

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

GEWONE

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Dr. Ir. M.L.J. Hautus

Augustus 1974



TdF
Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Gewone Differentiaalvergelijkingen

Dr. ir. M.L.J. Hautus

Inhoudsbeschrijving

bij

GEWONE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Augustus 1974

I. ALGEMENE THEORIE	1
1. Beginwaardeproblemen	1
2. Existentie- en eenduidigheidsstellingen van het BWP	5
3. Bewijs van Stelling 1	10
4. Continuïteitseigenschappen van oplossingen	15
5. Enkele aanvullende opmerkingen	18
6. Opgaven	21
II. LINEAIRE SYSTEMEN	25
1. Inleiding	25
2. De homogene vergelijking	26
3. De inhomogene vergelijking	29
4. Vergelijkingen met constante coëfficiënten	31
5. Vergelijkingen met periodieke coëfficiënten	38
6. Randwaardeproblemen	39
7. Vergelijkingen van de 2e orde	42
8. Opgaven	46
Appendix. Bovendriehoeksmatrices, de logaritme van een matrix	50

Vervolg →

III. STABILITEIT	54
1. Differentieerbaarheid van de oplossing t.a.v. beginwaarden	54
2. Definitie van stabiliteit	56
3. Verdere stabiliteitseigenschappen	60
4. Stabiliteitseigenschappen van gestoorde systemen	66
5. Constante en periodieke oplossingen van autonome en periodieke systemen	73
6. Liapunov-functies	78
IV. TWEEDIMENSIONALE AUTONOME SYSTEMEN	86
1. Singuliere punten	86
2. Globaal faseportret	93
3. Conservatieve systemen	98
V. STORINGSREKENING	105
1. Beginwaardeprobleem	105
2. Periodieke oplossingen	107
3. De middelingsmethode	110

JdG, 17 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde

GEWONE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

dr.ir. M.L.J. Hautus

augustus 1974

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde

GEWONE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

dr.ir. M.L.J. Hautus

augustus 1974

GEWONE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

HOOFDSTUK I. ALGEMENE THEORIE

1. Beginwaardeproblemen

Een (gewone) differentiaalvergelijking (=: DV) van de orde n is een relatie van de vorm

$$(1) \quad F(x^{(n)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), t) = 0 .$$

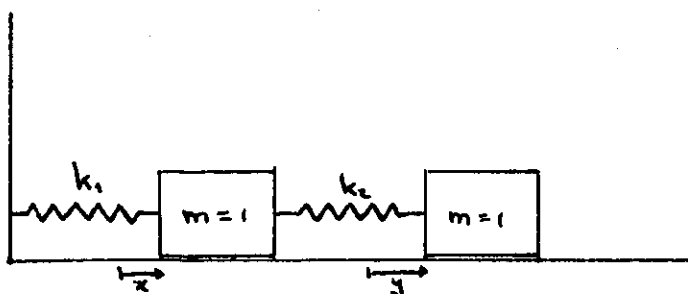
We zullen altijd t als onafhankelijke variabele en gewoonlijk x als afhankelijke variabele nemen. Meestal zullen we t de tijd noemen en als zodanig interpreteren. Vergelijking (1) is een zogenaamde impliciete DV. In een expliciete DV is de hoogste afgeleide gegeven als functie van de lagere orde afgeleiden:

$$(2) \quad \dot{x}^{(n)}(t) = f(x^{(n-1)}(t), \dots, x(t), t) .$$

In dit college worden uitsluitend expliciete DV's behandeld. In plaats van één DV kan men ook een stelsel DV's beschouwen. Bijvoorbeeld

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -k_1 x + k_2(x - y) \\ \ddot{y} = -k_2(y - x) . \end{cases}$$

Dit zijn de vergelijkingen waaraan (onder bepaalde aannamen) het door de figuur aangegeven systeem voldoet:



Van belang zijn vooral stelsels van eerste orde DV's:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), t) . \end{cases}$$

Zulke stelsels zijn daarom zo belangrijk omdat ze enerzijds vrij gemakkelijk te hanteren zijn (in vergelijking met DV's van de gedaante (2)), terwijl anderzijds elke expliciete DV (of stelsels van DV's) tot een eerste orde stelsel is te herleiden. We laten dit zien voor (2): Door de substitutie

$$x_1(t) = x(t), x_2(t) = \dot{x}(t), \dots, x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$$

wordt (2) equivalent met het volgende stelsel:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = f(x_n(t), \dots, x_1(t), t) . \end{cases}$$

Opgave 1. Formuleer de algemene gedaante van een stelsel DV's en herleid zo'n stelsel tot een eerste orde stelsel. Voer deze herleiding in het bijzonder uit voor het stelsel (3).

De reden dat stelsels van de gedaante (4) zo gemakkelijk te hanteren zijn, is de mogelijkheid gebruik te maken van vectornotatie. We kunnen (4) schrijven in de vorm

$$(6) \quad \underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), t)$$

waar

$$(7) \quad \underline{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{f}(\underline{x}, t) := \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{bmatrix} .$$

Overigens zullen we in het algemeen vectoren niet onderstrepen. We schrijven dus i.p.v. (6):

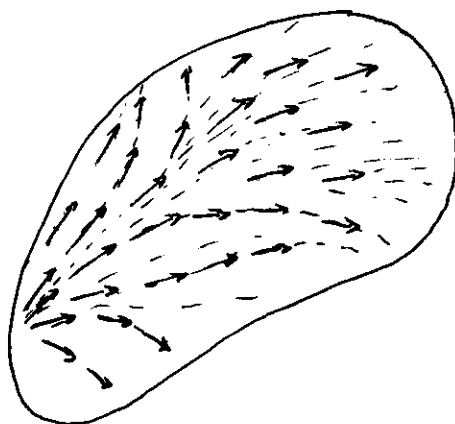
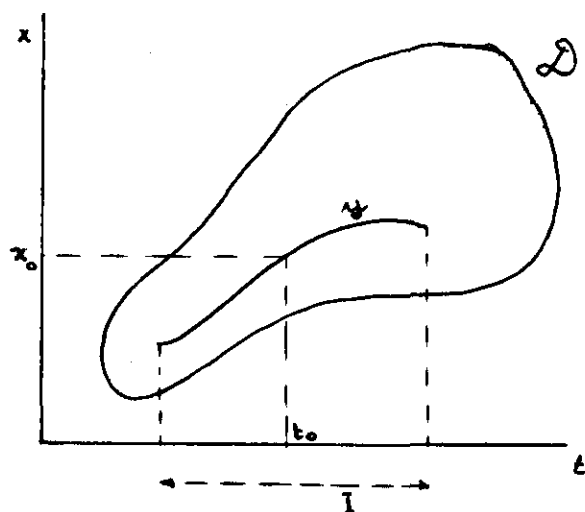
$$(8) \quad \dot{x}(t) = f(x(t), t) .$$

In dit college zullen we ons voornamelijk bezighouden met DV's van het type (8). Het is echter nuttig steeds de resultaten, gevonden voor zulke vergelijkingen, ook te herschrijven als resultaten voor (2).

Notatie. Als $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^n$, dan is $C(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ de verzameling van continue functies $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ en $C^k(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$ is de verzameling van continu differentieerbare functies $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ (analoog $C^k(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T})$).

Definitie 1. Zij $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ een gebied (= open samenhangende verzameling), $f \in C(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n)$, I een interval in \mathbb{R} . Dan heet $y \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ een oplossing van de DV (8) als

- i) $(y(t), t) \in \mathcal{D}$
 ii) $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ } voor alle $t \in I$.



Opmerking. Als t_0 een randpunt is van I (bijv. wanneer $I = [t_0, \infty)$) dan dient onder $\dot{y}(t_0)$ de rechter (of linker) afgeleide te worden verstaan.

Door de DV wordt in elk punt van $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ een richting gegeven, nl. die van de vector $\begin{bmatrix} f(x, t) \\ 1 \end{bmatrix}$. De familie van al die richtingen vormen het richtingsveld van de DV. Een oplossing van de DV is een kromme die "past" in het richtingsveld, d.w.z. een kromme waarvan in elk punt de raakvector de richting $\begin{bmatrix} f(x, t) \\ 1 \end{bmatrix}$ heeft. Deze meetkundige interpretatie suggereert dat \mathcal{D} is "opgevuld" met disjuncte oplossingskrommen, d.w.z. dat door elk punt van \mathcal{D} precies één oplossingskromme gaat. Onder bepaalde veronderstellingen t.a.v. f blijkt dit een correcte conclusie te zijn.

Bovenstaande beschouwingen geven aanleiding tot de formulering van het zogenaamde beginwaardeprobleem:

BWP(f, x_0, t_0): "Gegeven $f \in C(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n)$, waar $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ en $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$, bepaal een oplossing $y \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ van (8), die voldoet aan $y(t_0) = x_0$."

Zo'n functie y heet een oplossing van $\text{BWP}(f, x_0, t_0)$ op I . Als het duidelijk is van welke DV hier sprake is, zeggen we dat y een oplossing van $\text{BWP}(x_0, t_0)$ is (op I). De naam beginwaardeprobleem klinkt een beetje vreemd als t_0 een inwendig punt van I is (bijv. als $I = (a, b)$, $a < t_0 < b$). Men zou ook van éénpuntsrandwaardeprobleem kunnen spreken in vergelijking met meerpuntsrandwaardeproblemen, waarbij er inmeer punten t_0, t_1, \dots, t_k van een interval gegevens zijn over de oplossing (bijv. van de vorm $g(x(t_0), \dots, x(t_k)) = 0$). Meerpuntsrandwaardeproblemen zijn over het algemeen veel moeilijker te behandelen dan beginwaardeproblemen, waartoe we ons in dit college voornamelijk zullen beperken. Bij de afleiding van eigenschappen van BWP kan men gewoonlijk zonder verlies van algemeenheid aannemen dat I van de gedaante $I = [0, T)$ of $I = [0, T]$ is, terwijl $t_0 = 0$ (zgn. rechteroplossingen). In de eerste plaats kunnen we $t_0 = 0$ door een eenvoudige verschuiving bereiken (voer een nieuwe tijdsvariabele τ gedefinieerd door $\tau := t - t_0$ in). Als $t_0 = 0$ een inwendig punt van I is, zeg $I = (-a, b)$ met $a, b > 0$, kunnen we de intervallen $I_1 = [0, b)$ en $I_2 = (-a, 0]$ apart beschouwen. In het laatstgenoemde interval kunnen we de substitutie $\tau = -t$ toepassen. Als we uitspraken hebben gedaan over oplossingen van BWP op I_1 en I_2 , dan kunnen we daaruit analoge uitspraken afleiden voor I .

Opgave 2. Als in bovengenoemde situatie $y_1 \in C^1(I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $y_2 \in C^1(I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n)$ oplossingen zijn van $\text{BWP}(x_0, 0)$, dan is de functie y gedefinieerd door $y(t) := y_1(t)$ ($t \in I_1$), $y(t) := y_2(t)$ ($t \in I_2$), een oplossing van $\text{BWP}(x_0, 0)$ op I .

Equivalent met $\text{BWP}(x_0, 0)$ is het volgende probleem: Bepaal een oplossing $y \in C(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ van de integraalvergelijking

$$(9) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau .$$

Merk op: Als y een continue oplossing van (9) is op I , dan is $y \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ want het rechterlid is in C^1 . We hoeven dus slechts een continue oplossing van (9) te bepalen om $\text{BWP}(x_0, 0)$ op te lossen.

Opgave 3. Als $f \in C^m(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ en y is een oplossing van (8) op I , dan is $y \in C^{m+1}(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

2. Existentie- en eenduidigheidsstellingen van het BWP

Als $x \in \mathbb{R}^n$, dan zullen we met $|x|$ de (euclidische) lengte (of norm) van x , gedefinieerd door $|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, aangeven. De volgende eigenschappen beschouwen we bekend:

i) $|\alpha x| = |\alpha| |x| \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

ii) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad (\Delta\text{-ongelijkheid})$

iii) $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| .$

Eigenschap 1. Als $y \in C([a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$, waar $a < b$, dan is

$$\left| \int_a^b y(t) dt \right| \leq \int_a^b |y(t)| dt .$$

Hierbij is $\int_a^b y(t) dt$ natuurlijk de vector met componenten $\int_a^b y_i(t) dt$ ($i = 1, \dots, n$). Men kan deze ongelijkheid bewijzen door de integralen te benaderen door Riemann-sommen: Als $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, en $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ ($i = 1, \dots, k$), dan geldt op grond van i) en iii):

$$\left| \sum_{i=1}^k y(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^k |y(\tau_i)| |t_i - t_{i-1}| .$$

Door limietovergang vinden we dan de gevraagde ongelijkheid.

Als A een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is (of een $m \times n$ -matrix) dan definiëren we de norm van A door

$$|A| := \max_{|x|=1} |Ax| .$$

Ga na dat de volgende eigenschappen gelden:

1. $|Ax| \leq |A| |x| \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

2. $|\alpha A| = |\alpha| |A| \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

3. $|A+B| \leq |A| + |B|$

4. $|AB| \leq |A| |B|$

5. $|A^k| \leq |A|^k$

$$6. \quad \left| \int_a^b A(t) dt \right| \leq \int_a^b |A(t)| dt, \text{ waar } A \text{ een matrixwaardige functie voorstelt}$$

$$7. \quad \max_{i,j} |a_{ij}| \leq |A| \leq \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}| \quad (A = (a_{ij})).$$

De laatste eigenschap houdt in dat de norm van een matrix klein is als alle elementen klein zijn en omgekeerd.

We zullen een voorwaarde op f formuleren, die garandeert dat BWP een éénduidige oplossing heeft. Daartoe voeren we een nieuw begrip in:

Definitie 1. Zij $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ een gebied en $f \in C(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m)$. Dan heet f Lipschitzcontinu op \mathcal{D} als

$$\exists_{L>0} \forall_{x,y \in \mathcal{D}} |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

Het getal L heet een Lipschitzconstante van f op \mathcal{D} . We zeggen ook wel: f voldoet aan de Lipschitzvoorwaarde.

De functie f heet locaal Lipschitzcontinu als er voor elke $x \in \mathcal{D}$ een omgeving \mathcal{N} van x bestaat waarop f Lipschitzcontinu is. De verzameling van lokaal Lipschitzcontinue functies $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ wordt aangegeven met $\text{Lip}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m)$.

Opgave 1. Welke van de volgende functies zijn (locaal of globaal) Lipschitzcontinu: $\sin x$, $|x|$, $\sqrt{|x|}$, $e^{-1/|x|}$, $1/\log|x|$, $x \sin 1/x$, $x^2 \sin 1/x$, $1/(x+1)$, waarbij zonodig f in $x = 0$ continu wordt voortgezet?

Eigenschap 2. Als $f \in C^1(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m)$, dan is $f \in \text{Lip}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m)$.

Bewijs. Zij $x_0 \in \mathcal{D}$. Kies een bolletje \mathcal{B} met middelpunt x_0 zo dat $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{D}$ ($\overline{\mathcal{B}}$ is de afsluiting van \mathcal{B}). Zij $L := \max_{x \in \overline{\mathcal{B}}} |f_x|$. Hierbij is f_x de functionaalmatrix van f met elementen $(\partial f_i / \partial x_j)$. Als $x, y \in \overline{\mathcal{B}}$, dan geldt

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \{f(y + t(x-y))\} dt = \int_0^1 f_x(y + t(x-y)) dt (x-y),$$

op grond van de kettingregel. Er volgt:

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \int_0^1 f_x(y + t(x-y)) dt \right| |x-y| \leq L|x-y|. \quad \square$$

Eigenschap 3. Als $f \in \text{Lip}(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m)$, dan is f Lipschitzcontinu op elke compacte verzameling $K \subseteq \mathcal{D}$.

Bewijs. We gebruiken de stelling van Heine-Borel. Bij elk punt $x \in K$ is er een bolletje \mathcal{B} met middelpunt x en straal r waarop f Lipschitzcontinu is. Zij \mathcal{B}^* het bolletje met middelpunt x en straal $\frac{1}{2}r$. De verzameling van alle bolletjes \mathcal{B}^* overdekt K en er is dus een eindige deelopdekking: $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i^*$ waar \mathcal{B}_i^* middelpunt x_i en straal $\frac{1}{2}r$ heeft. Laat L_i een Lipschitzconstante op \mathcal{B}_i^* ($= \{x \mid |x - x_i| < r_i\}$) zijn. Dan is

$$L := \max \left\{ \max_i L_i, \max_i \frac{4M}{r_i} \right\}$$

waar $M := \max_{x \in K} |f(x)|$, een Lipschitzconstante van f op K . Immers, laat $x, y \in K$ en $x \in \mathcal{B}_i^*$. Als $y \in \mathcal{B}_i^*$, dan is

$$|f(x) - f(y)| \leq L_i |x - y| \leq L |x - y| .$$

Als $y \notin \mathcal{B}_i^*$, dan is $|x - y| \geq \frac{1}{2}r_i$ en dus

$$|f(x) - f(y)| \leq 2M \leq L |x - y| . \quad \square$$

Definitie 2. Zij $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ een gebied en $f \in C(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m)$. Dan heet f Lipschitzcontinu t.a.v. x als

$$\exists_{L>0} \forall_{x,y,t} [(x,t), (y,t) \in \mathcal{D} \Rightarrow |f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x-y|] .$$

Op analoge wijze als boven definieert men hier de begrippen Lipschitzconstante, Lipschitzvoorwaarde, locale Lipschitzcontinuïteit t.a.v. x . De verzameling van lokaal Lipschitzcontinue functies t.a.v. x noteren we als $\text{Lip}_x(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m)$. De analoga van Eigenschap 2 en 3 blijven gelden. (Bij Eigenschap 2 wordt van f continuïteit, differentieerbaarheid naar x en de continuïteit van f_x vereist.)

We formuleren nu een algemene stelling over beginwaardeproblemen:

Stelling 1. Zij $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ een gebied, $f \in \text{Lip}_x(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ en $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$. Dan bestaat er een interval $I^\pm = (t^-, t^+)$ met $-\infty \leq t^- < t_0 < t^+ \leq \infty$ en een functie $x^\pm: I^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$ met de volgende eigenschappen:

- i) x^\pm is een oplossing van $\text{BWP}(f, x_0, t_0)$ op I^\pm .
- ii) Als x een oplossing van $\text{BWP}(f, x_0, t_0)$ is op een interval I , dan is $I \subseteq I^\pm$ en $x(t) = x^\pm(t)$ voor $t \in I$.
- iii) $(x^\pm(t), t) \rightarrow \partial\mathcal{D}$ voor $t \rightarrow t^+$ of $t \rightarrow t^-$ ($\partial\mathcal{D}$ is de rand van \mathcal{D}).

De laatste eigenschap vereist nadere toelichting:

Definitie 3. Als $y: I \rightarrow \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m$, waar $I = (a,b)$ en \mathcal{D} een gebied is, dan zeggen we dat $y(t) \rightarrow \partial\mathcal{D} (t \rightarrow b)$ als er voor elke compacte verzameling $K \subseteq \mathcal{D}$ een $t_1 \in I$ bestaat zodat $y(t) \notin K$ voor $t > t_1$. (Analoog voor $t \rightarrow a$.)

Het bewijs van Stelling 1 zal worden gegeven in § 3. We merken op dat I^\pm en x^\pm door i) en ii) eenduidig zijn bepaald (ga na). Aan voorwaarde iii) is altijd voldaan als $t^+ = \infty$ resp. $t^- = -\infty$. Ook is voldaan aan iii) als $x^\pm(t) \rightarrow x^+ \in \partial\mathcal{D} (t \rightarrow t^+)$ resp. $x^\pm(t) \rightarrow x^- \in \partial\mathcal{D} (t \rightarrow t^-)$.

Opgaven. Bepaal voor de volgende BWP's I^\pm en x^\pm , en ga na dat aan iii) is voldaan:

2. $\dot{x} = x, (x_0, t_0) = (1, 0)$
 3. $\dot{x} = x^2, (x_0, t_0) = (1, 0)$
 4. $\dot{x} = 1 + x^2, (x_0, t_0) = (0, 0)$
- $$\left. \begin{array}{l} 2. \\ 3. \\ 4. \end{array} \right\} \mathcal{D} = \mathbb{R}^2$$
5. $\dot{x} = 1/x, \mathcal{D} = (0, \infty) \times \mathbb{R}, (x_0, t_0) = (1, 0)$
 6. $\ddot{x} + 2t^{-1}x + t^{-4}x = 0, (x_0, t_0) = (1, 2/\pi), \mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ (definieer $y = \dot{x}$ en voer de substitutie $s = 1/t$ uit)
 7. $\dot{x} = -3x^{4/3} \sin t \quad (\mathcal{D}) = (0, \infty) \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)$ willekeurig punt in \mathcal{D} .

We beschouwen nu het geval dat $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n \times (a, b)$, waar $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dan kunnen we Eigenschap iii) als volgt formuleren:

- iii)' Als $t^+ < b$, dan geldt $|x(t)| \rightarrow \infty \quad (t \uparrow t^+)$.
 Als $t^- > a$, dan geldt $|x(t)| \rightarrow \infty \quad (t \downarrow t^-)$.

Uit opgaven 2 en 3 blijkt dat, zelfs als f erg glad is, I^\pm echt kleiner dan $I := (a, b)$ kan zijn. Stelling 1 kan dus alleen locale existentie garanderen. Eigenschap iii)' doet ons echter een middel aan de hand tot globale existentie te besluiten als aan bepaalde voorwaarden is voldaan. We beperken ons bij de bewijzen tot rechteroplossingen.

Eigenschap 4. Zij $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n \times (a, b)$ en f begreind. Dan is $I^\pm = (a, b)$.

Bewijs. Zij $|f| \leq M$. Uit formule I-1-9 volgt dat $|x^\pm(t) - x_0| \leq M(t - t_0)$ ($t_0 \leq t < t^+$), zodat $|x^\pm(t)| \rightarrow \infty \quad (t \uparrow t^+)$ onmogelijk is als $t^+ < b$. \square

Een algemener resultaat krijgt men door gebruikmaking van de volgende eigenschap, die ook zal worden gebruikt bij het bewijs van Stelling 1 en van stabiliteitscriteria in Hoofdstuk III.

Lemma van Gronwall. Zij $k \in \mathbb{R}$, $-\infty < t_0 < t_1 \leq \infty$, $u, v \in C([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R})$, en $v(t) \geq 0$. Als

$$u(t) \leq k + \int_{t_0}^t u(\tau)v(\tau)d\tau \quad (t_0 \leq t < t_1)$$

dan geldt

$$u(t) \leq k \exp \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau \quad (t_0 \leq t < t_1) .$$

Bewijs. Definieer

$$\varphi(t) := \exp\left(- \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau\right), \quad \psi(t) := k + \int_{t_0}^t u(\tau)v(\tau)d\tau .$$

Dan geldt $u(t) \leq \psi(t)$, $\varphi(t) > 0$ en dus

$$\frac{d}{dt} \varphi(t)\psi(t) = \dot{\varphi}\psi + \varphi\dot{\psi} = -v\varphi\psi + \varphi uv = \varphi v(u - \psi) \leq 0$$

zodat

$$\varphi(t)\psi(t) \leq \varphi(t_0)\psi(t_0) = k \quad (t_0 \leq t < t_1) .$$

Hieruit volgt

$$u(t) \leq \psi(t) \leq k/\varphi(t) .$$

□

Opgave 8. Als $k \geq 0$, $-\infty < t_0 < t_1 \leq \infty$, $u, v \in C([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R})$ en

$$u(t) \leq v(t) + k \int_{t_0}^t u(\tau)d\tau \quad (t_0 \leq t < t_1)$$

dan geldt

$$u(t) \leq v(t) + k \int_{t_0}^t e^{k(t-\tau)} v(\tau)d\tau \quad (t_0 \leq t < t_1) .$$

Als toepassing van het Lemma van Gronwall vinden we:

Eigenschap 5. Als in Stelling 1: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n \times (a,b)$, $|f(x,t)| \leq M(t) + N(t)|x|$, waar $M, N \in C((a,b) \rightarrow [0, \infty))$, dan is $I^\pm = (a,b)$.

Bewijs. Beschouw $I^+ := [0, t^+)$ en neem aan dat $t^+ < b$. Dan geldt

$$\begin{aligned} |x^\pm(t)| &= \left| x_0 + \int_0^t f(x^\pm(\tau), \tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq |x_0| + \int_0^t [M(\tau) + N(\tau)|x^\pm(\tau)|] d\tau \leq k + \int_0^t N(\tau)|x^\pm(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

waar

$$k := |x_0| + \int_0^{t^+} M(\tau) d\tau.$$

Uit het lemma van Gronwall volgt

$$|x^\pm(t)| \leq k \exp \int_0^t N(\tau) d\tau.$$

We zien dat $x^\pm(t)$ begrensd is op $[0, t^+)$ in strijd met iii)'. □

Opgave 9. Als in Stelling 1: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n \times (a,b)$ en $|x^T f(x,t)| \leq M(t) + N(t)|x|^2$, dan is $I^\pm = (a,b)$.

3. Bewijs van Stelling 1

Het bewijs wordt in verschillende stappen geleverd. We nemen aan dat aan de veronderstellingen van Stelling 1 is voldaan.

Lemma 1. Er bestaat een open interval I met $t_0 \in I$ waarop BWP een oplossing heeft.

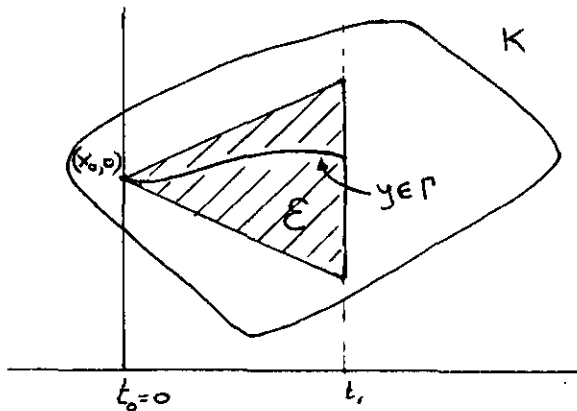
Bewijs. We nemen aan dat $t_0 = 0$ en we beperken ons tot een rechteroplossing, d.w.z. een oplossing op een interval $[0, t_1)$. We kiezen een compacte verzame-

ling $K \subseteq \mathcal{D}$, zodanig dat $(x_0, 0)$ een inwendig punt van K is. Laat M en L een bovengrens, resp. een Lipschitzconstante van f zijn op K . Dan bestaat er een getal $t_1 > 0$ zo dat

$$\mathcal{E} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t < t_1, |x - x_0| \leq Mt\}$$

een deelverzameling van K is. Zij

$$\Gamma := \{y \in C([0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n) \mid (y(t), t) \in \mathcal{E} \text{ voor } 0 \leq t < t_1\}.$$



Voor $y \in \Gamma$ geldt blijkbaar $y(0) = x_0$. We definiëren een rij functies y_0, y_1, y_2, \dots als volgt

$$y_0(t) := x_0 \quad (0 \leq t < t_1)$$

$$(*) \quad y_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(y_k(\tau), \tau) d\tau \quad (0 \leq t < t_1).$$

Met inductie volgt dat de rij voldoet aan $y_k \in \Gamma$, zodat de formules welge-definieerd zijn (uit $y_k \in \Gamma$ volgt dat $(y_k(\tau), \tau) \in \mathcal{E} \subseteq K \subseteq \mathcal{D}$, zodat $f(y_k(\tau), \tau)$ bestaat voor $0 \leq \tau < t_1$). Immers: Als $y_k \in \Gamma$, dan geldt $|f(y_k(t), t)| \leq M$, zodat

$$|y_{k+1}(t) - x_0| \leq Mt \quad (0 \leq t < t_1).$$

We zullen laten zien dat de rij (y_k) uniform convergeert op $[0, t_1)$. Er geldt voor $0 \leq t < t_1$ en $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(t) - y_k(t)| &\leq \int_0^t |f(y_k(\tau), \tau) - f(y_{k-1}(\tau), \tau)| d\tau \leq \\ &\leq L \int_0^t |y_k(\tau) - y_{k-1}(\tau)| d\tau . \end{aligned}$$

Omdat $y_1 \in \Gamma$, geldt $|y_1(\tau) - y_0(\tau)| \leq M\tau$ ($0 \leq \tau < t_1$). Dus

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &\leq L \int_0^t M\tau d\tau = \frac{1}{2} MLt^2 \\ |y_3 - y_2| &\leq L \int_0^t \frac{1}{2} ML\tau^2 d\tau = \frac{1}{6} ML^3 t^3 \\ &\vdots \\ |y_{k+1} - y_k| &\leq M \frac{(Lt)^{k+1}}{(k+1)!} . \end{aligned}$$

Dit impliceert dat $\sum |y_{k+1} - y_k|$ uniform convergeert op $[0, t_1)$, zodat ook $\sum_{k=1}^r (y_{k+1} - y_k) = y_{r+1} - y_1$ uniform convergeert als $r \rightarrow \infty$.

Door limietovergang in (*) vinden we

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(y(\tau), \tau) d\tau \quad (0 \leq t < t_1)$$

waar $y(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t)$.

Op grond van overwegingen uit § 1 volgt hieruit dat y een oplossing is. □

Lemma 2. Als y_1 en y_2 oplossingen van BWP zijn op een interval I , dan geldt $y_1 = y_2$.

Bewijs. We nemen weer $t_0 = 0$, en we beschouwen oplossingen y_1 en y_2 op $[0, t_1)$. Er geldt

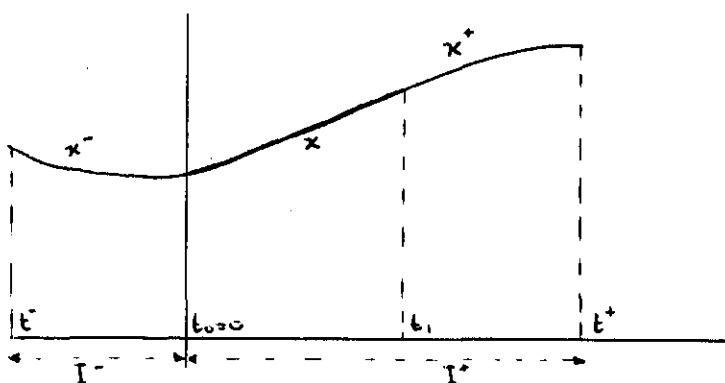
$$y_1(t) - y_2(t) = \int_0^t \{f(y_1(\tau), \tau) - f(y_2(\tau), \tau)\} d\tau \quad (0 \leq t < t_1) .$$

Als $0 < t_2 < t_1$, dan zijn de krommen $\{(y_1(t), t) \mid 0 \leq t \leq t_2\}$ en $\{(y_2(t), t) \mid 0 \leq t \leq t_2\}$ compact en bevat in \mathcal{D} . Er bestaat dus een Lipschitz constante L op de vereniging van die twee krommen. Derhalve

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_0^t |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau .$$

Uit het lemma van Gronwall volgt ($u(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$, $v(t) = L$, $k = 0$) dat $y_1(t) = y_2(t)$, $0 \leq t \leq t_2$. Omdat $t_2 \in (0, t_1)$ willekeurig is volgt hieruit het gestelde. \square

We geven nu het bewijs van stelling 1 i) en ii) voor rechteroplossingen met $t_0 = 0$. Als x, y oplossingen zijn van BWP op $I_1 = [0, t_1)$ resp. $I_2 = [0, t_2)$, en $t_1 < t_2$, dan is $x(t) = y(t)$ voor $0 \leq t < t_1$. Dus $\text{graf}(x) \subseteq \text{graf}(y)$ waar $\text{graf}(x) := \{(x(t), t) \mid 0 \leq t < t_1\}$ de grafiek van x is. De vereniging van alle grafieken van rechteroplossingen van BWP is de grafiek van een oplossing x^+ van BWP op het interval $I^+ := [0, t^+)$ waar t^+ het supremum is van alle t_1 zodat er een oplossing van BWP bestaat op $[0, t_1)$ (ga na dat x^+ inderdaad een oplossing is).



Analoog definieert men x^- op $I^- := (t^-, 0]$. Tenslotte definiëren we $I^\pm := I^- \cup I^+$ en x^\pm door $\text{graf}(x^\pm) = \text{graf}(x^+) \cup \text{graf}(x^-)$. Het is duidelijk dat x^\pm aan i) en ii) voldoet.

Het bewijs van iii) (voor t^+) leveren we in twee stappen. Eerst merken we op dat we $t^+ < \infty$ mogen veronderstellen, omdat anders $(x(t), t)$ kennelijk elke compacte verzameling verlaat voor $t \uparrow t^+$.

Lemma 3. Als $K \subseteq \mathcal{D}$ compact is, dan bestaat er een rij t_1, t_2, \dots met $t_i \uparrow t^+$ zodanig dat $(x^\pm(t_i), t_i) \notin K$.

Bewijs. Als zo'n rij niet bestaat, dan is er een getal $t_1 \in [0, t^+)$ zo dat $(x^\pm(t), t) \in K$ voor $t_1 < t < t^+$. Voor $t_1 < t < s < t^+$ geldt dan:

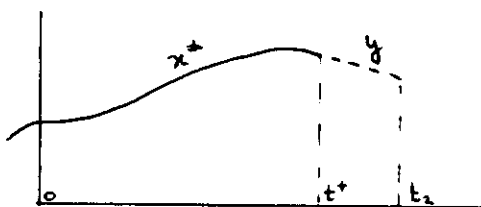
$$x(s) - x(t) = \int_t^s f(x(\tau), \tau) d\tau .$$

Als M een bovengrens van f op K is, volgt hieruit:

$$|x(t) - x(s)| \leq M|t - s| .$$

We concluderen hieruit dat $x^+ = \lim_{t \uparrow t^+} x^\pm(t)$ bestaat. (We gebruiken een continue versie van het criterium van Cauchy. Bewijs dit criterium.) Omdat K compact is geldt $(x^+, t^+) \in K$. Op grond van lemma 1 bestaat er een oplossing y van $BWP(f, x^+, t^+)$ op een interval $[t^+, t_2)$, waar $t_2 > t^+$. De functie \hat{y} gedefinieerd door

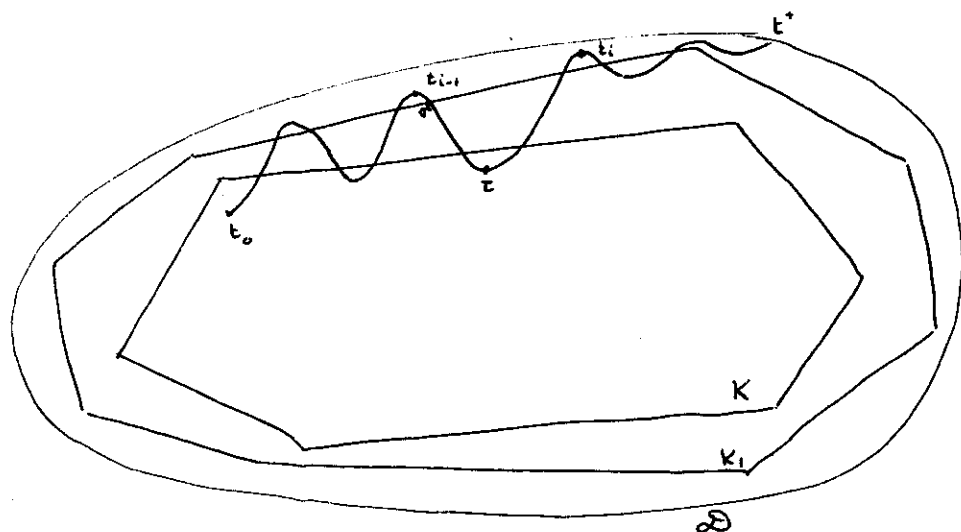
$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &:= x^\pm(t) & (0 \leq t < t^+) \\ \hat{y}(t) &:= y(t) & (t^+ \leq t < t_2) \end{aligned}$$



is een oplossing van $BWP(f, x_0, t_0)$ op (t^-, t_2) (ga na dat \hat{y} continu differentieerbaar is in t^+). Dit is in strijd met de definitie van t^+ (de maximale rechte reindtijd).

In het kort: Als een oplossing binnen K blijft, heeft zij een limiet. Dan kan de oplossing worden voortgezet. □

Tenslotte bewijzen we iii) voor t^+ . Zij $K \subseteq \mathcal{D}$ compact en $t^+ < \infty$. Dan is er een compacte verzameling $K_1 \subseteq \mathcal{D}$ met $K \subseteq \text{int } K_1$ (het inwendige van K). Dit kan men inzien met de stelling van Heine-Borel (ga na).



Zij δ de afstand van K tot ∂K_1 (de rand van K_1). (Dit bestaat omdat K en ∂K_1 compact zijn.) Het is duidelijk dat $\delta > 0$. Zij M een bovengrens van $|f|$ op K_1 . Als we lemma 3 op K_1 toepassen vinden we een stijgende rij t_1, t_2, \dots met $t_i \rightarrow t^+$. Blijkbaar geldt $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). Als $t_{i-1} < \tau < t_i$ en $(x(\tau), \tau) \in K$, dan is er een σ met $t_{i-1} < \sigma < \tau$ zodanig dat $(x(\sigma), \sigma) \in \partial K_1$ en $(x(t), t) \in K_1$ voor $\sigma < t < \tau$. Dan geldt

$$|x(\tau) - x(\sigma)| = \left| \int_{\sigma}^{\tau} f(x(t), t) dt \right| \leq M(\tau - \sigma)$$

en derhalve

$$\begin{aligned} \delta^2 &\leq |(x(\tau), \tau) - (x(\sigma), \sigma)|^2 = |x(\tau) - x(\sigma)|^2 + |\tau - \sigma|^2 \leq \\ &\leq (M^2 + 1)(\tau - \sigma)^2 \leq (M^2 + 1)(t_i - t_{i-1})^2. \end{aligned}$$

We zien dat voor voldoende grote i er geen $\tau > t_i$ bestaat met $(x(\tau), \tau) \in K$.

Anders gezegd: op den duur heeft de oplossing geen tijd meer om tussen K en $\mathcal{D} \setminus \text{int } K_1$ heen en weer te lopen. \square

4. Continuïteitseigenschappen van oplossingen

Volgens Stelling 1 bestaat er voor elke $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$ een oplossing x^\pm gedefinieerd op een interval $I^\pm =: I^\pm(x_0, t_0)$. Deze oplossing is een functie van t maar ook van het beginpunt (x_0, t_0) . We schrijven $x^\pm(t) =: \xi(t, x_0, t_0)$. De functie ξ is dus gedefinieerd op de verzameling

$$\mathcal{F} := \{(t, x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid (x_0, t_0) \in \mathcal{D}, t \in I^\pm(x_0, t_0)\},$$

waar $I^\pm(x_0, t_0)$ het maximum interval is waarop de oplossing van $\text{BWP}(f, x_0, t_0)$ is gedefinieerd. We geven een aantal eigenschappen die meteen uit de definitie volgen:

- 1) $(t_0, x_0, t_0) \in \mathcal{F}$ en $\xi(t_0, x_0, t_0) = x_0$ voor alle $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$.
- 2) Als $(t_1, x_0, t_0) \in \mathcal{F}$, dan is $(t_0, \xi(t_1, x_0, t_0), t_1) \in \mathcal{F}$ en $\xi(t_0, \xi(t_1, x_0, t_0), t_1) = x_0$.

Met andere woorden: bij vaste t en t_0 zijn de functies

$$x_0 \mapsto \xi(t, x_0, t_0)$$

en

$$y \mapsto \xi(t_0, y, t)$$

elkaars inversen.

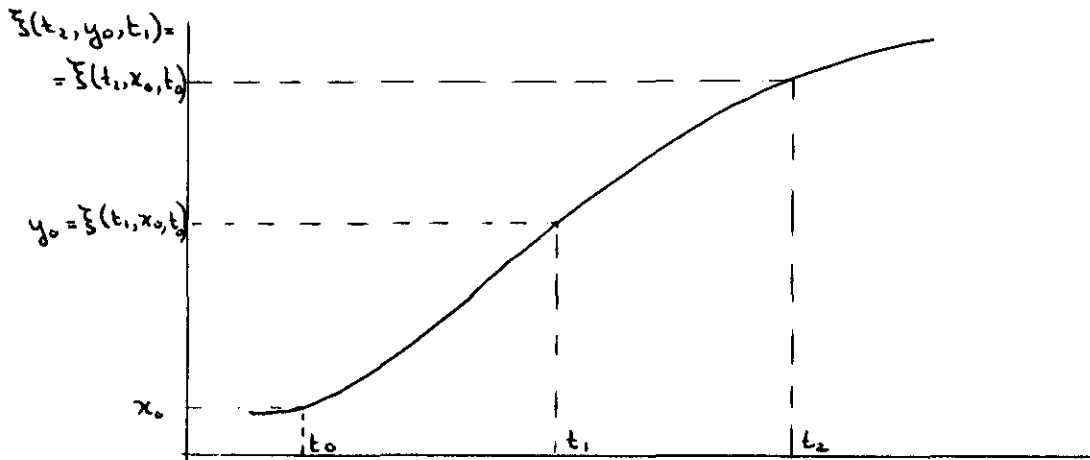
- 3) Als $(t_1, x_0, t_0) \in \mathcal{F}$ en $(t_2, \xi(t_1, x_0, t_0), t_0) \in \mathcal{F}$, dan is $(t_2, x_0, t_0) \in \mathcal{F}$ en $\xi(t_2, x_0, t_0) = \xi(t_2, \xi(t_1, x_0, t_0), t_1)$.

Met andere woorden: de samengestelde afbeelding van

$$x_0 \mapsto \xi(t_1, x_0, t_0) \text{ en } y_0 \mapsto \xi(t_2, y, t_1)$$

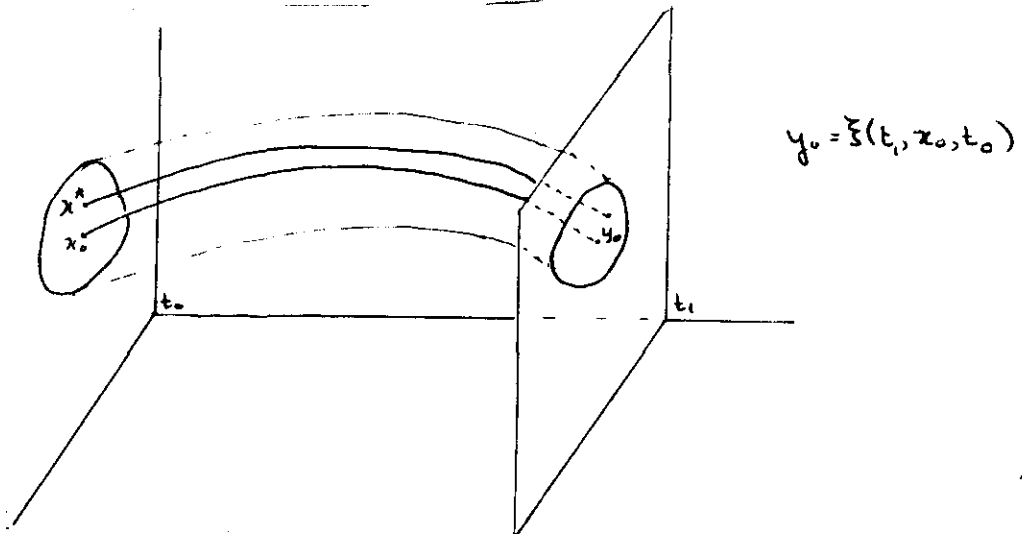
is

$$x_0 \mapsto \xi(t_2, x_0, t_0) .$$



We geven nu een continuïteitseigenschap van ξ :

Stelling 2. Zij $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$, $t_1 \in I^\pm(x_0, t_0)$. Dan bestaat er een omgeving \mathcal{N} van x_0 , zodat voor alle $x^* \in \mathcal{N}$ geldt $t_1 \in I^\pm(x^*, t_0)$. Bovendien geldt $\xi(t, x^*, t_0) \rightarrow \xi(t, x_0, t_0)$ voor $x^* \rightarrow x_0$, uniform voor $t \in [t_0, t_1]$.



We zullen de stelling alleen bewijzen voor $t_1 > t_0$. We kiezen $\varepsilon > 0$ zodanig dat voor $\tilde{\mathcal{E}} := \{(x, t) \mid t_0 < t < t_1, |x - \xi(t, x_0, t_0)| < \varepsilon\}$ geldt $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}$. Omdat $\tilde{\mathcal{E}}$ compact is bestaat er een Lipschitzconstante L t.a.v. x van f in $\tilde{\mathcal{E}}$. Zij $|x^* - x_0| < \varepsilon$. Definieer

$$t^* := t_1 \quad \text{als} \quad (\xi(t, x^*, t_0), t) \in \tilde{\mathcal{E}} \quad \text{voor} \quad t_0 < t < t_1$$

en anders

$$t^* := \inf \{t > t_0 \mid (\xi(t, x^*, t_0), t) \notin \tilde{\mathcal{E}}\}.$$

Dan geldt voor $t_0 < t < t^*$:

$$|\xi(t, x^*, t_0) - \xi(t, x_0, t_0)| \leq |x^* - x_0| + \int_{t_0}^t L |\xi(\tau, x^*, t_0) - \xi(\tau, x_0, t_0)| d\tau.$$

Uit het lemma van Gronwall volgt nu:

$$(*) \quad |\xi(t, x^*, t_0) - \xi(t, x_0, t_0)| \leq |x^* - x_0| e^{L(t-t_0)} \quad (t_0 \leq t \leq t^*).$$

Als we nu $|x^* - x| \leq \delta := \frac{1}{2}\varepsilon e^{-L(t_1-t_0)}$ kiezen, dan zien we dat $t^* = t_1$ moet zijn omdat anders $\varepsilon = |\xi(t^*, x^*, t_0) - \xi(t^*, x_0, t_0)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ zou gelden. Dus $t_1 \in I^\pm(x^*, t_0)$. Uit (*) volgt dan onmiddellijk de gestelde uniforme convergentie. □

Opmerking. Uit bovenstaande volgt gemakkelijk dat $x_0 \mapsto \xi(t, x_0, t_0)$ lokaal Lipschitzcontinu is (ga na). Algemeen kan men bewijzen dat \mathcal{F} open is en dat $\xi \in \text{Lip}(\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Zie [CL Ch. I, II].

Gevolg. Zij $f \in C(\mathcal{D} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n)$, waar $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ en $U \subseteq \mathbb{R}^m$ gebieden zijn en laat het BWP $\dot{x}(t) = f(x, t, u)$, $x(t_0) = x_0$, waar u een constante parameter is, een

oplossing hebben op $[t_0, t_1]$ voor $u = u_0$. Als f Lipschitzcontinu is t.a.v. x en u , dan bestaat er een omgeving \mathcal{N} van u_0 , zodat het BWP een oplossing heeft op $[t_0, t_1]$ voor $u \in \mathcal{N}$. Als we de oplossing aangeven met $\xi(t, x_0, t_0, u)$ dan geldt $\xi(t, x_0, t_0, u) \rightarrow \xi(t, x_0, t_0, u_0)$ ($u \rightarrow u_0$) uniform voor $t_0 \leq t \leq t_1$.

Bewijs. Variatie in de parameters kan worden herleid tot variatie in beginwaarden door de volgende substitutie:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad f(\underline{x}, t) = \begin{bmatrix} f(x, t, u) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}^* = \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix}.$$

De DV $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, t, u)$ is dan equivalent met $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$. □

Ook hier kunnen we opmerken dat $u \mapsto \xi(t, x_0, t_0, u)$ lokaal Lipschitzcontinu is.

5. Enkele aanvullende opmerkingen

I. De existentie van oplossingen van BWP(f, x_0, t_0) kan ook worden aangetoond indien men slechts continuïteit van f verlangt. Men maakt hierbij gebruik van de stelling van Arzela-Ascoli (zie [Hu], [CL], [C]).

II. De eenduidigheid van oplossingen gaat verloren, als men de Lipschitzvoorwaarde laat vallen. Een bekend voorbeeld is:

Voorbeeld. $\dot{x} = \sqrt{|x|}$, $(x_0, t_0) = (0, 0)$. Oplossingen zijn: $x(t) = 0$ én $x(t) = \frac{1}{4}t|t|$.

Opgave. Bepaal alle oplossingen van BWP($f, 0, 0$), waar $f(x, t) = \sqrt{|x|}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

De Lipschitzvoorwaarde kan echter wel enigszins worden verzwakt. Een voldoende voorwaarde voor de eenduidigheid is nl. ook de voorwaarde van Osgood (zie [Hi], [C]).

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq \varphi(|x - y|)$$

waar φ een positieve functie is met de eigenschap dat $\int_0^\xi \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} = \infty$. In het geval van Lipschitzcontinuïteit hebben we $\varphi(\xi) = L\xi$.

Opgave. Geef een voorbeeld van een DV die niet voldoet aan de Lipschitzvoorwaarde, maar die op grond van het criterium van Osgood toch een éénduidige oplossing van het BWP heeft.

III. Het existentiebewijs gegeven in § 3 lemma 1 is afkomstig van Picard en Lindelöf. Een meer abstracte formulering van dit bewijs berust op de contractiestelling van Banach (vgl. [A & A] stelling 7.9.1). Een ander existentiebewijs is afkomstig van Cauchy en berust op benaderingen van de oplossing door Euler-Cauchy polygonen gedefinieerd door $t_k := t_0 + kh$, $x_{k+1} = x_k + hf(x_k, t_k)$, waar $h > 0$, $\tilde{x}_h(t) :=$ stuksgewijs lineaire interpolatie door de punten (x_k, t_k) ($k = 0, 1, \dots$). Als f aan de voorwaarde van stelling 1 voldoet, kan men bewijzen dat $\tilde{x}_h(t) \rightarrow x(t)$ in een omgeving van t_0 (zie [CL], [R]). Dit existentiebewijs is verwant met numerieke methoden om de oplossing te bepalen (zie P. Henrici, Discrete variable method in ordinary differential equations). Tenslotte wijzen we op de methode van machtreeksubstitutie die alleen toepasbaar is op analytische differentiaalvergelijkingen. Zij

$$f(x, t) = \sum_{k, \ell} a_{k\ell} x^k t^\ell$$

(we nemen voor het gemak $n = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$). Men probeert dan een oplossing van de vorm $x(t) = \sum_1^\infty x_n t^n$. Dan krijgt men de vergelijking

$$\sum_{n=1}^\infty n x_n t^{n-1} = \sum_{k, \ell} a_{k\ell} \left(\sum_{n=1}^\infty x_n t^n \right)^k t^\ell$$

waaruit de coëfficiënten x_1, x_2, \dots eenduidig te bepalen zijn. De convergentie van de reeks $\sum_1^\infty x_n t^n$ wordt bewezen met de zgn. majorantenmethode, een ingenieuze methode bedacht door Cauchy (zie [Hi], W.W. Golubev: Differentialgleichungen in Komplexen. Zie ook het collegedictaat Toegepaste Wiskunde I).

IV. Een periodieke differentiaalvergelijking is een DV met $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \times \mathbb{R}$, waar $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ een gebied is, en $f(x, t+T) = f(x, t)$ voor alle $(x, t) \in \mathcal{D}$, waarbij T een positief getal is, genoemd periode. De oplossingen van een periodieke DV hoeven natuurlijk niet periodiek te zijn (Vb. $\dot{x} = 1 + \cos t$). Men is echter vaak juist geïnteresseerd in die oplossingen die wel periodiek zijn (zo deze bestaan). Uitgangspunt is hierbij de volgende eigenschap, waarvan het bewijs een interessante toepassing van de eenduidigheidsstelling (stelling 1 ii) is.

Eigenschap. Een oplossing x^\pm van een periodieke DV is dan en slechts dan periodiek als zij gedefinieerd is op een interval $I^\pm \supseteq [0, T]$ en als $x^\pm(0) = x^\pm(T)$.

Bewijs. Het is duidelijk dat de genoemde voorwaarden noodzakelijk zijn. Om te laten zien dat de voorwaarde voldoende is beschouwen we de functie $y(t) = x^\pm(t+T)$. Dan is y oplossing van de DV op $I^\pm - T := \{t-T \mid t \in I^\pm\}$ (ga na). Bovendien geldt $y(0) = x^\pm(T) = x^\pm(0)$. Uit Stelling 1 ii) volgt dan dat $I^\pm - T \subseteq I^\pm$ en dat $y(t) = x^\pm(t)$ op $I^\pm - T$. Op analoge wijze zien we $I^\pm + T \subseteq I^\pm$ en $x^\pm(t-T) = x^\pm(t)$ op $I^\pm + T$. Hieruit volgt onmiddellijk dat $I^\pm = \mathbb{R}$ en dus $x^\pm(t+T) = x^\pm(t)$ voor alle t . □

Door deze eigenschap wordt het onderzoek naar periodieke oplossingen herleid tot een tweepunts randwaardeprobleem: "Bepaal een oplossing van de DV op $[0, T]$ die voldoet aan $x(0) = x(T)$."

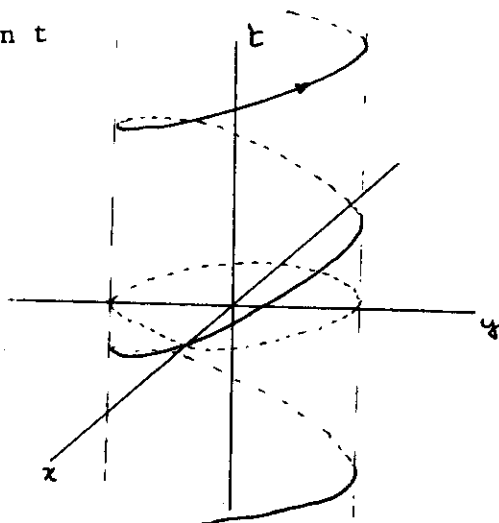
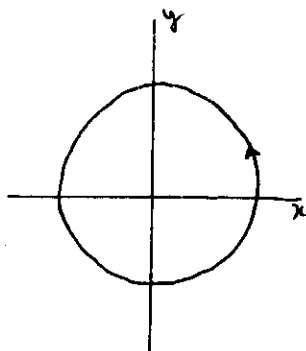
V. Het oplossen van een meerpunts randwaardeprobleem, in het bijzonder het probleem genoemd in IV, is equivalent met het oplossen van beginwaardeproblemen + het oplossen van de (algebraïsche) vergelijkingen. De met het in IV genoemde probleem corresponderende vergelijking kan bijv. als volgt worden geformuleerd: Bepaal het punt $x_0 \in \mathcal{D}_0$ zodanig dat $\xi(T, x_0, 0) = x_0$.

VI. Een autonome differentiaalvergelijking is een DV van de vorm

$$\dot{x} = f(x)$$

waar $f: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ een gebied is. Een DV heet dus autonoom als het rechterlid niet expliciet van t afhangt. We kunnen deze vergelijking zien als speciaal geval van de in dit hoofdstuk behandelde DV, waarbij $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \times \mathbb{R}$, $\hat{f}(x, t) = f(x)$. Het is gebruikelijk een oplossing x van een autonome DV te representeren als kromme in \mathbb{R}^n , waarvan $t \mapsto x(t)$ een parameterrepresentatie is. Zo'n kromme noemt men een baan of een trajectorie. Een baan is dus de projectie van een oplossingskromme $\{(t, x(t)) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ op \mathbb{R}^n door onderdrukking van de tijdcoördinaat.

Voorbeeld. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ oplossing: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$



De baan is een cirkel, de oplossingskromme is een schroeflijn.

Als x een oplossing is van een autonoom systeem, dan is ook $y: t \rightarrow x(t - t_1)$ een oplossing, zoals men gemakkelijk verifieert (vgl. ook het bewijs van de eigenschap in IV). De oplossingskromme van y ontstaat uit die van x door verschuiving langs de t -as. De banen van x en y zijn gelijk. Een baan representeert dus een familie van oplossingen.

Eigenschap. Verschillende banen kunnen elkaar niet snijden.

Bewijs. Neem aan dat de oplossingen x en y parameterrepresentaties zijn van twee banen, die een punt, zeg $x(t_1) = y(t_2)$, gemeenschappelijk hebben. Zij $z(t) := x(t + t_1 - t_2)$. Dan is ook z een oplossing en $z(t_2) = x(t_1) = y(t_2)$. Dus $z(t) = y(t)$ voor alle t waarvoor de functies zijn gedefinieerd. D.w.z. $x(t + t_1 - t_2) = y(t)$, zodat x en y dezelfde baan hebben. \square

Als een trajectorie zichzelf snijdt is de oplossing periodiek (ga na). Merk op dat voor elke τ en $(t, x_0, t_0) \in \mathcal{F}$ geldt $\xi(t, x_0, t_0) = \xi(t + \tau, x_0, t_0 + \tau)$.

6. Opgaven

De in deze opgaven voorkomende DV's zullen worden verondersteld te voldoen aan de voorwaarden van stelling 1.

1. Beschouw $\dot{x} = f(x, t)$, waar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Zij $J := \{\alpha \mid t^+(\alpha, 0) > 1\}$ ($x_0 = \alpha$, $t_0 = 0$) en $\eta(\alpha) := \xi(1, \alpha, 0)$ voor $\alpha \in J$. Bewijs:

i) J is een open interval.

ii) η is monotoon stijgend op J .

iii) Als $f(\alpha_1, t) = f(\alpha_2, t) = 0$ voor alle $t \geq 0$, waar $\alpha_1 < \alpha_2$, dan is $t^+(\alpha, 0) = \infty$ voor $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$.

iv) $\{\alpha \mid t^+(\alpha, 0) = \infty\}$ is een interval (dit is een generalisatie van iii).

v) Als $\text{sgn } f(x, t) = -\text{sgn } x$, dan is $t^+(\alpha, 0) = \infty$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Als $f(x, t) = p(x)$ een polynoom in x is, bepaal dan de waarde van α waarvoor $t^+(\alpha, 0) = \infty$.

2. $\ddot{x} = \dot{x}f(x, \dot{x})$, $x(0) = \alpha$, $\dot{x}(0) = \beta$. We geven de oplossing aan met $\xi(t, \alpha, \beta)$.

Bewijs:

i) Constante functies zijn oplossingen: $\xi(t, \alpha, 0) = \alpha$.

ii) Elke oplossing is strikt monotoon of constant.

iii) $\beta \mapsto \xi(t, \alpha, \beta)$ is stijgend bij vaste α en t .

Aanwijzing: Beschouw $y = \dot{x}$ als functie van x en schrijf voor $y(x)$ een DV op (dit kan op grond van ii)).

iv) Als $f(x, \dot{x}) \leq 0$, dan is $t^+ = \infty$ voor alle α en β .

v) Als $\exists \delta > 0 \forall_{x, \dot{x}} f(x, \dot{x}) < -\delta$, dan bestaat $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

3. Laat zien dat voor alle oplossingen van de DV

$$\ddot{x} + x^2 \dot{x} + x^3 = \sin t$$

geldt $t^+ = \infty$.

Aanwijzing: Geef een schatting voor de functie $V(t) = \frac{1}{4}x^4(t) + \frac{1}{2}y^2(t)$, waar $y = \dot{x}$, door van deze functie de afgeleide te berekenen.

4. Beschouw de vergelijking van Blasius:

$$\ddot{x} + x\dot{x} = 0$$

met beginwaarden $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = \alpha > 0$. Bewijs:

i) \ddot{x} is positief en dalend.

ii) $t^+ = \infty$ voor elke α .

iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t)$ bestaat.

iv) Als x oplossing is van de DV, voor welke p en q is dan $t \mapsto px(qt)$ een oplossing?

v) Het randwaardeprobleem $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 1$, heeft een eenduidige oplossing.

vi) Voor de oplossing van dit randwaardeprobleem geldt $x(t) - t \rightarrow c$ ($t \rightarrow \infty$) voor zekere $c < 0$.

Schets de grafiek van deze oplossing.

vii) Laat zien dat het randwaardeprobleem $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(1) = 1$, een oplossing heeft.

5. Beschouw de Van der Pol vergelijking

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = A \cos \omega t .$$

Laat zien dat voor elke oplossing geldt: $t^+ = \infty$ als $\mu > 0$. (Beschouw $V = x^2 + y^2$ waar $y = \dot{x}$ en geef een schatting voor \dot{V} .)

6. Zij $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ periodiek met periode T . Beschouw het BWP:

$$(1) \quad \dot{x} = f(x,t), \quad x(0) = \alpha, \quad (t \geq 0).$$

De oplossing geven we aan met $\xi(t, \alpha)$.

- i) Als $-\infty < a \leq b < \infty$ en $h \in C([a,b] \rightarrow [a,b])$, dan is er een $x \in [a,b]$ zo dat $h(x) = x$.
- ii) Als $a < b$ en als $\xi(T,b) \leq b$, $\xi(T,a) \geq a$, dan heeft (1) een periodieke oplossing.
- iii) De DV $\dot{x} = -x^3 + \sin t$ heeft een periodieke oplossing met periode 2π . (N.B. Let op de globale existentie.)
- iv) Hetzelfde voor $\dot{x} = x^3 + \sin t$.
- v) Als (1) een begrensde oplossing $x(t)$ heeft, dan is er ook een periodieke oplossing. (Aanwijzing: laat zien dat de rij functies x_n gedefinieerd door $x_n(t) := x(t+nT)$ een uniforme fundamentealrij is en dat de limiet een periodieke oplossing van (1) is.)

7. Laat $f \in C(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^n$) Lipschitzconstante L hebben op \mathcal{D} . Bij een numerieke benadering van de oplossing x van het BWP

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(0) = x_0$$

wordt de oplossing bepaald van het benaderende BWP

$$\dot{y} = g(y,t), \quad y(0) = y_0.$$

Als $|x_0 - y_0| \leq \epsilon_0$, $|f(x,t) - g(x,t)| \leq \epsilon$ ($(x,t) \in \mathcal{D}$), dan geldt:

$$|x(t) - y(t)| \leq \epsilon_0 e^{Lt} + \epsilon(e^{Lt} - 1)/L.$$

(Aanwijzing: gebruik opgave 3 van § 2.)

8. Beschouw de DV

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(0) = \alpha, \quad (t \geq 0)$$

waarbij $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- i) Als $f(0,t) \geq 0$ voor alle $t \geq 0$, dan is $\xi(t, \alpha) \geq 0$ ($\alpha \geq 0, 0 \leq t < t^+$).
Aanwijzing: Beschouw de DV $\dot{x} = f(x,t) + \epsilon$.

- ii) Als $a < b$ en $f(a,t) \geq 0 \geq f(b,t)$ voor elke $t \geq 0$ en $a < \alpha < b$, dan is $t^+ = \infty$ en $a \leq \xi(t,\alpha) \leq b$ voor $t \geq 0$.
- iii) Als $\varphi(t)$ continu differentieerbaar is op $[0,\infty)$ en $f(\varphi(t),t) \geq \dot{\varphi}(t)$ voor $t \geq 0$, dan is $\xi(t,\alpha) \geq \varphi(t)$ ($\alpha \geq 0, 0 \leq t < t^+$).
- iv) Als $g(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), dan geldt $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) voor elke oplossing van $\dot{x}(t) = -x^3(t) + g(t)$. (In het bijzonder geldt steeds $t^+ = \infty$.)

LITERATUUR

- [B] R. Bellman, Stability theory of differential equations.
- [C] C. Corduneano, Principles of differential en integral equations.
- [CL] E. Coddington and N. Levinson, Theory of ordinary differential equations.
- [Hi] E. Hille, Lectures on ordinary differential equations.
- [Hu] W. Hurewicz, Lectures on ordinary differential equations.
- [L] S. Lefschetz, Differential equations: Geometric theory.
- [R] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité.
- [S] D.A. Sánchez, Ordinary differential equations and stability theory. An introduction.
- [W] H.K. Wilson, Ordinary differential equations.
- [A & A] S.T.M. Ackermans, J.H. van Lint, Algebra en Analyse.

HOOFDSTUK II. LINEAIRE SYSTEMEN

1. Inleiding

Een lineaire DV heeft de volgende gedaante

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = u(t) .$$

Zo'n hogere orde vergelijking kunnen we herleiden tot een speciaal geval van een stelsel lineaire DV's van de eerste orde:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + u_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + u_n(t) . \end{aligned}$$

In matrix-vectornotatie luidt dit stelsel

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t) ,$$

waar

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad u := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} , \quad A := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

We zullen steeds aannemen dat $A(t)$ en $u(t)$ continu zijn op een open interval I . In de eerste plaats onderzoeken we de existentie en eenduidigheid van oplossingen van BWP(f, x_0, t_0) waar $t_0 \in I$, $f(x, t) := A(t)x + u(t)$.

Blijkbaar voldoet f aan de in stelling 1 van hoofdstuk I gestelde Lipschitzvoorwaarde. Als immers $(x_0, t_0) \in \mathcal{D} = \mathbb{R}^n \times I$, dan bevat $\mathbb{R}^n \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ een omgeving van (x_0, t_0) . Bovendien is deze verzameling voor kleine $\delta > 0$ een deelverzameling van \mathcal{D} . Er geldt

$$|f(x, t) - f(y, t)| = |A(t)(x - y)| \leq L|x - y|$$

waar $L := \max\{|A(t)| \mid |t - t_0| \leq \delta\}$. Er bestaat dus een eenduidige oplossing van BWP op een interval I^\pm . Uit I, § 2, Eigenschap 5 volgt dat $I^\pm = I$ wegens

$$|f(x, t)| \leq L(t)|x| + M(t)$$

(waar $L(t) := |A(t)|$, $M(t) := |u(t)|$). We concluderen:

Stelling 1. Laat A en u continu zijn op een open interval I en laat $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dan is er precies één functie $x^\pm \in C'(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ die voldoet aan (1) en $x^\pm(t_0) = x_0$.

2. De homogene vergelijking

Tegelijk met de vector-DV

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

beschouwen we de matrix-DV

$$(2) \quad \dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

waar $X(t)$ een $n \times k$ -matrix is voor elke $t \in I$. (1) is een speciaal geval van (2) (nl. $k = 1$). Anderzijds is (2) tot (1) te herleiden, want de kolommen x_1, \dots, x_k van een oplossing X van (2) zijn oplossingen van (1). Dit volgt uit: $AX = A[x_1, \dots, x_k] = [Ax_1, \dots, Ax_k]$ ($[a_1, \dots, a_k]$ is de matrix waarvan a_1, \dots, a_k de kolommen zijn). We zien dat het BWP $\dot{X} = AX$, $X(0) = C$, waar C een $n \times k$ matrix is, een éénduidige oplossing heeft (we nemen verder aan dat $0 \in I$).

Definitie. De $n \times n$ matrixfunctie ϕ die voldoet aan

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t), \quad \phi(0) = I$$

heet de fundamentealmatrix of fundamenteaaloplossing (=: FO) van (1) en (2). Als we de afhankelijkheid van ϕ t.a.v. A willen aangeven schrijven we ϕ_A .

Het belang van de fundamentealmatrix is, dat men elke oplossing van (1) en (2) erin kan uitdrukken:

Stelling 2. De oplossing van (1) met $x(0) = c$ wordt gegeven door $x(t) = \phi_A(t)c$, de oplossing van (2) met $X(0) = C$ wordt gegeven door $X(t) = \phi_A(t)C$.

Bewijs. $\dot{x} = \frac{d}{dt} (\phi_A c) = \dot{\phi}_A c = A\phi_A c = Ax$ en $x(0) = \phi_A(0)c = c$. □

Opmerking. Het matrixproduct van twee differentieerbare matrixfuncties voldoet aan de gewone productregel voor differentiatie:

$$\frac{d}{dt} (X(t)Y(t)) = \dot{X}(t)Y(t) + X(t)\dot{Y}(t) .$$

De representatie $x(t) = \phi_A(t)c$ van de oplossing van het BWP: $\dot{x} = Ax$, $x(0) = c$, kan men uitschrijven als

$$x(t) = c_1 \phi_1(t) + \dots + c_n \phi_n(t)$$

waar ϕ_1, \dots, ϕ_n de kolommen zijn van ϕ_A en c_1, \dots, c_n de componenten van c . De vectorfuncties ϕ_1, \dots, ϕ_n vormen dus een basis voor de oplossingsruimte van DV (1). Merk op dat deze basis gekarakteriseerd wordt door $\phi_k(0) = e_k$, waar e_k de k -de vector uit de standaardbasis is (dus de k -de kolom van I).

Stelling 3. $\phi_A(t)$ is inverteerbaar (niet-singulier) voor elke $t \in I$.

We geven van deze stelling drie bewijzen.

Bewijs 1. Stel dat voor zekere $t_0 \in I$ de matrix $\phi(t_0)$ singulier is. Dan is er een vector $c \neq 0$ met $\phi(t_0)c = 0$. De oplossing $x(t) = \phi(t)c$ van (1) is niet identiek nul ($x(0) = c \neq 0$) en valt samen met de nuloplossing op het tijdstip $t = t_0$: $x(t_0) = \phi(t_0)c = 0$. Dit is in strijd met de eenduidigheidsstelling (BWP(0, t_0) heeft één oplossing). \square

Bewijs 2. We bewijzen dat ϕ een inverse heeft door een DV te geven waaraan ϕ^{-1} voldoet. Beschouw de aan (1) en (2) geadjungeerde vergelijking

$$(3) \quad \dot{Y} = -YA .$$

Existentie en eenduidigheid van oplossingen van deze DV bij gegeven beginvoorwaarden volgen uit bovenstaande door transpositie: $\frac{d}{dt} (Y^T) = -A^T Y^T$.

Zij Ψ de FO van (3), d.w.z. de oplossing van (3) met $\Psi(0) = I$. Dan geldt $\Psi(0)\phi(0) = I$ en

$$\frac{d}{dt} (\Psi\phi) = \dot{\Psi}\phi + \Psi\dot{\phi} = -\Psi A\phi + \Psi A\phi = 0 ,$$

dus $\Psi(t)\phi(t) = I$ voor alle t , zodat $\Psi(t) = \phi(t)^{-1}$. \square

Opgave. Als $x(t)$ oplossing is van (1) en $\psi(t)$ is een rijvector die oplossing is van de geadjungeerde vergelijking:

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)A(t)$$

en als $x(0) \perp \psi(0)$ voor $t = 0$, dan geldt $\psi(t) \perp x(t)$ voor alle t .

Bewijs 3. We laten zien dat $\det \phi_A \neq 0$. De determinant $W_A(t) = \det \phi_A(t)$ heet de Wronskiaan of Wronskideterminant van (1). Het gestelde volgt uit:

Stelling 4.

$$(4) \quad W_A(t) = \det \Phi_A(t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau\right).$$

Hierbij is $\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (= som van de diagonaalelementen van A) het spoor (trace) van A. Voor het bewijs van stelling 4 maken we gebruik van een eigenschap over differentiatie van een determinant.

Lemma. Zij B(t) een $n \times n$ -matrix en C' functie van t. Dan is $\det B(t)$ C' en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det B(t) &= \begin{vmatrix} \dot{b}_{11}(t) & \dots & \dot{b}_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & \dots & b_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \dot{b}_{2n}(t) & \dots & \dot{b}_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots \\ &+ \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1}(t) & \dots & b_{n-1,n}(t) \\ \dot{b}_{n1}(t) & & \dot{b}_{nn}(t) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Opgave 1. Bewijs dit lemma (gebruik de definitieformule of geef een bewijs met volledige inductie door ontwikkeling naar een rij).

Bewijs van stelling 4. Zij $W = W_A$:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\varphi}_{k1} & \dots & \dot{\varphi}_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{kj} \varphi_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{kj} \varphi_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{kk}\varphi_{k1} & \cdots & a_{kk}\varphi_{kn} \\ \vdots & & \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \left(\sum_{k=1}^n a_{kk} \right) W = (\text{tr } A)W .$$

Uit $W(0) = I$ volgt het gestelde. □

Opmerking. Soms noemt men wel een willekeurige $n \times n$ -oplossing X van de matrix-vergelijking $\dot{X} = AX$ zo dat $X(t_0)$ niet-singulier is een fundamenteeloplossing. Laat zien dat voor zo'n oplossing geldt $X(t)$ is niet-singulier ($t \in I$). Merk op dat

$$\det X(t) = (\det X(t_0)) \exp \int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau .$$

De relatie $\frac{dW}{dt} = (\text{tr } A)W$ geldt nl. voor $W = \det X$, waar X een willekeurige $n \times n$ -matrixoplossing is.

Opgave 2. De oplossing van (1) met beginwaarde $x(t_0) = x_0$ is $x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0$ aangenomen dat $0 \in I$ en $t_0 \in I$.

3. De inhomogene vergelijking

De oplossing van de inhomogene vergelijking

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t)$$

kan worden uitgedrukt in de FO van de homogene DV. Laat x de oplossing zijn met beginwaarde $x(0) = x_0$. Zij $y = \Psi x$, waar $\Psi = \phi^{-1}$ (zie bewijs 2 van stelling 3). Dan geldt

$$\dot{y} = \dot{\Psi}x + \Psi\dot{x} = -\Psi Ax + \Psi Ax + \Psi u = \Psi u .$$

Dus

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \Psi(\tau)u(\tau)d\tau .$$

Daar $y(0) = x(0) = x_0$ en $x = \phi y$, zien we

$$(2) \quad x(t) = \phi(t)x_0 + \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau .$$

Merk op dat de eerste term in het rechterlid oplossing is van de homogene vergelijking met de gegeven beginvoorwaarde, terwijl de tweede term oplossing van de inhomogene vergelijking met beginwaarde $x(0) = 0$ is. Formule (2) wordt (om historische redenen) de variatie-van-constanten-formule genoemd.

Opgave 1. De oplossing van (1) met $x(t_0) = x_0$ wordt gegeven door

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t)\phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Voorbeeld. $\ddot{x} + x = u$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$. We herschrijven de homogene DV als een stelsel

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{array} \right\} \text{ dus } \dot{\underline{x}} = A\underline{x} \text{ met } \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ en } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De oplossing met $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ is $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$.

De oplossing met $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$.

De FO is dus

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Merk op dat

$$\det \phi(t) = 1 = \exp \int_0^t \text{tr } A \, d\tau.$$

De volgende formules zijn gemakkelijk te verifiëren (ga na):

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s), \quad \phi^{-1}(t) = \phi(-t).$$

Opgave 2. Als A constant is dan geldt $\phi_A(t)\phi_A(s) = \phi_A(t+s)$. (Aanwijzing: gebruik de eenduidigheidsstelling: $x(t) = \phi(t+s)x_0$, $y(t) := \phi(t)\phi(s)x_0$ zijn oplossingen, vgl. hoofdstuk I, § 5, VI.)

Opgave 3. Als A scheefsymmetrisch is ($A^T = -A$), dan is ϕ_A orthogonaal (zie bewijs 2 van stelling 3).

De oplossing van de inhomogene DV is

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u(\tau) \end{bmatrix} d\tau .$$

(Het inhomogene stelsel is $\dot{x} = Ax + \underline{u}$ met $\underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$.) Dus

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t + \int_0^t \sin(t-\tau)u(\tau)d\tau .$$

4. Vergelijkingen met constante coëfficiënten

We beschouwen de homogene matrixvergelijking

$$(1) \quad \dot{X} = AX, \quad X(0) = I$$

en we benaderen de oplossing door successieve approximatie:

$$X_{k+1}(t) = I + \int_0^t AX_k(\tau)d\tau, \quad X_0(t) = I$$

(zie bewijs van lemma 1 van hoofdstuk I § 3). We vinden

$$X_1(t) = I + At$$

$$X_2(t) = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2$$

$$\vdots$$

$$X_k(t) = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k .$$

We komen tot het vermoeden dat de rij X_k convergeert tot de FO van (1). We zouden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} A^j t^j$$

kunnen aangeven met

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j t^j .$$

Laten we eerst het begrip matrixreeks nader onderzoeken:

Definitie.

1) Zij A_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) een rij $n \times n$ -matrices. We zeggen dat $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ of $A_k \rightarrow A$ ($k \rightarrow \infty$) als $|A_k - A| \rightarrow 0$ (equivalent: als elk element van A_k naar het overeenkomstige element van A convergeert, zie I § 2, eigenschap van matrixnorm).

2) Zij $(A_k)_0^\infty$ een rij $n \times n$ -matrices. We zeggen dat $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ convergeert als $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N A_k = A$ bestaat.

Van een aantal eigenschappen over convergentie van reeksen van getallen bestaan analoga voor matrixreeksen:

Eigenschappen.

1) Als $\sum A_k$ convergeert, dan geldt $A_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

2) Als $\sum |A_k| < \infty$, dan convergeert $\sum A_k$.

3) Als $A_k(t)$ matrixfuncties zijn ($t \in I, k = 0, 1, \dots$) en $|A_k(t)| \leq M_k$ voor zekere M_k onafhankelijk van t en zodanig dat $\sum M_k < \infty$, dan convergeert de reeks $\sum A_k(t)$ uniform.

4) Als A_1, A_2, \dots een rij matrices zijn en $\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ convergeert voor $t = t_0$, dan convergeert de (matrix)machtrees voor elke $t \in \mathbb{C}$ met $|t| < t_0$. Men kan hier dus ook spreken over de convergentiestraal van een machtrees.

Als R de convergentiestraal is, dan is voor $|t| < R$ de functie $S(t) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ een analytische functie, d.w.z. $S_{ij}(t)$ is analytisch ($i, j = 1, \dots, n$) en

$$\dot{S}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k A_k t^{k-1}.$$

Men mag een machtrees dus termgewijs differentiëren.

We keren nu terug naar de FO van (1):

Stelling 5. Als A constant is, dan is

$$\phi_A(t) = e^{tA} := \sum_0^\infty \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Bewijs. De machtreeks convergeert voor elke t want $|A^k| \leq |A|^k$ en $\sum_0^\infty \frac{|t|^k |A|^k}{k!} < \infty$. Verder mag men de reeks termsgewijs differentiëren, zodat

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{k=1}^\infty \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = A e^{tA}. \quad \square$$

Opgave 1. Als $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ convergeert voor $|z| < R$ en A is een $n \times n$ -matrix met $|A| < R$, dan convergeert $f(A) := \sum_0^\infty a_k A^k$.

Een aantal eigenschappen van e^{tA} volgen uit § 2 en 3: e^{tA} is inverteerbaar; verder

$$(2) \quad e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}, \quad e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$$

(zie opgave 2 van § 3).

Opgaven.

- 2) Als $AB = BA$ dan geldt $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.
- 3) Als $e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}$ voor alle t, dan geldt $AB = BA$.
- 4) $e^{tI} = e^t I$.

Opmerking. Voor $n = 1$ is $\exp \int_0^t A(\tau) d\tau$ de FO van de niet-autonome DV $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Voor $n > 1$ en A constant is deze functie ook de FO. In het algemeen is echter $\exp \int_0^t A(\tau) d\tau$ niet de FO van $\dot{x} = A(t)x$. Men kan bewijzen dat dit wel geldt als A(t) en $\int_0^t A(\tau) d\tau$ commuteren voor alle t.

De variatie-van-constanten-formule voor de DV

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(0) = x_0$$

met A constant luidt:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} u(\tau) d\tau .$$

We geven nu enkele methoden om e^{tA} te berekenen:

i) Als A een diagonaalmatrix is:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dan is

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \quad (\text{volledige inductie})$$

en dus

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} .$$

ii) Als $A = T^{-1}BT$ dan geldt $A^k = T^{-1}B^kT$ (volledige inductie) en dus $e^{tA} = T^{-1}e^{tB}T$.

iii) Als A een Jordankastje is, d.w.z.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + N$$

waar

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

dan geldt

$$e^{At} = e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt} \quad (\text{zie opgave 1}).$$

Nu is

$$N^k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & k+1 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

en $N^k = 0$ voor $k \geq n$. Zodoende krijgen we

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}N^{n-1}t^{n-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}t^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & te^{\lambda t} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

iv) Als A blokdiagonaal is:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_m \end{bmatrix}$$

dan geldt

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tA_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tA_m} \end{bmatrix}.$$

Uit de matrixtheorie is de volgende stelling bekend:

Elke matrix is gelijksoortig met een (complexe) blokdiagonaalmatrix, waarvan de blokken Jordankastjes zijn.

D.w.z. $A = T^{-1}JT$, waar

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix}$$

en

$$J_k = \lambda_k I_k + N_k.$$

De I_k 's en N_k 's hebben afmetingen m_k , $\sum_{k=1}^m m_k = n$. De λ_k 's zijn de eigenwaarden van A. Hieruit vinden we

$$e^{tA} = T^{-1} e^{tJ} T,$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_m} \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ_k} = e^{t\lambda_k} e^{N_k t}.$$

Hiermee is de structuur van e^{tA} volkomen duidelijk. Van praktisch standpunt is deze algemene methode niet zo nuttig omdat in het algemeen de Jordannorm (d.i. de matrix J) moeilijk te berekenen valt. Wel kunnen we uit bovenstaande een aantal theoretische conclusies trekken:

Eigenschappen.

- 5) De elementen van de matrix e^{tA} zijn van de gedaante $p_k(t)e^{\lambda_k t}$ waar λ_k een eigenwaarde van A is en p_k een polynoom van de graad $m_k - 1$, waar m_k de afmeting is van het k -de Jordankastje (m_k is niet groter dan de multipliciteit van λ_k).
- 6) De eigenwaarden van e^{tA} zijn $e^{\mu t}$ waar μ eigenwaarde is van A .

De laatste eigenschap volgt uit het feit dat de eigenwaarden van een bovendriehoeksmatrix (dit is een matrix met $a_{ij} = 0$ voor $i > j$) gelijk zijn aan de diagonaalelementen. Dit laatste volgt uit het feit dat de determinant van zo'n matrix het product van de diagonaalelementen is.

Voor lage dimensies kan men e^{tA} vaak eenvoudig berekenen door A^n te schrijven als lineaire combinatie van I, A, \dots, A^{n-1} (dit kan op grond van de stelling van Cayley-Hamilton).

Voorbeeld:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = -I,$$

dus

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k A + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} (-1)^k I = \\ &= (\sin t)A + (\cos t)I = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(zie ook het voorbeeld in § 3).

Tenslotte merken we op dat we e^{At} ook kunnen berekenen door achter-eenvolgens de oplossingen van $\dot{x} = Ax$ te berekenen met $\dot{x} = e_1, e_2, \dots, e_n$ (zie het voorbeeld in § 3).

Opgave 5. Bereken e^{At} , waar A wordt gegeven door

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Vergelijkingen met periodieke coëfficiënten

Een vergelijking van de vorm

$$\dot{x}(t) = P(t)x(t)$$

waar $P(t)$ een periode $T > 0$ heeft (dus $P(t+T) = P(t)$ voor alle t) heet een lineaire DV met periodieke coëfficiënten. De FO van zo'n DV heeft een speciale gedaante. Als nl. $\phi(t)$ de FO is, dan is ook $Y(t) = \phi(t+T)$ oplossing van de matrixvergelijking $\dot{Y} = PY$ (vgl. Hoofdstuk I, § 5, IV). Op grond van stelling 2 (§ 2) volgt hieruit dat $Y(t) = \phi(t)Y(0)$, dus

$$(1) \quad \phi(t+T) = \phi(t)\phi(T) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Nu geldt dat $\phi(T) \neq 0$ (stelling 3). Volgens een bekende stelling uit de matrixtheorie bestaat er daarom een (eventueel complexe) matrix B_1 , zodat $e^{B_1 T} = \phi(T)$ (zie [CL], [B], [R], een bewijs zal gegeven worden in de appendix van dit hoofdstuk. Daar zal ook worden bewezen dat men B_1 zo kan kiezen dat de eigenwaarden van B_1 gelijk zijn aan $\mu_i = \log \lambda_i$, waar λ_i eigenwaarde van $\phi(T)$ is en \log de hoofdwaaarde logaritmie voorstelt). Zij $B := B_1/T$. Dan geldt $e^{BT} = \phi(T)$. Definiëren we $Q(t) := \phi(t)e^{-tB}$ dan geldt

$$Q(t+T) = \phi(t+T)e^{-(t+T)B} = \phi(t)\phi(T)e^{-TB}e^{-tB} = \phi(t)e^{-tB} = Q(t).$$

We zien dat Q periodiek is met periode T :

Stelling van Floquet. Als $P(t)$ periode T heeft, dan heeft ϕ_P de gedaante

$$\phi_P(t) = Q(t)e^{tB}$$

waar Q een niet-singuliere matrix met periode T en B een constante matrix is.

Opmerking. Zowel Q als B kunnen complex zijn.

De eigenwaarden μ_i van B worden karakteristieke exponenten van P genoemd, deze zijn bepaald op een term $2k\pi i$ na. De eigenwaarden λ_i van $\phi(T)$ heten de karakteristieke multiplicatoren van P . Er geldt $\mu_i = (\log \lambda_i)/T$.

Opgave 1. Als P periode T heeft en oneven is ($P(-t) = -P(t)$) dan heeft elke oplossing van de DV $\dot{x} = Px$ periode $2T$. (Aanwijzing: Bewijs dat $\phi_P(t) = \phi_P(-t)$).

Opgave 2. Bewijs dat in de Stelling van Floquet

$$\dot{Q}(t) = P(t)Q(t) - Q(t)B .$$

6. Randwaardeproblemen

We beschouwen het volgende randwaardeprobleem:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + u(t) \\ Px(0) + Qx(T) &= c \end{aligned} \right\} \text{ (RWP)}$$

waar P en Q $n \times n$ matrices zijn.

Opgave. Formuleer het randwaardeprobleem

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0, \quad x(0) = a, \quad x(1) = b$$

in bovenstaande vorm (d.w.z. bepaal A , u , P , Q , c).

We beschouwen eerst het homogene probleem, d.w.z. het geval $u(t) = 0$, $c = 0$. Dan luidt RWP:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad Px(0) + Qx(T) = 0 .$$

De oplossing van de DV is $x(t) = \phi(t)x(0)$. Substitueren we dit in de randvoorwaarde (vgl. Hoofdstuk I, § 5, V), dan vinden we de volgende voorwaarde voor $x(0)$:

$$Mx(0) = 0$$

waar

$$M := P + Q\phi(T) .$$

We zien dat er een niet-triviale oplossing van het homogene RWP is dan en slechts dan als M singulier is.

Beschouw nu de algemene inhomogene vergelijking. De oplossing van de DV wordt gegeven door ($\phi = \phi_A$):

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau .$$

We vinden zo de volgende vergelijking voor $x(0)$:

$$Mx(0) + \int_0^T Q\phi(T)\phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau = c .$$

We zien dat er een e nduidige oplossing van RWP bestaat, dan en slechts dan als M niet-singulier is. Als M singulier is, dan bestaat er een oplossing, dan en slechts dan als de vector

$$b := c - \int_0^T Q\phi(T)\phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau$$

in de beeldruimte van M ligt. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is van de gedaante $x_p + x_{\text{hom}}$, waar x_p een particuliere oplossing van het RWP is, terwijl x_{hom} de algemene oplossing van het homogene RWP is.

Als M niet-singulier is, dan wordt de oplossing gegeven door

$$x(t) = \phi(t)M^{-1}b + \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau$$

dus

$$x(t) = \phi(t)M^{-1}c + \int_0^T G(t,\tau)u(\tau)d\tau .$$

Hierbij is

$$G(t, \tau) := \Phi(t) \{ h(t-\tau)I - M^{-1}Q\Phi(T) \} \Phi^{-1}(\tau)$$

de Greense functie, waar $h(s) = 1$ als $s \geq 0$, $h(s) = 0$ voor $s < 0$.

Met behulp van deze formule hebben we de oplossing expliciet uitgedrukt in de beginwaarde c en in de functie u .

We beschouwen nu een periodieke DV:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = P(t)x(t) + q(t)$$

waar P en q periode T hebben, en vragen ons af of er oplossingen bestaan met periode T . Volgens Hoofdstuk I, § 5, IV betekent dit dat we oplossingen zoeken met $x(0) = x(T)$. We kunnen dit probleem formuleren als een RWP met $A(t) = P(t)$, $u(t) = q(t)$, $P = I$, $Q = -I$, $c = 0$. We zien dat de homogene vergelijking ($q(t) = 0$) dan en slechts dan een niet-triviale oplossing heeft met periode T als $I - \Phi_P(T)$ singulier is, d.w.z. als 1 een eigenwaarde is van $\Phi_P(T)$.

Het inhomogene stelsel heeft een periodieke oplossing als

$$b := \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau$$

in de beeldruimte van $M := I - \Phi(T)$ ligt. Hieraan is voor elke functie u voldaan als 1 geen eigenwaarde van $\Phi(T)$ is. In het algemeen luidt de voorwaarde

$$\eta M = 0 \Rightarrow \eta b = 0$$

voor elke n -dimensionale rijvector η . Uitgeschreven

$$\eta = \eta\Phi(T) \Rightarrow \int_0^T \eta\Phi(T)\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau = 0 .$$

We voeren in de functie

$$\psi(t) := \eta\Phi(T)\Phi^{-1}(t)$$

($\psi(t)$ is een rijvector voor elke t). Uit § 2 (bewijs van stelling 3) volgt dat

$$(2) \quad \dot{\psi} = -\psi P ,$$

d.w.z. ψ voldoet aan de geadjungeerde vergelijking. We zien dat $\eta = \psi(T)$, $\eta\Phi(T) = \psi(0)$. Zodoende vinden we:

Stelling 6. Het stelsel (1) heeft een oplossing met periode T dan en slechts dan als

$$\int_0^T \psi(t)q(t)dt = 0$$

geldt voor elke oplossing ψ met periode T van de geadjungeerde vergelijking (2).

7. Vergelijkingen van de tweede orde

We specialiseren de resultaten van dit hoofdstuk tot een lineaire DV van de tweede orde:

$$(1) \quad \ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0 .$$

Het hiermee corresponderende systeem luidt

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -qx - py \end{cases}$$

of

$$\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} , \quad \text{met} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} , \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

I. Als ξ en η oplossingen van (1) zijn, dan zijn $\begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}$ oplossingen van (2). De wronskiaan van deze oplossingen is

$$(3) \quad W(t) = W_{\xi\eta}(t) = \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta .$$

Op grond van § 2 geldt: $\frac{dW}{dt} = (\text{tr } A)W = -p(t)W$. Dus

$$(4) \quad W(t) = W(0) \exp \left\{ - \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} .$$

hetgeen ook gemakkelijk direct te verifiëren valt.

Met behulp van W kunnen we η berekenen zodra we ξ kennen en $\xi \neq 0$. Vergelijking (3) geeft immers een lineaire DV van de eerste orde voor η . We vinden

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{\xi} \right) = \frac{W}{\xi^2}$$

en dus

$$(6) \quad \eta(t) = \xi(t) \left(\int_0^t \frac{W(\tau)}{\xi^2(\tau)} d\tau + c \right) .$$

Opgave 1. We noemen twee functies ξ en η onafhankelijk op een interval I als er geen getallen λ, μ bestaan met $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, $\lambda\xi(t) + \mu\eta(t) = 0$ voor $t \in I$. Laat zien dat twee oplossingen ξ en η van (1) onafhankelijk zijn dan en slechts dan als $W_{\xi\eta}(0) \neq 0$.

Met behulp van (6) kunnen we dus een oplossing η vinden zodra we één oplossing $\xi \neq 0$ hebben. (We kunnen in (3) bijv. $W(0) = 1$, $c = 0$ kiezen. Waarom zijn de oplossingen ξ, η dan onafhankelijk?) Als we eenmaal twee oplossingen hebben gevonden, kunnen we elke oplossing van de homogene en de inhomogene DV vinden d.m.v. integratie. (Zie ook college Toegepaste Wiskunde I.)

Opgave 2. Als ξ en η onafhankelijke oplossingen zijn van (1) dan wordt de algemene oplossing van

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = u(t)$$

gegeven door

$$x(t) = a\xi(t) + b\eta(t) + \int_0^t \{ \xi(\tau)\eta(t) - \xi(t)\eta(\tau) \} \frac{u(\tau)}{W(\tau)} d\tau .$$

Als $a = b = 0$ en

$$\eta(t) = \xi(t) \int_0^t \frac{W(\sigma)d\sigma}{\xi^2(\sigma)} ,$$

dan geldt

$$x(t) = \xi(t) \int_0^t \frac{W(\sigma)}{\xi^2(\sigma)} d\sigma \int_0^\sigma \frac{\xi(\tau)}{W(\tau)} u(\tau) d\tau .$$

II. We geven nu enkele algemene eigenschappen van nulpunten van oplossingen. Het is duidelijk dat alle nulpunten van een niet-triviale oplossing enkelvoudig zijn. Als nl. $\xi(t_0) = \dot{\xi}(t_0) = 0$, dan geldt $\xi(t) = 0$ voor alle t op grond van de eenduidigheidsstelling. Twee onafhankelijke oplossingen hebben verschillende nulpunten. Als t_0 nl. een gemeenschappelijk nulpunt van de oplossingen ξ en η is, dan geldt $W_{\xi\eta}(t_0) = 0$. In een gesloten eindig interval I heeft een niet-triviale oplossing hoogstens eindig veel nulpunten. Anders zou er nl. een convergente rij t_1, t_2, \dots in I bestaan met $\xi(t_i) = 0$. Voor de limiet $t_0 = \lim t_i$ zou dan gelden $\xi(t_0) = \dot{\xi}(t_0) = 0$ (ga na).

Alterneringsstelling. Als ξ en η onafhankelijke oplossingen zijn, dan liggen de nulpunten van ξ en η om en om (d.w.z. tussen twee opeenvolgende nulpunten van η ligt precies één nulpunt van ξ).

Bewijs. Laat $t_0 < t_1$, $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$, $\eta(t) > 0$ voor $t_0 < t < t_1$ (zonder verlies van algemeenheid) en zij ξ een oplossing met $\xi(t) > 0$ voor $t_0 \leq t \leq t_1$ (ook z.v.v.a.). Dan geldt (5) op $[t_0, t_1]$ zodat

$$0 = \frac{\eta(t_1)}{\xi(t_1)} - \frac{\eta(t_0)}{\xi(t_0)} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{W_{\xi\eta}(\tau)}{\xi^2(\tau)} d\tau > 0$$

hetgeen een tegenspraak is. □

Voorbeeld. $\cos t$ en $\sin t$ als oplossingen van $\ddot{x} + x = 0$.

III. De Hillvergelijking luidt

$$(7) \quad \ddot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

waar q periode T heeft. Laat φ_1, φ_2 oplossingen zijn met

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \dot{\varphi}_1(0) & \dot{\varphi}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zodat

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix}$$

de FO is. We merken op dat $W(t) = \det \phi(t) = 1$ voor alle t (zie (4)). Laat λ_1, λ_2 de eigenwaarden zijn van $\phi(T)$. Dan geldt $\lambda_1 \lambda_2 = \det \phi(T) = 1$. Op grond van de stelling van Floquet kunnen we schrijven $\phi(t) = Q(t)e^{Bt}$ waar Q een periodieke niet-singuliere matrix is en B een constante matrix, waarvan de eigenwaarden gelijk zijn aan $\mu_i = \frac{1}{T} \log \lambda_i$ ($i = 1, 2$). We zien dat $\mu_1 + \mu_2 = 0$. We onderscheiden de volgende gevallen:

- 1) Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan is de algemene oplossing van (7) gelijk aan

$$x(t) = \alpha q_1(t)e^{\mu t} + \beta q_2(t)e^{-\mu t}$$

waar q_1 en q_2 periodieke functies zijn ($\mu = \mu_1 = -\mu_2$).

- 2) Als $\lambda_1 = \lambda_2$ dan is $\lambda_1 = \pm 1$ en $\mu_1 = \mu_2 = 0$ of $\mu_1 = \mu_2 = \pi i$. Als B diagonaliseerbaar is (hetgeen alleen het geval is als $\phi(T) = \pm I$, zodat $B = 0$ resp. $\pi i I/T$) is de algemene oplossing van (7) van de gedaante

$$x(t) = \alpha q_1(t) + \beta q_2(t)$$

waar q_1 en q_2 periode T (als $\lambda = 1$) en $2T$ (als $\lambda = -1$) hebben ($e^{\pi i t/T}$ heeft periode $2T$). Als B niet diagonaliseerbaar is, dan is de algemene oplossing van de gedaante

$$x(t) = \alpha q_1(t) + \beta t q_2(t)$$

waar q_1 en q_2 periode T (als $\lambda = 1$) en $2T$ (als $\lambda = -1$) hebben.

De getallen λ_1 en λ_2 zijn oplossingen van de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0$$

waar

$$a = -\frac{1}{2}(\phi_1(T) + \dot{\phi}_2(T)) .$$

8. Opgaven

i) Als $\hat{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & B(t) \end{bmatrix}$, dan $\phi_{\hat{A}}(t) = \begin{bmatrix} \phi_A(t) & 0 \\ 0 & \phi_B(t) \end{bmatrix}$.

ii) Als $\hat{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & B(t) \end{bmatrix}$, dan $\phi_{\hat{A}}(t) = \begin{bmatrix} \phi_A(t) & \psi(t) \\ 0 & \phi_B(t) \end{bmatrix}$

waar

$$\psi(t) := \int_0^t \phi_A(t) \phi_A^{-1}(\tau) C(\tau) \phi_B(\tau) d\tau .$$

iii) $\exp \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^A & \int_0^1 e^{(1-\tau)A} C e^{\tau B} d\tau \\ 0 & e^B \end{bmatrix} .$

iv) Als $A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & b(t) \end{bmatrix}$, dan $\phi_A(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ 0 & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix}$

waar

$$\varphi_{11}(t) = \exp \int_0^t a(\tau) d\tau$$

$$\varphi_{22}(t) = \exp \int_0^t b(\tau) d\tau$$

$$\varphi_{12}(t) = \int_0^t c(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t a(s) ds + \int_0^{\tau} b(s) ds \right\} d\tau .$$

Anderzijds

$$\exp \int_0^t A(s) ds = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \psi_{12}(t) \\ 0 & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

met

$$\psi_{12}(t) = \theta \left(\int_0^t a(s) ds, \int_0^t b(s) ds \right) \int_0^t c(s) ds$$

waar

$$\theta(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta} & \text{als } \alpha \neq \beta \\ e^\alpha & \text{als } \alpha = \beta \end{cases}$$

Geef een voorbeeld waarbij $\phi_A(t) \neq \exp \int_0^t A(s) ds$.

2. i) Als $A(t)B = BA(t)$ voor alle $t \geq 0$, dan geldt

$$\phi_A(t)B = B\phi_A(t) \quad \text{voor } t \geq 0.$$

ii) Als $A(t)B(s) = B(s)A(t)$ voor $t, s \geq 0$, dan geldt

$$\phi_A(t)\phi_B(s) = \phi_B(s)\phi_A(t) \quad \text{voor } t, s \geq 0.$$

3. i) De vergelijking van Euler luidt

$$t\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Bewijs dat de FO met begintijd $t_0 = 1$ gegeven wordt door

$$\phi(t) = t^A := e^{A \log t}.$$

Geef de gedaante van t^A d.m.v. Jordanvormen. Wat is de algemene gedaante van de elementen van $\phi(t)$?

ii) Herleid de scalaire Eulervergelijking van de n -de orde

$$t^n x^{(n)}(t) + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = 0$$

tot een systeem van de vorm $t\dot{x}(t) = Ax(t)$.

iii) Bepaal de oplossing van

$$\hat{x} + 4t^{-1}\dot{x} + 2t^{-2}x = t^{-1} \sin t \quad (t > 0)$$

met $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 0$.

iv) Schrijf de oplossing op van

$$t\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t), \quad x(1) = c.$$

v) Wat is de FO van $\dot{x}(t) = f(t)Ax$, waar f een continue scalaire functie is?

4. i) Als $a_{ij}(t) \geq 0$ ($t \geq 0$, $i \neq j$) en $x(0) \geq 0$ (ongelijkheden gelden elementsgewijs), dan geldt voor de oplossing $x(t)$ van de DV: $\dot{x} = Ax$ dat $x(t) \geq 0$ ($t \geq 0$).

ii) $e^{At} \geq 0$ voor alle $t \geq 0 \Leftrightarrow a_{ij} \geq 0$ voor $i \neq j$.

5. Als $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \end{bmatrix}$ en $\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$ oplossingen zijn van een DV van de vorm $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, waar A een constante 2×2 -matrix is, bepaal dan A .

6. Bepaal de FO van de homogene DV van

$$\dot{x} = 2x + y + \cos t$$

$$\dot{y} = 3x + 4y + t.$$

Bepaal met behulp hiervan de oplossing van deze DV met $(x(0), y(0)) = (1, 1)$.

7. Bepaal $\phi_A(t)$, waar $A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{bmatrix}$.

8. Als $A(t) = e^{-Ct} B e^{Ct}$, dan is $\phi_A = e^{-Ct} e^{(B+C)t}$.

9. Als A niet-singulier is, dan geldt

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(e^{At} - I).$$

10. i) De oplossing van de matrix-DV

$$\dot{X} = AX + XB$$

met $X(0) = C$ wordt gegeven door

$$X(t) = e^{At} C e^{tB}.$$

ii) Als $P(t) = \int_0^t e^{A\tau} Q e^{\tau B} d\tau$, dan geldt $AP + PB = e^{At} Q e^{Bt} - Q$.

11. Laat $X(t)$ differentieerbaar zijn, $X(0) = I$, $X(t+s) = X(t)X(s)$ voor alle t en s . Dan bestaat er een matrix A zodat $X(t) = e^{At}$.

12. i) Bewijs dat $\frac{d}{dt} A^{-1} = -A^{-1} \dot{A} A^{-1}$.

ii) Bepaal ϕ_A waar $A(t) = -(I - tB)^{-1} B$ (aanwijzing: bereken $\ddot{\phi}_A$).

13. i) Laat $p, q \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R})$ waarbij I een interval is. Herleid de DV

$$\ddot{x} + px + qx = 0$$

tot een DV van de vorm $\ddot{y} + ry = 0$, door de substitutie $x = uy$ met geschikte u . Druk r uit in p en q .

ii) Laat $a, b, c \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R})$, $a > 0$. Dan geldt: x is een oplossing van de Riccativergelijking

$$\dot{x} = ax^2 + bx + c$$

dan en slechts dan als $y := \exp\{-\int_0^t a(\tau)x(\tau)d\tau\}$ oplossing is van $\ddot{y} - (b + \dot{a}/a)\ddot{y} + acy = 0$.

14. Bepaal de periodieke oplossingen van de DV's:

i) $\dot{x} = (1 + \cos t)x + \sin t$

ii) $\dot{x} = 1 + x \cos t$

iii) $\dot{x} = x \cos t + \cos t$.

15. Als de DV $\dot{x}(t) = P(t)x(t) + q(t)$, waarbij P en q periode T hebben, een op $[0, \infty)$ begrensde oplossing heeft, dan heeft zij ook een periodieke oplossing.

16. Als $f \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, geef dan een DV waaraan

$$x(t) := \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n$$

voldoet. Schrijf deze DV in vectorvorm: $\dot{x} = Ax + u$ en bepaal e^{tA} .

Geef nu een representatie van $x(t)$ met behulp van de variatie-van-constanten formule.

Appendix. Bovendriehoeksmatrices, de logaritmie van een matrix

Men kan e^{tA} ook berekenen als men een bovendriehoeksmatrix heeft die gelijksoortig is met A .

Stelling 7. Elke vierkante matrix is gelijksoortig met een (complexe) bovendriehoeksmatrix (=: BDM).

Bewijs. We gebruiken volledige inductie naar de dimensie. Een 1×1 -matrix is altijd een BDM. Laat het gestelde bewezen zijn voor dimensie $n-1$ en zij A een $n \times n$ -matrix. Laat p een (complexe) eigenvector zijn bij een eigenwaarde λ , dus $p \neq 0$ en $Ap = \lambda p$. Dan bestaat er een basis in \mathbb{R}^n van de gedaante g_1, \dots, g_n met $g_1 = p$. De gedaante van A t.a.v. deze basis is:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda & c^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

d.w.z. er bestaat een niet-singuliere $n \times n$ matrix T_1 met

$$\hat{A} = T_1^{-1} A T_1 .$$

Hier is c^T een $(n-1)$ -rijvector en B een $(n-1) \times (n-1)$ -matrix. Volgens de inductieveronderstelling bestaat er een niet-singuliere $(n-1) \times (n-1)$ -matrix S zodat $D_0 := S^{-1} B S$ een $(n-1) \times (n-1)$ -BDM is. Als we

$$T_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

definiëren, dan zien we dat $D := T_2^{-1} \hat{A} T_2$ een $n \times n$ -BDM is. Het gestelde volgt nu uit $D = T^{-1} A T$, waar $T = T_2 T_1$. □

N.B. De BDM-vorm van een matrix is niet eenduidig!

We kunnen de BDM vorm van een matrix A gebruiken om e^{tA} te berekenen. Als $A = T D T^{-1}$ dan is $e^{tA} = T e^{tD} T^{-1}$, zodat we slechts e^{tD} hoeven te berekenen waar D een BDM is. We schrijven de DV uit

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + d_{12} x_2 + \dots + d_{1n} x_n \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + \dots + d_{2n} x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n\end{aligned}$$

en we lossen deze vergelijkingen successievelijk op, te beginnen met de laatste. Als $x(0) = c = [c_1, \dots, c_n]'$, dan geldt

$$x_n(t) = e^{\lambda_n t} c_n$$

zodat de $(n-1)$ -de vergelijking luidt

$$\dot{x}_{n-1} = \lambda_{n-1} x_{n-1} + e^{\lambda_n t} c_n$$

met als oplossing (bijv. met de variatie-van-constanten-formule):

$$x_{n-1}(t) = e^{\lambda_{n-1} t} c_{n-1} + \int_0^t e^{\lambda_{n-1}(t-\tau)} e^{\lambda_n \tau} c_n d\tau.$$

Als $\lambda_{n-1} \neq \lambda_n$ dan krijgen we een functie van de gedaante

$$x_{n-1} = \alpha e^{\lambda_{n-1} t} + \beta e^{\lambda_n t}.$$

Als $\lambda_{n-1} = \lambda_n$:

$$x_{n-1} = \alpha e^{\lambda_n t} + \beta t e^{\lambda_n t}.$$

Als we zo doorgaan, dan vinden we tenslotte dat de componenten van $x(t)$ de gedaante $x_k = \sum_{j=k}^n p_j(t) e^{\lambda_j t}$ hebben, waar de polynomen p_j een graad kleiner dan de multipliciteit van λ_j hebben.

We bewijzen dat er voor elke inverteerbare matrix P er een matrix A bestaat met $e^A = P$. We merken op dat $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT$ en dat e^A een BDM is als A een BDM is (BDM = bovendriehoeksmatrix) (ga na). Derhalve volgt het gestelde uit het volgende resultaat:

Stelling. Als P een (complexe) reguliere $n \times n$ -BDM is, bestaat er een eenduidige (complexe) BDM A met $e^A = P$ en zodanig dat $a_{ii} = \log p_{ii}$ waar \log de hoofdwaaarde voorstelt.

Bewijs. We gebruiken volledige inductie naar n . Als $n = 1$ is het gestelde triviaal. Zij nu P een reguliere $n \times n$ -BDM. We splitsen P in blokmatrices

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} n-1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Q & r \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \end{matrix}$$

waar Q een reguliere $(n-1) \times (n-1)$ -BDM, r een $(n-1)$ -vector en σ een getal $\neq 0$ is. Als we de gezochte matrix A op analoge wijze splitsen:

$$A = \begin{bmatrix} B & c \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

dan geldt op grond van opgave 1 iii) van § 8

$$e^A = \begin{bmatrix} e^B & \int_0^1 e^{B(1-\tau)} c e^{\delta\tau} d\tau \\ 0 & e^\delta \end{bmatrix}.$$

De voorwaarde $e^A = P$ wordt dus

$$e^B = Q, \quad e^\delta = \sigma$$

$$\int_0^1 e^{B(1-\tau)+\delta\tau I} d\tau c = r.$$

De BDM B kan hieruit op grond van de inductieveronderstelling eenduidig bepaald worden zodanig dat $b_{ii} = \log q_{ii}$. Ook $\delta = \log \sigma$ ligt hierdoor eenduidig

vast. We zien dat ook c eenduidig bepaald kan worden als $\int_0^1 e^{B(1-\tau)+\delta\tau I} d\tau$ niet-singulier is, dus als

$$M := \int_0^1 e^{(\delta I - B)\tau} d\tau$$

niet-singulier is. De integrand is een BDM met als i -de diagonaalelement $e^{(\delta - b_{ii})\tau}$, zodat M een BDM is met

$$m_{ii} = \int_0^1 e^{(\delta - b_{ii})\tau} d\tau .$$

Als $b_{ii} = \delta$ dan is $m_{ii} = 1$, als $b_{ii} \neq \delta$ dan is

$$m_{ii} = (e^{(\delta - b_{ii})} - 1) / (\delta - b_{ii}) \neq 0 ,$$

omdat $|\delta - b_{ii}| < 2\pi$ (δ en b_{ii} zijn hoofdwaardelogarithmen). Blijkbaar is M niet-singulier. □

Opmerking. We zien dat A reëel is als P reëel is.

Opgave. Als Q een niet-singuliere matrix is, bestaat er een matrix P met $P^2 = Q$.

HOOFDSTUK III. STABILITEIT

1. Differentieerbaarheid van de oplossing t.a.v. beginwaarden

Zij $f \in C(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n)$, waar $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ een gebied is en zij $x \mapsto f(x, t)$ twee keer continu differentieerbaar voor elke t . We geven de oplossing van BWP($f, x_0, 0$) met $\xi(t, x_0)$ aan (i.p.v. met $\xi(t, x_0, 0)$ zoals in Hoofdstuk I) en we onderzoeken de differentieerbaarheid van ξ als functie van x_0 bij vaste t . Laat voor $x_0 = c$ de oplossing gedefinieerd zijn op $[0, T]$, waar $T > 0$. Op grond van Hoofdstuk 1, § 4 is er een omgeving \mathcal{N} van c , zodat $\xi(t, x_0)$ is gedefinieerd voor $0 \leq t \leq T$, $x_0 \in \mathcal{N}$. Onder deze omstandigheden geldt:

Stelling 1. De functie $x_0 \mapsto \xi(t, x_0)$ is continu differentieerbaar in \mathcal{N} voor elke $t \in [0, T]$. De functionaalmatrix $Y(t) := \xi_{x_0}(t, x_0)$ is de FO van de DV

$$(1) \quad \dot{y}(t) = A(t)y(t)$$

waar $A(t) := f_x(\xi(t, x_0), t)$.

Bewijs. We bewijzen de differentieerbaarheid in $x_0 = c$. We beschouwen de functie $v(t) := \xi(t, x_0) - \bar{x}(t)$, waar $\bar{x}(t) := \xi(t, c)$. De functie v is oplossing van de DV

$$(2) \quad \dot{v} = g(v, t)$$

waar

$$g(v, t) := f(\bar{x}(t) + v, t) - f(\bar{x}(t), t).$$

We merken op dat $g(0, t) = 0$ en dat $\tilde{v}(t) = 0$ oplossing is van (2) op $[0, T]$. Er geldt

$$g(v, t) = A(t)v + h(v, t)$$

waar $h(v, t) = o(v)$ uniform voor $0 \leq t \leq T$, zeg

$$|h(v, t)| \leq \varphi(v)|v|$$

waar $\varphi(v) \rightarrow 0$ ($v \rightarrow 0$).

Uit de relaties

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t) + h(v(t), t), \quad v(0) = v_0 := x_0 - c$$

volgt met behulp van de variatie-van-constanten-formule:

$$(3) \quad v(t) = \phi_A(t)v_0 + \int_0^t \phi_A(t)\phi_A^{-1}(\tau)h(v(\tau),\tau)d\tau.$$

Op $[0,T]$ zijn ϕ_A en ϕ_A^{-1} begrensd, zeg $|\phi_A(t)| \leq M$, $|\phi_A(t)\phi_A^{-1}(\tau)| \leq M$. Dan vinden we

$$|v(t)| \leq M|v_0| + \int_0^t M\varphi(v)|v(\tau)|d\tau.$$

Als we $\delta > 0$ zo klein kiezen dat $|\varphi(v)| \leq \epsilon$ voor $|v_0| \leq \delta$ (zie Hoofdstuk I, § 4), dan kunnen we het lemma van Gronwall toepassen:

$$|v(t)| \leq M|v_0| \exp \epsilon Mt \quad (|v_0| \leq \delta, 0 \leq t \leq T).$$

Substitueren we dit in het rechterlid van de ongelijkheid

$$|v(t) - \phi_A(t)v_0| \leq \int_0^t M\varphi(v)|v(\tau)|d\tau$$

dan zien we $v(t) - \phi_A v_0 = o(v_0)$. Hieruit volgt dat $x_0 \mapsto \xi(t, x_0)$ differentieerbaar is in c . In plaats van c kunnen we dit afleiden voor elke $x_0 \in \mathcal{K}$.

Dat $\xi(t, x_0)$ continu differentieerbaar is volgt uit het feit dat $\xi(t, x_0)$ en dus $A(t) = f_x(\xi(t, x_0))$ Lipschitz-continu is t.a.v. de parameter x_0 , zodat ook $Y(t)$ continu van x afhangt (zie I, § 4, stelling 2 en gevolg). \square

De DV (2) heet de gevarieerde of gelineariseerde DV van

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

om de oplossing $\xi(t, x_0)$.

Men kan natuurlijk ook differentieerbaarheid t.a.v. parameters in een DV hieruit afleiden. Als bijv. het BWP

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu, t) \\ x(0) = a(\mu) \end{cases}$$

(waar ϵ een scalaire parameter is en $\mu \mapsto a(\mu)$ en $(x, \mu) \mapsto f(x, \mu, t)$ C^1 zijn) een oplossing heeft op $[0, T]$ voor $\mu = 0$, dan is er een $\mu_0 > 0$ zodat er ook een oplossing $\xi(t, \mu)$ is voor $|\mu| < \mu_0$. Verder is $\mu \mapsto \xi(t, \mu)$ continu diffe-

rentieerbaar en

$$\eta(t, \mu) := \xi_{\mu}(t, \mu)$$

voldoet aan

$$\dot{\eta}(t, \mu) = A(t, \mu)\eta(t, \mu) + u(t, \mu)$$

$$\eta(0, \mu) = da/d\mu$$

waar

$$A(t, \mu) := f_x(\xi(t, \mu), \mu, t)$$

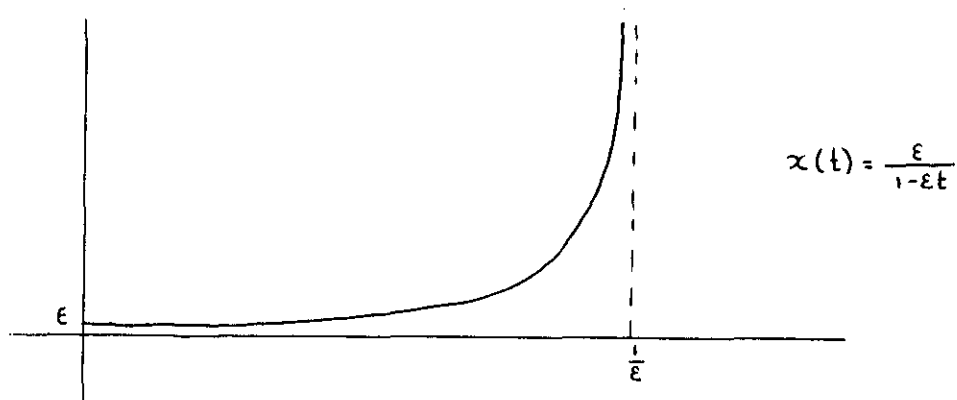
$$u(t, \mu) := f_{\mu}(\xi(t, \mu), \mu, t)$$

(differentiatie naar het eerste resp. derde argument van de functie f). Ga dit na.

2. Definitie van stabiliteit

De eigenschappen over het gedrag van oplossingen van een DV bij verandering van beginwaarde of parameter gegeven in § 1 en in Hoofdstuk I, § 4, zijn alleen geldig op eindige intervallen. Bij vele praktische problemen is het juist van belang het gedrag van de oplossing te kennen voor grote T . We geven een paar voorbeelden:

Voorbeeld 1. $\dot{x} = x^2$. De oplossing met $x_0 = 0$ is identiek gelijk aan nul. Hoe klein ook $x_0 > 0$ wordt genomen, de oplossing zal op een gegeven moment exploderen:



Voorbeeld 2. $\dot{x} = x$. Ook hier is $\xi(t, 0) = 0$. Voor $x_0 \neq 0$ geldt $|\xi(t, x_0)| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Hoewel er geen explosie optreedt, wordt de benadering van $\xi(t, x_0)$ door $\xi(t, 0)$ steeds slechter als $t \rightarrow \infty$.

Voorbeeld 3. $\dot{x} = -x$. Hier geldt $\xi(t, x_0) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) voor alle x_0 . De nuloplossing is op $[0, \infty)$ een goede benadering voor $\xi(t, \epsilon)$ als ϵ klein is.

De DV in het laatste voorbeeld zullen we stabiel noemen, terwijl de andere DV's instabiel heten. In feite zullen we vier soorten stabiliteit onderscheiden. We gebruiken de volgende notatie:

$$\mathbb{B} := \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\},$$

$$\delta\mathbb{B} := \{\delta x \mid x \in \mathbb{B}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \delta\} \quad \text{voor } \delta > 0.$$

Definitie. Laat $f \in \text{Lip}_x(\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ waar $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \times [a, \infty)$, en $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ een gebied is dat de oorsprong bevat. Zij $f(0, t) = 0$ voor alle $t \geq a$, zodat $\xi(t, 0, t_0) = 0$ voor alle $t, t_0 \geq a$. De triviale oplossing van de DV

$$\dot{x} = f(x, t)$$

heet

i) stabiel (\mathcal{S}) (of stabiel in de zin van Liapunov) als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in \delta\mathbb{B} \quad \forall t \geq t_0 \quad \{t^+(x_0, t_0) = \infty, |\xi(t, x_0, t_0)| \leq \epsilon\}.$$

ii) asymptotisch stabiel (\mathcal{AS}) als (\mathcal{S}) én

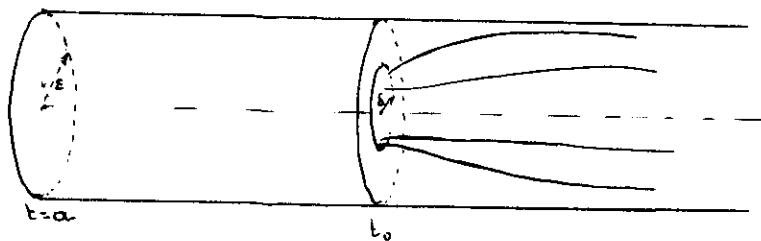
$$\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in \delta\mathbb{B} \quad \{\xi(t, x_0, t_0) \rightarrow 0 \text{ (} t \rightarrow \infty)\}.$$

iii) uniform stabiel (\mathcal{US}) als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \forall x_0 \in \delta\mathbb{B} \quad \forall t \geq t_0 \quad \{t^+(x_0, t_0) = \infty, |\xi(t, x_0, t_0)| \leq \epsilon\}.$$

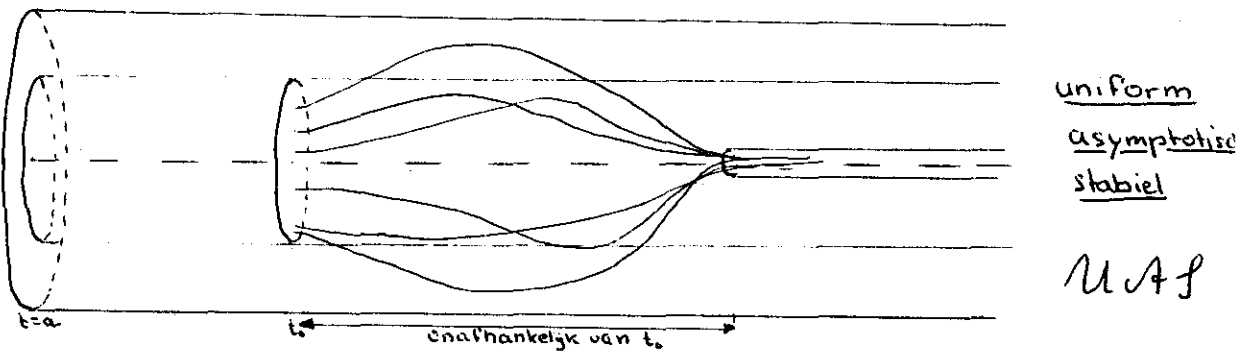
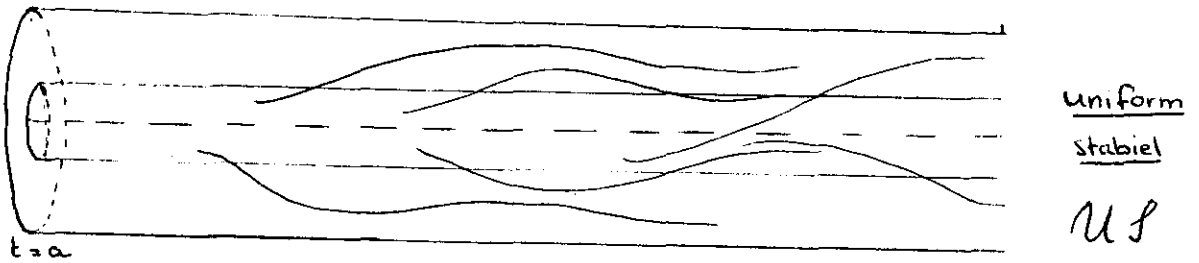
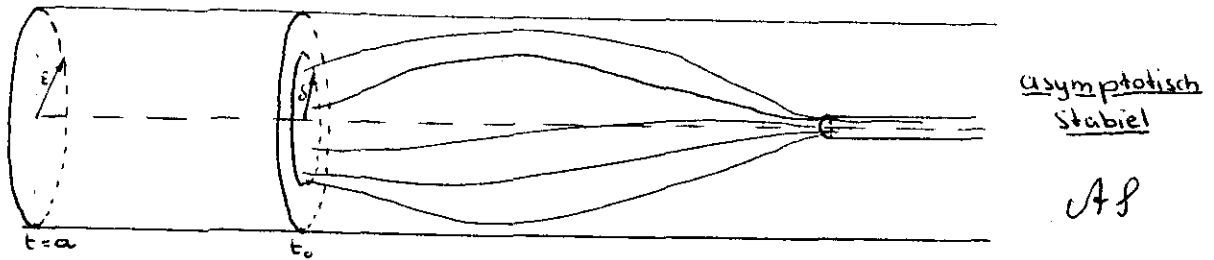
iv) uniform asymptotisch stabiel (\mathcal{UAS}) als (\mathcal{US}) én

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \forall x_0 \in \delta\mathbb{B} \quad \{\xi(t_0 + \tau, x_0, t_0) \rightarrow 0 \text{ (} \tau \rightarrow \infty) \text{ uniform t.a.v. } t_0\}.$$



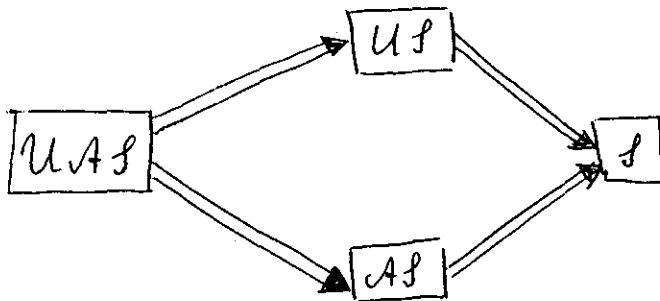
stabiel

\mathcal{S}



Uniform betekent dus: uniform t.a.v. t_0 .

Uit de definities volgt onmiddellijk het volgende implicatieschema:



Na stelling 2 zullen we aan de hand van voorbeelden laten zien dat deze begrippen inderdaad verschillend zijn.

Stelling 2 (Lineaire systemen). Als $f(x,t) = A(t)x$, dan geldt

i) $(S) \Leftrightarrow \phi_A(t)$ is begrensd voor $t \geq a$.

ii) $(AS) \Leftrightarrow \phi_A(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$.

iii) $(\mathcal{U}\mathcal{F}) \Leftrightarrow \phi_A(t)\phi_A^{-1}(\tau)$ is begrensd voor $t \geq \tau \geq a$.

iv) $(\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{F}) \Leftrightarrow (\mathcal{U}\mathcal{F}) \wedge \phi(t_0 + \tau)\phi^{-1}(t_0) \rightarrow \mathcal{O}(\tau \rightarrow \infty)$ uniform t.a.v. t_0 voor $t_0 \geq a$.

Bewijs. We gebruiken de relatie $x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x(t_0)$. We bewijzen alleen i), de andere bewijzen gaan analoog.

" \Leftarrow " Als $|\phi(t)| \leq M$, dan geldt $|x(t)| \leq MC(t_0)|x(t_0)|$. We kunnen dus $\delta := \varepsilon/MC(t_0)$ nemen.

" \Rightarrow " Kies $\varepsilon = 1$. Dan is er een $\delta > 0$ zodat $|\phi(t)x_0| \leq 1$ geldt voor $t \geq 0$ als $|x_0| \leq \delta$. Als $|y_0| \leq 1$ dan geldt $|\phi(t)(\delta y_0)| \leq 1$ en dus $|\phi(t)y_0| \leq 1/\delta$ voor $t \geq 0$. Dus $|\phi(t)| \leq 1/\delta$. □

Voorbeeld. Als $n = 1$, $a = 0$, dan wordt de FO van $\dot{x} = a(t)x$ gegeven door

$$\phi(t) = \exp \int_0^t a(s) ds .$$

We zien dat

$$(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \int_0^t a(s) ds \text{ is naar boven begrensd voor } t \geq 0 ;$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{F}) \Leftrightarrow \int_0^t a(s) ds \rightarrow -\infty \text{ voor } t \rightarrow \infty ;$$

$$(\mathcal{U}\mathcal{F}) \Leftrightarrow \int_{\tau}^t a(s) ds \text{ is naar boven begrensd voor } 0 \leq \tau \leq t ;$$

$$(\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{F}) \Leftrightarrow (\mathcal{U}\mathcal{F}) \wedge \int_{t_0}^{t_0+\tau} a(s) ds \rightarrow -\infty \text{ } (\tau \rightarrow \infty) \text{ uniform t.a.v. } t_0 .$$

Als $a(t) = 1$, dan $\neg \mathcal{F}$.

Als $a(t) = 0$, dan $\mathcal{U}\mathcal{F}$, $\neg \mathcal{A}\mathcal{F}$.

Als $a(t) = (1+t^2)^{-1}$, dan $\mathcal{U}\mathcal{F}$, $\neg \mathcal{A}\mathcal{F}$.

Als $a(t) \geq 0$, dan $(\mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{F})$, $\neg (\mathcal{A}\mathcal{F})$.

Zij $a(t) = \sin \log t + \cos \log t - b$ (we nemen $a = 1$). Dan geldt:

$$\int_{\tau}^t a(s) ds = t \sin \log t - bt - \tau \sin \log \tau + b\tau .$$

Als $t_k := \exp\{(2k + \frac{1}{2})\pi\}$, $\tau_k := e^{2k\pi}$ voor $k = 1, 2, \dots$, dan geldt

$$\int_{\tau_k}^{t_k} a(s) ds = e^{(2k+\frac{1}{2})\pi} \{1 - b(1 - e^{-\frac{1}{2}\pi})\} .$$

Zij $1 < b < (1 - e^{-\frac{1}{2}\pi})^{-1}$. Dan is bij vaste τ :

$$\int_{\tau}^t a(s) ds \leq C - (b - 1)t \rightarrow -\infty \quad \text{voor } t \rightarrow \infty$$

dus (AS). Maar

$$\int_{\tau_k}^{t_k} a(s) ds \rightarrow \infty \quad \text{voor } k \rightarrow \infty ,$$

dus niet (US).

Als $a(t) = -1$, dan (UAS).

Als $a(t) = -\frac{1}{t+1}$, dan is US, AS maar niet UAS.

Opgave 1. Laat zien dat de nuloplossing van de DV

$$\ddot{x} + 2(t+1)^{-1}\dot{x} = 0$$

wel (S) maar niet (US) is.

3. Verdere stabiliteitseigenschappen

Stabiliteit is per definitie een eigenschap van de nuloplossing van een DV. Als $\bar{x}(t)$ een willekeurige oplossing is van de DV

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

dan heet $\bar{x}(t)$ een (uniform) (asymptotisch) stabiele oplossing van (1) als de nuloplossing een (uniform) (asymptotisch) stabiele oplossing is van

$$\dot{z}(t) = f(\bar{x}(t) + z(t), t) - f(\bar{x}(t), t) .$$

Voor lineaire systemen is elke oplossing (uniform) (asymptotisch) stabiel dan en slechts dan als de nuloplossing deze eigenschap heeft. Derhalve zullen we bij lineaire DV's spreken over (uniforme) (asymptotische) stabiliteit van de DV.

Het volgende criterium voor (UAS) van een lineair systeem is opmerkelijk.

Stelling 3. De nuloplossing van het systeem $\dot{x} = A(t)x$ is (UAS) dan en slechts dan als er getallen $M > 0$, $\gamma > 0$ bestaan zo dat

$$|\phi(t) \phi^{-1}(\tau)| \leq M e^{-\gamma(t-\tau)} \quad (a \leq \tau \leq t < \infty) .$$

Bewijs. "slechts dan": Op grond van stelling 2 geldt

$$|\phi(t_0 + t) \phi^{-1}(t_0)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{uniform t.a.v. } t_0 .$$

Er bestaat dus een getal $T > 0$ zo dat voor elke $t_0 \geq a$:

$$|\phi(t_0 + T) \phi^{-1}(t_0)| \leq \frac{1}{2} .$$

Als k een natuurlijk getal is volgt hieruit:

$$\begin{aligned} |\phi(t_0 + kT) \phi^{-1}(t_0)| &= |\phi(t_0 + kT) \phi^{-1}(t_0 + (k-1)T) \phi(t_0 + (k-1)T) \dots \\ &\dots \phi^{-1}(t_0 + T) \phi(t_0 + T) \phi^{-1}(t_0)| \leq \\ &\leq |\phi(t_0 + kT) \phi^{-1}(t_0 + (k-1)T)| \dots |\phi(t_0 + T) \phi^{-1}(t_0)| \leq 2^{-k} . \end{aligned}$$

Als $kT \leq \tau < (k+1)T$, dan zien we

$$|\phi(t_0 + \tau) \phi^{-1}(t_0)| \leq M_0 2^{-k} ,$$

waar M_0 een bovengrens is voor $|\phi(t_0 + \tau) \phi^{-1}(t_0 + kT)|$. (Deze bestaat op grond van (UJ).) Verder geldt

$$k > \frac{T}{T} - 1$$

en dus

$$|\phi(t_0 + \tau)\phi^{-1}(t_0)| \leq M_0 \exp\{-\left(\frac{T}{T} - 1\right) \log 2\} = M e^{-\gamma \tau}$$

waar $M := 2M_0$ en $\gamma = (\log 2)/T$.

"dan": opgave.

Voor autonome systemen is de uniformiteit geen extra voorwaarde:

Stelling 4 (autonome systemen). Als $f(x,t) = f(x)$, dan geldt

$$\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{U}\mathcal{S}, \mathcal{A}\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{S}$$

Bewijs. Vanwege de autonomie geldt $\xi(t, x_0, t_0) = \eta(t - t_0, x_0) := \xi(t - t_0, x_0, 0)$ (zie Hoofdstuk I, § 5, VI) en $t^+(x_0, t_0) = t^+(x_0, 0) + t_0$. Derhalve

$$\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{U}\mathcal{S} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 \in \delta B \forall t \geq 0 [t^+(x_0, 0) = \infty, |n(t, x_0)| < \epsilon]$$

$$\mathcal{A}\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{S} \Leftrightarrow \{\mathcal{S} \wedge \exists \delta > 0 \forall x_0 \in \delta B [n(\tau, x_0) \rightarrow 0 (\tau \rightarrow \infty)]\}.$$

Men kan bewijzen (zie bijv. A. Halanay: Differential Equations) dat $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{U}\mathcal{S}, \mathcal{A}\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{S}$ ook geldt als de DV periodiek is.

De verzameling eigenwaarden van A geven we aan met $\sigma(A)$.

Stelling 5 (lineaire autonome systemen). Als $f(x) = Ax$ met A constant, dan geldt:

i) $\mathcal{A}\mathcal{S} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) [\operatorname{Re} \lambda < 0]$

ii) $\mathcal{S} \begin{cases} \Rightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) [\operatorname{Re} \lambda \leq 0] \\ \Leftarrow \text{Voor elke } \lambda \in \sigma(A) \text{ geldt } \lambda \leq 0 \text{ en eigenwaarden } \lambda \text{ met } \operatorname{Re} \lambda = 0 \\ \text{zijn enkelvoudig.} \end{cases}$

Bewijs. De elementen van e^{At} hebben de vorm $\sum_{k=1}^m p_k(t)e^{\lambda_k t}$, waar $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ eigenwaarden zijn van A en p_1, \dots, p_m polynomen, met $\text{gr } p_k < \text{multipliciteit van } \lambda_k$. Als $\text{Re } \lambda_k < 0$ geldt voor $k = 1, \dots, m$, dan volgt hieruit dat de elementen van e^{At} gemajoreerd worden door een functie van de vorm $ce^{-\alpha t}$, waarbij α een positief getal is, zodanig dat $-\alpha > \max \text{Re } \lambda_k$. Derhalve geldt $|e^{tA}| \leq Me^{-\alpha t}$ waaruit $\mathcal{A}\mathcal{S}$ volgt. Als $\text{Re } \lambda_k \leq 0$ geldt en als de eigenwaarden met $\text{Re } \lambda_k = 0$ enkelvoudig zijn, dan zijn voor die eigenwaarden de corresponderende polynomen p_k constant. Dan volgt gemakkelijk $|e^{tA}| \leq M$, dus $\mathcal{U}\mathcal{S}$.

Om het omgekeerde te bewijzen merken we op dat als $Ac = \lambda c$, $c \neq 0$ er geldt $e^{tA}c = e^{t\lambda}c$ (ga na). Als $e^{tA} \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$ dan geldt ook $e^{t\lambda}c \rightarrow 0$, dus $\text{Re } \lambda < 0$. Als e^{tA} begrensd is, dan is ook $e^{t\lambda}c$ begrensd, dus $\text{Re } \lambda \leq 0$. \square

Voorbeeld 1. Als $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan geldt $e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$).

Voorbeeld 2. Als $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, dan is $e^{tA} = e^{t0} = I$ begrensd.

We zien dat de eerste voorwaarde voor \mathcal{S} niet voldoende en de tweede voorwaarde niet noodzakelijk is. Een nodige en voldoende voorwaarde voor (\mathcal{P}) kan men geven in termen van de Jordannorm van A : Voor alle eigenwaarden geldt $\text{Re } \lambda_k \leq 0$ en voor de eigenwaarden met $\text{Re } \lambda_k = 0$ geldt $m_k = 1$ (d.w.z. met λ_k correspondeert een 1×1 -Jordankastje) (zie college Matrixtheorie).

Opgave 1. Voor welke a en b is de DV

$$\ddot{x} + ax + bx = 0$$

\mathcal{S} resp. $\mathcal{A}\mathcal{S}$?

Opgave 2.

i) Als $A(t)$ scheefsymmetrisch is voor alle $t \geq 0$, dan is de DV

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

$\mathcal{U}\mathcal{S}$ maar niet $\mathcal{A}\mathcal{S}$.

ii) Als $A^T(t) + A(t) \leq 0$ ($t \geq 0$) dan is $(1) \cup \mathcal{S}$. ($A \leq 0$ betekent $x^T Ax \leq 0$ voor alle x .)

Opgave 3. Beschouw de DV $\dot{x} = A(t)x$,

i) Als \mathcal{S} dan bestaat er een getal M zo dat

$$\int_0^t \text{tr } A(s) ds \leq M \quad (t \geq 0) .$$

ii) Als $\mathcal{U}\mathcal{S}$ dan

$$\exists_M \int_{\tau}^t \text{tr } A(s) ds \leq M \quad (0 \leq \tau \leq t) .$$

iii) Als $\mathcal{A}\mathcal{S}$ dan

$$\int_0^t \text{tr } A(s) ds \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow \infty) .$$

iv) Als $\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{S}$ dan

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \text{tr } A(s) ds \rightarrow -\infty \quad (\tau \rightarrow \infty, \text{ uniform t.a.v. } t_0) .$$

v) Als \mathcal{S} en

$$\exists_M \forall_{t \geq 0} \int_0^t \text{tr } A(s) ds \geq M$$

dan $\mathcal{U}\mathcal{S}$ (maar niet $\mathcal{A}\mathcal{S}$, zie iii)).

Opgave 4. Beschouw het lineaire systeem $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Zij $S(t) := \frac{1}{2}(A(t) + A^T(t))$. Bewijs de ongelijkheden van Wazewski voor oplossingen van de DV:

$$|x(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \lambda_1(\tau) d\tau \leq |x(t)| \leq |x(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \lambda_n(\tau) d\tau$$

waar λ_1 de kleinste en λ_n de grootste eigenwaarde van S is. Leid hieruit voorwaarden voor $(\mathcal{U}\mathcal{S})$, $(\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{S})$ af.

Aanwijzing: Voor elke symmetrische matrix S geldt

$$\lambda_1 x^T x \leq x^T S x \leq \lambda_n x^T x$$

als λ_1 de kleinste en λ_n de grootste eigenwaarde van S is.

Stelling 6 (lineaire periodieke systemen). Als $f(x,t) = P(t)x$, met $P(t+T) = P(t)$ voor alle t , dan geldt:

i) $\mathcal{R}^s \Leftrightarrow \mathcal{U}\mathcal{A}^s \Leftrightarrow$ Voor elke $\lambda \in \sigma(\phi_P(T))$ geldt $|\lambda| < 1$.

ii) $\mathcal{I} \Leftrightarrow \mathcal{U}\mathcal{I} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{voor elke } \lambda \in \sigma(\phi_P(T)) \text{ geldt } |\lambda| \leq 1, \\ \Leftarrow \text{voor elke } \lambda \in \sigma(\phi_P(T)) \text{ geldt } |\lambda| \leq 1 \text{ en de} \\ \text{eigenwaarden } \lambda \text{ met } |\lambda| = 1 \text{ zijn enkelvoudig.} \end{array} \right.$

Bewijs. Volgens de stelling van Floquet is $\phi_P(t) = Q(t)e^{Bt}$. De eigenwaarden van B zijn van de gedaante $\mu_i := T^{-1} \log \lambda_i$, waar λ_i eigenwaarde van $\phi_P(T)$ is.

i) Als $|\lambda_k| < 1$ voor elke k , dan is $\text{Re } \mu_k < 0$ en dus $|e^{Bt}| \leq M e^{-\alpha t}$ voor zekere $\alpha > 0$. We zien

$$|\phi_P(t)\phi_P^{-1}(\tau)| = |Q(t)e^{B(t-\tau)}Q^{-1}(\tau)| \leq M_1 e^{-\alpha(t-\tau)},$$

waar

$$M_1 := M \max_{0 \leq t \leq T} |Q(t)| \max_{0 \leq \tau \leq T} |Q^{-1}(\tau)|.$$

Dus $\mathcal{U}\mathcal{A}^s$. Als er een $\lambda_k \in \sigma(\phi_P(T))$ met $|\lambda_k| \geq 1$ is, dan is $\text{Re } \mu_k \geq 0$. Zij $Bc = \mu_k c$. Dan geldt

$$|\phi_P(t)c| = |Q(t)e^{tB}c| = |e^{t\mu_k} Q(t)c| \geq |Q^{-1}(t)|^{-1} |c| \not\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

(Opmerking. Als A inverteerbaar is, dan geldt $|Ac| \geq |A^{-1}|^{-1} |c|$. Ga na.) Dus niet \mathcal{R}^s .

ii) Analoog. □

Opgave 5. Ga na of het systeem

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(x \cos t + y(1 - \sin t))$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2}(x(\sin t - 1) - y(2 - \cos t))$$

$\mathcal{U}\mathcal{A}^s$ (of $\mathcal{U}\mathcal{I}$) is. (Aanwijzing: Merk op dat $\underline{x} = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \sin \frac{1}{2}t \\ \cos \frac{1}{2}t \end{bmatrix}$ een oplossing is.)

Opgave 6. Analoog voor

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \cos t + y \\ \dot{y} &= (1 + \cos t)y .\end{aligned}$$

Opgave 7. Bepaal de karakteristieke multiplicatoren en exponenten van de systemen in opgaven 5 en 6 (zie Hoofdstuk II, § 5).

Opgave 8. Onderzoek de stabiliteitseigenschappen van de Hillvergelijking (zie Hoofdstuk II, § 7, III).

4. Stabiliteitseigenschappen van gestoorde systemen

We beschouwen een lineair systeem

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (t \geq 0)$$

met bepaalde stabiliteitseigenschappen. Als nu $B(t)$ voor grote t klein is, dan kan men de DV

$$(2) \quad \dot{x}(t) = (A(t) + B(t))x(t) \quad (t \geq 0)$$

opvatten als een storing van (1). De vraag is in hoeverre stabiliteitseigenschappen blijven behouden bij zo'n storing.

Stelling 7. Als (1) \mathcal{U}_f is en als

$$\int_0^{\infty} |B(t)| dt < \infty$$

dan is (2) \mathcal{U}_f .

Bewijs. We schrijven (2) als $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t)$ en we beschouwen de tweede term in het rechterlid als inhomogene term. Dan passen we de variatievan-constanten-formule toe:

$$x(t) = \Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)x(\tau)d\tau .$$

Omdat (1) \mathcal{U}_f is geldt $|\Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(\tau)| \leq M$ voor $0 \leq \tau \leq t$. Daarom geldt voor $0 \leq t_0 \leq t$:

$$|x(t)| \leq M|x(t_0)| + \int_{t_0}^t M|B(\tau)||x(\tau)|d\tau .$$

Het lemma van Gronwall levert

$$|x(t)| \leq M|x(t_0)| \exp \int_{t_0}^t M|B(\tau)|d\tau \leq M_1|x(t_0)| \quad (0 \leq t_0 \leq t)$$

waar

$$M_1 := M \exp M \int_0^{\infty} |B(\tau)|d\tau .$$

Derhalve is

$$|\phi_{A+B}(t)\phi_{A+B}^{-1}(t_0)x_0| \leq M_1|x_0|$$

voor elke x_0 en dus

$$|\phi_{A+B}(t)\phi_{A+B}^{-1}(t_0)| \leq M_1 \quad (0 \leq t_0 \leq t) .$$

□

Opmerking. De voorwaarde $\int_0^{\infty} |B(t)|dt < \infty$ kan niet worden vervangen door $B(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), bijv.: $n = 1$, $A = 0$, $B = (1+t)^{-1}$.

Opgave 1. Als $a(t) \geq 0$ voor $t \geq 0$ dan is de DV

$$\ddot{x}(t) - a(t)\dot{x} + x = 0$$

is dan en slechts dan als $\int_0^{\infty} a(t)dt < \infty$. De DV is nooit $\mathcal{A.S.}$

Opgave 2. De vergelijking van Bessel luidt

$$\ddot{x}(t) + t^{-1}\dot{x}(t) + (1 - v^2t^{-2})x(t) = 0 .$$

Bewijs dat voor elke oplossing geldt $x(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}})$ ($t \rightarrow \infty$).

Aanwijzing: Pas de substitutie $x(t) = t^{-\frac{1}{2}}z(t)$ toe.

Opgave 3. Als $\int_0^{\infty} |A(t)| dt < \infty$, dan is het systeem $\dot{x} = A(t)x$ $\mathcal{U}\mathcal{S}$.

Opgave 4. Als $\int_0^{\infty} |a(t)| dt < \infty$, dan zijn niet alle oplossingen van de DV $\ddot{x}(t) + a(t)x = 0$ begrensd.

Stelling 8. Als (1) $\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{S}$ is, en $B(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), dan is (2) $\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{S}$.

Bewijs. We schrijven weer:

$$x(t) = \Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(\tau)B(\tau)x(\tau)d\tau \quad (0 \leq t_0 \leq t)$$

en we gebruiken de schatting

$$|\Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(\tau)| \leq Me^{-\gamma(t-\tau)} \quad (0 \leq \tau \leq t) .$$

Dan vinden we

$$|x(t)| \leq Me^{-\gamma(t-t_0)} |x(t_0)| + \int_{t_0}^t Me^{-\gamma(t-\tau)} |B(\tau)| |x(\tau)| d\tau$$

dus

$$e^{\gamma t} |x(t)| \leq Me^{\gamma t_0} |x(t_0)| + \int_{t_0}^t M|B(\tau)| e^{\gamma \tau} |x(\tau)| d\tau .$$

We passen het lemma van Gronwall toe op $u(t) := e^{\gamma t} |x(t)|$, $v(t) := M|B(t)|$, $k = Me^{\gamma t_0} |x(t_0)|$. Het resultaat is:

$$|x(t)| \leq M|x(t_0)| \exp\{-\gamma(t - t_0) + M \int_{t_0}^t |B(\tau)| d\tau\} .$$

Zij $\mu := \gamma/(2M)$ en zij $|B(t)| < \mu$ voor $t \geq t_1$. Dan geldt:

$$|x(t)| \leq MN|x(t_0)| \exp\{-\frac{1}{2}\gamma(t - t_0)\}$$

waar

$$N := \exp\left\{M \int_{t_0}^{t_1} (|B(\tau)| - \frac{1}{2}\gamma) d\tau\right\}.$$

Dus

$$|\Phi_{A+B}(t) \Phi_{A+B}^{-1}(t_0)| \leq M N e^{-\frac{1}{2}\gamma(t-t_0)} \quad (t_1 \leq t_0 \leq t). \quad \square$$

Opgave 5. De voorwaarde $B(t) \rightarrow 0$ kan worden vervangen door $|B(t)| < \mu$ o.d.d.

of $\int_0^{\infty} |B(t)| dt < \infty$. Algemeen:

$$\exists \mu > 0 \exists K > 0 \forall t_0, t [0 \leq t_0 \leq t < \infty \Rightarrow \int_{t_0}^t (|B(\tau)| - \mu) d\tau \leq K].$$

Opgave 6. Als $\int_0^{\infty} |a(t)| dt < \infty$, dan is de DV

$$\ddot{x}(t) + (1 + a(t))x(t) = 0$$

U \mathcal{B} maar niet A \mathcal{B} .

Opgave 7. Als (1) U \mathcal{B} is en $\int_0^{\infty} |u(\tau)| d\tau < \infty$ dan zijn alle oplossingen van

$$(4) \quad \dot{x} = Ax + u$$

begrensd op $[0, \infty)$.

Opgave 8. Als (1) U $\mathcal{A}\mathcal{B}$ en $u(t) = \mathcal{O}(1)$ ($t \rightarrow \infty$), dan is elke oplossing van (4) begrensd.

Opgave 9. Als (1) U $\mathcal{A}\mathcal{B}$ en $u(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), dan convergeert elke oplossing van (4) naar nul voor $t \rightarrow \infty$.

Opgave 10.

i) Als voor de functie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ geldt

$$\dot{f}(t) + \dot{f}(t) + f(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

dan geldt:

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \rightarrow 0 \\ \dot{f}(t) \rightarrow 0 \\ \ddot{f}(t) \rightarrow 0 \end{array} \right\} (t \rightarrow \infty).$$

ii) Volgt uit $\ddot{f}(t) + \dot{f}(t) + f(t) \rightarrow 0$ ook dat $f(t) \rightarrow 0$?

Opgave 11. Laat zien dat de nuloplossing van de DV in \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = (A_0 t^m + \dots + A_m)x$$

waarbij de $n \times n$ -matrix A_0 alleen eigenwaarden met negatief reëel deel heeft, UAS is.

Stellingen 7 en 8 gelden niet meer als we $U\mathcal{S}$ respectievelijk UAS vervangen door \mathcal{S} respectievelijk AS .

Voorbeeld (Perron).

$$A(t) = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & \sin \log t + \cos \log t - 2a \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-at} & 0 \end{bmatrix}.$$

Er geldt $\phi_A(t) = \Psi(t)D$, waar

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^t \sin \log t - 2at \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{2a} \end{bmatrix}$$

(we nemen als begintijd $t_0 = 1$). Als $a > \frac{1}{2}$, dan geldt $\Psi(t) \rightarrow 0$, $B(t) \rightarrow 0$ (exponentieel snel). Dus (1) is AS en $\int_0^\infty |B(t)| dt < \infty$. Er geldt $\phi_{A+B}(t) = \Omega(t)C$, waar

$$\Omega(t) := \begin{bmatrix} e^{-at} & 0 \\ e^t \sin \log t - 2at \int_0^t e^{-s} \sin \log s ds & e^t \sin \log t - 2at \end{bmatrix}$$

en $C := (\Omega(1))^{-1}$ (dus ook hier is $t_0 = 1$).

Als $\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{1}{2}\pi})$, dan is deze matrix onbegrensd. Immers als $t_n = \exp\{(2n + \frac{1}{2})\pi\}$, dan is

$$\sin \log s \leq \sin \log t_n e^{-2\pi/3} = -\frac{1}{2}$$

voor $t_n e^{-2\pi/3} \leq s \leq t_n e^{-\pi}$, en derhalve

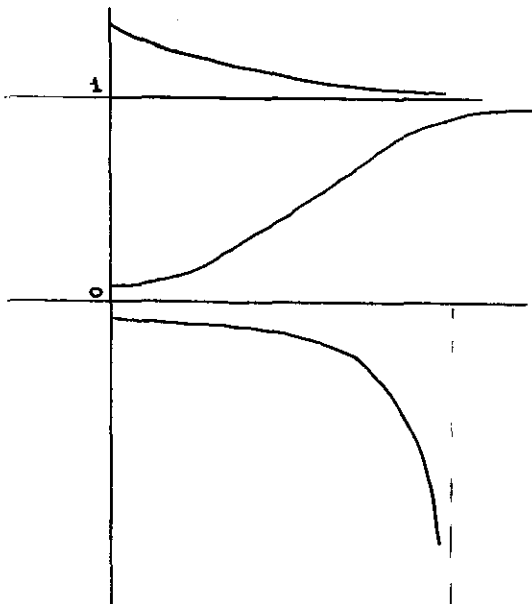
$$\begin{aligned} & e^{t_n(\sin \log t_n - 2a)} \int_0^{t_n} e^{-s} \sin \log s \, ds \geq \\ & \geq e^{(1-2a)t_n} \int_{t_n e^{-2\pi/3}}^{t_n e^{-\pi}} e^{-s} \sin \log s \, ds \geq \\ & \geq e^{(1-2a)t_n} t_n (e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}) \exp\left(\frac{1}{2} t_n e^{-\pi}\right) = \\ & = (e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}) t_n \exp\{(1 - 2a + \frac{1}{2} e^{-\pi}) t_n\} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Dus (2) is niet stabiel.

De volgende stelling behandelt de stabiliteit van een lineaire DV gestoord door een niet-lineaire term:

$$(5) \quad \dot{x} = A(t)x(t) + g(x,t)$$

waar $g(x,t) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$) uniform voor $0 \leq t < \infty$. We beschouwen het volgende voorbeeld: $\dot{x} = x(1-x)$ ($n = 1$).



In $x = 0$ is de lineaire benadering $\dot{y} = y$ instabiel, in $x = 1$ is de lineaire benadering (met $x = 1 + \xi$ wordt de vergelijking $\dot{\xi} = -\xi - \xi^2$) $\dot{\eta} = -\eta$ asymptotisch stabiel. We zien dat voor de niet-lineaire vergelijking een analoog gedrag geldt.

Opgave 12. Bepaal een analytische formule voor de oplossing.

Stelling van Poincaré-Liapunov. Als de DV

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

UAS is en $g(x, t) = \sigma(x)$ ($x \rightarrow 0$) uniform voor $0 \leq t < \infty$, dan is de nuloplossing van (5) ook UAS.

Bewijs. Zij de oplossing $t \mapsto x(t)$ van (5) met beginwaarde $x(t_0) = x_0$ gedefinieerd op een interval $[t_0, t^+)$. Uit de variatie-van-constanten-formule volgt:

$$x(t) = \Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(\tau)g(x(\tau), \tau)d\tau$$

voor $t_0 \leq t < t^+$. We nemen aan dat $|g(x, t)| \leq \varphi(x)|x|$ waar $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$). Verder geldt $|\Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(\tau)| \leq Me^{-\gamma(t-\tau)}$ voor $0 \leq \tau \leq t$. Dus

$$|x(t)| \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}|x_0| + \int_{t_0}^t Me^{-\gamma(t-\tau)}\varphi(x(\tau))|x(\tau)|d\tau.$$

Voor gegeven $\epsilon > 0$ kiezen we $\delta_1 > 0$ zodanig dat $\varphi(x) \leq \epsilon$ als $|x| \leq \delta_1$. Als $|x_0| < \delta_1$, dan bestaat er een interval $[t_0, t_1)$ zodanig, dat $|x(t)| \leq \delta_1$ voor $t_0 \leq t < t_1$. Voor die waarden van t geldt:

$$e^{\gamma t}|x(t)| \leq Me^{\gamma t_0}|x_0| + \epsilon \int_{t_0}^t Me^{\gamma \tau}|x(\tau)|d\tau.$$

Met het lemma van Gronwall volgt hieruit:

$$|x(t)| \leq M|x_0|e^{(\epsilon M - \gamma)(t-t_0)}.$$

Als we nu $\epsilon < \gamma/(2M)$ kiezen, dan geldt

$$(6) \quad |x(t)| \leq M|x_0|e^{-\frac{1}{2}\gamma(t-t_0)}$$

voor $t_0 \leq t < t_1$. In het bijzonder geldt dan $|x(t)| \leq M|x_0|$ voor $t_0 \leq t < t_1$. Als nu $|x_0| \leq \delta := \delta_1/(2M)$, dan geldt $|x(t)| \leq \frac{1}{2}\delta_1$ voor $t_0 \leq t < t_1$. Hieruit volgt dat we $t_1 = t^+ = \infty$ kunnen veronderstellen. We zien dat (6) geldt voor alle $t \geq t_0$ als $|x_0| < \delta$, zodat de nuloplossing van (5) \mathcal{UAS} is. (Merk op dat δ en M niet van t_0 afhangen.) \square

Opgave 13. Zij (1) \mathcal{UAS} .

i) Als $|g(x,t)| = \mathcal{O}(t^N|x|^2)$ ($|x| < \delta$, $t \geq 0$) dan is (5) \mathcal{AS} .

ii) Als $|g(x,t)| \leq f(t)|x|$, ($|x| < \delta$, $t \geq 0$) waar

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

dan is (5) \mathcal{UAS} .

iii) Als $g(x,t) = \epsilon h(x,t)$, $|h(x,t)| \leq K|x|$ en ϵ is klein genoeg, dan is (5) \mathcal{UAS} .

iv) Laat zien dat men in i) niet kan concluderen dat (5) \mathcal{AS} is, aan de hand van het voorbeeld $\dot{x} = -x + tx^2$.

Opgave 14. Als $A(t) = A$ constant is met eigenwaarden λ met $\text{Re } \lambda < 0$ en $g(x,t) = \mathcal{O}(e^{\beta t}|x|^2)$, waar $\beta < -\text{Re } \lambda$ voor alle eigenwaarden λ dan is de nuloplossing van (5) asymptotisch stabiel.

5. Constante en periodieke oplossingen van autonome en periodieke systemen

Beschouw de autonome DV

$$(7) \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) .$$

De punten a waarvoor geldt $f(a) = 0$ heten singuliere punten van de DV. Zij spelen een belangrijke rol. In de eerste plaats is de constante functie $t \mapsto a$ oplossing van (7) dan en slechts dan als $f(a) = 0$. Verder geldt: Als $t \mapsto x(t)$ oplossing is van (7) en $x(t) \rightarrow a$ ($t \rightarrow \infty$), dan geldt $f(a) = 0$. M.a.w. singuliere punten zijn de enige limietpunten van oplossingen van de DV. We kunnen dit als volgt inzien: Zij $b := f(a) \neq 0$. Dan geldt:

$$b^T x(t) = b^T x(t_0) + \int_{t_0}^t b^T f(x(\tau)) d\tau .$$

Daar $f(x(t)) \rightarrow b$ ($t \rightarrow \infty$) bestaat er een getal t_0 zodat $b^T f(x(t)) \geq \frac{1}{2} b^T b$ voor $t \geq t_0$. Derhalve:

$$b^T x(t) \geq b^T x(t_0) + \frac{1}{2} b^T b (t - t_0) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

hetgeen een tegenspraak is.

Van belang is de vraag of de constante oplossingen (asymptotisch) stabiel zijn. Dit kan men gewoonlijk nagaan door de oplossing in de omgeving van zo'n punt te lineariseren. Als bijv. $f(a) = 0$, dan kunnen we de substitutie $x(t) = a + y(t)$ maken. Dan wordt (7):

$$(8) \quad \dot{y}(t) = f(a + y(t)) .$$

Per definitie is de (asymptotische) stabiliteit van de oplossing $x(t) = a$ van (7) equivalent met de (asymptotische) stabiliteit van de nuloplossing van (8) (zie het begin van § 3). We ontwikkelen (8) in de buurt van $y = 0$: $f(a + y) = f(a) + f_x(a)y + \sigma(y)$, dus

$$(9) \quad \dot{y} = Ay + g(y)$$

waar $A := f_x(a)$ een $n \times n$ -matrix is en $g(y) = \sigma(y)$ ($y \rightarrow 0$). Volgens de stelling van Poincaré-Liapunov is de nuloplossing \mathcal{A}^s als voor alle eigenwaarden λ van A geldt $\text{Re } \lambda < 0$. Men kan bewijzen (zie [B] 4.10, [CL] CH.13 § 1 Theorem 1.2) dat de nuloplossing van (9) niet \mathcal{J} is als er een eigenwaarde λ van A bestaat met $\text{Re } \lambda > 0$. Wanneer A eigenwaarden op de imaginaire as heeft en geen eigenwaarden λ met $\text{Re } \lambda > 0$, dan hangen stabiliteitseigenschappen van (9) van g af. Dit geval is meestal moeilijk te behandelen.

Voorbeeld. $\dot{x} = x - x^2$. Nulpunten zijn $x = 0$, $x = 1$. In $x = 0$ is $A = 1$, $g(x) = x^2$. Dit punt is instabiel. In $x = 1$ levert de substitutie $x = 1 + y$

$$\dot{y} = -y - y^2 .$$

De nuloplossing van deze vergelijking en dus de oplossing $x = 1$ van de DV $\dot{x} = x - x^2$ is \mathcal{A}^s .

Merk op dat, hoewel $x = 0$ instabiel is, niet alle oplossingen met beginwaarde $x \neq 0$ naar ∞ naderen. Evenmin is het zo dat alle oplossingen naar de $A\zeta$ oplossing $x = 1$ naderen. Overeenkomstige eigenschappen gelden wel voor lineaire systemen. Voor niet-lineaire systemen zijn de stabiliteitsuitspraken gewoonlijk lokaal.

Opgave 1. Onderzoek stabiliteitseigenschappen van constante oplossingen van de volgende DV's:

i) $\dot{x} = x + y + x^2 + xy^2$

$$\dot{y} = -x + y + 2xy .$$

ii) $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ (v.d. Pol vergelijking).

iii) $\ddot{x} + a\dot{x} + \sin x = 0$ ($a > 0$) (gedempte slinger).

iv) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ (Lienard-vergelijking)

waar f en g continu differentieerbaar zijn en $g^2(x) + f^2(x) > 0$ voor alle x .

Opgave 2. Onderzoek de stabiliteit van de nuloplossing van:

i) $\dot{x} = \sin x + e^{xy} - 1$

$$\dot{y} = e^y + \cos xy - 2 .$$

ii) $\dot{x} = -y - x(x^2 + y^2)$

$$\dot{y} = x - y(x^2 + y^2) .$$

Aanwijzing: schrijf de DV in poolcoördinaten.

iii) $\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2)$

$$\dot{y} = x + y(x^2 + y^2) .$$

iv) $\sin \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 .$

Laat $p(t)$ een niet-constante periodieke oplossing van de DV

(1) $\dot{x} = f(x)$

zijn met periode T . De baan van p (zie hoofdstuk I, § 5, VI) is een gesloten

kromme. Om de stabiliteitseigenschappen van deze oplossing te onderzoeken schrijven we $x(t) = p(t) + y(t)$, zodat

$$(10) \quad \dot{y} = g(y, t)$$

waar $g(y, t) := f(p(t) + y) - f(p(t))$ periodiek is met periode T . De stabiliteitseigenschappen van de nuloplossing van (10) kunnen worden afgeleid, door bijv. de gevarieerde vergelijking van (10) te beschouwen:

$$(11) \quad \dot{z}(t) = P(t)z(t)$$

waar $P(t) := g_y(0, t) = f_x(p(t))$. We zouden kunnen proberen de stelling van Poincaré-Liapunov te gebruiken. Dit kan echter alleen als (11) (en derhalve (10)) \mathcal{UAS} is. Het is echter gemakkelijk in te zien dat dit nooit het geval is, want de oplossing $x(t) = \xi(t, p(t_0 + \delta), t_0)$ voldoet aan $x(t) = p(t + \delta)$ en $x(t) - p(t) \neq 0$ ($t \rightarrow \infty$). Inderdaad volgt uit

$$\xi(t + \delta, p(t_0), t_0) = \xi(t, p(t_0 + \delta), t_0)$$

door differentiatie naar δ en substitutie $\delta = 0$, $T = 0$, $t_0 = 0$, dat

$$\Phi(T)c = c$$

waar $c := \dot{p}(t_0) = f(p(t_0)) \neq 0$ omdat p niet constant is. We zien dat $\Phi(T)$ een eigenwaarde 1 heeft. We voeren nu een begrip asymptotische stabiliteit in, die deze tijderschuiving negeert.

Definitie. Een periodieke oplossing $p(t)$ van (10) heet baanstabiel als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall t_0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \quad [\|p(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow x(t) := \xi(t, x_0, t_0) \text{ is}$$

gedefinieerd op $[t_0, \infty)$ en $d(x(t), \Gamma) \leq \epsilon$ voor alle $t \geq t_0$] .

Hierbij is $\Gamma := \{p(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de (gesloten) baan van p en $d(x, \Gamma) := \min\{|x - y| \mid y \in \Gamma\}$ de afstand van x tot Γ .

De oplossing $p(t)$ heet baan-asymptotisch stabiel als zij baanstabiel is en als bovendien $d(x(t), \Gamma) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) wanneer maar $x(t_0) - p(t_0)$ klein genoeg is.

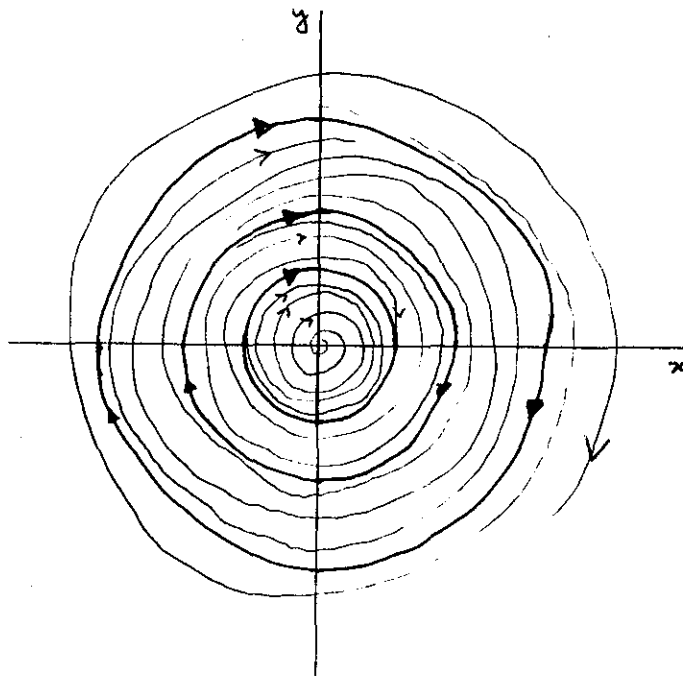
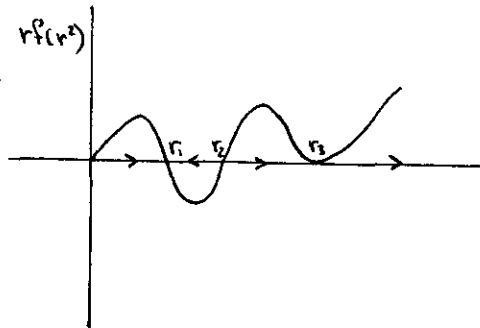
Voorbeeld 1. Beschouw de DV

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{x} = y + xf(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + yf(x^2 + y^2) \end{cases} .$$

De substitutie $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ levert de vergelijkingen in poolcoördinaten:

$$\dot{r} = rf(r^2), \quad \dot{\varphi} = -1.$$

De waarden r_0 van r waarvoor $f(r^2) = 0$ corresponderen met de periodieke oplossingen $x = r_0 \cos t$, $y = r_0 \sin t$ (zonder verlies van algemeenheid stellen we $\varphi(0) = 0$). De stabiliteitseigenschappen van deze periodieke oplossingen hangen af van f .



In bovenstaande tekening is de baan corresponderend met $r = r_1$ baan- \mathcal{AS} , $r = r_2$ volledig baan-instabiel, $r = r_3$ éézijdig baanstabiel (dus in wezen instabiel). Nemen we $f(r) = 0$ voor alle r in (1), dan zien we dat alle oplossingen periodiek zijn met periode 2π . Alle oplossingen zijn baanstabiel (zelfs stabiel), geen enkele oplossing is baan-asymptotisch stabiel.

Dergelijke beschouwen gelden ook voor periodieke vergelijkingen. Hier kan het echter voorkomen, dat een periodieke oplossing echt asymptotisch stabiel is. Uit de stelling van Poincaré-Liapunov volgt dan onmiddellijk:

Stelling 3. Zij $p(t)$ een periodieke oplossing van de periodieke DV

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

(beide met periode T). Als de fundamentealoplossing van de gevarieerde DV

$$\dot{z}(t) = f_x(p(t), t)z(t)$$

met $\Phi(t)$ wordt aangeduid, dan geldt dat $p(t)$ \mathcal{UAS} is als alle eigenwaarden λ van $\Phi(T)$ voldoen aan $|\lambda| < 1$.

Voor autonome DV's vermelden we zonder bewijs het volgende resultaat (zie [CL] CH. 13, section 2):

Stelling 4. Als $p(t)$ een periodieke oplossing (met periode T) is van de autonome DV

$$\dot{x} = f(x)$$

en als $\Phi(T)$ $n-1$ eigenwaarden λ heeft met $|\lambda| < 1$, waar Φ de FO is van

$$\dot{z} = f_x(p(t))z,$$

dan is $p(t)$ baan-asymptotisch stabiel.

6. Liapunov-functies

Literatuur:

W. Hahn, Stability of Motion

Le Salle-Lefschetz, Stability by Liapunov's direct method with applications.

J.L. Willems, Stability theory of dynamical systems.

In het volgende voorbeeld kunnen we stabiliteitseigenschappen niet afleiden uit de lineaire approximatie:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3 \\ \dot{y} &= -x - y^3 - x^2y .\end{aligned}$$

Beschouw echter de functie $V(x,y) := x^2 + y^2$. Dan geldt:

$$\dot{V} := \frac{d}{dt} (V(x(t),y(t))) = -2(x^4 + y^4 + x^2y^2) \leq -(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) = -V^2 .$$

dus

$$\dot{V}/V^2 < -1 , \quad V \leq 1/(t-c) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Omdat $\dot{V} \leq 0$ is de nuloplossing stabiel. Omdat bovendien $V \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) is de oplossing \mathcal{A}^c .

De in dit voorbeeld gevolgde methode laat zich generaliseren. We bespreken alleen autonome systemen.

Definitie 1.

- 1) Een functie $V \in C(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ heet positief semi-definiet als $V(0) = 0$, $V(x) \geq 0$ voor alle x in een omgeving van 0.
- 2) V heeft positief definiet als $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ voor alle $x \neq 0$ in een omgeving van $x = 0$.
- 3) Negatief (semi-) definiet wordt op analoge wijze gedefinieerd.

Als x oplossing is van de DV

$$(1) \quad \dot{x} = f(x)$$

en $V \in C^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$, dan geldt

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = (\nabla V(x(t)), f(x(t))) = V_f(x(t))$$

waar

$$V_f(x) := (\nabla V(x), f(x))$$

((a,b) stelt het inwendig product van a en b voor).

Wanneer V_f (semi) definit is dan is $V(x(t))$ een (niet-stijgende) dalende functie van t in de omgeving van de oorsprong. In dat geval kunnen we meestal stabiliteitsuitspraken doen.

Definitie 2. Een functie $V \in C^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ heet een zwakke Liapunovfunctie van (1) als $V(0) = 0$ en $V_f(x) := (\nabla V(x), f(x))$ negatief semi-definit is. Als $V(0) = 0$ en V_f is negatief definit, dan heet V een sterke Liapunovfunctie.

Stelling 5. Beschouw de DV (1) en neem aan dat $f(0) = 0$.

- i) Zij V een zwakke Liapunovfunctie van (1). Als V positief definit is, dan is de nuloplossing van (1) stabiel. Als V niet positief semi-definit is dan is de nuloplossing niet $\mathcal{A}\mathcal{S}$.
- ii) Zij V een sterke Liapunovfunctie van (1). Als V positief definit is, dan is de nuloplossing van (1) $\mathcal{A}\mathcal{S}$. Als V niet positief definit is, dan is de nuloplossing van (1) niet \mathcal{S} .

Bewijs.

- i) Zij V positief definit en zij $\epsilon > 0$. We moeten een $\delta > 0$ vinden zo dat $|\xi(t, x_0, 0)| \leq \epsilon$ voor $|x_0| \leq \delta$. We mogen aannemen dat ϵ zo klein is, dat $V(x) > 0$ en $V_f(x) \leq 0$ geldt voor $0 < |x| \leq \epsilon$. Definieer $\mu := \min\{V(x) \mid |x| = \epsilon\}$. Dan is $\mu > 0$. Omdat $V(0) = 0$ en V continu is, bestaat er een $\delta > 0$, zo dat $V(x) < \mu$ voor $|x| \leq \delta$. (Dan is dus $\delta < \epsilon$.) Zij nu $|x_0| < \delta$ en $x(t) := \xi(t, x_0, 0)$. Dan geldt $|x(t)| \leq \epsilon$ voor alle $t \geq 0$. Immers, anders was er een $t_1 > 0$ zo dat $|x(t)| < \epsilon$ voor $0 \leq t < t_1$ en $|x(t_1)| = \epsilon$. Dit is echter onmogelijk daar $t \mapsto V(x(t))$ niet-stijgend is.

Als V niet positief semi-definit is en $\delta > 0$ bestaat er een x_0 met $|x_0| < \delta$ en $V(x_0) =: -\alpha < 0$. Daar V niet stijgt geldt $V(x(t)) \leq -\alpha$ voor alle $t \in [0, t^+)$, waarbij $x(t) := \xi(t, x_0, 0)$. Er bestaat een $\epsilon > 0$ zo dat $|V(x)| < \alpha$ ($|x| < \epsilon$). Dan geldt $|x(t)| \geq \epsilon$ voor alle $t \geq 0$ en dus $x(t) \not\rightarrow 0$.

ii) Zij V positief definit. Volgens i) is de nuloplossing stabiel. We moeten nog aantonen dat $\xi(t, x_0, 0) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) als $|x_0|$ klein genoeg is. Kies $\epsilon_1, \delta_1 > 0$ zodanig dat $V(x) > 0, V_f(x) < 0$ voor $0 < |x| \leq \epsilon_1$ en zó dat $|x(t)| \leq \epsilon_1$ voor alle $t \geq 0$ als $|x_0| \leq \delta_1$. Hierbij is weer $x(t) := \xi(t, x_0, 0)$. Daar $V(x(t))$ daalt bestaat $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) =: \ell$. Stel dat $\ell > 0$. Dan bestaat er een $\delta > 0$ met $\delta < \delta_1$ zo dat $V(x) < \frac{1}{2}\ell$ voor $|x| < \delta$. Daar $V(x(t)) \geq \ell$ voor alle t , volgt hieruit dat $|x(t)| \geq \delta$. Derhalve is $V_f(x(t)) \leq -\mu := \max_{\delta \leq |y| \leq \epsilon} V_f(y) < 0$. Maar dan geldt $V(x(t)) = V(x_0) - \mu t \rightarrow -\infty$ hetgeen een tegenspraak is. Daarom is $\ell = 0$. Zij nu $0 < \epsilon < \epsilon_1$. Dan is $\mu := \min_{\delta \leq |y| \leq \epsilon_1} V(y) > 0$. Voor t groot genoeg, bijv. $t \geq t_0$ geldt $V(x(t)) < \mu$ en dus $|x(t)| < \epsilon$. Dus $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).

Als V niet positief definit is, dan kunnen we voor elke $\delta > 0$ en x_0 vinden met $|x_0| < \delta$ en $V(x_0) \leq 0$. Zij $x(t) = \xi(t, x_0, 0)$. Daar $t \mapsto V(x(t))$ dalend is als $|x_0|$ klein genoeg is bestaat er ook een x_1 met $|x_1| < \delta$ en $V(x_1) < 0$, d.w.z. V is niet positief semi-definit. Stel dat de nuloplossing stabiel is. Als $\epsilon_1 > 0$ zo klein wordt gekozen dat $V_f(x) < 0$ voor $0 < |x| \leq \epsilon_1$, dan kunnen we daarbij een $\delta > 0$ vinden zo dat $|x(t)| \leq \epsilon_1$ voor $t \geq 0$, als $|x_0| < \delta$. We kiezen $|x_0| < \delta$ zodanig dat $|x(t)| \geq \epsilon$ voor $t \geq 0$ (zie i)) maar dan is

$$V_f(x(t)) \leq \max_{\epsilon \leq |y| \leq \epsilon_1} V_f(y) < 0 \text{ en dus } V(x(t)) \rightarrow -\infty. \quad \square$$

De essentiële stap bij de toepassing van Stelling 5 is de constructie van een Liapunovfunctie. Hiervoor bestaat geen algemene methode. Soms gaat men uit van een willekeurige positief definitie functie $V(x)$ en berekent $V_f(x)$. Men probeert dan vaak $V_f(x) = |x|^2$ of algemener $V_f(x) = x^T Q x$, waar Q een positief definitie matrix is. Het is echter meer de hand liggend eerst V_f te kiezen, omdat men als V_f negatief definit is altijd uitsluitel krijgt. Als men van V_f uitgaat (dit is Zubov's methode), dan moet V bepaald worden uit de partiële differentiaalvergelijking $(\nabla V, f) = V_f$. Dit komt echter neer op het oplossen van de DV (1), zodat de methode niet erg praktisch is. We beschrijven nu de variabele gradiëntmethode die in veel gevallen oplossing biedt. Hierbij probeert men een vectorfunctie $g(x)$ zo te bepalen dat $(g(x), f(x))$ negatief definit is, terwijl $g(x)$ de gradiënt van een scalair veld V is: $g(x) = \nabla V(x)$. De laatste eis legt de voorwaarde:

$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ ($i, j = 1, \dots, n$) op. Als aan deze voorwaarde voldaan is kan V eenvoudig uit g worden bepaald (zie Wiskunde 40). Vaak kiest men $g(x)$ van de vorm $g(x) = A(x)x$ en men probeert in eerste instantie de matrix $A(x)$ constant te houden.

Voorbeeld. $\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$. Het corresponderende systeem is

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - y^3.\end{aligned}$$

We proberen als Liapunovfunctie $V(x,y) = x^2 + y^2$. Dan geldt $V_f(x,y) = xy - xy - y^4 = -y^4 \leq 0$. De nuloplossing is dus stabiel. Willen we de asymptotische stabiliteit bewijzen, dan moeten we een sterke Liapunovfunctie zoeken. We gaan te werk volgens de variabele gradiëntmethode. We proberen

$$\nabla V = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

waar a, b, c, d functies van (x, y) zijn. Dan is

$$V_f = (a - d)xy + by^2 - cx^2 - cxy^3 - dy^4.$$

De eerste term in het rechterlid willen we graag weg hebben (of op zijn minst erg klein) omdat deze geen vast teken heeft. We proberen $a = d = \text{constant}$. Er moet voldaan zijn aan de voorwaarde

$$\frac{\partial}{\partial y} (by) = \frac{\partial}{\partial x} (cx).$$

Dit is het geval als $by = \frac{\partial p}{\partial x}$, $cx = \frac{\partial p}{\partial y}$. Om de functies b en c begrensd te houden in de omgeving van de oorsprong schrijven we $p = xyq$, zodat

$$b = \frac{\partial}{\partial x} (xq), \quad c = \frac{\partial}{\partial y} (yq).$$

We substitueren dit in V_f :

$$V_f(x,y) = (q + xq_x)y^2 - (q + yq_y)x^2 - (q + yq_y)xy^3 - ay^4.$$

Hierin moet de constante a en de functie q zo worden bepaald dat $V_f(x,y) < 0$ voor kleine $(x,y) \neq (0,0)$. We merken op dat $q(0,0) = 0$, omdat anders $V_f \approx q(0,0)(y^2 - x^2)$ voor kleine (x,y) , hetgeen niet tekenvast is. q kan niet door y deelbaar zijn want anders is $V_f(x,0) = 0$. Daarom moet q deelbaar zijn door x . Opdat de term qx^2 definitief wordt nemen we aan dat q zelfs deelbaar is door x^2 . De eenvoudigste keuze is $q = x^2$. Dit levert

$$V_f(x,y) = -x^4 + 3x^2y^2 - ay^4 - x^3y^3.$$

Als bijv. $a = 3$, dan is de vorm $-x^4 + 3x^2y^2 - ay^4$ negatief definitief en dus $V_f(x,y) < 0$ voor kleine $(x,y) \neq (0,0)$. Nu bepalen we V . Er geldt $V_x = 3x + 3x^2y$, dus $V(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + x^3y + \varphi(y)$ en $V_y = x^3 + \varphi'(y)$. Anderzijds is $V_y = x^3 + ay$, zo dat $\varphi' = ay$, $\varphi = \frac{3}{2}ay^2$. We vinden: $V(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + x^3y$. Daar deze functie positief definitief is, zien we dat de nuloplossing asymptotisch stabiel is.

Tenslotte vermelden we een nuttige uitbreiding van stelling 5:

Stelling 6 (LaSalle). Zij V een zwakke positief definitieve Liapunovfunctie van (1). Als $V_f(x(t))$ voor geen enkele niet-triviale oplossing in de omgeving van 0 identiek nul is, dan is de nuloplossing \mathcal{A}^3 .

Bewijs. Uit stelling 5 i) volgt dat de nuloplossing stabiel is. Beschouw nu een oplossing $x(t)$ van (1) die binnen een ε -omgeving van de oorsprong blijft. We definiëren Ω als de verzameling van punten p waarvoor er een rij t_1, t_2, \dots bestaat met $t_k \rightarrow \infty$ en $x(t_k) \rightarrow p$ ($k \rightarrow \infty$). Zij $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$. Dan geldt $V(p) = \ell$ voor $p \in \Omega$. Als $p \in \Omega$, dan geldt $\xi(t,p,0) \in \Omega$ voor alle $t > 0$. Immers als $x(t_k) \rightarrow p$, dan geldt $x(t_k + \tau) \rightarrow \xi(\tau,p,0)$. Merk op dat $t^+ = \infty$, daar Ω begrensd is. We zien dat $V(\xi(t,p,0)) = \ell$ en dus $V_f(\xi(t,p,0)) = 0$. Uit het gegeven volgt dat $p = 0$. □

In bovenstaand voorbeeld hadden we dus met behulp van de functie $V = x^2 + y^2$, $V_f = -y^4 \leq 0$ reeds \mathcal{A}^3 kunnen concluderen, want op geen niet-triviale oplossing geldt identiek $y = 0$.

Opgaven. Bewijs de (eventueel asymptotische) stabiliteit van de oorsprong in de volgende systemen:

1) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$ (vergelijking van Lienard), $f(x) \geq 0$ ($|x| \leq a$) waar $a > 0$ is.

2) $\dot{x} = -x + 3xy^2 + x^3$
 $\dot{y} = -y^3 - 2x^2y + y^5 + 2x^2y^3$.

3) $\left. \begin{aligned} \dot{x} &= ax - y + kx(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x - ay + ky(x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} a^2 < 1, k < 0 \text{ (niet stabiel als } k > 0 \text{)} .$

Aanwijzing: Bereken een invariante kwadratische vorm (d.w.z. een kwadratische vorm die constant is op de banen) van de gelineariseerde DV.

4) $\ddot{x} + f(x) = 0, xf(x) > 0$ ($0 < |x| < a$).

5) Zij A een scheefsymmetrische matrix en $\varphi(x)$ een positieve continu differentieerbare scalaire functie. Bewijs dat de oorsprong een \mathcal{A} oplossing is van

$$\dot{x} = Ax - \varphi(x)x .$$

6) Beschouw de lineaire DV

(*) $\dot{x} = Ax$

met constante coëfficiënten.

i) Laat zien dat

$$V(x) := x^T P x$$

een Liapunovfunctie is met V en $-V_f$ positief definit dan en slechts dan als $P > 0, Q > 0$, waar

(**) $-Q := A^T P + PA$.

ii) Bewijs dat, als (*) \mathcal{A} is en Q een willekeurige $n \times n$ -matrix,

(***)
$$P := \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

voldoet aan (**). (Zie Hoofdstuk II, § 8, opgave 8ii.)

iii) Bewijs dat voor de matrix P gegeven door (***) geldt $P > 0$ als $Q > 0$.

iv) Gebruik de resultaten van i), ii) en iii) om de Stelling van Poincaré-Liapunov te bewijzen voor autonome systemen. (Aanwijzing: gebruik een Liapunovfunctie van de lineaire DV voor de niet-lineaire DV.)

7) Ga na of de oorsprong van

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -y - x^3\end{aligned}$$

stabiel is.

8) Analoog:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= -2xy.\end{aligned}$$

9) Zij $f \in C^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ en zij $f_x(x)$ niet-singulier voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ (f_x : functionaalmatrix). Uit de impliciete-functie-stelling (A&A 6.6.1) volgt dat f lokaal inverteerbaar is, d.w.z. voor elke $a \in \mathbb{R}^n$ bestaat er een C^2 functie g , gedefinieerd in een omgeving van $f(a)$ zodat $g(f(x)) = x$. De inverse hoeft niet globaal te bestaan (bijv. in \mathbb{R}^2 , $\underline{f}(x) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$). Wanneer men echter als extra eis stelt $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$), dan is f wel globaal inverteerbaar. Een bewijs hiervan berust op de stabiliteitstheorie: Definieer $F = \frac{1}{2}(f, f)$ (inwendig produkt). Toon achtereenvolgens aan:

i) $f(x) = 0 \iff F(x) = 0 \iff \nabla F(x) = 0$.

ii) Elke oplossing van de DV

(*) $\dot{x} = -\nabla F(x)$

voldoet aan $F(x(t)) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).

iii) f heeft eindig veel nulpunten (minstens één).

iv) Elke constante oplossing van (*) is AS .

v) Voor elke oplossing x van (*) geldt $x(t) \rightarrow c$ waar $f(c) = 0$.

vi) Als $f(c) = 0$, dan geldt $\{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \xi(t, x_0, 0) \rightarrow c \text{ (} t \rightarrow \infty)\}$ is open.

vii) f heeft precies één nulpunt.

viii) f is globaal inverteerbaar.

HOOFDSTUK IV. TWEEDIMENSIONALE AUTONOME SYSTEMEN

1. Singuliere punten

We beschouwen DV's van de gedaante

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned}$$

(of in vectornotatie $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$), waar f en $g \in C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$. Meestal kunnen we lokaal het systeem schrijven als een 1^e-orde vergelijking, nl.

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

of

$$(3) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} .$$

Dit is niet mogelijk in de punten (x_0, y_0) met $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Deze punten heten singulier. Als (x_0, y_0) een singulier punt is, dan is de functie $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ kennelijk een oplossing van (1). Het is van belang het gedrag van oplossingen van (1) te onderzoeken in de buurt van de singuliere punten. Als (x_0, y_0) een singulier punt is, dan kunnen we eventueel d.m.v. een translatie bereiken dat $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (stel $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$). De functie $\underline{f}(\underline{x})$ is in de buurt van $\underline{0}$ te ontwikkelen:

$$(4) \quad \underline{f}(\underline{x}) = A\underline{x} + h(\underline{x}) .$$

Het singuliere punt $\underline{0}$ heet elementair als $\det A \neq 0$. Het is te verwachten, dat het gedrag van de oplossingen bij een elementair punt grotendeels bepaald wordt door het gedrag van de oplossingen van de gelineariseerde vergelijking:

$$(5) \quad \dot{\underline{x}} = A\underline{x} .$$

Uitgeschreven:

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy . \end{aligned}$$

Om deze vergelijking te onderzoeken moeten we een transformatie van de vorm $\underline{x} = T\underline{\xi}$ met $\det T \neq 0$ in, waar $\underline{\xi} = (\xi, \eta)$, zodanig dat $T^{-1}AT =: J$ de Jordan-

vorm van A is. DV (5) gaat dan over in

$$(7) \quad \dot{\underline{\xi}} = J \underline{\xi} .$$

We onderscheiden twee mogelijkheden:

$$\text{I.} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \text{II.} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} .$$

I. De oplossingen van (7)

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \quad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta$$

zijn

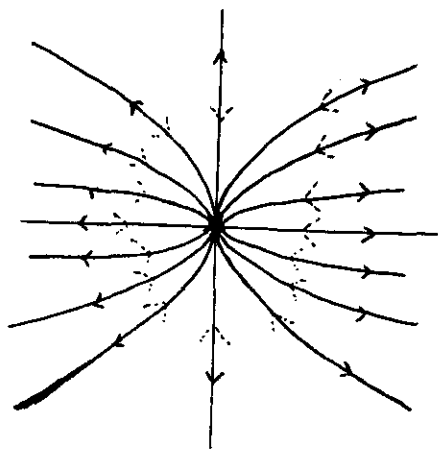
$$\xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = \eta_0 e^{\lambda_2 t} .$$

We onderscheiden verder:

Ia. λ_1, λ_2 zijn reëel. We elimineren t. Neem aan dat $\xi_0, \eta_0 > 0$, zodat $\xi, \eta > 0$ voor alle $t \geq 0$. Dan is $\xi = K \eta^v$, waar $v := \lambda_1 / \lambda_2$.

Voor $\xi_0 < 0$ of $\eta_0 < 0$ vindt men de banen door spiegeling.

Als $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ krijgen we een instabiele knoop. Als $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ is de oorsprong een (asymptotisch) stabiele knoop, tenzij $\lambda_1 = \lambda_2$. In het geval $\lambda_1 = \lambda_2$ is de oorsprong een ster (stabiel als $\lambda_1 < 0$, instabiel als $\lambda_1 > 0$).

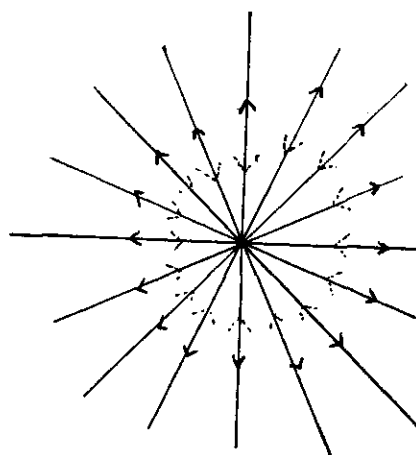


knooppunt (node)

> : $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, instabiel

> : $0 > \lambda_2 > \lambda_1$, stabiel

Fig 1

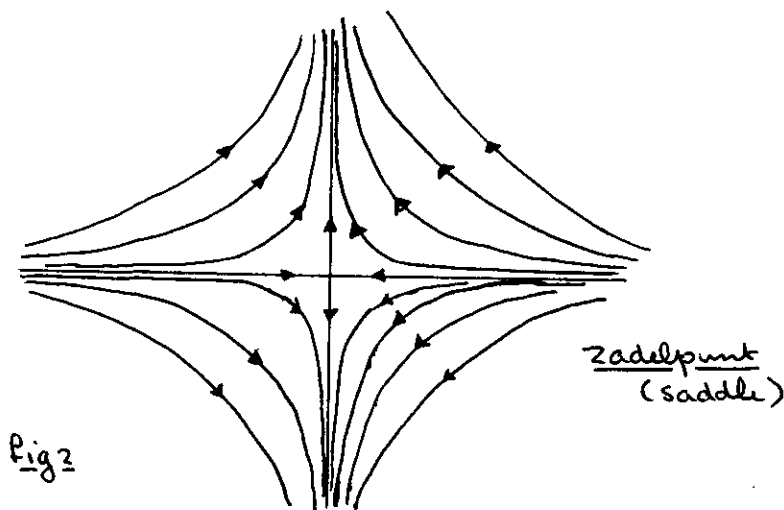


ster (star)

> : $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, instabiel

> : $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, stabiel

Als $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ dan is de oorsprong een zadelpunt



Een zadelpunt is altijd instabiel.

Ib. λ_1, λ_2 zijn complex. $\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. Zij $Ap = \lambda p$. Dan is $A\bar{p} = \bar{\lambda}\bar{p}$. De vectoren p en \bar{p} zijn onafhankelijk, want $\lambda \neq \bar{\lambda}$ (ga na). Als $p = u + iv$, $\bar{p} = u - iv$, dan zijn ook u en v onafhankelijk. We nemen u, v als nieuwe basis. Uit $A(u+iv) = (\alpha+i\beta)(u+iv)$ volgt:

$$Au = \alpha u - \beta v$$

$$Av = \beta u + \alpha v$$

zodat

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

de matrix van A t.a.v. de nieuwe basis is. Anders gezegd: Er bestaat een reële matrix T (nl. $[u, v]$) zodat

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = T^{-1}AT.$$

De nieuwe DV wordt dus

$$\dot{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta$$

$$\dot{\eta} = -\beta\xi + \alpha\eta.$$

We herschrijven de DV in poolcoördinaten

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\varphi} &= -\beta \end{aligned}$$

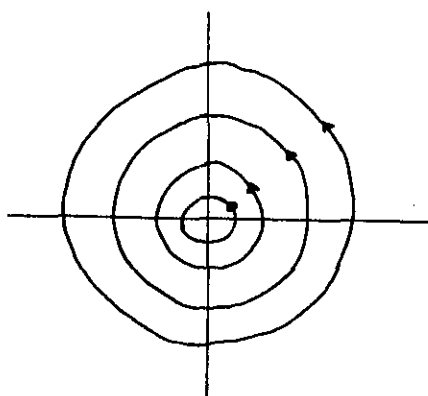
Dus

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \varphi = \varphi_0 - \beta t.$$

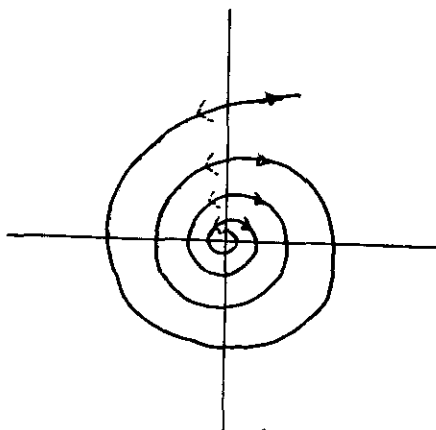
Als $\alpha = 0$, hebben we $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0 - \beta t$. De banen zijn dus cirkels.

Als $\alpha > 0$, zijn de banen instabiele spiralen.

Als $\alpha < 0$: stabiele spiralen.



centrum (center), $\beta < 0$



Spiraal (focus)
 $>$, $\alpha > 0, \beta > 0$: instabiel
 $>$, $\alpha < 0, \beta < 0$: stabiel

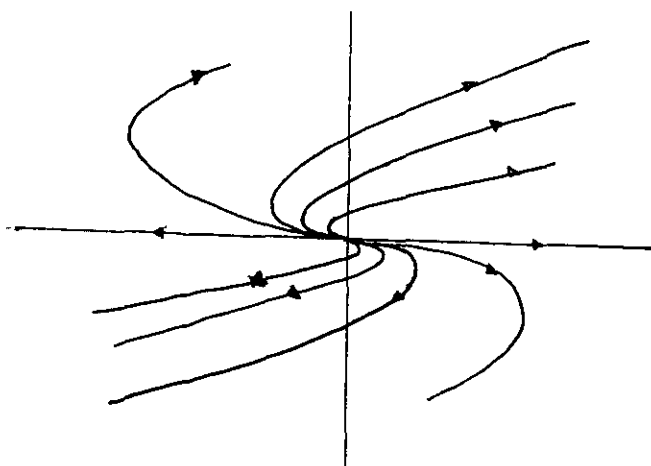
Fig 3

II. $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. λ is noodzakelijk reëel. De vergelijkingen voor ξ en η luiden

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda \xi + \eta \\ \dot{\eta} &= \lambda \eta \end{aligned}$$

met als oplossingen

$$\xi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, \quad \eta(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$



Oneigenlijke knoop
 (improper node)
 $\lambda > 0$: instabiel
 $\lambda < 0$: spiegeling
 t.o.v. y-as en
 omkering pijlen

Fig 4

Merk op dat

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda\eta}{\lambda\xi + \eta} = \frac{\lambda c_2}{\lambda c_1 + \lambda c_2 t + c_2} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \pm \infty).$$

Tenslotte beschouwen we het geval dat A singulier is. Als A één eigenwaarde gelijk aan nul heeft is de Jordanvorm $J = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

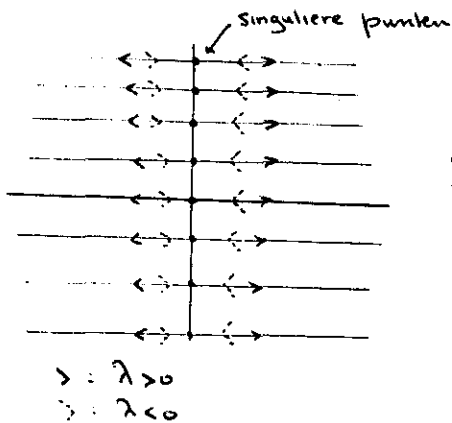
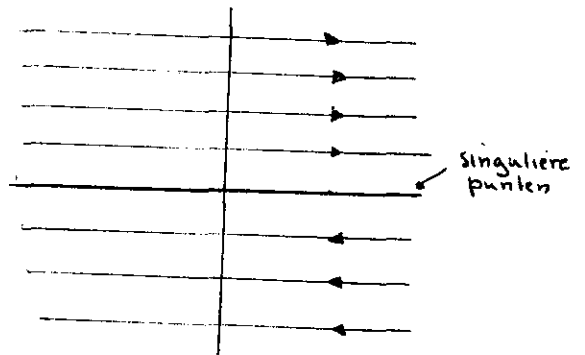


fig 5
ontaarde
singuliere
punten



Dan bestaat de hele y-as uit singuliere punten. Als $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan is de hele x-as singulier. Als $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ is het hele vlak singulier.

De figuren in de oorspronkelijke variabelen krijgen we door lineaire transformatie.

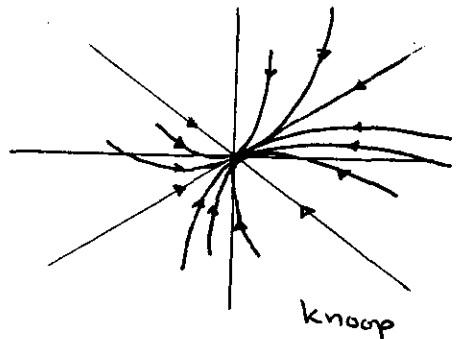
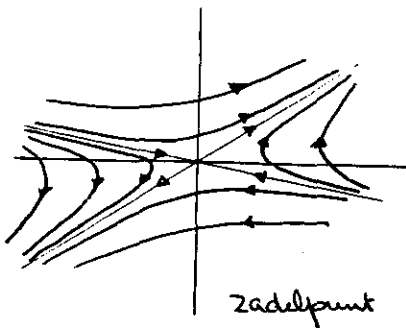
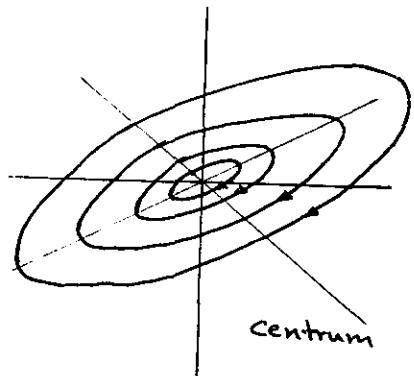
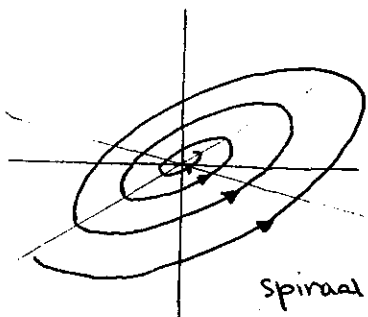
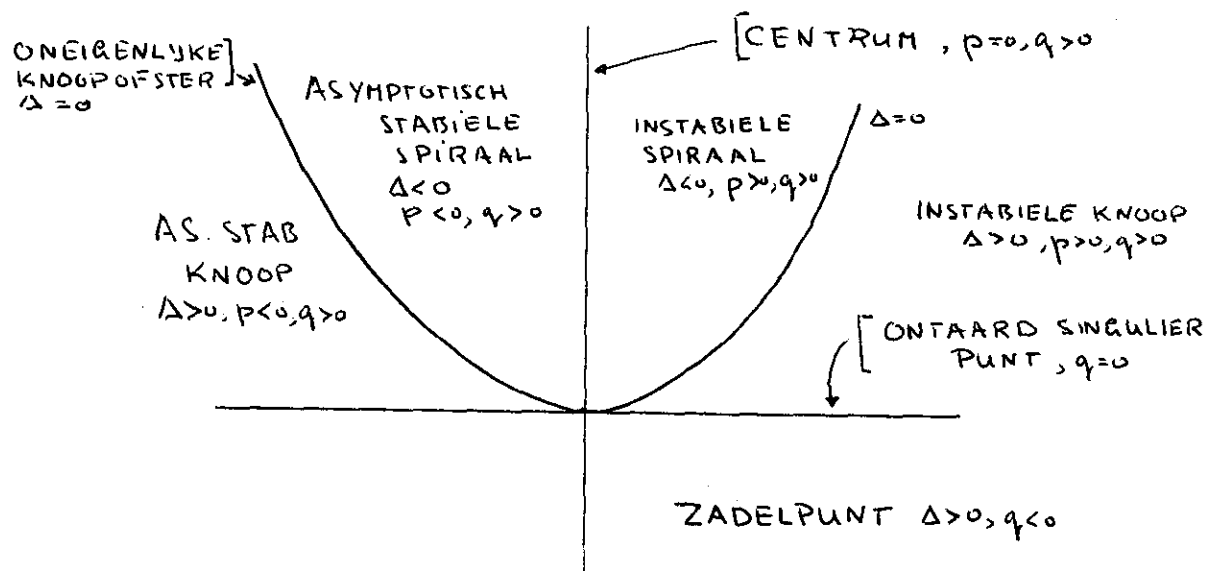


Fig 6



De verschillende gevallen kunnen grotendeels worden onderscheiden in het (p,q) -vlak, waar $p = \text{tr } A = a + d$, $q = \det A = ad - bc$. De karakteristieke vergelijking luidt nl. $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$. De discriminant $\Delta := p^2 - 4q$ bepaalt of de wortels reëel of complex zijn.



Opmerking 1. De oneigenlijke knoop, ster en ontaarde singuliere punten zullen geen belangrijke rol spelen.

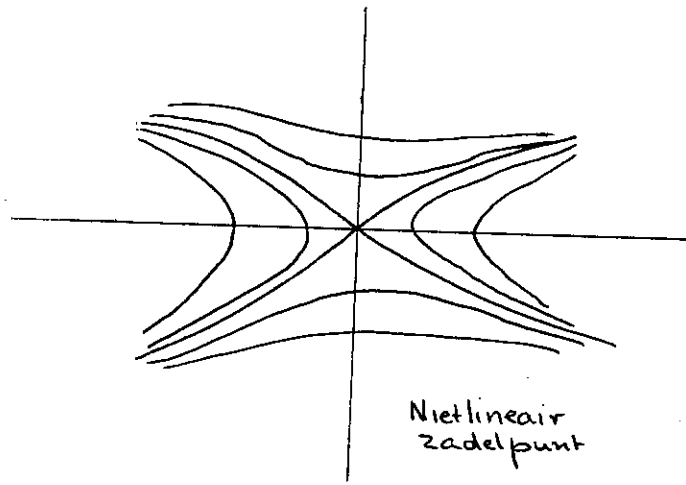
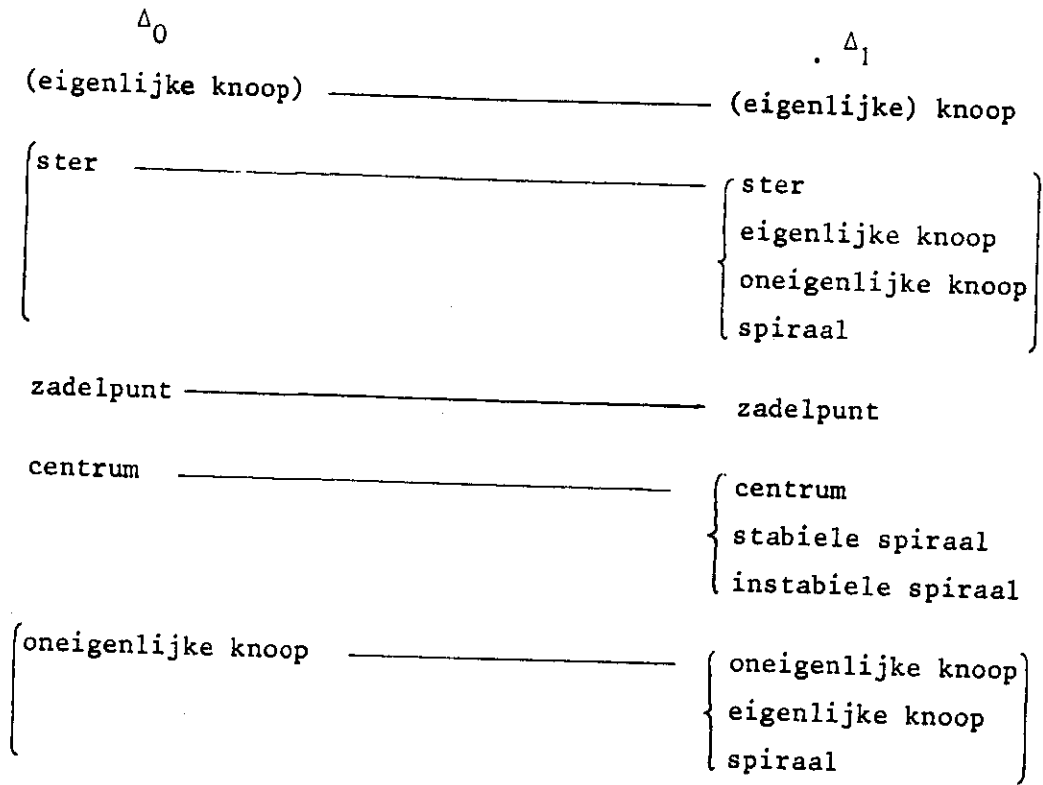
Opmerking 2. Het centrum treedt op bij een ongedempte trilling. Analoog: oneigenlijke stabiele knoop ↔ kritisch gedempte trilling, stabiele spiraal ↔ onderkritisch gedempte trilling, stabiele knoop ↔ overkritisch gedempte trilling.

We beschouwen nu een niet-lineair systeem:

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + by + u(x,y) \\ \dot{y} = cx + dy + v(x,y) \end{cases}$$

waarbij u en v hogere orde termen zijn (d.w.z. $\sigma(|\underline{x}|)$). We weten al op grond van de stelling van Poincaré-Liapunov, dat asymptotische stabiliteit behouden blijft door toevoeging van u en v . Zonder bewijs (zie bijv. [Hu]) vermelden we de volgende resultaten:

Als de oorsprong van het lineaire systeem (6) een (Δ_0) is, dan kan de oorsprong van het systeem (8) een van de punten genoemd in (Δ_1) zijn:



We kunnen de meeste uitspraken van deze stelling als volgt samenvatten: Als het singuliere punt van het lineaire systeem bij een kleine verandering niet van aard verandert, dan blijft het karakter ook behouden bij het niet-lineaire systeem (ontstaan door toevoeging van een hogere orde term).

Zij $\underline{0}$ een centrum van het lineaire systeem (6). In het algemeen kan $\underline{0}$ een centrum, asymptotische spiraal of een instabiele spiraal zijn van het niet-lineaire systeem (8). We hebben hier al voorbeelden van gezien (zie Hoofdstuk III, § 5, voorbeeld 1). Als we echter een niet-constante functie $V(x,y)$ kunnen vinden met $V_f = 0$ in een omgeving van $\underline{0}$, dan is $\underline{0}$ ook een centrum van het niet-lineaire systeem. Dan kan nl. $V(x(t),y(t)) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \pm \infty$ niet gelden.

2. Globaal faseportret

Een methode om het kwalitatief gedrag van oplossingen te bepalen is de isoklienenmethode. Een isoklien van (1) is een kromme gegeven door de vergelijking $f(x,y) = cg(x,y)$, dus een kromme waarop het richtingsveld een constante helling heeft. Gewoonlijk zijn we alleen geïnteresseerd in de zg. horizontale isoklien gegeven door de vergelijking $g(x,y) = 0$ en de verticale isoklienen gegeven door $f(x,y) = 0$. De snijpunten van horizontale en verticale isoklienen zijn de singuliere punten.

Voorbeeld. De vergelijking van Emden-Fowler luidt

$$\frac{d^2z}{ds^2} = s^{-(\alpha\nu+2)} (z(s))^{1+\nu} \quad (s > 0) .$$

Door de substituties

$$\begin{cases} s = e^t \\ z(s) = e^{\alpha t} x(t) \end{cases}$$

gaat de DV over in

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = x^{1+\nu}$$

waar $a := 2\alpha - 1$, $b := \alpha(a - 1)$. Het overeenkomstige stelsel is

$$\dot{x} = y$$

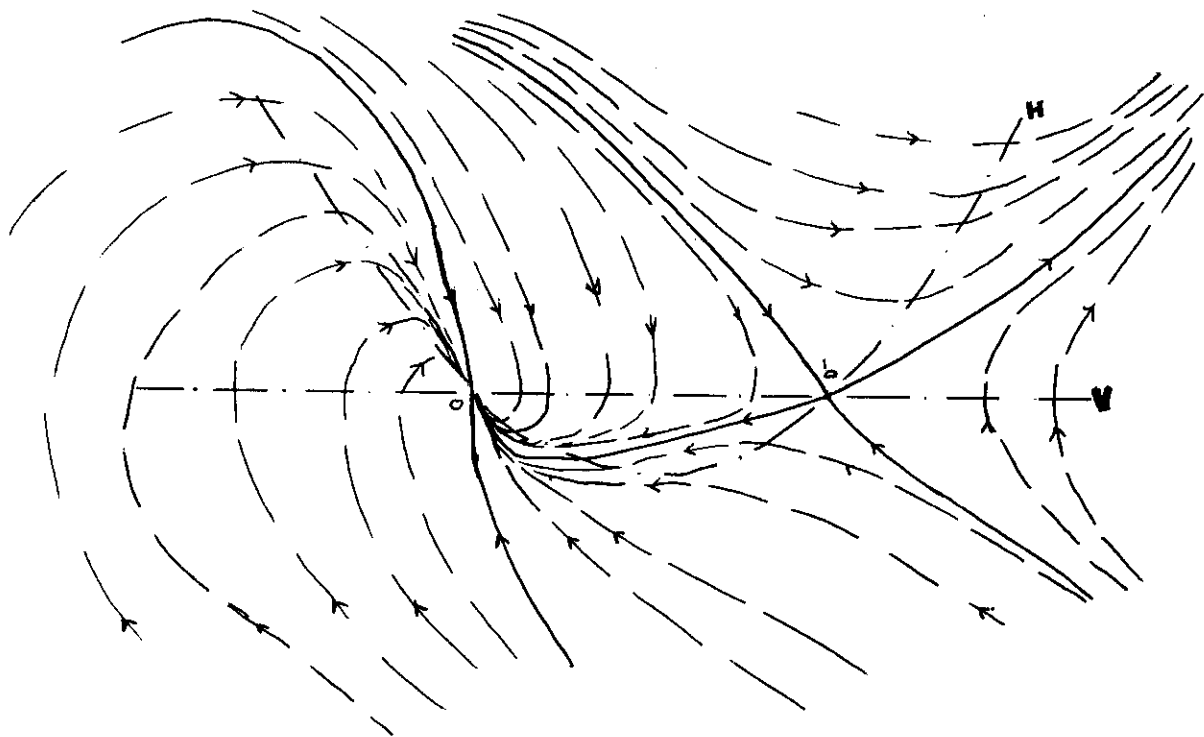
$$\dot{y} = -bx - ay + x^{1+\nu} .$$

We zullen verder $\nu = 1$ nemen, dus

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -bx - ay + x^2 .$$

De lijn $y = 0$ is de verticale isoklien, de parabool $ay = x^2 - bx$ is de horizontale isoklien. We geven een beschrijving van de oplossingen in het geval $\alpha > 1$, d.w.z. $a > 0$, $b > 0$.



De singuliere punten zijn $(x,y) = (0,0)$ en $(x,y) = (b,0)$. In de oorsprong is de linearisatie $\dot{x} = Ax$, waar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$. De oorsprong is dus een stabiele knoop. In de buurt van $(b,0)$ substitueren we $(x,y) = (b+\xi,\eta)$. Dan wordt het stelsel

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = b\xi - a\eta + \xi^2 . \end{cases}$$

Het singuliere punt $(b,0)$ is derhalve een zadelpunt. We merken op dat de horizontale en verticale isoklienen het vlak in vier delen verdelen in elk waarvan het teken van \dot{x} en \dot{y} vastligt. In het gebied $y > 0$, $ay < x^2 - bx$ is bijv. $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$. Op grond van deze gegevens kan men het verloop van de oplossingen schetsen.

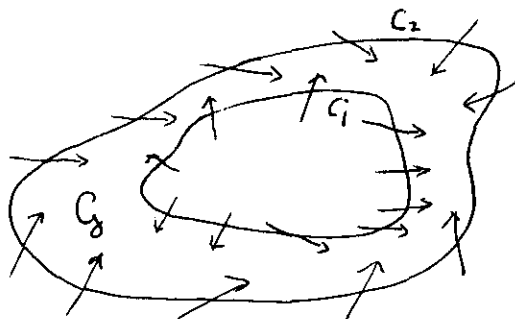
Een belangrijk en moeilijk aspect bij het schetsen van oplossingen vormen de (niet-constante) periodieke oplossingen. De theorie hierover is uitvoerig bestudeerd door Poincaré en Bendixson. We geven zonder bewijs een aantal belangrijke resultaten uit hun theorie (zie [W] 9.6, [R] Ch.17, [CL] Ch.16).

- 1) Stelling van Poincaré-Bendixson. Als er een oplossing $\underline{x}(t)$ is van s l formule (1) met $\underline{x}(t) \in \bar{G}$ voor $t \geq 0$, waar G een begrensds gebied in \mathbb{R}^2 is, zodat \bar{G} geen singuliere punten van (1) bevat, dan bestaat er een periodieke oplossing $\underline{p}(t)$ van (1) met $\underline{p}(t) \in \bar{G}$ voor alle t .
- 2) Indexcriterium van Bendixson. Als $\underline{p}(t)$ een periodieke oplossing is van (1), dan is er een singulier punt in het binnengebied van de baan van $\underline{p}(t)$ (de baan is een Jordan-kromme). Als binnen de baan alleen elementaire singuliere punten liggen, dan is de som van de determinanten van de lineaire benaderingen in de singuliere punten gelijk aan 1 (bijv.: een knoop, een spiraal, een zadelpunt, maar niet alléén een zadelpunt).
- 3) (Bendixson's negatieve criterium). Zij G een enkelvoudig samenhangend gebied in \mathbb{R}^2 zodanig dat $\text{div } \underline{f}(\underline{x}) \neq 0$ in G . Dan bevat G geen periodieke oplossing.

Uit de tweede eigenschap volgt, dat het gebied genoemd in 1) niet enkelvoudig samenhangend kan zijn. Er moet altijd een gat in voorkomen waarin een singulier punt ligt. Een hanteerbare specialisatie van 1) is de volgende stelling:

Gevolg. Laat C_1 en C_2 Jordankrommen zijn, waarbij C_1 binnen C_2 ligt. Als G , het tussen C_1 en C_2 gelegen gebied, geen singuliere punten bevat en als het richtingsveld \underline{f} steeds op C_1 en C_2 naar G toe wijst (dus \underline{f} wijst naar buiten op C_1 en naar binnen op C_2), dan is er een periodieke oplossing $\underline{p}(t)$ in G , zodanig dat C_1 binnen de baan van \underline{p} ligt.

Bewijs. Een oplossing die binnen G begint kan dit gebied niet verlaten en op C_1 en C_2 liggen geen singuliere punten. □



Voorbeeld 1. De Lienard vergelijking

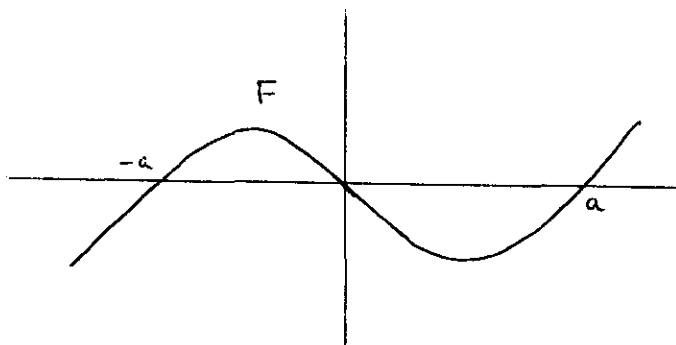
$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$$

met f even, en zodanig dat

$$F(x) := \int_0^x f(\xi)d\xi$$

de volgende eigenschappen heeft:

$F(0) = 0$, $F(x) < 0$ ($0 < x < a$), $F(x)$ is positief en niet-dalend voor $x > a$.



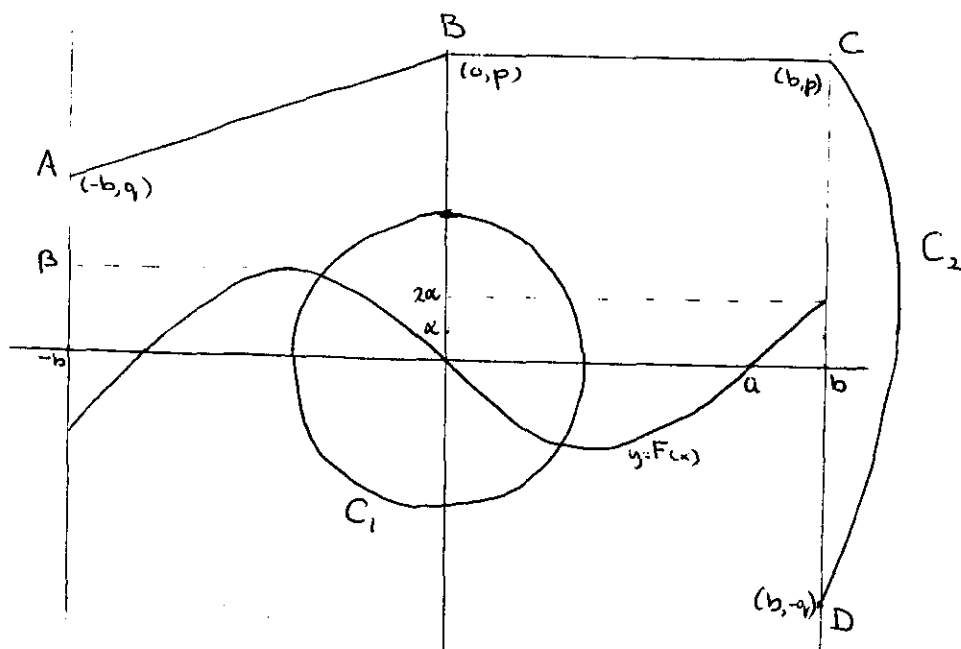
(Een speciaal geval is de zgn. Van der Pol vergelijking:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0.)$$

We maken op de volgende manier een stelsel: Definieer $y = \dot{x} + F(x)$. Dan krijgen we:

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Als $V = x^2 + y^2$, dan is $\frac{1}{2}V_{\underline{f}} = -xF(x)$. Hier is $\underline{f}(x)$ het rechterlid van (*). We zien dat $V_{\underline{f}}$ positief is voor $0 < |x| < a$ (hieruit volgt dat de oorsprong niet asymptotisch stabiel is; waarom?).



We concluderen dat de kromme $C_1 := \{x \mid V(x) = a - \epsilon\}$ voldoet. De kromme C_2 construeren we in stukken: Zij $b > a$ en $\beta := \max \{F(x) \mid -b \leq x \leq 0\}$, $\alpha := \frac{1}{2}F(b)$. We kiezen getallen $p, q > 0$. Het lijnstuk AB dat $(-b, q)$ met $(0, p)$ verbindt heeft helling $(p - q)/b$. Voor het richtingsveld op AB geldt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y - F(x)} \leq \frac{b}{q - \beta} < \frac{p - q}{b}$$

als

$$(*) \quad p > q, \quad (p - q)(q - \beta) > b^2.$$

Op BC (het lijnstuk dat $(0, p)$ met (b, p) verbindt) geldt $\frac{dy}{dx} < 0$ (behalve in B waar het gelijkteken geldt).

De boog CD van (b, p) naar $(b, -q)$ is een cirkel met middelpunt $(0, \alpha)$, zodat $p - q = 2\alpha$. Hierdoor is p vastgelegd zodra we q hebben gekozen. De ongelijkheid (*) wordt nu: $q > \beta + b^2/(2\alpha)$. We zullen aannemen dat q zo groot is dat deze ongelijkheid geldt. Op de cirkelboog CD geldt $W = \text{const}$, waar $W := x^2 + (y - \alpha)^2$. Daar

$$\frac{1}{2} W_{\underline{f}} = -x(F(x) - \alpha) < -b\alpha$$

op CD zien we dat ook hier het veld naar binnen is gericht. De kromme C_2 wordt afgemaakt door symmetrische spiegeling t.a.v. de oorsprong. Merk op dat $(0, 0)$ het enige singuliere punt is. Derhalve is er een periodieke oplossing waarvan de baan tussen C_1 en C_2 ligt. Men kan aantonen dat de oplossing eenduidig en baanasympotisch stabiel is.

Voorbeeld 2. $\dot{x} = -x - y^2$, $\dot{y} = x^2 - y^3$, $\text{div } f = -1 - 3y^2 < 0$. Er zijn dus geen periodieke oplossingen.

Opgave 1. De DV $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ heeft geen periodieke oplossingen als f een constant teken heeft.

Opgave 2. Schets het faseportret van

i)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y + x^3 \\ \dot{y} &= 3x - y + y^3 .\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y + x^2 + xy^2 \\ \dot{y} &= -x + y + 2xy .\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xf(x,y) \\ \dot{y} &= x + yf(x,y)\end{aligned}$$

waar

$$\begin{aligned}f(x,y) &:= (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} && ((x,y) \neq 0) \\ &:= 0 && ((x,y) = 0) .\end{aligned}$$

iv)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= x^2 - y^2 .\end{aligned}$$

3. Conservatieve systemen

Literatuur. Butenin, Elements of the theory of nonlinear oscillations.

De beweging van een mechanisch of elektrisch systeem wordt vaak beschreven door een DV van de vorm

$$(1) \quad \ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = 0$$

waarin $g(x, \dot{x})$ de wrijvingsterm is. Als $g(x, \dot{x}) = 0$ voor alle x , dan is er geen energieverlies. Het systeem heet dan conservatief. De DV luidt dan:

$$(2) \quad \ddot{x} + f(x) = 0 .$$

$f(x)$ stelt hier de terugdrijvende kracht voor. Met (2) correspondeert het stelsel:

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases}$$

hetgeen geschreven kan worden als een 1e orde DV:

$$(4) \quad y \frac{dy}{dx} + f(x) = 0 .$$

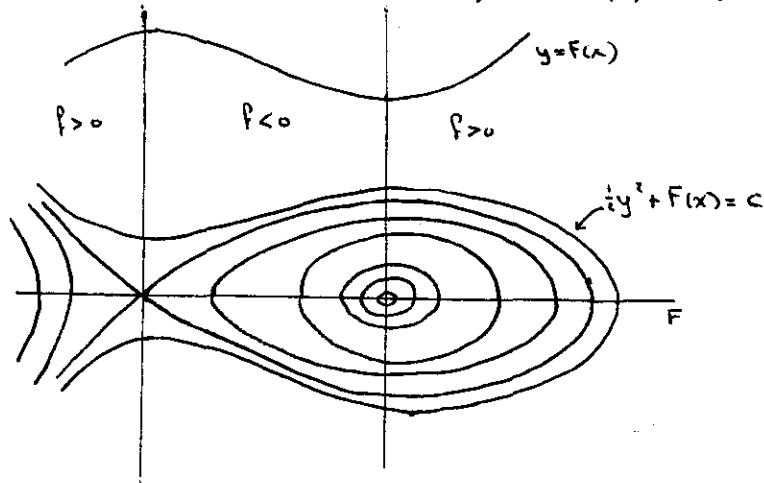
We definiëren

$$(5) \quad F(x) := \int_0^x f(\xi) d\xi .$$

Dan kunnen we (4) integreren tot

$$(6) \quad \frac{1}{2}y^2 + F(x) = C .$$

De uitdrukking in het linkerlid stelt de energie voor ($F(x)$ de potentiële energie, $\frac{1}{2}y^2$ de kinetische energie). Vergelijking (6) representeert de banen van de oplossingen in het fasevlak. We merken op dat de banen symmetrisch zijn t.o.v. de x -as. De x -as is de verticale isoklien. De horizontale isoklienen worden gevormd door de rechten $x = a$, waar $f(a) = 0$.

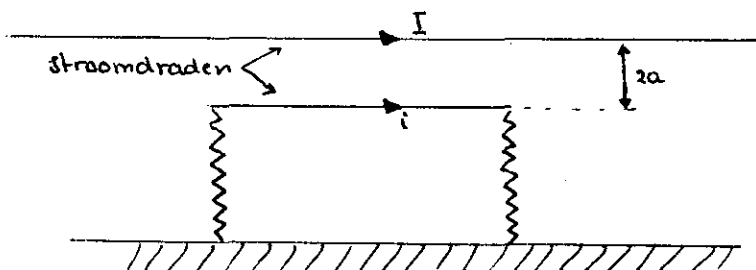


De snijpunten van de horizontale en verticale isoklienen zijn de singuliere punten. Als f continu differentieerbaar is, en $(a,0)$ is een singuliere punt dan is $(a,0)$ een centrum, als $f'(a) > 0$, en een zadelpunt als $f'(a) < 0$. Dat $(a,0)$ ook voor het niet lineaire systeem een centrum is volgt uit de laatste opmerking van § 1, als we

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + F(x) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}f'(a)(x-a)^2 + \dots$$

kiezen. We kunnen ook zeggen: Als F in $x=a$ stationair en niet minimaal is, d.w.z. $F'(a) = f(a) = 0$, dan is $(a,0)$ een zadelpunt en derhalve instabiel. Als F in a een minimum heeft, dan is $(a,0)$ een centrum, en dus stabiel (echter niet asymptotisch stabiel). Merk op dat de banen niveaulijnen zijn van de functie $z = \frac{1}{2}y^2 + F(x)$ en dat een zadelpunt een pas is voor het door deze functie gegeven oppervlak, terwijl een centrum een kuil is (toppen komen niet voor).

Voorbeeld.



Laat van twee evenwijdige stroomdraden er één vastliggen terwijl de andere aan veren is opgehangen. De bewegingsvergelijking van deze draad is

$$m\ddot{x} = \frac{2Ii\ell}{2a-x} - kx$$

waar m de massa is, I , i stroomsterkten, $2a$ de afstand tussen de draden, ℓ de lengte van de bewegende draad en k de veerconstante. De substitutie $t = \rho\tau$, waar ρ constant is, levert

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{2Ii\ell\rho^2}{m} \frac{1}{2a-x} - \frac{\rho^2k}{m} x .$$

Kiezen we $\rho = \sqrt{m/k}$ en definiëren we $\lambda > 0$ door $\lambda^2 := 2Ii\ell\rho^2/m = 2Ii\ell/k$, dan wordt de DV (met τ weer vervangen door t):

$$\ddot{x} + x - \frac{\lambda^2}{2a-x} = 0 .$$

Hier is

$$f(x) = x - \frac{\lambda^2}{2a-x} ,$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda^2 \log(2a-x) .$$

De vergelijking $f(x) = 0$ levert

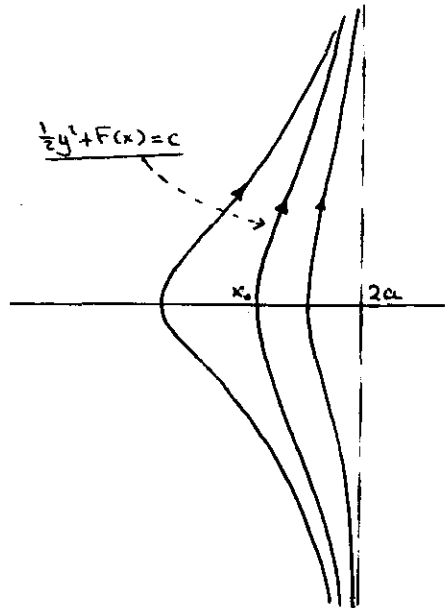
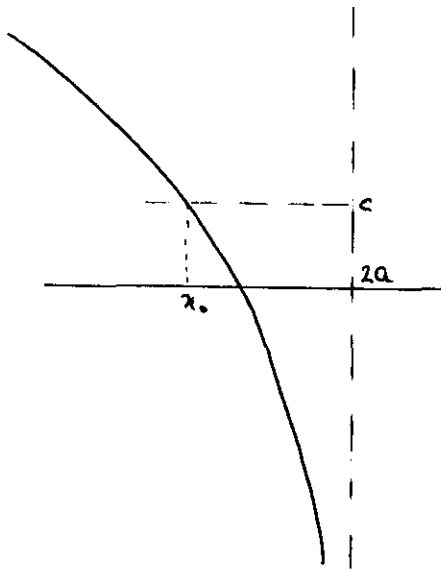
$$x^2 - 2ax + \lambda^2 = 0 ,$$

dus

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - \lambda^2} .$$

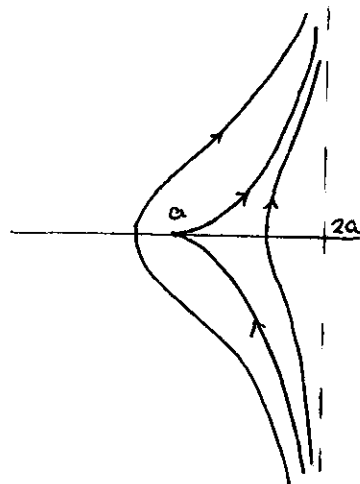
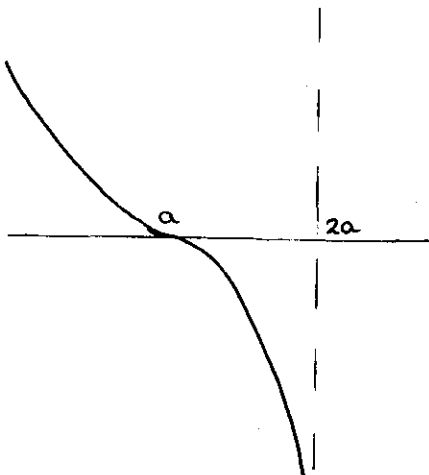
We onderscheiden:

1. $\lambda > a$. Er is geen singulier punt. D.w.z. F is dalend.



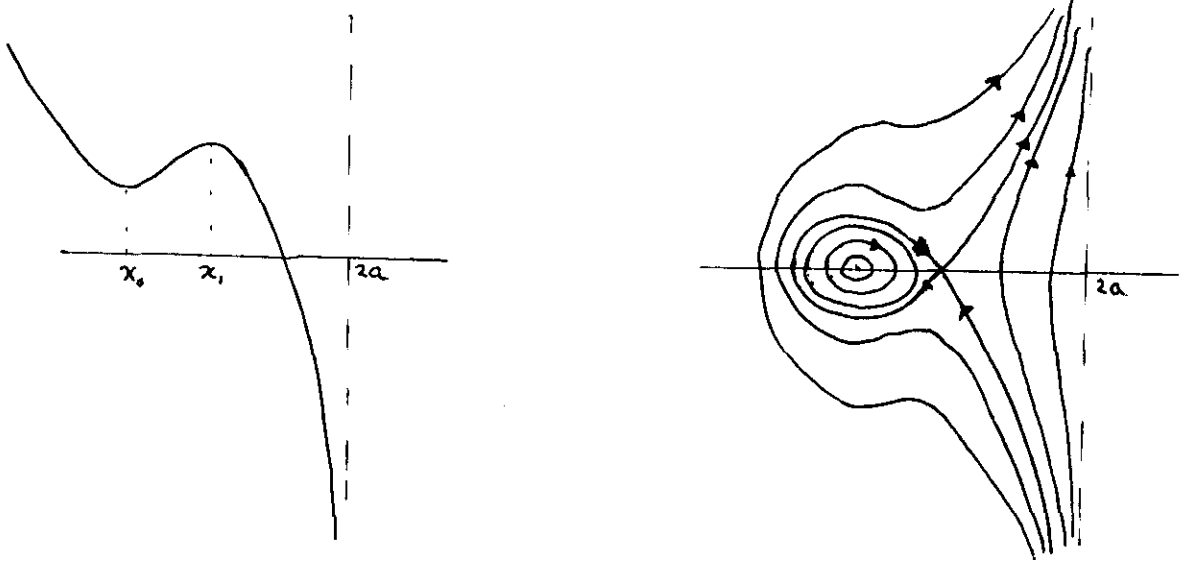
De aantrekkingskracht tussen de draden is te groot voor de veerkracht.

2. $\lambda = a$. Het punt $(a,0)$ is een (ontaard) singulier punt. Ook hier is F dalend.



Het evenwichtspunt is blijkbaar instabiel.

3. $\lambda < a$. Er zijn twee singuliere punten. Het maximum van F correspondeert met een zadelpunt, het minimum met een centrum.



We zien dat in het geval $\lambda < a$ er een trilling (periodieke oplossing) mogelijk is om het stabiele evenwichtspunt.

Als het systeem wrijving heeft, dan neemt de energie af. Als bijv. de DV luidt

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + f(x) = 0$$

dan is

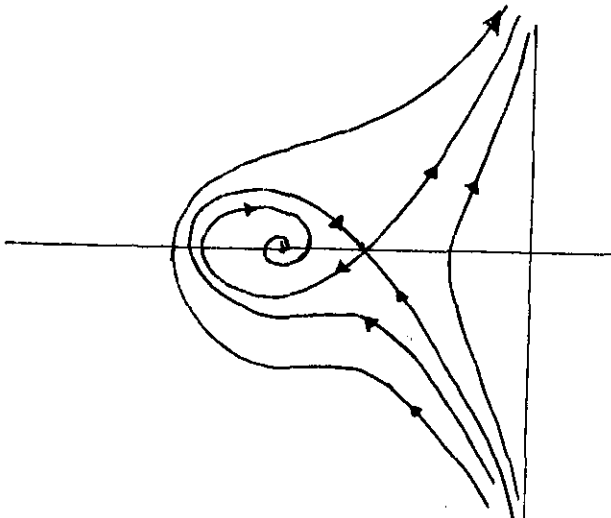
$$\frac{d}{dt} (\frac{1}{2}y^2 + F(x)) = -\alpha y^2 .$$

Algemener, voor DV (1) geldt

$$\frac{d}{dt} (\frac{1}{2}y^2 + F(x)) = -g(x,y)y < 0$$

als $g(x,y)y > 0$ voor alle y (positieve wrijving).

In bovenstaand voorbeeld, geval $\lambda < a$, krijgen we een gedempte trilling

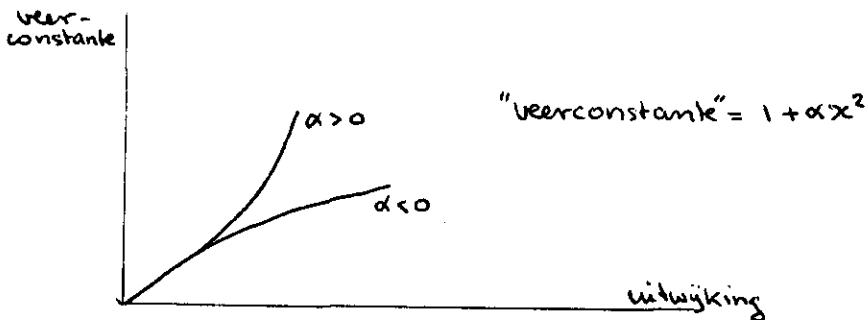


Opgave 1. Beschrijf het gedrag van de oplossing van het conservatieve systeem

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

waar f wordt gegeven door

- i) $f(x) = x + \alpha x^3$, de niet-lineaire veer. $\alpha > 0$: harde veer, $\alpha < 0$: zachte veer. In het eerste geval neemt de "veerconstante" toe, in het tweede geval af bij toenemende uitwijking.



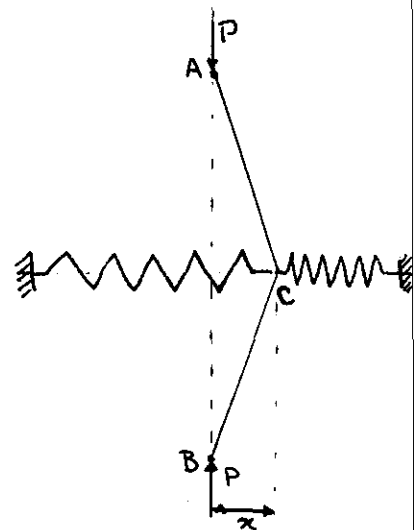
- ii) $f(x) = \sin x$, de slinger.

Opgave 2. De punten A en B kunnen langs de y-as bewegen. Het punt C over de x-as. De kracht P is constant. De veren zijn hard met veerconstante $\alpha + \beta x^2$ met $\alpha, \beta > 0$.

Voor welke waarden van P is de evenwichtsstand $x = 0, \dot{x} = 0$ stabiel?

Geef een faseportret van de oplossingen.

Opmerking. Benader eerst $\arcsin x$ door termen van de graad ≤ 3 ; beschouw ook het exacte geval.

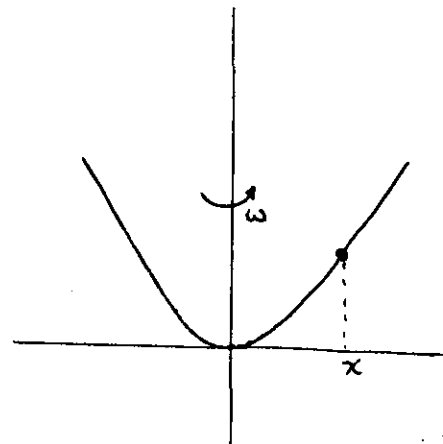


Opgave 3. Een kraaltje kan zonder wrijving langs een parabool bewegen. Deze parabool heeft de z-as als as en draait om de z-as met constante hoeksnelheid.

Laat zien dat de volgende bewegingsvergelijking geldt:

$$\ddot{x} = - \frac{(\lambda + \dot{x}^2)x}{1 + x^2}$$

(na normalisatie). Geef een beschrijving van de oplossing in het (x, \dot{x}) -vlak (fasevlak).



Opgave 4 (Ecologisch systeem). Als het aantal individuen van een bepaald (dieren- of planten-) soort in een gegeven milieu gegeven wordt door $x(t)$, dan is in het eenvoudigste model de relatieve groei \dot{x}/x een positieve constante. In dat geval is de toename exponentieel. Gewoonlijk zal echter de relatieve groei afnemen op grond van onvoldoende leefmogelijkheden. Een realistischer aanname is dan bijv. $\dot{x}/x = a - bx$, waar a en b positief zijn. (Ga na hoe $x(t)$ hier verloopt.) We beschouwen nu de situatie waarin twee soorten voorkomen, een roofdier en een prooi, waarvan de aantallen worden gegeven door $y(t)$ resp. $x(t)$. De relatieve groei van de prooi wordt nadelig beïnvloed door de aanwezigheid van veel roofdieren. De relatieve groei van de roofdieren is negatief bij afwezigheid van prooi en neemt toe als er voldoende prooi aanwezig is. Een eenvoudig model is:

$$\frac{\dot{x}}{x} = a - by = b(\alpha - y)$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = -c + dx = -d(\beta - x)$$

waar $a, b, c, d, \alpha, \beta > 0$.

Ga het verloop van de oplossingen na (uiteraard alleen maar in het eerste kwadrant). Zoek een expliciete formule voor de banen.

HOOFDSTUK V. STORINGSREKENING

1. Beginwaardeproblemen

We beschouwen het BWP

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t, \mu) \\ x(0) &= c(\mu) \end{aligned}$$

waar f een analytische functie van (x, μ) en c een analytische functie van μ is. Een analytische functie is een functie die in de omgeving van elk punt een machtreeksontwikkeling heeft. Laten we aannemen dat f gedefinieerd is voor $(x, t, \mu) \in G \times (-\mu_0, \mu_0)$, waar G een gebied in \mathbb{R}^{n+1} is, en dat (1) voor $\mu = 0$ een oplossing $x_0(t)$ heeft op een interval $[0, T]$. Volgens I § 4 is er een $\mu_1 > 0$ zodat (1) een oplossing $t \mapsto x(t, \mu)$ heeft op $[0, T]$ voor $|\mu| < \mu_1$. Bovendien geldt (zie III § 1) voor $x_\mu(t, \mu)$ (de partiële afgeleide van x naar μ):

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_\mu &= A(t, \mu)x_\mu + u(t, \mu) \\ x_\mu(0, \mu) &= c_\mu(\mu) , \end{aligned}$$

waar

$$A(t, \mu) := f_x(x(t, \mu), t, \mu) , \quad u(t, \mu) := f_\mu(\xi(t, \mu), t, \mu) .$$

Op grond van de analyticiteit van f en c kan men bewijzen (zie [C&L], [R]) dat $\mu \mapsto x(t, \mu)$ een analytische functie is voor $(t, \mu) \in [0, T] \times (-\mu, \mu)$; uitgeschreven:

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (|\mu| < \mu_2) .$$

Uit bovenstaande volgt dat $x_0(t) = x(t, 0)$ (zoals we reeds gezien hebben), en dat $x_1(t)$ voldoet aan (2) met $\mu = 0$. In het algemeen is x_k oplossing van een DV van de vorm

$$\dot{x}_k = A(t)x_k + u_k(t) , \quad x_k(0) = c_k$$

waar $A(t) = A(t, 0)$ en $u_k(t)$ uitgedrukt kan worden in x_0, \dots, x_{k-1} en c_k gedefinieerd door

$$c(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mu^k .$$

We zien dat de FO van $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ hierbij een belangrijke rol speelt. Als deze bekend is, kan men de functies x_k immers door successieve integratie berekenen:

$$x_k(t) = \phi(t)c_k + \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(\tau)u_k(\tau)d\tau .$$

Voorbeeld 1. De Van der Pol vergelijking

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 , \quad x(0) = a(\mu) , \quad \dot{x}(0) = 0 ,$$

waar $a(\mu) = a_0 + a_1\mu + \dots$. De substitutie $x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + \dots$ geeft

$$\begin{aligned} (\ddot{x}_0 + \mu\ddot{x}_1 + \mu^2\ddot{x}_2 + \dots) + \mu(x_0^2 + 2\mu x_0 x_1 + \dots - 1)(\dot{x}_0 + \mu\dot{x}_1 + \dots) + \\ + (x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) = 0 . \end{aligned}$$

Gelijkstelling van coëfficiënten van μ^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) levert

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 , \quad x_0(0) = a_0 , \quad \dot{x}_0(0) = 0$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = - (x_0^2 - 1)\dot{x}_0 , \quad x_1(0) = a_1 , \quad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = - (x_0\dot{x}_1 + 2\dot{x}_0 x_1)x_0 , \quad x_2(0) = a_2 , \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

.....

De oplossing van het BWP

$$\ddot{x} + x = u(t) , \quad x(0) = a , \quad \dot{x}(0) = 0$$

wordt gegeven door (zie II § 3)

$$x(t) = a \cos t + \int_0^t \sin(t - \tau)u(\tau)d\tau .$$

Derhalve

$$x_0(t) = a_0 \cos t$$

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= a_1 \cos t + a_0 \int_0^t \sin(t-\tau) \sin \tau (a_0^2 \cos^2 \tau - 1) d\tau = \\
 &= -\frac{1}{4} a_0^3 (\cos^3 t \sin^3 t + \cos^4 t \sin t) + \\
 &+ \left(\frac{1}{8} a_0^2 - \frac{1}{2}\right) \cos^3 t \sin t + \frac{1}{2} \cos^2 t \sin t + \\
 &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} a_0^2\right) t \cos t - \left(\frac{1}{4} a_0^2 - \frac{1}{2}\right) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Een beperking van deze methode is, dat de afgebroken reeksen slechts op een eindig tijdsinterval een benadering vormen. Voor grote waarden van t zal bijv. de term met $t \cos t$ in $x_1(t)$ ervoor zorgen dat het verschil van de echte oplossing (waarvan men kan bewijzen dat ze begrensd is) en de functie $x_0(t) + \mu x_1(t)$ zeer grote waarden kan aannemen (tenzij $a_0 = 2$).

2. Periodieke oplossingen

Het bezwaar van de in § 1 genoemde methode treedt niet op als men een periodieke oplossing van de DV construeert, omdat men dan de oplossing slechts over één periode hoeft te berekenen. Als in de DV

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, t, \mu)$$

de functie f periode $T(\mu)$ heeft voor alle $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, waar $\mu \mapsto T(\mu)$ een analytische functie is, dan is de oplossing van de DV met beginwaarde $x(0) = y$ (notatie $\xi(t, y, \mu)$) periodiek als $\xi(T(\mu), y, \mu) = y$. Dit geeft een vergelijking voor y . Laten we aannemen dat de oplossing $p(t) := \xi(y, c_0, 0)$ periode $T(0)$ heeft. Als we dan

$$(2) \quad F(\mu, y) := \xi(T(\mu), y, \mu) - y$$

definiëren, dan is $F(0, c_0) = 0$. Volgens de impliciete-functie-stelling is er een oplossing $c(\mu)$ van de vergelijking $F(\mu, y) = 0$, die continu is en voldoet aan $c(0) = c_0$, als de functionaalmatrix $F_y(0, c_0)$ niet-singulier is (zie [A&A] 6.6.1). Men kan zelfs bewijzen dat dan $\mu \mapsto c(\mu)$ analytisch is als F analytisch is. We definiëren

$$(3) \quad A(t) := f_x(p(t), t, 0) .$$

Laat $\phi(t)$ de FO zijn van de gevarieerde vergelijking:

$$(4) \quad \dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t), \quad \phi(0) = I.$$

Dan weten we dat $\xi_y(t,0,0) = \phi(t)$ (III § 1). Derhalve is de voorwaarde " $F_y(0, c_0)$ is regulier" equivalent met: $1 \notin \sigma(\phi(T))$. Hiermee hebben we het eerste deel van de volgende stelling bewezen.

Stelling 1. Laat de functie f in (1) t.a.v. t een periode $T(\mu)$ hebben, laat $(x, \mu) \mapsto f(x, t, \mu)$ en $\mu \mapsto T(\mu)$ analytisch zijn. Stel dat $p(t)$ een oplossing van (1) voor $\mu = 0$ is met periode $T(0)$ en dat de 1 geen eigenwaarde is van $\phi(T)$, gedefinieerd door (3) en (4). Dan bestaat er een functie $(t, \mu) \mapsto p(t, \mu)$, periodiek met periode $T(\mu)$ t.a.v. t en analytisch t.a.v. μ (voor kleine μ), zodat $\dot{p}(t, \mu) = f(p(t, \mu), t, \mu)$. Als alle eigenwaarden $\lambda \in \sigma(\phi(T))$ voldoen aan $|\lambda| < 1$, dan is de periodieke oplossing $p(t, \mu)$ uniform asymptotisch stabiel.

Opgave 1. Bewijs het tweede gedeelte.

Voorbeeld. De vergelijking van Duffing voor de gedwongen trilling van een niet-lineaire veer.

$$(3) \quad \ddot{x} + x + \mu x^3 = H \cos \omega t.$$

We nemen aan dat $\omega \neq 1$, $\omega \geq 0$. Voor $\mu = 0$ is er een éénduidige periodieke oplossing met periode $2\pi/\omega$. Deze oplossing is eenduidig als $\frac{1}{\omega} \notin \mathbb{Z}$

$$p(t) = \frac{H}{1 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Schrijven we de DV als een stelsel

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x - \mu x^3 + H \cos \omega t$$

dan is

$$\underline{f}_x(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

onafhankelijk van t . Er geldt

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \phi\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{\omega} & \sin \frac{2\pi}{\omega} \\ -\sin \frac{2\pi}{\omega} & \cos \frac{2\pi}{\omega} \end{bmatrix}$$

Er geldt $1 \in \sigma(\phi(\frac{2\pi}{\omega}))$ dan en slechts dan als $\cos \frac{2\pi}{\omega} = 1$, dus als $\omega = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$. Als we aannemen dat dit niet het geval is, dan kunnen we stelling 1 toepassen. Er bestaat dan een periodieke oplossing $x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + \dots$ van (1) met $x(0, \mu) = a(\mu) = a_0 + a_1\mu + \dots$, $\dot{x}(0, \mu) = b(\mu) = b_0 + b_1\mu + \dots$ waar $x_0(t) = x(t, 0) = p(t)$. Het is niet duidelijk op grond van stelling 1 of de oplossing stabiel is.

Substitutie van de reeks in de DV levert

$$\ddot{x}_0 + x_0 = H \cos \omega t \quad (\text{dit is bekend omdat } x_0 = p),$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -x_0^3$$

dus

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 \cos t + b_1 \sin t - \int_0^t \sin(t-\tau) \left(\frac{H}{1-\omega^2}\right)^3 \cos^3 \omega \tau \, d\tau = \\ &= a_1 \cos t + b_1 \sin t - \frac{1}{8} \left(\frac{H}{1-\omega^2}\right)^3 \left\{ \frac{3 \cos t}{1-\omega^2} + \frac{\cos 3\omega t}{1-9\omega^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4-28\omega^2}{(1-\omega^2)(1-9\omega^2)} \cos t \right\}. \end{aligned}$$

De periodiciteitsvoorwaarde houdt in dat de termen met $\sin t$ en $\cos t$ verdwijnen (waarom?). Hieruit volgt:

$$a_1 = \frac{(1-7\omega^2)H^3}{2(1-\omega^2)^4(1-9\omega^2)}, \quad b_1 = 0.$$

Merk op dat de noemer niet nul is omdat $\frac{1}{\omega} \notin \mathbf{Z}$. De periodieke oplossing $x_1(t)$ wordt:

$$x_1(t) = -\frac{1}{8} \frac{H^3}{(1-\omega^2)^3} \left\{ \frac{3 \cos \omega t}{1-\omega^2} + \frac{\cos 3\omega t}{1-9\omega^2} \right\}.$$

Opgave 2. Voer een analoge berekening uit voor de DV

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x + \mu x^3 = H \cos \omega t$$

Laat zien dat hier de periodieke oplossing asymptotisch stabiel is, als $a > 0$.

Als de functie f in stelling 1 autonoom is, dan is de stelling onbruikbaar omdat, zoals we in III §5 hebben gezien, dan altijd $1 \in \sigma(\Phi(T))$ geldt. We hebben een analoge stelling voor deze situatie (geen bewijs, zie [CL]).

Stelling 2. Laat f voldoen aan de in stelling 1 geëiste voorwaarde en laat f bovendien autonoom zijn. Als p een periodieke oplossing van (1) is voor $\mu = 0$ met periode T , en als 1 een enkelvoudige eigenwaarde van $\Phi(T)$ is, dan is er een functie $(t, \mu) \mapsto p(t, \mu)$ en een functie $\mu \mapsto T(\mu)$, zodat beide analytisch zijn t.a.v. μ en p periode $T(\mu)$ heeft t.a.v. t , waarbij p een oplossing van (1) is. Als alle eigenwaarden (behalve 1) voldoen aan $|\lambda| < 1$, dan is p baan-asymptotisch stabiel.

Opgave 3. Beschouw het randwaardenprobleem

$$\begin{aligned} (*) \quad & \dot{x}(t) = f(x, t, \mu) \quad (0 \leq t \leq T) \\ & g(x(0), x(T), \mu) = 0 \end{aligned}$$

waar

$$f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n), \quad g \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

Laat $p(t)$ een oplossing zijn van (*) voor $\mu = 0$. Formuleer voldoende voorwaarden opdat er voor kleine μ een oplossing $p(t, \mu)$ van (*) bestaat, die een C^1 functie is, met $p(t, 0) = p(t)$.

3. De middelingsmethode

We beschouwen hier een DV van de vorm

$$\dot{x} = \mu f(x, t, \mu)$$

waar f periode T (onafhankelijk van μ) heeft en μ een kleine parameter is. We vragen ons af of er een periodieke oplossing bestaat voor kleine μ . Het is duidelijk dat er periodieke oplossingen (nl. $p = \text{const.}$) bestaan voor $\mu = 0$. De stellingen van § 2 zijn echter niet van toepassing omdat $A(t) = 0$ ($0 \leq t \leq 1$) en dus $\Phi(T) = I$ is. Niettemin is het gestelde probleem van belang.

Voorbeeld 1. Beschouw de DV

$$(2) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = -\mu f(x, \dot{x}, t, \mu)$$

waar f periodiek t.o.v. t is met periode 2π . Neem aan dat er bijna resonantie optreedt: $\omega^2 = 1 + \mu\eta$, waar μ klein en η constant. Gevraagd worden oplossingen met periode 2π . Als $\mu = 0$, dan zijn alle oplossingen periodiek

$$(3) \quad \begin{cases} x = r \cos(t + \varphi) \\ \dot{x} = -r \sin(t + \varphi) \end{cases} .$$

We zoeken nu voor kleine $\mu \neq 0$ ook een oplossing van de vorm (2) maar nu met r en φ variabel (dit is de zg. variatie-van-constanten-methode). Het komt erop neer dat we het met (1) corresponderende stelsel

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \mu f(x, y, t, \mu) \end{cases}$$

door de substitutie $x = r \cos(t + \varphi)$, $y = -r \sin(t + \varphi)$ transformeren tot een stelsel DV's voor r en φ . Omdat r en φ constant zijn voor $\mu = 0$ verwachten we dat r en φ weinig variëren voor kleine μ . Inderdaad levert een korte berekening dat

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{r} = \mu g \sin(t + \varphi) \\ r\dot{\varphi} = \mu g \cos(t + \varphi) \end{cases}$$

waar

$$(6) \quad g(x, y, t, \mu) := \eta x + f(x, y, t, \mu) .$$

In (5) hebben we g geschreven voor $g(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi), t, \mu)$. We zien dat (5) een DV is van het type 1.

In het algemeen kan men een DV van het type

$$(7) \quad \dot{x} = f(x, t, \mu)$$

waarbij voor $\mu = 0$ alle oplossingen periode T hebben, zeg $p(t, c)$, waar c de beginwaarde is (of een andere constante), door de substitutie $x = p(t, z)$ herleiden tot een DV van het type (1). We keren nu terug naar de behandeling van (1). Gedurende een periode zal de x weinig variëren. Het is een voor de hand liggende gedachte om in eerste benadering aan te nemen dat x constant blijft in het rechterlid. Als we bovendien μ in de functie f door nul vervangen, dan krijgen we $\dot{x}(t) \approx \mu f(x(0), t, 0)$. De periodiciteitsvoorwaarde wordt dan

$$x(0) = x(T) \approx \mu \int_0^T f(x(0), t, 0) dt + x(0) .$$

We definiëren derhalve

$$(8) \quad F(x) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt$$

en vergelijken (1) met de gemiddelde DV

$$(9) \quad \dot{y} = \mu F(y) .$$

We kunnen (1) ontstaan denken uit (9) door een storing die misschien niet overal, maar toch wel gemiddeld klein is:

$$\dot{x} = \mu F(x) + \mu \{f(x, t, \mu) - F(x)\} .$$

Het ligt voor de hand periodieke oplossingen van (9) als benaderingen voor periodieke oplossingen van (1) te gebruiken. Uit (9) kunnen we de factor μ wegwerken door de substitutie $\tau = \mu t$. Dan vinden we

$$(10) \quad \frac{dy}{d\tau} = F(y) .$$

Een oplossing van (10) met periode T_1 correspondeert met een oplossing van (9) met periode T_1/μ , hetgeen naar ∞ nadert als $\mu \rightarrow 0$. We kunnen op deze manier geen oplossing van (1) met periode T verwachten, tenzij $T_1 = 0$, d.w.z. tenzij we te maken hebben met een constante oplossing. Zulke oplossingen worden gekarakteriseerd door de vergelijking $F(y) = 0$.

Stelling. Laat in (1) f gedefinieerd en \mathcal{C}' zijn in $G \times \mathbb{R} \times (-\mu_0, \mu)$, en laat f periode T hebben t.a.v. t . Zij $a \in G$, $F(a) = 0$ en $F_x(a)$ niet singulier, waar F gedefinieerd is door (8) en $F_x(a)$ de functionaalmatrix van F in a is. Dan bestaat er voor voldoende kleine $|\mu|$ een oplossing $x(t, \mu)$ van (1) met periode T , die uniform t.a.v. t tot a nadert als $\mu \rightarrow 0$. Als van $F_x(a)$ alle eigenwaarden een negatief reëel deel hebben en $\mu > 0$, dan is deze periodieke oplossing \mathcal{UAS} .

Bewijs. Laat $\xi(t, x_0, \mu)$ de oplossing van (1) zijn met $\xi(0, x_0, \mu) = x_0$. Er geldt $\xi(t, a, 0) = a$. In het bijzonder is deze oplossing gedefinieerd op $[0, T]$. Daarom bestaat er een $\mu_0 > 0$ en een $\delta > 0$ zodat de oplossing $\xi(t, x_0, \mu)$ gedefinieerd is op $[0, T]$ als $|\mu| < \mu_0$, $|x_0 - a| < \delta$. Derhalve is voor deze waarden van x_0 en μ de afbeelding $x_0 \mapsto \xi(T, x_0, \mu)$ gedefinieerd en de periodiciteitsconditie wordt $\xi(T, x_0, \mu) = x_0$, hetgeen een vergelijking is voor x_0 . We kunnen ook schrijven:

$$\mu \int_0^T f(\xi(t, x_0, \mu), t, \mu) dt = 0 .$$

Definiëren we

$$H(c, \mu) := \int_0^T f(\xi(t, c, \mu), t, \mu) dt$$

dan betekent dit voor $\mu \neq 0$

$$H(x_0, \mu) = 0 .$$

Er geldt

$$H(a, 0) = \int_0^T f(a, t, 0) dt = TF(a) = 0$$

en $H_c(a, 0) = TF_x(a)$ is niet singulier.

We kunnen weer de impliciete-functie-stelling toepassen op grond waarvan er een \mathcal{C}' functie $c(\mu)$ bestaat met $c(0) = a$ en zodat $H(c(\mu), \mu) = 0$ voor voldoende kleine μ . De functie $\xi(t, c(\mu), \mu)$ is de gevraagde oplossing. (Merk op dat we de impliciete-functie-stelling pas kunnen toepassen, nadat we in de periodiciteitsconditie door μ hebben gedeeld.) We bewijzen nu de stabiliteit

van $x(t, \mu)$. Laat van $S := F_x(a)$ alle eigenwaarden een negatief reëel deel hebben. Op grond van de stelling van Poincaré-Liapunov is de oplossing $x(t, \mu) \in \mathcal{UAS}$, als de nuloplossing van de gevarieerde DV

$$(11) \quad \dot{y}(t) = \mu P(t, \mu)y$$

met

$$P(t, \mu) := f_x(x(t, \mu), t, \mu)$$

\mathcal{UAS} is. Er geldt $P(t, 0) = f_x(a, t, 0)$ en dus

$$(12) \quad \int_0^T P(t, 0) dt = TS .$$

We definiëren nu

$$H(t) := \int_0^t (P(\tau, 0) - S) d\tau .$$

Dan is op grond van (10) $H(T) = H(0) = 0$, zodat ook $H(t)$ periode T heeft. (Immers, ook $P(t, 0)$ heeft periode T .) In het bijzonder is $H(t)$ begrensd, zodat voor voldoende kleine μ (zeg $|\mu| \leq \mu_1$) de matrix $I - \mu H(t)$ inverteerbaar is voor alle t . De inverse heeft de vorm

$$(I - \mu H(t))^{-1} = I + \mu R(t, \mu)$$

waar $R(t, \mu)$ een begrensde matrix is voor $t \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leq \mu_1$. We maken in (11) de substitutie $z(t) = (I - \mu H(t))y(t)$. Op grond van bovenstaande is $|y(t)| \leq c_1 |z(t)| \leq c_2 |y(t)|$ zodat de stabiliteitseigenschappen van (11) en van de DV voor $z(t)$ gelijk zijn. Deze DV is

$$(13) \quad \dot{z}(t) = \mu Sz(t) + \mu Q(t, \mu)z(t)$$

waar

$$Q(t, \mu) \rightarrow 0 \quad (\mu \rightarrow 0, \text{ uniform t.a.v. } t).$$

In (13) passen we de tijdtransformatie $\tau = \mu t$ toe:

$$(14) \quad \frac{dz}{d\tau} = Sz + Q(\tau/\mu, \mu)z .$$

Uit III § 4 Opgave 5 volgt dat (14) en dus (13) *uA§* is voor $\mu > 0$. \square

Voorbeeld 2. We passen de stelling toe op voorbeeld 1, waarbij we de extra veronderstelling maken, dat f de gedaante

$$(15) \quad f(x, y, t, \mu) = h(x, y, \mu) + H \cos t$$

heeft (een storingsterm h die de wrijving en de niet-lineariteiten bevat en een opgelegde trilling $H \cos t$; beide termen worden klein verondersteld, ze worden met μ vermenigvuldigd in de DV). We berekenen voor de DV (5) de functie

$$\underline{F}(\underline{x}) =: \begin{bmatrix} Y(r, \varphi) \\ Z(r, \varphi) \end{bmatrix}.$$

Er geldt

$$\begin{aligned} Y(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi), t, 0) \sin(t + \varphi) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos t, -r \sin t, t - \varphi, 0) \sin t dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos t, -r \sin t, t - \varphi, 0) \sin t dt = \\ &= P(r) + \frac{1}{2} H \sin \varphi \end{aligned}$$

waar

$$(16) \quad P(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r \cos t, -r \sin t, 0) \sin t dt$$

en

$$rZ(r, \varphi) = \frac{1}{2} \eta r + Q(r) + \frac{1}{2} H \cos \varphi$$

waar

$$(17) \quad Q(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r \cos t, -r \sin t, 0) \cos t dt.$$

De vergelijking $\underline{F}(\underline{a}) = \underline{0}$ luidt hier:

$$(18) \quad \begin{cases} Y(r, \varphi) = P(r) + \frac{1}{2}H \sin \varphi = 0 \\ rZ(r, \varphi) = \frac{1}{2}nr + Q(r) + \frac{1}{2}H \cos \varphi = 0 . \end{cases}$$

We zullen voornamelijk geïnteresseerd zijn in de waarden van r (de amplitude) van de periodieke oplossingen en niet zozeer in de fase φ . Uit (18) kunnen we φ elimineren, zodat we een vergelijking voor r overhouden:

$$(19) \quad V(\eta, r) := P^2 + (Q + \frac{1}{2}nr)^2 = \frac{1}{4}H^2 .$$

Als we (18) hebben opgelost, dan moeten we nog nagaan of de eigenwaarden van de matrix

$$\begin{bmatrix} Y_r & Y_\varphi \\ Z_r & Z_\varphi \end{bmatrix}$$

ongelijk aan nul zijn. Wil men aantonen dat de oplossing *UAS* is, dan moet men laten zien dat deze eigenwaarden een negatief reëel deel hebben. De eerste voorwaarde luidt

$$(20) \quad Y_r Z_\varphi - Y_\varphi Z_r \neq 0 .$$

De tweede voorwaarde:

$$(21) \quad \begin{cases} Y_r + Z_\varphi < 0 \\ Y_r Z_\varphi - Y_\varphi Z_r > 0 . \end{cases}$$

Met behulp van (18) kunnen we deze voorwaarden nader uitwerken:

$$Y_r + Z_\varphi = P'(r) - \frac{1}{2}Hr^{-1} \sin \varphi = P' + rP = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rP(r))$$

en

$$\begin{aligned} Y_r Z_\varphi - Y_\varphi Z_r &= P'(r)(-\frac{1}{2}Hr^{-1} \sin \varphi) - (\frac{1}{2}H \cos \varphi)(-r^{-2}Q + r^{-1}Q' - \frac{1}{2}Hr^{-2} \cos \varphi) = \\ &= r^{-1}P'P + (Q + \frac{1}{2}nr)(r^{-1}Q' + \frac{1}{2}nr^{-1}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V(\eta, r) = \frac{1}{r} V_r(\eta, r) . \end{aligned}$$

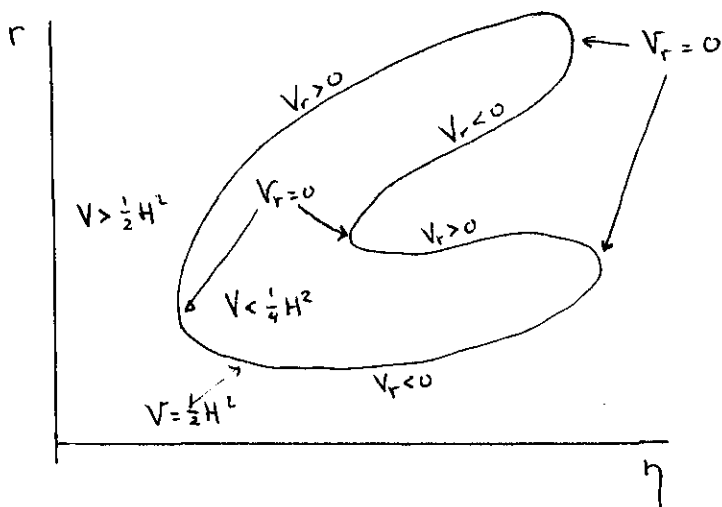
We kunnen dus uit stelling 1 de volgende conclusie trekken. Van de DV

$$(22) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = -\mu h(x, \dot{x}, \mu) - \mu H \cos t$$

met $\mu > 0$ klein, $\omega^2 = 1 + \mu\eta$, h continu differentieerbaar, kan men als volgt een periodieke oplossing vinden. Bepaal de functies P en Q d.m.v. (16) en

(17) en definieer $V(\eta, r)$ door (19). Los r op uit de vergelijking $V(\eta, r) = \frac{1}{4}H^2$. Daarna kan φ worden bepaald uit (18). Als $V_r(\eta, r) \neq 0$ voor de oplossing r , dan bestaat er een periodieke oplossing van (22) die benaderd wordt door $x(t) = r \cos(t + \varphi)$. Als $V_r(\eta, r) > 0$, $(rP(r))' < 0$, dan is deze oplossing *UAS*.

We zijn vooral geïnteresseerd in de resonantiekromme, d.w.z. de grafiek van r als functie van η bij verschillende waarden van H . Derhalve is het nuttig de niveaulijnen van V in het bovenhalfvlak van het (η, r) -vlak te schetsen.



Met behulp van deze niveaulijnen kan men de voorwaarden $V_r \neq 0$ en $V_r > 0$ gemakkelijk verifiëren.

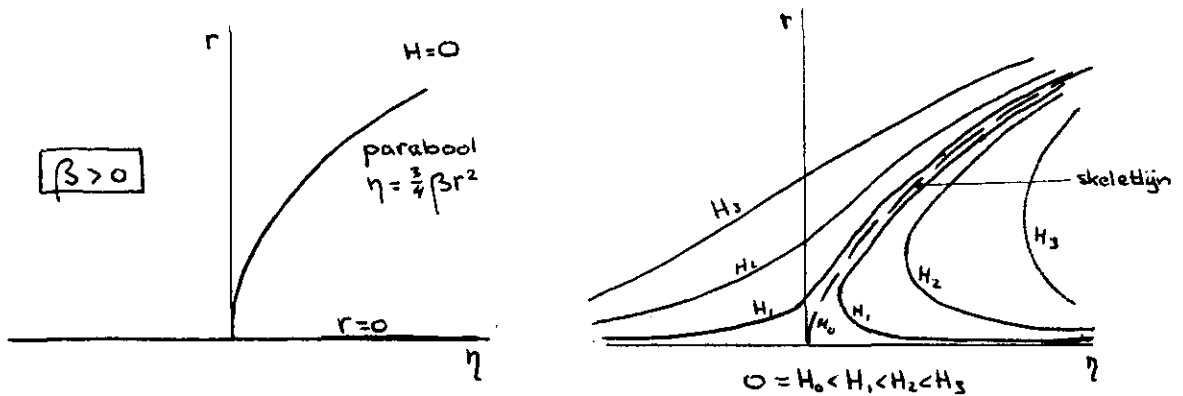
Voorbeeld 3 (de inhomogene Duffing vergelijking). We nemen in bovenstaand voorbeeld $h(x, y, \mu) = ay - \beta x^3$ waar $a > 0$, d.w.z. we beschouwen de DV

$$\ddot{x} + \mu a \dot{x} + \omega^2 x - \mu \beta x^3 = -\frac{1}{4} \mu H \cos t$$

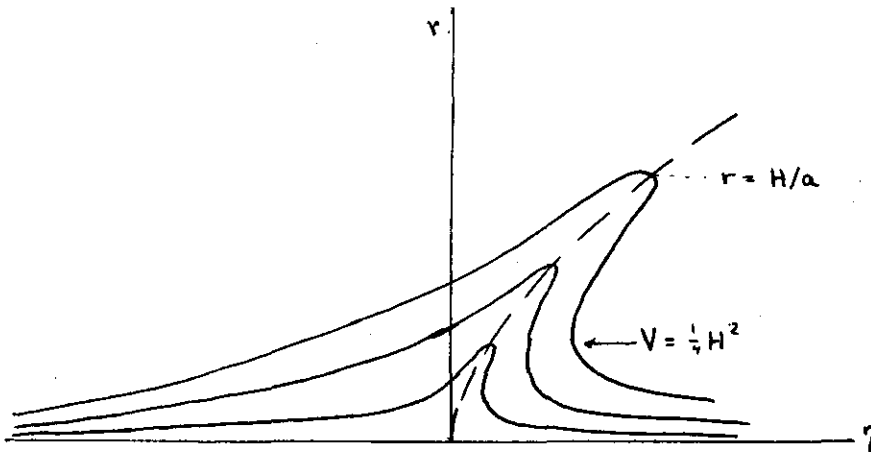
met $\omega^2 = 1 + \mu \eta$. Er geldt $P(r) = -\frac{1}{2}ar$, $Q(r) = -\frac{3}{8} \beta r^3$, en dus

$$V(\eta, r) = \frac{1}{4}a^2 r^2 + \left(\frac{1}{2}\eta r - \frac{3}{8} \beta r^3\right)^2.$$

De vergelijking $V(\eta, r) = \frac{1}{4}H^2$ is een derdegraadsvergelijking in r^2 . We proberen een kwalitatief beeld te krijgen van de niveaulijnen. Neem eerst aan dat $a = 0$. Dan is $V = 0$ voor $r = 0$ of $\eta = \frac{3}{4}\beta r^2$.



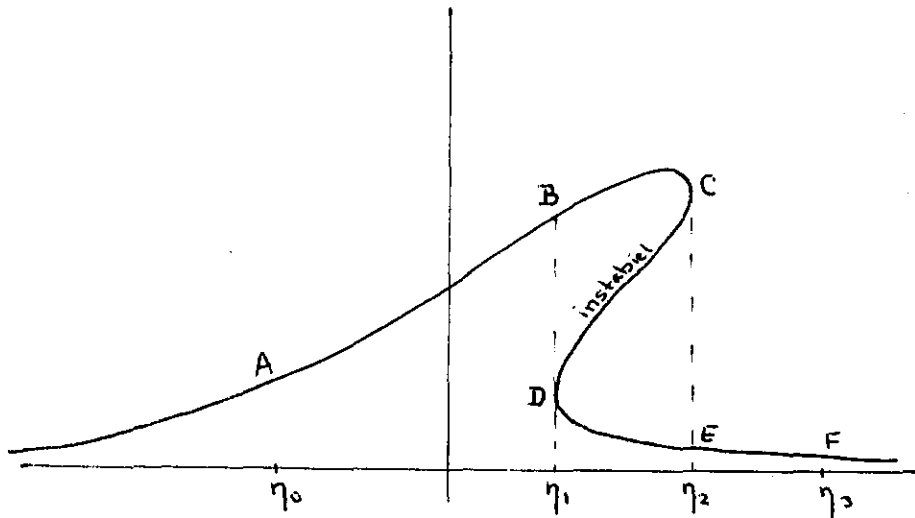
Als H klein is ligt de niveaulijn $V = \frac{1}{4}H^2$ dicht bij $r = 0$ of $\eta = \frac{3}{4}\beta r^2$. Bij toenemende H wordt de afstand groter. De lijn $\eta = \frac{3}{4}\beta r^2$ heet skeletlijn. Als $a > 0$ klein is krijgen we analoge krommen. De horizontale afstand van de niveaulijn tot de skeletlijn neemt af als r stijgt, totdat deze afstand 0 geworden is. Dit is het geval voor $r = H/a$.



Als $\beta = 0$ wordt de skeletlijn de r -as. Dan krijgen we de bekende lineaire resonantiekrommen. Voor een zachte veer (of slinger) is $\beta > 0$. Dan hebben de resonantiekrommen een afwijking naar rechts. Als $\beta > 0$ (harde veer), ligt de top links van de r -as. We onderzoeken nu in hoeverre aan de voorwaarden (20) en (21) is voldaan. Er geldt

$$\frac{d}{dr} (rP(r)) = \frac{d}{dr} (-\frac{1}{2}ar^2) = -ar < 0$$

als $a > 0$ en $r > 0$. Hieraan is voldaan als $a > 0$. In het geval $a = 0$ kunnen we dus geen asymptotische stabiliteit afleiden uit stelling 1. Verder is het teken van $V_r(\eta, r)$ af te lezen uit de figuur



In bovenstaande figuur is $V_r > 0$ op AC en DF, $V_r < 0$ op CD en $V_r = 0$ in C en D.

We zien dat er een eenduidig *uA's* periodieke oplossing wordt gevonden voor $\eta < \eta_1$ en $\eta > \eta_2$, maar dat er twee *uA's* en een instabiele oplossingen bestaan voor $\eta_1 < \eta < \eta_2$. Als men in het systeem η langzaam laat variëren van $\eta_0 < \eta_1$ tot $\eta_3 > \eta_2$ en dan weer terug naar η_0 , dan wordt de resonantie-kromme doorlopen van A naar C. Dan "springt" de oplossing naar E en loopt dan naar F. Op de weg terug wordt de kromme van F tot het punt D doorlopen en de periodieke oplossing springt dan naar B. Dit geeft aanleiding tot een soort hysteresisverschijnsel dat ook experimenteel is waargenomen.

Opgave 1. Behandel op analoge wijze:

i) De inhomogene Van der Pol vergelijking

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = -\mu H \cos t .$$

ii) De inhomogene Van der Pol vergelijking met niet-lineaire terugdrijvende kracht

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x - \mu\beta x^3 = -\mu H \cos t .$$

iii) De DV

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x - \mu\beta x^2 = -\mu H \cos t .$$

Kunt U het gevonden resultaat verklaren?

Opgave 2. Pas stelling 1 toe op voorbeeld 1, waar f de gedaante

$$f(x,y,t,\mu) = h(x,y,\mu) + Hx \cos 2t$$

heeft (systeem met parametrische aandrijving). Beschouw in het bijzonder het geval $h(x,y,\mu) = ay - \beta x^3$.

Voorbeeld 4. Beschouw nu het autonome systeem

$$(23) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = -\mu h(x, \dot{x}, \mu)$$

met $\omega^2 = 1 + \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \dots$. In dit geval kan stelling 1 niet onmiddellijk worden toegepast omdat Y en Z niet van φ afhangen, zodat $Y_r Z_\varphi - Y_\varphi Z_r = 0$. Er geldt immers

$$Y = P(r)$$

$$Z = \frac{1}{2}\eta + r^{-1}Q(r)$$

(zie voorbeeld 2). We zullen echter bewijzen dat (23) een periodieke oplossing met periode 2π heeft van de gedaante $x = r \cos(t + \varphi)$ met $r = r_0 + \mathcal{O}(\mu)$, $\varphi = \mathcal{O}(\mu)$ als $P(r_0) = 0$, $P'(r_0) \neq 0$ en als $\omega(\mu)$ geschikt wordt gekozen (i.h.b. $\eta_1 = -2r_0^{-1}Q(r_0)$). Vanwege de autonomie is het geen verlies van algemeenheid te veronderstellen dat $\varphi(0) = 0$ in $r \cos(t + \varphi)$. Daardoor verliezen we een onbekende in de periodiciteitsconditie die we echter weer terugkrijgen door ω variabel te kiezen.

Als $P'(r_0) < 0$, dan is de oplossing baan-asymptotisch stabiel.

Bewijs. Als we weer $x = r \cos(t + \varphi)$, $y = -r \sin(t + \varphi)$ stellen, dan geldt

$$\dot{r} = \mu g \sin(t + \varphi)$$

$$r\dot{\varphi} = \mu g \cos(t + \varphi)$$

waar $g = g(r \cos t, -r \sin t, \mu)$ en $g(x,y,\mu) := \eta x + h(x,y,\mu)$. We kiezen $\theta := t + \varphi(t)$ als nieuwe onafhankelijke variabele. Dan geldt

$$(24) \quad \frac{dr}{d\theta} = \mu \frac{rg \sin \theta}{r + \mu g \cos \theta} =: \mu f_1(r, \theta, \mu)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \mu \frac{g \cos \theta}{r + \mu g \cos \theta} =: \mu f_2(r, \theta, \mu).$$

De eerste vergelijking hangt niet van φ af. We beschouwen haar onafhankelijk van de tweede en passen stelling 1 erop toe:

$$\begin{aligned}
 F_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(r, \theta, 0) d\theta = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos \theta, -r \sin \theta, 0) \sin \theta d\theta = \\
 &= P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r \cos \theta, -r \sin \theta, 0) \sin \theta d\theta .
 \end{aligned}$$

Als dus $P(r_0) = 0$, $P'(r_0) = 0$ bestaat er een periodieke oplossing $r = \rho(\theta)$ van de eerste DV. Substitueren we deze in de tweede DV, dan moet gelden

$$F_2(r, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{g \cos \theta}{r + \mu g \cos \theta} d\theta = 0 .$$

Nu is $F_2(r, 0) = \frac{1}{2}\eta_1 r + Q(r) = 0$ als $\eta_1 = -2r^{-1}Q(r)$. Verder is

$$\frac{\partial F_2}{\partial \eta} (r, 0) = \frac{1}{2}$$

zodat op grond van de impliciete-functie-stelling er een functie $\eta(\mu)$ bestaat zodat $F_2(r, \mu) = 0$ geldt. Als μ klein genoeg is, dan is θ een stijgende functie van t , want

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{d\phi}{dt} = 1 + O(\mu) .$$

Voor (24) is de oplossing $r = \rho(\theta)$ *UAS* als $P'(r_0) < 0$, derhalve is ook de oplossing $x(t), y(t)$ baanasympotisch stabiel.

Voorbeeld 5. De vergelijking van Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 .$$

Voor $\mu = 0$ heeft elke oplossing periode 2π . Het is niet duidelijk wat de periode wordt wanneer $\mu \neq 0$. We voeren een schaaltransformatie van de tijd toe die de periode 2π maakt: $t = \omega\tau$, waarin ω nog onbekend is. Dan wordt de DV

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu\omega(x^2 - 1) \frac{dx}{d\tau} + \omega^2x = 0$$

met $\omega^2 = 1 + \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \dots$. We proberen dus een periodieke oplossing te vinden waarvan de periode ongeveer 1 is voor kleine μ . Hier is

$$h(x,y,\mu) = \omega(x^2 - 1) \frac{dx}{d\tau}$$

en dus

$$P(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 t - 1) r \sin^2 t dt = \frac{1}{2}r(1 - \frac{1}{2}r^2) .$$

$P(r) = 0$ als $r = 0$ (vervalt) of $r = 2$. We kiezen $r_0 = 2$. Er geldt $P'(r_0) = -1$. De periodieke oplossing is dus baanstabiel. Tenslotte $\eta_1 = -2r_0^{-1}Q(r_0) = 0$, zodat $\omega^2 = 1 + O(\mu^2)$ en dus de periode T van de oorspronkelijke vergelijking voldoet aan $T = 2\pi + O(\mu^2)$.

Opgave. Behandel op analoge manier

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x + \mu\beta x^3 = 0 .$$