TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

over

LINEAIRE ANALYSE I

Verzameld door Dr. W. van der Meiden

Uitgave 1969

Bibeltheog

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken over Lineaire Analyse I

VERZAMELD DOOR DR. W. VAN DER MEIDEN

UITGAVE 1969

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 205
PRIJS f 1,--

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken over Lineaire Analyse I

UITGAVE 1969

Onderwerpen

JdG, 20 Juli 2005

Vraagstukken over Lineaire Analyse I

De nummering der vraagstukken heeft de volgende betekenis:

De uit drie gehele getallen x, y en z bestaande cijfercombinatie x.y.z gaat vooraf aan vraagstuk nummer z, behorend bij de in § x.y van de syllabus behandelde stof.

Een verwijzing in vraagstuk x.y.z naar vraagstuk x'.y'.z' wordt aangeduid door "(# x'.y'.z')", een verwijzing naar sectie x'.y'.z' of § x'.y' van de syllabus wordt aangegeven met "(§ x'.y'.z')" respectievelijk "(§ x'.y')".

1.1. 1. Men beschouwt de functieruimte $R\ell^{R\ell}$ van reële functies op $R\ell$.
Bewijs dat de volgende deelverzamelingen van R onafhankelijk zijn:

i: $\{f,g,h\}$, als $f(t) := 1$, $g(t) := t$, $h(t) := t^2$;

ii: $\{f,g\}$, als $f(t) := te^t$, $g(t) := e^{2t}$;

iii: $\{f,g,h\}$, als $f(t) := t$, $g(t) := \sin t$, $h(t) := \cos t$.

1.1. 2. Bewijs dat $\{\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t\}$ onafhankelijk zijn (in $R\ell^{R\ell}$); zij S_r de door deze vier elementen opgespannen reële lineaire deelruimte van $R\ell^{R\ell}$, en zij D de lineaire afbeelding van S_r in S_r, gedefinieerd door

$$(Df)(t) := f'(t) \qquad (f \in S_r).$$

Bepaal de matrix van D ten opzichte van bovengenoemde basis. Ga na of D eigenvectoren bezit.
Dezelfde vragen voor de opgespannen complexe lineaire deelruimte S in Cm^{Cm}.

1.1. 3. Bewijs dat voor iedere $n \in Nt$ de volgende deelverzamelingen in $R\ell^{R\ell}$ lineair onafhankelijk zijn:

i: $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ met $f_k(t) := t^k$;

ii: $\{g_k\}_{k=1,\dots,n}$ met $g_k(t) := \sin kt$.

1.1. 4. Zij X een willekeurige niet-lege verzameling en zij

$$F(X) := \{f \in Cm^X \mid X \setminus f^{\leftarrow}(0) \text{ is eindig}\}.$$

Bewijs dat F(X) een lineaire deelruimte is van Cm^X.
Zij voor iedere $x \in X$ het element $e_x \in F(X)$ gedefinieerd door

$$e_x(x) = 1, \quad \forall_{y \in X \setminus \{x\}}\ e_x(y) = 0.$$

Bewijs dat ieder element f van F(X) geschreven kan worden als lineaire combinatie van elementen uit $\{e_x\}_{x \in X}$.
Bewijs dat F(X) een lineaire deelruimte is van B(X).

1.2. 0. Vraagstukken over topologische ruimten zijn opgenomen in de syllabus "Algebra en Analyse"; zie aldaar vraagstuk 3.1 - 3.21 en 3.36 - 3.59.

1.2. 1. Als $\mathcal{T}$ een topologie is voor een verzameling R en als $\mathcal{Y}$ een deel van $\mathcal{T}$ is met de eigenschap dat iedere open verzameling $U \in \mathcal{T}$ vereniging is van open verzamelingen uit $\mathcal{Y}$, dan heet $\mathcal{Y}$ een <u>basis</u> voor de topologie $\mathcal{T}$.
Zij $R \neq \emptyset$, $\mathcal{T}$ een topologie voor R met basis $\mathcal{Y}$.
Bewijs dat $\mathcal{Y} \neq \emptyset$; bewijs dat $\mathcal{Y} \setminus \{\emptyset\}$ een basis is.

1.2. 2. Zij voor iedere $\alpha \in Cm$ en iedere $\delta > 0$

$$B_{\alpha,\delta} := \{\gamma \in Cm \mid |\gamma - \alpha| < \delta\} .$$

Bewijs dat $\{B_{\alpha,\delta}\}_{\substack{\alpha \in Cm \\ \delta > 0}}$ een basis is voor de topologie van Cm.

Zij $Q := \{\gamma \in Cm \mid \text{Re } \gamma \in Rt, \text{ Im } \gamma \in Rt\}$.

Bewijs dat $\{B_{\alpha,\delta}\}_{\substack{\alpha \in Q \\ \delta \in Rt, \delta > 0}}$ een basis is voor de topologie van Cm.

1.2. 3. Zij $\mathcal{Y}$ een klasse deelverzamelingen van een verzameling R, met de eigenschappen

i: $\quad \forall_{U \in \mathcal{Y}} \forall_{V \in \mathcal{Y}} \exists_{\mathcal{P} \subset \mathcal{Y}} \; U \cap V = \bigcup_{W \in \mathcal{P}} W$.

ii: $\quad \exists_{\mathcal{P} \subset \mathcal{Y}} \; R = \bigcup_{W \in \mathcal{P}} W$.

Men vormt met behulp van $\mathcal{Y}$ een nieuwe klasse

$$\mathcal{T} := \{Y \subset R \mid \exists_{\mathcal{P} \subset \mathcal{Y}} \; Y = \bigcup_{X \in \mathcal{P}} X\} .$$

Bewijs dat $\mathcal{T}$ een topologie is voor R en dat $\mathcal{Y}$ een basis is voor $\mathcal{T}$.

1.2. 4. Een compacte deelverzameling van een hausdorffruimte is gesloten.

1.2. 5. Als R compact is en f is een continue afbeelding van R in een topologische ruimte R', dan is f(R) compact in R'.

1.2. 6. Als R compact is en R' een hausdorffruimte, en als f een continue bijectie is van R op R', is $f^{\leftarrow}$ continu.

1.2. 7. Bewijs dat Rℓ en Cm separabel zijn.

1.2. 8. Bewijs dat R^n separabel is.

1.2. 9. In de verzameling $\{1,2,3,\ldots,n\}$ zij iedere deelverzameling open (discrete topologie; ga na dat aan de voorwaarden is voldaan). Men beschouwt afbeeldingen van $\{1,2,3,\ldots,n\}$ in $R\ell$.
Bewijs dat deze continu zijn; ze vormen een lineaire ruimte (die isomorf is met) R^n.

1.2.10. Als R een topologische ruimte is en f een continue afbeelding van R in Cm, is $f^{\leftarrow}(\gamma)$ voor iedere $\gamma \in Cm$ een gesloten verzameling.

1.4. 0. Vraagstukken over metrische ruimten zijn opgenomen in de syllabus "Algebra en Analyse"; zie aldaar vraagstuk 3.22 - 3.35.

1.4. 1. Zij d een metriek in de metrische ruimte R; bewijs dat

$$\forall_{w\in R}\ \forall_{x\in R}\ \forall_{y\in R}\ \forall_{z\in R}\ |d(x,z)-d(y,w)| \leq d(x,y)+d(w,z)\ .$$

1.4. 2. Als in de metrische ruimte R met metriek d de rijen $\{x_n\}_{n\in Nt}$ en $\{y_n\}_{n\in Nt}$ convergeren, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d\left(\lim_{n\to\infty} x_n\ ,\ \lim_{n\to\infty} y_n\right)\ .$$

1.4. 3. Als d een metriek is voor een verzameling R, is de afbeelding $(x,y) \to d(x,y)$ van $R \times R$ in $R\ell$ continu.

1.4. 4. Als R een metrische ruimte is en $A \subset R$, dan is de afbeelding α, gedefinieerd door

$$\alpha(x) := d(x,A)$$

een continue afbeelding van R in $R\ell$.

1.4. 5. Iedere compacte metrische ruimte is separabel.

1.4. 6. Bewijs dat een separabele metrische ruimte een aftelbare basis heeft.

1.4. 7. Zij $R := Nt^{Nt}$; een functie $d : R \times R \to R\ell$ wordt gedefinieerd door
$a = b$, dan $d(a,b) := 0$
$a \neq b$, dan is er één $k \in Nt$ zó dat $[\forall_{j=1,\ldots,k-1}\ a_j = b_j]\ \&\ [a_k \neq b_k]$;
neem $d(a,b) = k^{-1}$.
Bewijs dat d een metriek is.

1.4. 8. Zij $R := \{\gamma \in Cm \mid |\gamma| \leq 1\}$. De functie d wordt op $R \times R$ gedefinieerd door
$\alpha\beta = 0$, dan $d(\alpha,\beta) = |\alpha - \beta|$,
$\alpha\beta \neq 0$ en $\arg\alpha = \arg\beta$, dan $d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|$,
$\alpha\beta \neq 0$ en $\arg\alpha \neq \arg\beta$, dan $d(\alpha,\beta) = |\alpha| + |\beta|$.
Bewijs dat d een metriek is.

1.5. 1. Beschouw $R\ell$ met de gebruikelijke topologie, voortgebracht door de metriek

$$d(x,y) := |x-y| .$$

Zij
$$d'(x,y) := \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| .$$

i: Bewijs dat d' een metriek is voor $R\ell$, en dat d' dezelfde topologie voortbrengt als d.

ii: Bewijs dat $\{n\}_{n \in Nt}$ een fundamentaalrij is bij de metriek d'.

1.5. 2. Als R een volledige metrische ruimte is, en S is gesloten in R, is ook S volledig (§ 1.5.1).

1.5. 3. Als R een metrische ruimte is en S is een volledige (metrische) deelruimte in R, dan is S gesloten.

1.5. 4. Geef een voorbeeld van een fundamentaalrij in een metrische ruimte, die niet convergeert.

1.6. 1. In de verzameling R^n van # 1.2.13 zij

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(j)| \mid j = 1,2,\ldots,n\} .$$

Bewijs dat $\|f\|_\infty$ een norm is.

1.6. 2. Als R een genormeerde lineaire ruimte is en als $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, dan is $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$.

1.6. 3. Bewijs dat in een genormeerde lineaire ruimte R de eenheidsdiscus $\{f \in R \mid \|f\| \leqslant 1\}$ convex is.

1.6. 4. Bewijs dat twee genormeerde vectorruimten R en S met dezelfde eindige dimensie topologisch isomorf zijn.

1.6. 5. Een eindig dimensionale lineaire deelruimte van een genormeerde vectorruimte is gesloten.

1.6. 6. In $C(R\ell)$ definieert men

$$\|f\|_0 := f(0) .$$

Ga na of $\| \ \|_0$ een norm is.

1.6. 7. In $C(R\ell)$ neemt men als norm

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in R\ell\} .$$

Zij γ een willekeurig reëel getal, en zij ω_γ de afbeelding van $C(R\ell)$ in Cm, gedefinieerd door

$$\omega_\gamma(f) := f(\gamma) .$$

Bewijs dat ω_γ uniform continu is.

1.6. 8. Bewijs § 1.6.6.

1.6. 9. Zij R een vectorruimte en zijn $\| \ \|$ en $\| \ \|'$ twee in R gedefinieerde normen; opdat $\| \ \|$ en $\| \ \|'$ dezelfde topologie bepalen is nodig en voldoende dat er positieve getallen α en β bestaan zó dat

$$\forall_{f \in R} \ \alpha\|f\| \leqslant \|f\|' \leqslant \beta\|f\| .$$

1.7. 1. Bewijs § 1.7.1.

1.7. 2. Zij $\ell^\infty := \{f \in Cm^{Nt} \mid \exists_{M>0}\ \forall_{k \in Nt}\ |f(k)| < M\}$

en zij $\|f\|_\infty := \sup\{|f(k)| \mid k \in Nt\}$.

Bewijs dat ℓ^∞ een niet-separabele B-ruimte is.

1.7. 3. Zij $\ell^1 := \{f \in Cm^{Nt} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty\}$

en zij $\|f\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)|$.

Bewijs dat ℓ^1 een separabele B-ruimte is.

1.7. 4. Zij P_n de verzameling van polynomen op $[0,1]$ met graad $\leq n$, en zij

voor $f \in P_n$: $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$.

Bewijs dat P_n een genormeerde lineaire ruimte is; is het een B-ruimte?

1.7. 5. Zij $P_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, genormeerd als in # 1.7.4.

Bewijs dat P_∞ een genormeerde lineaire ruimte is, maar geen B-ruimte.

1.7. 6. Bewijs dat P_∞ in $C([0,1])$ dicht ligt.

1.7. 7. In $C_{\text{mod } 1}$ (zie § 2.1.6) beschouwt men alle functies f die een absoluut convergente fourierontwikkeling hebben:

$$C_W := \{f \in C_{\text{mod } 1} \mid f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{2\pi i n t}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty\}$$

en definieert voor $f \in C_W$: $\|f\|_W := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|$.

Bewijs dat C_W een B-ruimte is.

1.7. 8. Zij $n \in Nt \cup \{0\}$; zij $f^{(n)}$ de n-de afgeleide van de functie f en zij

$$D_n := \{f \in Cm^{[0,1]} \mid f^{(n)} \in C([0,1])\}$$

en voor alle $f \in D_n$

$$\|f\| := \sum_{k=0}^{n} \sup\{|f^{(k)}(t)| \mid t \in [0,1]\} .$$

Bewijs dat D_n een B-ruimte is.

1.7. 9. Bewijs dat $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$ (zie § 1.9.5, # 1.7.2 en # 1.7.3) en dat voor $f \in \ell^1$ geldt

$$\|f\|_1 \geq \|f\|_2 \geq \|f\|_\infty .$$

Bewijs dat ℓ^1 niet gesloten is in ℓ^2 (bij $\| \ \|_2$) en niet gesloten is in ℓ^∞ (bij $\| \ \|_\infty$) en dat ℓ^2 niet gesloten is in ℓ^∞ (bij $\| \ \|_\infty$).

1.7.10. Beschouw $C([0,1])$; bewijs dat voor $f \in C([0,1])$ geldt

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty .$$

1.8. 1. In de (reële) R^n wordt gedefinieerd

i: $$< f,g > := \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (j+k)f(j)g(k) \;;$$

ii: $$< f,g > := \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} jk^{-1}f(j)g(k) \;;$$

iii: met een $m \in \{1,2,\dots,n-1\}$

$$< f,g > := \sum_{j=1}^{m} f(j)g(j) \;.$$

Ga na welke van deze afbeeldingen van $R^n \times R^n$ in $R\ell$ een inproduct is.

1.8. 2. Zij R een IP-ruimte; dan geldt voor alle $f \in R$ en alle $g \in R$

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\{\|f\|^2 + \|g\|^2\} \;;$$

(zwaartelijnformule).

1.8. 3. Zij R een IP-ruimte; bewijs dat

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} \; 4(f,g) = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2 \;.$$

1.8. 4. Zij R een genormeerde vectorruimte met de eigenschap

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} \; \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\{\|f\|^2 + \|g\|^2\} \;.$$

Bewijs dat in R een inproduct < , > kan worden gedefinieerd, zó, dat

$$\forall_{f \in R} < f,f > = \|f\|^2 \;.$$

1.9. 1. Bewijs dat ℓ^2 separabel is.

2.1. 1. Als $\{f_1,\dots,f_n\}$ een verzameling orthogonale vectoren in een IP-ruimte is en $\forall_{k=1,\dots,n}\ f_k \neq \sigma$, dan zijn $f_1,\dots,f_n$ onafhankelijk.

2.1. 2. Zij $\{\alpha_n\}_{n\in \mathbb{N}t}$ een rij van onderling orthogonale vectoren in de H-ruimte R, waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n\|^2 < \infty$. Bewijs dat de rij $\beta_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ convergeert.

2.1. 3. Zij $\{\alpha_n\}_{n\in \mathbb{N}t}$ een rij vectoren in de H-ruimte R, waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n\| < \infty$. Bewijs dat de rij $\beta_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ convergeert.

2.1. 4. In de IP-ruimte $C([-1,1])$ met $(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$ is iedere even functie orthogonaal met iedere oneven functie.

2.1. 5. Bepaal in R^4 een orthogonaal stelsel $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ zo dat $\alpha_1 = (1,2,2,4)$ en $\forall_{k=2,3,4}\ \|\alpha_k\| = 5$.

2.1. 6. Zij $R := F(\mathbb{N}t)$ (zie # 1.1.4), en definieer

$$(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\overline{g(k)} .$$

Bewijs dat dit een inproduct is en bepaal een orthonormaalsysteem in R dat dezelfde deelruimte opspant als de rij

$$f_1 := (1,0,0,0,0,\dots)$$
$$f_2 := (1,1,0,0,0,\dots)$$
$$f_3 := (1,1,1,0,0,\dots)$$
$$\vdots$$

2.1. 7. Beschouw $C([0,1])$ als IP-ruimte, met $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$.

Zij $q_n(t) := e^{2\pi int}$ $(n \in Gh,\ t\in[0,1])$.

Bewijs dat $\{q_n\}_{n\in Gh}$ een totaal orthonormaalsysteem is in $C([0,1])$.

2.1. 8. Zij $R := C([0,1]\times[0,1])$, beschouwd als IP-ruimte, met

$$(f,g) := \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\overline{g(x,y)}dxdy .$$

Zij q_n als in # 2.1.7, en p_{nm} gedefinieerd door

$$p_{nm}(x,y) = q_n(x)q_m(y) \ , \quad n \in Gh,\ m \in Gh,\ x \in [0,1],\ y \in [0,1].$$

Bewijs dat $\{p_{nm}\}_{n \in Gh, m \in Gh}$ een totaal orthonormaalsysteem is in R.

2.1.9. In R_r^3 (beschouwd als IP-ruimte bij het gebruikelijke inproduct) wordt met behulp van de matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

een functie $< , >$ van $R_r^3 \times R_r^3$ in $R\ell$ gedefinieerd door

$$< x,y > := (x,Ay) \ .$$

Bewijs dat $< , >$ een inproduct is en bepaal bij dit inproduct een orthonormale basis voor R_r^3.

2.1.10. In $C([0,1])$ wordt een inproduct gedefinieerd door

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} \sin \pi t \ dt \ ;$$

ga na dat dit werkelijk een inproduct is.
Orthonormaliseer de volgende deelverzamelingen:

i: $\{1,t,t^2\}$;

ii: $\{\sin \pi t, \cos \pi t, \sin 2\pi t\}$;

iii: $\{1, e^{\pi t}, e^{-\pi t}\}$.

2.2. 1. Zij X een verzameling met een machtigheid die groter is dan die van Nt; zij

$$A(X) := \{f \in \mathrm{Cm}^X \mid X \setminus f^{\leftarrow}(0) \text{ is hoogstens aftelbaar } \& \sum_{x \in X \setminus f^{\leftarrow}(0)} |f(x)|^2 < \infty\}.$$

Bewijs dat

i: $A(X)$ een lineaire deelruimte is;

ii: $< f,g > := \sum_{x \in X \setminus f^{\leftarrow}(0)} f(x)\overline{g(x)}$ een inproduct is in $A(X)$;

iii: $A(X)$ in de metriek van $< , >$ volledig is;

iv: $A(X)$ niet separabel is.

2.2. 2. Zij X een verzameling met een machtigheid groter dan die van Nt; beschouw $A(X)$ (zie # 2.2.1) en $F(X)$ (zie # 1.1.4) met de topologie die door $A(X)$ wordt geïnduceerd (zie § 1.2.1).
Bewijs dat

i: $F(X)$ een lineaire deelruimte is van $A(X)$;

ii: $F(X)$ is dicht in $A(X)$;

iii: $F(X)$ niet gesloten is in $A(X)$;

iv: $F(X)$ niet volledig is;

v: $F(X)$ niet separabel is.

2.2. 3. Zij R een IP-ruimte; bewijs:

i: Als R een aftelbaar oneindig totaal orthonormaalsysteem bevat, is ieder totaal orthonormaalsysteem aftelbaar oneindig.

ii: Als R een eindig totaal orthonormaalsysteem bevat, is ieder totaal orthonormaalsysteem eindig; in dit geval bestaan alle totale orthonormaalsystemen uit evenveel elementen.

2.2. 4. Beschouw $C_{\mathrm{mod}\ 1}$ en ℓ^2 met de in § 2.1.6 en § 1.9.5 beschreven inproducten.
Voor iedere $f \in C_{\mathrm{mod}\ 1}$ definiëren we

$$\varphi(f,n) := \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\,dt\ , \qquad n \in \mathrm{Gh}\ ,$$

en we beschouwen de afbeelding $F : C_{\mathrm{mod}\ 1} \to \mathrm{Cm}^{\mathrm{Nt}}$ die wordt gedefinieerd door

$$F(f) := (\varphi(f,0),\varphi(f,1),\varphi(f,-1),\varphi(f,2),\varphi(f,-2),\dots)\ .$$

Bewijs dat

i: $F(C_{\text{mod } 1}) \subset \ell^2$;

ii: F eeneenduidig is;

iii: F niet op is;

iv: F isometrisch is.

2.2. 5. Als R een IP-ruimte is, $g \in R$ en $L_g(f) := (f,g)$ voor alle $f \in R$, dan geldt: $\|L_g\| = \|g\|$.

2.2. 6. Ga na of voor de bewering in § 2.2.3 volledigheid van de ruimte R een overbodige voorwaarde is.

Ga ook na of deze voorwaarde nodig is.

3.1. 1. Als $n \in \mathbb{N}t$ en S_j $(j = 1,\ldots,n)$ een deelverzameling is van een vectorruimte R, is

$$\sum_{j=1}^{n} S_j := \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \mid \forall_{j=1,\ldots,n}\, x_j \in S_j \right\} .$$

$\sum_{j=1}^{n} S_j$ heet de som van de verzamelingen S_j $(j = 1,\ldots,n)$. Als bovendien iedere S_j een lineaire deelruimte is en

$$\forall_{j=1,\ldots,n}\ S_j \cap \sum_{\substack{k=1,\ldots,n \\ k\neq j}} S_k = \{\sigma\} ,$$

heet $\sum_{j=1}^{n} S_j$ de directe som.

i: Bewijs dat voor $x \in \sum_{j=1}^{n} S_j$ (directe som) de splitsing $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ $(\forall_j\ x_j \in S_j)$ eenduidig is.

ii: Bewijs dat voor een onafhankelijk stelsel vectoren $\{f_1,\ldots,f_n\} \subset R$ geldt

$$L(\{f_1,\ldots,f_n\}) = \sum_{j=1}^{n} L(\{f_j\}) \quad \text{(directe som)}.$$

3.1. 2. Zij $R := \mathcal{C}m^{[-1,1]}$, $R_1 := \{f \in R \mid f \text{ is oneven}\}$, $R_2 := \{f \in R \mid f \text{ is even}\}$. Bewijs dat $R = R_1 + R_2$ (directe som).

3.1. 3. Zij $BV([0,1]) := \{f \in R\ell^{[0,1]} \mid f \text{ is van begrensde variatie}\}$,

$$R^+ := \{f \in R\ell^{[0,1]} \mid f \text{ is monotoon niet-dalend}\} ,$$

$$R^- := \{f \in R\ell^{[0,1]} \mid f \text{ is monotoon niet-stijgend}\} .$$

Bewijs dat

i: $R^+ \cup R^- \subset BV([0,1])$;

ii: $BV([0,1]) = R^+ + R^-$ (geen directe som).

3.1. 4. Als R een IP-ruimte is, $S \subset R$ en $Q \subset R$ dan geldt

i: $S \subset Q \Rightarrow R \ominus Q \subset R \ominus S$.

ii: $R \ominus S = R \ominus \overline{S} = R \ominus L(S) = R \ominus \overline{L(S)}$.

3.1. 5. Beschouw ℓ^2 met als inproduct $(\alpha,\beta) := \Sigma_j \alpha_j \overline{\beta}_j$.

Zij $S := \{\alpha \in \ell^2 \mid \|\alpha\| = 1\}$.

Bewijs dat S in ℓ^2 gesloten is, dat $\ell^2 \ominus S = \{\sigma\}$ en dat (dus) $S \neq \ell^2 \ominus (\ell^2 \ominus S)$.

3.1. 6. Beschouw F(Nt) (vergelijk # 1.1.4, # 2.2.1 en # 2.2.2) met inproduct $(\alpha,\beta) := \Sigma_j \alpha_j \overline{\beta}_j$.

Definieer $\varphi(\alpha) := \Sigma_j \frac{\alpha_j}{j}$.

Bewijs dat

i: $\overset{\leftarrow}{\varphi}(0)$ een niet-volledige, gesloten lineaire deelruimte van F(Nt) is;

ii: $F(Nt) \ominus \overset{\leftarrow}{\varphi}(0) = \{\sigma\}$;

iii: $F(Nt) \ominus (F(Nt) \ominus \overset{\leftarrow}{\varphi}(0)) = F(Nt)$.

3.1. 7. Beschouw de verzameling $P_r([-1,1])$ der reële polynomen op $[-1,1]$ met

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \ .$$

Zij $P_r^{(1)} := \{f \in P_r([-1,1]) \mid f \text{ is oneven}\}$,

en $P_r^{(2)} := \{f \in P_r([-1,1]) \mid f \text{ is even}\}$.

Bewijs dat

i: $P_r^{(1)}$ en $P_r^{(2)}$ in P_r gesloten zijn;

ii: $P_r^{(1)}$ en $P_r^{(2)}$ niet volledig zijn;

iii: $P_r = P_r^{(1)} \oplus P_r^{(2)}$.

Welke conclusie kunt U trekken ten aanzien van de voorwaarde die in § 3.1.2b is genoemd?

3.1. 8. Zij R een H-ruimte, S een echte gesloten lineaire deelruimte, P_S de projectie van R in S.

Bewijs dat de eigenwaarden van P_S zijn 0 en 1, en dat $E_1 = S$ en $E_0 = R \ominus S$; bewijs dat $P_S^2 = P_S$.

3.2. 1. Beschouw $C([0,1])$ met $\| \ \|_\infty$.
Als $\{t_1,t_2,\ldots,t_n\} \subset [0,1]$ en $\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\} \subset \mathbb{C}$m, zij $T(f) := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j f(t_j)$, $(f \in C([0,1])$.
Bewijs dat T een begrensde lineaire functionaal van $C([0,1])$ is en dat

$$\|T\| = \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j| \ .$$

3.2. 2. Zij μ een monotone (reële) functie op $[0,1]$ en zij $M(f) := \int_0^1 f(t)d\mu(t)$, $(f \in C([0,1]))$.
Bewijs dat M een begrensde lineaire functionaal van $C([0,1])$ (met $\| \ \|_\infty$) is en bepaal $\|M\|$.

3.2. 3. Zij $\tau \in [0,1]$; bewijs dat er een monotone functie μ op $[0,1]$ bestaat zó dat

$$\forall_{f \in C([0,1])} \ f(\tau) = \int_0^1 f(t)d\mu(t) \ .$$

3.2. 4. Zij $f \in \ell^\infty$ en definieer

$$F(g) := \sum_{j=1}^{\infty} g(j)f(j) \ , \qquad (g \in \ell^1) \ .$$

Bewijs dat $F \in (\ell^1)^*$; bepaal $\|F\|$.

3.2. 5. Zij $$c^0 := \left\{ f \in \ell^\infty \ \middle| \ \lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \right\} .$$

Bewijs dat c^0 met $\| \ \|_\infty$ een B-ruimte is.

Zij $g \in \ell^1$ en $G(f) := \sum_{j=1}^{\infty} g(j)f(j)$, $(f \in c^0)$.

Bewijs dat $G \in (c^0)^*$ en bepaal $\|G\|$.
Zij nu omgekeerd $H \in (c^0)^*$; bewijs dat er een $h \in \ell^1$ zó dat

$$\forall_{f \in c^0} \ H(f) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)f(j) \ .$$

3.2. 6. Beschouw $C([0,1])$ met $\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

i: Met $\tau \in [0,1]$ zij $L_\tau(f) := f(\tau)$, $f \in C([0,1])$.
Bewijs dat L_τ een lineaire functionaal is, maar niet begrensd.

ii: Met $n \in Nt \cup \{0\}$ zij $M_n(f) := \int_0^1 f(t)t^n dt$, $f \in C([0,1])$.

Bewijs dat M_n een begrensde lineaire functionaal is, en bepaal $\|M_n\|$.
Vergelijk dit resultaat met # 3.2.2.

iii: Ga na of de rij $\{M_n\}_{n \in Nt}$ convergeert, en zo ja, bepaal de limiet.

iv: Met $n \in Nt$ zij $W_n(f) := \int_0^1 f(t)\sqrt[n]{t}\, dt$, $f \in C([0,1])$.

Bewijs dat W_n een begrensde lineaire functionaal is, bepaal $\|W_n\|$ en onderzoek de convergentie van $\{W_n\}_{n \in Nt}$.

3.2. 7. Zij R een genormeerde vectorruimte; als $f \in R$ definieert de uitdrukking

$$\tilde{f}(F) := F(f), \qquad F \in R^*$$

een afbeelding $\tilde{f}$ van R^* in Cm.
Bewijs dat $\tilde{f}$ een begrensde lineaire functionaal is van R^* en bepaal $\|\tilde{f}\|$.

3.2. 8. Zij L een lineaire functionaal van een genormeerde vectorruimte R, met de eigenschap dat L begrensd is op een gegeven bol $B_{p,\varepsilon}$ ($p \in R$, $\varepsilon > 0$).
(In de gebruikelijke betekenis: $\exists_{M>0}\ \forall_{f \in R}\ [\|f - p\| < \varepsilon \Rightarrow |L(f)| < M]$.)
Bewijs dat $L \in R^*$.

3.2.9. Zij R een genormeerde vectorruimte, en $L \in R^*$. Bewijs dat $\overleftarrow{L}(0)$ een gesloten lineaire deelruimte is.

In R wordt een relatie $\equiv$ gedefinieerd door

$$f \equiv g :\Leftrightarrow f - g \in \overleftarrow{L}(0) .$$

Bewijs dat $\equiv$ een equivalentierelatie is.

Zij voor iedere $f \in R$, $[f] := \{g \in R \mid g \equiv f\}$; zij $R / \overleftarrow{L}(0)$ de verzameling van deze equivalentieklassen; definieer in $R / \overleftarrow{L}(0)$

$$[f] + [g] := [f+g] , \quad \alpha[f] := [\alpha f] ,$$

ga na dat deze definities geoorloofd zijn en dat daardoor $R / \overleftarrow{L}(0)$ een vectorruimte is.

Bewijs dat $\dim(R / \overleftarrow{L}(0)) = 1$ als $L \neq 0$, en $\dim(R / \overleftarrow{0}(0)) = 0$.

3.2.10. Zij R een genormeerde vectorruimte, stel dat $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ een lineair onafhankelijk stelsel begrensde lineaire functionalen van R is.

Bewijs dat $\bigcap_{j=1}^{n} \overleftarrow{L_j}(0)$ een gesloten lineaire deelruimte is en dat

$$\dim\left(R / \bigcap_{j=1}^{n} \overleftarrow{L_j}(0)\right) = n .$$

3.2.11. Bewijs dat voor de bewering van stelling § 2.2.2.ii separabiliteit van de ruimte een overbodige voorwaarde is.

3.2.12. Bewijs dat voor de bewering van stelling § 2.2.2.ii, volledigheid van de ruimte een nodige voorwaarde is.

3.3. 1. Beschouw $C([0,1])$ met inproduct $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$.

Zij $f_n(t) := \sin \pi nt$ $(n \in \mathrm{Nt},\ t \in [0,1])$.

i: Bewijs dat $f_n \rightharpoonup \sigma$;

ii: Bewijs dat niet geldt $f_n \to \sigma$.

3.3. 2. Zij R een IP-ruimte en $\{f_n\}_{n \in \mathrm{Nt}}$ een rij in R.
Als $f_n \rightharpoonup f$ en $\|f_n\| \to \|f\|$ dan geldt $f_n \to f$.

3.3. 3. Zij R een IP-ruimte, $\{f_n\}_{n \in \mathrm{Nt}}$ een rij in R.
Indien $f_n \rightharpoonup f$ dan geldt $\|f\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|$.

4.1. 1. Zij R een eindig dimensionale genormeerde vectorruimte en $T \in LO(R)$.
Bewijs dat $\exists_{f \in R \setminus \{\sigma\}} \; \|Tf\| = \|T\|\,\|f\|$.

4.1. 2. Geef een voorbeeld van een vectorruimte R en een $T \in BLO(R)$ waarvoor

$$\forall_{f \in R \setminus \{\sigma\}} \; \|Tf\| \neq \|T\|\,\|f\| .$$

4.1. 3. Bewijs stelling § 4.1.4.

4.1. 4. Voor $p \in \{1,2,\infty\}$ is $\| \; \|_p$ een norm in R^n.
Bewijs dat $\forall_{f \in R} \; \|f\|_1 \geq \|f\|_2 \geq \|f\|_\infty$.
Zij $B_pLO(R^n) = \{T \in LO(R^n) \mid T$ begrensd t.o.v. $\| \; \|_p\}$; als T begrensd is t.o.v. $\| \; \|_p$ schrijven we

$$\|T\|_p = \sup\left\{\frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p} \;\middle|\; f \neq \sigma\right\} .$$

Bewijs dat $\forall_{p \in \{1,2,\infty\}} \; B_pLO(R^n) = LO(R^n)$.

Zij $T \in LO(R^n)$; druk $\|T\|_1$ en $\|T\|_\infty$ uit in de elementen van de matrix van T.

4.1. 5. Zij R een genormeerde ruimte en $T \in BLO(R)$; bewijs dat

$$\|T\| = \sup\{\|Tf\| \mid \|f\| = 1\} .$$

4.1. 6. Zij $R := C(R\ell)$ met $\| \; \|_\infty$; zij T op R gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := f(x+1) \; , \quad (f \in R, \; x \in R\ell) .$$

Bewijs dat $T \in BLO(R)$, bepaal $\|T\|$ en eigenwaarden en eigenruimten van T.

4.1. 7. Zij $R := C([0,1])$ en T op R gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := \int_0^1 (x+y)f(y)dy \; , \quad (f \in R, \; x \in [0,1]).$$

Bewijs dat $T \in LO(R)$ en bepaal $\|T\|_1$, $\|T\|_2$ en $\|T\|_\infty$ (vergelijk $\#$1.9.3 en $\#$4.1.4). Bepaal ook de eigenwaarden en eigenruimten van T.

4.1. 8. Zij $R := C([0,1])$ en $(Tf)(x) := \int_0^x f(t)dt$.

Bewijs dat $T \in LO(R)$ en bepaal $\|T\|_1$, $\|T\|_2$ en $\|T\|_\infty$. Bepaal ook de eigenwaarden en eigenruimten van T.

4.1. 9. Specialiseer de stelling van § 4.1.7 voor de reële numerieke ruimte R_r^n.

4.1.10. Toon aan dat volledigheid van de ruimte R in stelling § 4.1.8 geen overbodige voorwaarde is.

4.1.11. Zijn R en S B-ruimten, U een open verzameling in R. De continue afbeelding $\Phi : U \to S$ heet differentieerbaar in het punt $a \in U$ indien er een $F_a \in LO(R \to S)$ bestaat met de eigenschap

$$\|\Phi(f) - \Phi(a) - F_a(f-a)\| = o(\|f-a\|) \ , \qquad (f \to a) \ .$$

Φ heet differentieerbaar in U als Φ differentieerbaar is in ieder punt $a \in U$.

F_a heet de afgeleide van Φ in a; we schrijven dit ook als $\Phi'(a)$.

Zij $R := C([0,1])$, met $\| \ \|_\infty$; ga na of de volgende afbeeldingen van R in Cm differentieerbaar zijn, en bepaal de afgeleiden:

i: $\Phi(f) := f(0)$;

ii: $\Phi(f) := f^2(0)$;

iii: $\Phi(f) := \|f\|_\infty$.

4.1.12. Verifieer of de in ≠ 4.1.11 gegeven definitie overeenstemt met die voor differentieerbaarheid van functies $\Phi : R_r^n \to R_r^m$ (zie wiskunde IVa).

4.1.13. Zij $R := C_r([0,1])$ met $\| \ \|_\infty$. $K \in R$ en K heeft een continue afgeleide. Φ is gedefinieerd door

$$\Phi(f) := \int_0^1 K(f(t))dt \ .$$

Bewijs dat Φ differentieerbaar is en dat

$$[\Phi'(f)](h) = \int_0^1 K'(f(t))h(t)dt \ .$$

4.1.14. Zij $R := C_r([0,1])$, met $\| \ \|_\infty$. K is een functie van $[0,1] \times R\ell$ in $R\ell$, waarvan de partiële afgeleiden K_1 en K_2 bestaan en continu zijn.
Φ is gedefinieerd door

$$\Phi(f) := \int_0^1 K(t,f(t))dt \ .$$

Bewijs dat Φ differentieerbaar is en dat

$$[\Phi'(f)](h) = \int_0^1 K_2(t,f(t))h(t)dt \ .$$

4.1.15. Zij $R := C_r([0,1])$, met $\| \ \|_\infty$. Ga na of de volgende afbeeldingen van R in $R\ell$ differentieerbaar zijn, en bepaal de afgeleiden:

i: $$\Phi(f) := \int_0^1 f^2(t)dt \ ;$$

ii: $$\Phi(f) := \int_0^1 \sqrt{|f(t)|}\ dt \ ;$$

iii: $$\Phi(f) := \int_0^1 (t^2 + f(t)^2)dt \ ;$$

4.1.16. Zij $R := C_r([0,1])$, met $\| \ \|_\infty$. K is een functie van $[0,1] \times R\ell$ in $R\ell$, waarvan de partiële afgeleiden K_1 en K_2 bestaan en continu zijn.
Φ is gedefinieerd door

$$(\Phi f)(x) := \int_0^1 K(x,f(t))dt \ .$$

Bewijs dat Φ een differentieerbare afbeelding is van R in R, en dat

$$([\Phi'(a)]f)(x) := \int_0^1 K_2(x,a(t))f(t)dt \ .$$

4.1.17. Zij $R := C_r([0,1])$, met $\| \ \|_\infty$. Ga na of de volgende operatoren van R differentieerbaar zijn, en bepaal de afgeleiden:

i: $(\Phi f)(x) := x^2 + f(x)$;

ii: $(\Phi f)(x) := \int_0^1 \{x + f(t)\} dt$;

iii: $(\Phi f)(x) := \int_0^1 \{x - f(t)\}^2 dt$;

iv: $(\Phi f)(x) := \int_0^1 \sin(xf(t)) dt$;

4.2. 0. In de vraagstukken over § 4.2 wordt R^n (tenzij uitdrukkelijk anders vermeld) beschouwd als IP-ruimte met $(f,g) := \sum_{j=1}^{n} f(j)\overline{g(j)}$.

4.2. 1. Als S een volledige deelruimte is van een IP-ruimte R dan geldt voor de projectie P_S : $\|P_S\| = 1$.

4.2. 2. Als R een IP-ruimte is en $T \in BLO(R)$ dan geldt

$$\|T\| = \sup\{|(Tf,g)| \;\big|\; \|f\| = \|g\| = 1\} .$$

4.2. 3. Als R een IP-ruimte is en T een begrensde hermitische operator van R, dan geldt $\|T^2\| = \|T\|^2$.

4.2. 4. Als R een IP-ruimte is, $T \in LO(R)$ en

$$\exists_{c>0}\ \forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ [\|f\| = \|g\| = 1 \Rightarrow |(Tf,g)| < c]$$

dan geldt $T \in BLO(R)$.

4.2. 5. Zij $T \in LO(R^n)$; bewijs dat T een geadjungeerde T^* heeft, en dat voor de matrix $\begin{pmatrix} \tau^*_{11} & \cdots & \tau^*_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau^*_{n1} & \cdots & \tau^*_{nn} \end{pmatrix}$ van T^* geldt $\forall_{i=1,\ldots,n}\ \forall_{j=1,\ldots,n}\ \tau^*_{ij} = \overline{\tau}_{ji}$; $((\tau_{ij})$ is de matrix van T).

4.2. 6. Zij $T \in LO(R^n)$; bewijs dat T dan en slechts dan hermitisch is als voor de matrix (τ_{ij}) van T geldt: $\forall_{i=1,\ldots,n}\ \forall_{j=1,\ldots,n}\ \tau_{ij} = \overline{\tau_{ji}}$.

4.2. 7. Zij $T \in LO(R^n)$. Bewijs dat $\|T\|_1 = \|T^*\|_\infty$ (zie # 4.1.4).

4.2. 8. Zij $S := L(\{e_1+e_2+e_3\})$ in R^3, en zij P_S de bijbehorende projectie. Bepaal $\|P_S\|_1$, $\|P_S\|_\infty$, $\|P_S\|_2$ en P_S^*.

4.2. 9. Als R een H-ruimte is en $T \in BLO(R)$ dan geldt: T heeft dan en slechts dan een inverse als T^* er een heeft, en $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

4.2.10. Als R een IP-ruimte is, $U \in LO(R)$ en U heeft een geadjungeerde U^*, dan noemt men de operator U <u>unitair</u> indien $UU^* = U^*U = I$.

i: Bewijs dat voor iedere unitaire operator U geldt

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} \; (Uf,Ug) = (f,g) \; .$$

ii: Specialiseer dit resultaat voor R_r^n.

4.2.11. Bewijs dat voor een unitaire operator $U \in LO(R)$

i: $U(R) = R$;

ii: U heeft een inverse, en $U^{\leftarrow} = U^*$;

iii: $U \in BLO(R)$ en $\|U\| = 1$;

iv: $0 \notin \sigma(U)$;

v: $\lambda \in \sigma(U) \Rightarrow |\lambda| = 1$ (stelling van Frobenius, 1883);

vi: $\lambda \in \sigma(U) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(U^*)$, en de eigenruimte van U^* bij de eigenwaarde $\overline{\lambda}$ is dezelfde als de eigenruimte van U bij λ.

4.2.12. Bewijs dat de operatoren $U,V \in LO(R^2)$ die worden gegeven door de matrices

$$U \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(-1+i) \\ \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix} \qquad V \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}(1+i)\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}(1-i)\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

unitair zijn.

Bepaal U^*, V^*, $\sigma(U)$, $\sigma(V)$, $\sigma(U^*)$, $\sigma(V^*)$ en de bijbehorende eigenruimten.

4.2.13. Als $U \in LO(R^n)$ en U is unitair, dan geldt $|\det(U)| = 1$.

4.2.14. Als U en V unitair zijn, dan is ook UV unitair.

4.2.15. Zij R een reële IP-ruimte; bewijs dat de afbeelding $\varphi(f) := \|f\|$ van R in $R\ell$ differentieerbaar is voor alle $f \neq \sigma$, en dat

$$[\varphi'(f)](h) = (h,f)\|f\|^{-1} \; .$$

4.3. 1. Ga na of de operator T van ≠4.1.7 een geadjungeerde heeft, en zo ja, bepaal $|||T|||$.

$$\left((f,g) := \int_0^1 f\bar{g}\,dt \,.\right)$$

4.3. 2. Ga na of de operator T van ≠4.1.8 een geadjungeerde heeft, en zo ja, bepaal $|||T|||$.

4.3. 3. Als $T \in LO(\mathbb{R}^n)$ (met $(f,g) := \sum_{j=1}^{n} f(j)\overline{g(j)}$) dan heeft T eindige dubbelnorm. Bepaal $|||I|||$, $|||P_S|||$ (≠4.2.11) en $|||V_a|||$, waarbij $V_a \in LO(\mathbb{R}^3)$, gedefinieerd met $a \in \mathbb{R}^3$ door

$$V_a(f) := a \times f \,.$$

4.3. 4. Zij $T \in BLO(\ell^2)$. Als $\forall_{i \in \mathbb{N}t} \forall_{j \in \mathbb{N}t}\ \alpha_{ij} := (Tq_j, q_i)$ dan geldt: T heeft dan en slechts dan een eindige dubbelnorm als $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < \infty$; in dat geval is $|||T|||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2$.

4.3. 5. Beschouw $R := C([0,1])$ met $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$. Zij $K(x,y)$ continu op $[0,1] \times [0,1]$ en de afbeelding T gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x,t)f(t)dt \qquad (f \in R,\ x \in [0,1]) \,.$$

Bewijs dat $T \in BLO(R)$, dat T een eindige dubbelnorm heeft, en dat

$$|||T|||^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dx\,dy \,.$$

4.4. 1. Als $T \in LO(R^n)$ is T compact.

4.4. 2. Zij R een B-ruimte; als T en U compacte lineaire operatoren zijn, is ook $T+U$ compact.

4.4. 3. Zij R een B-ruimte; als T een compacte en U een begrensde lineaire operator is, dan zijn UT en TU compact.

4.4. 4. Geef een voorbeeld van een lineaire operator die van eindige rang is maar niet compact.

4.4. 5. Zij T in $R := C([0,1])$ (met $\| \ \|_\infty$) gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := \int_0^1 (x+t)^2 f(t)dt \ , \qquad (f \in R,\ x \in [0,1]) .$$

Bewijs dat $T \in BLO(R)$ en dat T compact is.
Bepaal $\|T\|_\infty$.
Bewijs dat hetzelfde geldt als men R als IP-ruimte beschouwt
$((f,g) := \int f\bar{g}\,dt)$; bepaal $\|T\|_2$.

4.4. 6. Zij $R := \ell^2$ en $\alpha_{kj} \in Cm$ $(k \in Nt,\ j \in Nt)$ zó dat $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{kj}|^2 < \infty$.

T wordt gedefinieerd door $(Tf)(k) := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj} f(j)$, $(k \in Nt)$.

Bewijs dat $T \in BLO(\ell^2)$, $\|T\|^2 \leq \Sigma_{kj} |\alpha_{kj}|^2$ en dat T compact is.

4.4. 7. Zij $R := \ell^1$; T wordt gedefinieerd door

$$(Tf)(j) := \frac{f(j)}{j} \ , \qquad (j \in Nt) .$$

Bewijs dat $T \in BLO(\ell^1)$, T is compact; bepaal $\|T\|$ en de eigenwaarden van T met de bijbehorende eigenruimten.

4.4. 8. Zij $R := \ell^1$; T wordt gedefinieerd door $(Tf)(k) := \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{kj} f(j)$ waarin

$$\tau_{k1} := 2^{1-k} \quad (k \geq 2)$$
$$\tau_{kk} := 2^{1-k} \quad (k \geq 2)$$
$$\tau_{kj} := 0 \text{ in alle andere gevallen } (k \in Nt,\ j \in Nt).$$

Bewijs dat $T \in BLO(\ell^1)$, T is compact; bepaal $\|T\|$ en de eigenwaarden van T met de bijbehorende eigenruimten.

5.1. 0. Notatie: $\mathrm{CHO}(R) := \{T \in \mathrm{BLO}(R) \mid T \text{ is compact en hermitisch}\}$.

5.1. 1. Zij R een IP-ruimte en $T \in \mathrm{LO}(R)$, dan geldt:
Als $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ en T is regulier, dan geldt $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{\leftarrow})$.

5.1. 2. Bewijs dat in § 5.1.4 geldt: $m_T = 0$, $M_T = 1$ en $\{0,1\} \cap \sigma(T) = \emptyset$.

5.1. 3. Zij $T \in \mathrm{LO}(R^n)$; bewijs dat

i: $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda^2 \in \sigma(T^2)$.

ii: Als μ een m-voudige wortel is van de karakteristieke vergelijking $\det(T - \lambda I) = 0$, dan is $\dim(E_\mu) \leqslant m$.
Geef, bijvoorbeeld in R^2 of R^3, een voorbeeld waarin $\dim(E_\mu) < m$.

5.1. 4. Zij $T \in \mathrm{LO}(R^n)$; de matrix van T zij (τ_{ij})

$$\forall_{i=1,\dots,n}\ \Gamma_i := \{\gamma \in \mathrm{Cm} \mid |\gamma - \tau_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\tau_{ij}|\} .$$

Bewijs dat $\sigma(T) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ (stelling van Gershgorin).

5.1. 5. Geef een voorbeeld van een SH-ruimte R en een $T \in \mathrm{CHO}(R)$ waarvoor $T(R)$ niet gesloten is.

5.1. 6. Specialiseer de stellingen § 5.1.13 en § 5.1.14 voor een $T \in \mathrm{CHO}(R^n)$.
Onderzoek of de bij de volgende matrices behorende operatoren van R^3 positief (respectievelijk niet-negatief) definiet zijn:

i: $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ii: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iv: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ v: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vi: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

5.2. 0. Een Fredholmvergelijking van de tweede soort

$$f - \mu Tf = g$$

heet <u>homogeen</u> indien $g = \sigma$, en <u>niet-homogeen</u> indien $g \neq \sigma$.

5.2. 1. Bewijs dat een homogene Fredholmvergelijking

$$f - \mu Tf = \sigma$$

voor $\mu^{-1} \notin \sigma(T)$ geen andere oplossing heeft dan de nuloplossing, en dat, als $\mu^{-1} \in \sigma(T)$, de oplossingsruimte is $E_{\mu^{-1}}$.

5.2. 2. Los de integraalvergelijking

$$f(x) = \frac{5x}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \int_0^1 (x+t)f(t)dt$$

op

i: met behulp van § 5.2 (vergelijk # 4.1.7);

ii: door de integraalvergelijking te herleiden tot een differentiaalvergelijking.

5.2. 3. Los op de integraalvergelijking

$$f(x) = \frac{5x}{6} + \frac{1}{2} \int_0^1 xtf(t)dt \ .$$

5.2. 4. Bepaal de functies $g \in C([0,1])$ zodanig dat

$$f(x) = g(x) + 3 \int_0^1 xtf(t)dt$$

oplosbaar is; bepaal de oplossingen.

5.2. 5. $$f(x) = \int_0^1 f(t)dt \ .$$

5.2. 6. $$f(x) = - \int_0^1 f(t)dt \ .$$

5.2. 7. $$f(x) = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \sin x\, f(t)dt\ .$$

5.2. 8. $$f(x) = \frac{1}{50} \int_0^{10} tf(t)dt\ .$$

5.2. 9. $$f(x) = x^2 + \mu \int_0^1 (1+xt)f(t)dt\ .$$

5.2.10. $$f(x) = 3x + 2 - \sqrt{13} + \mu \int_0^1 (1+xt)f(t)dt\ .$$

5.2.11. $$f(x) = x + \mu \int_0^1 (x-t)^2 f(t)dt\ .$$

5.2.12. $$f(x) = x^2 - x + 1 + \mu \int_0^1 (x-t)^2 f(t)dt\ .$$

5.2.13. Specialiseer de resultaten van § 5.2.1 en § 5.2.2 als $T \in LO(R^n)$.

5.3. 1. Bewijs dat de convolutie (zie § 5.3.7) associatief is.

5.3. 2. Bewijs dat de convolutie niet commutatief is.

5.3. 3. Bewijs dat er niet een element $E \in R'$ (zie § 5.3) bestaat waarvoor geldt

$$\forall_{K \in R'} \; K * E = E * K = K \, .$$

5.3. 4. Bewijs dat de convolutie distributief is met de optelling.

5.3. 5. Bewijs dat $\forall_{K \in R'} \; [\forall_x \, \forall_y \; K(x,y) > 0 \Rightarrow T_k$ positief definiet$]$ niet geldt.

6.1. 1. Zij $f(x) = \sqrt{x}$, $(x \geq 0)$. Bewijs dat f geen contractie is van $[0,\infty)$, en dat voor iedere $\delta > 0$ $f \mid [\delta,\infty)$ een contractie is van $[\delta,\infty)$; bepaal in dit geval de contractieconstante van $f \mid [\delta,\infty)$.
Bepaal voor iedere $\delta \geq 0$ de vaste punten van $f \mid [\delta,\infty)$.

6.1. 2. Zij $K(x,y,z)$ een continue functie van $[0,1] \times [0,1] \times R\ell$ in $R\ell$, die voldoet aan de Lipschitzconditie

$$\exists_{\alpha>0}\ \forall_{x\in[0,1]}\ \forall_{y\in[0,1]}\ \forall_{z\in R\ell}\ \forall_{w\in R\ell}\ [|K(x,y,z) - K(x,y,w)| < \alpha|z-w|] .$$

Bewijs dat er een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $\lambda \in R\ell$ met $|\lambda| \leq \delta$ de integraalvergelijking

$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y,f(y))dy$$

een continue oplossing heeft.

6.1. 3. Beschouw $R := C_r([-1,1])$ met $\| \ \|_\infty$. Zij $\alpha > 0$, $g \in R$ en $T : R \to R$ gegeven door

$$(Tf)(x) := \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + \alpha^2}\, dt + g(x) .$$

Bewijs dat T een contractie is en bepaal de contractieconstante.

6.1. 4. Zij $T : R_r^2 \to R_r^2$ gedefinieerd door

$$T(x,y) = (\sqrt{|x|+1} - 1,\ \sqrt{|y|+1} - 1) .$$

In R_r^2 geldt de gewone euclidische metriek.

i: Bewijs dat T een contractie is, bepaal de contractieconstante en het vaste punt van T.

ii: Bepaal de inverse S van $I - T$.

iii: Bepaal de waarden van λ waarvoor λS een contractie van R_r^2 is.

6.2. 1. Bewijs dat de in de inleiding van § 6.2 gedefinieerde operator V een afbeelding van C([0,1]) in C([0,1]) is.

6.2. 2. Bewijs stelling § 6.2.2.

6.2. 3. Bewijs stelling § 6.2.3.

6.2. 4. Zij R := C([0,1]), en zij V als afbeelding van R in R gedefinieerd door

$$(Vf)(x) := \int_0^x (x-t)f(t)dt \, .$$

Bepaal voor de functies $e(x) := 1$, $j(x) := x$, $j^k(x) := x^k$ en voor $n \in$ Nt:

i: $V^n e$;

ii: $V^n j$;

iii: $V^n(j^k)$,

en los op de integraalvergelijking

$$f(x) = \mu \int_0^x (x-t)f(t)dt + (x+1)^2 \, .$$

6.2. 5. $$f(x) = \mu \int_0^x (x-t)f(t)dt + \cos x \, .$$

6.2. 6. $$f(x) = \mu \int_0^x (x-t)f(t)dt + x^4 - 3 \cos x \, .$$

6.3. 1. Generaliseer de stelling in § 6.3.1 voor een stelsel van differentiaalvergelijkingen

$$y_k' = F_k(x, y_1, \dots, y_n) \;, \quad k = 1, \dots, n \;.$$

6.4. 1. Bewijs dat de functie ψ van § 6.4.2 differentieerbaar is en dat

$$\psi'(y) = -\frac{F_2(\psi(y),y)}{F_1(\psi(y),y)} \quad .$$

6.4. 2. Bewijs de in § 6.4.3.ii genoemde generalisatie van de stelling in § 6.4.2.