TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE ANALYSE II

naar het college van

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

samengesteld door

Dr. W. van der Meiden

Voorjaarssemester 1969

ATC
C1
tue 242
bibl.

Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE ANALYSE II

NAAR HET IN HET VOORJAARSSEMESTER 1969 DOOR
PROF. DR. N.G. DE BRUIJN GEGEVEN COLLEGE
SAMENGESTELD DOOR DR. W. VAN DER MEIDEN

UITGAVE 1969

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 242
PRIJS ƒ 2,50

L I N E A I R E   A N A L Y S E   I I

naar het in het voorjaarssemester 1969 door
prof.dr. N.G. de Bruijn gegeven college,
samengesteld door dr. W. van der Meiden

Uitgave 1969

Voorwoord

Deze aantekeningen zijn gemaakt naar aanleiding van het door prof.dr. N.G. de Bruijn gegeven college, in het voorjaarssemester van 1969.

De op het college behandelde onderwerpen zijn alle in de inhoudsopgave (blz. iii) vermeld, maar in deze syllabus niet alle even getrouw weergegeven, en wel afhankelijk van drie omstandigheden:

1: de strengheid en volledigheid der behandeling op het college;

2: mijn behoefte aan (voor mij) verduidelijkende toevoegingen;

3: de beschikbare tijd.

Wat de eerste omstandigheid betreft, de paragrafen 7.4, 7.5 en 11.3 en hoofdstuk 10 zijn op het college nogal panoramisch behandeld; 11.3 heb ik hier, aangevuld, weergegeven, de andere paragrafen zijn met literatuurverwijzingen afgedaan (gedeeltelijk op grond van de derde omstandigheid). Op grond van de derde omstandigheid is ook § 9.6 weggelaten.

Wat de overige paragrafen betreft hoop ik dat de lezers daarin het college herkennen, al zijn daarin hier en daar enige notaties veranderd (overeenstemmend met de notaties in Lineaire Analyse I), enige bewijzen meer op lezen dan op horen afgestemd, en (overeenkomstig de tweede omstandigheid) enige aanvullende opmerkingen gemaakt; in één geval (7.3.1) is een op het college gegeven bewijs vervangen door een ander, dat mij privé door prof. de Bruijn werd medegedeeld.

Studenten die belust zijn op zelfwerkzaamheid en creativiteit kunnen in het hiernavolgende hun hart ophalen: op tal van plaatsen zijn (onderdelen van) bewijzen aan de lezers zelf overgelaten, en op tal van plaatsen kunnen ze critische vragen stellen en beantwoorden (zoals dat, bij wijze van eenvoudig voorbeeld, in 8.1.2 is gebeurd).

Voor diegenen evenwel die geïnteresseerd zijn in een duidelijke omschrijving van "tentamenstof" zij vermeld dat van de hierboven als "panoramisch" aangeduide gedeelten op het tentamen niet meer dan "panoramische" kennis wordt verwacht.

Eindhoven, augustus 1969

W. van der Meiden.

Inhoudsopgave

7. De integraalvergelijking van Fredholm

In § 5.2 van Lineaire Analyse I is de vergelijking van Fredholm van de tweede soort

$$f - \mu Tf = g$$

besproken voor het geval dat T een compacte hermitische operator van een H-ruimte R is. Deze gedachtengang wordt nu uitgebreid tot niet-noodzakelijk compacte operatoren van ruimten die niet persé H-ruimten behoeven te zijn; de discussie steunt evenwel op verscheidene in Lineaire Analyse I vermelde resultaten, waarvan we de volgende nog even opsommen:

blz.	§	
69	4.4.7	Als R een B-ruimte is en als $T \in LO(R)$, als $\{T_n\}_{n \in N t}$ een rij compacte operatoren is van R en $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$, dan is T compact. (Opmerking: volgens 4.4.1 is T ook begrensd.)
70		Als $T \in LO(R)$ en $\dim T(R) < \infty$, dan heet T van eindige rang.
72	4.4.11	Als R een genormeerde lineaire ruimte is, $T \in BLO(R)$ en T is van eindige rang, dan is T compact.
83-85	5.2	De oplossing van de Fredholmvergelijking voor compacte hermitische operatoren van een H-ruimte.
87	5.3.3	De operator T zij in $C([0,1])$ gedefinieerd door $(Tf)(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$ met een continue kern K; dan is T limiet van een rij operatoren van eindige rang,
88	5.3.4	en derhalve compact (in de norm $\| \ \|_2$).
94	6.1.3	Als R een B-ruimte is en als $T \in BLO(R)$ met $\|T\| < 1$, dan heeft $I - T$ een tweezijdige inverse, S, waarvoor $\|S\| < \frac{1}{1 - \|T\|}$ en $\forall_{f \in R}\ Sf = f + \sum_{j=1}^{\infty} T^j f$.

7.1. De Fredholmvergelijking met een operator van eindige rang

Zij R een lineaire ruimte, $T \in LO(R)$ en $\dim T(R) < \infty$. Zij $\{f_1,\ldots,f_n\}$ een basis voor $T(R)$, dan is

$$Tf = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(f).f_j \;.$$

7.1.1. Stelling: Het stelsel functies $\{\beta_j(f)\}_{j=1,\ldots,n}$ is een stelsel lineaire functionalen van R.

Bewijs: $T(\lambda f + \mu g) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(\lambda f + \mu g).f_j$ per definitie; omdat T lineair is, is

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda Tf + \mu Tg = \lambda \sum_{j=1}^{n} \beta_j(f).f_j + \mu \sum_{j=1}^{n} \beta_j(g).f_j$$

$$\therefore \qquad \sum_{j=1}^{n} \{\beta_j(\lambda f + \mu g) - \lambda\beta_j(f) - \mu\beta_j(g)\}f_j = 0$$

en wegens de onafhankelijkheid van $\{f_1,\ldots,f_n\}$ is

$$\forall_{j=1,\ldots,n}\; \beta_j(\lambda f + \mu g) = \lambda\beta_j(f) + \mu\beta_j(g) \;.$$

Dus β_j is lineair ($j = 1,\ldots,n$). □

Noteer nu maar $\beta_j =: L_j$:

$$Tf = \sum_{j=1}^{n} L_j(f).f_j \;.$$

7.1.2. Stelling: T is dan en slechts dan een lineaire operator van R van eindige rang als er een stelsel lineaire functionalen $L_1,\ldots,L_n$ bestaat zo dat

$$Tf = \sum_{j=1}^{n} L_j(f)f_j \;.$$

Bewijs: "Nodig" is boven bewezen, "voldoende" is triviaal. □

7.1.3. We beschouwen de vergelijking

$$(I - \mu T)f = g ,$$

met gegeven T en gegeven g. Voor een oplossing f geldt

$$f = g + \mu Tf = g + \mu \sum_{j=1}^{n} L_j(f)f_j$$

$$\therefore \qquad Tf = Tg + \mu \sum_{j=1}^{n} L_j(f)Tf_j = Tg + \mu \sum_{j=1}^{n} L_j(f) \sum_{i=1}^{n} L_i(f_j)f_i$$

$$\therefore \qquad \sum_{i=1}^{n} L_i(f)f_i = \sum_{i=1}^{n} L_i(g)f_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} L_j(f)L_i(f_j) \right) f_i ,$$

zodat wegens de onafhankelijkheid van $\{f_1,\dots,f_n\}$ geldt:

$$\forall_{i=1,\dots,n} \quad L_i(f) = L_i(g) + \mu \sum_{j=1}^{n} L_j(f)L_i(f_j) .$$

Zij M_μ de matrix met element $(M_\mu)_{ij} = \delta_{ij} - \mu L_i(f_j)$, dan voldoet de vector $L(f) = \begin{pmatrix} L_1(f) \\ \vdots \\ L_n(f) \end{pmatrix}$ aan de matrixvergelijking

$$M_\mu \cdot L(f) = L(g) .$$

Zij $\Delta_\mu := \det M_\mu$, K_μ de gespiegelde matrix van de minoren van M_μ, zodat (zie [Mir], pp. 14 - 20)

$$K_\mu \, M_\mu = M_\mu \, K_\mu = \Delta_\mu \, I$$

en voor $\Delta_\mu \neq 0$ is $\Delta_\mu^{-1} \, K_\mu$ de inverse van M_μ. Nu is Δ_μ een polynoom van de graad n in μ, en evenzo zijn de elementen van K_μ polynomen in μ; in het lijzonder is $M_0 = I$, $\Delta_0 = 1$ en $K_0 = I$.

7.1.4. <u>Stelling</u>: Als $\Delta_\mu \neq 0$ is de vergelijking $f - \mu Tf = g$ eenduidig oplosbaar voor alle $g \in R$.

Bewijs: Volgens de theorie der lineaire vergelijkingen is het stelsel

$$M_\mu \; L(f) = L(g)$$

voor $\Delta_\mu \neq 0$ eenduidig oplosbaar, en

$$L(f) = \Delta_\mu^{-1} \; K_\mu \; L(g)$$

zodat voor een oplossing f van de vergelijking

$$(I - \mu T)f = g$$

geldt

$$f = g + \mu \sum_{j=1}^{n} L_j(f)f_j = g + \mu(f_1, \ldots, f_n)\begin{pmatrix} L_1(f) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(f) \end{pmatrix} =$$

$$= g + \mu \; \Delta_\mu^{-1}(f_1, \ldots, f_n)K_\mu\begin{pmatrix} L_1(g) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(g) \end{pmatrix}$$

waarin ter vereenvoudiging een verkorte notatie is ingevoerd. Bij substitutie blijkt deze f te voldoen:

$$(I - \mu T)\left\{ g + \mu \; \Delta_\mu^{-1}(f_1, \ldots, f_n)K_\mu\begin{pmatrix} L_1(g) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(g) \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= (I - \mu T)g + \mu \; \Delta_\mu^{-1}(I - \mu T)(f_1, \ldots, f_n)K_\mu\begin{pmatrix} L_1(g) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(g) \end{pmatrix} =$$

$$= (I - \mu T)g + \mu \Delta_\mu^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \{\delta_{j1} - \mu L_j(f_1)\}f_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \{\delta_{jn} - \mu L_j(f_n)\}f_j\right)K_\mu\begin{pmatrix} L_1(g) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(g) \end{pmatrix}$$

$$= (I - \mu T)g + \mu\, \Delta_\mu^{-1}(f_1,\ldots,f_n)M_\mu\, K_\mu \begin{pmatrix} L_1(g) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(g) \end{pmatrix} =$$

$$= (I - \mu T)g + \mu(f_1,\ldots,f_n) \begin{pmatrix} L_1(g) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(g) \end{pmatrix} = (I - \mu T)g + \mu Tg = Ig = g\ . \qquad \square$$

7.1.5. Het geval $\Delta_\mu = 0$ vereist nog enige opmerkingen vooraf. Allereerst volgt uit $\Delta_\mu = 0$ dat $\mu \neq 0$, aangezien $\Delta_0 = 1$. Vervolgens beschouwen we in R^n de lineaire deelruimten

$$H_\mu := \{x \in R^n \mid M_\mu x = \sigma\}$$

en

$$\tilde{H}_\mu := \{x \in R^n \mid \exists_{n \in Nt}\, M_\mu^n x = \sigma\}\ .$$

Het is direct duidelijk dat $H_\mu \subset \tilde{H}_\mu$; volgens een bekende stelling uit de lineaire algebra geldt voor de multipliciteit m van de wortel μ van de vergelijking

$$\Delta_\mu = 0$$

dat

$$m = \dim(\tilde{H}_\mu)$$

zodat, aangezien nu $\mathrm{rang}(M_\mu) < n$,

$$1 \leqslant \dim(H_\mu) \leqslant m\ .$$

(Zie bijvoorbeeld $[Ha]_2$, p. 112 e.v.; [Z], pp. 188 - 204.)

Tenslotte merken we nog op dat iedere eigenvector f van T, als element van T(R), kan geschreven worden in de vorm

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$$

met behulp van een vector $a := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in R^n \setminus \{\sigma\}$.

7.1.6. Stelling: $a \in H_\mu \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \in E_{\mu^{-1}}$.

Bewijs: Het tweede lid van de coïmplicatie is achtereenvolgens equivalent met

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = \mu \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Tf_j = \mu \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\left(\sum_{i=1}^{n} L_i(f_j)f_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \mu\alpha_j L_i(f_j)\right)f_j ,$$

$$\forall_{i=1,\ldots,n}\ \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \mu\alpha_j L_i(f_j) ,$$

$$\forall_{i=1,\ldots,n}\ \sum_{j=1}^{n} \{\delta_{ij} - \mu L_i(f_j)\}\alpha_j = 0 ,$$

$$M_\mu a = 0 ,$$

$$a \in H_\mu .$$ □

7.1.7. Stelling: Als $\Delta_\mu = 0$, is $\mu^{-1} \in \sigma(T)$ en $1 \leq \dim E_{\mu^{-1}} \leq m$.

Bewijs: 7.1.6 houdt in dat $\dim E_{\mu^{-1}} = \dim H_\mu$; de bewering volgt nu uit de tweede opmerking in 7.1.5. □

7.1.8. Stelling: Als $\Delta_\mu = 0$ is de vergelijking

$$f - \mu Tf = g$$

in R niet voor iedere g oplosbaar; als f een oplossing is, is voor iedere $h \in E_{\mu^{-1}}$ ook $f + h$ een oplossing, zodat de oplossingen niet eenduidig zijn.

Bewijs: Het tweede deel van de bewering volgt uit 7.1.7; het eerste deel van de bewering volgt uit het feit dat voor een oplossing f geldt (zie 7.1.3)

$$M_\mu\, L(f) = L(g)$$

en volgens een stelling uit de lineaire algebra moet dan de rang van M_μ gelijk zijn aan de rang van de matrix

$$(M_\mu \vdots L(g)) .$$

Op grond van $\Delta_\mu = 0$ en de definities van $T(R)$ en $L(g)$ is er een $g \in R$ waarvoor dit niet het geval is. □

7.1.9. Stelling: De lineaire functionalen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ die T bepalen,

$$Tf = \sum_{j=1}^{n} L_j(f) f_j ,$$

zijn lineair onafhankelijk.

Bewijs: $\forall_{j=1,\ldots,n} \exists_{f \in R}\ Tf = f_j$, kies dus elementen $\tilde{f}_j$ $(j = 1,\ldots,n)$ met $T\tilde{f}_j = f_j$. Uit

$$f_j = T\tilde{f}_j = \sum_{k=1}^{n} L_k(\tilde{f}_j) f_k \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

volgt

$$\forall_{k=1,\ldots,n} \forall_{j=1,\ldots,n}\ L_k(\tilde{f}_j) = \delta_{kj} .$$

Uit

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k = \mathcal{O}$$

volgt

$$\forall_{j=1,\ldots,n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k(\tilde{f}_j) = 0$$

of $\forall_{j=1,\ldots,n}\ \alpha_j = 0$; met andere woorden: het stelsel $\{L_1, \ldots, L_n\}$ van lineaire functionalen is lineair onafhankelijk. □

7.1.10. Stelling: Als R genormeerd is en $T \in BLO(R)$, dan zijn de lineaire functionalen $L_1, L_2, \ldots, L_n$, waarvoor

$$Tf = \sum_{j=1}^{n} L_j(f) f_j ,$$

begrensd.

Bewijs: Neem in $T(R)$, naast de in R gegeven norm $\| \ \|$,

$$\|Tf\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |L_j(f)| \ ; \quad \text{dit is een norm (vraagstuk}$$

en $\| \ \|$ en $\| \ \|_1$ zijn, wegens dim $T(R) < \infty$, in $T(R)$ equivalent, zodat

$$\exists_{M>0} \ \forall_{f \in R} \ \|Tf\|_1 \leqslant M\|Tf\| \ .$$

Hieruit volgt

$$\forall_{j=1,\ldots,n} \ |L_j(f)| \leqslant \|Tf\|_1 \leqslant M\|Tf\| \leqslant M\|T\|\,\|f\|$$

en

$$\forall_{j=1,\ldots,n} \ \|L_j\| \leqslant M\|T\| \ .$$

□

7.2. Bijna-eindig dimensionale operatoren

Zij R een genormeerde lineaire ruimte, $T \in LO(R)$.

7.2.1. Definitie: T heet bijna-eindig dimensionaal indien

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{S \in BLO(R)} \ [\dim S(R) < \infty \wedge \|S - T\| < \varepsilon] \ .$$

7.2.2. Opmerking: De eis dat $S \in BLO(R)$ (in plaats van de zwakkere eis $S \in LO(R)$) is wezenlijk voor de conclusie: Als T bijna-eindig dimensionaal is, is ze begrensd; vergelijk § 4.4.11.

7.2.3. Voorbeeld: In § 5.3.3 van Lineaire Analyse I is de integraaloperator T_K van $C([0,1])$, gedefinieerd door

$$(T_K f)(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

met K continu, opgevat als limiet van een rij operatoren T_n van eindige rang, die verkregen worden door het interval $[0,1]$ in n gelijke delen te verdelen en K met die deelintervallen stuksgewijs lineair te approximeren. (Een dergelijk proces heet discretisatie.) T_K is dus bijna-eindig dimensionaal.

7.2.4. Opmerking: Men kan nu § 4.4.7 en § 4.4.11 combineren tot de volgende stelling:

Als R een B-ruimte is, en T een bijna-eindig dimensionale operator van R, dan is T compact.

Het omgekeerde van deze stelling is alleen bewezen onder de veel sterkere veronderstelling dat R een SH-ruimte is; het bewijs is dan weer een ander voorbeeld van discretisatie, nu met behulp van een totaal orthonormaalsysteem $\{q_n\}_{n \in Nt}$; vergelijk [RN], pp. 200 - 202.

7.2.5. Zij R in het vervolg van deze § een B-ruimte, $T \in LO(R)$.

Als $T_0 \in BLO(R)$ en T_0 is van eindige rang, geldt, met $P = T - T_0$, voor $|\mu| < \|P\|^{-1}$,

$$I - \mu T = I - \mu T_0 - \mu P = (I - \mu P)(I - \mu(I - \mu P)^{-1} T_0)$$

want $(I - \mu P)^{-1}$ bestaat volgens 6.1.3; zij nu

$$Z := (I - \mu P)^{-1} T_0 .$$

7.2.6. Stelling: $Z \in BLO(R)$ en Z is van eindige rang.

Bewijs: $(I - \mu P)^{-1}$ is begrensd volgens 6.1.3.ii; aangezien $T_0 \in BLO(R)$ is ook $Z \in BLO(R)$.

Omdat $I - \mu P$ een bijectie is, is

$$\dim(I - \mu P)^{-1} T_0(R) = \dim T_0(R) . \qquad \square$$

7.2.7. Zij, als in 7.2.5, bij gegeven T en T_0, met $P = T - T_0$ en $|\mu| < \|P\|^{-1}$, $Z = (I - \mu P)^{-1} T_0$. Bij T_0 kunnen we een basis $\{f_1, \ldots, f_n\}$ vinden voor $T_0(R)$; evenals in § 7.1 zijn er, volgens 7.1.10 begrensde, lineaire functionalen $L_1, \ldots, L_n$ waarvoor

$$\forall_{f \in R} \; T_0 f = \sum_{j=1}^{n} L_j(f) f_j ,$$

zodat

$$Zf = \sum_{j=1}^{n} L_j(f)(I - \mu P)^{-1} f_j \ .$$

Zij

$$f_j^* := (I - \mu P)^{-1} f_j \qquad (j = 1,\dots,n) \ ,$$

dan is $\{f_1^*,\dots,f_n^*\}$ weer een onafhankelijk stelsel in R en

$$Zf = \sum_{j=1}^{n} L_j(f) f_j^* \ .$$

Zij nu, analoog aan § 7.1, de matrix N_μ gedefinieerd door

$$(N_\mu)_{ij} := \delta_{ij} - \mu L_i(f_j^*) \ .$$

Volgens 7.1.4 heeft voor det $(N_\mu) \neq 0$ de operator $I - \mu Z$ een inverse; in dat geval heeft dus ook $I - \mu T$ een inverse.

In het algemeen is $\det(N_\mu)$ niet, zoals $\det(M_\mu)$ in 7.1.3, een polynoom in μ; wegens

$$L_i(f_j^*) = L_i((I - \mu P)^{-1} f_j) = L_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k P^k f_j\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k L_i(P^k f_j) \qquad \text{voor } |\mu| < \|P\|^{-1}$$

is $L_i(f_j^*)$ een analytische functie van μ; hieruit volgt dat dan ook $\det(N_\mu)$ een analytische functie van μ is.

Wegens $\det(N_0) = 1$ is $\det(N_\mu)$ niet voor alle μ met $|\mu| < \|P\|^{-1}$ gelijk aan 0, zodat er dan (vergelijk bijvoorbeeld [A], pp. 124 - 127) slechts eindig veel nulpunten zijn.

Indien $\det(N_\mu) = 0$ heeft noch $I - \mu Z$ noch $I - \mu T$ een inverse; voor de vergelijking

$$(I - \mu T)f = g$$

geldt dan weer stelling 7.1.8.

7.2.8. <u>Stelling</u>: Als R een B-ruimte is en T een bijna-eindig dimensionale lineaire operator van R, dan geldt: Er is in Cm een verzameling N_T met de volgende eigenschappen:

i: N_T is discreet, dat wil zeggen: ze heeft geen verdichtingspunten in Cm.

ii: Voor $\mu \notin N_T$ heeft $I - \mu T$ een begrensde tweezijdige inverse, zodat de vergelijking

$$f - \mu Tf = g$$

voor iedere $g \in R$ eenduidig oplosbaar is.

iii: Voor $\mu \in N_T$ is $(I - \mu T)(R) \neq R$ en $(I - \mu T)^{\leftarrow}(\sigma) \neq \{\sigma\}$ zodat de vergelijking

$$f - \mu Tf = g$$

niet voor alle $g \in R$ oplosbaar is, en, als ze oplosbaar is, geen eenduidige oplossing heeft.

<u>Bewijs</u>: Voor $m \in Nt$ zij T_m een operator van eindige rang waarvoor $\|T - T_m\| < m^{-1}$; zij $P_m := T - T_m$ en $Z_m := (I - \mu P_m)^{-1} T_m$ voor $|\mu| < m$, geheel analoog aan § 7.2.7. In het gebied $|\mu| < m$ is volgens § 7.2.7 een eindige deelverzameling, N_m, waar $I - \mu T$ niet regulier is. Zij $N_T = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$. Dan heeft N_T de genoemde eigenschappen. □

7.2.9. Als, met R en T als in 7.2.8, $\mu \in Cm$, dan is er een $S_\mu \in BLO(R)$ met begrensde tweezijdige inverse, en een $Z_\mu \in BLO(R)$ met eindige rang, zó dat

$$I - \mu T = S_\mu (I - \mu Z_\mu) ;$$

verder is dan $(I - \mu Z_\mu)^{\leftarrow}(\sigma) = (I - \mu T)^{\leftarrow}(\sigma)$.

<u>Bewijs</u>: Kies $m \in Nt$ en $m > |\mu|$; bepaal T_m en P_m als in 7.2.8 en neem

$$Z_\mu := (I - \mu P_m)^{-1} T_m , \qquad S_\mu := I - \mu P_m .$$

S_μ en Z_μ voldoen aan de eerste twee voorwaarden op grond van 7.2.5 en 7.2.6; uit

$$I - \mu T = S_\mu (I - \mu Z_\mu)$$

volgt dat

$$(I - \mu Z_\mu)^{\leftarrow}(\sigma) \subset (I - \mu T)^{\leftarrow}(\sigma)$$

terwijl uit

$$(I - \mu Z_\mu) = S_\mu^{-1}(I - \mu T)$$

volgt dat

$$(I - \mu T)^{\leftarrow}(\sigma) \subset (I - \mu Z_\mu)^{\leftarrow}(\sigma) \; .$$

□

7.3. Het alternatief van Fredholm

Zij R een SH-ruimte, T een compacte lineaire operator van R.

7.3.1. Stelling:

i: $R = (I - T)(R) \oplus (I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma)$.

ii: $R = (I - T^*)(R) \oplus (I - T)^{\leftarrow}(\sigma)$.

iii: $0 \leq \dim(I - T)^{\leftarrow}(\sigma) = \dim(I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma) < \infty$.

Het alternatief is: de dimensies van de nulruimten van $I - T$ en $I - T^*$ zijn òf beide 0 òf beide > 0, en dan gelijk en eindig.

Bewijs: T is bijna-eindig dimensionaal (7.2.4) en volgens 7.2.9 zijn er S en $Z \in BLO(R)$ waarvoor S regulier is, Z van eindige rang is en zó dat

$$I - T = S(I - Z) \; .$$

Als de begrensde lineaire functionalen die Z bepalen (7.1.10) worden voortgebracht (2.2.2) door onafhankelijke (7.1.9) elementen $h_1, \ldots, h_n$ van R dan is

$$Zf = \sum_{j=1}^{n} (f, h_j) f_j \; .$$

I, S en S^{-1} hebben een geadjungeerde (4.2.2) en uit

$$I = I^* = (SS^{-1})^* = (S^{-1})^* S^*$$

volgt dat S^* een inverse heeft waarvoor

$$(S^{-1})^* = (S^*)^{-1} .$$

Uit

$$(f,(I-T^*)g) = ((I-T)f,g) = (Sf,g) - (SZf,g) =$$

$$= (Sf,g) - \sum_{j=1}^{n} (f,h_j)(Sf_j,g) =$$

$$= (f,S^*g) - \left(f, \sum_{j=1}^{n} (g,Sf_j)h_j\right)$$

volgt dat

$$(I-T^*)g = S^*g - \sum_{j=1}^{n} (g,Sf_j)h_j = S^*\left(g - \sum_{j=1}^{n} (g,Sf_j)(S^*)^{-1} h_j\right) .$$

Noem terwille van de symmetrie

$$g_j := (S^*)^{-1} h_j \qquad (j = 1,\ldots,n),$$

dan is

$$(I-T^*)g = S^*\left(g - \sum_{j=1}^{n} (g,Sf_j)g_j\right)$$

terwijl

$$(I-T)f = S\left(f - \sum_{j=1}^{n} (f,S^*g_j)f_j\right) .$$

Zij nu R_1 het lineaire opspansel van $\{f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_n\}$, en zij $R_2 := R \ominus R_1$; omdat $\dim R_1 < \infty$ zijn R_1 en R_2 volledig, zodat (3.1.2) $R = R_1 \oplus R_2$ en $R_1 = R \ominus R_2$. Het is niet moeilijk om in te zien dat

$$R_1 \supset (I-T)^{\leftarrow}(\sigma) \quad \text{en} \quad R_1 \supset (I-T^*)^{\leftarrow}(\sigma) , \tag{1}$$

want voor een $f \in R$ met $(I-T)f = \sigma$ geldt volgens het voorgaande

$$f = \sum_{j=1}^{n} (f,S^*g_j)f_j \in R_1 ;$$

evenzo geldt voor een $f \in R$ met $(I-T^*)f = \sigma$: $f = \sum_{j=1}^{n} (f,Sf_j)g_j \in R_1$.

Vervolgens merken we op dat

$$R_2 \subset (I-T)(R) \quad \text{en} \quad R_2 \subset (I-T^*)(R) ; \tag{2}$$

dit volgt, met $\varphi = Sf$, uit

$$(I-T)f = \varphi - \sum_{j=1}^{n} (S^{-1}\varphi, S^*g_j)Sf_j = \varphi - \sum_{j=1}^{n} (\varphi, g_j)Sf_j \ ;$$

daar voor alle $\varphi \in R_2 = R \ominus R_1$ geldt

$$\forall_{j=1,\ldots,n} \ (\varphi, g_j) = 0 \ ,$$

en omdat S regulier is, is

$$\varphi \in (I-T)(R) \ ;$$

de overeenkomstige uitspraak voor $(I-T^*)(R)$ bewijst men analoog.

Uit de equivalentie van de volgende beweringen

$$(I-T^*)\varphi = \sigma \ ,$$

$$\forall_{f \in R} \ (f, (I-T^*)\varphi) = 0 \ , \qquad \text{(zie 4.2.1)}$$

$$\forall_{f \in R} \ ((I-T)f, \varphi) = 0$$

en

$$\varphi \perp (I-T)(R)$$

volgt dat

$$(I-T^*)^{\leftarrow}(\sigma) = R \ominus (I-T)(R) \ . \tag{3}$$

We kunnen (hoewel $(I-T^*)^{\leftarrow}(\sigma)$ volledig is) niet 3.1.2 toepassen om te concluderen

$$R = (I-T)(R) \oplus (I-T^*)^{\leftarrow}(\sigma) \ . \tag{4}$$

Maar voor

$$R_3 := R_1 \cap (I-T)(R)$$

geldt triviaal dat

$$R_3 = (I-T)(R) \ominus R_2$$

en omdat R_2 volledig is, is

$$(I - T)(R) = R_2 \oplus R_3 \,.$$

Vervolgens is op grond van (3)

$$(I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma) = R \ominus (R_2 \oplus R_3) = (R \ominus R_2) \ominus R_3 = R_1 \ominus R_3$$

zodat, omdat R_3 volledig is,

$$R_1 = R_3 \oplus (I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma)$$

en

$$R = R_2 \oplus [R_3 \oplus (I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma)] = (R_2 \oplus R_3) \oplus (I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma) =$$

$$= (I - T)(R) \oplus (I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma) \,.$$

Hiermee is het eerste deel van de stelling bewezen. Het tweede deel bewijst men geheel analoog.

Tenslotte bewijzen we nog het derde deel van de stelling. Voor de oplossingen van de vergelijkingen

$$(I - T)f = \sigma \quad \text{en} \quad (I - T^*)g = \sigma$$

geldt

$$f = \sum_{j=1}^{n} (f, S^* g_j) f_j \quad \text{en} \quad g = \sum_{j=1}^{n} (g, S f_j) g_j \,.$$

Zij $\alpha_k := (f, S^* g_k)$ en $\beta_k := (g, S f_k)$, $k = 1, \ldots, n$, dan is

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (f_j, S^* g_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (S f_j, g_k) \,, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

en

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_j (g_j, S f_k) \,, \qquad (k = 1, \ldots, n) \,.$$

Met $\mu_{jk} := (S f_j, g_k)$ en $M := (\mu_{jk})$ als matrix voldoen de vectoren $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ in R^n aan de vergelijkingen

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{of} \quad a(M - I) = \sigma$$

en

$$(\beta_1, \ldots, \beta_n) M^* = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad \text{of} \quad b(M - I)^* = \sigma \,.$$

Omdat $M - I$ en $(M - I)^*$ dezelfde rang hebben, hebben de oplossingsruimten van deze vergelijkingen dezelfde dimensie; hieruit volgt dat $(I - T)^{\leftarrow}(\sigma)$ en $(I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma)$ dezelfde (eindige) dimensie hebben. □

7.3.2. Opmerking: Men kan de in 7.3.1 uitgesproken stelling generaliseren voor B-ruimten; zie [KA], pp. 396 - 404 of [IS], pp. 149 - 160.

7.3.3. Opmerking: Als R een SH-ruimte en T een compacte lineaire operator van R is, dan wil 7.3.1 voor de vergelijkingen

$$f - Tf = g \qquad f - T^*f = h$$

zeggen dat ze

òf beide eenduidig oplosbaar zijn voor alle $g \in R$ en $h \in R$

òf beide niet voor alle $g \in R$ en $h \in R$ oplosbaar zijn; in dit geval bevatten de oplossingen voor die $g \in R$ en $h \in R$ waarvoor ze bestaan hetzelfde (eindige) aantal parameters.

7.3.4. Stelling: Als R een SH-ruimte is, $T \in BLO(R)$ en T compact, dan is $\dim(I - T)^{\leftarrow}(\sigma) < \infty$.

(Deze bewering is een onderdeel van 7.3.1; hier volgt een daarvan onafhankelijk bewijs.)

Bewijs: Als $\dim(I - T)^{\leftarrow}(\sigma) = \infty$, dan is er in $(I - T)^{\leftarrow}(\sigma)$ een aftelbaar oneindig orthonormaalsysteem $\{f_j\}_{j \in Nt}$; uit

$$\forall_{j \in Nt}\ (I - T)f_j = \sigma$$

volgt

$$\forall_{j \in Nt}\ [Tf_j = f_j \wedge \|Tf_j\| = 1]$$

zodat tengevolge van de compactheid van T er een deelrij $\{f'_j\}_{j \in Nt}$ bestaat zodanig dat $\{Tf'_j\}_{j \in Nt}$ convergeert; maar dan convergeert ook het orthonormaalsysteem $\{f'_j\}_{j \in Nt}$ hetgeen onmogelijk is. □

7.4. <u>Determinantentheorie van Fredholm</u>

[L], p. 23 e.v., [WW], pp. 211 - 218.

7.5. <u>Randwaardeproblemen en integraalvergelijkingen</u>

[CH] , hoofdstuk V, § 14 e.v.

[CL], hoofdstuk I, pp. 82 - 83, 186 - 207

[I], pp. 62 - 75, 116 - 119, 223 - 253

[St], pp. 106 e.v.

8. De lineaire ruimte van begrensde lineaire functionalen van $C([0,1])$

8.1. Inleiding

8.1.1. De ruimte $C := C([0,1])$ van complexwaardige continue functies op het interval $[0,1]$ van $R\ell$ is, met

$$\|f\| := \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

als norm, een B-ruimte (1.7.2 en 1.7.4).

In dit hoofdstuk zal C^*, de ruimte der begrensde lineaire functionalen op C:

$$C^* := BLO(C \to Cm) ,$$

worden bepaald.

Als men $C([0,1])$ opvat als lineaire deelruimte van $L^2([0,1])$, de ruimte der kwadratisch Lebesgue-integreerbare functies, met norm

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

dan is voor alle $f \in C$

$$\|f\|_2 \leq \|f\| , \qquad (1.9.3) ,$$

zodat voor een lineaire functionaal L van L^2 geldt

$$\|L\|_2 \geq \frac{|L(f)|}{\|f\|_2} \geq \frac{|L(f)|}{\|f\|} \qquad \text{voor alle } f \in C \setminus \{\sigma\} .$$

Uit deze betrekking volgt dat van een begrensde lineaire functionaal L van L^2 met norm $\|L\|_2$ de restrictie tot C begrensd is bij de supremumnorm, en dat voor die restrictie, $L \mid C$, geldt

$$\|L \mid C\| \leq \|L\|_2 .$$

Als we aannemen dat L^2 een H-ruimte is (zoals reeds in 5.3.10 is opgemerkt, maar niet bewezen) geldt de stelling van Riesz (2.2.2; zie ook vraagstuk 3.2.11):

Bij L is een kwadratisch integreerbare functie $\ell \in L^2$, zó dat

$$\forall_{f \in L^2} \; L(f) = \int_0^1 f(t)\overline{\ell(t)}dt \; .$$

Als M een begrensde lineaire functionaal van L^2 is, die dezelfde restrictie tot C heeft als L, dan geldt voor het bij M behorend element $m \in L^2$:

$$\forall_{f \in C} \; \int_0^1 f(t)\{\overline{\ell(t) - m(t)}\}dt = 0 \; .$$

Volgens een bekende stelling uit de integratietheorie ([R], p. 68) ligt C dicht in L^2 (bij $\| \; \|_2$) zodat er een rij $\{f_n\}_n$ in C is met $\|f_n - \ell - m\|_2 \to 0$, $(n \to \infty)$. Uit

$$\forall_{n \in Nt} \; \int_0^1 f_n(t)\{\overline{\ell(t) - m(t)}\}dt = 0$$

volgt nu wegens de continuïteit van het inproduct in L^2

$$\int_0^1 |\ell(t) - m(t)|^2 dt = 0 \; .$$

In een voor L^2 nader te specificeren betekenis geldt dan

$$"\ell = m" \quad \text{en} \quad L = M \; .$$

Met andere woorden: Er zijn tenminste zoveel begrensde lineaire functionalen van C als van L^2: de afbeelding

$$\Lambda : L \to L \,|\, C$$

van $(L^2)^*$ in C^* is injectief. Λ is niet surjectief; zo is bijvoorbeeld P, gedefinieerd door

$$P(f) = f(0)$$

een element van C^*, maar als lineaire functionaal van $C([0,1])$ bij $\| \; \|_2$ niet begrensd, en zeker geen restrictie van een element van $(L^2)^*$.

C^* omvat als echte deelverzameling $(L^2)^*$; daar kwadratisch integreerbare functies integreerbaar zijn, kan men met $\ell \in L^2$ schrijven

$$\lambda(x) := \int_0^x \ell(t)dt \text{ ,}$$

en dan is

$$L(f) = \int_0^1 f(t)d\lambda(t) \text{ ;}$$

de door $(L^2)^*$ in C geïnduceerde lineaire functionalen zijn te schrijven als Stieltjesintegralen.

8.1.2. Als $\{f_j\}_{j\in Nt}$ een rij is in C, en als

$$\exists_{M>0}\ \forall_{x\in[0,1]}\ \sum_{j=1}^{\infty}|f_j(x)| < M$$

(zodat

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$$

voor alle $x \in [0,1]$ is gedefinieerd) noemen we de functie f <u>quasi-continu</u> op $[0,1]$ en de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ <u>q-convergent</u>; de rij van partiële sommen $\sum_{j=1}^{n} f_j(x)$ $(n \in Nt)$, noemen we eveneens q-convergent; de verzameling van functies die op $[0,1]$ gedefinieerd en quasicontinu zijn, geven we aan met de letter $K^{\sim}$; over een quasicontinue functie spreken we ook als "de som van een q-convergente reeks" of "de limiet van een q-convergente rij" van continue functies.

<u>Opmerkingen</u>:

i: $K^{\sim}$ is een lineaire deelruimte van $B([0,1])$; dit volgt direct uit de definities.

$K^{\sim}$ is niet hetzelfde als $B([0,1])$: aangezien voor een $f \in K^{\sim}$ de verzameling

$$\{x \mid f \text{ is in } x \text{ niet continu}\}$$

een verzameling van de eerste categorie is, en $[0,1]$ een verzameling van de tweede categorie is ([G], pp. 53,54,110), is de functie g, gedefinieerd door

$$\left.\begin{array}{l} g(x) := 1 \quad \text{als} \quad x \in [0,1] \cap Rt \\ g(x) := 0 \quad \text{als} \quad x \in [0,1] \setminus Rt \end{array}\right\}$$

(functie van Dirichlet) een element van $B([0,1]) \setminus K^{\smile}$.

ii: C is een lineaire deelruimte van $K^{\smile}$: als $f \in C$ is f limiet van de q-convergente rij $f,f,f,f,\ldots$.

C is niet hetzelfde als $K^{\smile}$: een functie die op $[0,1]$ eindig veel discontinuïteiten van de eerste soort heeft, behoort tot $K^{\smile} \setminus C$.

iii: Als de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ q-convergent is, is ze absoluut convergent; maar niet omgekeerd: neem $f_j(x) := x^j(1-x)^{\frac{1}{2}}$.

iv: $\| \ \|_\infty$ is een norm in $K^{\smile}$.

8.1.3. <u>Definities</u>: Zij F een willekeurige functieruimte, en zij $L \in LO(F \to Cm)$.

i: L heet <u>reëel</u> indien

$$\forall_{f \in F} \, [\operatorname{Im} f = \sigma \Rightarrow L(f) \in R\ell] \, .$$

ii: L heet <u>positief</u> (en we schrijven $L \geqslant \sigma$) indien

$$\forall_{f \in F} \, [f \geqslant \sigma \Rightarrow L(f) \geqslant 0] \, .$$

8.1.4. <u>Stelling</u>: Als $L \in LO(C \to Cm)$, dan zijn er $L_1, L_2 \in LO(C \to Cm)$, L_1 en L_2 reëel, en zó dat $L = L_1 + iL_2$.

<u>Bewijs</u>: Definieer $\bar{L} \in LO(C \to Cm)$ door

$$\bar{L}(f) := \overline{L(\bar{f})} \qquad (f \in C)$$

waarin $\bar{f}$ de functie is die uit f wordt afgeleid door

$$\bar{f}(x) := \overline{f(x)} \qquad (x \in [0,1]) \, .$$

Zij nu $L_1 := \frac{L+\bar{L}}{2}$, $L_2 := \frac{L-\bar{L}}{2i}$, dan is voor een f met $\operatorname{Im} f = \sigma$, zodat $\bar{f} = f$:

$$\operatorname{Im}(L_1(f)) = \operatorname{Im} \frac{L(f)+\bar{L}(f)}{2} = \operatorname{Im} \frac{L(f)+\overline{L(f)}}{2} = 0 \, ,$$

$$\mathrm{Im}(L_2(f)) = \mathrm{Im}\,\frac{L(f) - \bar{L}(f)}{2i} = \mathrm{Im}\,\frac{L(f) - \overline{L(f)}}{2i} = 0\ ,$$

en voor iedere $f \in C$:

$$L_1(f) + iL_2(f) = L(f)\ . \qquad \square$$

8.1.5. Stelling: Als $L \in LO(C \to Cm\ )$ en $L \geq \sigma$, dan is L reëel en begrensd.

Bewijs: Als $\mathrm{Im}\ f = \sigma$ is $f = f^+ + f^-$, waarin $f^+ := f \vee \sigma$, $f^- := f \wedge \sigma$, zodat $f^+ \geq \sigma$ en $-f^- \geq \sigma$, en hieruit volgt dat

$$L(f) = L(f^+) - L(-f^-) \in R\ell\ .$$

Als f reëel is, is

$$-\|f\|_\infty \leq f(t) \leq \|f\|_\infty \qquad \text{voor alle } t \in [0,1]\ ,$$

zodat

$$L(f + \|f\|_\infty) \geq 0 \quad \text{en} \quad L(\|f\|_\infty - f) \geq 0$$

waaruit weer volgt

$$-\|f\|_\infty\, L(1) \leq L(f) \leq \|f\|_\infty\, L(1)$$

zodat voor $f \neq \sigma$

$$\frac{|L(f)|}{\|f\|_\infty} \leq L(1)\ ;$$

en als $f = g + ih$ (met g en h reëel), is

$$|L(f)|^2 = |L(g) + iL(h)|^2 = |L(g)|^2 + |L(h)|^2 \leq L(1)^2\{\|g\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^2\}$$

terwijl uit

$$|f(t)|^2 = |g(t)|^2 + |h(t)|^2$$

volgt dat

$$\|g\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^2 \leq 2\|f\|_\infty^2$$

zodat voor $f \neq \sigma$

$$\frac{|L(f)|}{\|f\|_\infty} \leq L(1)\sqrt{2}\ . \qquad \square$$

8.2. De stelling van F. Riesz

8.2.1. Stelling: Als $\{f_j\}_{j\in \mathrm{Nt}}$ een rij in C is, en als $L \in C^*$, dan geldt:

$$\forall_{n\in \mathrm{Nt}} \quad \sum_{j=1}^{n} |L(f_j)| \leqslant \|L\| \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |f_j(x)| \;\Big|\; x\in[0,1]\right\} .$$

Bewijs: Zij $\varepsilon_j := \operatorname{sgn} L(f_j)$, zodat $\varepsilon_j L(f_j) = |L(f_j)|$ en $|\varepsilon_j| = 1$ $(j \in \mathrm{Nt})$, dan is

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |L(f_j)| = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j L(f_j) = L\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f_j\right) =$$

$$= \left|L\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f_j\right)\right| \leqslant \|L\| \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f_j(x)\right| \;\Big|\; x \in [0,1]\right\}$$

$$\leqslant \|L\| \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |f_j(x)| \;\Big|\; x\in[0,1]\right\} .$$

□

8.2.2. Stelling Zij $L \in C^*$; dan bestaat er een $\tilde{L} \in K^{\sim *}$ zó dat $\tilde{L}| C = L$ en $\|\tilde{L}\| = \|L\|$.

Bewijs: Als $f \in K^{\sim}$ is er een rij $\{f_j\}_{j\in \mathrm{Nt}}$ in C zó dat

$$\exists_{M>0} \; \forall_{x\in[0,1]} \; \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| < M \quad \text{en} \quad \forall_{x\in[0,1]} \; \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) = f(x) .$$

Voor die rij volgt uit de vorige stelling dat

$$\forall_{n\in \mathrm{Nt}} \quad \sum_{j=1}^{n} |L(f_j)| \leqslant \|L\| M ,$$

zodat $\sum_{j=1}^{\infty} |L(f_j)|$ convergeert; het ligt voor de hand om te definiëren

$$\tilde{L}(f) := \sum_{j=1}^{\infty} L(f_j)$$

(i) Daartoe moeten we eerst verifiëren of deze definitie een afbeelding $\tilde{L} : K^{\sim} \to \mathrm{Cm}$ definieert; dat wil zeggen: indien f ook geschreven kan worden als

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$$

met behulp van een q-convergente reeks geldt dan

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} L(g_j) \quad ?$$

Vervolgens dient men van de zo gedefinieerde $\tilde{L}$ te bewijzen

(ii) $\tilde{L}$ is lineair en $\tilde{L} \mid C = L$.

(iii) $\tilde{L}$ is begrensd, met norm $\|L\|$.

i: De bewering is

$$\left[\forall_{x \in [0,1]} \left[\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \,\&\, \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| < M_1 \,\&\, \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)| < M_2\right]\right] \Rightarrow \left[\sum_{j=1}^{\infty} L(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} L(g_j)\right].$$

Wegens 8.1.4 is het geen beperking te onderstellen dat L reëel is; omdat L lineair is, is het evenmin een beperking te onderstellen dat f_j en g_j $(j \in Nt)$ reëel zijn.

ia: We veronderstellen voorlopig bovendien dat

$$\forall_{j \in Nt} \, [f_j \geqslant 2^{-j} \,\&\, g_j \geqslant 2^{-j}]$$

zodat voor de partiële sommen

$$F_n(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x), \quad G_n(x) := \sum_{j=1}^{n} g_j(x), \qquad (n \in Nt)$$

geldt

$$\forall_{n \in Nt} \, [F_n \leqslant M_1 \,\&\, G_n \leqslant M_2],$$

$$\forall_{x \in [0,1]} \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \lim_{n \to \infty} G_n(x) = f(x),$$

$$F_1 = f_1 \geqslant \tfrac{1}{2}, \quad G_1 = g_1 \geqslant \tfrac{1}{2}$$

en

$$\forall_{n \in Nt} [F_{n+1} \geq F_n + 2^{-n-1} \ \& \ G_{n+1} \geq G_n + 2^{-n-1}] .$$

We zullen aantonen dat nu geldt

$$\lim_{n\to\infty} L(F_n) = \lim_{n\to\infty} L(G_n) .$$

Zij $m \in Nt$; beschouw dan G_m. Omdat

$$\forall_{x \in [0,1]} \ G_m(x) < f(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

is

$$\forall_{a \in [0,1]} \ \exists_{n(a) \in Nt} \ F_{n(a)}(a) > G_m(a)$$

en op grond van de continuïteit van $F_{n(a)}$ en G_m geldt dan ook

$$\forall_{a \in [0,1]} \ \exists_{n(a) \in Nt} \ \exists_{U(a) \in \mathcal{N}(a)} \ \forall_{x \in U(a)} \ F_{n(a)}(x) > G_m(x) .$$

Nu is $\{U(a)\}_{a \in [0,1]}$ een overdekking van $[0,1]$ die een eindige overdekking $\{U(a_j)\}_{j=1,\ldots,N(m)}$ bevat, en voor

$$n(m) := \max\{n(a_j) \mid j = 1,\ldots,N(m)\}$$

geldt

$$\forall_{x \in [0,1]} \ F_{n(m)}(x) > G_m(x)$$

zodat we hebben bewezen

$$\forall_{m \in Nt} \ \exists_{n \in Nt} \ F_n > G_m .$$

Op dezelfde manier kan bewezen worden

$$\forall_{n \in Nt} \ \exists_{m \in Nt} \ G_m > F_n .$$

Zij $m_1 = 1$, n_1 zo dat $F_{n_1} > G_1$, m_2 zo dat $G_{m_2} > F_{n_1}$, n_2 zo dat $F_{n_2} > G_{m_2}$, enzovoorts. Dan zijn de rijen $\{F_{n_j}\}_{j \in Nt}$ en $\{G_{n_j}\}_{j \in Nt}$ deelrijen van $\{F_j\}_{j \in Nt}$ en $\{G_j\}_{j \in Nt}$, dus puntsgewijs convergent met limiet f. Volgens 8.2.1 geldt voor de rij $\{F_{n_j} - G_{m_j}\}_{j \in Nt}$

$$\forall_{\nu \in \mathrm{Nt}} \quad \sum_{j=1}^{\nu} |L(F_{n_j} - G_{m_j})| \leqslant \|L\| \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\nu} |F_{n_j}(x) - G_{m_j}(x)| \;\middle|\; x \in [0,1] \right\}$$

terwijl

$$|F_{n_j}(x) - G_{m_j}(x)| = F_{n_j}(x) - G_{m_j}(x) < F_{n_j}(x) - F_{n_{j-1}}(x) , \qquad (j \geqslant 2)$$

zodat

$$\sum_{j=1}^{\nu} |F_{n_j}(x) - G_{m_j}(x)| < F_{n_\nu}(x) < M_1 .$$

De reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \left\{F_{n_j}(x) - G_{m_j}(x)\right\}$ is q-convergent en dientengevolge is

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(F_{n_j} - G_{m_j}) < \infty , \qquad \lim_{j\to\infty} L(F_{n_j} - G_{m_j}) = 0$$

en

$$\lim_{j\to\infty} L(F_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} L(G_{m_j}) .$$

En hieruit volgt weer

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(f_j) = \lim_{n\to\infty} L(F_n) = \lim_{j\to\infty} L(F_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} L(G_{m_j}) = \lim_{m\to\infty} L(G_m) = \sum_{j=1}^{\infty} L(g_j) .$$

ib: We veronderstellen nu dat

$$\forall_{j \in \mathrm{Nt}} \, [f_j \geqslant \sigma \;\&\; g_j \geqslant \sigma] .$$

Zij $h_j := f_j + 2^{-j}$, $k_j := g_j + 2^{-j}$ $(j \in \mathrm{Nt})$, dan voldoen h_j en k_j $(j \in \mathrm{Nt})$ aan de onderstellingen die onder i. en ia. zijn genoemd, met vervanging van M_1 en M_2 door $M_1 + 1$ en $M_2 + 1$. Dan is

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(h_j) = \sum_{j=1}^{\infty} L(k_j)$$

en hieruit volgt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(f_j) + L(1) = \sum_{j=1}^{\infty} L(g_j) + L(1)$$

en

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} L(g_j) .$$

ic: Voor willekeurige f_j en g_j zij

$$h_j := |f_j| + |g_j| - g_j , \quad k_j := |f_j| + |g_j| - f_j , \qquad (j \in Nt)$$

zodat

$$\forall_{j \in Nt} [h_j \geq \sigma \; \& \; k_j \geq \sigma] ,$$

terwijl

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j(x) < M_1 + M_2 \quad \text{en} \quad \sum_{j=1}^{\infty} k_j(x) < M_1 + M_2$$

zodat $\sum_{j=1}^{\infty} h_j(x)$ en $\sum_{j=1}^{\infty} k_j(x)$ q-convergent zijn met dezelfde somfunctie $\sum_{j=1}^{\infty}\{|f_j(x)| + |g_j(x)|\} - f(x)$.
Op grond van het voorgaande is nu

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(h_j) = \sum_{j=1}^{\infty} L(k_j)$$

en hieruit volgt onmiddellijk

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} L(g_j) .$$

ii. Als $f \in K^{\sim}$ en $g \in K^{\sim}$ met

$$\tilde{L}(f) = \sum_{j=1}^{\infty} L(f_j) \quad \text{en} \quad \tilde{L}(g) = \sum_{j=1}^{\infty} L(g_j)$$

is $\sum_{j=1}^{\infty} \{\alpha f_j(x) + \beta g_j(x)\}$ voor alle $\alpha \in Cm$ en alle $\beta \in Cm$ q-convergent met som $\alpha f + \beta g$. Dus

$$\tilde{L}(\alpha f + \beta g) = \sum_{j=1}^{\infty} L(\alpha f_j + \beta g_j) =$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{\infty} L(f_j) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} L(g_j) = \alpha\tilde{L}(f) + \beta\tilde{L}(g) .$$

Als $f \in C$ is de reeks $f + \sigma + \sigma + \sigma + \ldots$ q-convergent met som f; dus

$$\tilde{L}(f) = L(f) + L(\sigma) + L(\sigma) + L(\sigma) + \ldots = L(f) .$$

Conclusie: $\tilde{L}$ is lineair, en $\tilde{L} \mid C = L$.

iii. Omdat

$$\left\{ \frac{|\tilde{L}(f)|}{\|f\|} \;\middle|\; f \in K \;\wedge f \neq \sigma \right\} \supset \left\{ \frac{|L(f)|}{\|f\|} \;\middle|\; f \in C \wedge f \neq \sigma \right\}$$

geldt, indien $\tilde{L}$ begrensd is, zeker

$$\|\tilde{L}\| \geq \|L\| .$$

Dat $\tilde{L}$ begrensd is bewijzen we als volgt:

Zij $f \in K^{\sim}$ en $\|f\| = 1$. Definieer $\omega : R\ell \to [-1,1]$ door

$$\left.\begin{array}{ll} \omega(x) := x & \text{als } |x| \leq 1 \\ \omega(x) := \mathrm{sgn}(x) & \text{als } |x| > 1 \end{array}\right\}$$

Als $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ q-convergent is met som f en partiële sommen F_n, zodat

$$\forall_{x \in [0,1]} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = f(x) ,$$

dan is, omdat ω continu is,

$$\forall_{n \in Nt} \; \omega \circ F_n \in C$$

en wegens $\|f\| = 1$ is

$$\forall_{x \in [0,1]} \lim_{n\to\infty} (\omega \circ F_n)(x) = f(x) ;$$

voor $n > 1$ is

$$|(\omega \circ F_{n+1})(x) - (\omega \circ F_n)(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$$

zodat de reeks

$$\sum_{j=1}^{\infty} \{(\omega \circ F_{n+1})(x) - (\omega \circ F_n)(x)\}$$

weer q-convergent is. Uit

$$f(x) = (\omega \circ F_1)(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \{(\omega \circ F_{n+1})(x) - (\omega \circ F_n)(x)\}$$

volgt nu

$$\tilde{L}(f) = L(\omega \circ F_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \{L(\omega \circ F_{n+1} - \omega \circ F_n)\} = \lim_{n\to\infty} L(\omega \circ F_n)$$

en

$$|\tilde{L}(f)| \leqslant \|L\| \sup\{\|\omega \circ F_n\| \mid n \in \mathbb{N}t\} \leqslant \|L\| = \|L\|\|f\|$$

$\therefore$ $\tilde{L}$ is begrensd en $\|\tilde{L}\| \leqslant \|L\|$. □

8.2.3. Stelling: Zij W een interval in $[0,1]$, open, gesloten of half-open. Dan geldt voor de karakteristieke functie χ_W van W: $\chi_W \in K^{\smile}$.

Bewijs: We beschouwen het geval $W = (\alpha,\beta]$ met $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$; de andere gevallen gaan op analoge wijze. Definieer voor $n \in \mathbb{N}t$

$$F_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ 2n(\beta-\alpha)^{-1}(x-\alpha) & \text{als } \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + (2n)^{-1}(\beta-\alpha) \\ 1 & \text{als } \alpha + 2n(\beta-\alpha)^{-1} \leqslant x \leqslant \beta \\ -2n(1-\beta)^{-1}(x-\beta) & \text{als } \beta \leqslant x \leqslant \beta + (2n)^{-1}(1-\beta) \\ 0 & \text{als } \beta + (2n)^{-1}(1-\beta) \leqslant x \leqslant 1\,. \end{cases}$$

F_n is continu op $[0,1]$; voor $x \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}$ is $F_n(x)$ monotoon niet-dalend, voor $x \geqslant \frac{\alpha+\beta}{2}$ is $F_n(x)$ monotoon niet-stijgend, in alle gevallen met limiet $\chi_W(x)$.

Als $f_1 := F_1$ en $\forall_{n>1}\ f_n := F_n - F_{n-1}$, dan geldt

$$\forall_{n\geqslant 2}\forall_{x\in[0,1]}\ [x \leqslant \tfrac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow f_n(x) \geqslant 0 \ \&\ x \geqslant \tfrac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow f_n(x) \leqslant 0]\,.$$

Voor $x \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}$ is dan voor alle $n \in \mathbb{N}t$

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(x)| = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \leq \chi_W(x) \leq 1$$

en voor elke $x \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$ is

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(x)| = F_1(x) - \sum_{j=2}^{n} f_j(x) = F_1(x) - F_n(x) + F_2(x) \leq 2$$

zodat $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ q-convergent is. Omdat nu $\chi_W(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ geldt $\chi_W \in K^{\sim}$. □

8.2.4. Als $W_1, \ldots, W_n$ intervallen zijn in $R\ell$, en als $\{W_j\}_{j=1,\ldots,n}$ een partitie is van $R\ell$, dan noemt men iedere lineaire combinatie van $\chi_{W_1}, \ldots, \chi_{W_n}$ een <u>trapfunctie</u>.

De restricties van trapfuncties tot $[0,1]$ zijn elementen van $K^{\sim}$ (8.1.2i en 8.2.3).

Voor iedere $\mu \in R\ell$ zij $e_\mu := \chi_{(-\infty,\mu]}$. In het vervolg verstaan we onder $L(e_\mu)$ de waarde die L aanneemt op de restrictie van e_μ tot $[0,1]$:

$$L(e_\mu) := \tilde{L}(e_\mu \mid [0,1]) .$$

We beschouwen de functie

$$g : R\ell \to Cm$$

gedefinieerd door

$$\forall_{\mu \in R\ell} \quad g(\mu) := L(e_\mu) .$$

8.2.5. <u>Stelling</u>: g is van begrensde variatie op $R\ell$.

<u>Bewijs</u>: Voor $\mu < 0$ is $e_\mu \mid [0,1] = \sigma$, zodat dan $L(e_\mu) = 0$ en $g(\mu) = 0$; voor $\mu \geq 1$ is $e_\mu \mid [0,1] = 1$ zodat dan $g(\mu) = L(1)$.

Zij $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n-1} < \mu_n$; we beschouwen $\sum_{j=1}^{n} |g(\mu_j) - g(\mu_{j-1})|$.

Het is geen beperking der algemeenheid te veronderstellen dat $\mu_0 \leq 0 < \mu_1$ en dat $\mu_n = 1$.

Zij $a_j := \operatorname{sgn}\left(L(e_{\mu_j}) - L(e_{\mu_{j-1}})\right)$, dan is

$$\sum_{j=1}^{n} |g(\mu_j) - g(\mu_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} |L(e_{\mu_j}) - L(e_{\mu_{j-1}})| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(L(e_{\mu_j}) - L(e_{\mu_{j-1}})\right) = L\left(\sum_{j=1}^{n} a_j(e_{\mu_j} - e_{\mu_{j-1}})\right) .$$

Voor de trapfunctie $t := \sum_{j=1}^{n} a_j(e_{\mu_j} - e_{\mu_{j-1}})$ geldt

$$t \in K^{\sim} , \quad \|t\| = 1 \quad \text{en} \quad |L(t)| = L(t) \leqslant \|L\| \|t\| = \|L\| ,$$

zodat

$$\sum_{j=1}^{n} |g(\mu_j) - g(\mu_{j-1})| \leqslant \|L\| . \qquad \square$$

8.2.6. Zij $f \in C$ en h van begrensde variatie op $R\ell$. Zij $\tilde{f} : (-\infty,1] \to Cm$ gedefinieerd door

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{f}(x) := f(0) & \text{als } x < 0 \\ \tilde{f}(x) := f(x) & \text{als } x \geqslant 0 \end{array}\right\} .$$

Dan is $\tilde{f}$ continu op $(-\infty,1]$.

<u>Stelling</u>: $$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{-\delta}^{1} \tilde{f}(x)dh(x) = \int_{0}^{1} f(x)dh(x) + f(0)\{h(0) - h(0-)\} .$$

<u>Bewijs</u>: $$\int_{-\delta}^{1} \tilde{f}(x)dh(x) = \int_{-\delta}^{0} \tilde{f}(x)dh(x) + \int_{0}^{1} f(x)dh(x)$$

(vergelijk [Wi], p. 8) zodat

$$\int_{-\delta}^{1} \tilde{f}(x)dh(x) - \int_{0}^{1} f(x)dh(x) = f(0) \int_{-\delta}^{0} dh(x) = f(0)\{h(0) - h(-0)\} . \qquad \square$$

<u>Notatie</u>: $$\int_{0-}^{1} f(x)dh(x) := \int_{0}^{1} f(x)dh(x) + f(0)\{h(0) - h(0-)\} .$$

8.2.7. Stelling: $\forall_{f\in C}\ L(f) = \int_{0-}^{1} f(x)dg(x)$.

Bewijs: Neem $\alpha < 0$ en een verdeling $\{0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n = 1\}$ van $[0,1]$ met $\forall_{j=1,\ldots,n}\ \mu_j - \mu_{j-1} = \frac{1}{n}$. Zij t de restrictie tot $[0,1]$ van de trapfunctie $f(0)(e_{\mu_1} - e_\alpha) + \sum_{j=2}^{n} f(\mu_{j-1})(e_{\mu_j} - e_{\mu_{j-1}})$, zodat

$$L(t) = f(0)(g(\mu_1) - g(\alpha)) + \sum_{j=2}^{n} f(\mu_{j-1})(g(\mu_j) - g(\mu_{j-1})) =$$

$$= f(0)(g(0) - g(\alpha)) + \sum_{j=1}^{n} f(\mu_{j-1})(g(\mu_j) - g(\mu_{j-1})) .$$

De uitdrukking $S_n(t) := \sum_{j=1}^{n} f(\mu_{j-1})(g(\mu_j) - g(\mu_{j-1}))$ is een tussensom van de Riemann-Stieltjes integraal

$$\int_0^1 f(x)dg(x) .$$

Bij gegeven $\varepsilon > 0$ bepalen we n nu zó, dat zowel

$$|S_n(t) - \int_0^1 f(x)dg(x)| < \varepsilon ,$$

als, hetgeen op grond van de uniforme continuïteit van f op $[0,1]$ mogelijk is

$$\|f - t\| < \varepsilon .$$

Dan is

$$|L(f) - f(0)(g(0) - g(\alpha)) - \int_0^1 f(x)dg(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |L(f) - L(t)| + |S_n(t) - \int_0^1 f(x)dg(x)| < \varepsilon(\|L\| + 1) .$$

Dus

$$L(f) = f(0)(g(0) - g(\alpha)) + \int_0^1 f(x)dg(x) \; .$$

Omdat $\alpha < 0$, is

$$g(\alpha) = 0 = \lim_{x \uparrow 0} g(x) =: g(0-)$$

en

$$L(f) = f(0)(g(0) - g(0-)) + \int_0^1 f(x)dg(x) = \int_{0-}^1 f(x)dg(x) \; .$$

□

8.2.8. Opmerking: Het resultaat van 8.2.7 luidt expliciet

$$L(f) = f(0)g(0) + \int_0^1 f(x)dg(x) \; .$$

Men kan hiervoor weer een RS-integraal schrijven met behulp van een iets gewijzigde functie van begrensde variatie:

Zij $\tilde{g}$ gedefinieerd door

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{g}(0) := 0 \\ &\tilde{g}(x) := g(x) \qquad (x \neq 0) \end{aligned}\right\} ,$$

dan is

$$L(f) = \int_0^1 f(x)d\tilde{g}(x) \; .$$

8.2.9. Stelling: Als g monotoon niet-dalend is, is $L \geq 0$.

Bewijs: Als g monotoon niet-dalend is en $f \geq 0$, is

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) \geq 0$$

voor iedere verdeling $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ van $[0,1]$ en iedere keuze van $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1,\ldots,n)$

$\therefore \qquad L(f) \geq 0 \; .$

□

8.3. Momentenproblemen

8.3.1. Stelling: Zij R een metrische, R' een volledige metrische ruimte, S een deel van R met $\overline{S} = R$, en T' een afbeelding van S in R' waarvoor

$$\exists_{c>0} \forall_{f \in S} \forall_{g \in S} \; d(T'f, T'g) \leq c\,d(f,g) .$$

Dan is er precies één afbeelding T van R in R' zó dat

i: $\quad T' = T \mid S$.

ii: $\quad \forall_{f \in R} \forall_{g \in R} \; d(Tf, Tg) \leq c\,d(f,g)$.

Bewijs: Als $f \in R \setminus S$ en $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ is $\{T'f_n\}_{n \in Nt}$ een fundamentaalrij in R'; definieer dus $Tf := \lim_{n \to \infty} T'f_n$. Deze definitie is onafhankelijk van de keuze van de rij $\{f_n\}_{n \in Nt}$, en de overige beweringen zijn triviaal. □

8.3.2. In het vervolg van deze § 8.3 zij

$$\mathcal{P} := \{p \in C \mid p \text{ is een polynoom}\} ,$$

$$\mathcal{T} := \{t \in C \mid t \text{ is een trigonometrisch polynoom}\} .$$

$\mathcal{P}$ ligt dicht in C, zodat op grond van 8.3.1 iedere $L \in \mathcal{P}^*$ éénduidig voortzetbaar is tot C; als $L \geq \mathcal{O}$ is ook de voortzetting $\geq \mathcal{O}$: als $f \in C$ en $f \geq \sigma$ is voor iedere $\varepsilon > 0$, $f + \varepsilon \geq \varepsilon$; er is een polynoom p_ε zó dat $f \leq p_\varepsilon \leq f + \varepsilon$ en daarvoor is $L(p_\varepsilon) \geq 0$, en hieruit volgt $L(f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} L(p_\varepsilon) \geq 0$.

Volgens 2.1.6 (zie het bewijs daarvan, in het bijzonder betrekking (2) op blz. 24) is $\overline{\mathcal{T}} = C_{\text{mod } 1}$; een $L \in \mathcal{T}^*$ kan dus eenduidig worden voortgezet tot een element van $C^*_{\text{mod } 1}$ (dit slaat allemaal op $\| \, \|_\infty$).

8.3.3. Zij I een interval in $R\ell$ en zij g een monotone functie op I; onder de momenten van g t.o.v. I verstaat men de getallen

$$\mu_j := \int_I x^j \, dg(x) , \qquad j = 0,1,2,\ldots ;$$

met andere woorden: het zijn de waarden die door de bij g behorende lineaire functionaal L_g worden toegekend aan de elementen $x^0, x, x^2, \dots$ van $C(I)$.

Het bij I behorende <u>momentenprobleem</u> luidt: Aan welke voorwaarden moet een gegeven rij

$$\{\mu_j\}_{j=0,1,2,\dots}$$

voldoen opdat er een monotone functie g bestaat zodanig dat

$$\forall_{j=0,1,2,\dots}\ \mu_j = \int_I x^j \, dg(x) \ .$$

Men spreekt van het momentenprobleem van Hausdorff, Stieltjes of Hamburger al naargelang I het interval $[0,1]$, $[0,\infty)$ of $(-\infty,\infty)$ is; (zie [Wi], hoofdstuk III).

Een soortgelijk probleem verkrijgt men door in $C([0,1])$ te beschouwen

$$\mu_j := \int_0^1 e^{2\pi i j x} \, dg(x) \ , \qquad j \in Gh \ ,$$

bij gegeven monotone g; dan luidt het <u>trigonometrisch</u> momentenprobleem: Aan welke voorwaarden moet een rij $\{\mu_j\}_{j \in Gh}$ voldoen, opdat een monotone functie g bestaat waarvoor

$$\forall_{j \in Gh}\ \mu_j = \int_0^1 e^{2\pi i j x} \, dg(x) \ .$$

Hierna volgt een stelling uit de sfeer van het eerstgenoemde momentenprobleem, namelijk stelling 8.3.5, toe te passen in ander verband (hoofdstuk 9); daarna wordt de oplossing van het trigonometrisch momentenprobleem besproken.

8.3.4. Een polynoom p is alleen dan reëel als de coëfficiënten reëel zijn; dit volgt direct uit de definitie van reële functies.

Zij $\mathcal{P}_r$ de lineaire deelruimte van $\mathcal{P}$ die bestaat uit de reële polynomen.

Zij

$$Q := \left\{ p \in \mathcal{P}_r \mid \exists_{n \in Nt} \forall_{j=1,\dots,n} \exists_{q_j \in \mathcal{P}_r} \left[p = \sum_{j=1}^{n} q_j^2 \right] \right\} .$$

Stelling: Als $p \in Q$ en $r \in Q$ dan geldt: $pr \in Q$.

Bewijs: Zij $p = \sum_{j=1}^{n} q_j^2$ en $r = \sum_{k=1}^{m} s_k^2$ dan is

$$pr = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (q_j s_k)^2 . \qquad \square$$

8.3.5. Stelling: Zij $-\infty < m < M < \infty$, zij $p \in \mathcal{P}$ zó dat

$$\forall_{x \in [m,M]} \; p(x) \geq 0 ;$$

dan zijn er polynomen a, b, c en d $\in Q \cup \{\sigma\}$ zó dat

$$(*) \qquad \forall_{x \in R\ell} \; p(x) = a(x) + (M-x)b(x) + (x-m)c(x) + (M-x)(x-m)d(x) .$$

Bewijs: Uit het gegeven over p volgt $p \in \mathcal{P}_r$; eventuele niet-reële nulpunten van p komen dus in paren van geconjugeerden voor. Nulpunten van p die tussen m en M liggen hebben even multipliciteit, omdat p er niet van teken mag verwisselen. Ontbinding van p in factoren geeft drie soorten factoren:

$\prod_k (x-\alpha_k)$ voor de nulpunten α_k van p die $\geq M$ zijn;

$\prod_\ell (x-\beta_\ell)$ voor de nulpunten β_ℓ van p die $\leq m$ zijn;

$\prod_m \{(x-\gamma_m)^2 + \delta_m^2\}$ voor de nulpunten $\gamma_m \pm \delta_m i$ die in paren voorkomen, in het bijzonder die, waarvoor $\delta_m = 0$ en die liggen tussen m en M.

Dus, met een reële constante ε, geldt

$$p(x) = \varepsilon \prod_k (x-\alpha_k) \prod_\ell (x-\beta_\ell) \prod_m \{(x-\gamma_m)^2 + \delta_m^2\} .$$

$(x-\gamma_m)^2 + \delta_m^2$ is een polynoom uit Q, dus, (8.3.4), $\prod_m \{(x-\gamma_m)^2 + \delta_m^2\}$ eveneens.

Aangezien de polynomen van de gedaante (*) een multiplicatief systeem vormen, en zowel

$$\alpha_k - x = (\alpha_k - M) + (M - x)$$

als

$$x - \beta_\ell = (x - m) + (m - \beta_\ell)$$

van de gedaante (*) zijn, blijkt de bewering juist te zijn. □

Een analogon van 8.3.5 voor trigonometrische polynomen is

8.3.6. <u>Stelling</u>: Zij $t(x) := \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k e^{2\pi ikx}$ en zij

$$\forall_{x \in R\ell}\ t(x) \geq 0 ;$$

dan zijn er complexe getallen $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_N$ zó dat

$$\forall_{x \in R\ell}\ t(x) = \left| \sum_{k=0}^{N} \rho_k e^{2\pi ikx} \right|^2 .$$

<u>Bewijs</u>: We veronderstellen dat $\gamma_N \neq 0$. Omdat $\operatorname{Im} t(x) = 0$, is

$$0 = t(x) - \overline{t(x)} = \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k e^{2\pi ikx} - \sum_{k=-N}^{N} \overline{\gamma_k} e^{-2\pi ikx} =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} (\gamma_k - \overline{\gamma_{-k}}) e^{2\pi ikx} ;$$

$$\therefore \qquad \forall_{k=-N,\ldots,N}\ \gamma_k = \overline{\gamma_{-k}} .$$

Op grond hiervan voldoet het polynoom

$$p(z) := \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k z^{N+k} ,$$

dat aan t verwant is door de formule

$$p(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi iNx}\ t(x) ,$$

aan de betrekking

$$p(z) = z^{2N}\ \overline{p(\tfrac{1}{\bar z})} , \qquad z \neq 0 .$$

Voor de nulpunten van p geldt nu

1: 0 is geen nulpunt, want $\gamma_{-N} \neq 0$.

2: Als α een nulpunt is met multipliciteit m dan is

$$p(z) = (z-\alpha)^m \, q(z) \; ,$$

waarin q een polynoom is van de graad 2N - m, en $q(\alpha) \neq 0$; $\bar{p}(\frac{1}{z}) = (\frac{1}{z}-\bar{\alpha})^m \, \bar{q}(\frac{1}{z})$ en bovenstaande identiteit gaat over in

$$p(z) = z^{2N}(\frac{1}{z} - \bar{\alpha})^m \, \bar{q}(\frac{1}{z}) \; , \qquad z \neq 0 \, ,$$

of

$$p(z) = z^{2N-m} \, \bar{q}(\frac{1}{z})(1 - z\bar{\alpha})^m \; .$$

Aangezien $z^{2N-m} \, \bar{q}(\frac{1}{z})$ weer een polynoom van de graad 2N - m is volgt hieruit: $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ is eveneens een nulpunt van p en met een multipliciteit $\geq$ m; op grond van wederkerigheid tussen α en $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ ziet men dat de multipliciteit van $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ precies m is; dus: als α een m-voudig nulpunt is, is ook $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ een m-voudig nulpunt.

Deze redenering levert geen informatie op als $\alpha = \frac{1}{\bar{\alpha}}$, m.a.w. als $|\alpha| = 1$.

Zij $p(\alpha) = 0$ met $\alpha = e^{2\pi i\xi}$; we schrijven weer

$$p(z) = (z-\alpha)^m \, q(z)$$

zodat

$$t(x) = e^{-2\pi iNx}(e^{2\pi ix} - e^{2\pi i\xi})^m \, q(e^{2\pi ix}) =$$

$$= e^{-2\pi iN\xi} \, q(e^{2\pi i\xi})(x-\xi)^m(1 + O(x-\xi)) \; .$$

ξ is derhalve (zie [A], p. 126) een m-voudig nulpunt van de reële functie t; uit $\forall_{x \in R\ell} \; t(x) \geq 0$ volgt nu dat m even is.

Uit het voorgaande volgt dat p geschreven kan worden als

$$p(z) = \beta \prod_{k=1}^{N} (z-\alpha_k)(1-\bar{\alpha}_k \, z) \; ,$$

waarin β een constante is, zodat

$$z^{-N}\, p(z) = \beta \prod_{k=1}^{N} (z-\alpha_k)(\tfrac{1}{z}-\overline{\alpha_k}) \;,$$

$$t(x) = \beta \prod_{k=1}^{N} (e^{2\pi i x}-\alpha_k)(e^{-2\pi i x}-\overline{\alpha_k}) = \beta \Big| \prod_{k=1}^{N} (e^{2\pi i x}-\alpha_k)\Big|^2 \;.$$

Uit $\forall_{x \in R\ell}\; t(x) \geqslant 0$ volgt nu nog dat $\beta \geqslant 0$, zodat, met $\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_N$ gedefinieerd door

$$\sum_{k=0}^{N} \rho_k\, e^{2\pi i k x} = \sqrt{\beta} \prod_{k=1}^{N} (e^{2\pi i x}-\alpha_k) \;,$$

geldt

$$t(x) = \Big| \sum_{k=0}^{N} \rho_k\, e^{2\pi i k x}\Big|^2 \;. \qquad \square$$

8.3.7. Stelling: Zij $\{\mu_n\}_{n \in Gh}$ een rij complexe getallen. Opdat er een reële monotoon niet-dalende functie g op $R\ell$ bestaat zó dat

$$\forall_{k \in Gh}\; \mu_k = \int_0^{1+} e^{2\pi i k x}\, dg(x) \;,$$

is nodig en voldoende dat

$$\forall_{n \in Nt \cup \{\sigma\}}\; \forall_{(\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_n) \in R^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \mu_{k-\ell}\, \rho_k\, \overline{\rho_\ell} \geqslant 0 \right].$$

Bewijs: i. De voorwaarde is nodig.

Als g monotoon niet-dalend is, is

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \mu_{k-\ell}\, \rho_k\, \overline{\rho_\ell} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^{1+} \rho_k\, \overline{\rho_\ell}\, e^{2\pi i (k-\ell) x}\, dg(x) =$$

$$= \int_0^{1+} \Big(\sum_{k=0}^{n} \rho_k\, e^{2\pi i k x}\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n} \overline{\rho_\ell}\, e^{-2\pi i \ell x}\Big)\, dg(x) =$$

$$= \int_0^{1+} \Big| \sum_{k=0}^{n} \rho_k\, e^{2\pi i k x}\Big|^2\, dg(x) \geqslant 0 \;.$$

ii. De voorwaarde is voldoende

De rij $\{q_k\}_{k \in Gh}$ met $q_k(x) := e^{2\pi ikx}$ is een totaal orthonormaalsysteem in $C_{\text{mod } 1}$; de lineaire functionaal L wordt verkregen door te definiëren

$$L(q_k) := \mu_k \qquad (k \in Gh);$$

L kan lineair op $\mathcal{T}$, en met behulp van stelling 8.3.1 en een opmerking in 8.3.2 op $C_{\text{mod } 1}$ worden voortgezet tot een lineaire functionaal van $C_{\text{mod } 1}$.
L is begrensd op $\mathcal{T}$: met de notatie van 8.3.6 is voor een niet-negatieve $t \in \mathcal{T}$:

$$L(t) = L\left(\left|\sum_{k=0}^{N} \rho_k\, q_k\right|^2\right) = L\left(\left(\sum_{k=0}^{N} \rho_k\, q_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N} \overline{\rho_\ell}\, \overline{q_k}\right)\right) =$$

$$= L\left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \rho_k\, \overline{\rho_\ell}\, q_k\, \overline{q_\ell}\right) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \rho_k\, \overline{\rho_\ell}\, L(q_{k-\ell}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \rho_k\, \overline{\rho_\ell}\, \mu_{k-\ell} \geqslant 0\ ,$$

zodat $L \geqslant 0$; op grond van 8.1.4 en 8.1.5 (waarvan de bewijzen kunnen worden gecopieerd voor het geval $L \in LO(\mathcal{T} \to Cm)$) is nu L begrensd op $\mathcal{T}$, volgens 8.3.1 ook op $C_{\text{mod } 1}$.
L kan worden voortgezet tot C (zij het, in deze metriek bij $\| \ \|_\infty$, niet op grond van 8.3.1); dit tonen we aan met behulp van de functie $h \in C$ waarvoor $h(x) := x$. C is de directe som van de door h opgespannen lineaire deelruimte H, en $C_{\text{mod } 1}$: als $f \in C$, is

$$f = \{f(1) - f(0)\}h + (f - \{f(1) - f(0)\}h)$$

en

$$f - \{f(1) - f(0)\}h \in C_{\text{mod } 1}.$$

Zij nu $U := \{u \in \mathcal{T} \mid u \leqslant h\}$ en $V := \{v \in \mathcal{T} \mid v \geqslant h\}$; omdat $0 \in U$ en $1 \in \mathcal{T}$, terwijl $\forall_{u \in U}\ \forall_{v \in V}\ u \leqslant v$, bestaan $\sup\{L(u) \mid u \in U\}$ en $\inf\{L(v) \mid v \in V\}$ en geldt

$$\sup\{L(u) \mid u \in U\} \leq \inf\{L(v) \mid v \in V\} .$$

We definiëren nu $L(h) := \eta$ met behulp van een getal η, waarvoor

$$\sup\{L(u) \mid u \in U\} \leq \eta \leq \inf\{L(v) \mid v \in V\} ,$$

en voor $f \in C$ definiëren we

$$L(f) := \{f(1) - f(0)\}\eta + L(f - \{f(1) - f(0)\}h) .$$

Voor de aldus voortgezette L geldt weer $L \geq 0$; immers, zij $w \in C_{\mathrm{mod}\,1}$ en $\alpha h + w \geq 0$; dan is α blijkbaar reëel en voor $\alpha = 0$ de bewering $L(w) \geq 0$ triviaal, voor $\alpha > 0$ is

$$h \geq (-\frac{1}{\alpha})w$$

zodat

$$L(h) = \eta \geq L(-\frac{1}{\alpha}w) = -\frac{1}{\alpha}L(w)$$

en

$$L(\alpha h + w) = \alpha L(h) + L(w) \geq 0 ;$$

voor $\alpha < 0$ is

$$h \leq (-\frac{1}{\alpha})w ,$$

$$L(h) = \eta \leq L(-\frac{1}{\alpha}w) = -\frac{1}{\alpha}L(w)$$

en

$$L(\alpha h + w) = \alpha L(h) + L(w) \geq 0 .$$

L is derhalve weer begrensd volgens 8.1.5.

Volgens 8.2.7 is er een functie $g : R\ell \in Cm$, van begrensde variatie zó dat

$$\forall_{f \in C}\ L(f) = \int_{0-}^{1} f(x)dg(x)$$

die volgens een in vraagstuk 8.2 te bewijzen omkering van 8.2.9, vanwege $L \geq 0$, monotoon niet-dalend kan worden gekozen. Maar dan is ook

$$\forall_{f \in C_{\mathrm{mod}\,1}}\ L(f) = \int_{0-}^{1} f(x)dg(x)$$

waaruit op grond van de periodiciteit onmiddellijk volgt

$$\forall_{f \in C_{\mathrm{mod}\ 1}} \quad L(f) = \int_0^{1+} f(x)dg(x) \ . \qquad \square$$

8.3.8. <u>Stelling</u>: De in het tweede gedeelte van het bewijs van 8.3.7 bepaalde functie g is eenduidig bepaald, afgezien van zijn waarden in sprongpunten en een additieve constante.

<u>Bewijs</u>: Bij gegeven, alleen van de parameter η afhankelijke, L is g eenduidig bepaald (vraagstuk 8.2.) terwijl de keuze van η na restrictie van L tot $C_{\mathrm{mod}\ 1}$ geen rol meer speelt. $\square$

9. Begrensde hermitische operatoren van een separabele hilbertruimte

Zij R een SH-ruimte; als T een hermitische operator van R is, is ze begrensd (4.1.8).

9.1. Inleiding

Zij R een SH-ruimte.

9.1.1. Definities: Zij $T \in LO(R)$.

T heet hermitisch als $\forall_f \forall_g \, (Tf,g) = (f,Tg)$.

T heet isometrisch als $\forall_f \forall_g \, (Tf,Tg) = (f,g)$.

T heet unitair als T isometrisch is en $T(R) = R$.

9.1.2. Stelling: Als $T \in LO(R)$ en T is isometrisch, dan is

i: T begrensd en $\|T\| = 1$.

ii: T heeft een geadjungeerde T^*, en $T^*T = I$.

Als bovendien $T(R) = R$, is

iii: $TT^* = I$.

Bewijs:

i: Uit de definitie van isometrie volgt direct

$$\forall_{f \in R} \, (Tf,Tf) = (f,f) ,$$

zodat

$$\forall_{f \in R \setminus \{o\}} \, \frac{\|Tf\|^2}{\|f\|^2} = 1 .$$

ii: Uit i. volgt in verband met 4.2.2 dat T een geadjungeerde T^* heeft; nu is

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} \, (f,T^*Tg) = (Tf,Tg) = (f,g)$$

en wegens 4.2.1 is nu

$$\forall_{g \in R} \, T^*Tg = g$$

of

$$T^*T = I .$$

iii: $\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} (Tf, TT^*g) = (f, T^*g) = (Tf, g)$

en aangezien $T(R) = R$ volgt hieruit

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} (f, TT^*g) = (f, g)$$

zodat op dezelfde manier als in ii. volgt

$$TT^* = I \ . \qquad \square$$

9.1.3. <u>Stelling</u> (omkering van 9.1.2.ii): Als $T \in LO(R)$, T heeft een geadjungeerde T^*, en $T^*T = I$, dan is T isometrisch (en dus ook begrensd, 9.1.2.i).

<u>Bewijs</u>: Keer het bewijs van 9.1.2.ii om. $\square$

9.1.4. <u>Stelling</u>: Als T een geadjungeerde T^* heeft en als $TT^* = T^*T = I$, dan is T unitair.

<u>Bewijs</u>: Pas 9.1.3 toe: T is isometrisch.

$$\forall_{f \in R} \ f = If = T(T^*f) \in T(R) \ ;$$

dus $R = T(R)$ en T is unitair volgens de definitie. $\square$

9.1.5. <u>Stelling</u>: Voor de orthogonale projectie P_S op de gesloten lineaire deelruimte S van R (vergelijk 3.1.3 en 3.1.4) geldt: P_S is hermitisch, $P_S^2 = P_S$, $I - P_S$ is hermitisch, $(I - P_S)^2 = I - P_S$, $(I - P_S)R = R \ominus S$.

<u>Bewijs</u>: $f = P_S f + P_{R \ominus S} f$, zodat

$$(f, P_S g) = (P_S f, P_S g) + (P_{R \ominus S} f, P_S g) = (P_S f, P_S g) \ .$$

Door verwisseling van f en g volgt hieruit

$$(f, P_S g) = (P_S f, g) \ ;$$

dat $P_S^2 = P_S$ volgt direct uit de definitie van P_S (3.1.3); wegens $(I - P_S)f = f - P_S f = P_{R \ominus S} f$ is $I - P_S$ een orthogonale projectie, namelijk op de gesloten deelruimte $R \ominus S$, dus geldt ook $I - P_S$ is hermitisch en $(I - P_S)^2 = I - P_S$. $\square$

9.1.6. Stelling: Als T een hermitische operator van R is, en $T^2 = T$, dan is er een gesloten lineaire deelruimte S in R waarvoor $P_S = T$.

Bewijs: Zij $S := \{f \in R \mid Tf = f\}$. S is een lineaire deelruimte, triviaal. S is gesloten: $S = (I-T)^{\leftarrow}(\sigma)$, en I, T dus $I-T$ zijn begrensd, dus continu. Als $f \in R$ dan is

$$Tf = T^2 f = T(Tf) \quad \therefore \quad \forall_{f \in R}\ Tf \in S\ ,$$

en als $g \in S$, is

$$((I-T)f,g) = (f,g) - (Tf,g) = (f,Tg) - (f,Tg)$$

omdat $g = Tg$ geldt en T hermitisch is, zodat

$$(I-T)f \perp S\ .$$

Dus Tf is de projectie van f op S, en $T = P_S$. □

9.1.7. Opmerking: Als $S \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$ is $\|P_S\| = 1$; zie vraagstuk 4.2.1.

9.2. Begrensde hermitische operatoren van een separabele IP-ruimte

Zij R een separabele IP-ruimte.

9.2.1. Definitie: Als X een metrische ruimte is, Y een volledige metrische ruimte, φ een isometrische injectie van X in Y zó dat $\overline{\varphi(X)} = Y$, dan heet Y een completering van X.

9.2.2. Stelling: Als X een niet-volledige metrische ruimte is, dan is er een completering Y van X.

Bewijs: Zie [T], p. 74. □

9.2.3. Stelling: R heeft een completering, waarvan R een lineaire deelruimte "is".

Bewijs: Als R volledig is, is de bewering triviaal: R is de completering, met $\varphi := I$.

R bezit een aftelbaar totaal orthonormaalsysteem (2.1.12), $\{q_j\}_{j \in N_t}$, en voor iedere $f \in R$ is $\sum_{j=1}^{\infty} |(f,q_j)|^2 = \|f\|^2 < \infty$ (2.1.17.iii).

Zij $\varphi : R \to \ell^2$ gedefinieerd door

$$\varphi(f) := ((f,q_1),(f,q_2),(f,q_3),\ldots) .$$

φ is lineair; triviaal.

φ is isometrisch: $\|f-g\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(f-g,q_j)|^2 = \|\varphi(f-g)\|^2$, en hieruit volgt dat $\|f-g\| = \|\varphi(f)-\varphi(g)\|$ en tevens dat φ één injectie is.

Aangezien $\varphi(R)$ alle eindige rijen in ℓ^2 omvat, die dicht liggen in ℓ^2, is ook $\overline{\varphi(R)} = \ell^2$. ℓ^2 is dus een completering van R; $\varphi(R)$ is een lineaire deelruimte van ℓ^2 die isometrisch en isomorf is met R; dat wil precies zeggen: R "is" een lineaire deelruimte van ℓ^2. □

(Opmerking: We identificeren R met $\varphi(R)$.)

9.2.4. <u>Stelling</u>: Zij H een completering van R, T een begrensde hermitische operator van R. Dan is er een begrensde hermitische operator T' van H zó dat $\|T'\| = \|T\|$ en $T' \,|\, R = T$.

<u>Bewijs</u>: Bijzonder geval van stelling 8.3.1. □

9.2.5. <u>Herhaling van een deel van § 5.1</u>

Als R een IP-ruimte is, $T \in BLO(R)$ en T hermitisch is, dan zijn

$$m_T := \inf \left\{ \frac{(Tf,f)}{(f,f)} \,\middle|\, f \neq \sigma \right\}$$

$$M_T := \sup \left\{ \frac{(Tf,f)}{(f,f)} \,\middle|\, f \neq \sigma \right\}$$

reële getallen waarvoor $\max\{|m_T|,|M_T|\} = \|T\|$.

$$m_{T+\alpha I} = \inf \left\{ \frac{(Tf,f)}{(f,f)} + \alpha \frac{(f,f)}{(f,f)} \,\middle|\, f \neq \sigma \right\} = \alpha + m_T$$

voor alle $\alpha \in R\ell$, en evenzo

$$M_{T+\alpha I} = M_T + \alpha \ .$$

In het bijzonder geldt voor $T' := T + \frac{m_T - M_T}{2} I$

$$\|T'\| = M_{T'} = |m_{T'}| \ .$$

We zullen ook de notatie $m(T)$ en $M(T)$ gebruiken in plaats van m_T en M_T.

Definitie: $T \geqslant 0 :\Leftrightarrow \forall_{f \in R} \ (Tf,f) \geqslant 0$,

$$T_1 \geqslant T_2 \ :\Leftrightarrow T_1 - T_2 \geqslant 0 \ .$$

9.2.6. Voorbeeld: Zij $R := C([0,1])$ met $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$. Als φ een functie is op $[0,1]$ die continu is op hoogstens eindig veel discontinuïteiten van de 1e soort na ("stuksgewijs" continu) zij de operator T_φ van R gedefinieerd door

$$T_\varphi f := \varphi f \ .$$

T_φ is lineair, en wegens

$$(T_\varphi f, T_\varphi f) = \int_0^1 |\varphi(x)f(x)|^2 dx \leqslant \|\varphi\|_\infty^2 \int_0^1 |f(x)|^2 dx$$

begrensd met $\|T_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

Als φ reëel is, is T_φ hermitisch; als $\varphi \geqslant 0$ is $T_\varphi \geqslant 0$. Als φ reëel is, is

$$\min(\varphi) \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \int_0^1 \varphi(x)f(x)\overline{f(x)} \leqslant \max(\varphi) \int_0^1 |f(x)|^2 dx$$

en hieruit volgt

$$\min(\varphi) \leqslant m(T_\varphi) \leqslant M(T_\varphi) \leqslant \max(\varphi) \ ;$$

men kan bewijzen: $\min(\varphi) = m(T_\varphi)$, $\max(\varphi) = M(T_\varphi)$ (vraagstuk) zodat voor reële φ geldt $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$; dit laatste geldt trouwens ook voor niet-reële φ (vraagstuk). T_φ is niet compact (vraagstuk).

Als $\lambda \in$ Cm is λ dan en slechts dan eigenwaarde van T_φ als

$$\overset{0}{\widehat{\varphi^{\leftarrow}(\lambda)}} \neq \emptyset \; ;$$

in dat geval is

$$E_\lambda := \{f \in R \mid f^{\leftarrow}(0) \supset I \setminus \varphi^{\leftarrow}(\lambda)\} \; ;$$

(vraagstuk).

Als φ alleen de waarden 0 en 1 aanneemt, geldt

$$T_\varphi^2 = T_\varphi \; ;$$

omdat φ dan reëel is, is T_φ een projectieoperator (9.1.6).

Het is niet moeilijk in te zien dat geldt

i: als $\alpha \in$ Cm, $T_{\alpha\varphi} = \alpha T_\varphi$,

ii: als ψ eveneens stuksgewijs continu is, $T_{\varphi+\psi} = T_\varphi + T_\psi$,

iii: $T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$;

iv: $\forall_{n \in \mathrm{Nt}} \; T_{\varphi^n} = (T_\varphi)^n$,

v: als $p(\zeta) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \zeta^j$ een complex polynoom voorstelt, $p(T_\varphi) = T_{p\circ\varphi}$

vi: als $\lambda \notin \overline{\varphi([0,1])}$ is $(\varphi - \lambda)^{-1}$ een stuksgewijs continue functie, en dan heeft $T_\varphi - \lambda I$ een inverse: $(T_\varphi - \lambda I)^{-1} = T_{(\varphi-\lambda)^{-1}}$.

9.2.7. <u>Definities</u>: Als R een genormeerde lineaire ruimte is, $T \in$ BLO(R) en $\gamma \in$ Cm, heet γ een <u>regulier</u> punt van T als

$$\exists_{T' \in \mathrm{BLO}(R)} \; T'(T - \gamma I) = (T - \gamma I)T' = I \; .$$

Onder het <u>spectrum</u>, sp(T), van T verstaan we de verzameling van complexe getallen die geen reguliere punten van T zijn; een element van sp(T) heet <u>singulier</u> punt van T.

sp(T) omvat de in de aanhef van § 5 gedefinieerde verzameling $\sigma(T)$; deze laatste noemen we, ter onderscheiding, voortaan het <u>puntspectrum</u> van T.

9.2.8. <u>Voorbeeld</u>: Voor de T_φ van 9.2.6 is

$$sp(T) = \overline{\varphi([0,1])} ,$$

terwijl

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \sigma([0,1]) \mid \exists_{U,\text{open}} \ \varphi(U) = \{\lambda\}\} ;$$

(vraagstuk

9.2.9. <u>Stelling</u>: Als p een polynoom is met complexe coëfficiënten, R een genormeerde lineaire ruimte en $T \in BLO(R)$, dan is ook $p(T) \in BLO(R)$; als R een IP-ruimte en T hermitisch is en als p reële coëfficiënten heeft, dan is ook p(T) hermitisch.

<u>Bewijs</u>: Door verificatie. □

9.2.10. <u>Stelling</u>: Zij T een begrensde lineaire operator van de IP-ruimte R; zij $\mathcal{P}$ de algebra van polynomen met complexe coëfficiënten, $\mathcal{P}_r$ die met reële coëfficiënten. Dan is de afbeelding

$$p \to p(T)$$

een algebra-homomorfe afbeelding van $\mathcal{P}$ in BLO(R), en als T hermitisch is, is het een algebra-homomorfe afbeelding van $\mathcal{P}_r$ in de algebra van hermitische begrensde operatoren van R.

<u>Bewijs</u>: Door verificatie. □

9.2.11. <u>Stelling</u>: Zij T een hermitische begrensde operator van de IP-ruimte R en zij $p \in \mathcal{P}_r$. Als $\forall_{\lambda \in [m_T, M_T]} \ p(\lambda) \geqslant 0$, dan is $p(T) \geqslant 0$.

<u>Bewijs</u>: Als $m_T = M_T$, zodat $\forall_{f \in R} \ (Tf,f) = M_T(f,f)$ geldt volgens 5.1.3.iii dat $\forall_{f \in R} \ Tf = M_T f$; nu is $(p(T)f,f) = (p(M_T)f,f) = p(M_T)\|f\|^2 \geqslant 0$, dus $p(T) \geqslant 0$. Stel nu $m_T < M_T$, zodat 8.3.5 van toepassing is.

i: Als $p = q^2$, met $q \in P_r$, is q(T) hermitisch en

$$(p(T)f,f) = (q(T)q(T)f,f) = \|q(T)f\|^2 \geq 0$$

en $p(T) \geq 0$.

ii: Als $p(\lambda) = (M_T - \lambda)q(\lambda)^2$, is met $q(T)f = g$

$$((M_T - T)q(T)q(T)f,f) = ((M_T - T)g,g) = M_T(g,g) - (Tg,g) \geq 0 ,$$

dus $p(T) \geq 0$.

iii: Als $p(\lambda) = (\lambda - m_T)q(\lambda)^2$ dan als in ii: $p(T) \geq 0$.

iv: Als $p(\lambda) = (M_T - \lambda)(\lambda - m_T)q(\lambda)^2$, is het, zoals door de substitutie $q(T)f =: g$ blijkt, voldoende om te bewijzen

$$\forall_{g \in R} \; ((M_T - T)(T - m_T)g,g) \geq 0 .$$

Substitueren we hierin $T' := T + \frac{m_T - M_T}{2} I$ (vergelijk 9.2.5) dan gaat het linkerlid over in

$$((M_{T'} - T')(T' - m_{T'})g,g)$$

en omdat nu $\|T'\| = M_{T'} = - m_{T'}$ is dit te herleiden tot

$$\|T'\|^2\|g\|^2 - \|T'g\|^2 .$$

Dus ook in dit geval is $p(T) \geq 0$.

In het algemene geval is volgens 8.3.5 $p(T)$ een som van in i, ii, iii en iv besproken typen, en de som van positieve operatoren is positief. $\square$

9.2.12. <u>Voorbeeld</u>: Voor de T_φ van 9.2.6 (met een reële φ) geldt onder de voorwaarde van 9.2.11 voor p, wegens

$$(p(T_\varphi)f,f) = (T_{p \circ \varphi}f,f) = \int_0^1 (p \circ \varphi)(x)|f(x)|^2 \, dx ,$$

$$m_T = \min(\varphi) , \quad M_T = \max(\varphi) \quad \text{en} \quad (p \circ \varphi)(x) = p(\varphi(x)) \geq 0 ,$$

dat

$$p(T_\varphi) \geq 0 .$$

9.2.13. Stelling: Zij R een separabele IP-ruimte, $T \in BLO(R)$ en hermitisch; zij $p \in P_r$.

i: $$M(p(T)) \leqslant \max\{p(\lambda) \mid \lambda \in [m_T, M_T]\} ,$$

ii: $$m(p(T)) \geqslant \min\{p(\lambda) \mid \lambda \in [m_T, M_T]\} ,$$

iii: $$\|p(T)\| \leqslant \max\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in [m_T, M_T]\} .$$

Bewijs:

i: Zij $\mu = \max(p)$ dan is $\mu - p \geqslant \sigma$ (op $[m_T, M_T]$) zodat volgens 9.2.11

$$\mu I - p(T) \geqslant 0$$

en hieruit volgt

$$M(p(T)) \leqslant M(\mu I) = \mu .$$

ii: Analoog aan i.

iii: $$\|p(T)\| = \max\{|m(p(T))|, |M(p(T))|\} .$$ □

9.3. Hermitische operatoren van een SH-ruimte

Zij R een SH-ruimte; alle operatoren worden verondersteld hermitisch te zijn (en dus begrensd).

9.3.1. Stelling: Als $T \geqslant 0$ dan is

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} \ |(Tf,g)|^2 \leqslant (Tf,f)(Tg,g) .$$

Bewijs: Als $\lambda \in Cm$, $f \in R$ en $g \in R$ dan

$$0 \leqslant (T(f+\lambda g), f+\lambda g) = (Tf,f) + \lambda(Tg,f) + \bar{\lambda}(Tf,g) + \lambda\bar{\lambda}(Tg,g)$$

hetgeen voor $\lambda = -\dfrac{(Tf,g)}{(Tg,g)}$, mits $(Tg,g) \neq 0$, overgaat in

$$0 \leqslant (Tg,g)^{-1}((Tf,f)(Tg,g) - |(Tf,g)|^2)$$

waaruit (wegens $T \geqslant 0$) de gevraagde ongelijkheid volgt; als $(Tg,g) = 0$ volgt uit

$$\forall_{\lambda \in Cm} \ 0 \leqslant (Tf,f) + 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}(Tf,g) = \mathrm{Re}((Tf,f) + 2\lambda(g,Tf))$$

dat ook $(g,Tf) = 0 = (Tf,g)$. □

9.3.2. Stelling: Als $T \geqslant 0$, is

$$\forall_{f \in R} \|Tf\|^2 \leqslant (Tf,f)^2 M_T .$$

Bewijs: Uit 9.3.1 volgt op grond van de definitie van M_T dat

$$\forall_{f \in R} \forall_{g \in R} |(Tf,g)|^2 \leqslant (Tf,f)M_T(g,g)$$

en substitutie van Tf voor g levert

$$\forall_{f \in R} \|Tf\|^4 \leqslant (Tf,f)M_T\|Tf\|^2$$

zodat

$$\forall_{f \in R} \|Tf\|^2 \leqslant M_T(Tf,f) .$$ □

9.3.3. Stelling: Als $\{T_n\}_{n \in Nt}$ een rij is van operatoren, $\alpha \in R\ell$, en

$$\forall_{n \in Nt} T_n \geqslant T_{n+1} \geqslant \alpha I ,$$

dan is er een hermitische $T \in BLO(R)$ met

i: $\forall_{n \in Nt} T_n \geqslant T \geqslant \alpha I$,

ii: $\forall_{f \in R} \lim_{n \to \infty} \|T_n f - Tf\| = 0$.

Bewijs: Het is geen beperking te veronderstellen dat $\alpha = 0$. Uit de gegevens volgt direct dat

$$\forall_{n \in Nt} \forall_{f \in R} (T_n f,f) \geqslant (T_{n+1}f,f) \geqslant 0$$

zodat $\{(T_n f,f)\}_{n \in Nt}$ voor iedere f een monotone begrensde rij, derhalve een fundamentaalrij, is. Als $m > n$, dan is $0 \leqslant T_n - T_m \leqslant T_1$ en bijgevolg $0 \leqslant M(T_n - T_m) \leqslant M(T_1)$; nu is, 9.3.2 in aanmerking genomen,

$$\|(T_n - T_m)f\|^2 \leqslant M(T_1)((T_n - T_m)f,f)$$

zodat de rij $\{T_n f\}_{n \in \mathbb{N}t}$ een fundamentaalrij is; definieer

$$Tf := \lim_{n \to \infty} T_n f \ ;$$

T voldoet aan alle eisen, hetgeen door verificatie blijkt. $\square$

9.3.4. Opmerking: Voor de in 9.3.3 beschreven situatie is de conclusie $\|T_n - T\| \to 0$ niet juist; zij $\varphi_n \in C([0,1])$ gedefinieerd door

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_n(x) := 1 - nx & \text{als } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \varphi_n(x) := 0 & \text{als } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{array}\right\}$$

en beschouw de rij T_{φ_n} (zie 9.2.6). Ze voldoet aan de voorwaarde $T_{\varphi_1} \geq T_{\varphi_2} \geq \ldots \geq \mathcal{O}$ terwijl $\forall_{n \in \mathbb{N}t} \ \|T_{\varphi_n}\| = \|\varphi_n\|_\infty = 1$. Voor $f \in C([0,1])$ is

$$\|T_{\varphi_n} f\|^2 = \int_0^1 \varphi_n(x)^2 |f(x)|^2 dx = \int_0^{1/n} (1 - nx)^2 |f(x)|^2 dx \leq n^{-1} \|f\|_\infty^2$$

zodat

$$\forall_{f \in C([0,1])} \ \lim_{n \to \infty} T_{\varphi_n} f = \mathcal{o}$$

en de definitie van T in 9.3.3 levert $T = \mathcal{O}$ op; maar hoewel hier

$$\forall_f \ \lim_{n \to \infty} \|T_{\varphi_n} f - \mathcal{O}f\| = 0 \ ,$$

is

$$\lim_{n \to \infty} \|T_{\varphi_n} - \mathcal{O}\| = 1 \ .$$

9.3.5. We definiëren de ruimte $K^{\sim}([m_T, M_T])$ analoog aan de $K^{\sim}$ die bij $C([0,1])$ in 8.1.2 is beschreven, en noemen die maar weer $K^{\sim}$, terwijl $K^{\sim}_r$ de deelruimte der reële functies uit $K^{\sim}$ is. Zij R, als tevoren, een SH-ruimte en T een hermitische operator.

Stelling: Er bestaat een afbeelding Θ van $K^{\sim}$ in BLO(R) met de volgende eigenschappen:

i: Als $\varphi \in \mathcal{P}$ dan $\Theta(\varphi) = \varphi(T)$.

ii: Als $\varphi \in K_r^{\sim}$ dan is $\Theta(\varphi)$ hermitisch.

iii: Als $\varphi \geqslant \sigma$ dan is $\Theta(\varphi) \geqslant \mathcal{O}$.

iv: Voor alle $\varphi \in K^{\sim}$ is $\|\Theta(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$,

v: Θ is een algebra-homomorfisme van $K^{\sim}$ in BLO(R):

$$\Theta(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1\Theta(\varphi_1) + \alpha_2\Theta(\varphi_2)$$

$$\Theta(\varphi_1\ \varphi_2) = \Theta(\varphi_1)\Theta(\varphi_2)\ ,$$

vi: $\Theta(\varphi)^* = \Theta(\overline{\varphi})$.

vii: Als φ met behulp van een q-convergente reeks wordt gegeven door $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)$, dan geldt

$$\forall_{f \in R} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \Theta(\psi_j)f = \Theta(\varphi)f\ .$$

Bewijs: Neem eerst $\varphi \in K_r^{\sim}$, zij $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)$ met

$$\forall_{j \in Nt}\ \psi_j \in C_r([m_T, M_T]) \quad \text{en} \quad \forall_x \sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j(x)| < A\ .$$

Zij

$$\varphi_1(x) := \sum_{j=1}^{\infty} (|\psi_j(x)| + 2^{-j})\ ,$$

$$\varphi_2(x) := \sum_{j=1}^{\infty} (|\psi_j(x)| - \psi_j(x) + 2^{-j})$$

zodat $\varphi_1 \in K_r^{\sim}$, $\varphi_2 \in K_r^{\sim}$ en $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Als $\Psi_n(x) := \sum_{j=1}^{n} (|\psi_j(x)| + 2^{-j})$, $n \in Nt$, dan is

$$\forall_{n \in Nt}\ \Psi_n \in C_r\ , \quad \forall_{n \in Nt}\ 2^{-j} \leqslant \|\Psi_{n+1} - \Psi_n\| \leqslant 2^{-j} + \|\psi_{n+1}\|$$

en volgens de approximatiestelling van Weierstrasz zijn er polynomen p_n ($n \in Nt$) zó dat

$$\forall_{n \in Nt}\ \sigma \leqslant \Psi_n \leqslant p_n \leqslant \Psi_{n+1} \leqslant \|\varphi_1\|_\infty\ ;$$

met andere woorden: φ_1 is puntsgewijze limiet van een stijgende, q-convergente rij reële polynomen. Nu voldoet de rij

$$p_1(T) \leqslant p_2(T) \leqslant \ldots \leqslant \|\varphi_1\|_\infty I$$

aan de voorwaarden van 9.3.3 (die ook voor een stijgende rij kan worden geformuleerd) zodat er een hermitische operator T_1 bestaat waarvoor

$$p_1(T) \leqslant p_2(T) \leqslant \ldots \leqslant T_1 \leqslant \|\varphi_1\|_\infty I$$

en

$$\forall_{f \in R} \lim_{n\to\infty} p_n(T)f = T_1 f \ .$$

Evenzo bestaan er polynomen q_n en een operator T_2 met

$$\sigma \leqslant q_n \uparrow \varphi_2 \quad \text{(puntsgewijs)}$$

$$q_1(T) \leqslant q_2(T) \leqslant \ldots \leqslant T_2 \leqslant \|\varphi_2\|_\infty I$$

en

$$\forall_{f \in R} \lim_{n\to\infty} q_n(T)f = T_2 f \ ,$$

zodat ook

$$\forall_{f \in R} \lim_{n\to\infty} (p_n - q_n)(T)f = (T_1 - T_2)f \ .$$

terwijl $p_n - q_n \to \varphi$ puntsgewijs. We zijn nu geneigd te definiëren

$$\Theta(\varphi) := T_1 - T_2$$

maar moeten nog vaststellen dat deze definitie onafhankelijk is van de wijze waarop φ als som van een q-convergente reeks is geschreven; met andere woorden, als $\{u_n\}_n$ en $\{v_n\}_n$ rijen polynomen zijn die q-convergent zijn en φ als limiet hebben, terwijl er operatoren U en V zijn waarvoor

$$\forall_{f \in R} \left[\lim_{n\to\infty} u_n(T)f = Uf \ \& \ \lim_{n\to\infty} v_n(T)f = Vf\right] ,$$

is dan ook $U = V$?

Definieer daartoe op $\mathcal{P}([m_T,M_T])$ de functionaal

$$L_{f,g}(p) := (p(T)f,g)$$

met een vaste $f \in R$ en $g \in R$. $L_{f,g}$ is lineair en wegens

$$|L_{f,g}(p)| \leqslant \|p(T)\|\|f\|\|g\| \leqslant \|p\|_\infty\|f\|\|g\|$$

(in $\|\ \|_\infty$) begrensd met $\|L_{f,g}\| \leqslant \|f\|\|g\|$. $L_{f,g}$ kan volgens 8.3.1 en 8.2.2 worden voortgezet tot $C([m_T,M_T])$ en $K^\sim([m_T,M_T])$ met dezelfde norm, zodat wegens $\lim_{n\to\infty} u_n = \varphi = \lim_{n\to\infty} v_n$ (puntsgewijs) (vergelijk 8.2.2)

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ \lim_{n\to\infty} L_{f,g}(u_n) = L_{f,g}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} L_{f,g}(v_n)$$

of

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ \lim_{n\to\infty}(u_n(T)f,g) = \lim_{n\to\infty}(v_n(T)f,g)$$

zodat, aangezien het inproduct een continue functie is

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ (Uf,g) = (Vf,g)$$

en hieruit volgt (4.2.1)

$$U = V\ ,$$

zodat de hierboven geconstrueerde operator

$$\Theta(\varphi) := T_1 - T_2$$

onafhankelijk is van de keuze van de rijen polynomen waarmee T_1 en T_2 worden geconstrueerd.

Samenvattend: Als $\varphi \in K^\sim_r$, $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$ met $\forall_n\ p_n \in \mathcal{P}_r$ en de limiet bedoeld is in de zin van q-convergentie dan

$$\forall_{f\in R}\ \Theta(\varphi)f = \lim_{n\to\infty} p_n(T)f\ ;$$

als bovendien $\forall_{n\in Nt}\ p_{n+1} \geqslant p_n$ dan is

$$\forall_{n \in Nt}\ p_n(T) \leqslant \Theta(\varphi) \leqslant \max(\varphi) I$$

terwijl, als $\forall_{n \in Nt}\ p_{n+1} \leqslant p_n$, geldt

$$\forall_{n \in Nt}\ p_n(T) \geqslant \Theta(\varphi) \geqslant \min(\varphi) I \ .$$

We verifiëren nu (voorlopig voor reële φ) de beweringen i - v.

i: Als $\varphi \in \mathcal{R}_r$, dan is de rij $\varphi, \varphi, \varphi, \ldots$ er een van benaderende polynomen voor φ:

$$\forall_{f \in R}\ \Theta(\varphi) f = \varphi(T) f \ , \quad \text{of} \quad \Theta(\varphi) = \varphi(T) \ .$$

ii: Als $\varphi \in K_r^{\sim}$ kan men de rij $\{p_n\}_n$ in $\mathcal{R}_r$ kiezen, zodat alle $p_n(T)$ hermitisch zijn (9.2.9) en

$$(\Theta(\varphi)f, g) = \lim_{n \to \infty} (p_n(T)f, g) = \lim_{n \to \infty} (f, p_n(T)g) = (f, \Theta(\varphi)g)$$

zodat $\Theta(\varphi)$ hermitisch is.

iii: Vraagstuk

iv: Vraagstuk

v: Vraagstuk ; maak gebruik van het feit dat volgens i. de restrictie van Θ tot $\mathcal{R}_r$ het in 9.2.10 beschreven homomorfisme is.

Als $\varphi \in K^{\sim} \setminus K_r$, zodat $\varphi = \psi + i\chi$ met $\psi \in K_r^{\sim}$ en $\chi \in K_r^{\sim}$, dan definiëren we

$$\Theta(\varphi) := \Theta(\psi) + i\Theta(\chi) \ .$$

Het is niet moeilijk om in te zien dat voor een rij $\{p_n\}_n$ van polynomen in $\mathcal{R}$ waarvoor $p_n \to \varphi$ op de voorgeschreven manier, geldt

$$\forall_f\ \Theta(\varphi) f = \lim_{n \to \infty} p_n(T) f \ ; \qquad \text{(vraagstuk}$$

Verificatie van i, iii, iv en v voor deze uitbreiding tot $K^{\sim}$ levert nu geen grote moeilijkheden (vraagstukken

vi: Als $\varphi = \psi + i\chi$, is $\overline{\varphi} = \psi - i\chi$ en

$$(f,\Theta(\overline{\varphi})g) = (f,\Theta(\psi)g) + i(f,\Theta(\chi)g) =$$

$$= (\Theta(\psi)f,g) + i(\Theta(\chi)f,g) = (\Theta(\varphi)f,g)$$

zodat

$$\Theta(\varphi)^* = \Theta(\overline{\varphi}) .$$

vii: Vraagstuk □

9.3.6. Opmerkingen:

i: 9.3.5.iv kan worden versterkt tot: Als $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$ dan is $aI \leqslant \Theta(\varphi) \leqslant \leqslant bI$.

ii: Als $\varphi \in C([m_T,M_T])$ en de rij $\{p_n\}_n$ van polynomen benadert φ uniform, dan geldt

$$\|\Theta(\varphi) - p_n(T)\| \to 0 .$$

iii: Als φ de uniforme limiet is van een rij $\{\varphi_n\}_n$ in $K^{\sim}$, dan geldt

$$\|\Theta(\varphi) - \Theta(\varphi_n)\| \to 0 .$$

9.3.7. Voorbeeld 1: Zij $T \geqslant 0$; dan is er een hermitische operator T_1 zó dat $T_1^2 = T$ en $T_1 \geqslant 0$.

Bewijs: Omdat $T \geqslant 0$ is, is $m_T \geqslant 0$, zodat de continue functie $w(x) := \sqrt{x}$ op $[m_T,M_T]$ is gedefinieerd. Beschouw nu $\Theta(w)$, waarvoor

$$\Theta(w)\Theta(w) = \Theta(w^2) .$$

$w^2(x) := x$, een polynoom, dus $\Theta(w^2) = T$. Omdat $w \geqslant 0$ is (9.3.5.iii) $\Theta(w) \geqslant 0$; neem dus $T_1 := \Theta(w)$. □

9.3.8. Voorbeeld 2: Als $\forall_x\ |\varphi(x)| = 1$, is $\Theta(\varphi)$ unitair.

Bewijs: $I = \Theta(1) = \Theta(\varphi\overline{\varphi}) = \Theta(\varphi)\Theta(\overline{\varphi}) = \Theta(\varphi)\Theta(\varphi)^*$. □

We voeren nu voor $\Theta(\varphi)$ de notatie $\varphi(T)$ in, die in de literatuur gebruikelijk is.

9.3.9. <u>Opmerking</u>: Als $R\ell \supset X \supset [m_T, M_T]$ en $\varphi \in K^{\sim}(X)$ dan verstaan we onder $\varphi(T)$ de operator $(\varphi \mid [m_T, M_T])(T)$.

9.3.10. <u>Voorbeeld 3</u>: Zij voor $\mu \in R\ell$ de functie e_μ (evenals in 8.2.4) gedefinieerd door

$$\left.\begin{array}{l} e_\mu(x) = 1 \quad \text{als } x \leqslant \mu \\ e_\mu(x) = 0 \quad \text{als } x > \mu \end{array}\right\} .$$

Bij de gegeven (hermitische) operator T noteren we $e_\mu(T) =: E_\mu$. Dan geldt

i: Als $\mu < m_T$, is $E_\mu = 0$; als $\mu \geqslant M_T$ is $E_\mu = I$.

ii: Als $\mu \leqslant \nu$, is $E_\mu E_\nu = E_\nu E_\mu = E_\mu$; in het bijzonder is $E_\mu^2 = E_\mu$, en omdat e_μ reëel is, is E_μ hermitisch, en bijgevolg een orthogonale projectie.

iii: Als $\mu \leqslant \nu$, is $E_\mu(R) \subset E_\nu(R)$; want als $f \in E_\mu(R)$ is er een $g \in R$ met $f = E_\mu g$, zodat

$$f = E_\mu g = (E_\nu E_\mu)g = E_\nu(E_\mu g) \in E_\nu(R) .$$

iv: Als $\mu \leqslant \nu$, is $e_\mu \leqslant e_\nu$ en $e_\nu - e_\mu \geqslant 0$ zodat (9.3.5.iii)

$$E_\nu - E_\mu = e_\nu(T) - e_\mu(T) = (e_\nu - e_\mu)(T) \geqslant 0 \quad \text{en} \quad E_\nu \geqslant E_\mu .$$

Om al deze redenen noemt men $\{E_\mu\}_{\mu \in R\ell}$ een <u>groeiende schaar van projectoren</u> en $\{E_\mu(R)\}_{\mu \in R\ell}$ een <u>groeiende schaar van deelruimten</u>.

9.3.11. <u>Stelling</u>: Als φ continu is, dan is

$$\varphi(T) = \int_{m(T)}^{M(T)+} \varphi(\mu)\, dE_\mu .$$

(Hoofdstelling voor (begrensde) hermitische operatoren van een SH-ruimte.)

<u>Bewijs</u>: Neem een verdeling $V = \{\mu_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$ van $R\ell$ met de volgende eigenschappen:

$$\mu_0 < m(T) \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n-1} \leqslant M_T < \mu_n .$$

Zij de operator S_V gedefinieerd door

$$S_V := \sum_{j=1}^{n} \varphi(\mu_j)(E_{\mu_j} - E_{\mu_{j-1}}) ,$$

zodat

$$S_V = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\mu_j)\left(e_{\mu_j}(T) - e_{\mu_{j-1}}(T)\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi(\mu_j)(e_{\mu_j} - e_{\mu_{j-1}})\right)(T) .$$

Nu is $s_V := \sum_{j=1}^{n} \varphi(\mu_j)(e_{\mu_j} - e_{\mu_{j-1}})$ een trapfunctie, waarvoor (vergelijk het bewijs van 8.2.7), bij van te voren gekozen $\varepsilon > 0$ en een voldoend fijne verdeling V, geldt

$$\|\varphi - s_V\| < \varepsilon \ ;$$

en

$$S_V = s_V(T) .$$

Op grond van 9.3.6.iii kunnen we dus concluderen dat

$$\|S_V - \varphi(T)\| \to 0$$

als V een rij verdelingen doorloopt waarvan de maaswijdte naar 0 nadert; dat wil zeggen dat

$$\varphi(T) = \int_{m(T)}^{M(T)+} \varphi(\mu)dE_\mu . \qquad \square$$

9.3.12. <u>Stelling</u>:

i: $$\forall_{f\in R}\ \varphi(T)f = \int_{m(T)}^{M(T)+} \varphi(\mu)d(E_\mu f) .$$

ii: $$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ (\varphi(T)f,g) = \int_{m(T)}^{M(T)+} \varphi(\mu)d(E_\mu f,g) .$$

<u>Bewijs</u>: Vraagstuk $\square$

9.3.13. Opmerking: Het resultaat van 9.3.12.ii leidt weer tot een interpretatie van de stelling van Riesz (§ 8.2, in het bijzonder 8.2.7): als $f \in R$ en $g \in R$, T een hermitische operator is van R, dan is door

$$L_{f,g}(\varphi) := (\varphi(T)f,g) \qquad (\varphi \in K^{\sim}([m_T,M_T]))$$

wegens

$$|L_{f,g}(\varphi)| \leq \|\varphi(T)\|\,\|f\|\,\|g\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|\,\|g\|$$

een begrensde lineaire functionaal van $K^{\sim}([m_T,M_T])$ gedefinieerd; volgens 9.3.12.ii geldt nu

$$L_{f,g}(\varphi) = \int_{m(T)}^{M(T)+} \varphi(\mu)\,d(E_\mu f,g)$$

zodat de representatie van Riesz van de functionaal $L_{f,g}$ als een Stieltjes-integraal hier expliciet wordt beschreven.

9.3.14. Voorbeeld 4: In het bijzonder geldt voor iedere hermitische operator T van R

$$T = \int_{m(T)}^{M(T)+} \mu\, dE_\mu \; .$$

9.3.15. Voorbeeld 5: Als $R := R^3$, en T is een hermitische operator, dan heeft T drie reële eigenwaarden waarvan we voor het gemak aannemen dat ze verschillend zijn:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \; .$$

We nemen als basis een orthonormaalsysteem van bijbehorende eigenvectoren:

$$v_1 \, , \; v_2 \, , \; v_3 \; .$$

Dan is voor een $f := a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in R^3$:

$$Tf = \alpha_1 a_1 v_1 + \alpha_2 a_2 v_2 + \alpha_3 a_3 v_3 \; ,$$

en met $g := \sum_{j=1}^{3} b_j v_j$ is

$$(Tf,g) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j a_j \overline{b_j} \ ,$$

zodat in het bijzonder

$$(Tf,f) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j |a_j|^2$$

en hieruit volgt $\alpha_1 = m_T$ en $\alpha_3 = M_T$.

Als p een polynoom is, met $p(\zeta) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \zeta^k$, is

$$p(T)v_j = \sum_{k=0}^{m} \beta_k T^k v_j = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \alpha_j^k v_j = p(\alpha_j) v_j \ ,$$

zodat, met een rij polynomen $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}t}$ die de functie e_μ op de door $K^\smile$ voorgeschreven wijze benadert

$$e_\mu(T)v_j = \lim_{n\to\infty} p_n(T)v_j = \lim_{n\to\infty} p_n(\alpha_j)v_j = e_\mu(\alpha_j)v_j \ , \quad (j = 1,2,3) \ ;$$

$$\therefore \qquad E_\mu v_j = \begin{cases} v_j & \text{als } \alpha_j \leq \mu \\ \sigma & \text{als } \alpha_j > \mu \ . \end{cases}$$

Als $\mu < \alpha_1$ is $E_\mu v_j = \sigma$ $(j = 1,2,3)$, dus $E_\mu = O$. Als $\alpha_1 \leq \mu < \alpha_2$, is $E_\mu v_1 = v_1$, $E_\mu v_j = \sigma$ $(j = 2,3)$, zodat E_μ de orthogonale projectie P is van R op $L(\{v_1\})$. Als $\alpha_2 \leq \mu < \alpha_3$, is $E_\mu v_j = v_j$ $(j = 1,2)$, $E_\mu v_3 = \sigma$, zodat E_μ de orthogonale projectie Q is van R op $L(\{v_1,v_2\})$. Als $\alpha_3 \leq \mu$ is $E_\mu v_j = v_j$ $(j = 1,2,3)$, zodat $E_\mu = I$.

Voor een $\varphi \in C([\alpha_1^-,\alpha_3^+])$ en een voldoend fijne verdeling $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n$ van $[\alpha_1^-,\alpha_2^+]$ met $\mu_0 < \alpha_1 \leq \mu_1 < \mu_2 \leq \ldots < \mu_{n-1} < \alpha_3 \leq \mu_n$ geldt

$$S_V = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\mu_j)(E_{\mu_j} - E_{\mu_{j-1}}) = \varphi(\mu_1)P + \varphi(\mu')(Q-P) + \varphi(\mu_n)(I-Q)$$

waarin $\mu' = \min\{\mu_j \mid \mu_j \geq \alpha_2\}$, zodat

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3+} \varphi(\mu)dE_\mu = \varphi(\alpha_1)P + \varphi(\alpha_2)(Q-P) + \varphi(\alpha_3)(I-Q) .$$

In het bijzonder is voor $\varphi(\mu) := \mu$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3+} \mu\, dE_\mu = \alpha_1 P + \alpha_2 (Q-P) + \alpha_3 (I-Q) ,$$

en aangezien P, $Q-P$ en $I-Q$ juist de orthogonale projecties op $L(\{v_1\})$, $L(\{v_2\})$ en $L(\{v_3\})$ voorstellen, vinden we, conform 9.3.14

$$\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_3+} \mu\, dE_\mu\right) f = \alpha_1 a_1 v_1 + \alpha_2 a_2 v_2 + \alpha_3 a_3 v_3 = Tf$$

of

$$T = \int_{\alpha_1}^{\alpha_3+} \mu\, dE_\mu .$$

In dit voorbeeld is de groei van de schaar van deelruimten $E_\mu(R)$ discreet; bij iedere $\alpha \in \sigma(T)$ neemt de dimensie van $E_\mu(R)$ toe met 1.

Een gevolg van het bovenstaande is nog: Als T een hermitische matrix is van n rijen en n kolommen, met verschillende eigenwaarden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, en een orthonormaalsysteem van eigenvectoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$, φ een continue functie, dan geldt

$$\varphi(T)f = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\alpha_j) a_j v_j .$$

9.3.16. <u>Voorbeeld 6</u>: Zij $R := C([0,1])$ met $(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$. Zij $\chi \in C_r$, $T_\chi f := \chi f$ (vergelijk 9.2.6). Voor een polynoom p geldt

$$p(T_\chi) = T_{p \circ \chi}$$

zoals in 9.2.6 reeds is bewezen.

Voor e_μ en een rij $\{p_n\}_{n\in \mathbb{N}t}$ van polynomen in $K^{\sim}([\min(\chi),\max(\chi)])$ die e_μ op de voorgeschreven wijze benadert, is

$$e_\mu(T_\chi)f = \lim_{n\to\infty} p_n(T_\chi)f = \lim_{n\to\infty} T_{p_n\circ\chi}f = \lim_{n\to\infty}(p_n\circ\chi)f$$

zodat

$$(e_\mu(T_\chi)f)(x) = \lim_{n\to\infty}(p_n\circ\chi)(x)f(x) = f(x)\lim_{n\to\infty} p_n(\chi(x)) \ .$$

De limieten betekenen hier convergentie in de norm $\| \ \|_2$ van $C([0,1])$; nu is $p_n \to e_\mu$ puntsgewijs en $|e_\mu(t)-p_n(t)|^2$ is uniform begrensd volgens de constructie van de elementen van K (q-convergentie); volgens een bekende stelling van Lebesgue ([G], p. 223; [R], p. 26) is dan ook

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |e_\mu(t)-p_n(t)|^2 dt = 0 \ ,$$

en dit betekent juist

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e_\mu \quad \text{in de norm } \| \ \|_2 .$$

Dus

$$(e_\mu(T_\chi)f)(x) = f(x)e_\mu(\chi(x)) = f(x)(e_\mu\circ\chi)(x)$$

of

$$E_\mu f = T_{e_\mu\circ\chi}f$$

of

$$E_\mu = T_{e_\mu\circ\chi} \ .$$

Nu is

$$(e_\mu\circ\chi)(x) = \begin{cases}\chi(x) & \text{als } \chi(x)\leqslant\mu\\ 0 & \text{als } \chi(x)>\mu\end{cases}$$

en $e_\mu\circ\chi$ behoort dus niet noodzakelijk tot $C([0,1])$; we kunnen dit bezwaar ondervangen door van meet af aan te nemen $R := K^{\sim}([0,1])$; alweer volgens de stelling van Lebesgue is daarin $\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ gedefinieerd, en de overige beweringen gaan gewoon door.

Als $\varphi \in C([\min(\chi),\max(\chi)]$, is φ uniform door polynomen $\{p_n\}_{n\in Nt}$ te benaderen, en uniforme convergentie is sterker dan die in norm $\| \ \|_2$; dus

$$\varphi(T_\chi)f = T_{\varphi\circ\chi}f$$

en

$$\varphi(T_\chi) = T_{\varphi\circ\chi} .$$

Als $V_\mu := \{x \in [0,1] \mid \chi(x) > \mu\}$, dan is

$$\mu < \nu \Rightarrow V_\mu \supset V_\nu .$$

Als $R_\mu := \{f \in R \mid f^{\leftarrow}(0) \supset V_\mu\}$, dan is

$$\mu < \nu \Rightarrow R_\mu \subset R_\nu$$

en voor iedere μ is R_μ een lineaire deelruimte van R; in het bijzonder is voor $\mu \geqslant \max(\chi)$, $R_\mu = R$ en voor $\mu < \min(\chi)$ is $R_\mu = \{\sigma\}$.

Volgens het bovenstaande is

$$(E_\mu f)(x) = ((e_\mu \circ \chi)f)(x) = \begin{cases} \chi(x)f(x) & \text{als } x \notin V_\mu \\ 0 & \text{als } x \in V_\mu \end{cases}$$

zodat $(E_\mu f)^{\leftarrow}(0) \supset V_\mu$ en $E_\mu f \in R_\mu$, $E_\mu(R) \subset R_\mu$.

Als we nu van χ nog onderstellen dat $\min(\chi) > 0$ (zodat $T_\chi \geqslant \sigma$), dan is het niet moeilijk om in te zien dat $E_\mu(R) = R_\mu$; E_μ is dan projectie op de deelruimte R_μ; de schaar $\{E_\mu\}$ groeit hier continu, de ruimten R_μ hebben een oneindige dimensie (als $\overline{V}_\mu \neq [0,1]$).

9.3.17. <u>Voorbeeld 7</u>: Zij $Q := Rt \cap [0,1]$ en

$$R := \{f \in Cm^Q \mid \Sigma_{q\in Q} |f(q)|^2 < \infty\} ;$$

de operator T wordt gedefinieerd door

$$(Tf)(q) := qf(q) \qquad (f \in R,\ q \in Q).$$

Bepaal $m(T)$, $M(T)$, de schaar $\{E_\mu\}_\mu$ en verifieer voor deze operator 9.3.11, 9.3.12 en 9.3.14.

9.3.18. Voorbeeld 8: Zij R een SH-ruimte en T een compacte hermitische operator. Volgens § 5.1 (en in het bijzonder 5.1.8) kunnen de eigenwaarden en eigenvectoren worden ingedeeld als volgt:

$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots > 0$ (en als er aftelbaar veel zijn, $\downarrow 0$), met orthonormale eigenvectoren $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$;

$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \ldots < 0$ (en als er aftelbaar veel zijn, $\uparrow 0$), met orthonormale eigenvectoren $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$;

0, met orthonormale eigenvectoren $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$.

$\{\varphi_j\}_j \cup \{\psi_k\}_k \cup \{\chi_\ell\}_\ell$ is een totaal orthonormaalsysteem, en

$$T(\Sigma_j \alpha_j \varphi_j + \Sigma_k \beta_k \psi_k + \Sigma_\ell \gamma_\ell \chi_\ell) = \Sigma_j \lambda_j \alpha_j \varphi_j + \Sigma_k \mu_k \beta_k \psi_k .$$

Men kan nu wel inzien dat

$$E_\nu(\Sigma_j \alpha_j \varphi_j + \Sigma_k \beta_k \psi_k + \Sigma_\ell \gamma_\ell \chi_\ell) = \Sigma_j e_\nu(\lambda_j)\alpha_j \varphi_j + \Sigma_k e_\nu(\mu_k)\beta_k \psi_k + \\ + e_\nu(0)\Sigma_\ell \gamma_\ell \chi_\ell .$$

De schaar $\{E_\nu\}_\nu$ groeit hier bij iedere μ_k en bij iedere λ_j met een ruimte van eindige dimensie; bij 0 groeit ze met de eigenruimte $\overleftarrow{T}(o)$, die wel van oneindige dimensie kan zijn.

9.4. Analytische functies van een operator

R is een SH-ruimte, T een hermitische operator van R.

$$\Gamma := \{\gamma \in Cm \mid \gamma \in R\ell \Rightarrow [\gamma < m_T \vee \gamma > M_T]\} .$$

9.4.1. Als $\zeta \in \Gamma$ is $\varphi(\lambda) := (\zeta - \lambda)^{-1}$ gedefinieerd en continu op het interval $[m_T, M_T]$, en volgens het voorgaande is dan ook $\varphi(T)$ gedefinieerd.

Omdat $(\zeta-\lambda)\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda)(\zeta-\lambda) = 1$ is volgens het in § 9.3 besprokene

$$(\zeta I - T)\varphi(T) = \varphi(T)(\zeta I - T) = I\ ;$$

met andere woorden: voor $\zeta \in \Gamma$ heeft de operator $\zeta I - T$ een begrensde tweezijdige inverse.

9.4.2. Zij Ω een open verzameling in Cm, die het interval $[m_T, M_T]$ omvat: $[m_T, M_T] \subset \Omega$. Zij W een contour in $\Omega \cap \Gamma$, die éénmaal in positieve zin om $[m_T, M_T]$ loopt. Zij χ een functie op Cm, die op Ω analytisch is. Dan geldt ([A], p. 119)

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\chi(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta$$

voor iedere λ die binnen W ligt, dus voor iedere $\lambda \in [m_T, M_T]$.

We zullen de formule interpreteren die hieruit ontstaat door substitutie van T in plaats van λ.

De integraal in het rechterlid kan worden benaderd door W te vervangen door een polynoom $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_n = \zeta_0\}$ met $\forall_{j=0,1,\ldots,n}\ \zeta_j \in W$, en wel zó dat

$$\left|\chi(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\chi(\zeta_j)}{\zeta_j - \lambda}(\zeta_{j+1} - \zeta_j)\right| < \varepsilon$$

door $\max\{|\zeta_{j+1} - \zeta_j| \mid j = 0,1,\ldots,n-1\}$ klein genoeg te nemen. De zo verkregen formule bevat alleen functies die op $[m_T, M_T]$ continu van λ afhangen en is uniform in λ (op $[m_T, M_T]$) omdat de afstand van $[m_T, M_T]$ tot W positief is.

Volgens 9.3.5 en 9.4.1 volgt hieruit

$$\left\|\chi(T) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \chi(\zeta_j)(\zeta_{j+1} - \zeta_j)(\zeta_j I - T)^{-1}\right\| < \varepsilon$$

en dit is precies de betekenis van

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \chi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta\ .$$

9.4.3. Het in 9.4.2 beschreven procédé berust op de mogelijkheid continue functies van T te definiëren, zoals in 9.3.5 is beschreven; het rechterlid van de formule van 9.4.2 heeft evenwel betekenis in alle situaties waarin over de operator $(\zeta I - T)^{-1}$ kan worden beschikt; in dergelijke gevallen kan men definiëren

$$\chi(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_W \chi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta$$

mits de integraal in het rechterlid bestaat.

Zulke uitweidingen behoren thuis in de theorie van de Banachalgebras. Een eenvoudig voorbeeld daarvan is de algebra $BLO(R^n)$ van de lineaire operatoren van R^n; dan is $1 \leq \operatorname{card} \sigma(T) \leq n$, en voor een W met $W \cap \sigma(T) = \emptyset$ bestaat $\frac{1}{2\pi i} \int_W \chi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta$. Dit is een integraal van een matrix, waarbij men plaats voor plaats de matrix kan integreren. Als W een contour is die om ieder punt uit $\sigma(T)$ éénmaal rondloopt, moet de aldus door

$$\chi(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_W \chi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta$$

gedefinieerde matrix dezelfde zijn als de op grond van 9.3.5 bepaalde.

Zij dus χ een functie die op een open verzameling Ω in Cm is gedefinieerd, χ is analytisch in Ω (in de zin van [A], p. 24; vergelijk [A], p. 275 e.v.).

Zij T een matrix en $\sigma(T) \subset \Omega$; W is een contour in Ω met de eigenschap dat W om iedere $\lambda \in \sigma(T)$ precies één keer in positieve zin omloopt; als W de vereniging is van een aantal Jordankrommen $W_1, \ldots, W_m$ wil dit zeggen

$$\forall_{\lambda \in \sigma(T)} \left[\left[\exists_{j(\lambda) \in \{1,\ldots,m\}} \int_{W_{j(\lambda)}} \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda} = 2\pi i \right] \wedge \left[\forall_{k \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{j(\lambda)\}} \int_{W_k} \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda} = 0 \right] \right]$$

9.4.4. Stelling: De operator

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \chi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta$$

is onafhankelijk van de gekozen weg W.

Bewijs: Voor de coëfficiënt α_{jk} van $\chi(T)$ is

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \int_W \chi(\zeta)\theta_{jk}(\zeta) d\zeta \ ,$$

waarin $\theta_{jk}(\zeta)$ de overeenkomstige coëfficiënt van $(\zeta I - T)^{-1}$ is; $\theta_{jk}(\zeta)$ is onder de gegeven omstandigheden continu op $\Omega \setminus \sigma(T)$. Als V een andere weg in Ω is, met dezelfde eigenschappen ten aanzien van $\sigma(T)$ als W, dan is (stelling van Cauchy, [A] p. 109 e.v.)

$$\int_{W-V} \chi(\zeta)\theta_{jk}(\zeta) d\zeta = 0$$

zodat

$$\int_W \chi(\zeta)\theta_{jk}(\zeta) d\zeta = \int_V \chi(\zeta)\theta_{jk}(\zeta) d\zeta \ . \qquad \square$$

9.4.5. Stelling: Als $\alpha \in \mathbb{C}$m, φ en ψ analytisch zijn op Ω, W en $\sigma(T)$ zijn als in 9.4.3, dan geldt

i: $(\alpha\varphi)(T) = \alpha\varphi(T)$.

ii: $(\varphi + \psi)(T) = \varphi(T) + \psi(T)$.

Bewijs: Triviaal. $\square$

9.4.6. Stelling: Voor $|\zeta| > \|T\|$ is

$$(\zeta I - T)^{-1} = \zeta^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^{-j} T^j \ .$$

Bewijs: Gevolg van 6.1.3. $\square$

9.4.7. Stelling: $I = \frac{1}{2\pi i} \int_W (\zeta I - T)^{-1} \, d\zeta$.

Bewijs: De functie 1 is analytisch in Cm; neem voor W de cirkel met middelpunt 0 en straal $r > \|T\|$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_W (\zeta I - T)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_W \zeta^{-} \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^{-j} T^j \, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_W I \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \int_W \zeta^{-j-1} T^j \, d\zeta \, .$$

Hierin is de volgorde van sommatie en integratie verwisseld, hetgeen geoorloofd is (vraagstuk

$$\frac{1}{2\pi i} \int_W (\zeta I - T)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} I \int_W \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} T^j \int_W \frac{d\zeta}{\zeta^{j+1}} = I + 0 = I \, . \; \square$$

9.4.8. Stelling: $T^n = \frac{1}{2\pi i} \int_W \zeta^n (\zeta I - T)^{-1} \, d\zeta \quad (n \in Nt)$.

Bewijs: Geheel analoog aan het bewijs van 9.4.7 is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_W \zeta^n (\zeta I - T)^{-1} \, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \int_W \zeta^{n-j-1} T^j \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_W \zeta^{-1} T^n \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=n+1}^{\infty} \int_W \zeta^{n-j-1} T^j \, d\zeta$$

$$= 0 + T^n + 0 \, .$$ $\square$

9.4.9. Stelling: Als p een polynoom is, is

$$p(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_W p(\zeta)(\zeta I - T)^{-1} \, d\zeta \, .$$

Bewijs: Gevolg van 9.4.5, 9.4.7 en 9.4.8. $\square$

9.4.10. Stelling: Als φ en ψ analytisch zijn op Ω, W en $\sigma(T)$ als in 9.4.3, dan is

$$(\varphi\psi)(T) = \varphi(T)\psi(T) .$$

Bewijs: W bestaat uit een eindig aantal Jordankrommen, en het is geen beperking om aan te nemen dat die onderling disjunct zijn; $W = W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n$. Zij

$$J_{k\ell} := \int_{W_k} \varphi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta \int_{W_\ell} \psi(\eta)(\eta I - T)^{-1}\, d\eta , \quad (k = 1,\ldots,n;\ \ell = 1,\ldots,n) ,$$

zodat (omdat de bewerking geoorloofd is; vraagstuk

$$J_{k\ell} = \int_{W_k}\int_{W_\ell} \varphi(\zeta)\psi(\eta)(\zeta I - T)^{-1}(\eta I - T)^{-1}\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \int_{W_k}\int_{W_\ell} \frac{\varphi(\zeta)\psi(\eta)}{\eta - \zeta}\left((\zeta I - T)^{-1} - (\eta I - T)^{-1}\right) d\eta\, d\zeta$$

$$= \int_{W_k} \varphi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1} \int_{W_\ell} \frac{\psi(\eta)d\eta}{\eta - \zeta}\, d\zeta - \int_{W_\ell} \psi(\eta)(\eta I - T)^{-1} \int_{W_k} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\eta - \zeta}\, d\eta .$$

Als $k \neq \ell$, is $\frac{\psi(\eta)}{\eta - \zeta}$ analytisch op $\Omega \setminus \{\zeta\}$ en $W_\ell \subset \Omega \setminus \{\zeta\}$; dus $\int_{W_\ell} \frac{\psi(\eta)d\eta}{\eta - \zeta} = 0$; evenzo $\int_{W_k} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\eta - \zeta} = 0$. Dus voor $k \neq \ell$ is $J_{k\ell} = 0$.

We kunnen in de laatste formule W_k door een Jordankromme V_k vervangen, die in het buitengebied van W_k ligt. Dan is voor alle k en ℓ zó dat V_k geen punten binnen W_ℓ bevat

$$J_{k\ell} = \int_{V_k} \varphi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1} \int_{W_\ell} \frac{\psi(\eta)d\eta}{\eta - \zeta}\, d\zeta - \int_{W_\ell} \psi(\eta)(\eta I - T)^{-1} \int_{V_k} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\eta - \zeta}\, d\eta .$$

In het bijzonder is

$$J_{kk} = \int_{V_k} \varphi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1} \int_{W_k} \frac{\psi(\eta)d\eta}{\eta - \zeta}\, d\zeta - \int_{W_k} \psi(\eta)(\eta I - T)^{-1} \int_{V_k} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\eta - \zeta}\, d\eta$$

en nu is

$$\forall_{\zeta \in V_k} \int_{W_k} \frac{\psi(\eta)d\eta}{\eta - \zeta} = 0 ,$$

zodat

$$J_{kk} = \int_{W_k} \psi(\eta)(\eta I - T)^{-1} \int_{V_k} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - \eta}\, d\eta \ .$$

Als $\eta \in W_k$ is $\displaystyle\int_{V_k} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - \eta} = 2\pi i\ \varphi(\eta)$, dus

$$J_{kk} = \int_{W_k} \varphi(\eta)\psi(\eta)(\eta I - T)^{-1}\, d\eta \ .$$

Maar nu volgt direct

$$\int_{W} \varphi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}\, d\zeta \int_{W} \psi(\eta)(\eta I - T)^{-1}\, d\eta =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{W_k} \varphi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1} d\zeta\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} \int_{W_\ell} \psi(\eta)(\eta I - T)^{-1} d\eta\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} J_{k\ell} = \sum_{k=1}^{n} J_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \int_{W_k} \varphi(\zeta)\psi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1} d\zeta =$$

$$= \int_{W} \varphi(\zeta)\psi(\zeta)(\zeta I - T)^{-1} d\zeta \ ,$$

of

$$\varphi(T)\psi(T) = (\varphi\psi)(T) \ .$$

□

9.5. Unitaire operatoren

9.5.1. Stelling: Zij R een SH-ruimte, zij T een hermitische operator van R; dan geldt: $e^{2\pi i T}$ is een unitaire operator.

Bewijs: Volgens 9.3.11 is

$$e^{2\pi i T} = \int_{m(T)}^{M(T)+} e^{2\pi i \mu}\, d E_\mu \ ;$$

volgens 9.3.5.vi en 9.3.11 is

$$(e^{2\pi iT})^* = \int_{m(T)}^{M(T)+} e^{-2\pi i\mu}\, dE_\mu$$

en volgens 9.3.5.v en 9.3.11 is

$$(e^{2\pi iT})^{-1} = \int_{m(T)}^{M(T)+} e^{-2\pi i\mu}\, dE_\mu$$

zodat $(e^{2\pi iT})^{-1} = (e^{2\pi iT})^*$; volgens 9.1.3 is $e^{2\pi iT}$ unitair. □

9.5.2. <u>Opmerking</u>: Voor $T' := (M_T - m_T)^{-1}T - m_T(M_T - m_T)^{-1}I$ is T' hermitisch, $M(T') = 1$, $m(T') = 0$. De bij T' behorende schaar van projectoren zij $\{E'_\mu\}_\mu$; dan geldt:

de operator $\int_0^{1+} e^{2\pi i\mu}\, dE'_\mu$ is unitair.

9.5.3. <u>Stelling</u>: Als U een unitaire operator van de SH-ruimte R is, is er een schaar van projectoren $\{E_\mu\}_\mu$ zó dat

$$U = \int_0^{1+} e^{2\pi i\mu}\, dE_\mu .$$

<u>Bewijs</u>: [RN], p. 278; [BN], pp. 488 e.v. □

9.5.4. <u>Verband met het trigonometrisch momentenprobleem</u>

Zij U een unitaire operator van de SH-ruimte R, en zij g een vast element van R. We beschouwen de rij

$$\mu_n := (U^n g, g) , \qquad n \in Gh .$$

Deze rij voldoet aan de in 8.3.7 genoemde voorwaarde:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \mu_{k-\ell}\, \rho_k \overline{\rho_\ell} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} (U^{k-\ell}g, g)\rho_k \overline{\rho_\ell} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} (U^k g, U^\ell g)\rho_k \overline{\rho_\ell} \quad , \quad \text{wegens } U \text{ unitair,}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \rho_k U^k g , \sum_{\ell=0}^{n} \rho_\ell U^\ell g \right) = \| \sum_{k=0}^{n} \rho_k U^k g \|^2 \geq 0 \ .$$

Volgens 8.3.7 is er een monotoon niet-dalende functie γ op $[0,1+]$ met

$$\forall_{n \in Gh} \ (U^n g, g) = \int_0^{1+} e^{2\pi i n x} \, d\gamma(x) \ .$$

Als gevolg van het feit dat

$$U^n = \int_0^{+1} e^{2\pi i n \mu} \, dE_\mu$$

(zie [RN], p. 281) en een analogon van 9.3.12.ii is dus

$$\int_0^{1+} e^{2\pi i n x} \, d\gamma(x) = \int_0^{1+} e^{2\pi i n \mu} \, d(E_\mu g, g) \ ,$$

met andere woorden: de functie $\gamma(x)$ van stelling 8.3.7 kan in dit geval expliciet worden beschreven met behulp van de projectorenschaar $\{E_\mu\}_\mu$ door

$$\gamma(x) = (E_x g, g) \ .$$

Omgekeerd kan men de theorie van de unitaire operatoren behandelen uitgaande van het momentenprobleem (zie $[Br]_1$).

9.6. Zelfgeadjungeerde operatoren van H-ruimten

[BN], hoofdstuk 29

[RN], hoofdstuk VIII

[T], hoofdstuk 6.

10. Lebesgue-integratie theorie

Zie [Br]$_3$, [Br]$_2$, [R], [Wl].

11. Mikusinski's gegeneraliseerde functies

11.1. Inleiding

11.1.1. Zij $C := \{f \in Cm^{[0,\infty)} \mid f \text{ is continu}\}$. Men kan C beschouwen als een functieruimte, en ook als een functiering met de gewone puntsgewijze optelling

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

en vermenigvuldiging

$$(fg)(x) := f(x)g(x) \text{ .}$$

We beschouwen evenwel nog een andere bewerking, namelijk de convolutie:

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(t)g(x-t)dt \text{ ,} \qquad x \geq 0 \text{ .}$$

11.1.2. Stelling: $f * g \in C$.

Bewijs: Zij $0 < |h| < x$, zij $\xi = \min\{x, x+h\}$ en zij $\eta = \max\{x, x+h\}$, zodat $0 < \xi, \eta < 2x$. Dan is

$$|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| = |\int_0^{x+h} f(t)g(x+h-t)dt - \int_0^x f(t)g(x-t)dt| =$$

$$= |\int_0^\eta f(t)g(\eta-t)dt - \int_0^\xi f(t)g(\xi-t)dt| \leq$$

$$\leq |\int_0^\eta f(t)g(\eta-t)dt - \int_0^\xi f(t)g(\eta-t)dt| +$$

$$+ |\int_0^\xi f(t)g(\eta-t)dt - \int_0^\xi f(t)g(\xi-t)dt| \leq$$

$$\leq \int_\xi^\eta |f(t)||g(\eta-t)|dt + \int_0^\xi |f(t)||g(\eta-t) - g(\xi-t)|dt \text{ .}$$

De begrensdheid van f en g op $[0,2x]$ en de uniforme continuïteit van g op $[0,2x]$ garanderen dat bij $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat met

$$|h| = \eta - \xi < \delta \Rightarrow |(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| < \varepsilon . \qquad \square$$

11.1.3. Zij C_Λ de lineaire deelruimte van C die de absoluut integreerbare functies bevat:

$$C_\Lambda := \left\{ f \in C \;\middle|\; \int_0^\infty |f(t)|dt < \infty \right\} .$$

Als $u \in$ Cm en Re $u > 0$ is

$$\left| \int_p^q e^{-ut} f(t)dt \right| \leq \int_p^q e^{-\mathrm{Re}\, ut} |f(t)|dt \leq \int_p^q |f(t)|dt .$$

Voor iedere $f \in C_\Lambda$ en voor iedere u met Re $u > 0$ of $u = 0$ bestaat derhalve

$$\int_0^\infty e^{-ut} f(t)dt .$$

Men noemt de afbeelding Λ, gedefinieerd door

$$(\Lambda f)(u) := \int_0^\infty e^{-ut} f(t)dt , \qquad \mathrm{Re}\, u > 0 \text{ of } u = 0 ,$$

de <u>Laplacetransformatie</u>.

11.1.4. <u>Stelling</u>: Voor $f \in C_\Lambda$ is Λf continu in 0 en analytisch voor Re $u > 0$.

<u>Bewijs</u>: Continuïteit is een direct gevolg van stelling 9.4, Algebra en Analyse.

Als Re $u > 0$ en Re$(u+h) > 0$ is

$$(\Lambda f)(u+h) - (\Lambda f)(u) = \int_0^\infty \{e^{-(u+h)t} - e^{-ut}\} f(t)dt ,$$

zodat

$$\frac{(\Lambda f)(u+h)-(\Lambda f)(u)}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-ht}-1}{h}\, e^{ut}\, f(t)dt\ .$$

Eveneens op grond van A & A, stelling 9.4, is, door de limiet voor $h \to 0$ te nemen

$$(\Lambda f)'(u) = \int_0^\infty t\, e^{ut}\, f(t)dt\ . \qquad \square$$

11.1.5. Opmerking: In het vervolg nemen we (tenzij anders vermeld) u reëel; dan is Λf een continue functie op $[0,\infty)$ en Λ stelt een afbeelding voor van C_Λ in C.

11.1.6. Stelling: Λ is lineair en bovendien geldt

$$\Lambda(f * g) = \Lambda f . \Lambda g\ .$$

Bewijs: Dat Λ lineair is, is vrijwel triviaal.

$$\Lambda(f * g)(u) = \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t f(s)g(t-s)ds\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-ut}\, f(s)g(t-s)ds\, dt\ .$$

Door de transformatie

$$\xi = s,\ \eta = t-s$$

gaat de integraal over in

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u(\xi+\eta)}\, f(\xi)g(\eta)d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_0^\infty e^{-u\xi}\, f(\xi)d\xi \int_0^\infty e^{-u\eta}\, g(\eta)d\eta = (\Lambda f)(u)(\Lambda g)(u)\ . \qquad \square$$

11.1.7. Aangezien puntsgewijze vermenigvuldiging in C commutatief en associatief is, zodat voor alle f, g en h in C_Λ geldt

$$\Lambda(f * g) = \Lambda(g * f)$$

en

$$\Lambda(f * (g * h)) = \Lambda((f * g) * h)$$

ligt het voor de hand te onderzoeken of ook $*$ een commutatieve en associatieve operatie is; dit blijkt zo te zijn:

11.1.8. Stelling: Voor alle f, g, h in C geldt

$$f * g = g * f \quad \text{en} \quad f * (g * h) = (f * g) * h .$$

Bewijs: Vraagstuk □

11.1.9. Stelling: Met de operaties $+$ en $*$ is C een commutatieve ring.

Bewijs: Vraagstuk □

11.2. De stelling van Titchmarsh

C is als in 11.1.

11.2.1. Stelling: Als $f \in C$ en $T \in (0,\infty)$, en als

$$\forall_{n \in \mathbb{N}t \cup \{0\}} \int_0^T f(t)t^n \, dt = 0$$

dan is $\forall_{t \in [0,T]} \; f(t) = 0$.

Bewijs: Er is een rij polynomen $\{p_k\}_k$ die f op $[0,T]$ uniform benadert, en omdat uit het gegeven volgt dat

$$\forall_{k \in \mathbb{N}t} \int_0^T f(t)\overline{p_k(t)} \, dt = 0$$

geldt (door $k \to \infty$)

$$\int_0^T f(t)\overline{f(t)} \, dt = 0$$

zodat op grond van de continuïteit van f

$$\forall_{t \in [0,T]} \; f(t) = 0 \; .$$ □

11.2.2. <u>Stelling</u>: Als $f \in C$, $T \in (1,\infty)$ en

$$\exists_{M>0} \; \forall_{n=0,1,2,\ldots} \; \left| \int_0^T f(t) t^n \, dt \right| < M$$

dan is $\quad \forall_{t \in [1,T]} f(t) = 0$.

<u>Bewijs</u>: Neem $a \in (1,T]$ en beschouw

$$g_k(t) := 1 - \exp\left(- \left(\frac{t}{a}\right)^k \right) \qquad (t \geq 1) .$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Als } t < a \text{ dan } g_k(t) \to 0 \text{ voor } k \to \infty \\ \text{Als } t > a \text{ dan } g_k(t) \to 1 \text{ voor } k \to \infty \end{array}\right\} \text{ uniform buiten iedere omgeving van } a.$$

Zij $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = I$ zo'n omgeving, met $a - \varepsilon > 1$. Dan is

$$\int_{a+\varepsilon}^T f(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int_{a+\varepsilon}^T g_k(t) f(t) dt \; ,$$

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_1^{a-\varepsilon} g_k(t) f(t) dt \; .$$

Op grond van de uniforme convergentie van de machtreeksontwikkeling van de exponentiële functie is

$$\int_1^T g_k(t) f(t) dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} \int_1^T \left(\frac{t}{a}\right)^{k\nu} f(t) dt$$

en in verband met het gegeven volgt hieruit

$$\left| \int_1^T g_k(t) f(t) dt \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{M}{a^{k\nu}} = M(\exp(a^{-k}) - 1)$$

zodat

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^T g_k(t) f(t) dt = 0 \; .$$

Als N een bovengrens is voor $|f(x)|$ op $[0,T]$ volgt uit

$$\int_1^T g_k(t)f(t)dt = \int_1^{a-\varepsilon} g_k(t)f(t)dt + \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} g_k(t)f(t)dt + \int_{a+\varepsilon}^{T} g_k(t)f(t)dt$$

door limietovergang $(k \to \infty)$

$$\left| \int_{a+\varepsilon}^{T} f(t)dt \right| \leqslant 2\varepsilon N$$

zodat

$$\int_a^T f(t)dt = 0 .$$

Omdat dit resultaat geldt voor alle $a > 1$, volgt

$$\forall_{x \in (1,T]} \; f(x) = 0$$

en uit de continuïteit van f bovendien $f(1) = 0$. □

11.2.3. Stelling: Als $f \in C$, $a > 0$ en

$$\forall_{x \in [0,2a]} \; (f * f)(x) = 0$$

dan geldt

$$\forall_{x \in [0,a]} \; f(x) = 0 .$$

Bewijs: Zij voor $n \in \mathbb{N}^+$

$$I_n := \left(\int_0^{2a} f(t)e^{-nt} \, dt \right)^2 = \int_0^{2a} \int_0^{2a} f(t)f(s)e^{-n(t+s)} \, ds \, dt .$$

Zij $\quad G_1 := \{(t,s) \in [0,2a] \times [0,2a] \mid t+s \leqslant 2a\}$

en $\quad G_2 := [0,2a] \times [0,2a] \setminus G_1 .$

Door de substitutie $u = t+s$, $v = t$ gaat de integraal op G_1 over in

$$\iint_{G_1} = \int_0^{2a} du \int_0^u f(v)f(u-v)e^{-nu} \, dv = \int_0^{2a} e^{-nu}(f * f)(u)du = 0 .$$

De integraal van G_2 levert (met M als bovengrens voor $|f|$ op $[0,2a]$)

$$\Big|\iint\limits_{G_2}\Big| \leq 4a^2\, e^{-2na}\, M^2$$

zodat ook

$$I_n \leq 4a^2 M^2 e^{-2na} ,$$

$$\Big|\int_0^{2a} f(t)e^{-nt}\, dt\Big| \leq 2aMe^{-na}$$

en

$$\Big|\int_0^{2a} f(t)e^{n(a-t)}\, dt\Big| \leq 2aM .$$

Hieruit volgt

$$\Big|\int_0^{a} f(t)e^{n(a-t)}\, dt\Big| \leq 2aM + \Big|\int_a^{2a} f(t)e^{n(a-t)}\, dt\Big| \leq$$

$$\leq 2aM + aM = 3aM .$$

Substitueer nu $x = e^{a-t}$ zodat

$$\Big|\int_1^{e^a} f(a - \log x)x^{n-1}\, dx\Big| \leq 3aM \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}^+.$$

Volgens 11.2.2 is nu

$$1 \leq x \leq e^a \Rightarrow f(a - \log x) = 0 ,$$

of

$$0 \leq t \leq a \Rightarrow f(t) = 0 .$$ □

11.2.4. Stelling: Als $f \in C$ en $g \in C$ en $f \bar{*} g = \sigma$, dan geldt $f = \sigma$ of $g = \sigma$. (Stelling van Titchmarsh.)

Bewijs: Voor $n = 0,1,2,\ldots$ definiëren we

$$f_n(x) := x^n f(x) , \quad g_n(x) := x^n g(x) .$$

Nu is

$$(f_1 * g)(x) + (f * g_1)(x) = \int_0^x tf(t)g(x-t)dt + \int_0^x f(t)(x-t)g(x-t)dt =$$

$$= \int_0^x \{t+(x-t)\}f(t)g(x-t)dt = x(f * g)(x) = 0$$

zodat

$$f_1 * g + f * g_1 = \sigma .$$

Uit deze identiteit volgt dat

$$(f * g_1) * (f * g_1) = -(f_1 * g) * (f * g_1) =$$

$$= -(f * g) * (f_1 * g_1) = \sigma ,$$

en volgens 11.2.3 is dan $f * g_1 = \sigma$.

Nu passen we dezelfde redenering toe op f en g_1, zodat

$$f * g_2 = \sigma ,$$

en met behulp van volledige inductie blijkt

$$\forall_{n=0,1,2,\ldots}\ f * g_n = \sigma .$$

Dat wil zeggen

$$\forall_{x\in[0,\infty)}\ \forall_{n=0,1,2,\ldots}\ \int_0^x f(x-t)g(t)t^n = 0$$

zodat volgens 11.2.1

$$\forall_{x\in[0,\infty)}\ \forall_{t\in[0,x]}\ f(x-t)g(t) = 0 ,$$

en hieruit blijkt

$$\forall_{x\in[0,\infty)}\ \forall_{t\in[0,\infty)}\ f(x)g(t) = 0 ,$$

zodat $f = \sigma$ of $g = \sigma$. □

11.2.5. Opmerking: 11.1.9 en 11.2.4 zeggen samen: C is, met $+$ en $*$ als operaties, een commutatieve ring zonder nuldelers.

11.3. Overzicht van de theorie van Mikusinski

Een commutatieve ring zonder nuldelers kan worden ingebed in een lichaam, zie [Wa]. Voor de ring C verloopt dit proces als volgt: Men beschouwt de paren $[f,g]$ met $f \in C$ en $g \in C \setminus \{\sigma\}$. Door de equivalentierelatie

$$[f,g] \sim [f',g'] :\Leftrightarrow f * g' = g * f'$$

ontstaat een verzameling M van klassen; de klasse waarvan het paar $[f,g]$ een representant is geven we aan met

$$f \div g .$$

In M worden optelling en (convolutie-)vermenigvuldiging gedefinieerd door

$$(f \div g) + (\tilde{f} \div \tilde{g}) := (f * \tilde{g} + \tilde{f} * g) \div (g * \tilde{g})$$

en

$$(f \div g) * (\tilde{f} \div \tilde{g}) := (f * \tilde{f}) \div (g * \tilde{g}) .$$

Het nulelement van M is $\sigma \div f$:

$$(\sigma \div f) + (g \div h) = (\sigma * h + f * g) \div (f * h) = (f * g) \div (f * h) = g \div h .$$

Het eenheidselement van M is $f \div f$:

$$(f \div f) * (g \div h) = (f * g) \div (f * h) = g \div h .$$

De inbedding van C in M is de afbeelding

$$f \to (f * g) \div g .$$

Elementen van M die niet met een $f \in C$ te schrijven zijn als

$$(f * g) \div g$$

heten (M-)operatoren.

11.3.1. Stelling:

$\sigma \div f$ is geen operator.

$f \div f$ is een operator.

Bewijs: $\sigma = \sigma * f$, triviaal.

Als $f \div f$ geen operator is, is er een $h \in C$ met

$$f \div f = (h * g) \div g \ ,$$

dat wil zeggen, met

$$f * g = f * h * g \ .$$

of

$$f * g = h * (f * g)$$

voor alle $f \in C$ en alle $g \in C$. In het bijzonder is dan voor $f(x) = 1$, $g(x) = 1$

$$\forall_x \ x = \int_0^x h(t)(x-t)dt \ ,$$

door differentiëren

$$\forall_x \ 1 = \int_0^x h(t)dt$$

en door nogmaals differentiëren

$$\forall_x \ 0 = h(x)$$

of

$$h = \sigma .$$

Maar $(\sigma * g) \div g = \sigma \div g$, het nulelement van M; zo'n h bestaat dus niet. □

11.3.2. Men verifieert dat voor ieder element $f \div g$ van M dat ongelijk is aan $\sigma \div g$, de inverse gelijk is aan $g \div f$. In het bijzonder hoort bij iedere $f \in C \setminus \{\sigma\}$ een inverse $g \div (f * g)$.

We noteren de meest voorkomende operatoren met hoofdletters; in het bijzonder schrijven we

E voor het eenheidselement $f \div f$.

Elementen van M die corresponderen met elementen van C geven we met dezelfde letter aan:

f voor $(f * g) \div g$.

Inversen van zulke elementen geven we aan met

$$f^{inv} \text{ in plaats van } g \div (f * g)$$

ook als ze operator zijn.

Zij $\ell(x) := 1$ voor $x \geq 0$, dan is

$$(f * \ell)(x) = \int_0^x f(t)dt \; .$$

11.3.3. Stelling: $\forall_{n \in Nt} \; \ell^{[n]}(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$.

Bewijs: Triviaal. □

11.3.4. Stelling: ℓ^{inv} is een operator.

Bewijs: Als ℓ^{inv} correspondeert met een element $f \in C$ dan is

$$\ell^{inv} = (f * g) \div g$$

zodat

$$\ell = g \div (f * g)$$

of

$$\ell * (f * g) = g \quad \text{voor alle } g \neq \sigma \; .$$

In het bijzonder is dan

$$(\ell * \ell) * f = \ell$$

of

$$\forall_x \int_0^x f(t)(x-t)dt = 1$$

zodat (evenals in bewijs 11.3.1)

$$f = \sigma \; .$$

Maar $\ell^{inv} = (\sigma * g) \div g = \sigma$ is onmogelijk. □

11.3.5. Opmerking: De operator ℓ^{inv} speelt een belangrijke rol, en we noteren hem daarom met de speciale letter D.

11.3.6. Stelling: Als $D * f \in C$, dan is

$$f(0) = 0 \quad \text{en} \quad D * f = f' .$$

Bewijs: Zij $g := D * f \in C$, zodat

$$\ell * g = E * f = f$$

of

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt ;$$

hieruit volgt dat $f(0) = 0$ en $f' = g$. □

11.3.7. M als een algebra

In C bestaat als operatie ook vermenigvuldiging met scalairen:

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) .$$

Het is eenvoudig om in te zien dat naast de gewone rekenregels

$$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g ,$$

$$(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f ,$$

en

$$(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$$

ook geldt

$$\alpha(f * g) = (\alpha f) * g = f * (\alpha g) .$$

We breiden deze vermenigvuldiging met scalairen uit tot M:

$$\alpha(f \div g) := (\alpha f) \div g .$$

Als $f \div g \in C$, zodat er een $h \in C$ is met

$$f = g * h$$

dan is

$$(\alpha f) \div g = ((\alpha h) * g) \div g = \alpha h = \alpha(f \div g)$$

zodat in dit geval de nieuwe definitie samenvalt met de oude. Men ziet gemakkelijk dat (voor $\alpha \neq 0$)

$$\alpha(f \div g) = f \div (\alpha^{-1}g) \; .$$

Voorts

$$\alpha(f \div g + \tilde{f} \div \tilde{g}) = \alpha(f \div g) + \alpha(\tilde{f} \div \tilde{g})$$

$$(\alpha + \beta)(f \div g) = \alpha(f \div g) + \beta(f \div g)$$

$$\alpha((f \div g) * (\tilde{f} \div \tilde{g})) = (\alpha(f \div g)) * (\tilde{f} \div \tilde{g})$$

en

$$\alpha\beta(f \div g) = \alpha(\beta(f \div g)) \; .$$

11.3.8. Opmerking: In de uitdrukking $\alpha * f$ stelt α een constante functie voor: $\alpha * f = (\alpha\ell) * f = \alpha(\ell * f)$.

11.3.9. Stelling: Als f differentieerbaar is en $f' \in C$ dan is

$$f' = D * f - f(0)E \; .$$

Bewijs: $$(\ell * f')(x) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) \; ,$$

$$\ell * f' = f - f(0)\ell \; ,$$

$$f' = D * f - f(0)E \; .$$ □

11.3.10. Stelling: Als f n-maal differentieerbaar is, en $f^{(n)} \in C$, dan is

$$f^{(n)} = D^n * f - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0)D^{n-1-j}$$

(waarbij onder D^0 moet worden verstaan E).

Bewijs: Door volledige inductie toe te passen op 11.3.9. □

11.3.11. Opmerkingen:

$$\exp_\alpha(x) := e^{\alpha x}$$

$$\sin_\alpha(x) := \sin \alpha x$$

$$\cos_\alpha(x) := \cos \alpha x \; .$$

Voor gecompliceerde uitdrukkingen in operatoren gebruiken we in plaats van

$\div$ ook de gewone breukstreep

$$F \div G =: \frac{F}{G} .$$

11.3.12. Stelling: $\exp_\alpha = \dfrac{E}{D - \alpha E}$,

$$\sin_\alpha = \frac{\alpha E}{D^2 + \alpha^2 E^2} ,$$

$$\cos_\alpha = \frac{D}{D^2 + \alpha^2 E^2} .$$

Bewijs: De derde formule vinden we door $D^2 * \cos_\alpha$ te berekenen:

$$D * \cos_\alpha = - \alpha \sin_\alpha + E$$

$$D^2 * \cos_\alpha = - \alpha (D * \sin_\alpha) + D = - \alpha^2 \cos_\alpha + D$$

zodat

$$(D^2 + \alpha^2 E) * \cos_\alpha = D$$

en

$$\cos_\alpha = \frac{D}{D^2 + \alpha^2 E} ;$$

de andere formules volgen op analoge wijze. □

11.3.13. Voorbeeld: Los op het stelsel

$$\left.\begin{aligned} g'(x) - g(x) &= x \\ g(0) &= 1 \end{aligned}\right\} .$$

Voor de oplossing g geldt

$$D * f - E - g = \ell * \ell$$

$$(D - E) * g = E + \ell * \ell$$

$$g = \frac{E}{D - E} * (E + \ell * \ell) = \exp_1 * (E + \ell * \ell) = \exp_1 + \exp_1 * \ell^2$$

$$g(x) = e^x + \int_0^x t e^{x-t}\, dt = e^x + (e^x - x - 1) = 2e^x - x - 1 .$$

11.3.14. Definities: Zij $C_0 := \{f \in C \mid f(0) = 0\}$.

Voor alle $\lambda \geqslant 0$ en $f \in C_0$ zij

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant \lambda \\ f(x-\lambda) & \text{als } x \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Men ziet direct dat $f_\lambda \in C_0$.

11.3.15. Stelling: Als $f \in C_0$, $g \in C_0$ en $\lambda \geqslant 0$, dan is

$$f_\lambda \div f = g_\lambda \div g \ .$$

Bewijs: Het beweerde is equivalent met

$$f_\lambda * g = f * g_\lambda \ .$$

Nu is

$$(f_\lambda * g)(x) = \int_0^x f_\lambda(t)g(x-t)dt = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant \lambda \\ \int_\lambda^x f(t-\lambda)g(x-t)dt & \text{als } x \geqslant \lambda \end{cases}$$

$$(f * g_\lambda)(x) = \int_0^x g_\lambda(t)f(x-t)dt = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant \lambda \\ \int_\lambda^x g(t-\lambda)f(x-t)dt & \text{als } x \geqslant \lambda \ . \end{cases}$$

Laatstgenoemde integraal gaat door de substitutie $t = x+\lambda-s$ over in

$$\int_\lambda^x g(x-s)f(s-\lambda)ds \ . \qquad \square$$

11.3.16. Stelling: Het (van de keuze van $f \in C_0$ onafhankelijke) element $f_\lambda \div f$ van M is een operator, H_λ.

Bewijs: Als er een $h \in C$ met

$$f_\lambda \div f = h$$

is, zodat

$$f_\lambda = h * f$$

onafhankelijk van f in C_0, dan geldt in het bijzonder (wegens $\ell * \ell \in C_0$)

$$(\ell * \ell)_\lambda = h * (\ell * \ell)$$

of

$$\forall_{x \leqslant \lambda}\ 0 = \int_0^x h(t)(x-t)dt$$

en

$$\forall_{x \geqslant \lambda}\ x-\lambda = \int_0^x h(t)(x-t)dt\ .$$

Door tweemaal te differentiëren naar x komt er

$$\forall_{x \geqslant 0}\ h(x) = 0\ ,$$

dat wil zeggen $h = \sigma$ en

$$\forall_{f \in C_0 \setminus \{\sigma\}}\ f_\lambda = \sigma * f = \sigma\ ;$$

dit is niet waar. □

11.3.17. Stelling: Voor de schaar operatoren $\{H_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ geldt

$$H_\lambda * H_\mu = H_{\lambda+\mu}$$

zodat deze schaar een semigroep vormt met als eenheidselement $H_0 = E$.

Bewijs: Triviaal. □

11.3.18. Operatoren als gegeneraliseerde functies

Zij ℓ_λ de volgende functie:

$$\ell_\lambda(x) := \begin{cases} 0 \text{ als } 0 \leqslant x < \lambda \\ 1 \text{ als } x > \lambda. \end{cases}$$

Natuurlijk is ℓ_λ geen element van C; maar wel is voor $f \in C$ de convolutie gedefinieerd:

$$(\ell_\lambda * f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant \lambda \\ \int_\lambda^x f(x-t)dt & \text{als } x \geqslant \lambda \end{cases}$$

en men leidt hieruit direct af dat voor een $f \in C_0$ met $f' \in C$ geldt

$$\ell_\lambda * f' = f_\lambda .$$

Bij deze onderstellingen is $f' = D * f$ zodat

$$H_\lambda * f = f_\lambda = \ell_\lambda * D * f ,$$

of

$$"H_\lambda = \ell_\lambda * D" .$$

(Deze laatste conclusie is voorbarig, want delen is alleen binnen het lichaam M toegestaan.)

We geven aan H_λ op grond van "$H_\lambda = D * \ell_\lambda$" een interpretatie: we beschouwen de "afgeleide" van ℓ_λ, noemen die d_λ, en verstaan daaronder ongeveer het volgende

$$d_\lambda(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x \neq \lambda \\ \infty & \text{als } x = \lambda \end{cases}$$

en we eisen bovendien dat

$$\int_0^\infty d_\lambda(t)dt = 1 ,$$

zodat

$$h_\lambda(x) = \int_0^x d_\lambda(t)dt .$$

We kunnen, met enige vindingrijkheid, $d_\lambda * f$ definiëren: Zij

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } |x-\lambda| \geqslant \frac{1}{n} \\ n & \text{als } x = \lambda \\ \text{lineair voor } \lambda - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \lambda \text{ en ook voor } \lambda \leqslant x \leqslant \lambda + \frac{1}{n} \end{cases} ,$$

zodat, voor $\lambda > 0$, $\int_0^\infty g_n(t)dt = 1$ (als $n \geq \frac{1}{\lambda}$ is) en d kan worden opgevat als $\lim_{n\to\infty} g_n$ (puntsgewijs). Nu is

$$(g_n * f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < \lambda \text{ (en n groot genoeg)} \\ \int_{\lambda-1/n}^{\lambda+1/n} g_n(t)f(x-t)dt & \text{als } x \geq \lambda \text{ (en n groot genoeg).} \end{cases}$$

en

$$\int_{\lambda-1/n}^{\lambda+1/n} g_n(t)f(x-t)dt = \int_{\lambda-1/n}^{\lambda+1/n} g_n(t)f(x-\lambda)dt + I_n$$

waarin

$$I_n := \int_{\lambda-1/n}^{\lambda+1/n} g_n(t)(f(x-t)-f(x-\lambda))dt$$

zodat, voor n groot genoeg om $|f(x-t)-f(x-\lambda)| < \varepsilon$ te doen zijn,

$$|I_n| \leq \varepsilon \int_{\lambda-1/n}^{\lambda+1/n} g_n(t)dt = \varepsilon ,$$

en

$$\lim_{n\to\infty} (g_n * f)(x) = f(x-\lambda) = f_\lambda(x) ,$$

of

$$\text{"}\lim_{n\to\infty}\text{"}\ g_n * f = f_\lambda .$$

Zo is er een interpretatie gevonden voor de formule

$$d_\lambda * f = f_\lambda$$

en we zien dat de operator H_λ in deze zin overeenkomt met de gegeneraliseerde functie of distributie d_λ.

11.3.19. Opmerkingen: De "operatorenrekening" is afkomstig van Heaviside en door hem toegepast in de electrotechniek; de algebraïsche behandeling ervan, zoals in dit hoofdstuk weergegeven, is afkomstig van Mikusinski (zie [Mi]).

Er zijn nog verschillende variaties mogelijk, die hun eigen voor- en nadelen hebben; Bremmer en van de Pol definiëren

$$(f \bar{*} g)(x) := x \int_0^x f(t)g(x-t)dt \ ,$$

Berg gebruikt het zogenaamde Duhamelproduct

$$(f \bar{*} g)(x) := \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)g(x-t)dt \qquad ([Be]).$$

Het begrip "distributie" is afkomstig uit de quantummechanica; hiervan is de analytische formalisering uitgewerkt door Schwarz ([Sch]); zie hoofdstuk 12.

12. Gegeneraliseerde functie volgens Schwarz

12.1. De ruimte van quasi-analytische functies met compacte drager

12.1.1. Definities: Als $\varphi \in Cm^{R\ell}$, dan heet de verzameling

$$D(\varphi) := \overline{\{x \in R\ell \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

de drager van φ; als $D(\varphi)$ begrensd is, is ze compact, en dan heet φ een functie met compacte drager

Als φ een compacte drager heeft is er een interval $[a,b]$ met de eigenschap: $x \notin [a,b] \Rightarrow \varphi(x) = 0$.

Als $\varphi \in Cm^{R\ell}$ en als de afgeleiden van φ van alle orden bestaan, heet φ quasi-analytisch.

Zij $\Phi = \{\varphi \in Cm^{R\ell} \mid D(\varphi)$ is compact & φ is quasi-analytisch$\}$.

12.1.2. Stelling: $\Phi \neq \emptyset$ en $\Phi \neq \{\sigma\}$.

Bewijs: Zij $a < b$ en $\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant a \text{ of } x \geqslant b \\ \exp\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x-b}\right) & \text{als } a < x < b. \end{cases}$

Dan is $\varphi_{a,b} \in \Phi$. □

12.1.3. Stelling: Als $a < b < c < d$, dan is er een $\chi \in \Phi$ waarvoor

$$\forall_{x \in R\ell} \left[[x \notin [a,d] \Rightarrow \chi(x) = 0] \;\&\; [x \in [b,c] \Rightarrow \chi(x) = 1] \;\&\; [0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1] \right].$$

Bewijs: Met $\varphi_{a,b}$ en $\varphi_{c,d}$ als in 12.1.2 zij

$$\chi_{a,b}(x) := \frac{\int_{-\infty}^{x} \varphi_{a,b}(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,b}(t)dt} \quad \text{en } \chi_{c,d} \text{ analoog.}$$

Dan voldoet

$$\chi_{a,b,c,d} := \chi_{a,b}(1 - \chi_{c,d})$$

aan de voorwaarden. □

12.1.4. Stelling: Φ is een lineaire ruimte.

Bewijs: Triviaal. $\square$

12.1.5. Definitie: Een rij $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}t}$ in Φ heet d-convergent (of sterk convergent of, als geen misverstand kan ontstaan, convergent) als

i: $\exists_{a \in R\ell}\ \exists_{b \in R\ell}\ \forall_n\ D(\varphi_n) \subset [a,b]$,

ii: er een $\varphi \in \Phi$ is met de eigenschap

$$\forall_{k \in \mathbb{N}t \cup \{o\}}\ \forall_{\varepsilon > o}\ \exists_{N(k)}\ \forall_{n > N(k)}\ \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_\infty < \varepsilon\ .$$

De in ii. genoemde eigenschap drukt uit dat φ en iedere afgeleide van φ uniforme limiet zijn van de rijen van overeenkomstige afgeleiden.

12.1.6. Definitie: Een lineaire functionaal g van de vectorruimte Φ heet een distributie, indien voor iedere d-convergente rij $\{\varphi_n\}_n$ in Φ geldt

$$g\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(\varphi_n)\ .$$

De verzameling der distributies noteren we Φ^*. In plaats van $g(\varphi)$ schrijven we gewoonlijk $< g,\varphi >$.

12.1.7. Stelling: Φ^* is, als functieruimte opgevat, een lineaire ruimte.

Bewijs: Triviaal. $\square$

12.1.8. Voorbeelden:

i: $< g,\varphi > := \varphi(0)$; $g \in \Phi^*$.

ii: $< g,\varphi > := \varphi''(2)$; $g \in \Phi^*$.

iii: $< g,\varphi > := \sum_{k=o}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$; $g \in \Phi^*$.

iv: Zij LR de klasse van complexe functies, die op R gedefinieerd zijn en op iedere begrensd interval van R Riemann-integreerbaar ("lokaal Riemann-integreerbaar") zijn; zij $f \in$ LR. Door

$$< g_f, \varphi > := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

wordt een $g_f \in \Phi^*$ gedefinieerd. Zij ρ de afbeelding van LR in Φ^* met

$$\rho(f) := g_f \ .$$

ρ is blijkbaar een lineaire afbeelding; iedere distributie die tot de beeldruimte van ρ behoort, heet een <u>reguliere</u> distributie.

12.1.9. <u>Stelling</u>: De distributies 12.1.8.i,ii en iii zijn niet regulier.

<u>Bewijs</u>: Beschouw $< g, \varphi > := \varphi(0)$. Als g regulier is, is er een $f \in$ LR met

$$\forall_{\varphi \in \Phi} \ \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt \ .$$

i: Stel bovendien dat f continu is. Zij $a \neq 0$, beschouw dan de rij $\{\psi_n\}_n$ met $\psi_n := \gamma_n \ \varphi_{a-1/n, a+1/n}$ (vergelijk 12.1.2), waarin γ_n zó wordt gekozen dat $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t)dt = 1$, $(n = 1,2,3,\ldots)$. Als n groot genoeg is, is $\psi_n(0) = 0$ zodat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_n(t)dt = 0 \ .$$

Omdat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_n(t)dt = \int_{a-1/n}^{a+1/n} f(t)\psi_n(t)dt =$$

$$= f(a) \int_{a-1/n}^{a+1/n} \psi_n(t)dt + \int_{a-1/n}^{a+1/n} \{f(t) - f(a)\}\psi_n(t)dt \ ,$$

zodat

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_n(t)dt - f(a)\right| \leqslant \int_{a-1/n}^{a+1/n} |f(t) - f(a)|\psi_n(t)dt ,$$

volgt uit de continuïteit van f:

$$f(a) = 0$$

en bijgevolg

$$\forall_t\ f(t) = 0 .$$

ii: Neem $b \in R\ell$ en

$$F(u) := \int_b^u f(t)dt .$$

Omdat $f \in LR$ is F continu. Dan geldt voor iedere $\varphi \in \Phi$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)dF(u) ,$$

waarin de tweede integraal een Stieltjesintegraal voorstelt (vraagstuk). Nu is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)dF(u) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\varphi'(u)du$$

zodat

$$\forall_\varphi\ \varphi(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\varphi'(u)du .$$

Door een soortgelijke redenering als hiervoor vindt men dan

$$\forall_t\ F(t) = 0 ,$$

en hieruit

$$\forall_\varphi\ \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)dF(u) = 0 ,$$

en dit is niet juist.

Hiermee is het eerste geval bewezen; de andere twee beweringen bewijst men op analoge manier (zie vraagstuk □

12.2. Rekenen met distributies

Met $\int \psi(t)dt$ wordt bedoeld $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt$.

12.2.1. Definitie: Als $g \in \Phi^*$ en als ψ quasi-analytisch is zodat

$$\forall_{\varphi \in \Phi}\ \varphi\psi \in \Phi ,$$

dan wordt door

$$< g \otimes \psi, \varphi > := < g, \psi\varphi >$$

een lineaire functionaal van Φ gedefinieerd.

12.2.2. Stelling: $g \otimes \psi \in \Phi^*$.

Bewijs: Door verificatie. □

12.2.3. Stelling: Voor $f \in$ LR geldt

$$\rho(f) \otimes \psi = \rho(f\psi) .$$

Bewijs: $\forall_{\varphi \in \Phi} < \rho(f) \otimes \psi, \varphi > = < \rho(f), \psi\varphi > =$

$$= \int f(t)\psi(t)\varphi(t)dt = < \rho(f\psi), \varphi >$$

zodat

$$\rho(f) \otimes \psi = \rho(f\psi) .$$ □

12.2.4. Definitie: Als $g \in \Phi^*$ wordt g' gedefinieerd door

$$< g', \varphi > := - < g, \varphi' > ;$$

g' heet de <u>afgeleide</u> van g.

12.2.5. <u>Stelling</u>: $g' \in \Phi^*$.

<u>Bewijs</u>: Triviaal. □

12.2.6. <u>Stelling</u>: Voor een $f \in LR$ met $f' \in LR$ geldt

$$\rho(f)' = \rho(f') .$$

<u>Bewijs</u>: $\forall_{\varphi \in \Phi} < \rho(f)', \varphi > = - < \rho(f), \varphi' > = -\int f(t)\varphi'(t)dt =$

$$= - f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int f'(t)\varphi(t)dt = < \rho(f'), \varphi >$$

zodat

$$\rho(f)' = \rho(f') .$$ □

12.2.7. <u>Voorbeeld</u>: Zij de functie ℓ_α $(\alpha \in R\ell)$ gedefinieerd door

$$\ell_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x < \alpha \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = \alpha \\ 1 & \text{als } x > \alpha , \end{cases}$$

zodat $\ell_\alpha \in LR$ en $\rho(\ell_\alpha)$ een reguliere distributie is; dan is

$$< \rho(\ell_\alpha)', \varphi > = - < \rho(\ell_\alpha), \varphi' > = -\int \ell_\alpha(t)\varphi'(t)dt =$$

$$= - \int_\alpha^\infty \varphi'(t)dt = \varphi(\alpha) - \varphi(\infty) = \varphi(\alpha) .$$

De gebruikelijke notatie voor deze distributie is δ_α:

$$< \delta_\alpha, \varphi > = \varphi(\alpha) ,$$

en men noemt distributies van het type δ_α <u>Diracdistributies</u> ("δ-functies").

12.2.8. <u>Stelling</u>: Iedere distributie is willekeurig vaak differentieerbaar, en voor $g \in \Phi^*$ geldt

$$< g^{(n)}, \varphi > = (-1)^n < g, \varphi^{(n)} > .$$

Bewijs: Volgt direct uit 12.2.4 en 12.2.5. □

12.2.9. Voorbeeld:

$$< \delta'_\alpha, \varphi > = - < \delta_\alpha, \varphi' > = - \varphi'(\alpha) .$$

12.2.10. Analoog aan 11.3.14-16 voeren we een operator H_λ ($\lambda \in R\ell$) van LR in:

$$(H_\lambda f)(x) := f(x-\lambda) .$$

Aangezien $\Phi \subset$ LR, is H_λ ook op Φ gedefinieerd. Voor een reguliere distributie $\rho(f)$ geldt dan

$$< \rho(H_\lambda f), \varphi > = \int f(x-\lambda)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x+\lambda)dx = < \rho(f), H_{-\lambda} \varphi > .$$

We definiëren nu op Φ^*:

$$< H_\lambda g, \varphi > := < g, H_{-\lambda} \varphi > , \qquad (g \in \Phi^*) .$$

$H_\lambda g$ is weer een distributie, hetgeen eenvoudig is te verifiëren; voorts geldt

$$H_\lambda \rho(f) = \rho(H_\lambda f) .$$

12.2.11. Voor iedere monotone functie h op $R\ell$ en voor iedere $\varphi \in \Phi$ bestaat

$$\int \varphi(t)dh(t) ,$$

omdat het integratiegebied wezenlijk slechts een begrensd interval is, als Stieltjesintegraal; voor vaste h is

$$\eta_h(\varphi) := \int \varphi(t)dh(t)$$

natuurlijk een lineaire functionaal van Φ.

η_h is zelfs een distributie: als $\{\varphi_n\}_n$ een d-convergente rij met limiet φ is, is

$$|\eta_h(\varphi) - \eta_h(\varphi_n)| \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty \, |h(b) - h(a)| ,$$

waarin $[a,b]$ een interval is dat alle dragers $D(\varphi_n)$ omvat.

12.2.12. <u>Stelling</u>: $\eta_h = \rho(h)'$.

<u>Bewijs</u>: $< \eta_h,\varphi > = \int \varphi(t)dh(t) = \varphi(t)h(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int h(t)\varphi'(t)dt =$

$$= - < \rho(h),\varphi' > = < \rho(h)',\varphi > . \qquad \square$$

12.3. <u>De hoofdstelling voor distributies</u>

12.3.1. <u>Definitie</u>: Als $g_1 \in \Phi^*$ en $g_2 \in \Phi^*$ en als $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ dan betekent

$$g_1 = g_2 \quad \text{op } [a,b]$$

dat

$$\forall_{\varphi \in \Phi} \left[D(\varphi) \subset [a,b] \Rightarrow < g_1,\varphi > = < g_2,\varphi >\right] .$$

12.3.2. <u>Stelling</u>: Als $f_1 \in \mathbb{L}\mathbb{R}$, $f_2 \in \mathbb{L}\mathbb{R}$ en $f_1 \mid [a,b] = f_2 \mid [a,b]$ dan is $\rho(f_1) = \rho(f_2)$ op $[a,b]$.

<u>Bewijs</u>: Triviaal. $\square$

12.3.3. <u>Opmerking</u>: Als $\rho(f_1) = \rho(f_2)$ op $[a,b]$ dan is $f_1 = f_2$ bijna overal op $[a,b]$; het bewijs van deze stelling hoort in de Lebesgue-integratietheorie thuis.

12.3.4. <u>Stelling</u>: Als $g \in \Phi^*$ en $-\infty < a < b < \infty$ dan is er een $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en een $f \in C(R\ell)$ zó dat $g = \rho(f)^{(k)}$ op $[a,b]$.

12.3.5. <u>Opmerkingen</u>:

i: Het bewijs van de hoofdstelling 12.3.4 wordt hier niet gegeven; een bijzonder geval van de stelling wordt bewezen in 12.3.9.

ii: Als, in 12.3.4, $a = -\infty$ en $b = \infty$, is de bewering niet waar: beschouw (zie 12.1.8.iii)

$$< g,\varphi > := \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j) .$$

g is geen reguliere distributie (12.1.9.iii); als de bewering 12.3.4 ook hier geldt, dan was

$$< g,\varphi > = < \rho(f)^{(k)},\varphi > = (-1)^k < \rho(f),\varphi^{(k)} >$$

voor alle $\varphi \in \Phi$, zodat

$$\forall_\varphi \sum_{j=0}^{\infty}{}' \varphi^{(j)}(j) = (-1)^k \int f(t)\varphi^{(k)}(t)dt \ .$$

Met een integraal F van f volgt hieruit

$$\forall_\varphi \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j) = (-1)^{k+1} \int F(t)\varphi^{(k+1)}(t)dt$$

en op analoge wijze als in 12.1.9 volgt hieruit

$$\forall_t \ F(t) = 0$$

zodat $\forall_\varphi < g,\varphi > = 0$; dit is onjuist.

12.3.6. We beschouwen nu de klasse $\Phi_{\text{mod } 1}$ van functies die periodiek zijn met periode 1 en quasi-analytisch op $R\ell$; d-convergentie betekent voor een rij $\{\varphi_n\}_n$ in $\Phi_{\text{mod } 1}$ dat er een $\varphi \in \Phi_{\text{mod } 1}$ bestaat met

$$\forall_{k \in Nt \cup \{0\}} \ \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{N(k)} \ \forall_{n > N(k)} \ \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_\infty < \varepsilon \ .$$

Zij $q_n(t) := e^{-2\pi nit}$ $(n \in Gh)$ en voor iedere $g \in \Phi^*_{\text{mod } 1}$

$$\hat{g}(n) := < g,q_n > \ .$$

12.3.7. <u>Stelling</u>: Als $g \in \Phi^*_{\text{mod } 1}$ en $\forall_{n \in Gh} \ \hat{g}(n) = 0$, dan is $g = \sigma$.

<u>Bewijs</u>: Als we definiëren

$$\hat{\varphi}(n) := \int_0^1 \varphi(t)q_n(t)dt$$

voor iedere $\varphi \in \Phi_{\text{mod }1}$, dan zijn de getallen $\hat{\varphi}(n)$ precies de (complex geschreven) fouriercoëfficiënten van φ zodat

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n)q_n .$$

Nu is (voor $n \neq 0$)

$$\hat{\varphi}(n) = \frac{-1}{2\pi in} \int_0^1 \varphi(t)dq_n(t) =$$

$$= \frac{-1}{2\pi in} \varphi(t)q_n(t)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi in} \int_0^1 q_n(t)\varphi'(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi in} \int_0^1 \varphi'(t)q_n(t)dt =$$

$$= \dots\dots\dots\dots = \left(\frac{1}{2\pi in}\right)^k \int_0^1 \varphi^{(k)}(t)q_n(t)dt$$

door herhaald partieel integreren.

Omdat $\varphi^{(k)}$ continu, dus begrensd is, geldt:

$$\forall_{\varphi \in \Phi_{\text{mod }1}} \ \forall_{k \in \mathbb{N}t} \left[\hat{\varphi}(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right) , \ n \neq 0\right] .$$

Zij

$$\varphi_N := \sum_{n=-N}^{N} \hat{\varphi}(n)q_n \qquad (N \in \mathbb{N}t) ,$$

dan is

$$\|\varphi^{(k)} - \varphi_N^{(k)}\|_\infty \leq \Sigma_{|n|>N} \ |\hat{\varphi}(n)|(2\pi n)^k$$

en wegens

$$\exists_M \ \forall_{n \neq 0} \ |\hat{\varphi}(n)| < \frac{M}{n^{k+2}}$$

is

$$\|\varphi^{(k)} - \varphi_N^{(k)}\|_\infty < (2\pi)^k \ \Sigma_{|n|>N} \ \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

voor N voldoende groot (afhankelijk van k).

Dus de rij $\{\varphi_N\}_N$ is d-convergent naar φ, en dan is

$$< g,\varphi > = \lim_{N\to\infty} < g,\varphi_N > = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{\varphi}(n) < g,q_n > = 0 \ .$$

Hieruit volgt dat $g = \sigma$. □

12.3.8. <u>Stelling</u>: Als $g \in \Phi_{\mathrm{mod}\ 1}^{*}$ dan geldt

$$\exists_{k\in \mathrm{Nt}} \ [\hat{g}(n) = \mathcal{O}(|n|^k), \ |n| \to \infty] \ .$$

<u>Bewijs</u>: De bewering luidt in extenso

$$\exists_{k\in \mathrm{Nt}} \ \exists_{A>0} \ \forall_{n\in \mathrm{Gh}} \ |\hat{g}(n)| < A|n|^k \ ,$$

en is equivalent met

$$\exists_{k\in \mathrm{Nt}} \ \exists_{A>0} \ \exists_{N\in \mathrm{Nt}} \ \forall_{|n|>N} \ |\hat{g}(n)| < A|n|^k \ .$$

Stel dat het tegendeel waar is:

$$\forall_{k\in \mathrm{Nt}} \ \forall_{A>0} \ \forall_{N\in \mathrm{Nt}} \ \exists_{n} \ [|n| > N \wedge |\hat{g}(n)| \geq A|n|^k] \ .$$

Hieruit volgt (voor N = k en A = 1)

$$\forall_{k\in \mathrm{Nt}} \ \exists_{n} \ [|n| > k \wedge |\hat{g}(n)| \geq |n|^k] \ .$$

Noem de bij iedere k gevonden n, n_k:

$$\forall_{k\in \mathrm{Nt}} \ [|n_k| > k \wedge |\hat{g}(n_k)| \geq |n_k|^k] \ ,$$

en beschouw

$$\varphi_m(x) := \sum_{k=1}^{m} \frac{e^{-2\pi i n_k x}}{(n_k)^k} \qquad (m = 1,2,3,\ldots)$$

en

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n_k x}}{(n_k)^k} \ ;$$

$\varphi(x)$ is, als som van een absoluut convergente reeks, gedefinieerd, en een luttele overweging leert dat de rij $\{\varphi_m\}_m$ d-convergent is met limiet φ. Hieruit volgt dat $\lim\limits_{m\to\infty} < g,\varphi_m > = < g,\varphi >$; anderzijds kan evenwel de rij $< g,\varphi_m >$ niet convergeren, omdat

$$< g,\varphi_m > = \sum_{k=1}^{m} \frac{< g,q_{n_k} >}{(n_k)^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{g}(n_k)}{(n_k)^k} ,$$

en deze reeks is divergent. □

12.3.9. <u>Stelling</u>: Als $g \in \Phi^*_{\text{mod } 1}$ en $g(1) = 0$, dan is er een $k \in \mathbb{N}^+$ en een $f \in C([0,1])$ zó dat $g = \rho(f)^{(k)}$.

<u>Bewijs</u>: Kies k zó dat $\hat{g}(n) = O(|n|^{k-2})$, $|n| \to \infty$, (12.3.8) en beschouw

$$f(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(n)e^{2\pi inx}}{n^k} ;$$

de reeks is absoluut en uniform convergent zodat $f \in C_{\text{mod } 1} \subset C([0,1])$. Zij

$$g_1 := \frac{\rho(f)^{(k)}}{(2\pi i)^k} ,$$

dan is

$$< g_1,q_m > = \frac{1}{(2\pi i)^k} < \rho(f)^{(k)},q_m > =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^k} (-1)^k < \rho(f),q_m^{(k)} > =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^k} (-1)^k(-2\pi im)^k < \rho(f),q_m > =$$

$$= m^k \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(n)e^{2\pi inx}}{n^k} \right) e^{-2\pi imx}\, dx =$$

$$= m^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(n)}{n^k} \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x}\, dx = \hat{g}(m) \ .$$

Dus $< g - g_1, q_m > = 0$ voor alle m, en volgens 12.3.7 is dan $g = g_1$. Dus

$$g = \rho\left(\frac{f}{(2\pi i)^k}\right)^{(k)} \ . \qquad \square$$

12.3.10. <u>Opmerking</u>: Men kan 12.3.4 bewijzen met behulp van 12.3.9.

Literatuur

[AG] Achieser, N.I. en Glasmann, I.M., Theorie der Operatoren im Hilbert-Raum; (BK 5403).

[A] Ahlfors, L.V., Complex Analysis (2^{nd} edition); (BG 6609).

[BN] Bachman, G. en Narici, L., Functional analysis; (BK 6608).

[B] Berberian, S.K., Introduction to Hilbert Space; (BK 6116).

[Be] Berg, L., Operational Calculus; (BJ 6701).

$[Br]_1$ Bruijn, N.G. de, Cursus Hilbertruimten 1958-59; (BK 5916).

$[Br]_2$ Bruijn, N.G. de, Cursus Lebesgue-integratie 1957-58; (BK 5820).

$[Br]_3$ Bruijn, N.G. de, Lebesgue-integralen; Syllabus van een college.

[CL] Coddington, E.A. en Levinson, L., Theory of Ordinary Differential Equations; (BH 5502).

[CH] Courant, R. en Hilbert, D., Methoden der mathematischen Physik, deel 1; (BF 5510).

[DS] Dunford, N. en Schwartz, J.T., Linear operators, I en II; (BK 5809).

[E] Edwards, R.E., Functional analysis; (BK 6507).

[G] Goffman, C., Real functions; (BK 5307).

$[Ha]_1$ Halmos, P.R., A Hilbert Space Problem Book; (BK 6701).

$[Ha]_2$ Halmos, P.R., Finite-dimensional vector spaces; (BB 5809).

[He] Helmberg, G., Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space; (BK 6901).

[I] Ince, E.L., Ordinary differential equations; (BH 5621).

[KA] Kantorowitsch, L.W. en Akilow, G.P., Funktionalanalysis in normierten Räumen; (BK 6408).

[LS] Ljusternik, L.A. en Sobolew, W.I., Elemente der Funktionalanalysis; (BK 5504).

[L] Lovitt, W.V., Linear integral equations; (BH 5005).

[M] Mikhlin, S.G., Integral equations; (BH 5714).

[Mi] Mikusinski, J., Operational calculus; (BJ 5903).

[Mir] Mirsky, L., Linear Algebra; (BB6109).

[RN] Riesz, F. en Nagy, B.Sz. Leçons d'analyse fonctionelle; (BK 5306).

[R] Rudin, W., Real and complex analysis; (BK 6612).

[S] Schmeidler, W., Lineare Operatoren im hilbertschen Raum; (BK 5404).

[Schw] Schwartz, L., Théorie des distributions; (BK 5708).

[St] Sturm, J.C.F., Journal de mathématiques pures et appliqués (Liouville), 1 (1836).

[T] Taylor, A.E., Introduction to functional analysis; (BK 5808).

[Wa] Waerden, B.L. van der, Algebra; (BB 5504).

[Wi] Widder, D.V., The Laplace transform; (BJ 4601).

[W] Wilansky, R., Functional analysis; (BK 6413).

[Wl] Williamson, J., Lebesgue integration; (BK 6201).

[WW] Whittaker, E.T. en Watson, G.N., A course of modern analysis; (BI 6305).

[Z] Zaanen, A.C., Linear analysis; (BK 5303).