \beta$. Derhalve is $\|\varphi(x)\|_Y \le \beta$ voor $x \in X_\alpha$, en uit de reeds eerder vastgestelde eenduidigheid volgt $\psi = \varphi$. □

7.4.3. Stelling (voortzetting van 7.4.2). Indien F in een omgeving van (0,0) continu differentieerbaar is naar $x_1,\dots,x_m$, $y_1,\dots,y_n$, dan is ψ in het punt 0 differentieerbaar.

Bewijs. Neem weer $G = A^{-1}F$ en $H(x,y) = y-G(x,y)$. Dan heeft H continue partiële afgeleiden naar de x_i's en de y_j's in een omgeving van (0,0), en de afgeleiden naar de y_j's zijn nul in het punt (0,0).
Zij B de matrix der partiële afgeleiden van H naar de x_i's. We zullen laten zien dat deze B de functionaalmatrix is van ψ in het punt 0.

Laat $\varepsilon > 0$, en bepaal $\delta > 0$ zó dat

$$\|H(x,y) - Bx\|_Y \le \varepsilon \|x\|_X + \varepsilon \|y\|_Y$$

voor alle x en y met $\|x\|_X < \delta$ en $\|y\|_Y < \delta$. Daar ψ continu is in het punt $x = 0$ is er een δ_1 $(0 < \delta_1 < \delta)$ te vinden zó dat $\|\psi(x)\|_Y < \delta$ als $\|x\|_X < \delta_1$. Wegens $\psi(x) = H(x,\psi(x))$ is nu voor $x \in X$ met $\|x\|_X < \delta_1$

$$\|\psi(x) - Bx\|_Y \le \varepsilon \|x\|_X + \varepsilon \|\psi(x)\|_Y.$$

Hieruit volgt dat voor $x \in X$, $\|x\|_X < \delta_1$

$$\|\psi(x) - Bx\|_Y \le \varepsilon\|x\|_X + \varepsilon\|Bx\|_Y + \varepsilon\|\psi(x) - Bx\|_Y,$$

en dus dat voor $0 < \varepsilon < 1$

$$\|\psi(x) - Bx\|_Y \le (1-\varepsilon)^{-1}(\varepsilon\|x\|_X + \varepsilon\|Bx\|_Y).$$

Aangezien ε willekeurig is, volgt hieruit dat ψ in het punt 0 differentieerbaar is met functionaalmatrix B. $\square$

Literatuur

[AG] Achieser, N.I. en Glasmann, I.M., Theorie der Operatoren im Hilbertraum; (BK 5403).

[AL] Ackermans, S.T.M. en Lint, J.H. van, Algebra en Analyse; (BA 7017).

[BN] Bachman, G. en Narici, L., Functional analysis; (BK 6608).

[B] Berberian, S.K., Introduction to Hilbert Space; (BK 6116).

[Br] Bruijn, N.G. de, syllabus Hilbertruimten; (BK 5916).

[D] Dieudonné, J., Foundations of Modern Analysis; (BK 6917).

[DS] Dunford, N. en Schwartz, J.T., Linear operators, I en II; (BK 5809).

[E] Edwards, R.E., Functional analysis; (BK 6507).

[HA] Halmos, P.R., A Hilbert Space Problem Book; (BK 6701).

[He] Helmberg, G., Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space; (BK 6901).

[KA] Kantorowitsch, L.W. en Akilow, G.P., Funktionalanalysis in normierten Räumen; (BK 6408).

[RN] Riesz, F. en Nagy, B.Sz., Leçons d'analyse fonctionelle; (BK 5306).

[S] Schmeidler, W., Lineare Operatoren im hilbertschen Raum; (BK 5404).

[T] Taylor, A.E., Introduction to functional analysis; (BK 5808).

[W] Wilansky, R., Functional analysis; (BK 6413).

[Z] Zaanen, A.C., Linear analysis; (BK 5303).