TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE ANALYSE II

Syllabus van het college van

Prof. Dr. S.T.M. Ackermans

Voorjaarssemester 1976

Wsk Bibl

Technische Universiteit Eindhoven

Faculteit der Wiskunde en Informatica

Lineaire analyse II

Syllabus van het college gegeven in het voorjaarssemester 1976
door prof.dr. S.T.M. Ackermans

4 002241 400003
Prijs f.5,00

Aanvullende Inhoudsbeschrijving

LINEAIRE ANALYSE II

Prof. Dr. S.T.M. Ackermans

Voorjaarssemester 1976

Hoofdstuk 3. De vergelijking van Fredholm

JdG, 21 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE ANALYSE II

Syllabus van het college gegeven in het
voorjaarssemester 1976 door
Prof.dr. S.T.M. Ackermans

Voorjaarssemester 1976

Inhoudsopgave blz.

Hoofdstuk 1. Convexiteit

0. Zorn's lemma; een stellingname

1.0.1. Lemma. Een partieel geordende verzameling waarin iedere lineair geordende deelverzameling naar boven begrensd is, heeft een maximaal element.

Het bewijs van dit lemma berust op het zgn. keuze-axioma. Een van de formuleringen van het keuze-axioma is de volgende: gegeven een verzameling V dan bestaat er een functie $g: P(V) \to V$ met de eigenschap: $\forall_{V_0 \subset V, V_0 \neq 0} [g(V_0) \in V_0]$. g heet dan keuzefunctie; g "kiest" uit elke niet lege deelverzameling van V een element.
We kunnen voor de lineaire analyse het lemma van Zorn zelf als axioma nemen. Een andere uitspraak die eveneens equivalent is met het keuze-axioma is het maximaliteitsbeginsel van Hausdorff: Zij $(X,<)$ een partieel geordende verzameling en zij $x \in X$ dan is er een maximale lineair geordende deelverzameling $X_0 \subset X$ met $x \in X_0$.

Uitgaande van dit maximaliteitsbeginsel kan men een eenvoudig "bewijs" van Zorn's lemma geven: neem in de partieel geordende verzameling een maximale lineair geordende deelverzameling X_0; krachtens het gegeven heeft elke lineair geordende deelverzameling een bovengrens; zij x_0 een bovengrens van X_0; dan is x_0 een maximaal element. Dit laatste is heel eenvoudig want als $y \geq x_0$ dan is $X_0 \cup \{y\}$ een lineair geordende deelverzameling, dus $X_0 \cup \{y\} = X_0$; $y \in X_0$ en $y \leq x_0$; derhalve $y = x_0$.

Er is onder wiskundigen enig verschil van mening betreffende de toelaatbaarheid van op het keuze-axioma berustende bewijsmethoden. Wij scharen ons onder de meerderheid en gebruiken ze in dit college wel. Het aftelbare keuze-axioma waarin voor aftelbare deelverzamelingen van $P(V)$ het bestaan van een keuzefunctie geëist wordt, onmoet veel minder bezwaren.

1. Convexe verzamelingen; convexe functionalen; uitbreiding van lineaire functionalen; de stelling van Hahn-Banach

1.1.1. Definitie. Zij V een lineaire ruimte met $\mathbb{R}$ als scalairen (als V een lineaire ruimte is met $\mathbb{C}$ als scalairen dan is V ook een lineaire ruimte met $\mathbb{R}$ als scalairen). Een deelverzameling $K \subset V$ heet convex dan en slechts dan als

$$\forall_{x \in K} \forall_{y \in K} \forall_{t \in [0,1]} [tx + (1-t)y \in K] .$$

1.1.2. Lemma. Zijn de verzamelingen K_α $(\alpha \in A)$ convex dan is ook $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha$ convex.

1.1.3. Lemma. Zij K convex, $x_1,\dots,x_n \in K$, $0 \le \alpha_1,\dots,\alpha_n \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ dan is $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in K$.

Bewijs. Inductie naar n; de inductiestap wordt gebruikt in: voor $\alpha_{n+1} \neq 0$ geldt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = (1-\alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1} . \qquad \square$$

Een lineaire combinatie $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ waarin $\alpha_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ heet convexe combinatie.

1.1.4. Lemma. Zijn K_1 en K_2 convex, $a \in V$, β scalair dan zijn de verzamelingen:

$$\beta K_1 := \{\beta x \mid x \in K_1\}$$

$$K_1 + K_2 := \{x + y \mid x \in K_1, y \in K_2\} \text{ en}$$

$$a + K_1 := \{a + x \mid x \in K_1\} \quad (= \{a\} + K_1)$$

alle convex.

1.1.5. Lemma. Is $T: V \to W$ lineair en $K \subset V$ convex dan is TK een convexe deelverzameling van de lineaire ruimte W.

1.1.6. Definitie. Zij $M \subset V$. Een punt $p \in M$ heet intern punt van M dan en slechts dan als

$$\forall_{x\in V}\ \exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{|\delta|\le\varepsilon}\ [p + \delta x \in M] .$$

Een punt p heet begrenzend punt van M indien het geen intern punt van M en geen intern punt van $V\backslash M$ is.

1.1.7. <u>Definitie</u>. Zij K convex met 0 als intern punt (men zegt in de engelse literatuur wel: K is "absorbing"). Voor $x \in V$ definiëren we

$$I(x) := \{\alpha > 0 \mid \frac{1}{\alpha} x \in K\} = \{\alpha > 0 \mid x \in \alpha K\}$$

$$k(x) := \inf\{\alpha \mid \alpha \in I(x)\} .$$

De functionaal k heet de Minkowskifunctionaal (in engelse literatuur ook wel "gauge") van K.

1.1.8. <u>Voorbeeld</u>. Zij V een genormeerde, lineaire ruimte; $K := \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ dan is $k(x) = \|x\|$.

1.1.9. <u>Lemma</u>. (Eigenschappen van de Minkowskifunctionaal). Zij K een convexe verzameling met 0 als intern punt en k de Minkowskifunctionaal van K dan geldt:

a) $k(0) = 0$; $k(x) \geq 0$ $(x \in V)$;

b) $k(x) < \infty$ $(x \in V)$;

c) $k(\beta x) = \beta k(x)$ $(x \in V, \beta \geq 0)$;

d) als $x \in K$ dan $k(x) \leq 1$;

e) $k(x + y) \leq k(x) + k(y)$ $(x,y \in V)$;

f) $\{x \mid k(x) < 1\}$ is de verzameling van de interne punten van K,
$\{x \mid k(x) = 1\}$ is de verzameling van de begrenzende punten van K.

<u>Bewijs</u>. Alleen e) en f) zijn niet volkomen triviaal.

e) Als $\gamma > k(x) + k(y)$ dan is γ te schrijven als $\gamma = \alpha + \beta$ met $\alpha > k(x)$, $\beta > k(y)$. Nu geldt:

$$\frac{1}{\gamma}(x + y) = \frac{1}{\alpha + \beta}(x + y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(\frac{1}{\alpha} x) + \frac{\beta}{\alpha + \beta}(\frac{1}{\beta} y) \in K .$$

Zo vinden we $k(x+y) \leq \gamma$. Conclusie: $k(x + y) \leq k(x) + k(y)$.

f) Als x een intern punt van K is dan is $x + \varepsilon x = (1 + \varepsilon)x \in K$ voor geschikt gekozen $\varepsilon > 0$; hieruit volgt $k(x) \leq (1 + \varepsilon)^{-1} < 1$.
Anderzijds: Zij $k(x) < 1$ voor zekere $x \in V$. Om te laten zien dat x een intern punt van K is moeten we laten zien dat er bij elke $y \in V$ een $\varepsilon > 0$ bestaat met $x + \delta y \in K$ voor alle $|\delta| < \varepsilon$. Kies $\alpha > 0$ zō dat $(1 + \alpha)x \in K$. Omdat 0 intern punt is, is er een $\varepsilon_1 > 0$ zō dat voor $|\delta_1| < \varepsilon_1$ het punt $\delta_1 y$ tot K behoort. Neem nu $\varepsilon := \alpha(1 + \alpha)^{-1}\varepsilon_1$ dan is voor $|\delta| < \varepsilon$ het punt

$$x + \delta y = \frac{1}{1 + \alpha}(1 + \alpha)x + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{1 + \alpha}{\alpha} \delta y$$

een convexe combinatie van de elementen $(1+\alpha)x$ en $(1+\alpha)\alpha^{-1}\delta y$ die tot K behoren; immers uit $|\delta| < \alpha(1+\alpha)^{-1}\varepsilon_1$ volgt $|(1+\alpha)\alpha^{-1}\delta| < \varepsilon_1$.
Als $k(x) > 1$ gaan we analoog te werk: kies $\alpha > 0$, zo dat $1-\alpha > 0$ en $(1-\alpha)x \notin K$; neem $y \in V$, ε_1, δ_1 als zoeven; $\varepsilon := \alpha(1-\alpha)^{-1}\varepsilon_1$ en merk op dat voor $|\delta| < \varepsilon$ geldt:

$$(1-\alpha)x = (1-\alpha)(x+\delta y) + \alpha(-(1-\alpha)\alpha^{-1}\delta y)$$

zodat $x + \delta y \notin K$ want uit $x + \delta y \in K$ zou volgen dat $(1-\alpha)x$ een convexe combinatie van punten uit K dus element van K zou zijn.
Het is nu evident dat $k(x) = 1$ de begrenzende punten karakteriseert. □

1.1.10. Definitie. Een functionaal $p: V \to \mathbb{R}$ heet convex indien:

1) $p(x) \geq 0 \quad (x \in V)$
2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad (x,y \in V)$
3) $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (x \in V, \alpha \geq 0)$.

N.B. Uit 3) volgt $p(0) = 0$. Uit 1.1.9 volgt dat de Minkowskifunctionaal van een convexe verzameling met 0 als intern punt convex is. In het bijzonder is de norm in een genormeerde lineaire ruimte convex.

Notatie. Zijn x en $y \in Y$ dan noteren we het segment tussen x en y:

$$\{tx + (1-t)y \mid 0 < t < 1\} \text{ met } (x,y)\,.$$

De nu volgende twee lemma's zijn eenvoudig te bewijzen.

1.1.11. Lemma. Het punt x_0 is een begrenzend punt van de convexe verzameling K dan en slechts dan indien er, van x_0 verschillende, punten x_1 en x_2 in V zijn waarvoor $(x_0,x_1) \subset K$ en $(x_0,x_2) \subset V\backslash K$.

1.1.12. Lemma. Zij p een convexe functionaal; $\gamma > 0$; $a \in V$ dan zijn

$$K := \{x \in V \mid p(x-a) < \gamma\}$$

$$K_1 := \{x \in V \mid p(x-a) \leq \gamma\}$$

convexe verzamelingen.
De begrenzende punten van K en K_1 zijn juist de punten x waarvoor $p(x-a) = \gamma$.

Bewijs. Men kan zich beperken tot $a = 0$. Het enige interessante detail is te laten zien dat voor een begrenzend punt x_0 van $\{x \in V \mid p(x) \le \gamma\}$ volgt dat $p(x_0) = \gamma$. Bij zo'n x_0 bestaan er volgens 1.1.11 punten x_1 en x_2 zó dat voor alle t, $0 < t < 1$, geldt: $p((1-t)x_0 + tx_1) \le \gamma$, $p((1-t)x_0 + tx_2) > \gamma$. Derhalve is $(1-t)p(x_0) = p((1-t)x_0) = p((1-t)x_0 + tx_1 - tx_1) \le p((1-t)x_0 + tx_1) + tp(-x_1) \le \gamma + tp(-x_1)$ en $\gamma < p((1-t)x_0 + tx_2) \le (1-t)p(x_0) + tp(x_2)$. Laat men in $(1-t)p(x_0) \le \gamma + tp(-x_1)$ en $\gamma < (1-t)p(x_0) + tp(x_2)$ nu t naar nul naderen dan volgt: $p(x_0) \le \gamma$; $\gamma \le p(x_0)$ dus $\gamma = p(x_0)$. □

De nu volgende reeks lemma's en stellingen gaat over voortzetting van lineaire functionalen.

1.1.13. Lemma. Zij V een reële lineaire ruimte, W een deelruimte van V, x_0 een punt van V buiten W, zij W' het lineaire opspansel van W en x_0.
Als p een convexe functionaal op W' is en f een lineaire functionaal op W zodanig dat $f(x) \le p(x)$ voor alle $x \in W$, dan is er een lineaire functionaal f' op W' zodanig dat

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x) \qquad (x \in W) \\ f'(x) &\le p(x) \qquad (x \in W')\ . \end{aligned}$$

Bewijs. Voor y_1 en $y_2 \in W$ geldt:

$$\begin{aligned} f(y_1) - f(y_2) = f(y_1 - y_2) \le p(y_1 - y_2) &= p(y_1 + x_0 - (y_2 + x_0)) \le \\ &\le p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0)\ . \end{aligned}$$

Derhalve is

$$(*) \qquad -p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \le p(y_1 + x_0) - f(y_1)\ .$$

Definiëren we m en M resp. als

$$\begin{aligned} m &:= \sup\{-p(-y - x_0) - f(y) \mid y \in W\} \\ M &:= \inf\{p(y + x_0) - f(y) \mid y \in W\} \end{aligned}$$

dan volgt uit de ongelijkheid (*) dat $-\infty < m \le M < \infty$. Kies nu een getal c zó dat $m \le c \le M$. Elk element $x \in W'$ is eenduidig te schrijven als $x = y + \alpha x_0$ met $y \in W$. We definiëren $f'(x) := f(y) + \alpha c$ $(x \in W')$. Het is vanzelfsprekend dat f' een lineaire uitbreiding van f is; wat we moeten laten zien is dat de keuze van c garandeert dat $f'(x) \le p(x)$ $(x \in W')$, m.a.w. dat

$$f(y) + \alpha c \leq p(y + \alpha x_0) \qquad (y \in W,\ \alpha \in \mathbb{R}) .$$

Neem $y \in W$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. We onderscheiden gevallen:

1) $\alpha > 0$. Omdat $c \leq M$ is $c \leq p(\frac{1}{\alpha} y + x_0) - f(\frac{1}{\alpha} y)$. Dus

$$\alpha c \leq \alpha p(\tfrac{1}{\alpha} y + x_0) - \alpha f(\tfrac{1}{\alpha} y) = p(y + \alpha x_0) - f(y) .$$

2) $\alpha = 0$. Triviaal.

3) $\alpha < 0$. Omdat $m \leq c$ is $-p(-\frac{1}{\alpha} y - x_0) - f(\frac{1}{\alpha} y) \leq c$. Dus

$$(-\alpha)(-p(-\tfrac{1}{\alpha} y - x_0) - (-\alpha) f(\tfrac{1}{\alpha} y) \leq -\alpha c ;$$

herschreven $\alpha c + f(y) \leq p(y + \alpha x_0)$. □

1.1.14. Stelling (Hahn-Banach). Zij p een convexe functionaal op een reële lineaire ruimte V, f een lineaire functionaal op een deelruimte W van V die voldoet aan $f(x) \leq p(x)$ voor alle x uit W, dan is er een lineaire functionaal f' op V die op W met f samenvalt en die voor alle x voldoet aan $f'(x) \leq p(x)$.

Bewijs. Laat F zijn de verzameling van alle lineaire uitbreidingen $\tilde{f}$ van f die voldoen aan $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ $(x \in \mathrm{dom}\, \tilde{f})$. [N.B. $\tilde{f}$ is een uitbreiding van f wil zeggen: $\mathrm{dom}\, \tilde{f} \supset \mathrm{dom}\, f$ en $\tilde{f}(x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathrm{dom}\, f$]. Wat we moeten laten zien is dat er in F een element f' is met $\mathrm{dom}\, f' = V$. Op F definiëren we een partiële ordening door $f_1 < f_2$ als f_2 een uitbreiding is van f_1. Als $\{f_i \mid i \in I\}$ een lineair geordende deelverzameling is van de partieel geordende verzameling $(F,<)$ dan kunnen we een bovengrens f_0 van $\{f_i \mid i \in I\}$ aangeven door:

$$\mathrm{dom}\, f_0 := \bigcup_{i \in I} \mathrm{dom}\, f_i$$

$$f_0(x) := f_i(x) \qquad \text{als } x \in \mathrm{dom}\, f_i .$$

Merk op dat de waarde $f_0(x)$ onafhankelijk is van de gekozen i met $x \in \mathrm{dom}\, f_i$. Uit het lemma van Zorn volgt nu: $(F,<)$ heeft een maximaal element, zeg f'. Nu is $\mathrm{dom}\, f' = V$ anders konden we nl. m.b.v. 1.1.13 een echte uitbreiding van f' vinden in tegenspraak met de maximaliteit. □

Opmerking. Als V een eindige of aftelbare basis heeft, dan kan eindig of aftelbaar vaak toepassen van 1.1.13 het gebruik van Zorn's lemma vervangen.

1.1.15. Gevolg. Is V reële lineaire ruimte, $p(x)$ convex en $x_0 \in V$, dan is er een lineaire functionaal f met $f(x_0) = p(x_0)$ en $f(x) \le p(x)$ voor alle $x \in V$.

Bewijs. Als $x_0 = 0$ neem dan $f = 0$. Zij anders W de ééndimensionale deelruimte $W := \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; definieer $f(\alpha x_0) := \alpha p(x_0)$, merk op $f(x) \le p(x)$ $(x \in W)$ en pas 1.1.14 toe. □

Vanwege het enorme belang van de stelling van Hahn-Banach besteden we enige aandacht aan de complexe versie. Elk van de uitspraken: 1.1.14, 1.1.16, 1.1.18, 1.1.19, 1.1.20, 1.1.21, 1.1.23 noemt men wel de stelling van Hahn-Banach.

1.1.16. Definitie. Een convexe functionaal op een reële of complexe lineaire ruimte heet symmetrisch als $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ alle $x \in V$ en alle scalairen α.
Als voorbeeld kan gelden de norm in een genormeerde lineaire ruimte. Een deelverzameling $M \subset V$ heet symmetrisch als uit $x \in M$ en $|\alpha| = 1$ volgt $\alpha x \in M$; anders gezegd $\alpha M \subset M$ voor alle α met $|\alpha| = 1$. (Opmerking: M heet "balanced" als $\alpha M \subset M$ voor alle α met $|\alpha| \le 1$.)

1.1.17. Lemma. Zij p een symmetrische functionaal dan is

1) $M := \{x \in V \mid p(x) = 0\}$ een deelruimte ,

2) $K := \{x \in V \mid p(x) \le \gamma\}$ een symmetrische convexe verzameling voor elke $\gamma \ge 0$.

De volgende stelling is de versie van de stelling van Hahn-Banach voor lineaire ruimten met complexe scalairen.

1.1.18. Stelling. Zij V een complexe lineaire ruimte. Zij p een symmetrische functionaal op V en f een lineaire functionaal op een deelruimte W die voldoet aan $|f(x)| \le p(x)$ voor alle $x \in W$, dan heeft f een lineaire uitbreiding F op V die voldoet aan $|F(x)| \le p(x)$ $(x \in V)$.

Bewijs. Beschouw V als reële lineaire ruimte en zet $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ waarbij $f_1(x) = \mathrm{Re}\, f(x)$ en $f_2(x) = \mathrm{Im}\, f(x)$ reëel lineaire functionalen zijn. ("Reëel lineair" wil zeggen: $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)$ voor alle x en y; $f_1(\alpha x) = \alpha f_1(x)$ voor alle x en reële α). Er is een verband tussen f_1 en f_2.

Beschouw nl.

$$i(f_1(x) + if_2(x)) = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) .$$

Voor alle $x \in W$ geldt dus $f_1(ix) = -f_2(x)$.
Nu is $f_1(x) \le p(x)$ dus $f_1(x)$ is uit te breiden tot een reëel lineaire functionaal f_1' op V met $f_1'(x) \le p(x)$ volgens 1.1.14. Definieer:

$$F(x) := f_1'(x) - if_1'(ix) \qquad (x \in V) .$$

Deze functionaal F is een reëel lineaire uitbreiding van f op V. Omdat

$$F(ix) = f_1'(ix) - if_1'(-x) = f_1'(ix) + if_1'(x) = iF(x)$$

is F ook complex lineair. Tenslotte zullen we laten zien dat $|F(x)| \le p(x)$ voor alle $x \in V$. Als $F(x) = 0$ is hieraan vanzelfsprekend voldaan; als $F(x) \neq 0$ neem dan $\theta := \arg F(x)$ zodat

$$F(x) = e^{-i\theta}F(x) = F(e^{-i\theta}x) = f_1'(e^{-i\theta}x) \le p(e^{-i\theta}x) = p(x) .$$

De stelling van Hahn-Banach is een van de meest gebruikte stellingen uit de functionaalanalyse. We bespreken een aantal gevolgen.

1.1.19. Stelling. Is p een symmetrische functionaal op een complexe lineaire ruimte V en $x_0 \in V$, dan is er een lineaire functionaal f met $f(x_0) = p(x_0)$ en $|f(x)| \le p(x)$ (alle $x \in V$).

Bewijs. Als 1.1.15. □

Een van de vormen waarin men de stelling van Hahn-Banach in Banachruimten (of algemeen in genormeerde lineaire ruimten) gebruikt is de volgende.

1.1.20. Stelling. Is X een genormeerde lineaire ruimte, $Y \subset X$ een gesloten deelruimte en $x_0 \notin Y$. Dan is er een begrensde lineaire functionaal f met $f(x_0) = 1$, $f(Y) = 0$ (i.e. $f(y) = 0$ voor alle $y \in Y$).

Bewijs. Allereerst merken we op dat $\inf\{\|y - x_0\| \mid y \in Y\} =: d > 0$ is. Ieder punt z van het lineaire opspansel, Z, van Y en x_0 is eenduidig te schrijven als $z = y + \alpha x_0$ met $y \in Y$ en $\alpha = \alpha(z) \in \mathbb{C}$. Nu is $f(z) := f(y + \alpha x_0) := \alpha$ een lineaire functionaal op Z. Omdat voor $\alpha \neq 0$ geldt

$$\|z\| = \|y + \alpha x_0\| = |\alpha|\|-\frac{1}{\alpha}y - x_0\| \geq |\alpha| d$$

zien we dat f op Z voldoet aan de ongelijkheid $|f(z)| \leq \frac{1}{d}\|z\|$. Nu is $\frac{1}{d}\|z\|$ een symmetrische functionaal zodat f volgens 1.1.18 voortgezet kan worden. Deze voortzetting voldoet aan de eisen. □

Merk op dat in genormeerde lineaire ruimten altijd een symmetrische functionaal (nl. $\| \;\|$) aanwezig is. De volgende stelling is een verscherping van Hahn-Banach voor genormeerde lineaire ruimten.

1.1.21. Stelling. Is V een genormeerde lineaire ruimte, W een deelruimte en g een begrensde lineaire functionaal op W, dan bestaat er een begrensde lineaire functionaal, f, op V die voldoet aan:

$$f(x) = g(x) \quad (x \in W)$$

en

$$\|f\| = \|g\| .$$

Bewijs. De symmetrische functionaal op V, $p(x) := \|g\|\,\|x\|$, voldoet aan $|g(x)| \leq p(x)$ $(x \in W)$. Volgens de stelling van Hahn-Banach is er een lineaire functionaal f op V die voldoet aan $f(x) = g(x)$ $(x \in W)$ en $|f(x)| \leq p(x) = \|g\|\,\|x\|$ $(x \in V)$.
Uit de laatste ongelijkheid volgt dat f begrensd is en $\|f\| \leq \|g\|$. Voorts is:

$$\|g\| = \sup\{|g(x)| \mid \|x\| = 1, x \in W\} = \sup\{|f(x)| \mid \|x\| = 1, x \in W\}$$
$$\leq \sup\{|f(x)| \mid \|x\| = 1, x \in V\} = \|f\| .$$

(De eerste en laatste gelijkheid zijn juist de definities van de norm van een lineaire functionaal op W en op V.) Combinerend vinden we $\|f\| = \|g\|$. □

Een sterk meetkundig gekleurde variant van de stelling van Hahn-Banach is de scheidingsstelling voor convexe verzamelingen 1.1.23. Eerst enkele definities en een opmerking.

1.1.22. Definitie. Zij V een lineaire ruimte en $M,N \subset V$. We zeggen dat de lineaire functionaal f de verzamelingen M en N scheidt indien er een reëel getal c bestaat zó dat

$$\mathrm{Re}\, f(M) \geq c \geq \mathrm{Re}\, f(N)$$

of

$$\mathrm{Re}\, f(M) \leq c \leq \mathrm{Re}\, f(N) .$$

Opmerking. Men ziet gemakkelijk dat f scheidt M en N dan en slechts dan als f scheidt $M-N$ en $\{0\}$.

1.1.23. Stelling (Scheidingsstelling). Zijn M en N niet lege disjuncte convexe verzamelingen in een (complexe) lineaire ruimte V en heeft M een intern punt dan is er een lineaire functionaal, niet gelijk aan de nul-functionaal, die M en N scheidt.

Bewijs.

1) Neem aan dat V een reële lineaire ruimte is. Als p een intern punt van M is beschouwen we $M-p$ en $N-p$. Zonder verlies aan algemeenheid kunnen we dus aannemen dat 0 een intern punt van M is. Zij $q \in N$, dan is $-q \in M-N$ en 0 is een intern punt van $K := M-N+q$. Omdat $M \cap N = \emptyset$ is $0 \notin M-N$, $q \notin K$; de Minkowskifunctionaal $k(x)$ van K voldoet aan $k(q) \geq 1$. Definieer $f_0(\alpha q) := \alpha k(q)$, f_0 is dan lineair op $\{\alpha q \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, terwijl $f_0(\alpha q) \leq k(\alpha q)$ voor alle reële α. Volgens de stelling van Hahn-Banach kan f_0 uitgebreid worden tot een lineaire functionaal f op de hele V met behoud van $f(x) \leq k(x)$. Hieruit volgt $f(K) \leq 1$, $f(q) \geq 1$; dus f scheidt K en $\{q\}$, dus f scheidt $M-N$ en $\{0\}$, dus f scheidt M en N.

2) Is V complex, beschouw V dan eerst als reële lineaire ruimte. Volgens bovenstaande redenering is er een reëelwaardige functie, f, die voldoet aan $f(x+y) = f(x) + f(y)$ en $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ en zó dat $f(M)$ en $f(N)$ tot intervallen behoren waarvan de doorsnede hoogstens één punt is. Definiëren we F door $F(x) := f(x) - if(ix)$ dan is F complex lineair en F scheidt M en N. □

De stelling van Hahn-Banach laat aardige meetkundige interpretaties toe; we geven één voorbeeld. Stel dat K een convexe verzameling in een reële lineaire ruimte is, bepaald door $p(x) < \gamma$ $(\gamma > 0)$. Zij x_0 een begrenzend punt van K (dan is $p(x_0) = \gamma$). Zij $f(x)$ een lineaire functionaal met $f(x_0) = p(x_0)$ en $f(x) \leq p(x)$ (alle $x \in V$) (zo'n f bestaat; zie 1.1.15). Dan is $W := \{x \in V \mid f(x) = \gamma\}$ een hypervlak in V. Voor elke $x \in K$ geldt: $f(x) \leq p(x) < \gamma$. K ligt dus geheel aan één kant van W. W heet stukhypervlak (hyperplane of support). Op grond van de stelling van Hahn-Banach heeft K in elk begrenzend punt een stukhypervlak.

2. Intermezzo; De continue lineaire functionalen op $C[0,1]$; Een stelling van F. Riesz; Momentenproblemen

Als intermezzo bespreken we als één van de belangrijkste toepassingen van de stelling van Hahn-Banach: het voorstellen van begrensde lineaire functionalen op ruimten van continue functies door middel van integralen.

1.2.1. Stelling. De volgende beweringen zijn equivalent.

1) x^* is een continue (= begrensde) lineaire functionaal op de ruimte van de continue functies op het gesloten interval $[0,1]$ met maximumnorm.
2) Er is een complexwaardige functie g van begrensde variatie op $[0,1]$ zodat voor alle continue functies f op $[0,1]$ geldt:

$$x^*(f) = \int_0^1 f(t)dg(t) .$$

(De integraal is een Riemann-Stieltjes integraal.)

Bovendien, als x^* en g samenhangen als in deze stelling dan is $\|x^*\| = V(g)$, de totale variatie van g.

Bewijs. We beginnen met in herinnering te roepen dat de functie $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ van begrensde variatie heet indien

$$V(g) := \sup\{\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \mid 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1\} < \infty$$

is.
Het is evident dat bij gegeven g:

$$f \to \int_0^1 f(t)dg(t)$$

een lineaire functionaal is die begrensd is en norm $\le V(g)$ heeft. Het interessante deel van het bewijs is te laten zien dat er bij een begrensde lineaire functionaal x^* een g gevonden kan worden. $C[0,1]$ is een deelruimte van $B[0,1]$, de ruimte van de begrensde functies op $[0,1]$. Als

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid 0 \le t \le 1\}$$

is $B[0,1]$ een genormeerde ruimte met $C[0,1]$ als gesloten deelruimte. Volgens de stelling van Hahn-Banach (1.1.21) is er een begrensde lineaire functionaal

z^* op $B[0,1]$ met $z^*(f) = x^*(f)$ als f continu is en $\|z^*\| = \|x^*\|$.
We definiëren een functie g op $[0,1]$ door:

$$g(0) = 0$$
$$g(x) = z^*(\chi_{(0,s]}),\ 0 < s \le 1\ ,$$

hierin is $\chi_{[0,s]}$ de karakteristieke functie van het interval $[0,s]$. We zullen nu eerst laten zien dat g van begrensde variatie is. Neem een partitie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ en beschouw de trapfunctie h gedefinieerd door $h(t) = a_k$ voor $t_{k-1} < t \le t_k$, $k = 1,\ldots,n$ waarin

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{als } g(t_k) = g(t_{k-1}) \\ \exp(-i \arg(g(t_k) - g(t_{k-1})) & \text{anders}\ . \end{cases}$$

Het is duidelijk dat $h \in B[0,1]$ en dat $\|h\| \le 1$. We kunnen ook zeggen:

$$h = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{(t_{k-1},t_k]} = \sum_{k=1}^{n} a_k (\chi_{(0,t_k]} - \chi_{(0,t_{k-1}]})$$

(n.b. $\chi_{(0,0]}(s) \equiv 0$). Uit deze schrijfwijze volgt:

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} a_k (g(t_k) - g(t_{k-1})) =$$

$$= z^*(h) \le \|z^*\| \|h\| \le \|x^*\|\ .$$

Dus g is van begrensde variatie en $V(g) \le \|x^*\|$.
Vervolgens zullen we laten zien dat voor continue functies

$$x^*(f) = \int_0^1 f(t)dg(t)$$

is. Neem een continue functie f en een verdeling $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$.
We definiëren een functie $\tilde{h} \in B[0,1]$ door:

$$\tilde{h} = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})(\chi_{(0,t_k]} - \chi_{(0,t_{k-1}]})\ .$$

Voor deze $\tilde{h}$ geldt:

$$z^*(\tilde{h}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})(g(t_k) - g(t_{k-1}))\ .$$

Zij $\varepsilon > 0$. We kunnen nu de verdeling van $[0,1]$ zo fijn nemen dat:

1) $\|\tilde{h} - f\| < \varepsilon$ (gebruik de uniforme continuïteit van f),

2) $$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})(g(t_k) - g(t_{k-1})) - \int_0^1 f(t)dg(t)\right| < \varepsilon .$$

De Riemann-Stieltjes integraal bestaat en is benaderbaar met Riemann-Stieljes sommen omdat f continu is en g van begrensde variatie. Nu blijkt dat

$$\left|z^*(f) - \int_0^1 f\,dg\right| \le |z^*(f) - z^*(\tilde{h})| + \left|z^*(\tilde{h}) - \int_0^1 f\,dg\right| \le$$

$$\le \|z^*\|\,\|f - \tilde{h}\| + \varepsilon \le (\|z^*\| + 1)\varepsilon .$$

Aangezien ε willekeurig was volgt

$$z^*(f) = x^*(f) = \int_0^1 f(t)dg(t) .$$

Omdat

$$|x^*(f)| = \left|\int_0^1 f\,dg\right| \le \|f\| V(g)$$

is $\|x^*\| \le V(g)$. We hadden reeds $V(g) \le \|x^*\|$, zodat $\|x^*\| = V(g)$. □

<u>Opmerking</u>. Het is zeer wel mogelijk dat g_1 en g_2 verschillende functies van begrensde variatie zijn die dezelfde functionaal ${}_0\int^1 f\,dg$ opleveren. Het is kennelijk de door g gedefinieerde maat die een-eenduidig met de lineaire functionalen correspondeert. Stelling 1.2.1 kan zeer sterk gegeneraliseerd worden:

1.2.2. <u>Stelling</u>. (<u>Riesz representatie stelling</u>, we geven geen bewijs). Als S een compacte Hausdorffruimte is dan bestaat er een isometrisch isomorfisme tussen enerzijds de ruimte van de continue lineaire functionalen op de ruimte van de continue functies op S en anderzijds de ruimte van de reguliere complexwaardige Borel maten op S, en wel zo dat de functionaal x^* en de ermee corresponderende maat μ voldoen aan

$$x^*(f) = \int_S f(t)\mu(dt)$$

voor alle continue functies f.

(Voor de definities van de gebruikte begrippen en voor een bewijs verwijzen we naar Dunford-Schwartz, Linear Operators I, Ch. IV, § 6).

1.2.3. Momentenproblemen. Een van de klassieke momentenproblemen is het volgende: gegeven een rij (reële of complexe) getallen c_n, $n = 0,1,2,\ldots$; bestaat er een (reële of complexe) functie van begrensde variatie g zodanig dat

$$\int_0^1 t^n dg(t) = c_n \quad n = 0,1,2,\ldots \text{ ?}$$

Dit probleem kan met behulp van stelling 1.2.1 anders geformuleerd worden. Bestaat er een lineaire functionaal x^* in de duale ruimte van $C[0,1]$ die voldoet aan $x^*(\psi_t\ t^n) = c_n$?

Een ander momentenprobleem is het trigonometrisch momentenprobleem: zij gegeven een collectie complexe getallen c_z $(z \in \mathbb{Z})$; bestaat er een functie van begrensde variatie g met

$$\int_0^1 \exp(2\pi izk)dg(t) = c_z \quad (z \in \mathbb{Z}) \text{ ?}$$

Ook dit en andere momentenproblemen zijn te vertalen in vragen over begrensde lineaire functionalen. Momentenproblemen duiken op veel plaatsen in de wiskunde op, o.a. in de waarschijnlijkheidsrekening waar de vraag gesteld wordt wanneer de momenten van een kansverdeling de verdelingsfunctie bepalen. We bespreken in dit verband een stelling die nodige en voldoende voorwaarden geeft voor het bestaan van oplossingen van momentenproblemen voor genormeerde ruimten.

1.2.4. Stelling. Zij V een genormeerde lineaire ruimte (over $\mathbb{C}$), $\{c_i\}_{i\in I}$ complexe getallen en $\{x_i\}_{i\in I}$ punten uit V; dan zijn de volgende beweringen equivalent:

1) Er is een begrensde lineaire functionaal x^* op V die voldoet aan $x^*(x_i) = c_i$ voor alle $i \in I$.
2) Er is een positief getal M zó dat

$$|\Sigma a_i c_i| \le M \| \Sigma a_i x_i \|$$

voor alle verzamelingen $\{a_i \mid i \in I\}$ van complexe getallen waarin slechts eindig veel a_i ongelijk aan nul zijn.

Bewijs. Als er een x^* bestaat dan is

$$|\Sigma a_i c_i| = |\Sigma a_i x^*(x_i)| = |x^*(\Sigma a_i x_i)| \le \|x^*\| \, \|\Sigma a_i x_i\| \, .$$

Dus uit 1) volgt 2) met $M = \|x^*\|$. Het andere deel van het bewijs nl. dat uit 2) ook 1) volgt is diepzinniger. Zij W het lineaire opspansel van $\{x_i \mid i \in I\}$ (W bestaat dus uit alle eindige sommen $\Sigma a_i x_i$). Op W definiëren we y^* door:

$$y^*(\Sigma a_i x_i) := \Sigma a_i c_i \; .$$

Ga na dat y^* wel-gedefinieerd is (als $\Sigma a_i x_i = \Sigma b_i x_i$ dan is $\Sigma a_i c_i = \Sigma b_i c_i$), lineair op W en begrensd (dit is juist het gegeven 2)). Volgens de stelling van Hahn-Banach (1.1.21) is er een begrensde lineaire functionaal x^* op V met $\|x^*\| = \|y^*\|$ en $x^*(x) = y^*(x)$ als $x \in W$. □

3. Convexiteit en topologie. Een stelling van Mazur

We zullen ons in deze paragraaf bezighouden met topologische beschouwingen over convexiteit.

Tenzij anders vermeld is V een topologische vectorruimte (zie lineaire analyse I, definitie 1.4.1), die tevens Hausdorffruimte is (in de literatuur is de scheidingseigenschap van Hausdorff bijna altijd opgenomen onder de axioma's van de topologische vectorruimte). De eerste stelling geeft het verband tussen intern en inwendig, tussen begrenzend punt en randpunt.

1.3.1. Stelling.

1) Als K convex is dan zijn het inwendige, $\overset{\circ}{K}$, en de afsluiting, $\bar{K}$, van K convex.

2) Elk inwendig punt van een verzameling is ook intern punt.

3) Als K een convexe verzameling is met tenminste één inwendig punt dan geldt:

3.1. p is intern punt van K dan en slechts dan als p inwendig punt van K is;

3.2. p is begrenzend punt van K dan en slechts dan als p randpunt van K is;

3.3. het inwendige van K ligt dicht in K.

Bewijs.

i) We definiëren een functie ψ: $V \times V \times [0,1] \to V$ door $\psi(x,y,t) := tx + (1-t)y$ $(x,y \in V,\ 0 \le t \le 1)$. Deze functie ψ is continu. Een verzameling K is convex dan en slechts dan als $\psi(K \times K \times [0,1]) \subset K$. Zij K convex dan volgt uit de continuïteit van ψ dat:

$$\psi(\bar{K} \times \bar{K} \times [0,1]) = \psi(\overline{K \times K \times [0,1]}) \subset \overline{\psi(K \times K \times [0,1])} \subset \bar{K} .$$

Derhalve is de afsluiting van K convex.

ii) Neem aan dat K convex is, $p \in \overset{\circ}{K}$, $q \in \bar{K}$; we zullen laten zien dat het segment (p,q) binnen $\overset{\circ}{K}$ ligt. Er is een omgeving U van 0 zó dat $p + U \subset K$. Neem t vast, $0 < t < 1$. De verzameling $\frac{t}{t-1} U + q$ is een omgeving van q, deze bevat dus een punt q_1 van K:

$$q_1 = \frac{t}{t-1} u_1 + q \qquad \text{voor zekere } u_1 \in U .$$

$U_1 := t(p + U) + (1-t)q_1$ is open. Bovendien $U_1 \subset K$ en

$$tp + (1-t)q = t(p+u_1) + (1-t)(\frac{t}{t-1} u_1 + q) = t(p+u_1) + (1-t)q_1$$

is een punt van U_1, dus van $\overset{\circ}{K}$.

iii) Uit ii) volgt direct dat $\overset{\circ}{K}$ convex is als K convex is, zodat 1) nu geheel bewezen is. Ook volgt uit ii) dat als K een inwendig punt p heeft dat $\overline{\overset{\circ}{K}} = \bar{K}$ (i.e. 3.3). Het gestelde onder 2) is een direct gevolg van de definitie van een topologische vectorruimte. Tevens volgt uit 2) dat begrenzende punten randpunten zijn.

iv) Van elk van de onderdelen 3.1 en 3.2 moet nog een van twee implicaties bewezen worden. Laat p een inwendig punt zijn van de convexe verzameling K. We moeten nog laten zien als q_1 intern punt van K is, dan is q_1 inwendig punt van K en eveneens, als q_2 randpunt is dan is q_2 begrenzend punt. Zij q_1 intern punt, dan behoort $r := -\varepsilon p + (1+\varepsilon)q_1 = q_1 + \varepsilon(q_1 - p)$ tot K voor voldoend kleine $\varepsilon > 0$. Maar $q_1 \in (r,p)$ want $q_1 = \frac{1}{1+\varepsilon} r + $ $+ \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} p$, volgens ii) is q_1 dus een inwendig punt van K.
Als q_2 randpunt is van K dan is het geen intern punt, want we weten al dat interne punten inwendig zijn. Ook is $(p,q_2) \in K$ volgens ii) dus q_2 is geen intern punt van $V \setminus K$. Conclusie: q_2 is begrenzend punt van K. □

1.3.2. <u>Voorbeeld</u>. Laat V de deelruimte van de ruimte van de begrensde rijen zijn bestaande uit de "eindige rijtjes" (met maximum norm), d.w.z. $(a_1,a_2,a_3,..) \in V$ dan en slechts dan als $\exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n\geq N} [a_n = 0]$. Zij K de deelverzameling van V bestaande uit de rijtjes waarvoor $|a_n| < 1/n$. K is een convexe verzameling zonder inwendige maar met de oorsprong als intern punt.

1.3.3. <u>Lemma</u>. Zijn A en K gesloten verzamelingen in V en is K compact, dan is $A+K$ gesloten.

<u>Bewijs</u>. Zij $p \in \overline{A+K}$. Bij elke omgeving U van p beschouwen we

$$K_U := \{k \in K \mid k \in U - A\} = K \cap (U - A) .$$

Omdat $p \in \overline{A+K}$, is $K_U \neq \emptyset$. Als $U_1 \subset U_2$ dan is $K_{U_1} \subset K_{U_2}$. Eindige doorsneden van verzamelingen K_U zijn niet leeg; als immers $K_{U_1} \cap K_{U_2} \cap \ldots \cap K_{U_n} = \emptyset$ dan zou uit $K_{U_1\cap\ldots\cap U_n} \subset \bigcap_{i=1}^{n} K_{U_i} = \emptyset$ volgen dat de verzameling $K_{U_1\cap\ldots\cap U_n}$ leeg was en dat is ze niet omdat $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ een open omgeving is van p. De afsluitingen $\bar{K}_U$ vormen een collectie gesloten deelverzamelingen van de compacte verzameling K, waarvan geen eindige deelcollectie een lege doorsnede heeft. Er is dus een $k_0 \in K$ die voldoet aan $k_0 \in \bar{K}_U$ voor alle omgevingen U van p. Voor elke omgeving N van 0 geldt nu $(N+k_0) \cap (N+p-A) \neq \emptyset$, dus $(N-N+k_0) \cap (p-A) \neq \emptyset$. Omdat er bij elke omgeving M van de oorsprong een N bestaat met $N-N \subset M$ (continuïteit van $x-y$!) vinden we dat elke omgeving van k_0 niet lege doorsnede heeft met $p-A$. Derhalve is $k_0 \in \overline{p-A} = p-A$, dus $k_0 = p - a_0$ en $p = a_0 + k_0 \in A+K$. Omdat p een willekeurig element uit $\overline{A+K}$ was, hebben we bewezen dat $A+K$ gesloten is. □

Opmerking. Het is niet moeilijk voorbeelden te geven van gesloten verzamelingen A en B, geen van beide compact, waarvoor $A+B$ niet gesloten is.

1.3.4. Definities. Zij $A \subset V$.

co(A), het convexe omhulsel, is de doorsnede van alle convexe verzamelingen die A omvatten; het is de verzameling van alle convexe combinaties van punten uit A.

$\overline{co}(A)$, het gesloten convexe omhulsel, is de doorsnede van alle gesloten convexe verzamelingen die A omvatten.

N.B. Het is duidelijk dat co(A) en $\overline{co}(A)$ convexe verzamelingen zijn.

De overige elementaire eigenschappen van convexe omhulsels worden uitgedrukt in het volgende lemma.

1.3.5. Lemma.

1) $co(A+B) = co(A) + co(B)$; $co(\alpha A) = \alpha co(A)$.
2) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$ ($\bar{B}$ is de afsluiting van B).
3) $\overline{co}(\alpha A) = \alpha\overline{co}(A)$.
4) Als $\overline{co}(A)$ compact is dan is $\overline{co}(A+B) = \overline{co}(A) + \overline{co}(B)$.
5) Als $\overline{co}(A)$ en $\overline{co}(B)$ beide compact zijn dan is $\overline{co}(A\cup B) = co(\overline{co}(A) \cup \overline{co}(B))$.

Bewijs.

1) Omdat $\Sigma t_i(a_i+b_i) = \Sigma t_ia_i + \Sigma t_ib_i$, is het eenvoudig in te zien dat $co(A+B) \subset co(A) + co(B)$. De inclusie $co(A) + co(B) \subset co(A+B)$ vraagt iets meer voorzichtigheid. Als $y \in B$ en $x = \Sigma t_ia_i \in co(A)$ (hierin is uiteraard $t_i \geq 0$, $\Sigma t_i = 1$) dan is $x+y = \Sigma t_i(a_i+y)$. Derhalve $co(A) + y = co(A+y)$; $co(A) + B \subset co(A+B)$. We passen dit nu tweemaal toe: eerst met B i.p.v. A en co(A) i.p.v. B (we krijgen dan $co(B) + co(A) \subset co(B + co(A))$) daarna met de verzameling A en B als zoeven ($B + co(A) \subset co(A+B)$). Als resultaat zien we $co(A) + co(B) \subset co(co(A+B)) = co(A+B)$. De laatste gelijkheid is een gevolg van het feit dat $co(A+B)$ zelf convex is. De rest van (1) is triviaal.
2) Omdat $\overline{co}(A)$ gesloten is en $\overline{co}(A) \supset co(A)$ geldt: $\overline{co}(A) \supset \overline{co(A)}$. Anderzijds is de afsluiting van de convexe verzameling co(A) convex (stelling 1.3.1.1), dus $\overline{co(A)} \supset \overline{co}(A)$.
3) Combinatie van 1) en 2).

4) $\overline{co}(A) + \overline{co}(B)$ is convex (1.1.4) en gesloten (1.3.3), dus $\overline{co}(A+B) \subset \overline{co}(A) + \overline{co}(B)$. Omdat de optelling in een topologische vectorruimte continu is geldt $\bar{X} + \bar{Y} \subset \overline{X + Y}$ voor alle $X,Y \subset V$; in ons geval vinden we (ook 1) en 2) worden gebruikt):

$$\overline{co}(A+B) = \overline{co(A+B)} = \overline{co(A) + co(B)} \supset \overline{co(A)} + \overline{co(B)} = \overline{co}(A) + \overline{co}(B) .$$

5) Als een verzameling C gesloten en convex is en $C \supset A \cup B$ dan geldt $C \supset A$ en dus $C \supset \overline{co}(A)$; $C \supset B$ en dus $C \supset \overline{co}(B)$; $C \supset \overline{co}(A) \cup \overline{co}(B)$ en tenslotte $C \supset co(\overline{co}(A) \cup \overline{co}(B))$. Dit passen we toe met $C = \overline{co}(A \cup B)$. Dus $\overline{co}(A \cup B) \supset co(\overline{co}(A) \cup \overline{co}(B))$. Nu de andere inclusie. Uit het gegeven volgt dat $K := \overline{co}(A) \times \overline{co}(B) \times [0,1]$ een compacte verzameling is in $V \times V \times \mathbb{R}$ (bewijs dit!). De afbeelding $\psi\colon (p,q,t) \to tp + (1-t)q$ beeldt deze verzameling K continu af in $co(\overline{co}(A) \cup \overline{co}(B))$. Het beeld $\psi(K)$ is compact en dus gesloten. Bovendien is $\psi(K) \supset A \cup B$. Als het ons lukt te laten zien dat $\psi(K)$ convex is, dan kunnen we concluderen dat

$$\overline{co}(A \cup B) \subset \psi(K) \subset co(\overline{co}(A) \cup \overline{co}(B)) .$$

Welnu $\psi(K)$ is convex want als $t_1p_1 + (1-t_1)q_1$ en $t_2p_2 + (1-t_2)q_2$ $(0 \le t_1,t_2 \le 1;\ p_1,p_2 \in \overline{co}(A);\ q_1,q_2 \in \overline{co}(B))$ twee punten uit $\psi(K)$ zijn, dan geldt voor $0 \le \lambda \le 1$ dat

$$r := \lambda(t_1p_1 + (1-t_1)q_1) + (1-\lambda)(t_2p_2 + (1-t_2)q_2) =$$

$$= \mu\left(\frac{\lambda t_1}{\mu} p_1 + \frac{(1-\lambda)t_2}{\mu} p_2\right) + (1-\mu)\left(\frac{\lambda(1-t_1)}{1-\mu} q_1 + \frac{(1-\lambda)(1-t_2)}{1-\mu} q_2\right),$$

waarin $\mu := \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ (pas het bewijs aan als $\mu = 0$ of $\mu = 1$). Omdat p_1 en p_2 tot de convexe verzameling $\overline{co}(A)$ behoren geldt hetzelfde voor de convexe combinatie

$$\frac{\lambda t_1}{\mu} p_1 + \frac{(1-\lambda)t_2}{\mu} p_2 .$$

Evenzo behoort de convexe combinatie van q_1 en q_2 uit de tweede term tot $\overline{co}(B)$; conclusie $r \in \psi(K)$ en $\psi(K)$ is convex. □

We hebben een hulpstelling nodig over verzamelingen in een metrische ruimte X, met metriek d. Eerst definiëren we een daarin te gebruiken begrip.

1.3.6. Definitie. $K \subset X$ heet totaal begrensd indien er bij elke positieve ε een eindige collectie punten $k_1,\ldots,k_n$ in K bestaat (ε-net) zodat elk punt van K tot de verzameling $\{k_1,\ldots,k_n\}$ een afstand kleiner dan ε heeft. M.a.w.

$$\min\{d(k_i,x) \mid i = 1,\ldots,n\} < \varepsilon$$

voor elke x uit K, m.a.w. de open ballen met middelpunten $k_1,\ldots,k_n$ en straal ε overdekken K. De open bal met middelpunt k en straal ε noteren we als $B(k,\varepsilon)$, dus $B(k,\varepsilon) = \{x \in X \mid \|x - k\| < \varepsilon\}$.

1.3.7. Hulpstelling. Zij K een gesloten deelverzameling van een metrische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:

a) K is rij-compact.

b) K is compact.

c) K is totaal begrensd en volledig.

Een bewijs van deze stelling voert ons te ver van ons onderwerp af. Voor een bewijs vewijzen we naar bijv. Dunford-Schwartz, Linear Operators I, theorem 1.6.15 of J. Dieudonné, Foundations of modern analysis, theorem 3.16.1 (totaal begrensd heet bij Dieudonné: precompact).

1.3.8. Stelling. (Mazur). Zij X een Banachruimte, A een compacte verzameling in X dan is $\overline{\mathrm{co}}(A)$ compact.

Bewijs. Omdat $\overline{\mathrm{co}}(A)$ als gesloten deelverzameling van een volledige metrische ruimte zelf volledig is, is het op grond van 1.3.7 voldoende om aan te tonen dat $\overline{\mathrm{co}}(A)$ totaal begrensd is. Zij $\varepsilon > 0$. Er is een eindige verzameling $\{z_1,\ldots,z_n\} \subset A$ zō dat de ballen $B(z_i,\frac{1}{4}\varepsilon)$, $i = 1,\ldots,n$, een open overdekking van A vormen. Zij $K := \mathrm{co}\{z_1,\ldots,z_n\}$. Bij elke $x \in A$ zoeken we $v(x) \in \{1,\ldots,n\}$ zō dat $\|x - z_{v(x)}\| < \frac{1}{4}\varepsilon$ is. Voor $y \in \mathrm{co}(A)$ geldt: $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$ voor zekere $y_i \in A$, $\alpha_i \geq 0$, $\Sigma\alpha_i = 1$, maar dan is:

$$\|y - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_{v(y_i)}\| \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|y_i - z_{v(y_i)}\| < \tfrac{1}{4}\varepsilon .$$

We hebben zo gevonden:

$$\forall_{y\in\mathrm{co}(A)}\ \exists_{z\in K}\ [\|y - z\| < \tfrac{1}{4}\varepsilon] .$$

Triviaal is

$$\forall_{x\in\overline{co}(A)}\ \exists_{y\in co(A)}\ [\| x - y \| < \tfrac{1}{4}\varepsilon].$$

Combinerend:

$$\forall_{x\in\overline{co}(A)}\ \exists_{z\in K}\ [\| x - z \| < \tfrac{1}{2}\varepsilon]\ .$$

K zelf is een compacte verzameling (want de continue afbeelding $\psi\colon [0,1]^n \to X$ met $\psi(t_1,t_2,\dots,t_n) = \Sigma_{i=1}^n t_i z_i$ beeldt de compacte verzameling $\{(t_1,\dots,t_n) \in [0,1]^n \mid t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1\}$ af op K). K is dus totaal begrensd. Er zijn dus eindig veel punten in K (en dus in $\overline{co}(A) \supset K$): $k_1,\dots,k_s$ zodat $\bigcup_{j=1}^{s} B(k_j,\frac{\varepsilon}{2}) \supset K$. Als we dit resultaat combineren met

$$\forall_{x\in\overline{co}(A)}\ \exists_{z\in K}\ [\| x - z \| < \tfrac{1}{2}\varepsilon]$$

vinden we dat $k_1,\dots,k_s$ een ε-net voor $\overline{co}(A)$ is. □

We interesseren ons ook voor topologische eigenschappen samenhangend met het scheiden van disjuncte convexe verzamelingen door lineaire functionalen.

1.3.9. Lemma. Als een lineaire functionaal f, $f \neq 0$, op een topologische vectorruimte twee verzamelingen scheidt, waarvan er één een inwendig punt heeft, dan is f continu.

Bewijs. Zij Re f = h, het is voldoende te laten zien dat h continu is (denk aan $f(x) = h(x) - ih(ix)$). Zij A de verzameling met een inwendig punt p. Zij N een omgeving van 0 zodat $p + N \subset A$. Dan is $h(N) \subset h(A) - h(p)$ deelverzameling van een interval van de vorm $(-\infty,a)$ of $(-a,\infty)$ met $a > 0$. Neem $M := N \cap (-N)$ dan is $h(M) \subset (-a,a)$. Bij gegeven $\varepsilon > 0$ is $\varepsilon a^{-1}M$ dan een omgeving van 0 met $h(\varepsilon a^{-1}M) \subset (-\varepsilon,\varepsilon)$. □

1.3.10. Gevolg. In een topologische vectorruimte kan elk tweetal disjuncte convexe verzamelingen waarvan er één een inwendig punt heeft gescheiden worden door een continue lineaire functionaal.

1.3.11. Definitie. Heeft in een topologische vectorruimte 0 een omgevingsbasis bestaande uit symmetrische verzamelingen dan heet de topologie locaal convex.

1.3.12. Stelling. Laat K_1 en K_2 disjuncte gesloten convexe verzamelingen in een locaal convexe topologische vectorruimte zijn en zij K_1 compact. Dan bestaan er: een continue lineaire functionaal f, een reëel getal c en een $\varepsilon > 0$ zodanig dat

$$\mathrm{Re}\ f(K_2) \leq c - \varepsilon < c \leq \mathrm{Re}\ f(K_1)\ .$$

Bewijs. $K_1 - K_2$ is convex (1.1.4), gesloten (1.3.3) en $0 \notin K_1 - K_2$. Er is een symmetrische omgeving U van 0 met $U \cap (K_1 - K_2) = \emptyset$. U en $K_1 - K_2$ worden door een lineaire functionaal f, $f \neq 0$, gescheiden (1.1.23) en f is continu (1.3.9). Er is een getal $d \in \mathbb{R}$ met $\mathrm{Re}\ f(K_1 - K_2) \geq d \geq \mathrm{Re}\ f(U)$. Het bewijs is voltooid als we kunnen laten zien dat $d > 0$. Omdat $f \neq 0$ is, is er een x met $f(x) = 1$ (ga na); hieruit volgt $f(\alpha x) = \alpha$, maar $\alpha x \in U$ als α klein genoeg is. Er is dus een $\varepsilon > 0$ zo dat $f(U)$ alle scalairen van modulus $< \varepsilon$ bevat. □

4. Extreme punten; De stelling van Krein-Milman; Zwakke topologie; De zwakke * topologie; De stelling van Alaoglu; Een toepassing; het bang-bang principe van Liapounov.

1.4.1. Definitie. Zij X een vectorruimte en $K \subset X$. Een niet lege deelverzameling $A \subset K$ heet een extreme deelverzameling van K indien uit $tk_1 + (1-t)k_2 \in A$ met $0 < t < 1$, $k_1, k_2 \in K$ volgt:

$$k_1 \in A \quad \text{en} \quad k_2 \in A\ .$$

Bestaat A uit één punt dan spreken we van een extreem punt. Bekijk voorbeelden met $x = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$.

1.4.2. Lemma. Zij $A \subset B \subset K \subset X$. Als B een extreme deelverzameling van K en A een extreme deelverzameling van B is, dan is A extreme deelverzameling van K.

Bewijs. Zij $0 < t < 1$, $k_1, k_2 \in K$ en $tk_1 + (1-t)k_2 \in A$. Dan is $tk_1 + (1-t)k_2 \in B$ en omdat B extreme deelverzameling is van K volgt $k_1, k_2 \in B$. Omdat A extreme deelverzameling is van B volgt dan $k_1, k_2 \in A$. □

1.4.3. Lemma. (Krein-Milman lemma). Een niet lege compacte verzameling in een locaal convexe topologische vectorruimte heeft extreme punten.

<u>Bewijs</u>. Zij K compact in de locaal convexe topologische vectorruimte X. $\mathcal{A}$ zij de familie van de niet lege, gesloten, extreme deelverzamelingen van K. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ want $K \in \mathcal{A}$. We ordenen $\mathcal{A}$ d.m.v. inclusie, d.w.z. $A < A' :\Leftrightarrow A \subset A'$. Als $\mathcal{A}_1$ een lineair geordende deelverzameling van $\mathcal{A}$ is, dan zullen we laten zien dat $A_1 := \bigcap_{A \in \mathcal{A}_1} A$ een benedengrens van $\mathcal{A}_1$ is. Het is niet moeilijk te laten zien dat A_1 een gesloten, extreme verzameling is. Dat $A_1 \neq \emptyset$ is volgt uit de compactheid van K. Als nl. de collectie gesloten deelverzamelingen $\mathcal{A}_1$ een lege doorsnede zou hebben dan zou er zijn een eindige deelcollectie $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,n}$ met $\bigcap_{i=1}^{n} A_{1,i} = \emptyset$. (Als de doorsnede van een collectie gesloten deelverzamelingen van een compacte verzameling leeg is, vormen de complementen van deze gesloten deelverzamelingen een open overdekking!). Omdat $A_{1,1}, \ldots, A_{1,n}$ tot de lineair geordende $\mathcal{A}_1$ behoren is $\bigcap_{i=1}^{n} A_{1,i}$ de kleinste van de verzamelingen $A_{1,1}, \ldots, A_{1,n}$ en dus niet leeg. Tegenspraak.
Gevolg: Elke lineair geordende deelverzameling van $\mathcal{A}$ is naar beneden begrensd. Uit het lemma van Zorn volgt nu: er is een minimaal element in $\mathcal{A}$, zeg A_0. We zullen laten zien dat A_0 uit één punt bestaat. Ook dit laten we zien door een bewijs uit het ongerijmde. Veronderstel dat p en q, $p \neq q$ tot A_0 behoren. Op grond van 1.3.12 is er een continue lineaire functionaal f met $\mathrm{Re}\, f(p) < \mathrm{Re}\, f(q)$. We beschouwen nu $A_0' := \{x \in A_0 \mid \mathrm{Re}\, f(x) = \inf\{\mathrm{Re}\, f(y) \mid y \in A_0\}\}$. Omdat A_0 als gesloten deelverzameling van de compacte verzameling K zelf compact is neemt de continue functie Re f op A_0 zijn infimum aan; $A_0' \neq \emptyset$. Uit de continuïteit van Re f volgt ook dat A_0' gesloten is. $A_0' \neq A_0$ omdat $q \notin A_0'$. Als we kunnen laten zien dat A_0' een extreme deelverzameling van K is hebben we een tegenspraak met de minimaliteit van A_0 verkregen. We zullen laten zien dat A_0' extreme deelverzameling van A_0 is en dan lemma 1.4.2 toepassen. Zij $0 < t < 1$ $a,b \in A_0$ en $ta + (1-t)b \in A_0'$. Dan is

$$\gamma := \min\{\mathrm{Re}\, f(y) \mid y \in A_0\} = \mathrm{Re}\, f(ta + (1-t)b) = $$
$$= t\, \mathrm{Re}\, f(a) + (1-t)\mathrm{Re}\, f(b) .$$

Hieruit volgt $\mathrm{Re}\, f(a) = \mathrm{Re}\, f(b) = \gamma$, dus $a,b \in A_0'$. □

1.4.4. <u>Stelling</u>. (Krein-Milman). Zij K een compacte verzameling in een locaal convexe topologische vectorruimte; E de verzameling van extreme punten van K dan geldt:

$$\overline{\mathrm{co}}(E) \supset K .$$

Bewijs. Stel $k \in K$, $k \notin \overline{co}(E)$. Op grond van 1.3.12 is er een continue lineaire functionaal f en een positief getal ε zó dat $\operatorname{Re} f(\overline{co}(E)) \geq \operatorname{Re} f(k) + \varepsilon$. Zij $K_1 := \{x \in K \mid \operatorname{Re} f(x) = \inf\{\operatorname{Re} f(y) \mid y \in K\}\}$. Als in het vorige bewijs ziet men dat K_1 een niet lege, gesloten en dus compacte, extreme deelverzameling van K is. $K_1 \cap E = \emptyset$; K_1 bevat dus geen extreme punten van K, dus (1.4.2) in het geheel geen extreme punten in tegenspraak met lemma 1.4.3. □

1.4.5. Gevolg. Is K compact en convex dan is $K = \overline{co}(E)$.

1.4.6. Stelling. Is Q een compacte verzameling in een locaal convexe topologische vectorruimte waarvan $\overline{co}(Q)$ compact is, dan behoren alle extreme punten van $\overline{co}(Q)$ tot Q.

(Opmerking. Als de ruimte een Banachruimte is dan zegt de stelling van Mazur (1.3.8) dat aan de eis dat $\overline{co}(Q)$ compact is voor alle compacte Q voldaan is.)

Bewijs. Stel p extreem punt van $\overline{co}(Q)$ en $p \notin Q$. Dan is er een omgeving U_0 van 0 met $(p + U_0) \cap Q = \emptyset$. Neem een symmetrische omgeving U van 0 met $U - U \subset U_0$. Dan $(p + U - U) \cap Q = \emptyset$; $(p + U) \cap (Q \cap U) = \emptyset$ en dus $p \notin \overline{Q + U}$. De collectie $\{q + U \mid q \in Q\}$ vormt een open overdekking van Q, er zijn dus $q_1, \dots, q_n \in Q$ zodat $Q \subset \cup_{i=1}^{n} (q_i + U)$. We definiëren $K_i := \overline{co}((\overline{q_i + U}) \cap Q)$. Dan is $K_i \subset \overline{q_i + U}$ omdat U symmetrisch is; K_i is een gesloten en dus compacte deelverzameling van $\overline{co}(Q)$. We hebben

$$\overline{co}(Q) = \overline{co}(K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n) = co(K_1 \cup \dots \cup K_n) ,$$

omdat $K_i = \overline{co}\, K_i$ compact is (lemma 1.3.5.5).
Men ziet gemakkelijk dat $p \in \overline{co}(Q)$ geschreven kan worden als $\Sigma_{i=1}^{n} t_i k_i$ met $k_i \in K_i$, $t_i \geq 0$, $\Sigma t_i = 1$. Uit het feit dat p extreem punt is volgt dat $k_i = p$ voor elke i waarvoor $t_i > 0$ is. Dus

$$p \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i ;\; p \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{q_i + U} ;\; p \in \overline{q_j + U} \quad \text{voor zekere } j .$$

We hebben dus $(p + U) \cap (q_j + U) \neq \emptyset$ in tegenspraak met $(p + U) \cap (Q + U) = \emptyset$. □

Hoe meer compacte verzamelingen er in een locaal convexe topologische vectorruimte zijn, des te meer heeft men aan de stelling van Krein-Milman. Vandaar dat in belangrijke toepassingen meestal niet de norm topologie gebruikt wordt maar een zwakkere (met minder open en dus meer compacte verzamelingen).

1.4.7. Geinduceerde topologie (zwakke topologie).

Zij $f_\alpha : X \to Y$ $(\alpha \in A)$ een collectie afbeeldingen van een verzameling X in een topologische ruimte Y. Als we in X de discrete topologie hebben waarin alle deelverzamelingen van X open zijn dan zijn alle f_α automatisch continu. We zoeken de kleinste topologie i.e. de topologie met de minste open verzamelingen, ook wel genoemd de zwakste topologie op X waarvoor alle f_α nog continu zijn. Deze topologie heet de door $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ geinduceerde topologie (ook wel de zwakke topologie geinduceerd door $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$). Opdat alle f continu zijn is nodig dat alle deelverzamelingen van de vorm $f_\alpha^{\leftarrow}(0)$, met $\alpha \in A$ en 0 open in Y, open verzamelingen in X zijn. Nu vormt de collectie $S := \{f_\alpha^{\leftarrow}(0) \mid \alpha \in A, 0 \text{ open in } Y\}$ in het algemeen geen topologie. De verzameling van alle verenigingen van eindige doorsneden van elementen uit S vormt wel een topologie en dit is juist de zwakke topologie geinduceerd door de collectie $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Een collectie B van open verzamelingen die zo is dat elke open verzameling een vereniging is van elementen uit B heet een <u>basis</u> voor de topologie. Een collectie S die zo is dat de verzameling van alle eindige doorsneden van elementen uit S een basis vormt heet <u>subbasis</u> voor de topologie. In deze zin is $\{f_\alpha^{\leftarrow}(0) \mid \alpha \in A\}$ een subbasis van de zwakke topologie geinduceerd door $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

1.4.8. <u>Voorbeeld</u>. In ℓ_2 is de topologie van de zwakke convergentie, de zwakke topologie geinduceerd door alle lineaire functionalen. Deze is echt zwakker dan de norm topologie want als $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ een totaal orthonormaal systeem is dan is $\|g_k\| = 1$ terwijl voor elke $f \in \ell_2$: $(f, g_k) \to 0$ als $k \to \infty$. Dus $g_k \to 0$ in de zwakke topologie. De verzameling $\{x \in \ell_2 \mid \|x\| < 1\}$ die een open omgeving van 0 is in de norm topologie is dus niet open in de zwakke topologie.

1.4.9. <u>Voorbeeld</u>. <u>Het topologische product</u>. Als X_α $(\alpha \in A)$ een collectie topologische ruimten is dan is de product topologie de zwakke topologie op $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ geinduceerd door de projecties $\mathrm{proj}_\beta : (\prod_{\alpha\in A} X_\alpha) \to X_\beta$ $(\beta \in A)$. Een subbasis van de producttopologie wordt gevormd door alle verzamelingen $\prod_{\alpha\in A} 0_\alpha$ waarbij voor $\alpha \neq \alpha_0$ geldt $0_\alpha = X_\alpha$ en voor $\alpha = \alpha_0$ geldt 0_{α_0} is open in X_{α_0}.

Voor topologische producten geldt als belangrijkste stelling:

1.4.10. Stelling (Tychonov). Als X_α ($\alpha \in A$) compacte Hausdorffruimten zijn dan is $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ een compacte Hausdorffruimte.

Het bewijs van deze stelling berust op het lemma van Zorn. We bespreken het niet. Zij bijv. Dunford-Schwartz Linear Operators I, theorem 1.8.5.

1.4.11. Stelling. Zij X een genormeerde vectorruimte. De zwakke topologie in X geinduceerd door de begrensde lineaire functionalen is een locaal convexe lineaire topologie.

Bewijs. We definiëren $N(x_0,\varepsilon,f) := \{x \in X \mid |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$, dan is de collectie $\{N(x_0,\varepsilon,f) \mid x_0 \in X,\ \varepsilon > 0,\ f \in X^*\}$ een subbasis voor de zwakke topologie (X^* is de verzameling van alle begrensde lineaire functionalen). Omdat

$$|f(tx+(1-t)y - f(x_0)| \le t|f(x)-f(x_0)| + (1-t)|f(y)-f(x_0)| \ ,$$

$0 \le t \le 1$, zijn de verzamelingen $N(x_0,\varepsilon,f)$ convex. Bovendien is $N(x_0,\varepsilon,f) = x_0 + N(0,\varepsilon,f)$ en $N(0,\varepsilon,f)$ is symmetrisch. Een basis van de topologie vormen de verzamelingen

$$N(x_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,f_1,\ldots,f_n) := \{x \in X \mid |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots,n\}$$

als $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i > 0$, $f_i \in X^*$. Een andere basis is $\{N(x_0,\varepsilon,\ldots,\varepsilon,f_1,\ldots,f_n) \mid x_0 \in X, \varepsilon > 0,\ f_i \in X^*\ (i = 1,\ldots,n)\}$. De meeste eisen van de lineaire topologie zijn eenvoudig, bijv.

$$N(x+y,\varepsilon,\ldots,\varepsilon,f_1,\ldots,f_k) \supset N(x,\tfrac12\varepsilon,\ldots,\tfrac12\varepsilon,f_1,\ldots,f_n) + $$
$$+ N(y,\tfrac12\varepsilon,\ldots,\tfrac12\varepsilon,f_1,\ldots,f_n)\ .$$

Dat de geinduceerde topologie Hausdorff is volgt uit de scheidingsstelling (1.3.12): als $p \neq q$ dan is er een begrensde lineaire functionaal en een getal $\varepsilon > 0$ met $|f(p) - f(q)| > \varepsilon$. Dan is $N(p,\tfrac12\varepsilon,f) \cap N(q,\tfrac12\varepsilon,f) = \emptyset$. □

1.4.12. De zwakke * topologie

We kunnen stelling 1.4.11 toepassen op X^*; dit is ook een genormeerde ruimte en daarin is dus een zwakke topologie gedefinieerd. We bekijken echter een i.h.a. nog zwakkere topologie, geinduceerd niet door alle begrensde lineaire functionalen op X^* (i.e. X^{**}) maar door de deelcollectie van de evaluatiefunctionalen. De evaluatiefunctionaal Ev_x is voor elke $x \in X$ de begrensde lineaire functionaal op X^* gedefinieerd door $Ev_x(x^*) := x^*(x)$ voor alle $x^* \in X^*$. De norm van Ev_x berekenen we gemakkelijk:

$$\| Ev_x \| = \sup\{ |x^*(x)| \mid \|x^*\| = 1\} ;$$

enerzijds volgt uit $|x^*(x)| \le \|x^*\| \|x\|$ dat $\|Ev_x\| \le \|x\|$; anderzijds volgt uit 1.1.21 dat er een x^* is met $x^*(x) = \|x\|$ en $\|x^*\| = 1$ dus $\|Ev_x\| \ge \|x\|$; $\|Ev_x\| = \|x\|$. Merk op dat $x \rightsquigarrow Ev_x$ een isometrische inbedding is van X in X^{**}. De topologie in X^* geinduceerd door alle evaluaties heet de zwakke $*$ topologie van X^* *(ook wel: de X topologie in* X^**). Men moet verifiëren dat de zwakke* $*$ topologie een locaal convexe lineaire topologie is.

In de zwakke $*$ topologie zijn er veel compacte verzamelingen:

1.4.13. <u>Stelling</u> (Alaoglu). Zij X een genormeerde ruimte. De gesloten norm-één bal in X^*: $S^* := \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| \le 1\}$ is compact in de zwakke $*$ topologie.

<u>Bewijs</u>. Voor elke $x \in X$ zij $\Delta_x := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|x\|\}$; dan is Δ_x compact en volgens Tychonov's stelling (1.4.10) is dan ook $C := \prod_{x\in X} \Delta_x$ compact. Elke $c \in C$ kan beschouwd worden als een functie $X \to \mathbb{C}$ die voldoet aan

$$|c(x)| = |\mathrm{proj}_x c| \le \|x\| .$$

Op deze wijze is S^* op te vatten als deelverzameling van C en omdat de evaluatiefunctionalen juist overeenkomen met de projecties op de componenten van $\prod_{x\in X} \Delta_x$ is de topologie die S^* heeft als deelverzameling van C juist de zwakke $*$ topologie. Omdat C compact en Hausdorff is, is het voldoende om te laten zien dat S^* in C gesloten is. Maar $S^* = \bigcap_{x,y\in X} A_{x,y} \cap \bigcap_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\ x\in X}} B_{\alpha,x}$ waarbij

$$A_{x,y} := \{f \in C \mid \mathrm{proj}_{x+y} f = \mathrm{proj}_x f + \mathrm{proj}_y f\}$$

en

$$B_{\alpha,x} := \{f \in C \mid \mathrm{proj}_{\alpha x} f = \alpha\, \mathrm{proj}_x f\} .$$

Op grond van de continuïteit van de projecties is elke $A_{x,y}$ en elke $B_{\alpha,x}$ gesloten, dus is S^* gesloten. Derhalve S^* is compact. □

1.4.14. <u>Gevolg</u>. Elke normbegrensde, zwak $*$ gesloten deelverzameling van X^* is zwak $*$ compact.

1.4.15. Voor de nu volgende toepassing van de stelling van Krein-Milman verwijzen we naar H. Hermes and J.P. Lasalle, Functional Analysis and Time Optimal Control (BW 6911).

Zij I een interval; $L_\infty(I)$ de (equivalentie klassen van) reële essentieel begrensde Lebesgue meetbare functies op I met norm

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}|f(x)| \;.$$

$L_1(I)$ de (equivalentie klassen van) reële meetbare functies op I met

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt < \infty \;.$$

Belangrijk voor ons is dat $L_1^* = L_\infty$. (Geen bewijs in dit college.)

Zij $W := \{u \in L_\infty(I) \mid 0 \le u(t) \le 1 \ (t \in I)\}$.

Zij tenslotte $y: I \to \mathbb{R}$ een (vaste) functie uit $L_1(I)$.

1.4.16. <u>Lemma</u>. $M := \{\int_I y(t)u(t)dt \mid u \in W\}$ is compact en convex, dus M is een begrensd gesloten interval.

<u>Bewijs</u>. $W = \{u \in L_\infty(I) \mid \|u - u_0\|_\infty \le \frac{1}{2}\}$ waarin u_0 de functie constant gelijk aan $\frac{1}{2}$ is. Volgens 1.4.14 is W zwak * compact. $Ev_y(u) = \int_I y(t)u(t)dt$ en Ev_y is continu in de zwakke * topologie; derhalve is M compact. Dat M convex is, is triviaal. □

1.4.17. <u>Stelling</u> (Liapounov, vaak genoemd: Bang-Bang stelling).

$$M = \{\int_I y(t)\chi_E(t)dt \mid E \text{ meetbaar, } E \subset I\} \;.$$

<u>Bewijs</u>. We moeten laten zien dat voor elke $a \in M$ de verzameling

$$W_a := \{u \in W \mid \int_I y(t)u(t)dt = a\}$$

een karakteristieke functie bevat. W_a is niet leeg, gesloten in de zwakke * topologie en dus zwak * compact, W_a is bovendien convex. Volgens de stelling van Krein-Milman is W_a dus het gesloten convexe omhulsel van zijn extreme elementen. Als we op grond van het Krein-Milman lemma eenmaal weten dat W_a

extreme elementen bezit, is het niet moeilijk te laten zien dat elk extreem element de karakteristieke functie van een meetbare verzameling is. Stel nl. dat u_0 een extreem element van W_a is waarvoor er een $\varepsilon > 0$ en een meetbare verzameling E met positieve maat bestaat zodat $\varepsilon \le u_0(t) \le 1 - \varepsilon$ voor $t \in E$. We zullen laten zien dat hieruit een tegenspraak volgt. Kies E_1, E_2 binnen E zō dat $\mu(E_1) > 0$ (μ is Lebesguemaat; $\mu(E_1) = \int_{E_1} dt$), $\mu(E_2) > 0$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Bepaal dan α_1 en α_2 zodanig dat de (equivalentieklasse van de) functie $h = \alpha_1\chi_{E_1} + \alpha_2\chi_{E_2}$ voldoet aan:

$$\int_I y(t)h(t)dt = \alpha_1 \int_{E_1} y(t)dt + \alpha_2 \int_{E_2} y(t)dt = 0 ,$$

terwijl $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $|\alpha| < \varepsilon$, $|\beta| < \varepsilon$.

Deze functie h is dan niet gelijk aan $0 \in \mathcal{L}_\infty(I)$ terwijl $-h + u_0$ en $+h + u_0$ beide in W_a zitten. Omdat $\frac{1}{2}(-h + u_0) + \frac{1}{2}(h + u_0) = u_0$ en $-h + u_0 \neq h + u_0$ is u_0 geen extreem element. Tegenspraak. □

5. Vaste punten

1.5.1. Definitie. Een topologische ruimte R heeft de vaste punt eigenschap als elke continue afbeelding $T: R \to R$ een vast punt x heeft (d.w.z. $Tx = x$).

1.5.2. Lemma. Als R homeomorf met $\tilde{R}$ is en R heeft de vaste punt eigenschap dan heeft ook $\tilde{R}$ de vaste punt eigenschap.

Bewijs. Zij $\varphi: R \to \tilde{R}$ een homeomorfisme. Als $\tilde{T}: \tilde{R} \to \tilde{R}$ een continue afbeelding is dan is $\varphi^{-1} \circ \tilde{T} \circ \varphi$ een continue afbeelding van R in R; is p een vast punt van $\varphi^{-1} \circ \tilde{T} \circ \varphi$ dan is $\varphi(p)$ vast punt van $\tilde{T}$. □

We vermelden:

1.5.3. Stelling (Brouwer). De gesloten eenheidsbal in $\mathbb{R}^n$ heeft de vaste punt eigenschap.

De stelling van Brouwer is de opstap voor verdere vaste punt stellingen:

1.5.4. Voorbeeld. De fundamentaalbalk van Hilbert heeft de vaste punt eigenschap.

N.B. De fundamentaalbalk is de deelverzameling van ℓ_2:

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \mid \forall_{n\in\mathbb{N}} [|x_n| \le \tfrac{1}{n}]\} =: K .$$

Om te bewijzen dat de fundamentaalbalk K de vaste punt eigenschap heeft moet men eerst laten zien dat K compact is (gebruik 1.3.7). Zij vervolgens T: $K \to K$ continu. Definieer voor elke $N \in \mathbb{N}$ de projectie π_N: $K \to K$ door

$$\pi_N(x_1,x_2,\ldots) = (x_1,x_2,\ldots,x_N,0,0,\ldots) .$$

$C_N := \pi_N(K)$ is homeomorf met de gesloten eenheidsbal in $\mathbb{R}^{2N}$ ($\mathbb{C}^N$ is homeomorf met $\mathbb{R}^{2N}$); C_N heeft dus de vaste punt eigenschap. $\pi_N \circ T$: $C_N \to C_N$ heeft een vast punt, zeg y_N.
Er geldt:

$$\| y_N - Ty_N \| \le \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

en dit nadert naar 0 als $N \to \infty$. Omdat K compact is heeft de rij $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Noem het limietpunt y dan geldt

$$\| y - Ty \| \le \| y - y_{n_k} \| + \| y_{n_k} - Ty_{n_k} \| + \| Ty_{n_k} - Ty \| \to 0 .$$

Dus $y = Ty$. □

1.5.5. <u>Stelling</u> (Schauder). Is K een compacte convexe verzameling in een genormeerde ruimte dan heeft K de vaste punt eigenschap.

Het bewijs dat wij schetsen maakt gebruik van een uiterst krachtige techniek nl. simpliciale approximatie. Wil men meer informatie over simpliciale verdelingen dan zie men bijv. Kantorovich-Akilov: Functional Analysis in Normed Spaces, blz. 631 e.v.

<u>Bewijs</u>. Zij F een continue afbeelding van K in K. Uit de compactheid van K volgt dan dat F uniform continu is, m.a.w.

(*) $$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in K, y\in K} [\| x - y \| < \delta \Rightarrow \| F(x) - F(y) \| < \varepsilon] .$$

Zij $\varepsilon > 0$, neem een δ zodat aan (*) voldaan is en $0 < \delta < \varepsilon$. Kies $x_1,..,x_n \in K$ zó dat

$$\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\tfrac{1}{2}\delta) \supset K .$$

Definieer $K_\varepsilon := \overline{\mathrm{co}}\{x_1,\dots,x_n\}$. K_ε is isomorf met een polytoop in een zekere $\mathbb{R}^k$. We kunnen dus K_ε verdelen in simplexen σ_j zo dat elk deelsimplex σ_j binnen een bal met straal $\frac{1}{2}\delta$ ligt (anders gezegd: zó dat de diameter van elk simplex $< \delta$ is).
De simpliciale verdeling van K_ε geeft ons een eindige collectie hoekpunten $y_1,\dots,y_m$ en elke $x \in K_\varepsilon$ is op eenduidige wijze te schrijven als convexe combinatie van de hoekpunten van het laagst dimensionale deelsimplex waartoe hij behoort. Bij elk hoekpunt y van een deelsimplex uit de verdeling kiezen we een punt $F_\varepsilon(y)$ dat voldoet aan $\|F_\varepsilon(y) - F(y)\| < \delta$ en $F_\varepsilon(y) \in K_\varepsilon$. Als $x \in K_\varepsilon$ te schrijven is als $x = \Sigma_j t_j y_j$ dan definiëren we $F_\varepsilon(x) := \Sigma_j t_j F_\varepsilon(y_j)$. We krijgen zo een continue afbeelding $F_\varepsilon\colon K_\varepsilon \to K_\varepsilon$. Op grond van de stelling van Brouwer heeft deze een vast punt $p_\varepsilon \in K_\varepsilon$ dus $F_\varepsilon(p_\varepsilon) = p_\varepsilon$.
Het is duidelijk dat K_ε een benadering is van K, F_ε is op K_ε een goede benadering voor F want voor $x \in K_\varepsilon$ geldt:

$$\begin{aligned}\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| &\le \Sigma t_j \|F_\varepsilon(y_j) - F(x)\| \le \\ &\le \Sigma t_j (\|F_\varepsilon(y_j) - F(y_j)\| + \|F(y_j) - F(x)\|) \le \\ &\le \Sigma t_j(\delta + \varepsilon) \le 2\varepsilon .\end{aligned}$$

Hierin is o.a. gebruikt dat $\Sigma t_j = 1$ en dat y_j als hoekpunt van het simplex σ_j dat x bevat voldoet aan $\|y_j - x\| < \delta$.
Nemen we nu achtereenvolgens $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ dan vinden we de rij vaste punten $(p_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$. Deze heeft omdat K compact is een convergente deelrij $(p_{1/n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; noem de limiet hiervan p, dan is:

$$\begin{aligned}\|F(p) - p\| &\le \|F(p) - F(p_{1/n_k})\| + \|F(p_{1/n_k}) - F_{1/n_k}(p_{1/n_k})\| + \\ &+ \|p_{1/n_k} - p\| \le \|F(p_{1/n_k}) - F(p)\| + 2/n_k + \|p_{1/n_k} - p\| \to 0\end{aligned}$$

als $k \to \infty$. Derhalve is $F(p) = p$. □

1.5.6. <u>Stelling</u> (Schauder-Tychonov). Als voorafgaande maar dan met een locaal convexe topologische vectorruimte i.p.v. een genormeerde ruimte.

Bewijs. Het bewijs is analoog aan het voorgaande als men alle ε en δ maar vervangt door geschikte symmetrische omgevingen van 0. Zie bijv. M.M. Day, Normed Linear Spaces, blz. 82. □

1.5.7. Stelling (Markov-Kakutani). Zij K een compacte convexe deelverzameling van een locaal convexe topologische vectorruimte X; $\mathcal{I}$ een commuterende familie van continue lineaire afbeeldingen van K in K, dan is er een $p \in K$ met $Tp = p$ voor alle T uit $\mathcal{I}$.

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{I}$. Definieer $T_n := \frac{1}{n}(I + T + T^2 + \ldots + T^{n-1})$. Zij $\mathcal{K}$ de familie: $\mathcal{K} := \{T_n(K) \mid n \in \mathbb{N}, T \in \mathcal{I}\}$. Elk element van $\mathcal{K}$ is een compacte, convexe deelverzameling van K. Uit $TS = ST$ volgt $T_nS_m = S_mT_n$ en dus $T_nS_m(K) \subset T_n(K) \cap S_m(K)$. Hieruit volgt dat elke eindige doorsnede van elementen uit $\mathcal{K}$ niet leeg is; immers zijn $T,S,U,\ldots,V \in \mathcal{I}$ en $n,m,\ell,\ldots,k \in \mathbb{N}$ dan is

$$T_n(K) \cap S_m(K) \cap U_\ell(K) \cap \ldots \cap V_k(K) \supset T_nS_mU_\ell \ldots V_k(K) .$$

Uit de compactheid van K volgt nu

$$\exists_{p \in K} \, [p \in \bigcap_{\substack{T \in \mathcal{I} \\ n \in \mathbb{N}}} T_n(K)]$$

(vergelijk het bewijs van 1.3.3).
Stel dat voor zekere T uit S geldt: $Tp \neq p$ dan is er een symmetrische omgeving U van 0 met $Tp - p \notin U$. Als $n \in \mathbb{N}$ dan volgt uit $p \in T_n(K)$ dat er een $q_n \in K$ is met $p = \frac{1}{n}(I + T + \ldots + T^{n-1})q_n$. Omdat T lineair is, is dan $Tp = \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)q_n$ en $Tp - p = \frac{1}{n}(T^n - I)q_n$. Omdat $T^nq_n \in K$, $q_n \in K$ en $\frac{1}{n}(T^n - I)q_n \notin U$ is, volgt $\frac{1}{n}(K - K) \not\subset U$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Maar $K - K$ is compact (wegens de continuïteit van $(x,y) \to x-y$) en $\bigcup_{n=1}^{\infty} nU = X$ dus $\{nU \mid n \in \mathbb{N}\}$ is een open overdekking van $K - K$; deze heeft een eindige deeloverdekking $n_1U \cup \ldots \cup n_sU$; is $m = \max\{n_1,\ldots,n_s\}$ dan $n_1U \cup \ldots \cup n_sU \subset mU$ dus $\frac{1}{m}(K - K) \subset U$, tegenspraak. Dus $Tp = p$ voor alle $T \in \mathcal{I}$. □

1.5.8. Opmerking. Vergelijkt men de vaste puntenstellingen van Banach (zie Algebra en Analyse, stelling 5.2.17 of Lineaire Analyse I), Schauder-Tychonov en Markov-Kakutani dan blijkt dat voor de eerste sterke eisen opgelegd worden aan de afbeelding die het vaste punt moet hebben; bij Schauder wordt van elke continue afbeelding het bestaan van een vast punt bewezen, maar alleen onder sterke voorwaarden op te leggen aan het definitiegebied (dit moet nl. compact en convex zijn). In de laatste stelling worden zowel aan de afbeeldingen als aan het definitiegebied, sterke eisen gesteld, maar het resultaat is dan ook een simultaan vast punt voor een hele familie van afbeeldingen.

6. Appendix

De stelling van Brouwer (gepubliceerd in 1912) is van groot belang voor vele gebieden van de analyse, de algebraïsche topologie, de differentiaal topologie enz. Er bestaan vele bewijzen van. Geen daarvan is gelijktijdig eenvoudig en elementair. Een elementair maar spitsvormig bewijs staat in Dunford-Schwartz, blz. 467-470.
Een zeer eenvoudig bewijs dat echter de diepzinnige stelling van Sard gebruikt staat in Milnor: Topology from the differentiable viewpoint, blz. 14.

Voor ons het aantrekkelijkste bewijs is dat uit Kantorovich-Akilov, blz. 631-640 omdat daarin de belangrijke (van Brouwer afkomstige) methode van de simpliciale verdelingen gebruikt wordt. Zie voor een variant hiervan:

V.V. Nemyckii, The fixed point method in analysis.
A.M.S. Translations 2(34), 1963, blz. 1-37.

Omdat de stelling van Brouwer zoveel gebruikt wordt in gebieden die betrekkelijk ver van de klassieke analyse en topologie afstaan wordt er nog steeds naar zogenaamde eenvoudigere bewijzen gezocht. Een voorbeeld:

Kiyoshi Kuga. Brouwer's fixed-point theorem: an alternative proof.
SIAM Journal Math. Anal. Vol. 5, no. 6, 1974 (blz. 893-897).

Dit artikel geschreven vanuit de behoefte van de mathematische economie gebruikt Bernstein polynomen maar is verder uiterst elementair; de prijs voor het afzien van geavanceerde resultaten is hier een gecompliceerde rekenpartij.

Literatuur bij hoofdstuk 1

Naast de verwijzingen die bij met name genoemde details in de tekst voorkomen, geven we een lijst van aanbevolen studiemateriaal. Alle nodige voorkennis kan men putten uit:

Syllabus Lineaire Analyse I
Algebra en Analyse.

Ook uit bijv.

J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis.
A.L. Brown, A. Page, Elements of Functional Analysis.

Behalve in deze syllabus, kan men de stof van hoofdstuk 1 ook vinden in:

M.M. Day, Normed Linear Spaces.

N. Dunford, J.T. Schwarz, Linear Operators I.

R. Holmes, Geometric Functional Analysis and its Applications.

L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces.

R. Larsen, Functional Analysis, an introduction.

M.A. Naimark, Normed Rings (Normed Algebras).

Hoofdstuk 2. Spectrale theorie

1. Spectrale theorie in $\mathbb{C}^n$; Matrixfuncties

In deze inleidende paragraaf bespreken we enige resultaten uit de lineaire algebra (matrixrekening) die als aanloop kunnen dienen voor de theorie die zal volgen.

2.1.1. Definities en notaties. Zij $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ een lineaire operator (deze is automatisch begrensd omdat de dimensie van $\mathbb{C}^n$ eindig is). Is $P(\lambda)$ een polynoom in λ dan kan men λ door T vervangen: $P(T): \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

Het spectrum van T, $\sigma(T)$, is de verzameling van de complexe getallen λ waarvoor $\lambda I - T$ singulier is. In het eindig dimensionale geval bestaat het spectrum juist uit alle eigenwaarden van T. Voor $k = 0,1,2,\ldots$ en λ complex definiëren we:

$$N_\lambda^k := \{x \in \mathbb{C}^n \mid (T - \lambda I)^k x = 0\}$$

$$\nu(\lambda) := \min\{k \mid N_\lambda^{k+1} = N_\lambda^k\} .$$

Men ziet eenvoudig dat $\lambda \in \sigma(T)$ dan en slechts dan als $\nu(\lambda) > 0$.

2.1.2. Stelling. Als P en Q polynomen zijn dan geldt $P(T) = Q(T)$ dan en slechts dan als $P - Q$ nulpunten van de orde $\geq \nu(\lambda)$ heeft in elke $\lambda \in \sigma(T)$.

Bewijs. Zonder verlies aan algemeenheid kunnen we voor Q het nulpolynoom nemen. Laat $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ een basis van $\mathbb{C}^n$ zijn. De vectoren $\underline{x}_1, T\underline{x}_1, T^2\underline{x}_1,\ldots,T^n\underline{x}_1$ zijn lineaire afhankelijk; er bestaat derhalve een polynoom (van graad $\leq n$) S_1 met $S_1(T)\underline{x}_1 = \underline{0}$. Hetzelfde argument herhaald voor $\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ geeft polynomen $S_2,\ldots,S_n$ met de eigenschap $S_i(T)\underline{x}_i = \underline{0}$. Neem $R = S_1,\ldots,S_n$ dan is $R(T)\underline{x} = \underline{0}$ voor alle $\underline{x}$ dus $R(T) = 0$. Stel $R(\lambda) = a\Pi_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Als $\lambda_i \notin \sigma(T)$ dan volgt uit $(T - \lambda_i I)\underline{x} = \underline{0}$ dat $\underline{x} = \underline{0}$. Dit betekent dat voor de deler

$$R_1(\lambda) := \prod_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \in \sigma(T)}}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

van $R(\lambda)$ geldt dat $R_1(T) = 0$.

Stel voorts $\alpha_1 > \nu(\lambda_1)$, schrijf $R_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} R_2(\lambda)$ met $R_2(\lambda_1) \neq 0$. Omdat uit $(T - \lambda_1 I)^{\alpha_1}\underline{y} = \underline{0}$ volgt dat $(T - \lambda_1 I)^{\nu(\lambda_1)}\underline{y} = \underline{0}$ vinden we dat $(T - \lambda_1 I)^{\nu(\lambda_1)} R_2(T) = 0$.
Ook dit argument herhalen we en wel voor elke $\lambda \in \sigma(T)$. Resultaat

$$R_3(\lambda) := \prod_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \in \sigma(T)}}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\beta_i}$$

waarin $\beta_i := \min\{\alpha_i, \nu(\lambda_i)\}$ voldoet nog steeds aan $R_3(T) = 0$.
Als nu P nulpunten van orde $\geq \nu(\lambda)$ heeft in elke $\lambda \in \sigma(T)$ dan geldt $P(\lambda) = R_3(\lambda)Q(\lambda)$ en dus $P(T) = 0$.
Is anderzijds $P(T) = 0$ waarin $P(\lambda) = b\,\Pi_{i=1}^{p}(\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$ dan volgt als voorheen dat ook $P_1(T) = 0$ met

$$P_1(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \in \sigma(T)}}^{p} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}.$$

Zonder verlies aan algemeenheid kunnen we dus veronderstellen $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\} \subset \sigma(T)$. Ook geldt $\sigma(T) \subset \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$ want als er een λ_0 zou bestaan met $\lambda_0 \neq \lambda_i$, $i = 1,\ldots,p$, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ dan was er een $\underline{y} \neq \underline{0}$ met $T\underline{y} = \lambda_0\underline{y}$ derhalve $P(T)\underline{y} = P(\lambda_0)\underline{y} \neq \underline{0}$ dus $P(T) \neq \underline{0}$.
Stel voorts $\alpha_1 < \nu(\lambda_1)$ dan is er een $\underline{x} \neq \underline{0}$ met

$$(T - \lambda_1 I)^{\alpha_1+1}\underline{x} = \underline{0},\quad (T - \lambda_1 I)^{\alpha_1}\underline{x} \neq \underline{0}.$$

Stel $(T - \lambda_1 I)^{\alpha_1}\underline{x} = \underline{y}$, dan is $T\underline{y} = \lambda_1\underline{y}$. $P(\lambda)$ kan geschreven worden als $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} Q(\lambda)$ met $Q(\lambda_1) \neq 0$. Nu is $P(T)\underline{x} = Q(T)\underline{y} = Q(\lambda_1)\underline{y} \neq \underline{0}$ in tegenspraak met $P(T) = 0$. Derhalve is $\alpha_i \geq \nu(\lambda_i)$, $i = 1,\ldots,p$. □

2.1.3. Definitie. Met $F(T)$ geven we aan de verzameling van de functies die locaal analytisch zijn in een omgeving van het spectrum van T.

N.B. Als de omgeving O_f van $\sigma(T)$ waarop een zekere $f \in F(T)$ analytisch is niet samenhangend is, wordt niet geëist dat de restricties van f tot de componenten van O_f door analytische voortzetting uit elkaar verkregen kunnen worden.

Voor een element f uit $F(T)$ definiëren we $f(T)$ als volgt: zij P een polynoom met

$$f^{(m)}(\lambda) = P^{(m)}(\lambda), \quad 0 \le m \le \nu(\lambda) - 1$$

voor elke $\lambda \in \sigma(T)$, dan $f(T) := P(T)$. De vorige stelling laat zien dat $f(T)$ onafhankelijk is van het gekozen polynoom P.

2.1.4. Eigenschappen. $f,g \in F(T)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

1) $\alpha f(T) + \beta g(T) = (\alpha f + \beta g)(T)$.

2) $f(T)\cdot g(T) = (f\cdot g)(T) = g(T)\cdot f(T)$.

3) Als $f(\lambda) = \sum_0^m \alpha_n \lambda^n$ dan is $f(T) = \sum_0^m \alpha_n T^n$.

4) $f(T) = 0$ dan en slechts dan als $f^{(m)}(\lambda) = 0$ voor elke $\lambda \in \sigma(T)$ en elke m met $0 \le m \le \nu(\lambda) - 1$.

2.1.5. Projectoren. Zij $\lambda_0 \in \sigma(T)$; zij $e_{\lambda_0}(\lambda)$ een functie identiek gelijk aan 1 in een omgeving van λ_0 en identiek gelijk aan 0 in een omgeving van ieder ander punt uit het spectrum van T. We noteren

$$E_{\lambda_0} := e_{\lambda_0}(T) .$$

2.1.6. Stelling.

1) $$E_{\lambda_0}^2 = E_{\lambda_0} .$$

2) $$E_{\lambda_0} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1} E_{\lambda_0} = 0 \quad \text{als } \lambda_1 \neq \lambda_0 .$$

3) $$I = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda .$$

Het bewijs volgt direct uit de eigenschappen 2.1.4.1 en 2.1.4.2.

2.1.7. Laat het spectrum van T bestaan uit k verschillende punten $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ en zij $X_i := E_{\lambda_i}\mathbb{C}^n$ dan geldt:

$$\mathbb{C}^n = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k ;$$

$\mathbb{C}^n$ is de directe som van de beeldruimten van de projectoren.

Bovendien is

$$TX_i = TE_{\lambda_i}\mathbb{C}^n = E_{\lambda_i}T\mathbb{C}^n \subset X_i \ .$$

Dus bij elke splitsing van het spectrum in k punten hoort een splitsing van de ruimte in k invariante deelruimten.

2.1.8. Opmerking. Omdat $(\lambda_i - \lambda)^{\nu(\lambda_i)} e_{\lambda_i}(\lambda)$ een nulpunt heeft van de orde $\nu(\lambda)$ in elk punt van $\sigma(T)$ geldt:

$$(\lambda_i I - T)^{\nu(\lambda_i)} E_{\lambda_i} = 0 \ .$$

Op de invariante deelruimte is $T = \lambda_i I + (T - \lambda_i I)$ de som van een veelvoud van de eenheidsoperator en een nilpotente operator (denk aan Jordankastjes).

2.1.9. Stelling. Als $\lambda \in \sigma(T)$ dan is

$$E_\lambda \mathbb{C}^n = N_\lambda^{\nu(\lambda)} \ .$$

Bewijs. $(T - \lambda I)^{\nu(\lambda)}E_\lambda = 0$; derhalve is $E_\lambda\mathbb{C}^n \subset N_\lambda^{\nu(\lambda)}$. Omdat $\sum_{\lambda\in\sigma(T)} E_\lambda = I$ hoeven we verder nog slechts te laten zien dat $N_\lambda^{\nu(\lambda)} \cap N_\mu^{\nu(\mu)} = \{\underline{0}\}$ voor $\lambda \neq \mu$ en beide uit $\sigma(T)$. Stel dat voor zekere $\underline{x} \neq \underline{0}$ geldt $\underline{x} \in N_\lambda^{\nu(\lambda)} \cap N_\mu^{\nu(\mu)}$. Bepaal het grootste getal α waarvoor $\underline{z} := (T - \lambda I)^\alpha \underline{x} \neq \underline{0}$, dan $T\underline{z} = \lambda\underline{z}$ en $0 \leq \alpha < \nu(\lambda)$. Uit $T\underline{z} = \underline{z}$ volgt $(T - \mu I)^{\nu(\mu)}\underline{z} = (\lambda - \mu)^{\nu(\mu)}\underline{z} \neq \underline{0}$. Anderzijds $(T - \mu I)^{\nu(\mu)}\underline{z} = (T - \mu I)^{\nu(\mu)}(T - \lambda I)^\alpha\underline{x} = (T - \lambda I)^\alpha(T - \mu I)^{\nu(\mu)}\underline{x} = (T - \lambda I)^\alpha\underline{0} = \underline{0}$; tegenspraak. $\square$

2.1.10. Stelling. Als $f \in F(T)$ dan is

$$f(T) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(T - \lambda I)^i}{i!} f^{(i)}(\lambda)E_\lambda \ .$$

Bewijs. De functie

$$g(\zeta) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(\zeta - \lambda)^i}{i!} f^i(\lambda)e_\lambda(\zeta)$$

is een functie met $f^{(m)}(\lambda) = g^{(m)}(\lambda)$ voor alle $\lambda \in \sigma(T)$ en $0 \leq m \leq \nu(\lambda) - 1$. Dus $f(T) = g(T)$. $\square$

2.1.11. Voorbeeld. Als $\nu(\lambda) = 1$ voor alle $\lambda \in \sigma(T)$ dan gaat 2.1.10 over in de eenvoudige formule $f(T) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} f(\lambda)E_\lambda$. In het bijzonder geldt $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda E_\lambda$.
We zullen nu bewijzen:

2.1.12. Lemma. Als T hermitisch is, dan is $\nu(\lambda) = 1$ voor alle $\lambda \in \sigma(T)$.

Bewijs. T voldoet aan $(T\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},T\underline{y})$. Als dus $T\underline{x} = \lambda\underline{x}$ voor $\underline{x} \neq \underline{0}$ dan geldt $\lambda(\underline{x},\underline{x}) = (T\underline{x},\underline{x}) = (\underline{x},T\underline{x}) = (\underline{x},\lambda\underline{x}) = \bar{\lambda}(\underline{x},\underline{x})$. Dus $\lambda = \bar{\lambda}$, λ is reëel. Zij $\lambda \in \sigma(T)$ en $(T-\lambda I)^2\underline{y} = \underline{0}$ dan is ook $(T-\lambda I)\underline{y} = \underline{0}$ en dus $\nu(\lambda) = 1$ omdat

$$0 = ((T-\lambda I)^2\underline{y},\underline{y}) = ((T-\lambda I)\underline{y}, (T-\bar{\lambda}I)y) = ((T-\lambda I)\underline{y}, (T-\lambda I)\underline{y}) =$$

$$= \|(T-\lambda I)\underline{y}\|^2 .$$ □

2.1.13. Stelling. Zij $f_n \in F(T)$, $n = 1,2,\ldots$. De rij $(f_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert dan en slechts dan als de rijen $(f_n^{(m)}(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeren voor elke $\lambda \in \sigma(T)$ en voor elke m met $0 \le m \le \nu(\lambda) - 1$.

Bewijs. Dat de genoemde voorwaarde voldoende is voor convergentie volgt direct uit 2.1.10 (merk op dat we verzuimd hebben vast te stellen dat convergentie van $f_n(T)$ convergentie in norm betekent; maar $BLO(\mathbb{C}^n)$ is eindig dimensionaal en een eindig dimensionale ruimte heeft tot op homeomorfie na maar één lineaire topologie).
Stel $(f_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert. Zij $\lambda \in \sigma(T)$, dan $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)-1}E_\lambda \neq 0$; er is dus een $\underline{x}$ met $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)-1}E_\lambda\underline{x} \neq \underline{0}$. Noem $E_\lambda\underline{x} =: \underline{y}$ en $(T-\lambda I)^k\underline{y} =: \underline{y}_k$ voor $0 \le k \le \nu(\lambda) - 1 =: r$. Nu is $\underline{y}_r \neq \underline{0}$ en $f_n(T)\underline{y}_r = f_n(\lambda)\underline{y}_r$ dus $(f_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert. Ook is $\underline{y}_{r-1} \neq \underline{0}$ en $f_n(T)\underline{y}_{r-1} = f_n(\lambda)\underline{y}_{r-1} + f_n'(\lambda)\underline{y}_r$ dus ook $(f_n'(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert. Enzovoort. □

Het belangrijkste resultaat van de inleidende paragraaf is de integraalvoorstelling van $f(T)$ met behulp van contour-integralen zoals gegeven in de volgende stelling.

2.1.14. Stelling (Dunford). Zij $f \in F(T)$. Zij Γ een contour om $\sigma(T)$, d.w.z. Γ is een eindig aantal Jordankrommen die éénmaal in positieve zin om elk punt van $\sigma(T)$ gaan. Zij f analytisch op en binnen Γ dan is:

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}d\lambda .$$

(Opmerking. Zij X een Banachruimte, $f: \mathbb{C} \to X$ analytisch (= differentieerbaar naar de complexe veranderlijke) op en binnen een contour Γ dan is $\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda = 0$.
Bijgevolg is de waarde van de integraal uit stelling 2.1.14 dezelfde voor elk contour dat eenmaal om $\sigma(T)$ gaat.)

Bewijs. Voor $\lambda \notin \sigma(T)$ is $r(\zeta) = (\lambda - \zeta)^{-1}$ als functie van ζ analytisch in een omgeving van $\sigma(T)$. Toepassing van 2.1.10 voor deze functie levert:

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{\mu\in\sigma(T)} \sum_{j=0}^{\nu(\mu)-1} \frac{(T - \mu I)^j}{(\lambda - \mu)^{j+1}} E_\mu .$$

Derhalve is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda = \sum_{\mu\in\sigma(T)} \sum_{j=0}^{\nu(\mu)-1} (T - \mu I)^j E_\mu \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \mu)^{j+1}} d\lambda .$$

Omdat Γ éénmaal in positieve zin om elke $\mu \in \sigma(T)$ heen gaat volgt uit de integraalformule van Cauchy dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \mu)^{j+1}} d\lambda = \frac{f^{(j)}(\mu)}{j!} .$$

Als we dit resultaat in de vorige formule substitueren, en nogmaals 2.1.10 toepassen is het bewijs voltooid. □

2. Spectrum en resolvent van een operator

Zij X een complexe Banachruimte, T een begrensde lineaire operator $X \to X$. In lineaire analyse I is bewezen dat BLO(X) een Banachalgebra is (stelling 3.2.3).

Neem T vast, I de identieke afbeelding: $X \to X$. $\lambda I - T$ is dan ook in BLO(X).

2.2.1. We definiëren: De resolvent verzameling van T:

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ heeft een inverse in } BLO(X)\} .$$

Het spectrum van T:

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \backslash \rho(T) .$$

De resolvent van T:

$$R(\lambda,T) := (\lambda I - T)^{-1} \text{ gedefinieerd voor } \lambda \in \rho(T) .$$

2.2.2. We onderscheiden verschillende delen van het spectrum:

$C\sigma(T)$, het continue spectrum, bestaande uit de $\lambda \in \sigma(T)$ waarvoor $\lambda I - T$ een lineaire inverse heeft met definitiegebied dicht in X, maar die niet begrensd is.

$R\sigma(T)$, het residue spectrum, bestaande uit de $\lambda \in \sigma(T)$ waarvoor $\lambda I - T$ wel een-eenduidig is maar waarvoor het definitiegebied van $(\lambda I - T)^{-1}$ niet dicht in X is.

En tenslotte $P\sigma(T)$, het puntspectrum, bestaande uit de $\lambda \in \sigma(T)$ waarvoor $\lambda I - T$ niet een-eenduidig is.

Alleen getallen uit het puntspectrum zijn eigenwaarden in de zin van de lineaire algebra. In $\mathbb{C}^n$ geldt: als T een-eenduidig is, is tevens $T(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$. Voor afbeeldingen $T \in BLO(\mathbb{C}^n)$ is derhalve $\sigma(T) = P\sigma(T)$; $C\sigma(T) = R\sigma(T) = \emptyset$.

2.2.3. <u>Voorbeeld</u>. Neem voor X de continue functies op $[0,1]$ met maximumnorm; voor $T \in BLO(C[0,1])$ nemen we de afbeelding die voldoet aan $Tf(t) := tf(t)$. Dan is $\sigma(T) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \le \lambda \le 1\} = R\sigma(T)$; $P\sigma(T) = C\sigma(T) = \emptyset$.

2.2.4. <u>Voorbeeld</u>. Neem nu voor X de deelverzameling $C_0[0,1]$ van $C[0,1]$ bestaande uit alle continue functies op $[0,1]$ die 0 zijn in 0. Zij S de operator uit BLO(X) gedefinieerd door

$$Sf(t) = \int_0^t f(s)ds \ .$$

Voor elke $\lambda \neq 0$ is $(\lambda I - T)f = g$ een Volterra vergelijking die volgens lineaire analyse I, stelling 7.2.5 eenduidig oplosbaar is; elke $\lambda \neq 0$ behoort daarom tot $\rho(S)$. Elke continu differentieerbare functie $h(t)$ met $h(0) = 0$ voldoet aan

$$h(t) = \int_0^t h'(s)ds = Sh'(t) \ .$$

De continu differentieerbare functies liggen dicht in $C_0[0,1]$, (zelfs polynomen liggen dicht, zie algebra en analyse, stelling 5.8.5). Voor S geldt: $\sigma(S) = C\sigma(S) = \{0\}$; $R\sigma(S) = P\sigma(S) = \emptyset$ (aanwijzing: beschouw een rij positieve functies met

$$\max\{g_n(t) \mid 0 \le t \le 1\} = 1; \quad \int_0^1 g_n(t)dt = \frac{1}{n}) \ .$$

2.2.5. Lemma. Het spectrum van T is de disjuncte vereniging van $C\sigma(T)$, $R\sigma(T)$ en $P\sigma(T)$.

2.2.6. Stelling. De verzameling $\rho(T)$ is open en $R(\lambda,T)$ is locaal analytisch op $\rho(T)$. $R(\lambda,T)$ kan niet analytisch voortgezet worden tot enig punt van $\sigma(T)$.

Bewijs. Neem een vaste $\lambda \in \rho(T)$, we zullen laten zien dat voor elke μ met $|\mu| < \|R(\lambda,T)\|^{-1}$ de som $\lambda + \mu$ tot $\rho(T)$ behoort. De reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k (R(\lambda,T))^{k+1}$$

is voor zulke μ absoluut (i.e. in operatornorm) convergent; de som is dus een element uit BLO(X). Men verifieert gemakkelijk dat deze som de inverse is van $(\lambda + \mu)I - T$. Tevens ziet men uit deze reeksontwikkeling van $R(\lambda + \mu,T)$ dat $R(\lambda,T)$ analytisch is in een omgeving van λ voor elke $\lambda \in \rho(T)$. Is $d(\lambda)$ de afstand van λ tot $\sigma(T)$,

$$d(\lambda) = \min\{|\zeta - \lambda| \mid \zeta \in \sigma(T)\} ,$$

dan volgt uit de reeksontwikkeling dat $\|R(\lambda,T)\| \geq (d(\lambda))^{-1}$, zodat $\|R(\lambda,T)\| \to \infty$ als $d(\lambda) \to 0$: $\rho(T)$ is het natuurlijke analyticiteitsgebied van $R(\lambda,T)$. □

2.2.7. Lemma (Fekete). Als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij reële getallen is waarvoor geldt $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ (alle m,n) dan voldoet $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n/n$ aan $-\infty \leq \alpha < \infty$ en als $\alpha > -\infty$ dan

$$\alpha = \inf\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Bewijs. Algebra en Analyse, opgave 4.5.18 (met voor de hand liggende uitbreiding). □

2.2.8. Stelling. De volgende limiet bestaat

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} =: r(T) .$$

Bewijs. De rij $a_n := \log\|T^n\|$ voldoet aan lemma 2.2.7. □

2.2.9. Stelling. Als $|\lambda| > r(T)$ dan $\lambda \in \rho(T)$ en

$$R(\lambda,T) = \lambda^{-1}I + \lambda^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}T^{n} .$$

Bewijs. De reeks convergeert voor $|\lambda| > r(T)$ absoluut. Vermenigvuldigen we deze reeks met $(\lambda I - T)$ dan is het product I. □

2.2.10. Stelling. Het spectrum $\sigma(T)$ is een niet-lege compacte verzameling en

$$\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\} = r(T) .$$

Vanwege deze stelling heet $r(T)$ de spectrale straal van T.

Bewijs. Het spectrum is gesloten (2.2.6) en begrensd (2.2.9) dus compact. Uit (2.2.9) volgt dat $\|R(\lambda,T)\| \to 0$ als $|\lambda| \to \infty$; als $\sigma(T)$ leeg zou zijn, zou $R(\lambda,T)$ een begrensde gehele functie zijn. Uit de stelling van Liouville volgt dan dat $R(\lambda,T)$ constant is; tegenspraak. Dus $\sigma(T) \neq \emptyset$. De Laurentreeks uit 2.2.9 divergeert voor $|\lambda| < r(T)$; als $r(T) > 0$ is er derhalve een punt op de cirkel $|\lambda| = r(T)$ waar $R(\lambda,T)$ niet analytisch is. Uit 2.2.6 volgt dat zo'n punt tot $\sigma(T)$ behoort. Als $r(T) = 0$ dan is $\sigma(T) = \{0\}$. Dus geldt

$$r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\} .$$ □

2.2.11. Stelling (De resolvent vergelijkingen). De functies

$$\Upsilon_{\lambda\in\mathbb{C}}\, R(\lambda,T) \quad \text{en} \quad \Upsilon_{T\in BLO(X)}\, R(\lambda,T)$$

voldoen aan de functionaalvergelijkingen:

$$R(\lambda,T) - R(\mu,T) = (\mu - \lambda)R(\lambda,T)R(\mu,T) .$$

$$R(\lambda,T) - R(\lambda,S) = R(\lambda,T)(T - S)R(\lambda,S) .$$

Bewijs. $(\mu I - T)(\lambda I - T)(R(\lambda,T) - R(\mu,T)) = (\mu - \lambda)I.$

$(\lambda I - T)(R(\lambda,T) - R(\lambda,S))(\lambda I - S) = T - S .$ □

3. Operatorfuncties

2.3.1. Definitie. Zij $F(T)$ de verzameling van de functies die locaal analytisch zijn in een omgeving van $\sigma(T)$. Zij $f \in F(T)$ en U een open omgeving van $\sigma(T)$ binnen het analyticiteitsgebied van f. Dan definiëren we:

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma(T))} f(\lambda)R(\lambda,T)d\lambda .$$

Hierin betekent $\int_{(\sigma(T))}$ integratie over een eindig aantal positief georiënteerde gesloten Jordankrommen die met hun binnengebied binnen U liggen en zo gekozen zijn dat ze éénmaal in positieve zin om elk punt van $\sigma(T)$ gaan. Daar $R(\lambda,T)$ analytisch is buiten $\sigma(T)$ en $f(\lambda)$ binnen U is de waarde van $f(T)$ onafhankelijk van de integratieweg binnen U om $\sigma(T)$.

2.3.2. Opmerking. Op deze wijze komen we tot $f(T)$ door de voor de hand liggende generalisatie van 2.1.14 tot definitie te nemen. Er is nog een heel andere weg om tot $f(T)$ te komen, die uitgaat van rationale functies. Voor een rationale functie r met polen buiten $\sigma(T)$ is $r(T)$ eenvoudig te definiëren. Volgens de stelling van Runge-Montel is elke locaal analytische functie op U een locaal uniforme limiet van rationale functies met polen buiten U. We definiëren dan $f(T) := \lim_{n\to\infty} r_n(T)$ (in norm zin) als $r_n(\lambda) \to f(\lambda)$ locaal uniform op U. Men kan laten zien dat dit een correcte definitie is en tot hetzelfde resultaat leidt als 2.3.1.

2.3.3. Lemma. Is $f(\lambda) \equiv 1$ dan is $f(T) = I$, is $f(\lambda) \equiv \lambda$ dan is $f(T) = T$.

Bewijs.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma(T))} R(\lambda,T)d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}T^n d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \lambda^{-n-1} d\lambda\right) = I.$$

Hierin is C een cirkel met straal groter dan $r(T)$; op die cirkel convergeert de reeks uit 2.2.9 absoluut en uniform zodat verwisseling van integratie en sommatie geoorloofd is. Verder passen we de stelling van Cauchy toe. De andere bewering bewijst men analoog. □

2.3.4. Stelling. Zij $f,g \in F(T)$; $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, dan is

1) $\alpha f(T) + \beta g(T) = (\alpha f + \beta g)(T)$.

2) $f(T)\cdot g(T) = (fg)(T) = g(T)f(T)$.

3) Als $f(\lambda) = \sum\limits_0^\infty \alpha_k\lambda^k$ overal in een omgeving van $\sigma(T)$ dan is $f(T) = \sum\limits_0^\infty \alpha_k T^k$ (convergentie in de operatornorm).

Bewijs.

1) Triviaal.

2) Neem twee stellen Jordankrommen C_1 en C_2, beide om $\sigma(T)$ en met binnengebied binnen dom $f \cap$ dom g, waarbij C_2 ligt binnen C_1. Nu is:

$$f(T)g(T) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_1} f(\lambda)R(\lambda,T)d\lambda \int_{C} g(\mu)R(\mu,T)d\mu =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_1}\int_{C_2} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda,T)R(\mu,T)d\lambda d\mu = \text{(wegens 2.2.11)} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_1}\int_{C_2} f(\lambda)g(\mu)\frac{R(\lambda,T) - R(\mu,T)}{\mu - \lambda}\, d\lambda d\mu =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_1} f(\lambda)R(\lambda,T)d\lambda \int_{C_2}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\, d\mu +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_2} g(\mu)R(\mu,T)d\lambda \int_{C_1}\frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}\, d\lambda \;.$$

Omdat voor λ op C_1 de functie $\Psi_\mu(\mu - \lambda)^{-1}$ geen polen heeft op of binnen C_2 en omdat voor μ op C_2 de functie $\Psi_\lambda(\mu - \lambda)^{-1}$ een eerste orde pool heeft binnen C_1 geldt:

$$\int_{C_2}(\mu - \lambda)^{-1}g(\mu) = 0, \quad \int_{C_1}(\mu - \lambda)^{-1}f(\lambda)d\lambda = -2\pi i\; f(\mu) \;.$$

Substitutie van deze resultaten levert $f(T)g(T) = (fg)(T)$.

3) De reeks $\sum\limits_0^\infty \alpha_k\lambda^k$ convergeert uniform op een cirkelschijf $\{\lambda \mid |\lambda| \le r(T)+\varepsilon\}$ voor voldoend kleine positieve ε. We integreren over de rand C van deze cirkel en vinden:

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\Sigma\alpha_k\lambda^k)R(\lambda,T)d\lambda = \Sigma\alpha_k \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^k R(\lambda,T)d\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^{-j-1+k}T^j d\lambda = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k T^k . \qquad \square$$

2.3.5. Stelling (Spectral Mapping Theorem). Zij $f \in F(T)$ dan is $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Bewijs.

i) Zij $\lambda \in \sigma(T)$ en laat $g := \Psi_\xi \frac{f(\lambda) - f(\xi)}{\lambda - \xi}$; dan is dom g = dom f en

$$f(\lambda)I - f(T) = g(T)(\lambda I - T) = (\lambda I - T)g(T) .$$

Als $f(\lambda)I - f(T)$ regulier zou zijn dan zou $(\lambda I - T)$ ook regulier zijn. Derhalve $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$.

ii) Zij $\mu \in \sigma(f(T))$ en stel $\mu \notin f(\sigma(T))$ dan behoort de functie h := $h := \Psi_\xi(f(\xi) - \mu)^{-1}$ tot $F(T)$, maar dan is $(f(T) - \mu I)h(T) = I$, in tegenspraak met $\mu \in \sigma(f(T))$. $\square$

2.3.6. Stelling (Dunford's samengestelde functiestelling). Zij $f \in F(T)$, $g \in F(f(T))$ en $F := \Psi_\xi g(f(\xi))$ (m.a.w. $F = g \circ f$). Dan is $F \in F(T)$ en $F(T) = g(f(T))$.

Bewijs. Op grond van 2.3.5 geldt $F \in F(T)$. Kies een omgeving U van $\sigma(f(T))$ waarvan de georienteerde rand C een stelsel Jordankrommen éénmaal in positieve zin om $(f(T))$ is en zó dat U met rand binnen het analyticiteitsgebied van g ligt, dan is

$$g(f(T)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(\lambda)R(\lambda,f(T))d\lambda .$$

Neem een omgeving V van $\sigma(T)$, waarvan de rand D éénmaal om $\sigma(T)$ gaat, zó dat V met rand binnen het analyticiteitsgebied van f ligt en zó dat f(V) binnen C is. Zij

$$A(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{R(\xi,T)}{\lambda - f(\xi)} d\xi$$

dan is $A(\lambda)(\lambda I - f(T)) = I = (\lambda I - f(T))A(\lambda)$ en dus $A(\lambda) = R(\lambda,f(T))$. Derhalve:

$$g(f(T)) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_C g(\lambda)d\lambda \int_D \frac{R(\xi,T)}{\lambda - f(\xi)} d\xi = \frac{-1}{4\pi^2} \int_D R(\xi,T)\Big(\int_C \frac{g(\lambda)}{\lambda - f(\xi)} d\lambda\Big)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_D g(f(\xi))R(\xi,T)d\xi = (g \circ f)(T) = F(T) . \qquad \square$$

2.3.7. <u>Definitie</u>. Een deelverzameling σ_α van $\sigma(T)$ die zowel open als gesloten is in $\sigma(T)$ (relatieve topologie!) heet <u>spectrale verzameling</u>. De spectrale verzamelingen vormen een Boole-algebra.

Is σ_α een spectrale verzameling van T dan is er een $f_\alpha \in F(T)$ met $f_\alpha(\lambda) = 1$ op σ_α, $f_\alpha(\lambda) = 0$ op $\sigma(T)\backslash\sigma_\alpha$. Met deze f_α definiëren we:

$$E(\sigma_\alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma(T))} f_\alpha(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda .$$

De volgende stelling somt een aantal eigenschappen van $E(\sigma_\alpha)$ op.

2.3.8. <u>Stelling</u>.

1) $E^2(\sigma_\alpha) = E(\sigma_\alpha)$.
2) Als $\emptyset \neq \sigma_\alpha \neq \sigma(T)$ dan is $0 \neq E(\sigma_\alpha) \neq I$.
3) Als $\sigma(T) = \cup_{\alpha=1}^k \sigma_\alpha$ waarbij $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta = \emptyset$ als $\alpha \neq \beta$ dan geldt $E(\sigma_\alpha)E(\sigma_\beta) = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ en $\Sigma_{\alpha=1}^k E(\sigma_\alpha) = I$.
4) Definiëren we $T_\alpha := E(\sigma_\alpha)T$ en $R_\alpha(\lambda,T) := E(\sigma_\alpha)R(\lambda,T)$ dan is

$$(\lambda E(\sigma_\alpha) - T_\alpha)R_\alpha(\lambda,T) = R_\alpha(\lambda,T)(\lambda E(\sigma_\alpha) - T_\alpha) = E(\sigma_\alpha) .$$

5) Als $\sigma_\alpha \neq \sigma(T)$ dan is $\sigma(T_\alpha) = \sigma_\alpha \cup \{0\}$. $R_\alpha(\lambda,T)$ kan worden uitgebreid tot een locaal analytische functie op $\mathbb{C}\backslash\sigma_\alpha$. Voor alle $|\lambda| > r(T_\alpha)$ geldt:

$$R_\alpha(\lambda,T) = \lambda^{-1}E(\sigma_\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1}T_\alpha^n .$$

Bewijs. Wegens stelling 2.3.4 geldt:

$$E^2(\sigma_\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma(T))} f^2(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda = E(\sigma_\alpha) .$$

De formules in (2) t/m (4) volgen op analoge wijze.
(5). Merk op dat $T_\alpha = g_\alpha(T)$ waarin $g_\alpha(\lambda) = \lambda f_\alpha(\lambda)$. Hieruit volgt m.b.v. het spectral mapping theorem $\sigma(T_\alpha) = \sigma_\alpha \cup \{0\}$. De Laurentreeks is die uit 2.2.9 vermenigvuldigd met $E(\sigma_\alpha)$. Het enige te bewijzen feit is de analytische voortzetbaarheid van $R_\alpha(\lambda,T)$. Merken wij op:

$$R_\alpha(\lambda,T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_\alpha)} \frac{f_\alpha(\xi)}{(\lambda-\xi)} R(\xi,T)d\xi ;$$

immers: $R_\alpha(\lambda,T) = E(\sigma_\alpha)(\lambda I - T)^{-1} = h_\alpha(T)$ waarin $h_\alpha(\xi) := f_\alpha(\xi)(\lambda - \xi)^{-1}$. Uit deze integraalvoorstelling volgt dat $R_\alpha(\lambda,T)$ locaal analytisch in het complement van σ_α is. □

Opmerking. Is $X_\alpha := E(\sigma_\alpha)X$, dan is $TX_\alpha \subset X_\alpha$ en $T|X_\alpha = T_\alpha|X_\alpha$. X_α is ook een genormeerde ruimte

$$I|X_\alpha = E(\sigma_\alpha)|X_\alpha ; \ \sigma(T_\alpha|X_\alpha) = \sigma_\alpha .$$

Immers de resolvent van $T_\alpha|X_\alpha$ is $R_\alpha(\lambda,T)|X_\alpha$ en deze heeft $\mathbb{C}\backslash\sigma_\alpha$ als analyticiteitsgebied.

2.3.9. Opgave. Beschouw nogmaals 6.2 van lineaire analyse I. Beschrijf de spectrale theorie van compacte hermitische operatoren in SH. Probeer te komen tot uitspraken als de volgende: Indien

$$Tf = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f,g_k)g_k$$

voor een orthonormaal stelsel $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (eventueel $\lambda_k = 0$) dan is

$$E(\lambda_\alpha)f = \sum_{\lambda_k=\lambda_\alpha} (f,g_k)g_k$$

en

$$F(T)f = \sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k)(f,g_k)g_k .$$

2.3.10. Appendix. Spectrale maten

In dit aanhangsel geven we beschrijvenderwijs een blik op een van de mogelijkheden waarop de resultaten van paragraaf 3 uitgebreid kunnen worden. De stand van zaken is zo dat m.b.v. de techniek van contourintegralen voor elke operator T uit BLO(X) en elke functie f, locaal analytisch rond $\sigma(T)$, een operator f(T) gedefinieerd is. Nu is de analyticiteitseis een sterke eis. Men zou gaarne voor een grotere klasse van functies f(T) definiëren. Als we speciale klassen van operatoren beschouwen, is dit inderdaad mogelijk. Als T bijv. een normale operator in een separabele Hilbertruimte is, (normaal wil zeggen: $TT^* = T^*T$) dan is het mogelijk f(T) te definiëren voor elke begrensde meetbare functie met dom f $\supset \sigma(T)$.

Het voornaamste begrip nodig in deze voortzetting van de theorie is dat van spectrale maat.

Definitie. Een spectrale maat voor T is een afbeelding E van een Boole-algebra van deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ op een Boole-algebra van projectieoperatoren in BLO(X) die voor alle σ, δ in de Boole-algebra van deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ voldoet aan:

$$E(\sigma \cap \delta) = E(\sigma) \wedge E(\delta) := E(\sigma)E(\delta)$$

$$E(\sigma \cup \delta) = E(\sigma) \vee E(\delta) := E(\sigma) + E(\delta) - E(\sigma)E(\delta)$$

$$E(\sigma(T)) = I$$

$$E(\emptyset) = 0$$

$$E(\delta)T = TE(\delta)$$

en tenslotte als $E(\delta)X =: X_\delta$ en $T|X_\delta =: T_\delta$ dan geldt $\sigma(T_\delta) \subset \bar{\delta}$.

Voorbeeld. De verzameling projectoren behorend bij een splitsing van $\sigma(T)$ in spectrale verzamelingen bepaalt een spectrale maat.

Stelling. Is T een normale operator in SH dan bestaat er een zelf geadjungeerde spectrale maat voor T ($E(\delta) = (E(\delta))^*$ voor alle δ) gedefinieerd op de σ-algebra voortgebracht door alle open deelverzamelingen van $\mathbb{C}$. Deze is bovendien σ-additief in de sterke operator topologie (d.w.z. voor $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ disjunct en $x \in SH$ geldt: $\Sigma_{i=1}^{\infty} E(\delta_i)x = E(\cup_{i=1}^{\infty} \delta_i)x$).

Een dergelijke spectrale maat heet resolutie van de identiteit voor T.
Een spectrale maat kan als maat gebruikt worden: men krijgt dan voor begrensde meetbare functies:

$$f(T) := \int_{\sigma(T)} f(\lambda)E(d\lambda) .$$

Bij de opbouw van de theorie speelt een belangrijke rol de representatiestelling van Riesz (1.2.2). We kunnen er in dit college niet verder op ingaan; geinteresseerden nemen bijv. Dunford-Schwartz, Linear Operators II, Ch. X ter hand.

Zonder maattheoretische hulpmiddelen zullen wij in paragraaf 5 in staat zijn $f(T)$ te definiëren voor een begrensde normale operator T in SH en elke continue functie op $\sigma(T)$.

4. Banach-algebras

We weten reeds dat BLO(X) een Banach-algebra is. Ook $C([0,1])$ is een Banach-algebra. Veel van de theorie van de voorafgaande paragrafen is zonder meer tot Banach-algebras te generaliseren. We herhalen:

2.4.1. Definitie. Een Banach-algebra A is een Banachruimte met een ringstructuur waarvoor $\|xy\| \le \|x\| \|y\|$ voor alle $x,y \in A$. We nemen steeds aan dat er een eenheidselement e is met $ex = xe = x$ (alle $x \in A$) en $\|e\| = 1$.
Veel van de stellingen uit §§ 2.2 en 2.3 geldt voor een Banach-algebra.

2.4.2. Stelling. Is $\|x - e\| < 1$ dan is x regulier.

Bewijs. $y := e + (e-x) + (e-x)^2 + \ldots$ is absoluut convergent en $xy = yx = e$. □

2.4.3. Stelling. De verzameling van de reguliere elementen G is open.

Bewijs. Als $x_0 \in G$ en $\|x - x_0\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$ dan is $\|e - xx_0^{-1}\| \le \|x_0 - x\| \|x_0^{-1}\| < 1$, dus $xx_0^{-1} \in G$ en derhalve $x \in G$. □

2.4.4. <u>Eigenschappen en definities</u> (analoog BLO(X) i.e. § 2 en § 3)

1) Uit het bewijs van (2.4.3) volgt dat

$$x^{-1} = x_0^{-1} + x_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} ((x_0 - x)x_0^{-1})^n .$$

2) Bijgevolg is

$$\| x^{-1} - x_0^{-1} \| \leq \frac{\| x_0^{-1} \|^2 \| x - x_0 \|}{1 - \| x - x_0 \| \| x_0^{-1} \|} .$$

3) De afbeelding $x \to x^{-1}$ is een homeomorfisme van G op G.

4) Spectrum en resolvent zijn gedefinieerd als in BLO(X):

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - a \in G\};\ \sigma(a) := \mathbb{C}\backslash\rho(a) .$$

5) $R(\lambda,a) := (\lambda e - a)^{-1}$ is locaal analytisch op $\rho(a)$, immers

$$\| (\lambda e - a)^{-1} - (\mu e - a)^{-1} \| \leq \frac{\| (\mu e - a)^{-1} \|^2 |\lambda - \mu|}{1 - |\lambda - \mu| \| (\mu e - a)^{-1} \|} .$$

6) Het spectrum $\sigma(a)$ is voor elke $a \in A$ niet leeg en compact.

7) De resolvent voldoet aan $\| R(\lambda,a) \| \to 0$ als $|\lambda| \to \infty$.

$$R(\lambda,a) - R(\mu,a) = (\mu - \lambda)R(\lambda,a)R(\mu,a) .$$

$$R(\lambda,a) - R(\lambda,b) = R(\lambda,a)(a - b)R(\lambda,b) .$$

8) De spectrale straal $r(x) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$ voldoet aan

$$r(x) = \inf \| x^n \|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n} \leq \| x \| .$$

2.4.5. <u>Definitie</u>. Het element $x \in A$ heet rechts (links) topologische nuldeler indien er is een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $\| x_n \| = 1$ en $x_n x \to 0$ als $n\to\infty$ ($xx_n \to 0$ als $n \to \infty$).

Is x rechts en links topologische nuldeler dan heet x tweezijdige topologische nuldeler.

2.4.6. <u>Stelling</u>. Elk randpunt van G is een tweezijdige topologische nuldeler.

Bewijs. Stel $x_n \in G$ en $x_n \to x$ met $x \notin G$. Als nu $\| x_n^{-1} \|$ begrensd zou zijn dan zou $\| x_n^{-1} x - e \| \leq \| x_n^{-1} \| \| x - x_n \| \to 0$; dus op den duur is deze norm kleiner dan 1 en daaruit volgt $x \in G$. We dunnen de rij x_n zonodig uit tot er een rij overblijft met $\| x_n^{-1} \| \to \infty$. Voor zo'n rij x_n definiëren we $y_n := \| x_n^{-1} \|^{-1} x_n^{-1}$, dan is $\| y_n \| = 1$ terwijl verder geldt

$$y_n x = y_n (x - x_n) + \| x_n^{-1} \|^{-1} e \to 0$$

$$x y_n = (x - x_n) y_n + \| x_n^{-1} \|^{-1} e \to 0 \ . \qquad \square$$

2.4.7. Stelling (Mazur). Als de Banach-algebra A geen andere topologische nuldelers bevat dan 0, dan is A isometrisch isomorf met $\mathbb{C}$.

Bewijs. Zij $x \in A$. $\sigma(x) \neq \emptyset$, kies een randpunt λ van $\sigma(x)$ dan is $\lambda e - x$ randpunt van G. Hieruit volgt $\lambda e - x = 0$. Daar $\| e \| = 1$ geldt $\| x \| = |\lambda|$. $\square$

2.4.8. Gevolg. De (tot op isometrische isomorfie na) enige Banach-algebra die een delingsring is, is $\mathbb{C}$.

Het "optrekken" van locaal analytische functies gaat m.b.v. de volgende formule: (de begeleidende tekst zou zijn als in § 3)

2.4.9.
$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma(a))} f(\lambda)(\lambda e - a)^{-1} d\lambda \ .$$

Omdat alle stellingen uit § 3 berusten op de reeksontwikkeling van de resolvent gelden ze in een willekeurige Banach-algebra.
We hebben een resultaat nodig dat het verband tussen het spectrum van een element x uit een Banach-algebra A, $\sigma_A(x)$, in verband brengt met het spectrum van x t.o.v. een deelalgebra A_0, $\sigma_{A_0}(x)$.

2.4.10. Stelling. Zij A een Banach-algebra en A_0 een Banach subalgebra. Neem aan dat A en A_0 hetzelfde eenheidselement hebben. Zij $x \in A_0$ dan geldt $\sigma_A(x) \subset \sigma_{A_0}(x)$ terwijl $\text{rand}(\sigma_{A_0}(x)) \subset \text{rand}(\sigma_A(x))$.

Bewijs. Elk regulier element uit A_0 is regulier in A, dus $\rho_{A_0}(x) \subset \rho_A(x)$, $\sigma_{A_0}(x) \supset \sigma_A(x)$. Anderzijds is $\lambda \in \mathrm{rand}(\sigma_{A_0}(x))$ dan is $\lambda e - x \in \mathrm{rand}(G_{A_0})$ dus $\lambda e - x$ topologische nuldeler in A_0. Hieruit volgt dat $\lambda e - x$ topologische nuldeler in G_A is, dus singulier in A zodat $\lambda \in \sigma_A(x)$. Samenvattend:

$$\mathrm{rand}(\sigma_{A_0}(x)) = \overline{\rho_{A_0}(x)} \cap \sigma_{A_0}(x) \subset \overline{\rho_A(x)} \cap \sigma_A(x) = \mathrm{rand}(\sigma_A(x)). \qquad \square$$

5. Gelfand theorie; de stelling van Gelfand en Naimark

In deze paragraaf is A een commutatieve Banach-algebra met eenheidselement e, $\|e\| = 1$. G is de groep van de reguliere elementen. Een deelalgebra I is een ideaal indien IA = I.
Als $I \neq A$ dan heet I een echt ideaal. Nodig en voldoende opdat een ideaal I echt is, is $I \cap G = \emptyset$.

2.5.1. Lemma. Is I een echt ideaal dan is ook $\bar{I}$ een echt ideaal.

Bewijs. Zij $x \in \bar{I}$, $x = \lim x_n$, $x_n \in I$ en $a \in A$ dan geldt $xa = \lim\limits_{n\to\infty} x_n a \in \bar{I}$ omdat $x_n a \in I$.
Is I echt d.w.z. $I \cap G = \emptyset$, dan is ook $\bar{I} \cap G = \emptyset$ omdat G open is. $\square$

2.5.2. Stelling. Elk echt ideaal is bevat in een maximaal ideaal. Maximale idealen zijn gesloten.

Bewijs. Zij I een echt ideaal. We beschouwen de verzameling J van echte idealen, die I omvatten. J is niet leeg, want $I \in J$. Inclusie is een partiële ordening op J. Is $J_0 := \{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een lineair geordende deelverzameling van J dan is $\bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \in J$ een bovengrens van J_0. Uit het lemma van Zorn volgt dat J een maximaal element M heeft. M is een maximaal ideaal dat I omvat. Omdat ook $\bar{M}$ een echt ideaal is, is $M = \bar{M}$. $\square$

We zullen bestuderen de restklassen algebra van de commutatieve Banach-algebra A naar een ideaal I. De nevenklasse die x bevat is (x + I). Optelling, vermenigvuldiging en scalaire vermenigvuldiging geschieden volgens de formules:

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

$$(x + I)(y + I) = xy + I$$

$$\alpha(x + I) = \alpha x + I \ .$$

In de restklassen algebra (notatie: A (mod I)) definiëren we een norm als volgt:

$$\| x + I \| := \inf\{\| x + z \| \mid z \in I\} \ .$$

2.5.3. <u>Stelling</u>. Is I een gesloten ideaal in A dan is A (mod I) een commutatieve Banach-algebra met eenheidselement (nl. e + I).

<u>Bewijs</u>. De algebraische eigenschappen worden bewezen als in Algebra en Analyse (§ 3.8). We beschouwen nu slechts de norm.
Is $\| x + I \| = 0$ dan is er een rij $(x_n)_n$, $x_n \in I$ en $\| x + x_n \| \to 0$. Maar I is gesloten, dus $x + I$ is gesloten, zodat $0 \in x + I$ en $x + I = I$, het nulelement van A (mod I).
De driehoeksongelijkheid bewijst men ook eenvoudig. Is $\| a + I \| =: \alpha$, $\| b + I \| =: \beta$ en is $\varepsilon > 0$ dan zijn er x en y in I met $\| a + x \| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, $\| b + y \| < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Nu is $\| a + b + x + y \| \le \| a + x \| + \| b + y \| < \alpha + \beta + \varepsilon$.
Hieruit volgt $\| a + b + I \| \le \alpha + \beta + \varepsilon$ en omdat ε willekeurig is $\| a + b + I \| \le \alpha + \beta$. Analoog: $\| \alpha(x + I) \| = |\alpha| \| x + I \|$ als $\alpha \in \mathbb{C}$. We zullen nu laten zien dat $\| (x + I)(y + I) \| \le \| x + I \| \| y + I \|$.
$\| (x + I)(y + I) \| = \| xy + I \| = \inf\{\| xy + z \| \mid z \in I\} \lesssim \inf\{\| (x+u)(y+v) \| \mid u \in I, v \in I\}$
$\le (\inf\{\| x + u \| \mid u \in I\}) (\inf\{\| y + v \| \mid v \in I\})$.
Ook volgt $\| e + I \| = \| (e + I)^2 \| \le \| e + I \|^2$, dus $\| e + I \| \ge 1$, terwijl anderzijds $\| e + I \| = \inf\{\| e + z \| \mid z \in I\} \le \| e + 0 \| = 1$. We moeten nog bewijzen dat A (mod I) volledig is. Laat $(x_n + I)_{n \in \mathbb{N}}$ een fundamentaalrij in A (mod I) zijn. Kies een deelrij $(x_{n_k} + I)_{k \in \mathbb{N}}$ zodat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| (x_{n_k} + I) - (x_{n_{k+1}} + I) \| < \infty \ .$$

We bepalen nu inductief een rij in I. Kies $z_1 \in I$, na z_i kiezen we z_{i+1} zó dat

$$\| (z_{i+1} + x_{n_{i+1}}) - (z_i + x_{n_i}) \| \le 2 \| (x_{n_{i+1}} + I) - (x_{n_i} + I) \| \ .$$

Dan is de rij $w_i := z_i + x_{n_i}$ een fundamentaalrij in A en dus convergent.
Noem de limiet x, dan is

$$\| (x_{n_k} + I) - (x + I) \| = \| (w_{n_k} + I) - (x + I) \| = \inf\{\| w_{n_k} - x + z \| \mid z \in I\} \leq$$
$$\leq \| w_{n_k} - x \| \to 0 \quad \text{als } k \to \infty .$$

De rij $x_n + I$ convergeert dus naar $x + I$. Dit bewijs berust op het feit dat bij de fundamentaalrij van klassen $(x_{n_k} + I)_{k \in \mathbb{N}}$ een fundamentaalrij van representanten gevonden kan worden. □

2.5.4. Stelling. Een gesloten ideaal M is dan en slechts dan maximaal indien A (mod M) isomorf is met $\mathbb{C}$.

Bewijs. Dit volgt direct uit 2.4.8. □

Opmerking. Is φ een homomorfisme van A op $\mathbb{C}$ dan is Ker φ een maximaal ideaal.

Op grond van de laatste stelling is er bij elke $x \in A$ en elk maximaal ideaal M één complex getal, $\hat{x}(M)$ zó dat $\hat{x}(M)e \in x + M$.

Is $\mathcal{M}$ de verzameling van alle maximale idealen dan is $\hat{x} := \Psi_{M \in \mathcal{M}}\, \hat{x}(M)$ een complexwaardige functie op $\mathcal{M}$; $\hat{x}$ heet de Gelfand getransformeerde van x.

2.5.5. We sommen een aantal eigenschappen op:

1) Als $x = y + z$ dan is $\hat{x}(M) = \hat{y}(M) + \hat{z}(M)$ $(M \in \mathcal{M})$.
2) Als $x = \alpha y$ dan is $\hat{x}(M) = \alpha\hat{y}(M)$ $(M \in \mathcal{M})$.
3) Als $x = yz$ dan is $\hat{x}(M) = \hat{y}(M)\hat{z}(M)$ $(M \in \mathcal{M})$.
4) $\hat{e}(M) = 1$ $(M \in \mathcal{M})$.
5) $\hat{x}(M_0) = 0$ dan en slechts dan als $x \in M_0$.
6) Als $M_1 \neq M_2$ dan is er een $x \in A$ met $\hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$.
7) x is regulier in A dan en slechts dan als $\hat{x}(M) \neq 0$ voor alle $M \in \mathcal{M}$.
8) Het spectrum $\sigma(x) = \{\hat{x}(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$. Immers: Als $\hat{x}(M_0) = \lambda_0$ dan $(x - \lambda_0 e)\hat{\ }(M_0) = 0$ dus $x - \lambda_0 e \in M_0$ dus $x - \lambda_0 \notin G$ en $\lambda_0 \in \sigma(x)$. Anderzijds is $x - \lambda_1 e$ singulier dan is er een maximaal ideaal M_1 met $x - \lambda_1 e \in M_1$ d.w.z. $\hat{x}(M_1) = \lambda_1$.
9) $\sup\{|\hat{x}(M)| \mid M \in \mathcal{M}\} = r(x)$.
10) In het bijzonder is $|\hat{x}(M)| \leq \| x \|$.

Opmerking. Uit eigenschap 10) en de opmerking in 2.5.4 volgt dat elk homomorfisme van A op $\mathbb{C}$ continu is.

2.5.6. Definitie. Als $r(x) = 0$ (d.w.z. $\sigma(x) = \{0\}$) dan heet x topologisch nilpotent. Het radicaal $\mathcal{R}$ is de verzameling van alle topologisch nilpotente elementen. Geldt $\mathcal{R} = \{0\}$ dan heet A semisimpel.

2.5.7. Stelling. $\mathcal{R}$ is de doorsnede van alle maximale idealen.

Bewijs. $\hat{x}(M) = 0$ dan en slechts dan als $x \in M$. □

De afbeelding $x \to \hat{x}$ is een homomorfisme van A op een algebra van functies op $\mathcal{M}$; (is A semisimpel dan is $x \to \hat{x}$ zelfs een isomorfisme). We introduceren in $\mathcal{M}$ als topologie, de topologie geinduceerd door alle functies $\hat{x}$ (zie 1.4). Een subbasis hiervan wordt gevormd door alle verzamelingen

$$N(M_0,\varepsilon,x) := \{M \in \mathcal{M} \mid |\hat{x}(M) - \hat{x}(M_0)| < \varepsilon\} ,$$

$M_0 \in \mathcal{M}$, $x \in A$, $\varepsilon > 0$. Open verzamelingen zijn verenigingen van eindige doorsneden van zulke subbasis omgevingen. De beschouwde topologie is de zwakste waarvoor alle functies $\hat{x}$ continu zijn. We beschouwen van nu af $\mathcal{M}$ met deze topologie.

2.5.8. Stelling. $\mathcal{M}$ is een compacte Hausdorffruimte.

Bewijs. De Hausdorff eigenschap volgt uit 2.5.5.6. De compactheid volgt uit de stelling van Tychonov 1.4.10. Het bewijs is analoog aan dat van 1.4.13. Beschouw $Q_x := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|x\|\}$ en $Q := \prod_{x\in A} Q_x$ dan is Q compact op grond van stelling 1.4.10. Een punt $q_0 \in Q$ zullen we aangeven als $q_0 = (\lambda_x^0)_{x\in A}$. Een subbasis van de producttopologie bestaat uit alle verzamelingen $\{q = (\lambda_x)_{x\in A} \mid |\lambda_{x_0} - \lambda_{x_0}^0| < \varepsilon\}$ waarbij $q_0 \in Q$, $x_0 \in A$, $\varepsilon > 0$. We beschouwen de afbeelding van $\mathcal{M}$ in Q die aan M toevoegt $(\hat{x}(M))_{x\in A} \in Q$. Deze afbeelding is één-éénduidig op grond van 2.5.5.6 en het beeld van $\mathcal{M}$ met de relatieve topologie van Q is homeomorf met $\mathcal{M}$, wegens de definities van de topologieën in $\mathcal{M}$ en Q. We zullen laten zien dat het beeld van $\mathcal{M}$ in Q gesloten is. Zij $q_0 = (\lambda_x^0)_{x\, A}$ een element in de afsluiting van het beeld van $\mathcal{M}$. We moeten dan laten zien dat er een $M_0 \in \mathcal{M}$ is met $\hat{x}(M_0) = \lambda_x^0$ $(x \in A)$. Voldoende is het te laten zien dat $x \to \lambda_x^0$ een niet triviaal homomorfisme van A naar $\mathbb{C}$ is, d.w.z.

i) $\lambda_x^0 \not\equiv 0$;

ii) $\lambda_{\alpha a}^0 = \alpha\lambda_a^0$;

iii) $\lambda_{a+b}^0 = \lambda_a^0 + \lambda_b^0$;

iv) $\lambda_{ab}^0 = \lambda_a^0\lambda_b^0$.

Ad i). $\lambda_e^0 = 1$ want $\hat{e}(M) = 1$ voor alle M en λ_e^0 is een limietpunt van een rij in $\hat{e}(M)$. De beweringen ii) en iii) worden bewezen analoog aan iv) waarvan het bewijs nu volgt. Zij $\varepsilon > 0$. We beschouwen de omgeving van q_0:

$$\{q = (\lambda_x)_{x\in A} \mid |\lambda_a - \lambda_a^0| < \varepsilon,\ |\lambda_b - \lambda_b^0| < \varepsilon,\ |\lambda_{ab} - \lambda_{ab}^0| < \varepsilon\} .$$

In deze omgeving zit een punt $(\hat{x}(M))_{x\in A}$, d.w.z.

$$|\lambda_a^0 - \hat{a}(M)| < \varepsilon,\ |\lambda_b^0 - \hat{b}(M)| < \varepsilon,\ |\lambda_{ab}^0 - \widehat{ab}(M)| < \varepsilon .$$

Nu is $\widehat{ab}(M) = \hat{a}(M)\hat{b}(M)$. We vinden zo:

$$|\lambda_{ab}^0 - \lambda_a^0\lambda_b^0| \le |\lambda_{ab}^0 - \hat{a}(M)\hat{b}(M)| + |\hat{a}(M)\hat{b}(M) - \hat{a}(M)\lambda_b^0| +$$

$$+ |\hat{a}(M)\lambda_b^0 - \lambda_a^0\lambda_b^0| < \varepsilon + \|a\|\varepsilon + \|b\|\varepsilon .$$

Dus $\lambda_{ab}^0 = \lambda_a^0\lambda_b^0$. □

De topologische ruimte M heet wel de Gelfandruimte, structuurruimte, carrier, van A.

2.5.9. <u>Voorbeeld</u>. Zij T een compacte Hausdorffruimte. Dan is C(T) een commutatieve Banach-algebra. We zullen laten zien dat de Gelfandruimte van C(T) homeomorf met T is. Met elke $t_0 \in T$ correspondeert het maximale ideaal

$$M(t_0) = \{f \in C(T) \mid f(t_0) = 0\} .$$

Elk maximaal ideaal in C(T) is van deze vorm. Immers, zij m een echt ideaal en zij

$$Z(f) := \{t \in T \mid f(t) = 0\} \quad (f \in C(T))$$

dan is Z(f) een gesloten deelverzameling van T. Nu is $\bigcap_{f\in m} Z(f) \neq \emptyset$ want anders zou een eindig doorsnede, zeg $Z(f_1) \cap Z(f_2) \cap \dots \cap Z(f_n)$ al leeg zijn, maar dan zou de functie uit m: $\bar{f}_1 f_1 + \bar{f}_2 f_2 + \dots + \bar{f}_n f_n$ overal ongelijk nul zijn, dus regulier in $C(T)$, derhalve $m = A$. Het is nu gemakkelijk om in te zien dat elk maximaal ideaal van de vorm $M(t_0)$ is. Er bestaat dus een bijectie van de compacte ruimten $\mathcal{M}$ en T. Dat dit ook een homeomorfisme is volgt uit de opmerking dat als $x \in C(T)$ en $M_0 = M(t_0)$ dan $\hat{x}(M_0) = x(t_0)$, dit betekent dat met de subbasis verzameling

$$\{M \in \mathcal{M} \mid |\hat{x}(M) - \hat{x}(M_0)| < \varepsilon\}$$

correspondeert de open verzameling $\{t \in T \mid |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon\}$. □

2.5.10. Stelling (Gelfand). De afbeelding $x \to \hat{x}$ is een continu homeomorfisme van A naar $C(\mathcal{M})$ (als functie algebra met supnorm) waarvan de kern het radicaal is.

2.5.11. Definitie. A heet voortgebracht door een deelverzameling Y als A de kleinste gesloten deelalgebra is die Y bevat.

2.5.12. Stelling. Wordt A voortgebracht door Y dan is $\mathcal{M}$ homeomorf met een gesloten deelverzameling van $\prod_{y \in Y} \sigma(y)$.

Bewijs. $\hat{y}(\mathcal{M}) = \sigma(y)$, derhalve is de afbeelding $M \to (\hat{y}(M))_{y \in Y}$ een afbeelding van $\mathcal{M}$ in $\prod_{y \in Y} \sigma(y)$, deze is continu omdat alle $\hat{y}$ continu zijn. Deze afbeelding is tevens bijectief, zou nl. $\hat{y}(M_1) = \hat{y}(M_2)$ voor alle $y \in Y$ dan zou ook $\hat{x}(M_1) = \hat{x}(M_2)$ voor alle $x \in A$ omdat Y de algebra A voortbrengt. Dit is in tegenspraak met 2.5.5.6. □

2.5.13. Stelling. Wordt A voortgebracht door een enkel element y dan is $\mathcal{M}$ homeomorf met $\sigma(y)$.

Bewijs. Als 2.5.12. Omdat $\hat{y}(\mathcal{M}) = \sigma(y)$ is de beschouwde afbeelding surjectief. □

2.5.14. Definitie. Een involutie is een afbeelding $A \to A$ (het beeld van x noteren we met x^*) die voldoet aan:

$$(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$$

$$(xy)^* = y^* x^*$$

$$(x^*)^* = x \,.$$

Een B^*-algebra is een Banach-algebra (niet noodzakelijk commutatief) met een involutie $*$ die voldoet aan

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 .$$

2.5.15. Voorbeeld. BLO(SH) resp. C(T) zijn B^*-algebra's als de involutie is overgang op de geadjungeerde operator, resp. overgang op de complex geconjugeerde functie ($f^* = \forall_{t \in T}\ (\overline{f(t)})$).

Een element x heet normaal als $xx^* = x^*x$ en hermitisch als $x = x^*$.

Een $*$ homo-(iso-)morfisme h is een homo-(iso-)morfisme dat voldoet aan

$$h(x^*) = (h(x))^* .$$

In overeenstemming met de beperkingen die we ons in deze paragraaf hebben opgelegd, beschouwen we slechts commutatieve B^*-algebra's.

2.5.16. Lemma. In een commutatieve B^*-algebra geldt:

$$\|x^2\| = \|x\|^2;\ r(x) = \|x\|;\ \|x\| = \|x^*\|;\ e^* = e .$$

Bewijs. $\|x^2\|^2 = \|(x^2)^*x^2\| = \|(x^*)^2x^2\| = \|(xx^*)^*(xx^*)\| = \|xx^*\|^2 = \|x\|^4$ enz. □

2.5.17. Stelling. Is M de Gelfandruimte van de commutatieve B^*-algebra A dan is $x \to \hat{x}$ een $*$ homomorfisme van A naar $C(M)$.

Bewijs. We hoeven slechts te laten zien dat $\widehat{x^*}(M) = \overline{\hat{x}(M)}$ (alle $x \in A$, $M \in M$). Stel $\hat{x}(M) = \alpha + \beta i$, $\widehat{x^*}(M) = \gamma + \delta i$ en stel $\beta + \delta \neq 0$. Zij

$$y := (\beta + \delta)^{-1}[x + x^* - (\alpha + \gamma)e]$$

dan is $y^* = y$ en $\hat{y}(M) = i$. Voor elke reële s is nu $(y + sie)(M) = (s + 1)i$. Wegens 2.5.5.10 is dus $|s + 1| \leq \|sy + sie\|$. Gebruiken we dat y hermitisch is, dan vinden we:

$$(s + 1)^2 \leq \|y + sie\|^2 = \|(y - sie)(y + sie)\| = \|y^2 + s^2e\| \leq \|y^2\| + s^2 .$$

Nemen we voor $s := \|y^2\|$ dan vinden we:

$$(\|y^2\| + 1)^2 \leq \|y^2\| + \|y^2\|^2 \text{ ofwel } \|y^2\| + 1 \leq 0 ,$$

tegenspraak.

Conclusie: $\beta + \delta = 0$ en $\hat{x}(M) = \alpha + \beta i$, $\widehat{x^*}(M) = \gamma - \beta i$. Nu is echter $\widehat{(ix)}(M) = i\hat{x}(M) = -\beta + \alpha i$, en $\widehat{(ix)^*}(M) = -i\hat{x}^*(M) = -\beta - \gamma i$. Als zoeven volgt hieruit $\alpha - \gamma = 0$. □

2.5.18. Gevolg. Is $x = x^*$ dan is $\hat{x}$ reëelwaardig.

2.5.19. Stelling (Gelfand-Naimark). Elke commutatieve B^*-algebra A is isometrisch isomorf met de algebra van alle continu complexwaardige functies op zijn Gelfandruimte.

Bewijs. Uit $\|x^2\| = \|x\|^2$ volgt $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ en $r(x) = \|x\|$. Wegens 2.5.5.9 is $\sup\{|\hat{x}(M)| \mid M \in \mathcal{M}\} = \|x\|$. De afbeelding $x \to \hat{x}$ is derhalve isometrisch; tevens is zij (2.5.17) een $*$ homomorfisme, zodat we slechts hoeven te laten zien dat $x \to \hat{x}$ surjectief is. Dit berust op de algemene stelling van Stone-Weierstrasz over het benaderen van continue functies op een compacte Hausdorff ruimte X door functies uit een subalgebra van C(X). In Algebra en Analyse (blz. 26.4) is bewezen dat elke continue functie op [0,1] in de zin van C[0,1] (d.w.z. met supnorm) limiet is van polynomen. De algemene stelling luidt: Laat B een gesloten deelalgebra zijn van C(X) met de volgende eigenschappen:

i) bij elk paar $x_1 \neq x_2 \in X$ is er een $f \in B$ met $f(x_1) \neq f(x_2)$.
ii) als $f \in B$ dan $\bar{f} \in B$.

Dan geldt òf $B = C(X)$ òf $B = M(x_0)$ voor zekere $x_0 \in X$. (Ga na dat de afsluiting van de verzameling der polynomen op [0,1] deze eigenschappen i) en ii) bezit.) We zullen deze stelling die berust op 1.2.2 niet bewijzen. We beschouwen nu de deelalgebra van $C(\mathcal{M})$ bestaande uit alle Gelfandgetransformeerden. Deze is gesloten want als $\hat{x}_n \to f$ in $C(\mathcal{M})$ dan is $\hat{x}_n$ een fundamentaalrij en op grond van de isometrie x dus ook; A is volledig; $x_n \to x$; maar dan convergeert $\hat{x}_n \to \hat{x}$, zodat tenslotte $\hat{x} = f$.
Dat de gesloten deelalgebra van de Gelfandgetransformeerden voldoet aan i) staat in 2.5.5.6 dat hij aan ii) voldoet volgt uit 2.5.17, dat hij niet gelijk is aan een maximaal ideaal in $C(\mathcal{M})$ volgt uit $\hat{e}(M) = 1$ $(M \in \mathcal{M})$. □

2.5.20. Lemma. Is A_0 een B^*-subalgebra van de commutatieve B^*-algebra A en laat A_0 en A hetzelfde eenheidselement hebben dan geldt voor elke $y \in A_0$:

$$\sigma_{A_0}(y) = \sigma_A(y) .$$

Bewijs. We gebruiken 2.4.10. Er behoeft slechts aangetoond te worden dat voor $x \in A_0$ en regulier in A geldt: x regulier in A_0. Uit $(x^{-1})^* x^* = (xx^{-1})^* = e^* = e$ volgt dat ook x^* regulier is in A. Dus xx^* is regulier in A. Uit 2.5.18 volgt $\sigma_A(xx^*) \subset \mathbb{R}$; dit spectrum bestaat geheel uit randpunten en is derhalve gelijk aan $\sigma_{A_0}(xx^*)$. Laat $z \in A_0$ de inverse van xx^* zijn dan is x^*z de inverse van x.□

2.5.21. Stelling. Is A een commutatieve B^*-algebra, $x \in A$ en B(x) de kleinste gesloten B^*-subalgebra die x en e bevat dan is B(x) isometrisch * isomorf met $C(\sigma(x))$.

Bewijs. $\sigma_{B(x)}(x) = \sigma_A(x)$ wegens 2.5.20. Zij $M(x)$ de Gelfandruimte van B(x), dan is $\sigma(x) = \hat{x}(M(x))$. We beschouwen de afbeelding $M \to \hat{x}(M)$ van $M(x)$ op $\sigma(x)$. Deze afbeelding is injectief want als $\hat{x}(M) = \hat{x}(M_1)$ dan is $\widehat{x^*}(M) = \overline{\hat{x}(M)} = \overline{\hat{x}(M_1)} = \widehat{x^*}(M_1)$ en $\hat{y}(M) = \hat{y}(M_1)$ voor elk polynoom y in e, x en x^*, tenslotte $\hat{z}(M) = \hat{z}(M_1)$ voor alle $z \in B(x)$ dus $M = M_1$. De afbeelding $M \to \hat{x}(M)$ is continu, uit de compactheid van $M(x)$ volgt dat zij een homeomorfisme is. Enz. □

Wij zijn nu in staat continue functies op te trekken naar een commutatieve B^*-algebra.
We beginnen met een opmerking.

Er zijn vele isometrische * isomorfismen van B(x) op $C(\sigma(x))$. Er is er echter slechts één waarvoor x correspondeert met $\Psi_{t\in\sigma(x)}\ t$. Van nu af beschouwen we dit speciale isometrische * isomorfisme.

2.5.22. Definitie. Zij $x \in A$ (een commutatieve B^*-algebra) f een continue functie op $\sigma(x)$ (dus $f \in C(\sigma(x))$) dan definiëren we f(x) als het element van B(x) dat correspondeert met f onder het boven beschreven isomorfisme.

Dit is een uitbreiding van onze vroegere resultaten:

2.5.23. Stelling. Als f analytisch is rond $\sigma(x)$ dan is $g := f|\sigma(x)$ een element van $C(\sigma(x))$ en g(x) gedefinieerd volgens 2.5.22, voldoet aan:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma(x))} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \ .$$

Bewijs. Laat

$$y := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma(x))} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \; ;$$

dan is $y \in B(x)$. Voor de met y corresponderende functie onder het isomorfisme bedoeld in 2.5.22, $\Psi_{\mu\in\sigma(x)}\, y(\mu)$, geldt:

$$y(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma(x))} f(\lambda)(\lambda - \mu)^{-1} d\lambda \; .$$

Hierin is gebruikt dat $\Psi_{\mu}(\lambda - \mu)^{-1}$ de functie is die correspondeert met $(\lambda e - x)^{-1}$. We berekenen $y(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \in \sigma(x))$ en hieruit volgt $y = g(x)$. □

2.5.24. Opmerking. We kunnen definitie 2.5.22 toepassen op normale operatoren in SH; want uit $T^*T = TT^*$ volgt dat de door T voortgebrachte B^*-algebra commutatief is.

Literatuur bij hoofdstuk 2.

Dunford-Schwartz, Linear Operators I en II.

Hille, E. and R.S. Philips, Functional Analysis and Semigroups.

M.A. Naimark, Normed Algebras.

Alleen voor § 4 en § 5 ook bijv.:

C.E. Rickart, Banach Algebras, of

W. Zelazko, Banach Algebras.

Veel over stellingen verwant met die van Stone en Weierstrasz (zie bewijs 2.5.19) vindt men in:

G.M. Leibowitz, Lectures on Complex Function Algebras.

Technische Hogeschool Eindhoven
Onderafdeling der Wiskunde

De vergelijking van Fredholm

Onderdeel van het college Lineaire Analyse II
van Prof.dr. N.G. de Bruijn

1972 - 1973

7. De vergelijking van Fredholm

7.1. Algemene opmerkingen over de vergelijking van Fredholm

R is een lineaire ruimte, $T \in LO(R)$. We beschouwen de vergelijking $(I - T)f = g$ (bij gegeven $g \in R$). Het heeft in deze paragraaf geen zin om μT te nemen in plaats van T.

7.1.1. Stelling. Beschouw de volgende condities:

(i) $I - T$ heeft een linksinverse U, d.w.z. $U(I - T) = I$,
(ii) $I - T$ heeft een rechtsinverse V, d.w.z. $(I - T)V = I$,
(iii) $(I - T)^{+}(\sigma) = \{\sigma\}$, d.w.z. T is injectief op R,
(iv) $(I - T)(R) = R$, d.w.z. T is surjectief op R,
(v) $I - T$ heeft een lineaire tweezijdige inverse W.

Dan gelden de implicaties (i) $\Rightarrow$ (iii), (ii) $\Rightarrow$ (iv), (iii) $\wedge$ (iv) $\Rightarrow$ (v). En als (v) geldt dan gelden (i) en (ii) met eenduidig bepaalde U en V.

Bewijs 1. Zij eerst (i) gegeven. Neem een $f \in R$ met $(I - T)f = \sigma$. Dan is $U(I - T)f = \sigma$ dus $f = \sigma$.

2. Zij nu (ii) gegeven. Neem een $f \in R$. Dan is $f = (I - T)(Vf) \in (I - T)(R)$.

3. Als (iii) en (iv) gelden dan beeldt $I - T$ de ruimte R ééneénduidig op zichzelf af. Er is dus een inverse W, die gemakkelijk blijkt lineair te zijn. Dus $I - T$ heeft zowel een links- als een rechtsinverse. Tenslotte: als er zowel een links- als een rechtsinverse bestaan dan zijn die gelijk: Als $U(I - T) = (I - T)V = I$ dan is

$$U = U((I - T)V) = (U(I - T))V = V .$$

7.1.2. We kunnen het probleem van de inversie van $I - T$ reduceren tot het overeenkomstige probleem in $T(R)$, wat een echte deelruimte van R kan zijn. Als we $(I - T)f = g$ (bij gegeven g) willen oplossen, kunnen we $f = g + h$ stellen; voor h vinden we de vergelijking $(I - T)h = Tg$. Elke oplossing hiervan ligt in $T(R)$, want als $(I - T)h = Tg$ dan is $h = T(h + g) \in T(R)$. Ook het rechterlid Tg ligt in $T(R)$. Het is dus voldoende de vergelijking $(I - T)x = b$ op te kunnen lossen met b gegeven in $T(R)$ en x gevraagd in $T(R)$. Algemeen geformuleerd:

7.1.2.1. <u>Stelling</u>. Als $g \in R$ dan is

$$\{f \in R \mid (I - T)f = g\} = \{g + h \mid h \in T(R),\ (I - T)h = Tg\}\ .$$

<u>Bewijs</u>. Er is een ééneénduidig verband tussen deze twee presentaties, gegeven door $f = g + h$.

7.1.3. <u>Stelling</u>. $I - T$ beeldt (wegens $(I - T)T = T(I - T)$) de ruimte $T(R)$ in zichzelf af. Als we de restrictie van $I - T$ tot $T(R)$ ook met $I - T$ aanduiden dan geldt:

(i) Als $(I - T)^{+}(\sigma) = \{\sigma\}$ in R geldt, dan geldt het in $T(R)$, en omgekeerd.
(ii) Als $(I - T)(R) = R$ dan geldt $(I - T)T(R) = T(R)$, en omgekeerd.
(iii) Als $H \in LO(T(R))$ in $T(R)$ linksinverse van $I - T$ is dan is $I + HT$ linksinverse van $I - T$ in R.
(iv) Als $H \in LO(T(R))$ in $T(R)$ rechtsinverse van $I - T$ is, dan is $I + HT$ in R rechtsinverse van $I - T$.
(v) Als $I - T$ in R de tweezijdige inverse U heeft dan beeldt U de ruimte $T(R)$ in zichzelf af; de restrictie H van U tot $T(R)$ is tweezijdige inverse van $I - T$ in $T(R)$, en $I + HT$ is weer hetzelfde als U.

<u>Bewijs</u>. (i) Volgt uit stelling 7.1.2.1 door $g = \sigma$ te nemen.
(ii) $(I - T)(R) = R \iff$
voor elke $g \in R$ is het linkerlid in stelling 7.1.2.1 niet leeg $\iff$
voor elke $g \in R$ is $\{h \mid h \in T(R),\ (I - T)h = Tg\}$ niet leeg $\iff$
$\iff (I - T)(T(R)) \supset T(R)$.
(iii) $(I + HT)(I - T) = I - T + HT(I - T) = I - T + H(I - T)T = I$.
(iv) $(I - T)(I + HT) = I - T + (I - T)HT = I - T + T = I$.
(v) Als $U(I - T) = (I - T)U = I$ dan is ook $UT = TU$, dus $U(T(R)) = T(U(R)) \subset T(R)$. Is H de restrictie van U tot $T(R)$ dan $H(I - T)T = HT(I - T) = UT(I - T) = TU(I - T) = T$, en $(I - T)HT = (I - T)UT = T$, zodat $H(I - T)f = (I - T)Hf$ voor elke $f \in T(R)$. Verder is $I + HT = I + UT = I + U - U(I - T) = U$.

7.1.4. We bestuderen vervolgens het geval dat T kan worden gesplitst als $T = T_0 + P$, waarbij T_0 zó is gekozen dat $I - T_0$ een tweezijdige inverse heeft. Men zou zich kunnen voorstellen dat P een kleine storing is. Men wil van de kennis van de inverse van $I - T_0$ gebruik maken om $I - T$ te inverteren.

We schrijven

$$I - T = I - P - T_0 = (I - T_0(I - P)^{-1})(I - P)$$

en vragen naar de inversie van $I - T_0(I - P)^{-1}$; die behoeft blijkens 7.1.2 en 7.1.3 slechts in de deelruimte $T_0(R)$ te worden bestudeerd. Bedenk dat $(I - P)^{-1}(R) = R$, dus $T_0(I - P)^{-1}(R) = T_0(R)$.

7.1.5. Stelling. Zij $T = T_0 + P$, waarin $I - P$ de tweezijdige inverse Q heeft. Dan geldt

(i) $I - T$ is dan en slechts dan injectief (resp. surjectief, resp. tweezijdig inverteerbaar) op R als $I - T_0Q$ injectief (resp. surjectief, resp. tweezijdig inverteerbaar) is op $T_0(R)$.
(ii) Als Y tweezijdige inverse van $I - T_0Q$ op $T_0(R)$ is, dan is de tweezijdige inverse van $I - T$ op R:

$$(I - T)^{-1} = Q + QYT_0Q \ .$$

Bewijs. $I - T$ is op R dan en slechts dan injectief (resp. surjectief, resp. tweezijdig inverteerbaar) als $(I - T)Q$ zulks is, en $(I - T)Q$ is hetzelfde als $I - T_0Q$. We kunnen nu stelling 7.1.3 toepassen met de daar voorkomende T vervangen door T_0Q. Bedenk dat $T_0Q(R) = T_0(Q(R)) = T_0(R)$.

7.1.6. Opmerking 1. Als de in 7.1.5 vermelde tweezijdige inverse van $I - T_0Q$ niet bestaat kan men nog van een deel van het formule-apparaat gebruik blijven maken voor uitspraken over de vergelijking $(I - T)f = g$. We nemen aan dat $T = T_0 + P$, en dat $I - P$ de tweezijdige inverse Q heeft. De vergelijking is te schrijven als $(I - T_0Q)x = g$, waarin $x = Q^{-1}f$. Door toepassing van 7.1.2.1 vinden we dat door de afbeelding $x = g + y$, $y = T_0Qx$ de oplossingsverzameling ééneenduidig wordt afgebeeld op die van de vergelijking

$$(I - T_0Q)y = T_0Qg \qquad (y \in T_0(R)) \ .$$

Opmerking 2. Uit $(I - T)f = g$ volgt (als weer $T = T_0 + P$, $(I - P)^{-1} = Q$) dat $(I - T_0Q)Q^{-1}f = g$ dus $f = Qg + QT_0f$. De oplossingen van $(I - T)f = \sigma$ voldoen dus aan $f \in QT_0(R)$. De oplossing van $(I - T)^2 f = \sigma$ voldoet aan $(I - T)f = g$

met een g $\in QT_0(R)$, en ligt dus in $Q^2T_0(R) + QT_0(R)$. Doorgaande vindt men voor m = 1,2,... dat de oplossingen van $(I - T)^m f = \sigma$ liggen in de directe som

$$QT_0(R) + Q^2T_0(R) + \dots + Q^mT_0(R) .$$

7.1.7. Als T(R) een eindige dimensie heeft treden bij het probleem van de inversie van I - T enkele vereenvoudigingen op. We zullen deze niet afzonderlijk formuleren, daar ze als bijzonder geval (P = 0, Q = I) in § 7.1.8 vervat zijn.

7.1.8. Stelling. Zij $T = T_0 + P$, waarin I - P de tweezijdige inverse Q heeft, en $\dim T_0(R) < \infty$. Dan zijn de volgende voorwaarden onderling equivalent.

(i) De restrictie van $I - T_0Q$ tot $T_0(R)$ is een reguliere transformatie in $T_0(R)$.

(ii) I - T heeft in R een tweezijdige inverse.

(iii) I - T heeft in R een linksinverse.

(iv) I - T heeft in R een rechtsinverse.

(v) $(I - T)^{\leftarrow}(\sigma) = \{\sigma\}$, d.w.z. het getal 1 is geen eigenwaarde van T.

(vi) $(I - T)(R) = R$.

Bewijs. In een eindigdimensionale ruimte is elke injectieve lineaire transformatie tweezijdig inverteerbaar, en hetzelfde geldt voor elke surjectieve. Passen we dit toe op $I - T_0Q$ en $T_0(R)$, dan levert stelling 7.1.5 (met gebruikmaking van stelling 7.1.1) de gewenste resultaten.

7.1.9. Stelling. Laat naast de gegevens van stelling 7.1.8 nog gegeven zijn dat R genormeerd is en dat T_0 en Q begrensd zijn. Dan geldt: als I - T een inverse heeft dan is die inverse begrensd.

Bewijs. Volgens stelling 7.1.8 kunnen we "inverse" als "tweezijdige inverse" interpreteren. Bestaat de inverse dan is die blijkens stelling 7.1.5 gelijk aan $Q + QYT_0Q$. Hierin is Y een begrensde lineaire afbeelding van $T_0(R)$ in zichzelf (in een eindigdimensionale ruimte is elke lineaire afbeelding begrensd!). Daar ook Q en T_0 begrensd zijn is $Q + QYT_0Q$ begrensd.

7.1.10. Opmerking. Als T eindige rang heeft, dim T(R) = n, dan zijn er hoogstens n waarden voor μ zodanig dat I - μT geen inverse heeft. Dit kan nl. alleen als de restrcitie van I - μT tot T(R) singulier is. In T(R) kan men de werking van T beschrijven door een matrix A (zodra er een basis voor T(R) gekozen is) en het resultaat is: I - μT heeft dan en slechts dan geen inverse als det(I - μA) = 0.

7.2. Bijna-eindigdimensionale operatoren

Zij R een genormeerde lineaire ruimte, T $\in$ LO(R),

7.2.1. Definitie. T heet bijna-eindigdimensionaal als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{S\in BLO(R)}\ (\dim S(R) < \infty \wedge \|S - T\| < \varepsilon) .$$

7.2.2. Opmerkingen. Als T aan deze definitie voldoet is T begrensd. De ècht eindigdimensionale operatoren behoeven niet begrensd te zijn!

7.2.3. Voorbeeld. In § 5.3.3 van Lineaire Analyse I is op C([0,1]) de integraaloperator T_K gedefinieerd door

$$T_K f = \Upsilon_x \int_0^1 K(x,y)f(y)dy ,$$

(uitgaande van een continue functie K), en opgevat als limiet van een rij begrensde operatoren T_n van eindige rang, verkregen door het interval [0,1] in n gelijke delen te verdelen en K met die deelintervallen stuksgewijs lineair te approximeren. Hieruit volgt dat T_K bijna-eindigdimensionaal is.

7.2.4. Men kan § 4.4.7 en § 4.4.11 combineren tot de volgende stelling: als R een B-ruimte is, en T bijna-eindigdimensionaal, dan is T compact. In een SH-ruimte kunnen we ook het omgekeerde bewijzen:

7.2.5. Stelling. Zij T een compacte lineaire operator in de SH-ruimte R. Dan is T bijna-eindigdimensionaal.

Bewijs. Neem een totaal orthonormaalsysteem $q_1,q_2,\dots$. Voor n = 1,2,3,... definiëren we

$$T_n := \Upsilon_{f\in R} \sum_{i=1}^{n} (Tf,q_i)q_i \ .$$

Kennelijk is T_n begrensd en dim $T_n(R) = n < \infty$. Neem aan dat $\neg \|T - T_n\| \to 0$ (als $n \to \infty$). Er is nu een $\varepsilon > 0$, een rij $n_1, n_2, \ldots$ en een rij $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ zō dat

$$\|(T - T_{n_j})f_{n_j}\| > \varepsilon \ , \qquad \|f_{n_j}\| = 1 \ . \tag{1}$$

Daar T compact is, is er een $g \in R$ en een deelrij $m_1, m_2, \ldots$ van $n_1, n_2, \ldots$, zō dat $Tf_{m_j} \to g$ als $j \to \infty$. Nu is

$$\Big\| \sum_{i=m_j+1}^{\infty} (Tf_{m_j} - g,\ q_i)q_i \Big\| \le \|Tf_{m_j} - g\| \to 0 \qquad (j \to \infty) \ ,$$

$$\Big\| \sum_{i=m_j+1}^{\infty} (g,q_i)q_i \Big\| \to 0 \qquad (j \to \infty) \ ,$$

dus

$$\Big\| \sum_{i=m_j+1}^{\infty} (Tf_{m_j},q_i)q_i \Big\| = \|(T - T_{m_j})f_{m_j}\| \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

en dat is in strijd met (1).

7.3. <u>De Fredholmvergelijking met bijna-eindigdimensionale operator</u>

Zij R een B-ruimte, T een bijna-eindigdimensionale operator.

7.3.1. <u>Definitie</u>. N_T is de verzameling van alle $\mu \in$ Cm met $\mu \neq 0$ en zō dat μ^{-1} een eigenwaarde van T is.

7.3.2. <u>Stelling</u>. (i) Als $\mu \notin N_T$ heeft $I - \mu T$ een begrensde tweezijdige inverse.

(ii) Als $\mu \in N_T$ is $(I - \mu T)(R) \neq R$, $(I - \mu T)^{\leftarrow}(\sigma) \neq \{\sigma\}$, en $I - \mu T$ heeft nōch een links- nōch een rechtsinverse.

(iii) N_T is hoogstens aftelbaar, en heeft geen verdichtingspunten in Cm.

Bewijs. Fixeer een $\mu \in Cm$. Kies een positief getal $\rho > |\mu|$, en kies een operator T_ρ van eindige rang zó dat de operator P ($P := T - T_\rho$) voldoet aan $\|P\| < \rho^{-1}$. Volgens 6.1.3 heeft $I - \mu P$ een begrensde tweezijdige inverse

$$(I - \mu P)^{-1} = 1 + \mu P + \mu^2 P^2 + \ldots$$

(hier is gebruikt dat R een B-ruimte is). We passen nu stelling 7.1.8 toe op de operator μT met splitsing $\mu T = \mu T_\rho + \mu P$. Als de condities (i) t/m (vi) uit stelling 7.1.8 voor deze operatoren gelden, dan is (zie (v) aldaar) $\mu \notin N_T$ (en eventueel $\mu = 0$). Als ze geen van alle gelden dan is $\mu \in N_T$. Nu zijn (i) en (ii) duidelijk.

Zij q een positief getal, en C_q de schijf

$$C_q := \{\mu \mid |\mu| < q\} .$$

Voor elke μ uit die schijf kunnen we eenzelfde $\rho = q$ gebruiken en bijbehorende T_q.

Als $\mu \in C_q$ definiëren we Z als de restrictie van $I - \mu T_q(I - \mu P)^{-1}$ tot $T_q(R)$. Deze Z beeldt $T_q(R)$ in zichzelf af, en is singulier als $\mu \in C_q \cap N_T$ (zie stelling 7.1.8 (i)). Zij $f_1,\ldots,f_n$ een basis voor $T_q(R)$. Laat $a_{ij}(\mu)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ bepaald zijn door

$$Zf_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mu) f_j .$$

We hebben q, T_q, P, $f_1,\ldots,f_n$ gefixeerd, maar de $a_{ij}(\mu)$ hangen nog van μ af. We zullen laten zien dat elke $a_{ij}(\mu)$ een analytische functie van μ is voor $|\mu| < q$. Er is een $K > 0$ zó dat voor elk stel $a_1,\ldots,a_n \in Cm$ geldt

$$|a_i| \le K\|a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n\| \qquad (i = 1,\ldots,n) .$$

We zien nu dat van

$$T_q P^k f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} f_j$$

de coëfficiënten a_{ijk} voldoen aan

$$|a_{ijk}| \le K\|T_q\|\|P\|^k$$

en dat

$$a_{ij}(\mu) = \delta_{ij} - \mu \sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}\mu^k ,$$

hetgeen voor $|\mu| < q$ analytisch is.

De determinant $\Delta(\mu)$ van de matrix $(a_{ij}(\mu))_{i,j=1,\dots,n}$ is een analytische functie van μ voor $|\mu| < q$. Deze functie heeft de waarde 1 voor $\mu = 0$, en heeft daarom slechts eindig veel nulpunten in de schijf $C_{\frac{1}{2}q}$. Daar q willekeurig was is daarmede (iii) bewezen.

7.3.3. Stelling. Bij elke $q > 0$ is er een voor $|\mu| < q$ analytische functie $\Delta(\mu)$ en een rij operatoren $A_k \in BLO(R)$ $(k = 0,1,\dots)$ zó dat $\|A_k\| \le Cq^{-k}$ (met zekere constante C) en zó dat voor alle $f \in R$ en voor alle μ met $\mu \notin N_T$, $|\mu| < q$

$$\Delta(\mu)(I - \mu T)^{-1}f = A_0f + \mu A_1 f + \mu^2 A_2 f + \dots .$$

De details van het bewijs laten we achterwege. Het kan gegeven worden door nadere uitwerking van het slot van 7.3.2. Men merke eerst op dat voor $|\mu| < q$, $\mu \notin N_T$:

$$(I - \mu T)^{-1} = (I - \mu P)^{-1}(I + \mu Z^{-1}T_q(I - \mu P)^{-1}) ,$$

waarin Z^{-1} de (tweezijdige) inverse van Z in de ruimte $T_q(R)$ is (zie stelling 7.1.5 (ii)). We kunnen Z^{-1} beschrijven t.o.v. de basis $f_1,\dots,f_n$ met behulp van een matrix $(\Delta(\mu))^{-1}b_{ij}(\mu)$, waarin $(-1)^{i+j}b_{ji}(\mu)$ de minor van $a_{ij}(\mu)$ in de matrix $(a_{ij}(\mu))_{i,j=1,\dots,n}$ is. Deze $b_{ij}(\mu)$'s kunnen ook worden beschouwd als $\Delta(\mu) = 0$ is. Laat X de transformatie zijn in $T_q(R)$ die door deze matrix $(b_{ij}(\mu))_{i,j=1,\dots,n}$ beschreven wordt, zodat $XZ = ZX = \Delta(\mu)I$ op $T_q(R)$. Nu is

$$\Delta(\mu)(I - \mu T)^{-1} = (I - \mu P)^{-1}(\Delta(\mu) + \mu X T_q(I - \mu P)^{-1})$$

geldig voor $|\mu| < q$, $\mu \notin N_T$, maar het rechterlid is als machtreeks in μ ontwikkelbaar voor alle μ met $|\mu| < q$ (ook voor de μ's in N_T). Bedenk dat P en T_q onafhankelijk van μ zijn, en dat de b_{ij}'s analytische functies van μ zijn voor $|\mu| < q$.

7.3.4. Stelling. Bij elke α met $\alpha \neq 0$, $\alpha^{-1} \in N_T$, bestaat er een natuurlijk getal m, een $r > 0$ en een rij operatoren $B_{-m}, B_{-m+1}, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ uit BLO(R) met de eigenschap dat voor elke λ met $0 < |\lambda - \alpha| < r$

$$(\lambda I - T)^{-1} f = \sum_{k=-m}^{\infty} (\lambda - \alpha)^k B_k f .$$

Dit is uit de vorige stelling af te leiden; de details van het bewijs laten we achterwege. Men kieze voor r een positief getal met de eigenschap dat er geen $\mu \in N_T$ is met $0 < |\mu^{-1} - \alpha| \leq r$ (en ook $|0 - \alpha| \leq r$). De convergentie kan worden vastgesteld door af te leiden dat $\|B_k\| \leq Cr^{-k}$. Het getal m is de multipliciteit van α^{-1} als nulpunt van $\Delta(\mu)$.

7.3.5. Stelling. Zij α een van 0 verschillende eigenwaarde van T (dus $\alpha \neq 0$, $\alpha^{-1} \in N_T$). Dan is R de directe som van twee ruimten: $R = R_1 + R_2$, met de volgende eigenschappen:

(i) $T(R_1) \subset R_1$, $T(R_2) \subset R_2$.

(ii) R_1 heeft eindige dimensie.

(iii) Er is een natuurlijk getal m zó dat

$$R_1 = \{f \in R \mid (T - \alpha I)^m f = \sigma\} .$$

(iv) De projectieoperatoren I_α resp. $I - I_\alpha$ op R_1 resp. R_2 zijn begrensd en voldoen aan

$$I_\alpha^2 = I_\alpha , \quad (I - I_\alpha)^2 = I - I_\alpha , \quad I_\alpha T = T I_\alpha .$$

(v) Voor elke $\lambda \neq \alpha$ heeft de restrictie van $T - \lambda I$ tot R_1 een begrensde tweezijdige inverse.

(vi) De restrictie van $T - \alpha I$ tot R_2 heeft een begrensde tweezijdige inverse.

(vii) De restrictie van T tot R_2 is bijna-eindigdimensionaal.

Bewijs. We kunnen uit de formule uit stelling 7.3.4 afleiden

$$(\zeta - (T - \alpha I))\left(\sum_{k=-m}^{\infty} \zeta^k B_k\right) = \left(\sum_{k=-m}^{\infty} \zeta^k B_k\right)(\zeta - (T - \alpha I)) = I$$

voor $0 < |\zeta| < r$. Ook voor operatormachtreeksen geldt dat een identiteit slechts geldt als overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn. Met de afkorting $S := T - \alpha I$ leidt dit tot

$$SB_{-m} = B_{-m}S = 0$$

$$B_{-m} - SB_{-m+1} = B_{-m} - B_{-m+1}S = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{-2} - SB_{-1} = B_{-2} - B_{-1}S = 0$$

$$B_{-1} - SB_0 = B_{-1} - B_0S = I$$

$$B_0 - SB_1 = B_0 - B_1S = 0 \ .$$

Hieruit volgt

$$S^mB_{-1} = B_{-1}S^m = 0 \qquad (1)$$

$$B_{-1} - SB_0 = B_0S - B_{-1} = I \qquad (2)$$

$$B_0 = S^kB_k = B_kS^k \qquad (k = 1,2,\ldots) \ . \qquad (3)$$

Uit (1) en (3) volgt $0 = (B_{-1}S^m)B_m = B_{-1}(S^mB_m)$, dus $B_{-1}B_0 = 0$. Met (2) levert dit op $B_{-1}^2 = B_{-1}$. We definiëren nu

$$I_\alpha = B_{-1} \ .$$

Nu is duidelijk

$$I_\alpha^2 = I_\alpha \ , \quad (I - I_\alpha)I_\alpha = I_\alpha(I - I_\alpha) \ , \quad (I - I_\alpha)^2 = I - I_\alpha \ , \qquad (4)$$

en verder volgt uit (1) en (2) $- SB_0 = - B_0S = I - I_\alpha$, dus

$$(T - \alpha I)(- B_0) = (- B_0)(T - \alpha I) = I - I_\alpha \ . \qquad (5)$$

Definiëren we nu $R_1 = I_\alpha(R)$, $R_2 = (I - I_\alpha)(R)$ dan is $R = R_1 + R_2$; I_α en $I - I_\alpha$ zijn de projectieoperatoren. Uit (2) volgt dat I_α en dus ook $I - I_\alpha$ met T verwisselbaar is, zodat $T(R_1) \subset R_1$, $T(R_2) \subset R_2$.

Uit (1) volgt $S^mI_\alpha = 0$, dus $S^mf = 0$ voor alle $f \in R_1$. Verder is $I - I_\alpha = - B_0S = - B_{m-1}S^m$, zodat voor alle $f \in R$

$$(T - \alpha I)^m f = \sigma \Rightarrow (I - I_\alpha)f = \sigma \Longleftrightarrow f \in R_1 .$$

Zodoende is (iii) bewezen.

Een bewijs voor (ii) volgt nu uit 7.1.6 Opmerking 2. De vectoren uit R_1 voldoen blijkens (iii) aan $(I - \alpha^{-1}T)^m f = \sigma$. Voor de $T_0(R)$ kan men $T_q(R)$ nemen (met geschikt gekozen q). Derhalve

$$\dim(R_1) \leq m \dim(T_q(R)) < \infty .$$

Uitspraak (v) volgt uit het feit dat de transformatie $T - \alpha I$ in R_1 nilpotent is ($S^m I_\alpha = 0$). Wanneer men nu T t.o.v. een basis met een matrix beschrijft, is α de enige eigenwaarde. Men kan ook expliciet de inverse van $T - \lambda I$ in R_1 aangeven: als $\lambda \neq \alpha$ dan is

$$(T - \lambda I)^{-1} = - (\lambda - \alpha)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \alpha)^{-k} S^k I_\alpha ;$$

rechts staat een afbrekende reeks.

Uitspraak (vi) volgt uit (5). Bedenk dat B_0 de ruimte R_2 in zichzelf afbeeldt, want $B_0 I_\alpha = I_\alpha B_0 = 0$ dus $(I - I_\alpha)B_0 = B_0(I - I_\alpha) = B_0$.

Uitspraak (vii) bewijzen we als volgt. De restrictie van T tot R_2 heeft op R_2 hetzelfde effect als $(I - I_\alpha)T$. We schrijven nu T als $T_0 + P$, waarin $\|P\| < \varepsilon/\|I - I_\alpha\|$ en T_0 eindigdimensionaal is. We splitsen nu $T = (I - I_\alpha)T_0 + (I - I_\alpha)P$; beide stukken beelden R_2 in R_2 af. $(I - I_\alpha)T_0(R)$ is een projectie van $T_0(R)$ en heeft dus eveneens eindige dimensie. En van $(I - I_\alpha)P$ is de norm $< \varepsilon$.

7.4. Fredholmvergelijking in SH-ruimte

We veronderstellen nu dat R een SH-ruimte is.

Als T een compacte lineaire operator van R is, dan is volgens 7.2.5 T bijna-eindigdimensionaal, dus § 7.3 toepasbaar. We zullen de relatie onderzoeken tussen de Fredholmvergelijkingen met operator T resp. T^*, waarin T^* de geadjungeerde van T is. We beschouwen weer $I - T$ i.p.v. $I - \mu T$; men bedenke echter dat de geadjungeerde van μT niet μT^* is maar $\bar{\mu} T^*$. De hierna volgende stelling 7.4 zegt dus o.a. dat als $\mu \in N_T$, dan $\bar{\mu} \in N_{T^*}$.

7.4.1. <u>Stelling</u>. Als T_1 een operator met eindige rang is dan geldt dat ook voor T_1^*.

<u>Bewijs</u>. Laat $f_1,\dots,f_n$ een orthonormale basis voor $T_1(R)$ zijn, dus

$$T_1 f = \sum_{j=1}^{n} (T_1 f, f_j) f_j = \sum_{j=1}^{n} (f, T_1^* f_j) f_j \ . \tag{1}$$

Noemen we $T_1^* f_j = g_j$ dan vinden we voor alle $f,g \in R$

$$(T_1 f, g) = \sum_{j=1}^{n} (f, g_j)(f_j, g) \ ,$$

$$(T_1^* g, f) = \sum_{j=1}^{n} (g, f_j)(g_j, f) \ ,$$

$$T_1^* g = \sum_{j=1}^{n} (g, f_j) g_j \ . \tag{2}$$

7.4.2. <u>Stelling</u>. Als T een compacte lineaire operator van R is, dan is ook T^* compact.

<u>Bewijs</u>. Volgens 7.2.5 is er bij elke $\varepsilon > 0$ een P zó dat $T = T_0 + P$, T_0 eindige rang, $\|P\| < \varepsilon$. Nu is $T^* = T_0^* + P^*$, en inderdaad heeft T_0^* eindige rang (7.4.1) en $\|P^*\| = \|P\| < \varepsilon$.

<u>Opmerking</u>. Een directer bewijs als volgt: Als $A \in BLO(R)$ en A compact, dan is AA^* compact (uit definitie van compactheid volgt dat AT compact is voor elke begrensde T). Een als $A \in BLO(R)$, AA^* compact, dan is A compact. Dit laatste is in te zien door te gebruiken

$$\|A^*(f_n - f_m)\|^2 \le \|AA^*(f_n - f_m)\| \cdot \|f_n - f_m\| \ .$$

7.4.3. We zullen een algemenere klasse W van operatoren invoeren. We zeggen dat $T \in W$ als T een lineaire operator van R is die te splitsen is als $T = T_0 + P$, waarin T_0 en P begrensd zijn, T_0 eindige rang heeft en $I - P$ een begrensde tweezijdige inverse heeft. (Er wordt dus niet geëist dat P klein is.)

Duidelijk is: Als T compact is dan $T \in W$. En ook (zie bewijs van 7.4.2): Als $T \in W$ dan $T^* \in W$.

7.4.4. Stelling. Zij $T \in W$ (zie 7.4.3). Dan geldt

(i) $R = (I - T)(R) \oplus (I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma)$,

(ii) $R = (I - T^*)R \oplus (I - T)^{\leftarrow}(\sigma)$,

(iii) $\dim(I - T)^{\leftarrow}(\sigma) = \dim(I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma) < \infty$.

Bewijs. $(I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma)$ is het ortogonaal complement van $(I - T)R$, want voor alle $f \in R$ geldt

$$\forall_{g\in R}\ ((I - T)g,f) = 0 \iff \forall_{g\in R}\ (g,(I - T^*)f) = 0 \iff (I - T^*)f = \sigma .$$

Blijkens $3.1.2^b$ is het nu voor het bewijs van (i) voldoende te laten zien dat $(I - T)(R)$ gesloten is. We hebben (vgl. 7.1.4)

$$I - T = I - P - T_0 = (I - T_0(I - P)^{-1})(I - P) ,$$

dus $I - T = (I - T_1)S$, waarin S een begrensde tweezijdige inverse heeft en T_1 eindige rang heeft.

We gebruiken de notatie uit het bewijs van 7.4.1. Zij R_1 het lineaire opspansel van $f_1,\dots,f_n$, $g_1,\dots,g_n$. Dus $T_1(R) \subset R_1$, $T_1^*(R) \subset R_1$. Daar R_1 eindigdimensionaal (dus gesloten) is, is $R = R_1 \oplus R_2$ (met $R_2 := \ominus R_1$). Uit (1) volgt dat $T_1f = 0$ voor alle $f \perp R_1$, dus $(I - T_1)(R_2) = R_2$. Dus $(I - T_1)R_2$ is gesloten; ook $(I - T_1)R_1$ is gesloten (omdat de dimensie eindig is). Verder is $(I - T_1)R_2 \perp R_1$, $(I - T_1)R_1 \subset R_1$. Dus $(I - T_1)R$ is de orthogonale som van twee gesloten ruimten (nl. $(I - T_1)R_1$ en $(I - T_1)R_2$) en dus gesloten. Daar $(I - T)(R) = (I - T_1)(S(R)) = (I - T_1)(R)$, is ook $(I - T)R$ gesloten.

We bewijzen nu (iii). De ruimten $(I - T_1)^{\leftarrow}(\sigma)$ en $(I - T_1^*)^{\leftarrow}(\sigma)$ zijn deelruimten van R_1 (uit $f = T_1f$ volgt $f \in T_1(R) \subset R_1$) en hebben dus eindige dimensie. In R_1 worden $I - T$ en $I - T_1$ t.o.v. een orthonormale basis beschreven door matrices die elkaars geadjungeerden zijn, dus dezelfde rang hebben. Daarom is $\dim(I - T_1)^{\leftarrow}(\sigma) = \dim(I - T_2)^{\leftarrow}(\sigma) < \infty$.

Tenslotte is

$$(I - T^*)^{\leftarrow}(\sigma) = (I - T_1)^{\leftarrow}(S^{*-1}(\sigma)) = (I - T_1)^{\leftarrow}(\sigma) ,$$

$$(I - T)^{\leftarrow}(\sigma) = S^{-1}(I - T_1^*)^{\leftarrow}(\sigma) ,$$

en die operator S^{-1} verandert de dimensie niet.

7.4.5. Opmerking. 7.4.4 (i) wordt meestal zó geformuleerd: $(I - T)f = g$ is dan en slechts dan oplosbaar als g loodrecht staat op alle h met $(I - T^*)h = \sigma$.

7.4.6. Een operator T heet normaal als $TT^* = T^*T$. Bij normale operatoren treedt in 7.3.5 een vereenvoudiging op doordat $m = 1$. We zullen dit laten zien in 7.4.7 (waar compactheid niet meer geëist wordt).

7.4.7. Stelling. (i) Als T een normale operator is, en $\alpha \in \mathbb{C}$m, $m \in$ Nt, $f \in R$, $(T - \alpha I)^m f = \sigma$, dan is $(T - \alpha I)f = \sigma$, $(T^* - \bar{\alpha}I)f = \sigma$.

(ii) Als $\alpha \neq \beta$, $(T - \alpha I)f = \sigma$, $(T - \beta I)g = \sigma$, dan is $(f,g) = 0$.

Bewijs. (i) Het is voldoende het geval $\alpha = 0$ (dat hier niet is uitgesloten) te beschouwen. Als $T^m f = \sigma$ dan is er een $k \in$ Nt met $T^{2^k} f = \sigma$. Met $H := T^*T = TT^*$ is $H^n = T^{*n}T^n$ voor alle $n \in$ Nt, dus $H^{2^k} f = \sigma$. Hieruit volgt

$$0 = (H^{2^k} f,f) = (H^{2^{k-1}} f,H^{2^{k-1}} f)$$

dus $H^{2^{k-1}} f = \sigma$. Door inductie komen we tot $Hf = \sigma$. Dus

$$0 = (Hf,f) = (TT^*f,f) = \|T^*f\|^2 = (T^*Tf,f) = \|Tf\|^2 ,$$

zodat $Tf = T^*f = \sigma$.

(ii) Als $(T - \alpha I)f = (T - \beta I)g = \sigma$ dan is volgens (i) ook $(T^* - \bar{\beta}I)g = \sigma$, zodat

$$\alpha(f,g) = (Tf,g)$$

$$\beta(f,g) = (f,\bar{\beta}g) = (f,T^*g) = (Tf,g) .$$

Derhalve $(\alpha - \beta)(f,g) = 0$, enz.