TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Opgaven en Tentamenvraagstukken

bij

LINEAIRE ANALYSE I

samengesteld door Dr. Ir. P. van der Steen

Najaarssemester 1979

Technische Hogeschool
Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Dictaatnummer 2.205
Prijs f. 3,50

Jd8

Opgaven en tentamenvraagstukken bij

Lineaire Analyse 1

Samengesteld door dr.ir. P. van Steen

Inhoudsbeschrijving

Opgaven en tentamenvragstukken bij

Lineaire Analyse I

Najaarssemester 1979

VERVOLG →

JdG, 20 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der wiskunde

Opgaven en tentamenvraagstukken bij Lineaire Analyse I

samengesteld door dr. ir. P. van der Steen

Najaarssemester 1979

Verwijzingen naar de syllabus worden voorafgegaan door een S.
Vraagstukken waarvan het nummer van een ster is voorzien, liggen boven het tentamenniveau.

1.2. Vectorruimte of lineaire ruimte

1.2.1. Bewijs S 1.2.4.

1.2.2. Bewijs S 1.2.10.

1.2.3. Bewijs dat LO($R \to S$) een vectorruimte is, en LO(R) een algebra (zie S 1.2.12).

1.2.4. Laat

$$\ell_1 := \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty\} .$$

Bewijs dat ℓ_1 een lineaire deelruimte van de functieruimte $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ is, en dat $\dim(\ell_1) = \infty$.

1.2.5. Met $C^\infty(\mathbb{R})$ geven we de verzameling aan gevormd door de oneindig vaak differentieerbare complexe functies gedefinieerd op $\mathbb{R}$ met de structuur van een functiealgebra. Laat

$$E := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists_{\rho>0} \forall_{p\geq 1} [|f^{(p)}(0)| \leq \rho^p]\} .$$

Ga na of E een functiealgebra is. Laat

$$F := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists_{k\geq 0} \forall_{n\geq k} [f^{(n)}(0) = 0]\} .$$

Is F een vectordeelruimte van $C^\infty(\mathbb{R})$? Een functiealgebra? Wat is dim(F)?

1.2.6. De complexe numerieke n-dimensionale ruimte R^n is natuurlijk ook een vectorruimte als alleen scalaire vermenigvuldiging met reële getallen wordt toegestaan. Wat is de dimensie van R^n in dat geval?

1.2.7. Bewijs dat in de functieruimte $C([0,1])$ het stelsel $\{\Psi_{t\in[0,1]}\, t^k\}_{k=0,1,\ldots}$ lineair onafhankelijk is. Zelfde vraag voor het stelsel $\{\Psi_{t\in[0,1]}\, e^{ikt}\}_{k=0,1,\ldots}$.

1.2.8. Laat R een vectorruimte zijn, M en N twee niet lege deelverzamelingen van R. Bewijs dat het lineaire opspansel van $M \cup N$ gelijk is aan

$$\{f + g \mid f \in L(M),\ g \in L(N)\}.$$

(L(M) is het lineaire opspansel van M.)

1.2.9. Laat X een niet lege verzameling zijn. Voor een $f \in \mathbb{C}^X$ definiëren we $N_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Laat $\mathbb{C}_e^X := \{f \in \mathbb{C}^X \mid N_f$ is een eindige verzameling$\}$. Bewijs dat $\mathbb{C}_e^X$ een lineaire deelruimte is van $\mathbb{C}^X$. Bepaal een deelverzameling S in $\mathbb{C}_e^X$ zó dat ieder element van $\mathbb{C}_e^X$ op precies één manier als lineaire combinatie van eindig veel elementen van S kan worden uitgedrukt. Wat is $\dim(\mathbb{C}_e^X)$?

1.2.10. Laat R een vectorruimte zijn en $F: R \to \mathbb{C}$ een <u>lineaire</u> functionaal op R. Laat $N(F) := \{f \in R \mid F(f) = 0\}$. Bewijs dat er een $f_0 \in R$ is zó dat R de directe som is van $L(\{f_0\})$ en $N(F)$. In hoeverre is f_0 eenduidig bepaald? (Als $F \neq 0$, dan heet $N(F)$ een hypervlak.)

1.2.11. Laat $R := C^\infty(\mathbb{R})$ en definieer de operatoren D en S door

$$D := \Psi_{f\in R}\, \Psi_{t\in\mathbb{R}}\, [f'(t)]\ ,$$

$$S := \Psi_{f\in R}\, \Psi_{t\in\mathbb{R}}\, [\int_0^t f(s)ds]\ .$$

Bewijs dat D en S tot $LO(R)$ behoren. Ga na of ze surjectief, injectief of zelfs bijectief zijn. Hebben D en S (eventueel eenzijdige) inversen? (Vgl. S 1.2.16.) Wat zijn de eigenwaarden van D en S met de bijbehorende eigenruimten?

1.2.12. Laat $F_e := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f$ even$\}$, $F_o := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f$ oneven$\}$. Bewijs dat $C(\mathbb{R})$ de directe som is van F_e en F_o. Wat zijn de bijbehorende projectieoperatoren?

1.2.13. Bewijs S 1.2.21.

1.2.14. Laat de vectorruimte R de directe som zijn van de lineaire deelruimten M en N. Bewijs dat R/M algebraïsch isomorf is met N, d.w.z. dat er een lineaire bijectie van R/M op N is.

1.3. Topologische ruimte

1.3.1. Bewijs S 1.3.10.

1.3.2. Bewijs dat $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}^n$ separabel zijn.

1.3.3. Laat (R,d) een separabele metrische ruimte zijn en $\emptyset \neq S \subset R$, dan is (S,d) ook separabel.

1.3.4. Geef $C(\mathbb{R})$ de metriek

$$d(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \quad (f,g \in C(\mathbb{R})) .$$

Bewijs dat $C(\mathbb{R})$ met deze metriek niet separabel is. Is de deelruimte

$$V := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \exists_{A>0} \forall_{x\in\mathbb{R}} [|x| > A \Rightarrow f(x) = 0]\}$$

separabel?

1.5. Metrische ruimte en semimetrische ruimte

1.5.1. Laat (R,d) een metrische ruimte zijn. Bewijs dat als x, y, z en w punten van R zijn

$$|d(x,z) - d(y,w)| \le d(x,y) + d(w,z) .$$

1.5.2. Laat (R,d) een metrische ruimte zijn, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente rijen daarin. Bewijs dat

$$d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) .$$

1.5.3. Laat (R,d) een metrische ruimte zijn, A een niet lege deelverzameling van R. Laat

$$d(x,A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\} \quad (x \in R) .$$

Bewijs dat $\Psi_{x\in R}\, d(x,A)$ continu is.

1.5.4. Bewijs dat een compacte metrische ruimte separabel is.

1.5.5. Bewijs S 1.5.6.

1.5.6. Op $C^\infty(\mathbb{R})$ definiëren we

$$d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \min\{1,\sup\{|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \mid x \in [-n,n]\}\} .$$

Bewijs dat $(C^\infty(\mathbb{R}),d)$ een metrische ruimte is.

1.6. Volledige (semi)metrische ruimte

1.6.1. Bewijs S 1.6.2.

1.6.2. Als R een metrische ruimte is, en S is een volledige deelruimte van R, dan is S gesloten.

1.6.3. Beschouw $R := [1,\infty)$ met $d_1(x,y) := |x - y|$ en $d_2(x,y) := |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ voor $x \in R$, $y \in R$. Bewijs dat (R,d_1) en (R,d_2) metrische ruimten zijn waarvan de topologiën gelijk zijn. Bewijs dat (R,d_1) wèl en (R,d_2) niet volledig is. Geef een completering aan van (R,d_2).

1.6.4. Laat V de klasse van begrensde niet-lege deelverzamelingen in $\mathbb{R}^2$ zijn, en W die van compacte niet-lege deelverzamelingen in $\mathbb{R}^2$.
Voor $A \in V$, $B \in V$ definiëren we

$$d(A,B) := \sup\{d(x,A) + d(y,B) \mid x \in B,\ y \in A\} .$$

Bewijs dat (V,d) een semimetrische ruimte en (W,d) een metrische ruimte is. Toon aan dat het proces van S 1.6.3 toegepast op (V,d) tot (W,d) leidt.

1.6.5.* (Vervolg) Bewijs dat (W,d) volledig is.

1.6.6. Laat (R,d) een metrische ruimte zijn en S een dichte deelverzameling van R. Laat $f \in \mathbb{R}^S$ uniform continu zijn. Bewijs dat er precies één $g \in \mathbb{R}^R$ bestaat die continu is en waarvoor $f(x) = g(x)$ als $x \in S$, en dat deze g ook uniform continu is. (R kan bijvoorbeeld een completering van S zijn.)

1.6.7. Bewijs dat de ruimte van vraagstuk 1.5.6 volledig is.

2.1. Genormeerde vectorruimte

2.1.1. In een genormeerde vectorruimte R is de eenheidsbol $\{f \in R \mid \|f\| \leq 1\}$ convex.

2.1.2. Laat R een genormeerde vectorruimte zijn, $M \subset R$, M compact. Bewijs dat $\overline{L(M)}$, de kleinste gesloten lineaire deelruimte van R die M bevat, separabel is.

2.1.3. Laat $1 \leq p < \infty$ en

$$\ell_p := \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} .$$

Dan is ℓ_p een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ en met de definitie

$$\|x\|_p := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p)$$

wordt ℓ_p een genormeerde vectorruimte.

2.1.4. Laat $1 \leq p < \infty$. Bewijs dat met

$$\|f\|_p := (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \quad (f \in C([0,1])) ,$$

C([0,1]) tot een genormeerde vectorruimte wordt.

2.1.5. Laat $f \in C([0,1])$ en laat $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij polynomen zijn die puntsgewijs op [0,1] naar f convergeert en waarvoor $\sup_{n\geq 1}(\text{graad } p_n) < \infty$. Bewijs dat f zèlf een polynoom is, en dat de convergentie uniform is. (Vgl. S 2.1.7.)

2.1.6. Laat K een gesloten lineaire deelruimte zijn van de genormeerde vectorruimte R, en L een eindig dimensionale lineaire deelruimte van R. Bewijs dat

$$K + L := \{k + \ell \mid k \in K, \ell \in L\}$$

gesloten is. (Aanwijzing: neem eerst aan dim L = 1.)

2.2. Lineaire afbeeldingen van een genormeerde vectorruimte

2.2.1. Laten R en S genormeerde vectorruimten zijn, en laat $T \in BLO(R \to S)$. Bewijs dat

$$\|T\| = \sup\{\|Tf\| \mid f \in R, \|f\| = 1\} ,$$

$$\|T\| = \min\{M \mid \forall_{f\in R} [\|Tf\| \le M\|f\|]\} .$$

2.2.2. Bewijs S 2.2.5: Als $T \in LO(R \to S)$, dan geldt

$$T \text{ begrensd} \Leftrightarrow T \text{ continu} .$$

2.2.3. Laten R en S genormeerde vectorruimten zijn, $T \in LO(R \to S)$. Bewijs dat T begrensd is dan en slechts dan als de volgende voorwaarde C is vervuld:
C: voor elke rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in R die naar 0 convergeert, is de rij $(\|Tf_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd.

2.2.4. Laten R en S genormeerde vectorruimten zijn, R eindig dimensionaal, $T \in LO(R \to S)$. Bewijs dat

$$\|f\|_1 := \inf\{\|g\| \mid g \in R, Tg = f\} \quad (f \in T(R))$$

een norm definieert op T(R).

2.2.5. Laat R een eindig dimensionale genormeerde vectorruimte zijn, en F een lineaire functionaal op R. Bewijs dat $F \in R^*$.

2.2.6. Laat R een eindig dimensionale genormeerde vectorruimte zijn, en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een zwak convergente rij in R. Bewijs dat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert.

2.2.7. Laat R een genormeerde vectorruimte zijn, F een lineaire functionaal op R. Bewijs dat F begrensd $\Leftrightarrow$ N(F) gesloten (notatie van vraagstuk 1.2.10).

2.2.8. Laat P de deelruimte van $C^\infty(\mathbb{R})$ zijn die gevormd wordt door de polynomen. Met

$$\|p\| := \max\{|p(x)| \mid x \in [0,1]\} \quad (p \in P)$$

wordt dit een genormeerde vectorruimte. Voor $a \in \mathbb{R}$ definiëren we

$$F_a(p) := p(a) \quad (p \in P) .$$

Bewijs dat F_a een lineaire functionaal is op P die begrensd is als $a \in [0,1]$ en niet begrensd als $a \notin [0,1]$.

2.2.9. We beschouwen $C([0,1])$ met de supremumnorm. Laat $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq 1$ en $\alpha_k \in \mathbb{C}$ $(1 \leq k \leq n)$. Voor $f \in C([0,1])$ definiëren we

$$F(f) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(t_k) .$$

Bewijs dat F een begrensde lineaire functionaal op $C([0,1])$ is en dat

$$\| F \| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| .$$

Bewijs dat F niet begrensd is als de ruimte de norm $\| \ \|_2$ heeft (vgl. vraagstuk 2.1.4), tenzij $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

2.2.10. Laat $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{C}$ zijn. Bewijs dat

$$F := \Psi_{x \in \ell_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right)$$

een begrensde lineaire functionaal op ℓ_1 is als de ruimte genormeerd is met $\| \ \|_1$ (zie vraagstuk 2.1.3). Wat is $\| F \|$?

2.2.11. (Vervolg) Beschouw ℓ_1 met de norm $\| \ \|_1$, en een begrensde lineaire functionaal F op deze ruimte. Bewijs dat er een begrensde rij $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ is zó dat

$$F = \Psi_{x \in \ell_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right) .$$

2.2.12.* Concludeer uit de vorige twee vraagstukken dat er een lineaire bijectie I van ℓ_1^* op $C(\mathbb{N})$ bestaat zó dat $\| I(F) \|_\infty = \| F \|$ voor alle $F \in \ell_1^*$.

2.2.13. Laat R een eindig dimensionale genormeerde vectorruimte zijn, en $T \in BLO(R)$. Bewijs dat er een $f \in R$, $f \neq 0$ is waarvoor $\| Tf \| = \| T \| . \| f \|$. Kan de voorwaarde dat R eindig dimensionaal is worden weggelaten?

2.2.14. Laat $R := C(\mathbb{R})$ met de supremumnorm, en definieer T door

$$(Tf)(x) := f(x+1) \qquad (f \in R,\ x \in \mathbb{R}) .$$

Bewijs dat $T \in BLO(R)$. Bepaal $\| T \|$, de eigenwaarden en de eigenruimten van T.

2.3. Compacte operatoren

2.3.1. Geef een voorbeeld van een genormeerde vectorruimte R met een $T \in LO(R)$ die van eindige rang is maar niet compact, en zelfs niet begrensd.

2.3.2. Als R en S genormeerde vectorruimten zijn, R eindig dimensionaal, $T \in LO(R \to S)$, dan is T compact.

2.3.3. Laat R en S genormeerde vectorruimten zijn,

$$K := \{T \in LO(R \to S) \mid T \text{ is compact}\} .$$

(i) Bewijs dat K een lineaire deelruimte is van $BLO(R \to S)$.

(ii) Neem nu aan $R = S$. Bewijs dat als $U \in BLO(R)$, $T \in K$ ook $UT \in K$ en $TU \in K$.

3. Banachruimte

3.1.1. Bewijs dat de ruimten ℓ_1 en ℓ_2 (zie vraagstuk 2.1.3) volledig zijn. Zijn ze separabel? Zelfde vragen voor ℓ_∞.

3.1.2. Laat $P := \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ is een polynoom}\}$ met de supremumnorm. Bewijs dat P een genormeerde ruimte is, maar geen Banachruimte. Geef een completering aan van P.

3.1.3. Laat $C^n([0,1]) := \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ tenminste } n \text{ maal continu differentieerbaar}\}$, en

$$\|f\| := \max\{\|f^{(k)}\|_\infty \mid 0 \le k \le n\} \qquad (f \in C^n([0,1])) .$$

Bewijs dat $C^n([0,1])$ hiermee een Banachruimte wordt.

3.1.4. Laat

$$R := \{f \in C([0,\infty)) \mid \int_0^\infty |f(t)|dt < \infty\}$$

en

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \int_0^\infty |f(t)|dt \qquad (f \in R) .$$

Bewijs dat $(R,\|\ \|)$ een Banachruimte is.

3.1.5. Laat R een genormeerde vectorruimte zijn, en veronderstel dat $\{f \in R \mid \|f\| = 1\}$ volledig is. Bewijs dat R een Banachruimte is.

3.2. Lineaire afbeeldingen van een genormeerde ruimte in een Banachruimte

3.2.1. Laat $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een complexe rij zijn waarvoor geldt: Als $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een complexe rij is met $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \le 1$, dan is $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ convergent en $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k| \le 1$. Bewijs dat $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \le 1$.

3.2.2. Beschouw $R := C([0,1])$ met de gewone supremumnorm. Voor iedere $x \in [0,1]$, $N \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$S_{N,x}(f) := \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{2\pi i k x} \qquad (f \in R)$$

waarbij

$$c_k(f) := \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \qquad (k \in \mathbb{Z},\ f \in R)\ .$$

(i) Toon aan dat elke $S_{N,x}$ een begrensde lineaire functionaal op R is met

$$\| S_{N,x} \| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\, t}{\sin \frac{1}{2} t} \right| dt \ge \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k}\ .$$

(Gebruik het resultaat van GO 6.)

(ii) Toon aan dat er voor iedere $x \in [0,1]$ een $f \in R$ is waarvan de fourierreeks in x divergeert.

4. Inwendig productruimte

4.1.1. Bewijs dat

$$\| f \| := \{ \int_0^1 (|f(t)|^2 + |f'(t)|^2) dt \}^{\frac{1}{2}} \qquad (f \in C^1([0,1]))$$

een norm is op $C^1([0,1])$. Hoort er een IP bij?

4.1.2. Laat R een IP-ruimte zijn. Bewijs dat

$$\| f + g \|^2 + \| f - g \|^2 = 2\| f \|^2 + 2\| g \|^2$$

voor $f \in R$, $g \in R$ (parallellogramwet of zwaartelijnformule).
Wat is de interpretatie in het platte vlak?

4.1.3. Laat R een IP-ruimte zijn. Bewijs dat

$$(f,g) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} i^k \| f + i^k g \|^2 \qquad (f \in R,\ g \in R)\ .$$

4.1.4. Bewijs dat in een genormeerde ruimte waarin de parallellogramwet geldt een inproduct bestaat zó dat $(f,f) = \| f \|^2$ $(f \in R)$.

4.1.5. Bewijs dat de supremumnorm in $C([0,1])$ niet afkomstig is van een inproduct.

4.1.6. Laat R een IP-ruimte zijn. Als f, g en h elementen van R zijn waarvoor geldt $\| f - h \| = \| f - g \| + \| g - h \|$, dan is g een convexe combinatie van f en h, d.w.z er is een $\alpha \in [0,1]$ zó dat $g = \alpha f + (1 - \alpha) h$.

4.1.7. Laat R het lineaire opspansel in $C^\infty(\mathbb{R})$ zijn van de verzameling $\{ \Psi_{t \in \mathbb{R}}\ e^{i\lambda t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ en definieer

$$(f,g) := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)} dt \qquad (f \in R,\ g \in R)\ .$$

Bewijs dat R hiermee een IP-ruimte wordt.

4.2. Orthonormaalsystemen in een IP-ruimte

4.2.1. Beschouw $C([0,1])$ met het gewone inproduct. Bewijs dat de verzameling van polynomen totaal is in deze ruimte. (Een verzameling V in een genormeerde ruimte R heet totaal als het lineaire opspansel van V dicht is in R.)

4.2.2. Laat R een IP-ruimte zijn waarin een eindig orthogonaal stelsel $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bestaat zó dat uit $f \perp f_k$ $(1 \leq k \leq n)$ volgt $f = 0$. Bewijs dat R eindig dimensionaal is.

4.2.3. Vind een totaal orthonormaalsysteem in de ruimte van vraagstuk 4.1.7.

4.2.4. Beschouw $R := C([0,1] \times [0,1])$ met als inproduct

$$(f,g) := \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\overline{g(x,y)}\,dxdy \qquad (f,g \in R)\ .$$

Bewijs dat het systeem $(p_{nm})_{n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}}$ met

$$p_{nm} := \Psi_{x\in[0,1]}\ \Psi_{y\in[0,1]}\ [q_n(x)q_m(y)] \qquad (n,m \in \mathbb{Z})$$

totaal is in deze ruimte. ($q_n := \Psi_{x\in[0,1]}\ e^{2\pi inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$.)
(Aanwijzing: laat zien dat het lineaire opspansel van de functies $\Psi_{x\in[0,1]}\ \Psi_{y\in[0,1]}\ f(x)g(y)$ met $f,g \in C([0,1])$ dicht is in R en gebruik dan S 4.2.8.)

4.3. Orthonormalisering in een IP-ruimte

4.3.1. In de IP-ruimte $C([-1,1])$ met

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$$

is iedere even functie orthogonaal met iedere oneven functie.

4.3.2. Beschouw de ruimte van het vorige vraagstuk. Door het orthonormaliseringsprocédé van Gram-Schmidt toe te passen op het stelsel $\Psi_{x\in[-1,1]}\, x^n$ $(n = 0,1,\ldots)$ ontstaat het stelsel p_n $(n = 0,1,\ldots)$ met

$$p_n(x) = \lambda_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

met $\lambda_n \in \mathbb{C}$ zo dat $\|p_n\| = 1$.

4.3.3. Laat R een IP-ruimte zijn. Als $f_1,\ldots,f_n$ elementen van R zijn, dan is de Gramdeterminant $\det((f_i,f_j))$ (zie S 4.3.6) altijd ≥ 0.

4.3.4. Laat $R := \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = f(1)\}$ met het gewone inproduct. Voor een $f \in R$ definiëren we de rij Φf door

$$\Phi f(2n-1) := \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt \quad (n = 1,2,\ldots),$$

$$\Phi f(2n) := \int_0^1 f(t)e^{+2\pi int}dt \quad (n = 0,1,\ldots).$$

Bewijs dat Φ de ruimte R in ℓ^2 afbeeldt en dat $\|\Phi f - \Phi g\| = \|f - g\|$ voor alle $f,g \in R$. Is $\Phi(R) = \ell^2$?

4.3.5.* Laat R en S IP-ruimten zijn over de reële getallen en $T: R \to S$ een afbeelding waarvoor $T(0) = 0$ en $\|Tf - Tg\| = \|f - g\|$ voor alle $f,g \in R$.

(i) Als $f,g \in R$ dan is er precies één punt $h \in R$ zó dat

$$\|f - h\| = \|g - h\| = \tfrac{1}{2}\|f - g\|.$$

(ii) Bewijs dat T lineair is. (Aanwijzing: leid met (i) af dat T additief is.)

4.3.6. Laat R een IP-ruimte zijn waarin $\{f \in R \mid \|f\| \leq 1\}$ compact is. Bewijs dat R eindig dimensionaal is.

4.3.7. Bewijs het resultaat van 4.2.4 door te laten zien dat voor iedere $f \in R$ de Parsevalrelatie

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |(f,p_{nm})|^2$$

geldt. (Aanwijzing: gebruik weer dat de q_n's een totaal orthonormaal stelsel in $C([0,1])$ vormen; gebruik Dini om een verwisseling van sommatie en integratie te rechtvaardigen.)

4.4. Lineaire deelruimten in een IP-ruimte

4.4.1. Als R een IP-ruimte is, $S \subset R$ en $Q \subset R$, dan geldt

(i) $S \subset Q \Rightarrow R \ominus Q \subset R \ominus S$,

(ii) $R \ominus S = R \ominus \bar{S} = R \ominus L(S) = R \ominus \overline{L(S)}$.

($L(S)$ is het lineaire opspansel van S.)

4.4.2. Beschouw ℓ_e^2 met het gewone inproduct. Definieer

$$F(f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n} \qquad (f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_e^2) .$$

(i) Bewijs dat $\overleftarrow{F}(0)$ een niet volledige, gesloten lineaire deelruimte van ℓ_e^2 is. Bewijs ook dat $\overleftarrow{F}(0) \neq \ell_e^2$.

(ii) Het orthogonale complement van $\overleftarrow{F}(0)$ is $\{0\}$.

4.4.3. Laat R een IP-ruimte zijn, L en M deelverzamelingen van R. Ga na onder welke voorwaarden $(R \ominus L) \cap (R \ominus M)$ gelijk is aan $R \ominus (L \cap M)$.

4.4.4. Laat R een IP-ruimte zijn, $F \in R^*$, $F \neq 0$, $f \in R$. Bewijs dat de afstand van f tot het hypervlak $H := \{g \in R \mid F(g) = 0\}$ gelijk is aan $\frac{|F(f)|}{\|F\|}$.

4.4.5. Laat R een IP-ruimte zijn, K een lineaire deelruimte van R en $f \in R\backslash K$. Bewijs dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $h \in R$ bestaat waarvoor geldt

(i) $f - h \in K$,

(ii) $\forall_{k\in K} \, [|(h,k)| \leq \varepsilon \|k\|]$.

4.4.6. Laat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij zijn in de Hilbertruimte R, zó dat

$$\forall_{m\in\mathbb{N}} \, [\lim_{n\to\infty} (f_n, f_m) = 0] .$$

Bewijs dat

$$\forall_{g\in R} \, [\lim_{n\to\infty} (f_n, g) = 0] .$$

(Aanwijzing: bekijk eerst de g's in het lineaire opspansel van de f_n's, en dan de g's loodrecht daarop.)

4.4.7. R is een IP-ruimte; $g, f_1, \ldots, f_n$ zijn vectoren uit R. Bewijs de equivalentie van de volgende uitspraken:

(i) $\forall_{f \in R} \, [(f \perp f_1) \wedge \ldots \wedge (f \perp f_n) \Rightarrow f \perp g]$,

(ii) g is een lineaire combinatie van $f_1, \ldots, f_n$.

4.4.8. Laat R een IP-ruimte zijn, M een n-dimensionale lineaire deelruimte van R, en N een lineaire deelruimte van R van dimensie $n+1$. Bewijs dat er een $f \in N$ is met $d(f,M) = \|f\| \neq 0$.

4.5. De geadjungeerde van een operator

4.5.1. Beschouw R^n met het inproduct

$$(x,y) := \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k \quad (x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n,\ y = (y_1,\ldots,y_n) \in R^n)\ .$$

Laat $T \in LO(R^n)$. Bewijs dat T een geadjungeerde T^* heeft en geef het verband tussen de matrices van T en T^* (t.o.v. de natuurlijke basis). Bewijs ook dat $\|T\|_1 = \|T^*\|_\infty$.

4.5.2. Laat $R := C([0,1])$ met het gewone inproduct. Definieer $T \in LO(R)$ door

$$T := \Psi_{f\in R}\ \Psi_{x\in[0,1]}\ [\int_0^x f(t)dt]\ .$$

Bewijs dat T een geadjungeerde T^* heeft. Wat is T^*?

4.5.3. Hoe kan men aan de matrix van de operator T van opgave 4.5.1 zien of T hermitisch is?

4.5.4. Laat $R := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f \text{ periodiek met periode } 1\}$ met als IP

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \quad (f \in R,\ g \in R)\ .$$

Laat $T := \Psi_{f\in R}\ (if')$. Bewijs dat T een niet begrensde lineaire afbeelding van R in R is. Ga na of T een geadjungeerde heeft.

4.5.5. Als R een IP-ruimte is en $T \in BLO(R)$ is hermitisch, dan is $\|T^2\| = \|T\|^2$, en algemeen $\|T^n\| = \|T\|^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

4.5.6. Laat $(a_{k\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ een oneindige matrix van complexe getallen zijn waarvoor $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^2$ convergeert. Bewijs dat door

$$Tf := \Psi_{k\in\mathbb{N}}\ (\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} f_\ell) \quad (f \in \ell^2)$$

een $T \in BLO(\ell^2)$ wordt gedefinieerd en dat T eindige dubbelnorm heeft. Druk $|||T|||$ uit in de $a_{k\ell}$'s.

4.5.7. Laat R een separabele IP-ruimte zijn, en stel dat $T \in BLO(R)$ eindige dubbelnorm heeft. Bewijs dat er een rij eindig dimensionale operatoren $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $BLO(R)$ is (dus $T_n(R)$ eindig dimensionaal voor iedere n) zó dat $\| T - T_n \| \to 0$ als $n \to \infty$.

4.5.8. Laat R een Hilbertruimte zijn, $T \in BLO(R)$ met geadjungeerde T^*, $f \in R$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Tf = \lambda f$ en $|\lambda| = \| T \|$. Bewijs dat $T^* f = \bar{\lambda} f$.

4.5.9. Laat R een Hilbertruimte zijn, $T \in BLO(R)$ met geadjungeerde T^*. Laat $N(T^*) := \{f \in R \mid T^* f = 0\}$. Bewijs dat R de directe som is van de orthogonale deelruimten $N(T^*)$ en $\overline{T(R)}$.

4.5.10. Bewijs dat de operator van 4.5.2 eindige dubbelnorm heeft. Wat is $|\!|\!| T |\!|\!|$?

4.5.11. Laat R een Hilbertruimte zijn, $T \in BLO(R)$ een compacte operator met geadjungeerde T^*.

(i) Bewijs dat T^*T en TT^* compact zijn.

(ii) Bewijs dat T^* compact is.

4.5.12. (i) Laat R een IP-ruimte zijn, M een volledige lineaire deelruimte van R. Laat P de projectie zijn van R op M. Bewijs dat P hermitisch is.

(ii) Laat R een Hilbertruimte zijn, $P \in BLO(R)$ hermitisch en $P^2 = P$. Bewijs dat P de projectie is op een volledige lineaire deelruimte van R.

4.6. Opmerkingen over zwakke convergentie

4.6.1. Laat R een IP-ruimte zijn en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in R die zwak naar $f \in R$ convergeert, terwijl $\|f_n\| \to \|f\|$. Bewijs dat $f_n \to f$.

4.6.2. Laat R een IP-ruimte zijn, $f \in R$, en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in R waarvoor $\operatorname{Re} F(f_n) \to \operatorname{Re} F(f)$ voor alle $F \in R^*$. Bewijs dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwak naar f convergeert.

4.6.3. Laat R een Hilbertruimte zijn en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in R die zwak naar $f \in R$ convergeert. Bewijs dat er een rij van lineaire combinaties van de f_n's is die sterk naar f convergeert. (Aanwijzing: gebruik S 4.6.4.)

4.6.4. Laat R een separabele IP-ruimte zijn, $F \in R^*$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een orthonormaal systeem in R. Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(q_n)|^2 < \infty .$$

(Aanwijzing: maximaliseer $F(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_n)$ met $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 = 1$.)

4.6.5. Laat R een separabele IP-ruimte zijn, en $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een orthonormale rij in R. Bewijs dat de rij $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwak naar 0 convergeert, maar niet convergent is.

5.1. Hilbertruimte

5.1.1. Geef een voorbeeld van een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in een Hilbertruimte waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2$ convergeert, en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ niet convergeert.

5.1.2. R is een eindig-dimensionale complexe vectorruimte; $e_1,\dots,e_n$ een basis van R, dus iedere $f \in R$ is op precies één manier te schrijven als

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f)e_i, \quad \text{met } \alpha_i(f) \in \mathbb{C} \ (1 \le i \le n) .$$

Dan is

$$(f,g) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f)\overline{\alpha_i(g)} \quad (f,g \in R)$$

een inproduct op R, waarmee R een Hilbertruimte wordt, en $e_1,\dots,e_n$ een orthonormale basis van R.

5.1.3. Laat R een Hilbertruimte zijn, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een orthogonale rij in R waarvoor een $p \in (0,2)$ bestaat zó dat $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^p$ convergeert. Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ convergeert.

5.1.4. Laat R een Hilbertruimte zijn, en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in R, zo dat ieder element van R een lineaire combinatie is van (eindig veel) elementen uit de rij. Bewijs dat R eindig-dimensionaal is.

5.1.5. R is een Hilbertruimte; V is een lineaire deelruimte van R die dicht ligt in R. W is een gesloten hypervlak in R (d.w.z. er is een $F \in R^*$, $F \neq 0$, zo dat $W = \{f \in R \mid F(f) = 0\}$, en W is gesloten). Bewijs dat $\overline{V \cap W} = W$.

5.1.6. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn, M en N gesloten lineaire deelruimten van R zo dat $R = M \oplus N$. Laat $f_0 \in R$. Bewijs dat

$$\min\{\|f - f_0\| \mid f \in M\} = \max\{|(f_0,g)| \mid g \in N, \|g\| = 1\} .$$

5.1.7. Laat R een IP-ruimte zijn, M en N volledige lineaire deelruimten van R en $S = \{f + g \mid f \in M, g \in N\}$. Laat

$$\alpha := \sup\{|(f,g)| \mid f \in M, g \in N, \|f\| = \|g\| = 1\} ,$$

en veronderstel $\alpha < 1$.

(i) Bewijs dat

$$\|f + g\| \geq \sqrt{1 - \alpha^2}\, \|f\| \quad (f \in M, g \in N) .$$

(ii) Bewijs dat S een Hilbertruimte is.

5.1.8. Laat R een IP-ruimte zijn waarvoor geldt:

$$\forall_{L \in R^*} \exists_{g \in R} \forall_{f \in R} [(f,g) = L(f)] .$$

Bewijs dat R volledig is. (Aanwijzing: zoek verband tussen $\|L\|$ en $\|g\|$; R^* is volledig.)

5.1.9. Laat R en S Hilbertruimten zijn, $T \in BLO(R \to S)$, T een-eenduidig, T(R) dicht in S, en

$$\exists_{m>0} \forall_{f \in R} [\|Tf\| \geq m\|f\|] .$$

Bewijs dat $T(R) = S$ en dat $T^{\leftarrow}$ continu is.

5.1.10. Laat R een Hilbertruimte zijn, $f \in R$, $g \in R$, $f \neq 0$. Bewijs dat er een $T \in BLO(R)$ bestaat zó dat $Tf = g$. Wanneer bestaat er een hermitische T met die eigenschap?

5.1.11. Laat R een separabele IP-ruimte zijn. $F \in \mathbb{R}^*$. Bewijs dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $g \in R$ bestaat zó dat

$$\forall_{f \in R} [F(f) - (f,g)| \leq \varepsilon\|f\|] .$$

(Aanwijzing: gebruik 4.6.4.)

5.2. Zwakke convergentie in separabele Hilbertruimten

5.2.1. Laat R een Hilbertruimte zijn, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in R die zwak naar f convergeert. Laat

$$d(g) := \liminf_{n\to\infty} \| f_n - g\| \quad (g \in R) ,$$

$$D(g) := \limsup_{n\to\infty} \| f_n - g\| \quad (g \in R) .$$

Bewijs dat steeds

$$d^2(g) = d^2(f) + \| f - g\|^2$$

$$D^2(g) = D^2(f) + \| f - g\|^2 .$$

Als $0 \le \alpha \le \beta$, geef dan een voorbeeld met $d(f) = \alpha$, $D(f) = \beta$.

5.2.2. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn, en $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een totaal orthonormaal systeem in R. Definieer

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \min\{|(f - g, e_n)|, 2^{-n}\} \quad (f,g \in R) .$$

Laat $S := \{f \in R \mid \|f\| \le 1\}$. Toon aan dat als $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij is in S, en $f \in S$, de uitspraken $f_n \rightharpoonup f$ en $d(f_n,f) \to 0$ equivalent zijn.

5.2.3. Laat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij zijn in de Hilbertruimte R. Bewijs dat er een zwak convergente deelrij is. (Aanwijzing: in S 5.1.13 is de separabiliteit van R niet gebruikt.)

5.3. Geadjungeerde operatoren in een separabele Hilbertruimte

5.3.1. Laat R een Hilbertruimte zijn, $T \in LO(R)$, T een bijectie van R op R en T hermitisch. Bewijs dat T^{-1} hermitisch is.

5.3.2. Laat R een Hilbertruimte zijn, $T \in BLO(R)$ is eindig-dimensionaal. Toon aan dat T^* ook eindig-dimensionaal is.

5.3.3. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn met een totaal orthonormaal systeem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Laat $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een nulrij zijn in $\mathbb{C}$ waarvoor $\lambda_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, Toon aan dat door

$$T := \psi_{f\in R} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f,e_n)e_n$$

een operator in $BLO(R)$ wordt gedefinieerd, die een-eenduidig is, met $T(R) \neq R$. Is de operator $T^{\leftarrow}$ van $T(R)$ naar R begrensd? (Vgl. ook 5.1.9.) Wat is T^*?

5.3.4. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn met een totaal orthonormaal systeem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) Bewijs dat er precies één $T \in BLO(R)$ bestaat waarvoor

$$Te_1 = 0 ,$$
$$Te_{n+1} = e_n \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

(ii) Bepaal $\|T\|$.

(iii) Bepaal T^*.

6.1. Compacte operatoren in een IP-ruimte

6.1.1. Laat R een IP-ruimte zijn, V een deelverzameling van R waarvoor $\bar{V}$ compact is. Bewijs dat V "bijna-eindig dimensionaal" is: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een eindig dimensionale lineaire deelruimte L_ε van R zó dat

$$\forall_{f \in V} \exists_{g \in L_\varepsilon} [\| f - g \| < \varepsilon] .$$

6.1.2. Laat R een IP-ruimte zijn en $T \in LO(R)$ compact. Laat $U := \{f \in R \mid \|f\| \leq 1\}$. Bewijs dat $\overline{T(U)}$ compact is.

6.1.3. (Vervolg) Laat R een IP-ruimte zijn, $T \in LO(R)$ compact. Bewijs dat er een rij $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van operatoren van eindige rang in BLO(R) is waarvoor $\|T_n - T\| \to 0$ als $n \to \infty$.

6.1.4. (Vervolg) Laat R een Hilbertruimte zijn, $T \in LO(R)$ compact. Bewijs dat T^* compact is. (Aanwijzing: S 3.2.6, 5.3.2.)

6.1.5. Laat R een Hilbertruimte zijn, $T \in BLO(R)$ van eindige rang. Bewijs dat er stellen $g_1, \ldots, g_n$ en $h_1, \ldots, h_n$ in R zijn zó dat

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} (f, h_k) g_k \quad (f \in R) .$$

6.1.6. Laat R een IP-ruimte zijn, $T \in LO(R)$ compact. Bewijs dat T(R) separabel is. (Aanwijzing: gebruik vraagstuk 6.1.2 of 1.5.4.)

6.2. Ontwikkeling naar eigenfuncties

6.2.1. Laat R een IP-ruimte zijn, $T \in LO(R)$ compact en hermitisch, $f \in R$ zó dat $Tf \neq 0$.

(i) Bewijs dat $T^n f \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

(ii) Bewijs dat de rij $\left(\frac{\| T^{n+1} f \|}{\| T^n f \|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ monotoon niet-dalend en convergent is.

(iii) Veronderstel dat T niet negatief definiet is.
Bewijs dat de rij $\left(\frac{T^n f}{\| T^n f \|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ naar een eigenfunctie van T convergeert.

6.2.2. Laat R een SH-ruimte zijn, $T \in LO(R)$ compact en hermitisch en niet-negatief definiet. Bewijs dat er precies één compacte hermitische $S \in LO(R)$ is waarvoor $S^2 = T$.

6.3. De vergelijking van Fredholm

6.3.1. Laat R een eindig dimensionale IP-ruimte zijn en $T \in LO(R)$. Bewijs dat de vergelijking $Tf = g$ oplosbaar is dan en slechts dan als $g \perp N(T^*)$, waarbij $N(T^*)$ de nulruimte van T^* is.

6.3.2. Laat R een IP-ruimte zijn en $f_1, f_2, \ldots, f_n$ elementen van R. Definieer $T \in LO(R)$ door

$$Tf := \sum_{k=1}^{n} (f, f_k) f_k \qquad (f \in R) .$$

Bewijs S 6.3.2 opnieuw voor dit speciale geval.

6.4. Integraaloperatoren

6.4.1. Laat R := C([0,1]) met het gewone inproduct. Laat k gedefinieerd zijn op $[0,1] \times [0,1]$ door

$$k(x,t) := \begin{cases} 1 & 0 \le t \le x \le 1, \\ 0 & \text{elders}. \end{cases}$$

(i) Bewijs dat er een rij continue reële functies $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ op $[0,1] \times [0,1]$ is zó dat

$$\sup\{ \int_0^1 |k_n(x,t) - k(x,t)|^2 dt \mid x \in [0,1]\} \to 0 \quad \text{als } n \to \infty .$$

(ii) Bewijs dat de operator T gedefinieerd door

$$Tf := \Psi_{x\in[0,1]} \int_0^x f(t)dt \quad (f \in R)$$

compact is.

6.4.2. Laat K een continue complexe functie zijn gedefinieerd op $[0,1] \times [0,1]$. Laat R := C([0,1]) met het gewone inproduct. Definieer $T \in LO(R)$ door

$$T := \Psi_{f\in R} \Psi_{x\in[0,1]} [\int_0^1 K(x,y)f(y)dy] .$$

Laat $f_1, f_2, \ldots, f_n$ een orthonormaal stelsel van eigenfuncties van T zijn, behorende bij de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

(i) Bewijs dat

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \le \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dxdy .$$

(ii) Wat volgt uit (i) voor de eigenwaarden van T?

6.4.3. Laat $R := C([0,1])$ met het gewone inproduct. Laat K gedefinieerd zijn door

$$K(x,y) := \begin{cases} (x-1)y & (0 \le y \le x \le 1) , \\ x(y-1) & (0 \le x \le y \le 1) . \end{cases}$$

Definieer $T \in LO(R)$ door

$$T := \forall_{f \in R} \forall_{x \in [0,1]} [\int_0^1 K(x,y)f(y)dy] .$$

(i) Toon aan dat T hermitisch is.

(ii) Bewijs dat $T(R) = \{g \in C^2([0,1]) \mid g(0) = g(1) = 0\}$.

(iii) Bewijs dat T injectief is.

(iv) Geef de oplossing van de vergelijking $Tf = g$ met $g \in T(R)$ gegeven.

(v) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

(vi) Concludeer dat het stelsel $(\forall_x \sqrt{2} \sin n\pi x)_{n \in \mathbb{N}}$ volledig is in $T(R)$. Is het stelsel volledig in R?

7. Invariante punten

7.1. Laat $K(x,y,z)$ een continue functie zijn van $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ die voldoet aan de Lipschitzvoorwaarde

$$\exists_{\alpha>0}\ \forall_{x\in[0,1]}\ \forall_{y\in[0,1]}\ \forall_{z\in\mathbb{R}}\ \forall_{w\in\mathbb{R}}\ [\,|K(x,y,z) - K(x,y,w)| \le \alpha|z-w|\,].$$

Bewijs dat er een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ met $|\lambda| \le \delta$ de integraalvergelijking

$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y,f(y))\,dy$$

een continue oplossing heeft.

7.2. Laat $R := C([-1,1])$ met de supremum norm. Laat $\alpha > 0$, $g \in R$ en $T\colon R \to R$ gegeven door

$$(Tf)(x) := \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + \alpha^2}\,dt + g(x)\,.$$

Bewijs dat T een contractie is en bepaal een zo klein mogelijke contractieconstante.

Gemengde tentamenopgaven

1. Zij R de ruimte $C([0,1])$ der continue functies op het gesloten interval $0 \le x \le 1$; zij L de afbeelding van R in $\mathbb{C}$ die wordt gedefinieerd door

$$L(f) := \int_0^1 t^{-2/3} f(t)dt .$$

(i) Bewijs dat L bij de supremumnorm, $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$, een begrensde lineaire functionaal van R is; bepaal $\|L\|$.

(ii) Bewijs dat L bij de inwendig productnorm, $\|f\|_2 := \{\int_0^1 |f(t)|^2 dt\}^{\frac{1}{2}}$, niet begrensd is.

2. Zij R de ruimte van alle polynomen, met complexe coëfficiënten, in de variabele x; $0 \le x \le 1$. R wordt beschouwd als functieruimte.
Als $p \in R$ en $p(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$ met $\alpha_n \neq 0$, dan schrijven we $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j$ met $\forall_{j>n}\ \alpha_j = 0$.
We definiëren voor $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j$ en $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x^j$

$$(p,q) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \bar{\beta}_j .$$

(i) Bewijs dat R een IP-ruimte is maar geen H-ruimte.

(ii) Zij T een afbeelding van R in R, gedefinieerd door

$$(Tf)(x) = f(1) - f(x) .$$

Bewijs dat T een niet-begrensde lineaire operator is.

(iii) Bepaal de eigenwaarden en de eigenruimten van T en ga na of de eigenruimten orthogonaal zijn.

(iv) Ga na of T hermitisch is.

3. a) Zij R een IP-ruimte die geen H-ruimte is. Zij S een lineaire deelruimte van R die dicht ligt in R (d.w.z. dat

$$\forall_{x\in R}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{y\in S}\ \|x - y\| < \varepsilon)\ .$$

Bewijs dat S geen H-ruimte is.

b) Zij R een IP-ruimte en S een lineaire deelruimte die dicht ligt in R. Laat M_1 en M_2 begrensde lineaire functionalen zijn op R. Gegeven is dat $M_1(f) = M_2(f)$ voor alle $f \in S$. Bewijs dat $M_1(f) = M_2(f)$ voor alle $f \in R$.

4. Zij R de verzameling van oneindig vaak differentieerbare complexe functies gedefinieerd op $\mathbb{R}$ die periodiek zijn met periode 1. Met de definities

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ \forall_{x\in \mathbb{R}}\quad (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{\alpha\in \mathbb{C}}\ \forall_{x\in \mathbb{R}}\quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\quad (f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

wordt dit een separabele IP-ruimte. (Dit hoeft U niet te bewijzen.) Voor iedere $f \in R$ is $f' := \frac{df}{dx}$ weer een element van R.

a) Bewijs dat de afbeelding T gedefinieerd door

$$\forall_{f\in R}\ Tf := if'$$

tot LO(R) behoort.

b) Laat zien dat T een geadjungeerde heeft.

c) Bewijs dat T niet begrensd is.

d) Bepaal de eigenwaarden van T met de bijbehorende eigenruimten.

5. Beschouw de ruimte $C([0,\infty))$ met supremumnorm. Dit is een Banachruimte; dat behoeft U niet te bewijzen. Gegeven is dat $\alpha \in C([0,\infty))$ en $\|\alpha\| < \frac{1}{4}$. Laat zien dat de differentiaalvergelijking

$$\frac{df}{dx} = \frac{\alpha(x)f(x)}{x^2 + 1} + \tfrac{1}{2}e^{-x-|f(x)|^2}$$

precies één oplossing $f \in C([0,\infty))$ heeft met $f(0) = 1$.

Doe dit door o.a. een operator aan te geven en te laten zien dat deze een contractie is.

Aanwijzing: Laat zien dat

$$\forall_{u\in\mathbb{C}}\ \forall_{v\in\mathbb{C}}\quad \left|e^{-|u|^2} - e^{-|v|^2}\right| \le \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{1}{2}}.|u - v|\ .$$

Opmerking. Wie er niet in slaagt de contractie-eigenschap te bewijzen, kan deze als bewezen aannemen en toch de rest van het vraagstuk maken.

6. We beschouwen de reële vectorruimte R gevormd door de reële continue functies op [0,1] met de supremumnorm:

$$\forall_{f\in R}\ \|f\| := \sup\{|f(x)|\ |\ x \in [0,1]\}\ .$$

Zij $g \in R$ en beschouw de afbeelding F_g gedefinieerd door

$$\forall_{f\in R}\ F_g f := \int_0^1 f(x)g(x)dx\ .$$

(i) Toon aan dat F_g een begrensde lineaire functionaal van R is.
(ii) Bewijs dat

$$\|F_g\| = \int_0^1 |g(x)|dx\ .$$

(Aanwijzing: neem eerst aan dat g slechts eindig veel nulpunten heeft, en gebruik dan de approximatiestelling van Weierstrass.)

7. Zij $R := \{f \in C([0,1])\ |\ f$ is oneindig vaak differentieerbaar$\}$ en $R_1 := \{f \in R\ |\ \forall_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1)\}$, dan is R een lineaire deelruimte van C([0,1]) en R_1 een lineaire deelruimte van R. We voeren in R een inwendig product in door

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ (f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx\ .$$

Zij $\alpha \in R$ een reële functie en beschouw de afbeelding T gedefinieerd door

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{x\in[0,1]}\ (Tf)(x) := -\frac{d^2f}{dx^2} + \alpha(x)f(x)\ ,$$

dan is T een lineaire operator die R in R afbeeldt. (Tot nu toe hoeft U niets te bewijzen.)

(i) Is T hermitisch?

(ii) Toon aan dat $\alpha \in R_1$ noodzakelijk en voldoende is opdat $T(R_1) \subset R_1$.

(iii) Neem nu verder aan dat $\alpha \in R_1$ en ga na of de restrictie T_1 van T tot R_1 hermitisch is.

(iv) Is T_1 begrensd?

(v) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T en van T_1 in het speciale geval $\forall_{x\in[0,1]}\ \alpha(x) := 1$.

8. Zij R de functieruimte gevormd door de continue complexe functies f op $\mathbb{R}$ waarvoor een eindig interval I_f bestaat zo dat $f(x) = 0$ als $x \in \mathbb{R}\backslash I_f$.
R is een lineaire ruimte en we voeren twee normen in door

$$\|f\|_2 := \{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \qquad (f \in R)\ ,$$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad (f \in R)\ .$$

We beschouwen de afbeelding F gedefinieerd door

$$F(f) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+|x|}\, dx \qquad (f \in R)\ .$$

(i) Toon aan dat F een lineaire functionaal van R is.

(ii) Ga na of F begrensd is als R de norm $\|\ \|_2$ heeft.

(iii) Ga na of F begrensd is als R de norm $\|\ \|_\infty$ heeft.

9. a) Laat

$$R := \{f \in C([1,\infty)) \mid \int_1^{\infty} |f(t)|dt < \infty\}$$

en definieer d door

$$d(f,g) := \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [1,\infty)\} + \int_1^{\infty} |f(t) - g(t)|dt \qquad (f,g) \in R).$$

(i) Bewijs dat (R,d) een metrische ruimte is.

(ii) Als $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een fundamentaalrij is in (R,d), dan bestaat er een constante M zo dat

$$\forall_{T>1}\ \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \int_1^T |f_n(t)|dt < M .$$

Bewijs dit.

(iii) Als $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een fundamentaalrij is in (R,d), dan is er een $f \in R$ zó dat $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniform naar f convergeert. Bewijs dit. (U mag gebruik maken van het feit dat $C([1,\infty))$ volledig is t.o.v. de sup-norm.)

(iv) Toon aan dat de ruimte (R,d) volledig is.

b) (In dit deel mag U de resultaten uit a) gebruiken, ook als U die niet kon bewijzen.)

We beschouwen de integraalvergelijking

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_1^\infty e^{-xt^2} f(t)dt , \qquad (*)$$

waarbij $g \in R$ gegeven is. (R zoals boven gedefinieerd.) Laat

$$S := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le 1\} .$$

(v) Bewijs dat voor iedere $\lambda \in S$ de vergelijking (*) precies één oplossing $f_\lambda \in R$ heeft.

(vi) We definiëren nu een afbeelding T van S in R door

$$T\lambda := f_\lambda \quad (\lambda \in S) .$$

Bewijs dat T continu is. (In S de gewone topologie; in R de topologie bepaald door d.)

10. Zij R de functieruimte bestaande uit de tenminste eenmaal continu differentieerbare complexe functies gedefinieerd op $[0,1]$.
In R worden twee normen ingevoerd door

$$\|f\| := \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \quad (f \in R) ,$$

$$\|f\|_D := \|f\| + \max\{|f'(x)| \mid x \in [0,1]\} \quad (f \in R) .$$

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ wordt door

$$I_n f := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}) - \int_0^1 f(x)dx \quad (f \in R)$$

op R een lineaire functionaal I_n gedefinieerd. (Tot nu toe hoeft U niets te bewijzen!)

(i) Bewijs dat elke I_n ten opzichte van beide normen begrensd is.
(ii) Bewijs dat $\| I_n \| = 2$ $(n \in \mathbb{N})$.
(iii) Bewijs dat $\| I_n \|_D \to 0$ als $n \to \infty$.

11. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn. Als $A \in LO(R)$, dan is

$$N(A) := \{f \in R \mid Af = 0\} .$$

laat $T \in BLO(R)$ en bewijs de volgende beweringen:

(i) $N(T^*) = N(TT^*)$;

(ii) $\overline{T(R)} \oplus N(T^*) = R$, ($\overline{T(R)}$ is de afsluiting van T(R)) ;

(iii) $\overline{TT^*(R)} = \overline{T(R)}$.

12. We beschouwen de Banachruimte $R := C([0,1])$ met de gewone norm

$$\| f \| := \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \quad (f \in R) .$$

T is een lineaire afbeelding van R in zichzelf met de eigenschap dat er een $M \geq 0$ bestaat zo dat

$$|(Tf)(x)| \leq M \int_0^x |f(t)|dt \quad (f \in R,\ x \in [0,1]) .$$

(i) Bewijs dat I - T een begrensde inverse S heeft die gedefinieerd is op geheel R.
(ii) Toon aan dat $\| S \| \leq e^M$.

13. Laat $0 < a < 1$, $b \in \mathbb{R}$. Veronderstel dat g een continue reële functie is, gedefinieerd op $[-a,a]$. Toon aan dat er op $[-a,a]$ precies één continu differentieerbare reële functie f bestaat zo dat $f(0) = b$ en

$$f'(x) = g(x) + \sin(f(x)) \quad (x \in [-a,a]) .$$

(Aanwijzing: transformeer het probleem in een equivalente integraalvergelijking; pas de contractiestelling van Banach toe.) Breid dit uit tot het geval $a = 1$.

14. Laat $R := C([0,1])$ met de gewone norm:

$$\|f\| := \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \quad (f \in R)\ .$$

We beschouwen de operator $T \in LO(R)$ gedefinieerd door

$$(Tf)(t) := \int_0^t f(s)ds \qquad (f \in R,\ t \in [0,1])\ .$$

(i) Bewijs dat T begrensd is.

(ii) Bewijs dat voor $n \in \mathbb{N}$

$$|(T^n f)(t)| \le \frac{1}{n!} t^n \|f\| \qquad (f \in R,\ t \in [0,1])\ .$$

(iii) Toon aan dat voor iedere $\lambda \in \mathbb{C}$ en iedere $g \in R$ er precies één $f \in R$ bestaat zo dat

$$f - \lambda Tf = g\ .$$

(iv) Bepaal f als $\lambda = 1$ en $g(t) := 1$ $(t \in [0,1])$.

15. Laat $p,g \in C([0,\infty))$ met $\int_0^\infty |p(t)|dt < \frac{1}{2}$ en $\int_0^\infty |g(t)|dt < \frac{1}{2}$. Bewijs dat er een $f \in C([0,\infty))$ bestaat die voldoet aan

$$\begin{cases} f(0) = 0\ , \\ f'(t) + p(t)\, f^2(t) = g(t) \qquad (t \ge 0)\ , \\ |f(t)| \le 1 \qquad (t \ge 0)\ . \end{cases}$$

16. Laat $R := \{f \in C([0,1]) \mid f$ is oneindig vaak differentieerbaar en $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) \quad (n = 0,1,\ldots)\}$,

met als I.P.

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \qquad (f \in R,\ g \in R)$$

Zoals bekend is het systeem $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ met $e_n(x) := e^{2\pi inx}$ $(n \in \mathbb{Z},\ x \in [0,1])$ een totaal orthonormaalsysteem in R, en dus heeft ieder element $f \in R$ een fourierontwikkeling $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f,e_n)e_n$ in de zin dat

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{n=-N}^{N} (f,e_n)e_n\| = 0 .$$

(i) Bewijs dat als $f \in R$ ook de reeks $\sum_{-\infty}^{\infty} n(f,e_n)e_n$ in R convergeert. (Denk aan partiële integratie.)

We definiëren nu een afbeelding T van R in R door

$$Tf := \sum_{-\infty}^{\infty} n(f,e_n)e_n \qquad (f \in R) .$$

Het is duidelijk dat T lineair is. (Afgezien van (i) hoeft U tot nu toe niets te bewijzen.)

(ii) Ga na of T begrensd is.

(iii) Ga na of T een-eenduidig is.

(iv) Bewijs dat $T(R) \neq R$.

(v) Hierboven is T geïntroduceerd m.b.v. fourierontwikkelingen. Beschrijf T en $T(R)$ ook eens zonder van de terminologie van orthogonale ontwikkelingen gebruik te maken.

(vi) Laat $g \in T(R)$. Bewijs dat er precies één $f \in T^{\leftarrow}(\{g\})$ is zó dat voor alle $h \in T^{\leftarrow}(\{g\})$ geldt

$$\|f\| \leq \|h\| .$$

(Dus f is het element in $T^{\leftarrow}(\{g\})$ met minimale norm.) Het aldus gedefinieerde element f noemen we Sg, en dit procédé levert een afbeelding S van $T(R)$ in R.

(vii) Bepaal $\sup\{\|Sg\| \mid g \in T(R), \|g\| = 1\}$.

(viii) Leid uit het resultaat van (vii) af: als $f \in R$, $f(\frac{1}{2} + x) = - f(\frac{1}{2} - x)$ $(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$, dan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|^2 dx .$$

17. Laat zien dat er op het interval $[0,1]$ precies één continue functie f bestaat die zowel aan

$$f(x) - \tfrac{1}{2}f(2x) = e^x \qquad (0 \le x \le \tfrac{1}{2})$$

als aan

$$f(x) - \tfrac{1}{2}f(1) = e^x \qquad (\tfrac{1}{2} \le x \le 1)$$

voldoet.

18. In dit vraagstuk is $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
De rij van polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ is gedefinieerd door

$$p_n(x) := \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0) .$$

We beschouwen de functieruimte R gevormd door de oneindig vaak differentieerbare complexe functies gedefinieerd op $[-1,1]$ met het inproduct

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx \qquad (f,g \in R) .$$

De operator T die R in R afbeeldt, is gedefinieerd door

$$(Tf)(x) := (x^2 - 1)f''(x) + 2xf'(x) \qquad (f \in R,\ x \in [-1,1]) ,$$

en er geldt $Tp_n = n(n+1)p_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. (Tot nu toe hoeft U niets te bewijzen.)

(i) Bewijs dat T hermitisch is.

(ii) Bewijs dat het stelsel $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ een orthogonaal stelsel is in R.

(iii) Bewijs dat voor $n \in \mathbb{N}_0$ het polynoom p_n de graad n heeft.

(iv) Bewijs dat het stelsel $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ totaal is in R. (Denk aan Weierstrass.)

(v) Bewijs dat de verzameling eigenwaarden van T juist $\{n(n+1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ is, en dat elke eigenwaarde enkelvoudig is.

19. Laat R een separabele IP-ruimte zijn, R^* de ruimte van begrensde lineaire functionalen op R. Volgens S 3.2.1 wordt R^*dan een volledige genormeerde lineaire ruimte. De verzameling van begrensde lineaire functionalen of R^* wordt aangegeven met R^{**}.

(i) Laat $f \in R$. Bewijs dat

$$\mathcal{F}_f := \Psi_{F \in R^*} F(f)$$

een element van R^{**} levert, met $\| \mathcal{F}_f \| = \| f \|$. (Aanwijzing: bij f hoort ook nog een speciaal element van R^*.)

(ii) Laat $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een zwak convergente rij in R zijn.
Bewijs dat de rij begrensd is. (Aanwijzing: transporteer de rij naar R^{**}, merk op dat R^* volledig is, en pas Banach-Steinhaus toe.)

Examen/tentamen januari 1975

1. Laat R een inproduktruimte zijn, en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rijen in R waarvoor $\|f_n\| = \|g_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ en $\|f_n + g_n\| \to 2$ als $n \to \infty$.
Bewijs dat $\|f_n - g_n\| \to 0$ als $n \to \infty$.

2. Laat R en S twee separabele Hilbertruimten zijn, T een begrensde lineaire operator van R in S. We gebruiken voor de inprodukten in R en S dezelfde notatie. Bewijs de volgende uitspraken:

   (i) Er bestaat precies één begrensde lineaire operator T^* van S in R zó dat $(Tf,g) = (f,T^*g)$ voor alle $f \in R$, $g \in S$, en $\|T^*\| = \|T\|$.

   (ii) Als $\overline{T(R)} = S$, dan is T^* een-eenduidig (= injectief).

   (iii) Als T een-eenduidig is, dan is $\overline{T^*(S)} = R$.

   (iv) Als $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in R is waarvoor $(T^*Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert, dan is ook $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

   (v) Als T^*T compact is, dan is T compact.

   (vi) Als T compact is, dan is T^* compact.

3. Zij $R := C([-1,1])$, beschouwd als IP-ruimte, met

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt \qquad (f \in R,\ g \in R)\ .$$

De operator $T \in LO(R)$ wordt gedefinieerd door

$$T := \forall_{f\in R}\ \forall_{x\in[-1,1]}\ (f(x) + e^x f(-x))\ .$$

   (i) Bepaal de eigenwaarden van T met de bijbehorende eigenruimten.

   (ii) Ga na of T compact is.

Laat φ nu een vaste functie uit R zijn, en definieer $S \in LO(R)$ door

$$S := \forall_{f\in R}\ \forall_{x\in[-1,1]}\ (f(x) + \varphi(x)f(-x))\ .$$

   (iii) Ga na of S een geadjungeerde heeft.

   (iv) Formuleer een nodige en voldoende voorwaarde voor φ opdat S tenminste één eigenwaarde heeft.

Examen/tentamen juni 1975

1. Laat R een IP-ruimte zijn waarin $\{f \in R \mid \|f\| = 1\}$ compact is.
Bewijs dat R eindige dimensie heeft.

2. Laat R een IP-ruimte zijn en T een begrensde lineaire afbeelding van R in R met $\|T\| \leq 1$. Laat f een eigenvector zijn van T bij de eigenwaarde λ, g een eigenvector van T bij de eigenwaarde μ, waarbij $\lambda \neq \mu$ en $|\lambda| = 1$.
Bewijs dat $f \perp g$.

3. Laat $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{C}$ zijn. Laat R een separabele Hilbert-ruimte zijn met een totaal orthonormaal stelsel $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Laat $S := \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(i) Bewijs dat voor iedere $f \in R$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f,e_n)e_n$ convergeert.

We definiëren nu een afbeelding $T : R \to R$ door

$$Tf := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f,e_n)e_n \qquad (f \in R) .$$

(ii) Bewijs dat $T \in BLO(R)$, en bepaal $\|T\|$.

(iii) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

(iv) Bewijs dat als $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\bar{S}$ de afbeelding $T-\lambda I$ een inverse $R_\lambda \in BLO(R)$ heeft, en bepaal $\|R_\lambda\|$.

(v) Neem aan $\lambda_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ en $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Bewijs dat $T(R) \neq R$.

4. Laat $(a_{k\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ een oneindige matrix van complexe getallen zijn met $\sup\{\sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}| \mid k \in \mathbb{N}\} < 1$. Laat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{C}$ zijn.
Bewijs dat er precies één begrensde rij $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ is met

$$x_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}x_\ell + b_k \qquad (k \in \mathbb{N}) .$$

Examen/tentamen januari 1976

1. **Laat R een separabele Hilbertruimte zijn, $T \in BLO(R)$ met geadjungeerde T^*.**
Laat K een lineaire deelruimte van R zijn, $L := R \ominus K$ en $N := R \ominus T(K)$.
Bewijs dat $T^*(N) = L \cap T^*(R)$.

2. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een totaal orthonormaalsysteem in R, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een orthonormaalsysteem in R zó dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \varphi_n - \psi_n \|^2 < 1 \, .$$

(i) Toon aan dat voor iedere $f \in R$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (f,\varphi_n)\psi_n$ convergeert.
Noem de som Uf; dit levert een afbeelding U van R in R.

(ii) Laat zien dat $U \in BLO(R)$ en bepaal $\| U \|$.

(iii) Bewijs dat $\| U - I \| < 1$.

(iv) Bewijs dat $U(R) = R$, en concludeer dat $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ totaal is.

(v) Bepaal U^* en toon aan dat $UU^* = U^*U = I$.

3. Laat $R := C([-1,1])$ met de supremumnorm. Beschouw de afbeelding $T \in LO(R)$ gedefinieerd door

$$T := \forall_{f\in R} \forall_{t\in[-1,1]} \left[\int_{-t}^{t} f(s)ds \right] .$$

(i) Bewijs dat T begrensd is en bepaal $\| T \|$.

(ii) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

(iii) Bereken T^2 en toon aan dat voor elke $\lambda \in \mathbb{C}$ de operator $I - \lambda T$ een inverse in $BLO(R)$ heeft.

Examen/tentamen juni 1976

1. Laat $R := \{f \in C([0,1]) \mid \exists_{\varepsilon>0} \forall_{x\in[0,\varepsilon)} [f(x) = 0]\}$. Met de definitie

$$\|f\| := \{\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x}\,dx\}^{\frac{1}{2}} \qquad (f \in R),$$

wordt R een genormeerde vectorruimte, en ook

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \qquad (f \in R)$$

geeft een norm op R.
Laat $g \in C((0,1])$, $g(x) = \mathcal{O}(x^{-\frac{1}{2}})$ $(x \downarrow 0)$ en definieer

$$G(f) := \int_0^1 f(x)\,g(x)dx \qquad (f \in R).$$

Dan is G een lineaire functionaal op R. (Tot nu toe hoeft U niets te bewijzen.) Ga na of G begrensd is ten opzichte van $\|\cdot\|$ en ten opzichte van $\|\cdot\|_\infty$.

2. Laat $R := C([0,1])$ met het inproduct

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \qquad (f \in R,\ g \in R).$$

Laat

$$K(x,\xi) := \begin{cases} x - 1 & (0 \le \xi \le x \le 1), \\ \xi - 1 & (0 \le x \le \xi \le 1), \end{cases}$$

en definieer $T \in LO(R)$ door

$$Tf := \bigvee_{x\in[0,1]} \int_0^1 K(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad (f \in R).$$

i) Bewijs dat $T(R) \subset \{g \in R \mid g$ tweemaal continu differentieerbaar en $g'(0) = g(1) = 0\}$. (Aanwijzing: vul de uitdrukking voor K in en splits de integraal.)

ii) Bewijs dat T injectief is en bepaal de inverse $T^{\leftarrow}$ die T(R) op R afbeeldt. (Aanwijzing: als bij i).)

iii) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

iv) Toon aan dat er een orthonormaal stelsel van eigenvectoren is dat totaal is in T(R).

v) Bewijs dat $T(R) = \{g \in R \mid g \in C^2([0,1]),\ g'(0) = g(1) = 0\}$, en geef schetsmatig aan waarom T(R) dicht ligt in R.

3. Laat $h \in C([0,1])$ en $g \in C([0,\infty))$ zo dat

$$\int_0^\infty g(x)dx$$

bestaat.

i) Bewijs dat er precies één begrensde continue functie f op $[0,\infty)$ bestaat die op $(1,\infty)$ continu differentieerbaar is en waarvoor

$$\begin{cases} f'(x+1) = e^{-2x}f(x^2) + g(x) & (x \in (0,\infty)), \\ f(x) = h(x) & (x \in [0,1]). \end{cases}$$

ii) Bewijs dat voor deze functie $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat.

Examen/tentamen januari 1977

1. Laat R := C([0,1]) met het gewone inproduct

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \quad (f,g \in R) ,$$

en S := C([0,1]) met de maximumnorm

$$\| f \| := \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \quad (f \in R) .$$

Laat K een continue complexe functie zijn, gedefinieerd op $[0,1] \times [0,1]$.

(i) Bewijs dat voor iedere $f \in R$ de functie

$$\curlyvee_{x\in[0,1]} \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

continu is. Definieer nu

$$T := \curlyvee_{f\in R} \curlyvee_{x\in[0,1]} \int_0^1 K(x,y)f(y)dy .$$

(ii) Bewijs dat $T \in BLO(R \to S)$.

(iii) Bewijs dat $T \in BLO(R)$.

2. Laat R een SH-ruimte zijn met een totaal orthonormaal systeem $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Laat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in R zijn met de eigenschap

$$\forall_{g\in R} [(g,f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is een convergente rij}] .$$

(i) Bewijs m.b.v. de stelling van Banach-Steinhaus dat er een M is zó dat

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} [\sum_{m=1}^{\infty} |(f_n,q_m)|^2 < M] .$$

(ii) Iedere f_n is te schrijven als $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nm}q_m$. Bewijs dat voor iedere $m \in \mathbb{N}$ de rij $(\alpha_{nm})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar een $\alpha_m \in \mathbb{C}$, en dat $\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m|^2$ convergeert.

(iii) Bewijs dat er een $f \in R$ is zó dat $f_n \rightharpoonup f$ als $n \to \infty$.

3. Laat $R := \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ met het gewone inproduct

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \qquad (f,g \in R)\ .$$

Beschouw de lineaire operator $T: R \to R$ gedefinieerd door

$$Tf(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds \qquad (t \in (0,1]),$$

$$Tf(0) := 0\ .$$

(U hoeft niet te bewijzen dat $T \in LO(R)$.)

(i) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

(ii) Laat uit het resultaat van (i) zien dat T een-eenduidig is en niet hermitisch.

(iii) Bewijs dat

$$T(R) = \{g \in R \mid g \text{ continu differentieerbaar op } (0,1] \text{ en } g'(t) = o(\tfrac{1}{t}),\ (t \downarrow 0)\}\ .$$

Bepaal $T^{\leftarrow}$.

(iv) Bewijs dat $T^{\leftarrow}$ niet begrensd is.

4. Laat $a \in \mathbb{R}$. Bewijs dat er precies één continu differentieerbare reële functie f op $[0,1]$ is waarvoor

$$f'(x) = \frac{f(x^2)}{1+x} \qquad (x \in [0,1])\ ,$$

$$f(0) = a\ .$$

Examen/tentamen juni 1977

Notatie. R is de ruimte $C([0,1])$ met het gewone inproduct, dus

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \text{ voor } f,g \in R \text{ ;}$$

de bijbehorende norm van $f \in R$ wordt aangegeven met $\|f\|$.
S is de ruimte $C([0,1])$ met de supremumnorm: $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$ voor $f \in S$.

.-.

1. Voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$ definiëren we $\varphi_\alpha := \underset{x\in[0,1]}{Y} e^{2\pi i\alpha x}$. Zoals bekend is $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ een totaal orthonormaal systeem in R.
Laat $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ en $m \in \mathbb{Z}$, $P := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{Z},\ n \neq m\}$ en $Q := P \cup \{\varphi_\alpha\}$.

(i) Bereken de afstand van φ_α tot het lineaire opspansel van P.
(ii) Bewijs dat het lineaire opspansel van Q dicht is in R.

2. Laat $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een rij in $[0,1]$ zijn met $x_k \neq x_\ell$ als $k \neq \ell$, en $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{C}$ waarvoor $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ convergeert.
Laat

$$F := \underset{f\in C([0,1])}{Y} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(x_k) \right] .$$

(i) Bewijs dat $F \in S^*$ en bepaal $\|F\|_\infty$.
(ii) Bewijs dat $F \notin R^*$.

3. Laat $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een totaal orthonormaal systeem zijn in R zō dat

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\,[\,\|q_n\|_\infty \le M\,]\ .$$

(i) Bewijs dat voor iedere $f \in R$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(f,q_n)q_n$ zowel in S als in R convergeert.

Definieer nu $T : R \to R$ door

$$Tf := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(f,q_n)q_n \qquad (f \in R)\ .$$

(ii) Bewijs dat T een geadjungeerde T^* heeft, en bepaal T^*.

(iii) Bepaal de eigenwaarden van T.

(iv) Bewijs dat T compact is.

<u>Examen/tentamen januari 1978</u>

1. (i) **Laat $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le 1$ en $\alpha_k \in \mathbb{C}$ $(1 \le k \le n)$.**
Beschouw $R := C([0,1])$ met de gebruikelijke norm

$$\|f\| := \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \quad (f \in R)\ ,$$

en definieer

$$Lf := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(t_k) \quad (f \in R)\ .$$

Bewijs dat $L \in R^*$ en $\|L\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$.

(ii) Laat voor elke $j \in \mathbb{N}$

$$0 \le t_{1j} < t_{2j} < \ldots < t_{n_j,j} \le 1\ ,$$

$$\alpha_{kj} \in \mathbb{C} \ (1 \le k \le n_j)$$

en definieer

$$L_j f := \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{kj} f(t_{kj}) \quad (f \in C([0,1]))\ .$$

Veronderstel

(a) $\forall_{n \in \mathbb{Z}, n \ge 0} \left[\lim_{j\to\infty} L_j(\Psi_{x \in [0,1]}\ x^n) = \frac{1}{n+1}\right]$,

(b) $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{j \in \mathbb{N}} \left[\sum_{k=1}^{n_j} |\alpha_{kj}| \le M\right]$.

Bewijs dat

(c) $\forall_{f \in C([0,1])} \left[\lim_{j\to\infty} L_j f = \int_0^1 f(x)dx\right]$.

(iii) Bewijs m.b.v. de stelling van Banach-Steinhaus het omgekeerde van (ii): als (c) geldt, dan is ook aan (a) en (b) voldaan.

2. Laat k een reële continue functie zijn, gedefinieerd op $\mathbb{R}$, even en periodiek met periode 1. Laat $R := C([0,1])$ met het gewone inproduct

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \qquad (f,g \in R) .$$

Laat $q_n(x) := e^{2\pi inx}$ $(n \in \mathbb{Z},\ x \in [0,1])$, en laat k de fourierreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n q_n$ hebben.

Definieer de lineaire afbeelding T van R in R door

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x-y)f(y)dy \qquad (f \in R,\ x \in [0,1]) .$$

(i) Toon aan dat T compact en hermitisch is.

(ii) Bewijs dat elke q_n eigenfunctie van T is.

(iii) Bewijs dat T eindige dubbelnorm heeft.

(iv) Neem aan dat $\forall_{n \in \mathbb{Z}} [d_n \neq 0]$, en bepaal dan de eigenwaarden en eigenruimten van T.

3. $C(\mathbb{R})$ is de lineaire ruimte van de begrensde complexwaardige continue functies op $\mathbb{R}$, genormeerd met de supremumnorm

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad (f \in C(\mathbb{R})) .$$

Bewijs dat er precies één $T \in BLO(C(\mathbb{R}))$ is zó dat voor alle $f \in C(\mathbb{R})$ en alle $x \in \mathbb{R}$

$$(Tf)(x) = f(x) + \tfrac{1}{2}(Tf)(x+1) .$$

Examen/tentamen juni 1978

1. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn met een orthonormale basis $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Laat $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij van positieve getallen zijn waarvoor

$$\lim_{k\to\infty} (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k)^{\frac{1}{k}} = 1 .$$

(i) Bewijs dat voor iedere $x \in R$ de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, e_{n+1}) e_n$$

convergeert in R.

Definieer nu $T : R \to R$ door

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, e_{n+1}) e_n \qquad (x \in R) .$$

(ii) Bewijs dat T begrensd is en bepaal $\|T\|$.

(iii) Bepaal T^*.

(iv) Toon aan dat alle λ's met $|\lambda| < 1$ eigenwaarde zijn van T, en bepaal de bijbehorende eigenvectoren.

(v) Bewijs dat T niet compact is. (Aanwijzing: laat eerst zien dat er oneindig veel n's zijn met $\mu_n > \frac{1}{2}$.)

2. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van eindig-dimensionale lineaire deelruimten van R zo dat $K_n \subset K_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Laat

$$K := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n .$$

Bewijs dat

$$K \text{ volledig} \Leftrightarrow \exists_N \, \forall_{n>N} \quad [K_n = K] .$$

3. Laat R een Banachruimte zijn, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van compacte operatoren in BLO(R) die naar $T \in$ BLO(R) convergeert, d.w.z. $\|T_n - T\| \to 0$ als $n \to \infty$. Neem aan dat elke T_n een eigenwaarde λ_n heeft, en dat $\lambda_n \to \lambda$ met $\lambda \neq 0$. Bewijs dat λ eigenwaarde is van T.

Examen/tentamen januari 1979

1. Laat

$$X := \{f \in C([0,\infty)) \mid \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \text{ convergeert}\} .$$

Laat R de vectorruimte X zijn met de supremumnorm:

$$\|f\|_R := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,\infty)\} \qquad (f \in X) ,$$

en S de ruimte X met de inproductnorm:

$$\|f\|_S := \{\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\}^{\frac{1}{2}} \qquad (f \in X) .$$

Laat

$$F := \forall_{f \in X} \int_0^\infty \frac{f(t)\sin t}{t}\, dt .$$

(5) i) Bewijs dat $F \in S^*$ en bepaal $\|F\|$ in dit geval.

(5) ii) Bewijs dat $F \notin R^*$.

2. Laat R een separabele Hilbertruimte zijn, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ twee orthonormale stelsels in R, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een complexe rij met $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ $(n \in \mathbb{N})$, en $\delta := \lim_{n\to\infty} |\lambda_n|$.

(1) i) Bewijs dat voor iedere $f \in R$ de reeks $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n (f,\varphi_n)\psi_n$ convergeert.

Definieer nu

$$T := \forall_{f\in R} \sum_{n=1}^\infty \lambda_n (f,\varphi_n)\psi_n .$$

U mag zonder meer aannemen dat $T \in LO(R)$.

(1) ii) Bewijs dat T begrensd is, en bepaal $\|T\|$.

(2) iii) Bewijs de bewering:

$$T \text{ injectief} \Rightarrow (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is een totaal stelsel} .$$

(2) iv) Bewijs ook:

$$T \text{ surjectief} \Rightarrow [\,(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is een totaal stelsel en } \delta > 0] .$$

(2) v) Bewijs dat als $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ totaal zijn en $\delta > 0$, de operator T een bijectie is van R op R en dat dan $T^{-1} \in BLO(R)$.

(2) vi) Geef een nodige en voldoende voorwaarde voor de λ_n's opdat T eindige dubbelnorm heeft.

(2) vii) Geef een nodige en voldoende voorwaarde voor de λ_n's opdat T compact is.

(1) viii) Bepaal T^*.

(7) 3. Laat $I := [0,1]$, $J := [-1,1]$, $\alpha \in (0,1)$, $V := I \times J$. Laat $\Phi: V \to J$ een continue functie zijn die partieel differentieerbaar is naar de tweede variabele met

$$\forall_{(x,y)\in V} \left[|\Phi_y(x,y)| \leq \alpha \right] .$$

Bewijs dat er precies één continue reële functie $f: I \to J$ bestaat met

$$\forall_{x\in I} \left[\Phi(x,f(x)) = f(x) \right] .$$