TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE

MULTIVARIABELE

SYSTEMEN

Prof. Dr. Ir. M.L.J. Hautus

bewerkt door

Drs. F. Eising

Voorjaarssemester 1978

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Lineaire multivariabele systemen

Prof. dr. ir. M.L.J. Hautus
bewerkt door
drs. F. Eising

Dictaatnr. 2.220 Prijs f 8,–

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE MULTIVARIABELE SYSTEMEN

Prof.dr.ir. M.L.J. Hautus

bewerkt door

Drs. F. Eising

Voorjaarssemester 1978

Jan 78

Inhoudsopgave

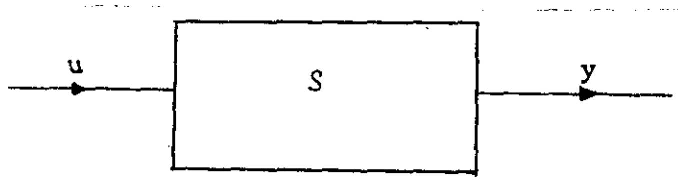
Vervolg inhoudsopgave blz.

HOOFDSTUK I. ALGEMENE BESCHOUWINGEN OVER LINEAIRE SYSTEMEN

1.1. *Ingang-uitgang beschrijving van lineaire tijdsinvariante systemen*

In dit dictaat zal een betrekkelijk beperkte klasse van systemen worden bestudeerd. Om een inzicht te krijgen in de betekenis van deze systemen zullen we in dit hoofdstuk en in het bijzonder in deze paragraaf eerst algemenere systemen definiëren en ons langzamerhand beperken tot de systemen waarmee wij ons uiteindelijk zullen bezighouden: *strict causale lineaire systemen met eindig dimensionale toestandsruimte*.

We beginnen met een aantal verbale definities: Een systeem is een geheel van grootheden (variabelen genoemd) tussen welke relaties bestaan. In een dynamisch systeem worden deze variabelen als functies van de tijd t beschouwd. Zo'n dynamisch systeem geeft men ook wel aan met de term proces. Bij een regelsysteem neemt men aan dat een aantal van de genoemde variabelen, ingangsvariabelen (of besturingen) genoemd, door ons naar willekeur kunnen gekozen, terwijl de andere variabelen, uitgangsvariabelen (of responsies) door de keuze van de ingangsvariabelen zijn bepaald. Zo'n regelsysteem kan men als volgt symbolisch weergeven



Hierin is $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))$ de vector van ingangsvariabelen en $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_r(t))$ de vector van uitgangsvariabelen. Als $m = r = 1$ spreekt men van een monovariabel systeem. Is $m > 1$ of $r > 1$ (of beide) dan noemt men het systeem multivariabel. Bij de wiskundige beschrijving van een regelsysteem gaan we uit van de tijdas T. We zullen ons in eerste instantie beperken tot de gevallen $T = \mathbb{R}$ en $T = \mathbb{Z}$. In het eerste geval spreekt men van een continu systeem, in het tweede geval van een discreet systeem. Meer correct zouden zijn de termen: systeem met continue tijd resp. systeem met discrete tijd. Als de tijdas is vastgesteld beschouwt men de ingangsruimte Ω (d.w.z. de ruimte van ingangsfuncties) en de uitgangsruimte Γ. Elementen $u \in \Omega$ zijn functies $u\colon T \to \mathbb{R}^m$ en elementen $y \in \Gamma$ zijn functies $y\colon T \to \mathbb{R}^r$. Gewoonlijk zal Ω echter niet alle functies $u\colon T \to \mathbb{R}^m$ bevatten en hetzelfde geldt voor Γ.

Een regelsysteem is dan een afbeelding

(1.1.1) $\quad S\colon \Omega \to \Gamma$.

Het systeem heet statisch (of geheugenloos) als voor elke t de uitgang y(t) alleen afhangt van u(t) en niet van u(τ) voor $\tau \neq t$. In dat geval is er sprake van een afbeelding

$$f\colon \mathbb{R}^m \times T \to \mathbb{R}^r \; .$$

Het ingang- uitganggedrag van het systeem wordt dan gegeven door:

(1.1.2) $\quad y(t) = f(u(t),t) \quad (t \in T)$.

De meeste systemen die van belang zijn, zijn echter niet statisch. Hierin hangt y(t) niet alleen af van de waarde van u op het tijdstip t maar ook van waarde van de ingang op andere tijdstippen. Wel veronderstelt men steeds dat de uitgang y niet beinvloed wordt door toekomstige waarden van u. Men drukt deze voorwaarde uit door te zeggen dat het systeem causaal of niet-anticiperend is.

Voor een causaal systeem geldt dus

$$S(u_1)(t) = S(u_2)(t) \quad (t \leq t_1)$$

als

$$u_1(t) = u_2(t) \quad (t \leq t_1) \; .$$

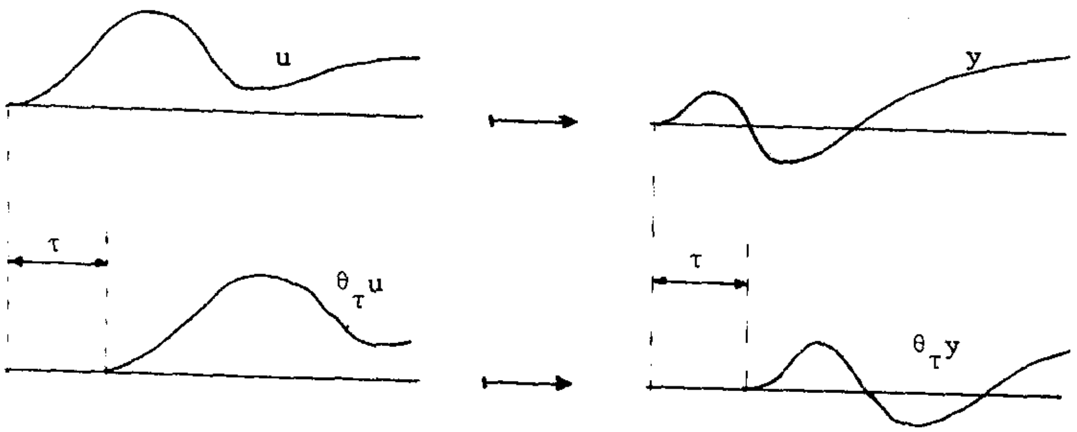
Men noemt S de ingang-uitgang functie (i/u-functie) van het systeem. De algemene gedaante van zo'n afbeelding is moeilijk aan te geven. We zullen ons gewoonlijk beperken tot lineaire systemen, dit zijn systemen waarin Ω en Γ lineaire ruimten (= vectorruimten) zijn en de afbeelding (1.1.1) een lineaire afbeelding. Voordat we specifieker worden over de aard van de ruimten Ω en Γ en de afbeelding f, zullen we nog een verdere beperking opleggen aan de door ons te bestuderen systemen. Daartoe voeren we een verschuivingsoperator in voor elke $\tau \in T$, d,m.v. de formule

(1.1.3) $\quad \theta_\tau(u)(t) := u(t - \tau) \quad (u \in \Omega;\ t \subset T)$.

Deze operator is analoog gedefinieerd op Γ. Dan noemen we een systeem tijdsinvariant als voor alle $\tau \in T$ geldt

(1.1.4) $\quad S(\theta_\tau(u)) = \theta_\tau(S(u))$.

Dit betekent het volgende: *Als een bepaalde ingangsfunctie* $t \mapsto u(t)$ *als uitgang levert* $t \mapsto y(t)$ *dan levert de ingang* $t \mapsto u(t - \tau)$ *als uitgang* $t \mapsto y(t - \tau)$. Een tijdsinvariant systeem heeft dus geen ingebouwde klok: Als we eenzelfde signaal een uur later aanbrengen krijgen we eenzelfde respons met een uur vertraging.



We zullen nu de door ons ingevoerde begrippen wat meer specificeren in het geval van continue systemen (zie voor discrete systemen 1.7).

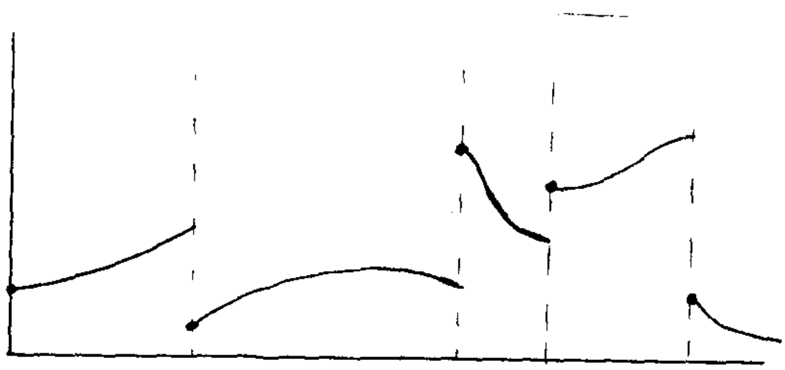
(1.1.5) DEFINITIE. (Continue systemen).

(i) *De tijdas* T *is de verzameling van reële getallen* $\mathbb{R}$.

(ii) *Een functie* $x: T \to \mathbb{R}^n$ *heet stuksgewijs continu als zij op elk eindig interval continu is op een eindig aantal punten na in welke linker- en rechter limieten bestaan. We zullen steeds aannemen dat de stuksgewijs continue functies rechts continu zijn, d.w.z. dat voor alle* $t \in T$ *geldt*

$$x(t) = \lim_{\delta \downarrow 0} x(t + \delta) \ .$$

De verzameling van stuksgewijs continue rechts continue functies $x: T \to \mathbb{R}^n$ *geven we aan met* SC^n. *De verzameling van functies* $x \in SC^n$ *met de eigenschap dat er een* t_0 *bestaat zodanig dat* $x(t) = 0$ *voor* $t \leq t_0$ *geven er aan met* SC^n_+.



Merk op dat een stuksgewijs continue functie op de hele tijdas wel oneindig veel discontinuïteiten kan hebben.

Met behulp van deze begrippen kunnen we de ruimte Ω van besturingen en de ruimte Γ definiëren

$$(1.1.6) \qquad \Omega := SC_+^m, \; \Gamma := SC_+^r .$$

Het is duidelijk dat Ω en Γ vectorruimten zijn. Een lineair systeem is dus een lineaire afbeelding

$$S: \Omega \to \Gamma .$$

De algemene gedaante van zo'n afbeelding zullen we niet geven. Een grote klasse van lineaire afbeeldingen vormen de integraaltransformaties gegeven door de formule

$$(1.1.7) \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (t \geq 0) .$$

Daarbij moeten natuurlijk beperkingen aan u en K worden opgelegd om de convergentie van de integraal in (1.1.7) te garanderen. Voor ons zijn deze restricties niet van belang omdat we ons zullen beperken tot causale systemen. Opdat (1.1.7) een causaal systeem voorstelt, is, zoals men gemakkelijk kan bewijzen, noodzakelijk en voldoende dat $K(t,\tau) = 0$ voor $\tau > t$. Voor een causaal systeem kunnen we dus in plaats van (1.1.7) schrijven

$$(1.1.8) \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)u(\tau)d\tau .$$

Dit is een integraal over een eindig interval aangezien $u \in \Omega$ en $\Omega = SC_+^m$. De $r \times m$-matrixwaardige functie K wordt impuls-responsie genoemd. Gewoonlijk zal K continu zijn. In dat geval is de convergentie van (1.1.8) voor elke $u \in \Omega$ verzekerd. Bovendien is dan y een continue functie. We zouden dus hebben kunnen volstaan met een kleinere ruimte dan Γ, nl. de verzameling van *continue* functies $y: T \to \mathbb{R}^r$. Wat de ingangsvariabele betreft is het essentieel dat we *stuksgewijs continue* functies toelaten. We willen nl. in staat zijn om op elk moment t de besturing te kiezen onafhankelijk van de waarde van die besturing op vroegere tijdstippen. Als we bijv. een besturing u_1 hebben en we willen vanaf een zeker ogenblik t_0 een andere besturing, nl. u_2, kiezen dan kunnen we dat bereiken door als besturing te nemen

$$(1.1.9) \quad u_3(t) := \begin{cases} u_1(t) & (-\infty < t < t_0) \\ u_2(t) & (t_0 \le t < \infty) . \end{cases}$$

Zelfs als u_1 en u_2 continu zijn, dan zal nog de zo geconstrueerde besturing u_3 niet continu zijn. De operatie (1.1.9) noemt men <u>concatenatie</u>. Wil een ruimte Ω van ingangsvariabelen zinvol zijn dan moet zij gesloten zijn t.o.v. concatenatie, d.w.z. dan moet als u_1 en u_2 in Ω liggen ook de d.m.v. (1.1.9) gegeven functie u_3 tot Ω behoren. De door (1.1.6) gedefinieerde ruimte Ω der stuksgewijs continue functies is een van de eenvoudigste klassen van functies die aan deze eigenschap voldoet. (Een andere eenvoudige maar zeer beperkte klasse met deze eigenschap is de ruimte van stuksgewijs constante besturingen.)

De ontoereikendheid van de ruimte der continue functies als ingangsruimte komt ook tot uiting bij het probleem van de optimalisatie van besturingen. Daarbij blijkt vaak dat binnen de klasse van continue besturingen er geen bestaat die optimaal is, terwijl er gewoonlijk wel een stuksgewijs continue optimale besturing (bijv. een zgn. "bang-bang"-besturing) bestaat (zie [OR], [LM]). In deze theorie beschouwt men vaak een nog algemenere klasse van besturingen, nl. functies u die op elk eindig interval absoluut (Lebesgue-) integreerbaar zijn. We zullen ons echter in dit college beperken tot stuksgewijs continue besturingen.

Niet elke causale lineaire afbeelding S: $\Omega \to \Gamma$ heeft een representatie van de vorm (1.1.8). Bijv. een statisch lineair systeem heeft de vorm

$$(1.1.10) \quad y(t) = D(t)u(t)$$

waarbij D een $r \times m$-matrixwaardige stuksgewijs continue rechts continue functie op T is. Men kan natuurlijk ook een combinatie van (1.1.8) en (1.1.10) hebben:

$$(1.1.11) \quad y(t) = D(t)u(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)u(\tau)d\tau .$$

Het systeem (1.1.8) heeft behalve lineariteit en causaliteit nog een andere eigenschap, nl. dat voor elke t de uitgang y(t) niet afhangt van u(t) maar alleen van $u(\tau)$ voor $\tau < t$. De waarde van u in een enkel punt heeft nl. geen invloed op de integraal in (1.1.8). Systemen met deze eigenschap noemen we <u>strict causaal</u>. Men kan zeggen dat in een strict causaal systeem de uitgang niet onmiddellijk reageert op de ingang maar dat er een (infinitesimale) vertraging optreedt.

Ook (1.1.11) geeft niet het meest algemene causaal lineair systeem aan. Een <u>zuivere vertrager</u> gegeven door de formule

(1.1.12) $y(t) = u(t - \theta) \quad (t \in T)$

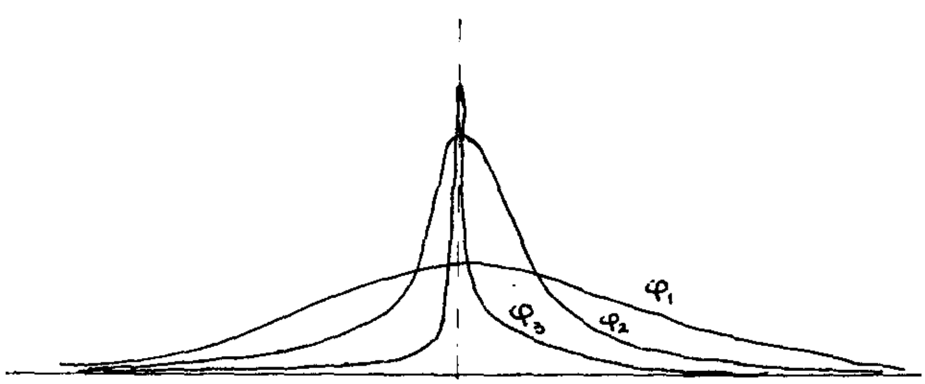
waarbij $\theta > 0$ en waar $u(t) = 0$ wordt gedefinieerd voor $t < 0$, voldoet ook aan de gestelde eisen en is niet te schrijven in de vorm (1.1.11). We zullen nu m.b.v. de zogenaamde <u>deltafunctie</u> (of beter gezegd de deltadistributie) $\delta(t)$ een verklaring geven van de term "impuls-responsie". Intuitief is $\delta(t)$ een functie die overal gelijk aan nul is behalve in $t = 0$, waar geldt $\delta(0) = \infty$. Bovendien voldoet deze functie aan de voorwaarde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

of algemener

(1.1.13) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$$

voor alle continue functies f. Een functie in de klassieke zin met deze eigenschappen kan niet bestaan. In de distributietheorie wordt het functiebegrip uitgebreid, zodanig dat $\delta(t)$ een "gegeneraliseerde functie" (= distributie) wordt. We zullen op deze theorie verder niet ingaan (zie [ZE]) maar af en toe de deltafunctie gebruiken in heuristische beschouwingen. De enige eigenschap van de deltafunctie die echt belangrijk is, is (1.1.13). Intuitief kan men zich de deltafunctie ontstaan denken door een limiet proces:



dus $\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ waarbij

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)dt = 1, \; \varphi_n(t) \to 0 \; (t \neq 0); \; \varphi_n(0) \to \infty .$$

Een deltafunctie is daarom een idealisatie van een zogenaamde <u>impuls-functie</u> of <u>piekfunctie</u>. Als we strict formeel in (1.1.8) $u(\tau) = \delta(\tau - \tau_1)c$ kiezen waarin $c \in \mathbb{R}^m$ zien we met (1.1.19) dat

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)\delta(\tau - \tau_1)c \, d\tau = K(t,\tau_1)c \ .$$

Dit verklaart de term impuls responsie voor $K(t,\tau_1)$.

In het algemeen is het lineair systeem gegeven door (1.1.8) of (1.1.11) niet tijdsinvariant. Men kan gemakkelijk bewijzen dat het systeem (1.1.11) tijdsinvariant is dan en slechts dan als $D(t) = D$ constant is en $K(t,\tau)$ een functie van $t - \tau$ is. We schrijven dan $K(t - \tau)$ i.p.v. $K(t,\tau)$. De algemene gedaante van een tijdsinvariant lineair systeem is dus

(1.1.15) $$y(t) = Du(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t - \tau)u(\tau)d\tau \qquad (t \in T) \ .$$

Voor een strict causaal tijdsinvariant systeem hebben we $D = 0$, zodat

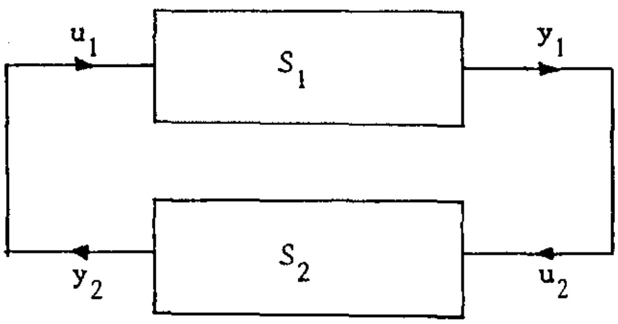
(1.1.16) $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} K(\tau)u(t - \tau)d\tau \ .$$

We zullen hierbij steeds aannemen dat K een $r \times m$-matrixwaardige continue functie op $[0,\infty)$ is.

(1.1.17) VOORBEELD. We beschouwen de relatie tussen het aantal geboorten en de totale populatie. Zij $y(t)$ de totale bevolking, $u(t)$ het aantal geboorten per tijdseenheid en $K(t)$ de kans voor een individu om de leeftijd t te bereiken. Als de populatie op het tijdstip $t = 0$ gelijk aan nul is, dan is

(1.1.18) $$y(t) = \int_{0}^{t} K(t - \tau)u(\tau)d\tau \ .$$ □

Uit dit voorbeeld blijkt dat het onderscheid tussen ingangs- en uitgangsvariabelen zoals in deze paragraaf omschreven een idealisatie is. In vele gevallen (bijv. bij menselijke populaties) is het niet mogelijk de ingangsfunctie u naar willekeur te kiezen, zelfs niet binnen beperkte grenzen. In een willekeurig systeem waar het a priori niet duidelijk is welke variabele als ingang of als uitgang moeten worden beschouwd, is het vaak mogelijk een stel geschikte variabelen uit te kiezen als ingangsvariabelen en daarbij het feit te negeren dat men deze variabelen niet naar willekeur kan kiezen. Men kan dan de beperktheid van de ingangsvariabelen achteraf verwerken door deze te zien als uitgangsvariabelen van een ander proces. In dit laatste systeem kan men dan vaak de uitgangsvariabelen van het eerste systeem als ingangsvariabelen beschouwen. Symbolisch kan men dit als volgt weergeven:



In voorbeeld (1.1.17) kan men bijv. aannemen, dat het aantal geboorten evenredig is met de populatie. Terwijl het systeem S_1 gegeven wordt door (1.1.18) wordt S_2 bepaald door

$$u = \alpha y \ ,$$

een lineair tijdsinvariant, statisch systeem.

Merk op dat het systeem (1.1.18) tijdsinvariant is, omdat we aangenomen hebben dat de kans K(t) dat een individu de leeftijd t bereikt onafhankelijk is van het tijdstip τ waarop het individu geboren wordt. Als K(t) wel van τ afhangt, en we schrijven $K(t,\tau)$ i.p.v. K(t), dan wordt (1.1.18):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t - \tau,\tau)u(\tau)d\tau \ ,$$

een tijdsafhankelijk systeem. Het is ook soms realistisch aan te nemen dat de overlevingskans afhangt van het aantal individuen: K(t,y). Dan krijgen we

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t - \tau,y(\tau))u(\tau)d\tau$$

een integraalvergelijking, die een niet-lineair systeem oplevert.

1.2. *Laplacetransformatie*

Het rechterlid van formule (1.1.16) noemt men wel een convolutie-integraal (zie WISK 30 - 4.2.4). Men gebruikt hiervoor de notatie $K*u$. Dus

$$K*u(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)u(\tau)d\tau \ .$$

Zulk een convolutie-integraal suggereert het gebruik van de Laplace-transformatie:

(1.2.1) DEFINITIE. *Een functie* $u \in \Omega$ *heet* <u>*exponentieel begrensd*</u> *als er getallen* M *en* γ *bestaan waarvoor geldt*

$$|u(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad (t \in T) \ .$$

De verzameling van exponentieel begrensde functies $u \in \Omega$ *geven we aan met* $\hat{\Omega}$. *Op analoge wijze definiëren we* $\hat{\Gamma}$, $\hat{SC}_{+}^{k}$ etc.

Voor exponentieel begrensde functies kan men de Laplace-getransformeerde definiëren.

(1.2.2) DEFINITIE. *Als* $u \in \hat{\Omega}$ *dan is*

$$\hat{u}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}u(t)dt$$

voor $\mathrm{Re}\ s > \gamma$, *de* <u>*Laplace getransformeerde*</u> *van* u. *Hierbij is* γ *een constante waarvoor geldt* $|u(t)| \leq Me^{\gamma t}$ *voor zekere* M.

Zonder bewijs (vgl. WISK. 30, stelling 4.2.5) vermelden we

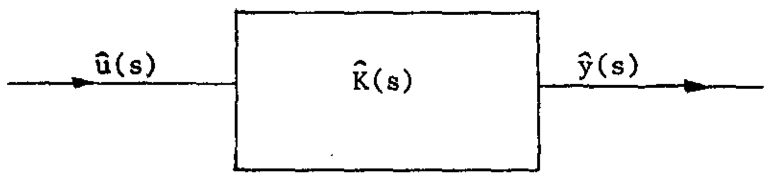
(1.2.3) STELLING. *Als* $u \in \hat{\Omega}$ *en* $K \in \hat{SC}_{+}^{r\times m}$ *dan is* $y := K*u \in \hat{\Omega}$ *en*

(1.2.4) $\quad \hat{y}(s) = \hat{K}(s)\hat{u}(s)$.

De matrix $\hat{K}(s)$ heet de <u>overdrachtsmatrix</u> van het systeem S (gedefinieerd door 1.1.15). In het geval $r = m = 1$ spreken we van <u>overdrachtsfunctie</u>.

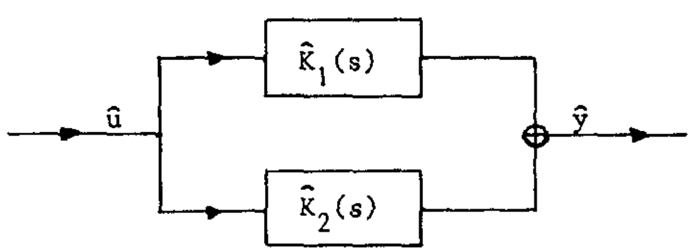
Het belang van de Laplacetransformatie bestaat daarin dat zij een lineaire transformatie is en dat de gecompliceerde afbeelding gedefinieerd door (1.1.15) wordt vertaald in de gewone matrixvermenigvuldiging (1.2.4).

Symbolisch geven we formule (1.2.4) ook wel aan als



Het nut van de Laplacetransformatie wordt vooral duidelijk als men een aantal systemen met elkaar combineert. We noemen een drietal veel gebruikte combinaties van twee systemen met overdrachtsfuncties $\hat{K}_1(s)$ en $\hat{K}_2(s)$:

1) <u>parallelschakeling</u>

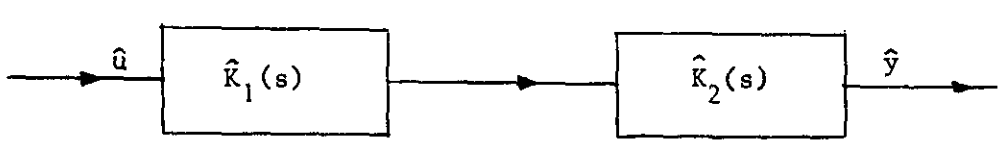


Het symbool ⊕ geeft een opteller aan.

De overdrachtsmatrix van het samengestelde systeem is

$$\hat{K}(s) = \hat{K}_1(s) + \hat{K}_2(s) \ .$$

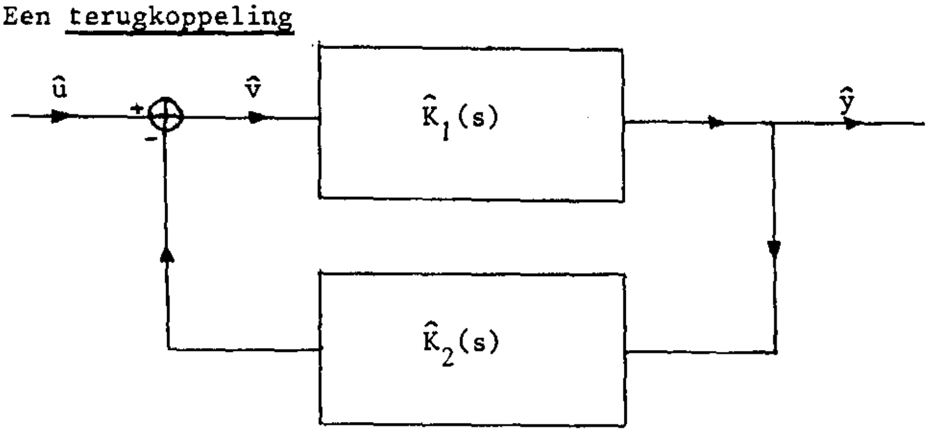
2) Een <u>serieschakeling</u> of <u>cascadeschakeling</u>



Hier is

$$\hat{K}(s) = \hat{K}_2(s)\hat{K}_1(s) \ .$$

3) Een <u>terugkoppeling</u>



Hier vinden we de overdrachtsmatrix $\hat{K}(s)$ van het samengestelde systeem uit de vergelijkingen

$$\text{(1.2.5)} \qquad \begin{aligned} \hat{v} &= \hat{u} - \hat{K}_2\hat{y} \ , \\ \hat{y} &= \hat{K}_1\hat{v} \ . \end{aligned}$$

Als we hieruit $\hat{v}$ elimineren en naar $\hat{y}$ oplossen vinden we

$$\hat{y} = (I + \hat{K}_1\hat{K}_2)^{-1}\hat{K}_1\hat{u} \ ,$$

zodat

$$\text{(1.2.6)} \qquad \hat{K} = (I + \hat{K}_1\hat{K}_2)^{-1}\hat{K}_1 \ .$$

We kunnen ook $\hat{y}$ elimineren en $\hat{v}$ oplossen:

$$\hat{v} = (I + \hat{K}_2\hat{K}_1)^{-1}\hat{u} \ .$$

Als we dit combineren met $\hat{y} = \hat{K}_1\hat{v}$ vinden we

$$\text{(1.2.7)} \qquad \hat{K} = \hat{K}_1(I + \hat{K}_2\hat{K}_1)^{-1} \ .$$

Uiteraard zijn (1.2.6) en (1.2.7) aan elkaar gelijk. (Bedenk dat $\hat{K}_1$ en $\hat{K}_2$ matrices zijn, zodat deze bewering niet helemaal triviaal is.)

Het spreekt vanzelf dat bovenstaande combinaties alleen mogelijk zijn als de matrices $\hat{K}_1$ en $\hat{K}_2$ geschikte afmetingen hebben.

Het is dus mogelijk op eenvoudige wijze berekeningen te doen met de Laplace getransformeerde variabelen. Zulke berekeningen noemt men berekeningen in het <u>frequentiedomein</u>.

Om deze term te verklaren geven we eerst een kleine generalisatie van het begrip lineair systeem. Tot nu toe hebben we aangenomen dat de ingangs- en uitgangswaarden reële vectoren zijn. Zo'n reëel systeem S kan op een natuurlijke wijze worden uitgebreid tot een complex systeem S_c dat complexe ingangsfuncties accepteert nl.

$$S_c(u + iv) := S(u) + iS(v) \ .$$

We doen dit uiteraard om de bekende complexe rekenwijze te kunnen gebruiken. Voortaan zullen geen onderscheid meer maken tussen het reële systeem S en het complexe systeem S_c.

Als we als ingangsfunctie

$$u(t) = e^{st}c \quad (t \geq 0), \ u = 0 \ (t < 0)$$

nemen, waar c een constante (eventueel complexe) vector is en s een willekeurig complex getal, dan is

$$y(t) = \left(\int_0^t K(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)u(t) \ .$$

Als Re s groot genoeg is, convergeert de integraal naar $\hat{K}(s)$ voor $t \to \infty$. Op den duur geldt dus

$$y(t) \sim \hat{K}(s)u(t) \ .$$

Als $\int_0^\infty \|K(\tau)\|dt < \infty$ waarin $\|K(\tau)\|$ de norm van $K(\tau)$ is (zie voor definitie en enkele eigenschappen appendix B) dan convergeert

$$\int_0^\infty K(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad \text{voor Re } s \geq 0$$

en in het bijzonder voor $s = i\omega$ met ω reëel. Als we dus

$$u = e^{i\omega t}c \ ,$$

een *harmonische trilling*, als ingang nemen dan is y(t) op den duur ongeveer gelijk aan

$$y = \hat{K}(i\omega)u \ .$$

De ingangsfunctie $u = e^{st}c$ representeert een gedempte of uitdijende trilling. Hiermee hebben we een interpretatie die men aan de overdrachtsmatrix kan geven.

Het blijkt dus dat men in het frequentiedomein met gemak kan rekenen en dat men de resultaten direct fysisch kan interpreteren. Wil men toch nog terug naar de oorspronkelijke functies u(t), y(t), K(t), wil men dus resultaten formuleren in het tijdsdomein dan moet men van sommige functies uitzoeken van welke ze de Laplace getransformeerde zijn. In dat verband is de stelling belangrijk dat de oorspronkelijke functie f(t) eenduidig bepaald is door zijn Laplace getransformeerde (zie [DO]). Het berekenen van de functie f(t) waarvan een gegeven functie $\hat{f}(s)$ de Laplace getransformeerde is noemt men de inverse Laplace transformatie (of terugtransformatie).

Men kan soms de inverse Laplace getransformeerde van een functie bepalen d.m.v. tabellen van Laplace getransformeerden. In het algemeen kan men gebruik maken van de zogenaamde inversieformule (of omkeerformule)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{ts}\hat{f}(s)ds \ ,$$

waar de contour C een rechte lijn in het complexe vlak is evenwijdig aan de imaginaire as en zover naar rechts gelegen dat $\hat{f}(s)$ op en rechts van C analytisch is (zie [DO]).
Numerieke terugtransformatie levert in het algemeen nogal wat moeilijkheden op i.v.m. het instabiele karakter van de omkeerformule.

In het geval dat $\hat{f}(s)$ een rationale functie is kan men de teruggetransformeerde gemakkelijk vinden d.m.v. breuksplitsing (zie WISK. 30/39, § 4.2). In het vervolg zullen we steeds aannemen dat alle functies voor $t \le t_0$, waarin t_0 vast is, de waarde 0 hebben.

1.3. *Toestandsvergelijkingen*

In deze paragraaf zullen we laten zien dat het stelsel

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

met beginvoorwaarde $x(t_0) = 0$, waarbij $A(t)$ een continue $n \times n$-matrix is, $B(t)$ een continue $n \times m$-matrix en $C(t)$ een continue $r \times n$-matrix, een strict causaal lineair systeem definiëren: Bij een besturing u hoort een oplossing x van de differentiaalvergelijking en daarmee is ook y vastgelegd. De vergelijkingen 1.3.1 noemt men toestandsvergelijkingen van de genoemde ingang-uitgang functie en de functie $x\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ de corresponderende toestandsvariabele. Later zullen we zien dat niet alle i/u-functies toestandsvergelijkingen hebben. We zullen ons echter beperken tot systemen die wel toestandsvergelijkingen hebben en in de meeste gevallen zelfs tot lineaire tijdsinvariante strict causale systemen. In dit laatste geval zijn de matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ constant. (Het systeem heet dan ook wel constant).

Beschouw eerst de homogene differentiaalvergelijking

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ x(t_0) = x_0\ . \tag{1.3.2}$$

Om de algemene oplossing van deze vergelijking aan te geven beschouwen we eerst de matrixdifferentiaalvergelijking:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \qquad (t \ge t_0) \tag{1.3.3}$$

met beginwaarde $X(t_0) = I$. In [GDV] (hfdst. II) wordt aangetoond dat de oplossing hiervan bestaat en eenduidig is. We geven deze oplossing aan met $\Phi(t)$ (of $\Phi_A(t)$) en we noemen Φ de fundamentaaloplossing van (1.3.3). Er geldt dus

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t),\ \Phi(t_0) = I\ .$$

Naast (1.3.3) beschouwen we de vergelijking

$$\dot{Y}(t) = -Y(t)A(t), \qquad t \geq t_0$$

met beginwaarde $Y(t_0) = I$. Deze vergelijking noemen we de geadjungeerde vergelijking van (1.3.3). Als we de oplossing hiervan met Y(t) aangeven, dan geldt:

$$\frac{d}{dt}(\Psi(t)\Phi(t)) = \dot{\Psi}\Phi + \Psi\dot{\Phi} = -\Psi A\Phi + \Psi A\Phi = 0$$

en dus

$$\Psi(t)\Phi(t) = \Psi(t_0)\Phi(t_0) = I \ .$$

We concluderen dat $\Phi(t)$ inverteerbaar is en dat $\Psi(t) = \Phi^{-1}(t)$. De oplossing van (1.3.2) wordt nu gegeven door

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 \ .$$

Immers $\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 = A(t)x(t)$ en $x(t_0) = x_0$.
Ook de oplossing van de inhomogene vergelijking

(1.3.4) $\quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

met beginwaarde $x(t_0) = x_0$ kunnen we in $\Phi(t)$ uitdrukken: Als we weer de fundamentaaloplossing van de geadjungeerde vergelijking met Ψ aangeven dan definiëren we $z(t) = \Psi(t)x(t)$. Er geldt:

$$\dot{z} = \dot{\Psi}x + \Psi\dot{x} = -\Psi Ax + \Psi Ax + \Psi Bu = \Psi Bu$$

en $z(t_0) = \Psi(t_0)x_0$.
Hieruit volgt

$$z(t) = \Psi(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Psi(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \ .$$

Als we substitueren $x(t) = \Phi(t)z(t)$, $\Psi(t) = \Phi^{-1}(t)$ volgt hieruit de zgn. <u>variatie van constanten formule</u>

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \ .$$

Gewoonlijk zullen we de notatie

$$\Phi(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$$

gebruiken. Men noemt $\Phi(t,t_0)$ de <u>transitiematrix</u>. Hiermee vinden we voor de variatie van constanten formule

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \ .$$

De uitgang y(t) wordt nu

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \ . \tag{1.3.6}$$

We kunnen nu ook de i/u-functie gedefinieerd door (1.3.1) bepalen. We nemen daartoe $x_0 = 0$. Dan geldt:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

waarin $K(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)$ voor $t \geq \tau \geq t_0$.
We zullen ook nagaan hoe het bovenstaande eruit komt te zien voor tijdsonafhankelijke systemen. We zullen daarbij aannemen dat $t_0 = 0$ (dit is te bereiken door een tijdsverschuiving).

Beschouw eerst de homogene differentiaalvergelijking

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \ x(0) = x_0 \ . \tag{1.3.7}$$

In het geval n = 1 (n is de dimensie van de vector x) is hiervoor de oplossing $x(t) = e^{tA}x_0$. In analogie hiermee definiëren we voor een $n \times n$-matrix A:

(1.3.8) DEFINITIE. *Zij* A *een* $n \times n$-*matrix. Dan is*

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k/k! = I + tA + \tfrac{1}{2}t^2A^2 + \ldots \ .$$

We hebben hier $A^0 = I$ gesteld. Men kan bewijzen dat deze reeks absoluut en op begrensde intervallen uniform convergeert en dat men de reeks termsgewijs kan differentiëren:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{t^{k-1}A^k}{k!} = Ae^{tA}$$

(zie [GDV],[MT]). Verder geldt $e^{0A} = I$, zodat ook in het meerdimensionale geval de oplossing van (1.3.7) is gegeven door

$$x(t) = e^{tA}x_0 \ .$$

We zien dus dat hier $\Phi(t) = e^{tA}$. In het bijzonder is de j-de kolom van e^{tA} de oplossing van (1.3.7) met beginwaarde e_j (de j-de kolom van de eenheidsmatrix). Het komt er dus op neer dat het bepalen van de oplossing van (1.3.7) voor willekeurige x_0 equivalent is met het berekenen van e^{tA}. In WISK. 30 (st. 4.1.3) wordt aangetoond dat de oplossingen van (1.3.7) lineaire combinaties zijn van de speciale oplossing en $e^{\lambda_j t}c$, waar de λ_j's eigenwaarden zijn en de c_j's eigenvectoren, tenminste als alle eigenwaarden verschillend zijn of als meervoudige eigenwaarden <u>niet-defectief</u> zijn (d.w.z. bij een eigenwaarde van multipliciteit ℓ horen ℓ onafhankelijke eigenvectoren). Als er defectieve eigenwaarden zijn, treden er ook termen van de gedaante $e^{\lambda_j t}(tc + d)$ etc. op (zie ook [GDV] en [MT]).

(1.3.9) DEFINITIE. *Zij* A *een* $n \times n$*-matrix. Dan is* $\sigma(A)$ *het* <u>*spectrum*</u> *van* A, *d.w.z. de verzameling van eigenwaarden van* A. *Verder is*

$$\Lambda(A) := \max\{\mathrm{Re}\,\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

de zgn. <u>*spectraalabscis*</u>.

Uit het voorafgaande volgt onmiddellijk de volgende eigenschap

(1.3.10) STELLING. *Zij* $\alpha > \Lambda(A)$. *Dan bestaat er een getal* $M > 0$ *zo dat voor alle* $t \geq 0$ *geldt*

$$\| e^{tA} \| \leq Me^{\alpha t} \ .$$

Op grond hiervan komen we tot de volgende definitie:

(1.3.11) DEFINITIE. *Een* $n \times n$*-matrix* A *heet een* <u>*stabiliteitsmatrix*</u> *als* $\Lambda(A) < 0$.

Als A een stabiliteitsmatrix is, naderen alle oplossingen naar nul voor $t \to \infty$. We kunnen zelfs zeggen, exponentieel snel, daar er op grond van (1.3.10) een $\gamma > 0$ en een $M > 0$ bestaat waarvoor geldt

(1.3.12) $\quad \| e^{tA} \| \leq Me^{-\gamma t} \quad (t \geq 0)$, en dus

$$|x(t)| \le M|x_0|e^{-\gamma t} \qquad (t \ge 0)$$

voor alle oplossingen. We merken op dat deze beschouwingen ook van toepassing zijn op complexe matrices A. We zullen de stabiliteitseigenschappen nader onderzoeken in hoofdstuk III.

Belangrijk zijn de volgende eigenschappen van de matrix-exponentiële functie.

(1.3.13) STELLING.

i) $$e^{(t+\tau)A} = e^{tA}e^{\tau A}$$

ii) $$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA} .$$

In het bijzonder is e^{tA} altijd inverteerbaar. De eerste eigenschap bewijst men door substitutie in de machtreeks (zie ook [GDV]) en de tweede eigenschap is een direct gevolg van de eerste.

We geven nu een aantal methoden aan om e^{tA} te berekenen

1) Bepaal de oplossing $x_j(t)$ van (1.3.7) voor $x_0 = e_j$ $(j = 1,\dots,n)$, bijv. met de methode gegeven in WISK. 30. Dan is e^{tA} de matrix $[x_1(t),\dots,x_n(t)]$, d.w.z. de matrix met kolommen $x_1(t),\dots,x_n(t)$.
2) Diagonalisatie (algemener Jordanvormen, zie [MT]). Als

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

een diagonaalmatrix is, dan is

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} .$$

Als $A = TDT^{-1}$ dan is $e^{tA} = Te^{tD}T^{-1}$. In WISK. 30 (st. 1.3.5) is aangetoond dat, als A n verschillende eigenwaarden heeft, er een niet-singuliere matrix T en een diagonaalmatrix D bestaat zodat $A = TDT^{-1}$.

We beschouwen nu de inhomogene vergelijking

$$(1.3.14)\quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\; x(0) = x_0 .$$

De variatie van constanten formule wordt in het tijdsinvariante geval

$$(1.3.15)\quad x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau .$$

Dit volgt direct uit (1.3.5).
De corresponderende uitgang is

$$(1.3.16)\quad y(t) = Ce^{tA}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau ,$$

zodat de impulsresponsie wordt

$$(1.3.17)\quad K(t-\tau) = Ce^{(t-\tau)A}B .$$

Laten we ook de overdrachtsfunctie bepalen. Eerst merken we op dat voor een niet-singuliere matrix M geldt

$$(1.3.18)\quad \int_0^t e^{M\tau}d\tau = M^{-1}(e^{Mt} - I) ,$$

zoals men door differentiatie gemakkelijk verifieert.

Als $\Lambda(M) < 0$, dan convergeert op grond van (1.3.12) $\int_0^\infty e^{M\tau}d\tau$, zodat we vinden

$$\int_0^\infty e^{Mt}dt = -M^{-1} .$$

Derhalve kunnen we de volgende afleiding geven:

$$\hat{K}(s) = \int_0^\infty e^{-st}K(t)dt = C\int_0^\infty e^{-st}e^{At}dt\; B = C\int_0^\infty e^{-(sI-A)t}dt\; B =$$

$$= C(sI-A)^{-1}B$$

als Re $s > \Lambda(A)$. De formule

(1.3.19) $\hat{K}(s) = C(sI - A)^{-1}B$

kunnen we ook direct afleiden uit (1.3.7). Als we nl. deze vergelijkingen Laplace-transformeren krijgen onder de aanname $x(0) = 0$:

$$s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s)$$

$$\hat{y}(s) = C\hat{x}(s)$$

waaruit volgt

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \ .$$

In appendix A wordt een methode aangegeven om $(sI - A)^{-1}$ en $\hat{K}(s)$ te berekenen. De volgende eigenschappen zijn van belang (zie appendix A).

(1.3.20) STELLING.

i) $\hat{K}(s)$ *is een* *eigenlijke rationale matrix, d.w.z. de elementen van* $\hat{K}(s)$ *zijn van de vorm* $\hat{K}_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$ *waarbij* p_{ij} *en* q_{ij} *polynomen zijn en* gr p_{ij} < gr q_{ij}.

ii) *De polen van* $\hat{K}(s)$ *zijn eigenwaarden van* A, *meer specifiek:* $\hat{K}(s)$ *is te schrijven als*

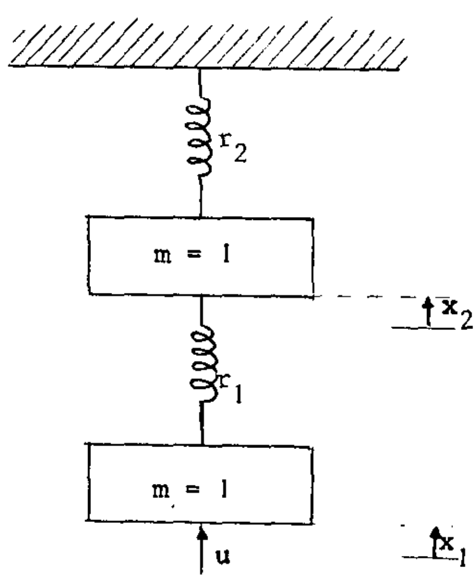
$$\hat{K}(s) = H(s)/p(s)$$

waarin $H(s)$ *een matrixpolynoom is en* $p(s) = \det(sI - A)$.

Let wel dat niet noodzakelijk alle eigenwaarden van A polen van $\hat{K}(s)$ zijn, daar er factoren in de teller en noemer van $\hat{K}(s)$ tegen elkaar kunnen wegvallen.

Tenslotte merken we op dat we e^{tA} kunnen berekenen door eerst $(sI - A)^{-1}$ te berekenen en daarna de inverse Laplacetransformatie toe te passen.

(1.3.21) VOORBEELD. In de figuur zien we twee eenheidsmassas verbonden met veren met veerconstante r_1 en r_2. De verplaatsingen van die massas geven we aan met x_1 en x_2. Deze grootheden voldoen aan de vergelijkingen



$$\ddot{x}_1 = u - r_1(x_1 - x_2)$$
$$\ddot{x}_2 = r_1(x_1 - x_2) - r_2x_2 \ .$$

We beschouwen hier de kracht die op de onderste massa kan worden uitgeoefend als ingangsvariabele. De vergelijkingen vormen geen toestandsvergelijkingen, omdat er afgeleiden van de tweede orde voorkomen. We kunnen dit verhelpen door invoering van nieuwe variabelen

$$x_3 = \dot{x}_1,\ x_4 = \dot{x}_2\ .$$

Dan krijgen we het volgende systeem van eerste orde vergelijkingen.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_4 \\
\dot{x}_3 &= u - r_1(x_1 - x_2) \\
\dot{x}_4 &= r_1(x_1 - x_2) - r_2x_2\ .
\end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn van de vorm

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

waar

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -r_1 & r_1 & 0 & 0 \\ r_1 & -r_1-r_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ .$$

Als uitgang kiezen we de vector $y = (x_1,x_2)$. Dan kunnen we de differentiaalvergelijking voor x completeren met

$$y = Cx$$

met

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ .$$

We berekenen nu de overgangsmatrix $C(sI - A)^{-1}B$. Op grond van de structuur van C en B zien we direct dat de enige elementen van $(sI - A)^{-1}$ die van belang zijn die met index (1,3) en (2,3) zijn. Deze zijn met de regel van Cramer (vgl. WISK. 20) te bepalen zodat de overgangsmatrix wordt:

$$\hat{K}(s) = \frac{1}{s^4 + (2r_1 + r_2)s^2 + r_1r_2}\begin{bmatrix} s^2 + r_1 + r_2 \\ r_1 \end{bmatrix}\ . \qquad \square$$

Heel vaak vinden we bij mechanische en electrische systemen in eerste instantie tweede orde vergelijkingen (vergelijk voorbeeld (1.3.21)). Zulke en ook hogere orde vergelijkingen kan men altijd tot eerste orde differentiaalvergelijkingen herleiden door nieuwe variabelen in te voeren.

(1.3.22) VOORBEELD. De functies y en u zijn gekoppeld door de volgende vergelijking

(1.3.23) $$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = u(t)$$

waarin de coëfficiënten $a_1,\dots,a_n$ constant zijn. Verder wordt aangenomen dat $y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$. We kunnen (1.4.12) omwerken tot toestandsvariabelen d.m.v. de substitutie

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot{y},\dots,x_n = y^{(n-1)}\ .$$

Dan vinden we

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$$

met

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = [1,0,\dots,0]\ .$$

De matrix A heet vanwege haar speciale gedaante een companionmatrix. De overdrachtsfunctie van dit systeem is

$$\hat{K}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

zoals men het gemakkelijkste uit (1.3.23) kan afleiden.
In Appendix A wordt bewezen dat

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

het karakteristieke polynoom van A is. □

(1.3.24) VOORBEELD. Soms wordt de i/u-relatie tussen u en y gegeven door de volgende vergelijking:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = c_1 u^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n u(t) \ . \tag{1.3.25}$$

Wil deze relatie zin hebben, dan moet men zich natuurlijk beperken tot voldoend gladde u. We nemen aan dat $u(0) = \dot{u}(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0$ en dat $y(0) = \dot{y}(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$. Door deze voorwaarde is y éénduidig bepaald. Beschouw nu voor gegeven u de oplossing x_1 van

$$x_1^{(n)}(t) + a_1 x_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x_1(t) = u(t)$$

met $x_1(0) = \ldots = x_1^{(n-1)}(0) = 0$. Dan is het duidelijk dat

$$y(t) := c_1 x_1^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n x_1(t)$$

de oplossing is van (1.3.25) bij de gegeven beginvoorwaarden. Overeenkomstig voorbeeld (1.3.22) kunnen we nu de toestandsvariabele $x = (x_1, \ldots, x_n)$ invoeren waar $x_i = \dot{x}_{i-1}$ voor $i = 2, \ldots, n$. Dan vinden we dat u, x en y voldoen aan

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

met

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [c_n, \ldots, c_1] \ .$$

Hier is de overdrachtsfunctie

$$\hat{K}(s) = \frac{c_1 s^{n-1} + \ldots + c_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} \ .$$

Merk op dat in het nu gedefinieerde systeem het wel mogelijk is willekeurige stuksgewijs continue systemen als ingang toe te laten. □

1.4. *Discussie over het begrip toestand*

Bij een dynamisch systeem wordt, zoals we hebben gezien, de waarde van de uitgang vanaf een zeker tijdstip t_0 niet alleen bepaald door de waarde van de ingang u voor $t \geq t_0$, maar ook door de waarde van u voor $0 \leq t < t_0$. Het systeem heeft dus "onthouden" wat er zich in het verleden heeft afgespeeld, of beter gezegd, het systeem heeft een hoeveelheid informatie over het verleden onthouden, die van invloed is op de waarden van y op $[t_0,\infty)$. Een functie $t \mapsto x(t)$ die de eigenschap heeft, dat op elk tijdstip t_0 de grootheid $x(t_0)$ voldoende informatie over het verleden van de ingang bevat om tezamen met u op $[t_0,\infty)$ de uitgang y op $[t_0,\infty)$ te kunnen bepalen, noemt men een toestandsvariabele of toestandsfunctie. De verzameling waarin de toestandsvariabele haar waarden aanneemt noemt men een toestandsruimte. Het is duidelijk dat kennis van een toestandsvariabele nuttig is omdat we daarmee weten, hoe het systeem reageert op door ons aangebrachte waarden van u, zonder dat we het verleden kennen.

De functie x(t) in (1.3.1) is een toestandsvariabele van het door (1.3.1) gedefinieerde systeem. We zien uit

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (t \geq t_0)$$

dat voor $t \geq t_0$ de uitgang y(t) volledig bepaald wordt door x_0 en de waarden van u op $[t_0,t]$. De toestandsruimte is $\mathbb{R}^n$ daar $x(t) \in \mathbb{R}^n$ voor alle t.

We willen nu een lineair systeem met *eindig dimensionale toestandsruimte* beschouwen. De veronderstelling dat de toestandsruimte eindigdimensionaal is, houdt in dat men van de ingang uit het verleden slechts een eindig aantal parameters hoeft te onthouden, om het effect van het verleden op de toekomstige uitgang te berekenen. Soms hebben deze parameters fysische betekenis, zoals bijv. energieophoping. Voorbeelden hiervan zijn de lading van een condensator, de hoeksnelheid van een vliegwiel of het balanstotaal in een boekhouding.

Willen we de toestandsvariabele x(t) met vrucht kunnen gebruiken dan moeten we voor $t_0 < t_1$ uit $x(t_0)$ en de ingang u op $[t_0,t_1]$ niet alleen $y(t_1)$ kunnen bepalen, maar ook $x(t_1)$. Anders zouden we vanaf het tijdstip t_0 toch weer de hele ingang moeten onthouden. We veronderstellen daarom dat er een afbeelding

$$\varphi: (t_0,t,x_0,u) \mapsto \varphi(t_0,t,x_0,u)$$

is gedefinieerd, voor $t \geq t_0$, die wat u betreft alleen van de waarden van u op $[t_0,t]$ afhangt. De grootheid $\varphi(t_0,t,x_0,u)$ stelt hierbij de waarde van de toestand op het tijdstip t voor, als de waarde van de toestand op het tijdstip t_0 gelijk is aan x_0, terwijl we op het interval $[t_0,t]$ de ingang u hebben gehad. In verband met het feit dat we lineaire systemen beschouwen, ligt het voor de hand te eisen dat φ nog een extra eigenschap zal hebben, nl. lineariteit. We zullen dus veronderstellen dat de afbeelding $(x,u) \mapsto \varphi(t_0,t,x,u)$ lineair is.

Onder deze aanname en onder bepaalde gladheidseisen aan φ (differentieerbaarheid etc.) kan men laten zien dat φ een oplossing is van een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$x(t_0) = 0 \ .$$

Beschouw nu de afbeelding η die aan een gegeven begintoestand $x(t_0)$ en een ingang u op $[t_0,t_1]$ de uitgang y op het tijdstip t_1 toevoegt

$$\eta: (t_0,t_1,x,u) \mapsto \eta(t_0,t_1,x,u) \ .$$

Als we t_0 tot t_1 laten naderen dan vinden we de uitgang op het tijdstip t_1 als functie van $x(t_1)$ en $u(t_1)$

$$y(t_1) = h(t_1,x(t_1),u(t_1)) \ .$$

Op grond van de lineariteit krijgt deze formule de vorm:

$$y(t_1) = C(t_1)x(t_1) + D(t_1)u(t_1) \ .$$

Op deze manier krijgen we een systeem van de gedaante

$$\text{(1.4.1)} \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \ x(t_0) = 0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \ . \end{aligned}$$

Dit is een generalisatie van het in § 1.3 beschouwde systeem. Men ziet gemakkelijk in dat het i/u-gedrag van dit systeem gegeven wordt door

$$y(t) = D(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

met

$$K(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) \ .$$

We zien dus dat het beschouwde systeem (1.4.1) strict causaal is dan en slechts dan als $D = 0$.

De conclusie van het voorafgaande is, dat een lineair systeem met eindigdimensionale toestandsruimte van de vorm (1.4.1) is, terwijl we als we bovendien stricte causaliteit eisen, te maken hebben met het systeem (1.3.1).

(1.4.2) OPMERKING. Als we in de vorige paragraaf (1.4.1) i.p.v. (1.3.1) beschouwd hadden, dan hadden sommige formules er enigszins anders uitgezien. Voor de overdrachtsmatrix bijv. zouden we in het tijdsinvariante geval gevonden hebben

$$(1.4.3) \qquad R(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = D + \hat{K}(s) \ .$$

$R(s)$ is niet de Laplacegetransformeerde van een functie tenzij men de deltafunctie toelaat. In dat geval vindt men dat $R(s)$ de Laplacegetransformeerde is van

$$D\delta(t) + Ce^{tA}B \ . \qquad \square$$

In § 1.3 is aangetoond hoe men uit het systeem (1.3.1), d.w.z. uit het matrixtripel (A,B,C) de i/u-functie kan vinden. In vele situaties is het interne gedrag van het systeem, d.w.z. vergelijking (1.3.1), niet bekend. Alleen het i/u-gedrag kan experimenteel worden bepaald. Men noemt het systeem dan wel een zwarte doos (black box). De vraag doet zich dan voor, hoe men uit het i/u-gedrag de vergelijking (1.3.1) kan vinden. Dit noemt men het realisatieprobleem. Meer concreet geformuleerd luidt het probleem in het tijdsinvariante geval: *Gegeven de impuls-responsie-matrix* $K(t)$ *(of de overdrachtsmatrix* $\hat{K}(s)$*), bepaal matrices* A,B,C *zo dat* $K(t) = Ce^{tA}B$ *(of* $\hat{K}(s) = C(sI-A)^{-1}B$*).* We zullen dit probleem behandelen in hoofdstuk VI. Fundamenteel voor dit probleem zijn de begrippen bestuurbaarheid en waarneembaarheid. Deze begrippen zullen in hoofdstuk II worden behandeld. Ze zijn niet alleen van belang voor het realisatieprobleem maar ook voor alle andere problemen die we zullen bespreken.

In deze paragraaf hebben we gezien hoe de veronderstellingen van lineariteit, tijdsinvariantie stricte causaliteit en eindig dimensionale toestandsruimte van een systeem op een natuurlijke manier leiden tot de vorm

$$(1.4.4) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

met beginwaarde $x(0) = 0$. De matrices A,B,C hebben constante elementen. Als men een van de genoemde veronderstellingen weglaat, krijgt men algemenere typen. Als men de stricte causaliteit vervangt door gewone causaliteit krijgt men, zoals we hebben gezien de tijdsinvariante versie van (1.4.1). De behandeling van systemen van dit laatst genoemde type verschilt niet zoveel van die van (1.4.4) en soms zullen we de daardoor optredende veranderingen expliciet aangeven. Fundamenteler zijn de verschillen die optreden als men de andere veronderstellingen weglaat. Zonder er in detail op in te willen gaan noemen we bijvoorbeeld: Laat men de voorwaarde van de eindigdimensionale toestandsruimte los, dan kan men het systeem in het algemeen niet meer beschrijven met behulp van gewone differentiaalvergelijkingen. Een voorbeeld van zo'n situatie is een ijzeren staaf waarvan de toestand wordt gegeven door de temperatuursverdeling van die staaf. Hier is de toestand niet bepaald door een eindig aantal parameters maar door een functie. Een functie kan worden beschouwd als element van een oneindigdimensionale vectorruimte (functieruimte). Vaak kunnen systemen met oneindigdimensionale toestandsruimte worden beschreven met partiële differentiaalvergelijkingen en differentie-differentiaalvergelijkingen.

(1.4.5) VOORBEELD.

i) Een systeem met <u>verdeelde parameters</u>. $x\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial s} + k(s)u(t) \;,$$

$$y(t) = x(t,0) \;\; (t \in \mathbb{R}_+), \;\; x(0,s) = 0 \;\; (s \in \mathbb{R}) \;,$$

waar $k \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$. De oplossing van de partiële differentiaalvergelijking is

$$x(t,s) = \int_0^t k(t + s - \tau)u(\tau)d\tau \;,$$

zoals men door substitutie kan verifiëren (voor de eenduidigheid en methoden om deze oplossing te vinden verwijzen we naar [PDV], [JH]). We vinden dus:

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau)u(\tau)d\tau \;.$$

Als toestand op het tijdstip t kunnen we hier de functies $s \mapsto x(t,s)$ laten optreden. De toestandsruimte is dan de verzameling van C^1-functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dit is een oneindig dimensionale vectorruimte.

ii) Een systeem met looptijd. Beschouw de differentie-differentiaalvergelijking

(1.4.6) $\quad \dot{x}(t) = x(t-1) + u(t) \qquad (t \geq 0)$,

met de beginwaarde $x(t) = 0$ (de functiewaarden zijn één-dimensionaal) $(-1 \leq t \leq 0)$. Tezamen met

$$y(t) = x(t)$$

beschrijft deze vergelijking een systeem. Het is niet zo gemakkelijk een expliciete formule voor de impuls-responsie-functie van dit systeem te bepalen. Wel kan men de overdrachtsfunctie bepalen. Er geldt nl.

$$\int_0^\infty x(t-1)e^{-st}dt = e^{-s} \int_{-1}^\infty x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-s}\hat{x}(s) \ ,$$

daar $x(t) = 0$ voor $t < 0$. Daarom kunnen we (1.4.6) schrijven als

$$s\hat{x} = e^{-s}\hat{x}(s) + \hat{u} \ ,$$

zodat

$$\hat{y}(s) = \hat{K}(s)\hat{u}(s) \ ,$$

waar

$$\hat{K}(s) = (s - e^{-s})^{-1} \ . \qquad \square$$

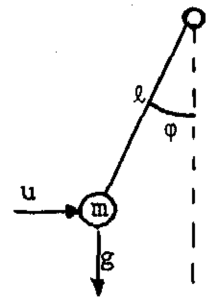
Als men de lineariteit van het systeem loslaat, dan kan men vaak toch nog toestandsvariabelen definiëren. Deze voldoen dan aan niet-lineaire differentiaalvergelijkingen (als de toestandsruimte eindig dimensionaal is). In plaats van (1.4.4) krijgt men vergelijkingen van de vorm

$$\text{(1.4.7)} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \ , \\ y &= h(x) \ , \end{aligned}$$

met beginwaarde $x(0) = x_0$ gegeven. Als het systeem niet strict causaal is dan wordt de tweede vergelijking $y = h(x,u)$. Als het systeem niet tijdsinvariant is heeft men

$$\dot{x} = f(x,t,u)$$
$$(1.4.8) \qquad y = h(x,t) \ .$$

Lineaire en niet-lineaire toestandsvergelijkingen vindt men ofwel uit het ingang-uitgang-gedrag van het systeem (het realisatieprobleem) ofwel uit bestaande theorieën over het probleem (bijv. de wetten van Newton in de mechanica, de wetten van Kirchhoff, Ohm etc. in de netwerktheorie).



(1.4.9) VOORBEELD. (Slinger). Op de slinger werkt een verticale kracht, nl. de zwaartekracht, en een horizontale kracht u die als besturing wordt opgevat. De bewegingsvergelijking luidt:

$$m\ell\ddot{\varphi} = g \sin \varphi - u \cos \varphi \ .$$

Dit is een tweede orde differentiaalvergelijking en dus niet een toestandsvergelijking. We kunnen invoeren

$$x_1 = \varphi, \ x_2 = \dot{\phi} \ ,$$

en we krijgen dan

$$\dot{x}_1 = x_2 \ ,$$
$$\dot{x}_2 = (m\ell)^{-1}(g \sin x_1 - u \cos x_1) \ ,$$

een stelsel niet-lineaire toestandsvergelijkingen. □

1.5. *Linearisatie*

Er zijn twee redenen waarom lineaire systemen zo uitvoerig zijn bestudeerd. Enerzijds is het op grond van de eenvoudige structuur van die systemen mogelijk vergaande resultaten te bereiken voor lineaire systemen. Anderzijds kunnen niet-lineaire systemen locaal benaderd worden door lineaire systemen. Zodoende kan men uitspraken doen over niet-lineaire systemen met behulp van benaderende lineaire systemen. Beschouw bijv. het volgende niet-lineaire systeem

$$\dot{x}(t) = f(x(t),t,u(t)) \ ,$$
$$(1.5.1) \qquad y(t) = h(x(t),t) \ ,$$

waar f en h continu-differentieerbaar ($= C^1$) zijn.
Laat $r \in C^1(T \to \mathbb{R}^n)$, $v \in C^1(T \to \mathbb{R}^m)$, $z \in C^1(T \to \mathbb{R}^r)$. Dan kan men (1.5.1) lineariseren voor (x,u,y) in de buurt van (r,v,z). We kunnen u,x,y schrijven als

$$\begin{aligned} & u = v(t) + \omega \,, \\ (1.5.2) \quad & x = r(t) + \xi \,, \\ & y = z(t) + \eta \,. \end{aligned}$$

Substitutie van deze formules in (1.5.1) levert

$$(1.5.3) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \varphi(\xi(t),t,\omega(t)) \,, \\ \eta(t) &= \theta(\xi(t),t) \end{aligned}$$

waar

$$(1.5.4 \quad \begin{aligned} \varphi(\xi,t,\omega) &:= f(r(t) + \xi,t,v(t) + \omega) - \dot{r}(t) \\ \theta(\xi,t) &:= h(r(t) + \xi,t) - z(t) \,. \end{aligned}$$

De functies φ en θ zijn C^1 en we kunnen ze dus ontwikkelen voor kleine ω,ξ,η:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi,t,\omega) &= A(t)\xi + B(t)\omega + \varphi_0(t) + \tilde{\varphi}(\xi,t,\omega) \,, \\ \theta(\xi,t) &= C(t)\xi + \theta_0(t) + \tilde{\theta}(\xi,t) \,, \end{aligned}$$

waar

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &:= \varphi(0,t,0) = f(r(t),t,v(t)) - \dot{r}(t) \,, \\ \theta_0(t) &:= \theta(0,t) = h(r(t),t) - z(t) \,, \end{aligned}$$

en waar

$$(1.5.5) \quad \begin{aligned} A(t) &:= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)(0,t,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(r(t),t,v(t)) \\ B(t) &:= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)(0,t,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(r(t),t,v(t)) \\ C(t) &:= \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)(0,t,0) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)(r(t),t) \end{aligned}$$

functionaalmatrices zijn (A is $n \times n$, B is $n \times m$, C is $r \times n$). De functies $\tilde{\varphi}$ en $\tilde{\theta}$ stellen hogere orde termen voor.

Als we deze hogere termen weglaten krijgen we de <u>linearisatie van</u> (1.5.3) <u>om</u> $(\omega,\xi,\eta) = 0$:

$$(1.5.6) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A(t)\xi + B(t)\omega + \varphi_0(t) \\ \eta(t) &= C(t)\xi + \theta_0(t) \,. \end{aligned}$$

We noemen deze vergelijkingen ook <u>de linearisatie van</u> (1.5.1) <u>om</u> $(u,x,y) = (v,r,z)$.

Deze vergelijkingen bevatten de inhomogene termen φ_0 en θ_0. Als nu (v,r,z) voldoet aan (1.5.1) d.w.z. als

$$\dot{r}(t) = f(r(t),t,v(t))$$
$$z(t) = h(r(t),t)$$

dan is $\varphi_0 = 0$ en $\theta_0 = 0$, zodat de linearisatie een lineair systeem wordt:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A(t)\xi + B(t)\omega \\ \eta(t) &= C(t)\xi \;. \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

In het algemeen zullen de coëfficiëntenmatrices A, B en C niet constant (onafhankelijk van t) zijn. Hiervoor zijn twee redenen aan te geven. In de eerste plaats hebben we niet aangenomen dat de functies f en h in (1.5.1) onafhankelijk van t zijn. In de tweede plaats zijn de functies v,r,z waarom gelineariseerd wordt, niet constant. We kunnen bijv. aan de formules (1.5.5) zien dat tenzij f,h,r,v,z onafhankelijk van t zijn,we geen constante matrices krijgen.

Als we aannemen dat (r,v,z) constant zijn en f en h onafhankelijk van t, dan is

$$f(r,v) = 0 \;,$$
$$h(r) = z \;.$$

We noemen r een <u>evenwichtstoestand</u>, behorend bij een <u>evenwichtsbesturing</u> v. Bij linearisatie van het *tijdsinvariante* niet-lineaire systeem

$$\dot{x} = f(x,u) \;,$$
$$y = h(x) \;,$$

om het evenwicht $(\bar{x},\bar{u})$ krijgen we het systeem

$$\dot{\xi} = A\xi + B\omega \;,$$
$$\eta = C\xi \;,$$

met

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(\bar{x},\bar{u})}, \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(\bar{x},\bar{u})}, \quad C = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{(\bar{x})} \;.$$

We laten hier verder in het midden hoe goed de benaderingen zijn en in hoeverre de resultaten over het gelineariseerde systeem van toepassing is op het niet-lineaire systeem.

VOORBEELD. Zoals we in voorbeeld (1.4.10) hebben gezien luiden de toestandsvergelijkingen voor de slinger

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = (m\ell)^{-1}(g \sin x_1 - u \cos x_1)$$
$$y = x_1 \ .$$

We lineariseren om de evenwichtsstand $y = x_1 = x_2 = u = 0$. Dan vinden we

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \ ,$$
$$\dot{\xi}_2 = (m\ell)^{-1}(g\xi_1 - u) \ ,$$
$$\eta = \xi_1 \ ,$$

dus

$$\dot{\underline{\xi}} = A\underline{\xi} + Bu$$
$$\eta = C\underline{\xi}$$

met

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ g/(m\ell) & 0\end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix}0\\ -(m\ell)^{-1}\end{bmatrix}, \ C = [1 \ , \ 0] \ . \qquad \square$$

1.6. *Terugkoppeling*

Het fundamentele probleem van de regeltheorie is: *Bepaal onder gegeven omstandigheden de ingang zodanig dat de uitgang zich op een gewenste manier gedraagt.*

Men kan bijv. eisen dat de uitgang naar nul toe nadert als $t \to \infty$, of dat er geen oscillaties optreden. Door de voorwaarde dat y in zo'n klasse ligt zal u in het algemeen niet eenduidig bepaald zijn. Vaak kan men eenduidigheid verkrijgen door te eisen dat u volgens een of ander criterium optimaal is. We zullen optimale besturingen bespreken in hoofdstuk IV voor een eenvoudig optimaliteitscriterium. Voor algemenere optimaliseringsproblemen verwijzen we naar [LM], [OR]). Als men een geschikte u bepaald heeft kan men deze u gebruiken en verwachten dat de y het gewenste gedrag heeft. In de practijk blijkt dit vaak niet te kloppen en wel om verschillende redenen.

1) De systeemvergelijkingen zijn niet precies bekend. Het systeem is nl. niet echt lineair en tijdsinvariant en men kan de exacte impuls-responsie K niet expliciet bepalen.
2) Men kan de functie u die het gewenste gedrag van de uitgang moet leveren niet exact aangeven en ook niet exact als ingang aan het systeem geven.
3) Het systeem is op verschillende manieren onderhevig aan ruis en andere storende invloeden.

(1.6.7) VOORBEELD. Zij $m = r = 1$ en $K(t) = e^t$. Als we bijv. eisen dat de uitgangsfunctie begrensd is, dan kunnen we dat bereiken door $u = 0$ te kiezen. Dan geldt immers dat de uitgang

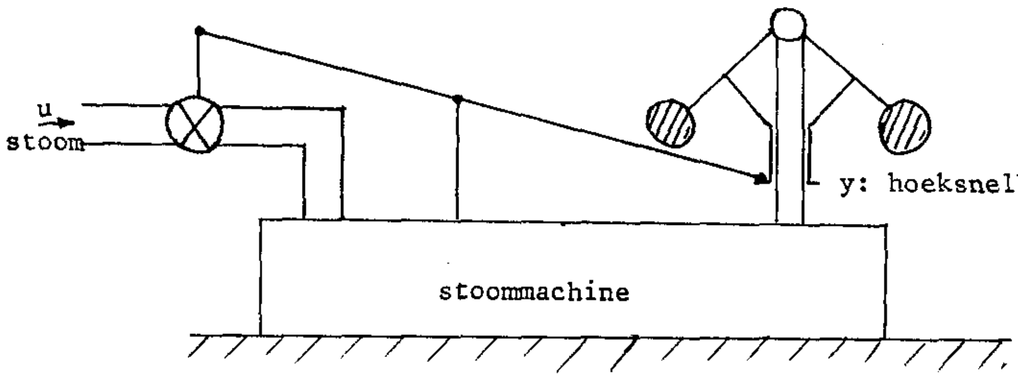
$$y(t) = \int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)d\tau$$

ook gelijk aan nul is en dus begrensd. Als er op het tijdstip t_0 echter een kleine storing optreedt, waardoor $u(t) = \varepsilon$ i.p.v. $u(t) = 0$ geldt voor $t \geq t_0$, dan vinden we

$$y(t) = \varepsilon \int_{t_0}^t e^{t-\tau}d\tau = \varepsilon(e^{t-t_0} - 1) \to \infty \quad \text{voor } t \to \infty . \qquad \square$$

Dit ongewenste gedrag blijkt bijzonder sterk te zijn als het systeem zich onstabiel gedraagt, bijv. als $K(t)$ groot wordt voor $t \to \infty$.

We kunnen de moeilijkheid goed illustreren aan de hand van het volgende voorbeeld: Als iemand een stok wil balanceren op een hand, dan kan hij in principe op een gegeven ogenblik de positie en de snelheid van de stok bepalen en op grond daarvan de beweging uitrekenen die hij met zijn hand moet uitvoeren om de stok in de (instabiele) evenwichtstoestand te houden. Dan kan hij (eventueel met zijn ogen dicht) de juiste beweging uitvoeren. Zelfs al zou iemand in staat zijn om de gewenste waarnemingen en berekeningen voldoende snel uit te voeren, dan is het nog duidelijk dat hij op deze manier de stok niet in evenwicht kan houden. De methode die hij gebruikt, is dan ook heel anders. *Hij houdt de bewegingen van de stok in de gaten en past de bewegingen van zijn hand hierop aan!* Deze voor de hand liggende methode om te besturen is de essentie van de regeltheorie: *De ingang wordt bepaald op grond van waargenomen waarden van de uitgang!* Dit principe wordt terugkoppeling genoemd en de formule volgens welke men de ingang laat afhangen van de uitgang heet een regelwet. In de regeltechniek gaat men in feite een stap verder dan de bovengenoemde jongleur. Men laat de terugkoppeling niet verzorgen door mensen maar door een automatisch mechanisme. Een van de oudst bekende voorbeelden van zo'n regelaar (of regulateur) is afkomstig van J. Watt.



De stoommachine wordt als een systeem beschouwd waarvan de stoomtoevoer u de besturing is en de hoeksnelheid van de motor de uitgangsvariabele. Men wil hierbij een uitgangswaarde bereiken die zoveel mogelijk in de buurt van een constante waarde y_0 blijft. Dit kan men bereiken d.m.v. de zgn. centrifugaalregulateur die m.b.v. twee ronddraaiende gewichten een handle overhaalt waarmee de stoomtoevoer wordt geregeld. Als het toerental hoger wordt gaan de gewichten verder omhoog en wordt de stoomtoevoer verminderd.

In de volgende hoofdstukken zullen we meestal werken met lineaire tijdsinvariante systemen. Voor concrete systemen is dit alleen nuttig en mogelijk als de variabelen in de buurt blijven van een stel nominale waarden. Zoiets doet zich voor bij het regulateurprobleem, waarvan de stoommachine van Watt een voorbeeld is. In het algemeen kan men het (niet-lineaire) regulateurprobleem als volgt formuleren:

Gegeven een systeem

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x)$$

en grootheden $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^r$ *zodanig dat* $f(x_0,u_0) = 0$, $y_0 = h(x_0)$, *bepaal een (dynamische) regelwet zodanig dat het systeem zoveel mogelijk in de buurt van toestand* x_0 *blijft, terwijl de ingang dicht bij* u_0 *blijft.*

Het ligt hier voor de hand te lineariseren om (u_0,x_0,y_0) waarna men het lineaire regulateurprobleem krijgt. We zullen dit probleem nader beschouwen in hoofdstuk IV.

1.7. *Tijdsinvariante systemen met discrete tijd*

In vele modellen van dynamische systemen neemt de tijdsvariabele t discrete en (meestal) equidistante waarden aan. We kunnen zo'n tijdsinterval als eenheid van tijd nemen en de tijdas wordt dan Z. We zullen ons beperken tot het geval van een vast begintijdstip t_0 en $t_0 = 0$ nemen. De tijdas wordt dan $T_d = \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,..\}$. De theorie van deze systemen, <u>intermitterende systemen</u> of <u>systemen met discrete tijd</u> genoemd, is in hoge mate analoog aan de theorie over systemen met continue tijd. We zullen hier in het kort de resultaten van dit hoofdstuk herformuleren voor systemen met discrete tijd. De ruimte van besturingen wordt gedefinieerd als de verzameling van alle afbeeldingen $u: T_d \to \mathbb{R}^m$ en Γ is de verzameling van functies $y: T_d \to \mathbb{R}^r$. In plaats van de integraalformules (1.1.8), (1.1.11), (1.1.15) en (1.1.16) krijgen we respectievelijk (rekening houdend met het vaste begintijdstip $t_0 = 0$)

$$(1.7.1) \qquad y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} K(t,\tau)u(\tau)$$

$$(1.7.2) \qquad y(t) = D(t)u(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} K(t,\tau)u(\tau)$$

$$(1.7.3) \qquad y(t) = Du(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} K(t-\tau)u(\tau)$$

$$(1.7.4) \qquad y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} K(t-\tau)u(\tau) \; .$$

De systemen beschreven door (1.7.1) en (1.7.4) zijn strict causaal: y(t) hangt niet af van u(t). De systemen (1.7.2) en (1.7.3) kunnen iets eenvoudiger worden geschreven met behulp van de notatie $K(t,t) := D(t)$ en $K(0) := D$. Dan krijgt men

$$(1.7.2)' \quad y(t) = \sum_{\tau=0}^{t} K(t,\tau)u(\tau)$$

$$(1.7.3)' \quad y(t) = \sum_{\tau=0}^{t} K(t-\tau)u(\tau) = \sum_{\tau=0}^{t} K(\tau)u(t-\tau) \; .$$

We zullen deze formules ook gebruiken i.p.v. (1.7.1) en (1.7.4) waarbij we echter $K(t,t) = 0$ resp. $K(0) = 0$ stellen.

Het discrete analogon van de Laplace-transformatie is de zgn. <u>z-transformatie</u> (zie ook WISK. 41).

(1.7.5) DEFINITIE. *Een rij vectoren* $(a(0),a(1),a(2),\ldots)$ *heet <u>exponentieel begrensd</u> als er getallen* $M > 0$, $\alpha > 0$ *bestaan waarvoor geldt*

$$|a(t)| \leq M\alpha^t \quad (t = 0,1,\ldots) .$$

(1.7.6) DEFINITIE. *Als* a *een exponentieel begrensde rij is dan is de <u>z-getransformeerde</u> van* a *gegeven door*

$$\hat{a}(z) := \sum_{t=0}^{\infty} a(t)z^{-t} .$$

Deze machtreeks in z^{-1} convergeert voor $|z| > \alpha$ als $|a(t)| \leq M\alpha^t$. Als

(1.7.7) $\quad b(t) = a(t + 1)$

dan geldt

(1.7.8) $\quad \hat{b}(z) = z\hat{a}(z) - za(0)$.

Als a en b twee scalaire rijen zijn, dan kan men de convolutie definiëren als

$$a * b = c$$

waar

(1.7.9) $$c(t) := \sum_{\tau=0}^{t} a(\tau)b(t - \tau) .$$

Dan kan men gemakkelijk verifiëren dat uit $c = a * b$ volgt $\hat{c}(z) = \hat{a}(z)\hat{b}(z)$. Analoge formules gelden voor vector-matrix-vermenigvuldigingen. Derhalve volgt uit (1.7.3)':

(1.7.10) $\quad \hat{y}(z) = \hat{K}(z)\hat{u}(z)$.

De functie $\hat{K}(z)$ wordt <u>overdrachtsmatrix</u> genoemd. De inverse van de z-transformatie is de formule van Cauchy

(1.7.11) $a(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{t-1}\hat{a}(z)dz$

waar C een cirkel in het complexe vlak is met een voldoend grote straal.

De toestandsvergelijkingen worden hier

(1.7.12) $$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \ . \end{aligned}$$

De oplossing van de homogene recurrente betrekking

(1.7.13) $x(t+1) = Ax(t),\ x(0) = x_0$

is

(1.7.14) $x(t) = A^t x(0)$.

Als A n verschillende eigenwaarden $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ heeft dan zijn de oplossingen lineaire combinaties van vectoren van de vorm $\lambda_i^t c_i$ waar c_i eigenvector bij λ_i is. In het geval van samenvallende defectieve eigenwaarden krijgen we termen van de vorm $\lambda_i^t(ct + d)$ etc.

(1.7.15) DEFINITIE. *Als* A *een* n × n*-matrix is, dan heet*

$$r(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

de *__spectraalstraal__* *van* A.

(1.7.18) STELLING. *Zij* A *een* n × n*-matrix en* $\alpha > r(A)$ *dan bestaat er een getal* $M > 0$ *zo dat*

$$\|A^t\| \le M\alpha^t$$

voor alle $t \in \mathbb{Z}_+$. *Als* $r(A) < 1$ *dan bestaan er getallen* $M > 0$ *en* β *met* $0 < \beta < 1$ *zo dat*

$$\|A^t\| \le M\beta^t \ .$$

In het bijzonder geldt dan $A^t \to 0\ (t \to \infty)$.

Men kan gemakkelijk verifiëren dat

(1.7.19) $x(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau)$

de oplossing van (1.7.12) is met $x(0) = 0$. Hieruit volgt dat de relatie tussen y en u gegeven wordt door

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{t} K(t-\tau)u(\tau)$$

met

(1.7.20) $K(t) = CA^{t-1}B \quad (t = 1,2,\ldots),\ K(0) = 0$.

De z-getransformeerde van K is

(1.7.21) $\hat{K}(z) = C(zI - A)^{-1}B$.

Vergelijk deze formule met (1.3.16)! De overeenkomst tussen de overdrachtsmatrices in het continue en discrete geval is een van de redenen dat men de z-transformatie met negatieve machten van z in plaats van positieve machten heeft gedefinieerd. We kunnen (1.7.21) ook afleiden door op (1.7.12) direct de z-transformatie toe te passen. Als $x(0) = 0$ dan volgt uit (1.7.12) dat

$$z\hat{x}(z) = A\hat{x}(z) + B\hat{u}(z)$$
$$\hat{y}(z) = C\hat{x}(z)$$

en dus $\hat{y}(z) = \hat{K}(z)\hat{u}(z)$ waarbij $\hat{K}$ gegeven wordt door (1.7.21).

De laatste jaren komen discrete systemen meer in de belangstelling. Hiervoor zijn verschillende redenen. Een belangrijke reden is het gebruik van rekenautomaten. In economische systemen blijkt vaak dat men het gemakkelijkste werkt met discrete modellen.

(1.7.22) VOORBEELD. (Nationaal inkomen). Het nationaal inkomen in het jaar t bestaat uit twee componenten:

1) consumentenuitgaven $x_1(t)$,
2) privé-investeringen $x_2(t)$ (om bijv. machines te kopen om de productie te verhogen).

We hebben derhalve de volgende formule

(1.7.23) $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

De consumentenuitgaven zijn enerzijds evenredig met het inkomen in het afgelopen jaar, dus $x_1(t+1) = \alpha y(t)$, waarin het getal α de geneigdheid om te consumeren aangeeft. Bovendien wordt de consumptie gestimuleerd door overheidsuitgaven $u(t)$, zodat we de formule

(1.7.24) $x_1(t + 1) = \alpha(y(t) + u(t))$

hebben. De privé-investeringen worden bepaald door de groei van de consumentenuitgaven, dus

(1.7.25) $x_2(t) = \beta(x_1(t) - x_1(t - 1))$.

Combinatie van (1.7.23), (1.7.24) en (1.7.25) geeft

$$x_1(t + 1) = \alpha x_1(t) + \alpha x_2(t) + \alpha u(t) ,$$

$$x_2(t + 1) = (\alpha - 1)\beta x_1(t) + \alpha\beta x_2(t) + \alpha\beta u(t) ,$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) ,$$

hetgeen we kunnen schrijven als

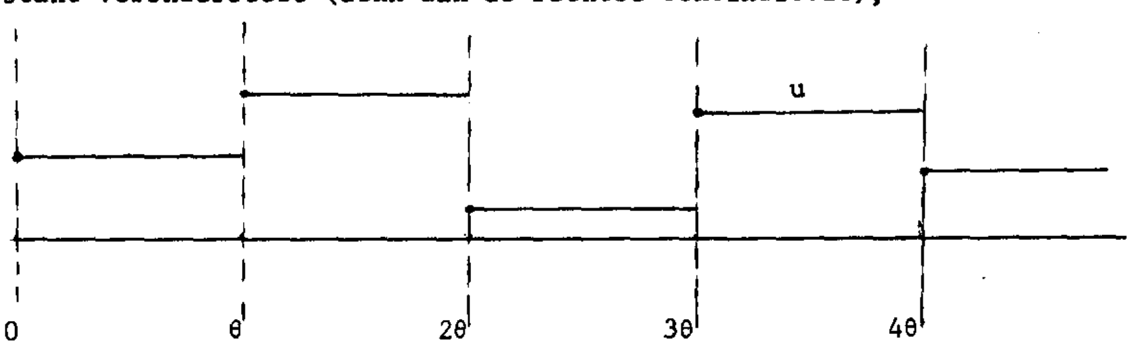
$$x(t + 1) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t) ,$$

met

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ (\alpha-1)\beta & \alpha\beta \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha\beta \end{bmatrix},\ C = [1\ ,\ 1] . \qquad \square$$

Systemen met discrete tijd ontstaan vaak door <u>bemonstering</u> van continue systemen. Men spreekt van bemonstering als men in een continu systeem

i) de besturingen op elk van de intervallen $[0,\theta)$, $[\theta,2\theta)$, $[2\theta, 3\theta)$,... constant verondersteld (denk aan de rechtse continuïteit),



ii) van de uitgang y alleen de waarden op de tijdstippen $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots$ kan meten.

Hierbij is θ een positief getal, de <u>monsterperiode</u> genoemd. We kunnen denken aan een proces waarin de besturing periodiek (bijv. elk uur) kan worden ingesteld en waar op de momenten dat de besturing wordt ingesteld, ook de uitgang wordt gemeten. We veronderstellen hierbij dat de tijd nodig om het proces te meten en bij te stellen kort is vergeleken met de veranderingen van het proces en met de monsterperiode.

In de volgende hoofdstukken zullen we ons meestal beperken tot tijdsinvariante systemen met vast begintijdstip $t_0 = 0$.
We zullen de theorie ontwikkelen aan de hand van continue systemen. De eigenschappen van discrete systemen zijn analoog en zullen gewoonlijk alleen vermeld worden als er verschillen optreden met het continue geval.

HOOFDSTUK II. BESTUURBAARHEID EN WAARNEEMBAARHEID

2.1. *Inleiding*

In dit hoofdstuk zullen we twee begrippen introduceren die van fundamenteel belang zijn voor de lineaire systeemtheorie. Hierbij gaan we uit van een systeem beschreven door toestandsvergelijkingen

$$\text{(2.1.1)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \ , \\ y(t) &= Cx(t) \ , \end{aligned}$$

met constante matrices A,B,C. Het eerste begrip geeft de mate aan waarin we het systeem kunnen beinvloeden via de ingang u. We geven de oplossing x van (2.1.1) met beginwaarde $x(0) = x_0$ aan met $x(t,x_0,u)$. Meer expliciet (zie (1.3.14))

$$\text{(2.1.2)} \qquad x(t,x_0,u) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau \ .$$

(2.1.3) DEFINITIE. *Het systeem* (2.1.1) *heet* <u>*(volledig)*</u> <u>*bestuurbaar*</u> *(of* <u>*regelbaar*</u>*) als er voor elke* x_0 *en* x_1 *een* $t_1 > 0$ *en een* $u \in \Omega$ *bestaan zo dat* $x(t_1,x_0,u) = x_1$.

We noemen dus een systeem bestuurbaar als we vanuit een willekeurig punt x_0 elk willekeurig ander punt x_1 door middel van een geschikte besturing u kunnen bereiken.

(2.1.4) OPMERKING. Soms definieert men bestuurbaarheid als de mogelijkheid om vanuit een willekeurig punt x_0 de oorsprong te bereiken, met het oog op het feit dat dit juist is wat men gewoonlijk wenst te bereiken in een regelsysteem. We zullen deze eigenschap hier met <u>nulbestuurbaarheid</u> aangeven. Daarnaast heeft men ook nog het begrip <u>bereikbaarheid</u>. Men noemt (2.1.1) <u>(volledig)</u> <u>bereikbaar</u> als men vanuit de oorsprong een willekeurig punt kan bereiken. Voor continue systemen blijken deze begrippen equivalent te zijn. Voor systemen met discrete tijd zijn bereikbaarheid en bestuurbaarheid equivalent terwijl nulbestuurbaarheid een zwakkere eigenschap is. Inderdaad, als bijv. A <u>nilpotent</u> is, (d.w.z. $A^n = 0$) en $B = 0$, dan is het systeem niet bereikbaar maar wel nulbestuurbaar, daar voor elke $x(0)$ de toestand $x(n) = 0$ wordt bereikt. □

Het tweede begrip dat we invoeren geeft aan in hoeverre men uit de ingang en de uitgang van het systeem de toestand kan bepalen. We geven de uitgang die het systeem geeft bij begintoestand x_0 en ingang u, aan met $y(t,x_0,u)$. Dus

(2.1.5) $\quad y(t,x_0,u) := Cx(t,x_0,u)$.

(2.1.6) DEFINITIE. *Het systeem* (2.1.1) *heet* *(volledig) waarneembaar (of observeerbaar) als er een* $t_1 > 0$ *bestaat zo dat voor een willekeurige* $u \in \Omega$ *uit* $y(t,x_0,u) = y(t,x_1,u)$ *voor* $0 \le t \le t_1$ *volgt dat* $x_0 = x_1$.

We zeggen dus dat een systeem waarneembaar is als we uit de kennis van een ingang u en een uitgang y over een voldoend lang interval de begintoestand x_0 eenduidig kunnen bepalen.

De eigenschappen bestuurbaarheid en waarneembaarheid van (2.1.1) worden volkomen bepaald door het matrixtripel (C,A,B). Daarom zullen we (C,A,B) bestuurbaar resp. waarneembaar noemen als het systeem (2.1.1) deze eigenschappen heeft.

In § 2.2 resp. § 2.3 zullen we expliciete voorwaarden voor bestuurbaarheid en waarneembaarheid afleiden.

2.2. *Bestuurbaarheid*

We voeren de bereikbare verzameling in.

(2.2.1) DEFINITIE. *De op het tijdstip* t *bereikbare verzameling van* (2.1.1) *wordt gedefinieerd als*

(2.2.2) $\quad W(t) := \{x(t,0,u) \mid u \in \Omega\}$.

Deze verzameling bestaat dus uit de punten die vanuit de oorsprong op het tijdstip t kunnen worden bereikt. Daar

$$x(t,0,\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha x(t,0,u_1) + \beta x(t,0,u_2)$$

volgt onmiddellijk dat W(t) een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.

Een belangrijk resultaat dat ons in staat zal stellen $W(t)$ op een eenvoudige wijze te karakteriseren is de zgn. stelling van Cayley-Hamilton. Zij

$$p(z) = z^m + p_1 z^{m-1} + \dots + p_m$$

een polynoom en A een $n \times n$-matrix. Dan is

$$p(A) := A^m + p_1 A^{m-1} + \dots + p_m I .$$

Men kan gemakkelijk nagaan, dat, als $p(z)q(z) = r(z)$ en $p(z) + q(z) = s(z)$, dan $p(A)q(A) = r(A)$ en $p(A) + q(A) = s(A)$.

(2.2.3) STELLING. *(Cayley-Hamilton). Zij*

$$p(z) = \det(zI - A)$$

het karakteristieke polynoom van A. *Dan geldt*

$$p(A) = 0.$$

De stelling van Cayley-Hamilton zegt dus dat een matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking. Een bewijs van deze stelling wordt gegeven in appendix A.

Als men als besturing op het interval $[0,t_1]$ kiest*)

$$u(t) := B'e^{(t_1-t)A'}p \tag{2.2.4}$$

waar p een willekeurige vector in $\mathbb{R}^n$ is, dan vindt men $(x(0) = 0)$,

$$x(t_1,0,u) = \int_0^{t_1} e^{tA}Bu(t_1 - t)dt = \int_0^{t_1} e^{tA}BB'e^{tA'}dt\ p$$

dus

$$x(t_1,0,u) = M(t_1)p$$

waar

$$M(t_1) := \int_0^{t_1} e^{tA}BB'e^{tA'}dt .$$

---

*) Hier is A' de getransponeerde matrix van A, dus in de notatie van WISK 20 $A' = A^T$.

Als we de verzameling van punten in $\mathbb{R}^n$ die vanuit de oorsprong kunnen worden bereikt met een besturing van de vorm (2.2.4) aangeven met $\tilde{W}(t_1)$, dan is het duidelijk dat $\tilde{W}(t_1) \subseteq W(t_1)$. In het volgende beschouwen we rijvectoren, die we gewoonlijk aangeven met η, ξ etc.

(2.2.5) STELLING. *Zij* η *een* n-*dimensionale rijvector en zij* $t_1 > 0$. *De volgende beweringen zijn equivalent.*

1) $\eta \perp W(t_1)$.
2) $\eta \perp \tilde{W}(t_1)$.
3) $\eta e^{tA}B = 0$ *voor* $0 \leq t \leq t_1$.
4) $\eta e^{tA}B = 0$ *voor alle* t.
5) $\eta A^k B = 0$ *voor* $k = 0,1,2,\ldots$.
6) $\eta A^k B = 0$ *voor* $k = 0,1,\ldots,n-1$.

BEWIJS. We tonen het volgende implicatieschema aan.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & & & & \\ 2 \arrow[rr] & & 3 \arrow[ul] \arrow[r, Leftrightarrow] & 4 \arrow[r, Leftrightarrow] & 5 \arrow[r, Leftrightarrow] & 6 \end{tikzcd}$$

1 $\Rightarrow$ 2 is triviaal.
2 $\Rightarrow$ 3 Als $\eta \perp \tilde{W}(t_1)$ dan geldt $\eta M(t_1)p = 0$ voor alle p. In het bijzonder geldt dit voor $p = \eta'$. Dus

$$\int_0^{t_1} \eta e^{tA}BB'e^{tA'}\eta' dt = \int_0^{t_1} |\eta e^{tA}B|^2 dt = 0$$

waaruit 3 onmiddellijk volgt.
3 $\Rightarrow$ 1 Als 3 geldt, dan geldt voor willekeurige $u \in \Omega$:

$$x(t_1,0,u) = \int_0^{t_1} \eta e^{tA}Bu(t_1 - t)dt = 0$$

dus $\eta \perp W(t_1)$.
3 $\Rightarrow$ 4 volgt uit de analyticiteit van $\eta e^{tA}B$.
4 $\Rightarrow$ 3 is triviaal.
4 $\Leftrightarrow$ 5 volgt door machtreeksontwikkeling van $\eta e^{tA}B$:

$$0 = \eta e^{tA}B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \eta A^k B .$$

Een machtreeks is dan en slechts dan identiek nul, als elke coëfficiënt gelijk aan nul is.

5 ⇒ 6 is triviaal.

6 ⇒ 5 volgt uit stelling (2.2.3). Zij nl.

$$p(z) := \det(zI - A) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n$$

dan geldt volgens (2.2.3): $p(A) = 0$ of

$$A^n = -p_1 A^{n-1} - \ldots - p_{n-1} A - p_n I .$$

We zien dus dat A^n een lineaire combinatie is van machten van A van ten hoogste de graad $n-1$. Nu volgt met volledige inductie dat elke macht van A te schrijven is als een lineaire combinatie van machten van A van ten hoogste de graad $n-1$. Daarom is $\eta A^k B$ voor $k = n, n+1, \ldots$ een lineaire combinatie van $\eta B, \ldots, \eta A^{n-1} B$ en dus $\eta A^k B = 0$ $(k = n, n+1, \ldots)$. □

Als we de beeldruimte van een lineaire afbeelding of van een matrix L aangeven met $\mathcal{R}(L)$, dan kunnen we het volgende uit (2.2.5) concluderen.

(2.2.6) GEVOLG. *Zij* $t_1 > 0$. *Dan geldt*

(2.2.7) $$W(t_1) = \tilde{W}(t_1) = \mathcal{R}(M(t_1)) = \mathcal{R}([B, AB, \ldots, A^{n-1}B]) .$$

In het bijzonder is het bereikbare gebied onafhankelijk van t_1. *Bovendien zien we dat besturingen "willekeurig snel" kunnen worden uitgevoerd.*

(2.2.8) STELLING. W *is de kleinste* A-*invariante deelruimte die de kolommen* $b_1, \ldots, b_m$ *van* B *bevat, d.w.z.*

i) $b_1, \ldots, b_m \in W$,

ii) $AW \subseteq W$,

iii) *Als* $L \subseteq \mathbb{R}^n$ *de eigenschappen* (α): $b_1, \ldots, b_m \in L$, (β): $AL \subseteq L$ *heeft, dan is* $W \subseteq L$.

BEWIJS. De verzameling W is de deelruimte van $\mathbb{R}^n$, opgespannen door de kolommen van $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$, d.w.z. door $b_1, \ldots, b_m$, $Ab_1, \ldots, Ab_m, \ldots, A^{n-1}b_1, \ldots$ $\ldots, A^{n-1}b_m$. Hieruit volgt i) onmiddellijk. Eigenschap ii) zal bewezen zijn als we hebben laten zien dat elk van de vectoren $A^k b_j$ $(k = 0, \ldots, n-1;$ $j = 1, \ldots, m)$ door de afbeelding A in W wordt afgebeeld. Dit is zonder meer duidelijk als $k \le n-2$ is, terwijl het voor $k = n-1$ volgt uit de stelling van Cayley-Hamilton. Veronderstel nu dat L voldoet aan (α) en (β). Dan kunnen we successievelijk inzien dat $b_1,\ldots,b_m$; $Ab_1,\ldots,Ab_m\ldots$ tot L behoren dus $W \subseteq L$. □

(2.2.9) OPMERKING. Voor meer informatie over de ruimte W zie bijv. [WH]. □

Uit het voorafgaande kunnen we gemakkelijk een bestuurbaarheidsvoorwaarde afleiden:

(2.2.10) STELLING. *Het systeem* (2.1.1) *is bestuurbaar dan en slechts dan, als*

(2.2.11) $\quad \mathrm{rang}[B,AB,\ldots,A^{n-1}B] = n$

of, anders gezegd, als er onder de kolommen van de matrix $[B,AB,\ldots,A^{n-1}B]$ *een basis voor* $\mathbb{R}^n$ *te vinden is.*

Een andere equivalente formulering krijgt men als volgt:
Uit $\eta A^k B = 0$ *voor* $k = 0,1,\ldots,n-1$ *volgt* $\eta = 0$.

BEWIJS. Het is duidelijk dat de bereikbaarheid een noodzakelijke voorwaarde is voor de bestuurbaarheid en dat de bereikbaarheid equivalent is met $W = \mathbb{R}^n$, d.w.z. (2.2.11). Als omgekeerd (2.2.11) geldt en als $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ dan volgt uit (2.1.2) dat $x_1 = x(t_1,x_0,u)$ voor zekere u als

$$x_1 - x(t,x_0,u) = x(t_1,0,u) \in W$$

hetgeen zeker voldaan is daar $W = \mathbb{R}^n$. □

(2.2.12) VOORBEELD.

i) Het systeem beschreven in voorbeeld (1.3.21) is bestuurbaar. We vinden nl.

$$[B,AB,A^2B,A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 \\ 1 & 0 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deze matrix is duidelijk niet-singulier, zodat haar rang 4 is.

ii) Beschouw het systeem

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - 6x_2 - 3u$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + 5x_2 + 2u$$

d.w.z. $\dot{x} = Ax + Bu$ met

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Dan is

$$\text{rang}[B,AB] = \text{rang}\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

zodat het systeem niet bestuurbaar is. Inderdaad, als

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

dan geldt $\dot{z} = z$. D.w.z. $z(t) = e^t z_0$. Als bijv. $z_0 = 0$ dan geldt $z(t) = 0$ voor alle $t > 0$. Alleen de punten (x_1,x_2) met $2x_1 + 3x_2 = 0$ zijn dan bereikbaar. Dus

$$W = \{x = (x_1,x_2) \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\} . \qquad \square$$

We merken tenslotte op dat de bestuurbaarheid van (2.1.1) of het matrixtripel (C,A,B) niet beïnvloed wordt door C. Daarom spreekt men ook wel van de bestuurbaarheid van de vergelijking $\dot{x} = Ax + Bu$ of het matrixpaar (A,B).

2.3. *Waarneembaarheid*

(2.3.1) DEFINITIE. *Beschouw het systeem* (2.1.1). *Zij* $t_1 > 0$. *De onwaarneembare ruimte van* (2.1.1) *op het interval* $[0,t_1]$ *is de verzameling van* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *waarvoor geldt* $y(t,x_0,0) = 0$ $(0 \le t \le t_1)$. *Deze verzameling wordt aangegeven met* $V(t_1)$.

Het is duidelijk dat $V(t_1)$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is, daar

$$y(t,\alpha x_0 + \beta x_1,0) = \alpha y(t,x_0,0) + \beta y(t,x_1,0) .$$

Op grond van (2.1.2) en (2.1.5) geldt $y(t,x_0,0) = Ce^{tA}x_0$, zodat $x_0 \in V(t_1)$ geldt dan en slechts dan als $Ce^{tA}x_0 = 0$ $(0 \le t \le t_1)$, d.w.z. $x_0'e^{tA'}C' = 0$ $(0 \le t \le t_1)$. Uit stelling (2.2.5) met η, A, B vervangen door x_0', A', C' volgt onmiddellijk

(2.3.2) STELLING. *Zij* $t_1 > 0$. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1) $x_0 \in V(t_1)$.

2) $Ce^{tA}x_0 = 0 \ (0 \le t \le t_1)$.

3) $CA^k x_0 = 0 \ (k = 0,1,\dots)$.

4) $CA^k x_0 = 0 \ (k = 0,1,\dots,n-1)$.

In het bijzonder is $V(t_1)$ *onafhankelijk van* t_1. *De ruimte* $V(t_1)$ *kan worden gekarakteriseerd als de nulruimte van de matrix*

$$(2.3.3) \qquad \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

We zullen de onwaarneembare deelruimte voortaan aangeven met V. Uit stelling (2.3.2) kunnen we gemakkelijk een waarneembaarheidscriterium afleiden.

(2.3.4) STELLING. *Het systeem is waarneembaar, dan en slechts dan als* $V = 0$, *d.w.z., dan en slechts dan als de matrix* (2.3.3) *rang* n *heeft.*

BEWIJS. Uit (2.1.2) en (2.1.5) volgt

$$(2.3.5) \qquad y(t,x_0,u) = y(t,x_0,0) + \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

waarbij $K(t) = Ce^{tA}B$. Als dus voor zekere u en t_1 geldt $y(t,x_0,u) = y(t,x_1,u)$ $(0 \le t \le t_1)$, dan geldt ook $y(t,x_0,0) = y(t,x_1,0)$ $(0 \le t \le t_1)$, dus $x_0 - x_1 \in V$. Als dus (2.1.1) waarneembaar is dan moet gelden $V = 0$ en omgekeerd als $V = 0$ dan is $x_0 = x_1$ en dus (2.1.1) waarneembaar. De rangvoorwaarde voor (2.3.3) volgt uit stelling (2.3.2). □

De waarneembaarheid van (2.1.1) blijkt alleen af te hangen van A en C, en niet van B. Daarom zeggen we in plaats (C,A,B) is waarneembaar: (C,A) is waarneembaar.

Er blijkt een analogie te bestaan tussen waarneembaarheids- en bestuurbaarheidseigenschappen. Zo volgt uit stelling (2.2.10) en (2.3.4) dat (C,A) waarneembaar is dan en slechts dan als (A',C') bestuurbaar is. Dit leidt ons er toe het volgende systeem

$$(2.3.6) \qquad \begin{aligned} \dot{p} &= -A'p + C'y \\ u &= B'p \end{aligned}$$

het <u>duale systeem</u> van (2.1.1) te noemen. Dan kunnen we zeggen dat (2.1.1) bestuurbaar is dan en slechts dan als (2.3.6) waarneembaar is en dat (2.1.1) waarneembaar is dan en slechts dan als (2.3.6) bestuurbaar is. Het minteken voor A in (2.3.6) heeft geen invloed op de bestuurbaarheid en waarneembaarheid. De reden voor het invoeren van dit minteken zullen we later zien (§ 4.2).

Uit het voorafgaande volgt dat men uit elke stelling over de bestuurbaarheid van een lineair systeem een stelling over de waarneembaarheid kan afleiden, door de formules te transponeren. Men noemt dit het <u>dualiteitsprincipe</u>. Dit principe maakt het ons mogelijk een aantal resultaten alleen voor bestuurbaarheid te bewijzen en de overeenkomstige resultaten voor de waarneembaarheid zonder bewijs op te schrijven. Hiervan is in feite reeds gebruik gemaakt bij (2.3.2).

(2.3.7) VOORBEELD. We beschouwen weer het systeem van voorbeeld (1.3.21), (vgl. voorbeeld (2.2.12)). Als we C en M definiëren als

$$C = [I \quad 0], \quad M = \begin{bmatrix} -r_1 & r_1 \\ r_1 & -r_1-r_2 \end{bmatrix}$$

vinden we in blokmatrixnotatie

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} .$$

De matrix heeft ook rang 4 zodat het systeem waarneembaar is. □

(2.3.8) VOORBEELD. Beschouw het systeem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 3x_2 + u \\ x_2 &= -2x_1 + 4x_2 + u \\ y &= x_1 - x_2 . \end{aligned}$$

Dan is

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1] .$$

Er geldt

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

zodat het systeem niet waarneembaar is. Het blijkt dat als $x_0 = [1,1]'$, dan

$$y(t,x_0,0) = 0 \; . \qquad \square$$

(2.3.9) OPMERKING. Men kan bewijzen dat meestal een systeem bestuurbaar is en dat het systeem alleen onbestuurbaar kan zijn als de elementen van de matrices A en B aan zekere vergelijkingen voldoen. Dit houdt in dat als men de coëfficiënten van A en B door meting heeft verkregen, men practisch zeker weet dat (A,B) bestuurbaar is. Ook is het zo dat wanneer men in een bestuurbaar systeem de elementen een klein beetje verandert het systeem bestuurbaar blijft. We zullen deze uitspraak niet verder preciseren. Analoge opmerkingen gelden voor de waarneembaarheid. $\square$

2.4. *Basistransformaties in de toestandsruimte*

Als we in de toestandsruimte van het systeem

$$(2.4.1) \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

een nieuwe basis kiezen met overgangsmatrix S dan komt dat overeen met de transformatie

$$(2.4.2) \qquad x = S\bar{x} \; .$$

Substitutie van deze transformatie in (2.4.1) geeft het stelsel

$$(2.4.3) \qquad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \; , \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \; , \end{aligned}$$

waarbij

$$(2.4.4) \qquad \begin{aligned} \bar{A} &:= S^{-1}AS \; , \\ \bar{B} &:= S^{-1}B \; , \\ \bar{C} &:= CS \; . \end{aligned}$$

We zeggen dat twee systemen (2.4.1) en (2.4.3) <u>isomorf</u> zijn als er een S bestaat zo dat (C,A,B) en $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ voldoen aan (2.4.4). We kunnen de relaties (2.4.4) als volgt aangeven in een diagram.

(2.4.5)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \arrow[dr, "C"] & \\
\mathbb{R}^m \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "\bar{B}"'] & & & \mathbb{R}^r \\
 & \mathbb{R}^n \arrow[uu, "S"] \arrow[r, "\bar{A}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[uu, "S"'] \arrow[ur, "\bar{C}"'] &
\end{tikzcd}$$

We zeggen dat het diagram <u>commuteert</u> als de samengestelde afbeeldingen van de afbeeldingen in de diagram alleen afhangen van het begin- en eindpunt in de diagram en niet van de weg waarmee het begin- met het eindpunt is verbonden. Zo kan men in diagram (2.4.5) gemakkelijk de formules (2.4.4) aflezen. Andere gelijkheden die men in (2.4.5) kan aflezen, zoals $CAB = \bar{C}\bar{A}\bar{B}$ zijn een gevolg van (2.4.4). Uit de interpretatie van (2.4.2) als een verandering van basis in $\mathbb{R}^n$ volgt dat de impuls-responsie, de overdrachtsmatrix, de bestuurbaarheid en de waarneembaarheid invariant blijven bij deze transformatie. We zullen dit resultaat ook meer formeel bewijzen.

(2.4.6) STELLING. *Als* (C,A,B) *en* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *isomorf zijn dan geldt*

i) (A,B) *is bestuurbaar dan en slechts dan als* $(\bar{A},\bar{B})$ *bestuurbaar is.*
ii) (C,A) *is waarneembaar dan en slechts dan als* $(\bar{C},\bar{A})$ *waarneembaar is.*
iii) $\bar{C}(s\underline{I} - \bar{A})^{-1}\bar{B} = C(sI - A)^{-1}B$.
iv) $\bar{C}e^{t\bar{A}}\bar{B} = Ce^{tA}B$.

BEWIJS.

i) Er geldt

$$[\bar{B},\bar{A}\bar{B},\ldots,\bar{A}^{n-1}\bar{B}] = S^{-1}[B,AB,\ldots,A^{n-1}B] \ ,$$

zodat

$$\operatorname{rang}[\bar{B},\bar{A}\bar{B},\ldots,\bar{A}^{n-1}\bar{B}] = \operatorname{rang}[B,AB,\ldots,A^{n-1}B] \ .$$

ii) is duaal aan (i).
iii) volgt door substitutie.
iv) volgt door substitutie of uit iii). □

Men kan proberen een S te zoeken waarmee het tripel $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ een eenvoudige gedaante krijgt. Zo kan men, als A n onafhankelijke eigenvectoren heeft, deze als basis kiezen, zodat $\bar{A}$ een diagonaalmatrix wordt. We zullen dit niet verder onderzoeken, maar uitgaan van een situatie waarin het systeem niet bestuurbaar is en $B \neq 0$. Dan geldt $0 \subset W \subset \mathbb{R}^n$ (met stricte inclusie). We kiezen een basis $q_1,\ldots,q_k$ van W en vullen deze aan tot een basis $q_1,\ldots,q_n$ van $\mathbb{R}^n$. De kolom van een vector $x \in \mathbb{R}^n$ t.o.v. die basis geven we aan met $\bar{x}$. Dus $\bar{x} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$, waar

$$x = \bar{x}_1q_1 +\ldots+ \bar{x}_nq_n \ .$$

Als we

$$S := [q_1,\ldots,q_n]$$

invoeren, dan kunnen we schrijven $x = S\bar{x}$. De kolom $\bar{x}$ kunnen we splitsen in twee delen. Het eerste bestaat uit de componenten $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_k)$ en wordt aangegeven met x_1, het tweede deel $(\bar{x}_{k+1},\dots,\bar{x}_n)$ geven we aan met x_2, zodat

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

We kunnen dan zeggen $x \in W$ dan en slechts dan als $x_2 = 0$. De matrices $\bar{A} = S^{-1}AS$, $\bar{B} = S^{-1}B$ worden overeenkomstig gesplitst

$$(2.4.7) \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} .$$

Nu weten we dat de vectoren in B tot W behoren. Derhalve is $B_2 = 0$. Verder geldt $AW \subseteq W$ (zie (2.2.8)). Uit $x \in W$ volgt dus $Ax \in W$, d.w.z. $x_2 = 0$ impliceert $(Ax)_2 = 0$. M.b.v. (2.4.7) volgt hieruit $A_{21} = 0$. De variabele $\bar{x}$ voldoet dus aan de vergelijking

$$(2.4.8) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 &= A_{22}x_2 . \end{aligned}$$

We zien dat de variabele x_2 in zijn geheel onbestuurbaar is. Als $\bar{x}(0) = 0$, dan geldt $x_2 = 0$ voor alle t en dus

$$(2.4.9) \qquad \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u .$$

Daar W de bereikbare verzameling is, is voor elke $c \in \mathbb{R}^k$ het punt $d \in \mathbb{R}^n$ met kolom $(c,0)$ t.o.v. $q_1,\dots,q_n$ bereikbaar (zo'n d ligt nl. in W). Maar dit houdt in dat (2.4.9) volledig bereikbaar is. We hebben zo gevonden:

(2.4.10) STELLING. *Zij* (2.4.1) *niet bestuurbaar en zij* $B \neq 0$. *Dan bestaat er een inverteerbare matrix* S *zodat het tripel* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *gegeven door* (2.4.4) *de volgende blokdecompositie heeft*

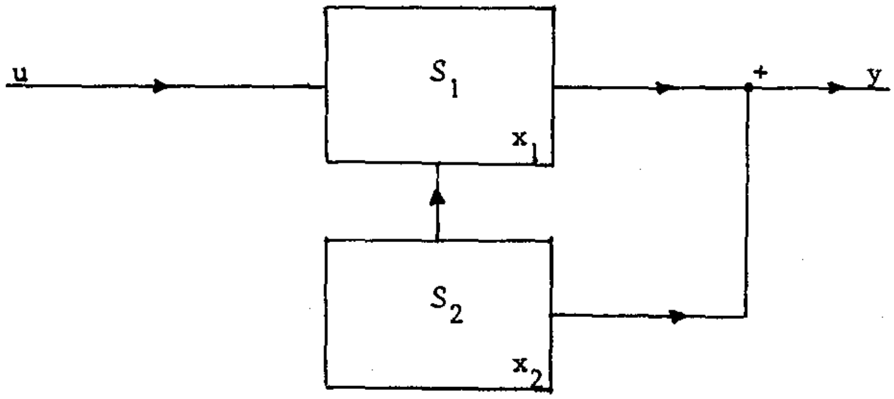
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C_1, C_2]$$

waarbij (A_{11},B_1) *volledig bestuurbaar is.*

Het systeem (2.4.8) tezamen met de vergelijking

$$(2.4.11) \qquad y = C_1x_1 + C_2x_2$$

kunnen we als volgt weergeven:



Het systeem kan dus worden ontbonden in twee stukken, een volledig bestuurbaar stuk S_1 met toestandsvariabele x_1 en een volledig onbestuurbaar stuk S_2 met toestandsvariabele x_2. Er gaat wel invloed uit van S_2 op S_1, maar niet omgekeerd.

De impuls-responsie-matrix

$$K(t) = Ce^{tA}B$$

van (2.4.1) is gelijk aan de impuls-responsie-matrix van het bestuurbare deel

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u, \; y = C_1x_1 \; .$$

Immers, met volledige inductie bewijst men gemakkelijk dat

$$\bar{A}^k\bar{B} = \begin{bmatrix} A_{11}^k B_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (k = 0,1,\ldots)$$

en dus

$$CA^kB = \bar{C}\bar{A}^k\bar{B} = C_1A_{11}^kB_1 \qquad (k = 0,1,\ldots) \; ,$$

zodat

$$Ce^{tA}B = C_1e^{tA_{11}}B_1 \; .$$

Hieruit volgt ook dat

$$C(sI - A)^{-1}B = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 \; .$$

De overdrachtsmatrix van (2.4.1) is dus ook gelijk aan die van het bestuurbaar deel.

(2.4.12) OPMERKING. Bij de afleiding van stelling (2.4.10) hebben we aangenomen, dat $B \neq 0$ om te garanderen dat $W \neq 0$ en dat (A,B) niet bestuurbaar is om te garanderen dat $W \neq \mathbb{R}^n$. We kunnen echter stelling (2.4.10) formuleren zonder deze voorwaarden mits we in een matrixdecompositie *lege blokken* toe laten. Een <u>lege matrix</u> is een matrix waarvan het aantal rijen of het aantal kolommen gelijk aan nul is. Een lege matrix moet niet worden verward met de nulmatrix! Als bijv. $B = 0$ dan zijn in (2.4.10) A_{11}, A_{12} en B_1 leeg. Als (A,B) bestuurbaar is dan zijn A_{22} en de nulmatrices leeg. □

De voorafgaande resultaten laten zich onmiddellijk dualiseren. We krijgen dan het volgende:

(2.4.13) STELLING. *Zij het systeem* (2.4.1) *niet waarneembaar en zij* $C \neq 0$. *Dan bestaat er een inverteerbare matrix* S *zo dat het matrixtripel* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *gegeven door* (2.4.4) *de volgende gedaante heeft*

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C_1, 0]$$

waarbij (C_1,A_{11}) *waarneembaar is.*

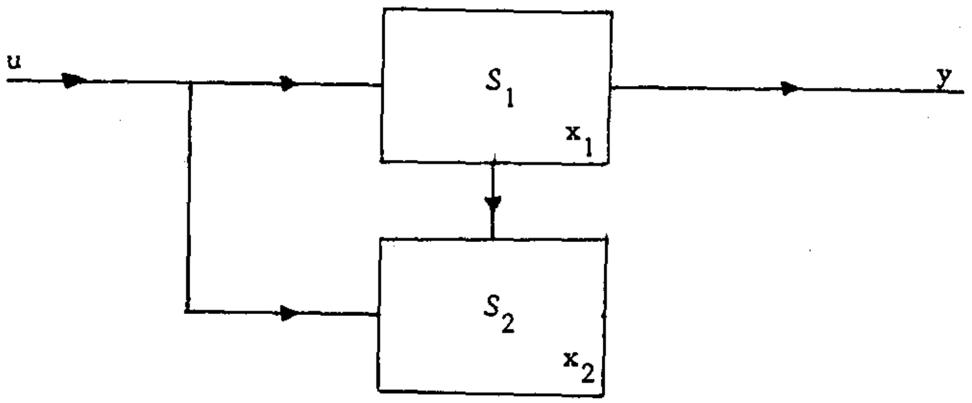
In de getransformeerde variabelen luiden de vergelijkingen

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u ,$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u ,$$

$$y = C_1x_1 .$$

Hier kunnen we het systeem ontbinden in een waarneembaar deelsysteem S_1 en een onwaarneembaar deelsysteem S_2.



De impuls-responsie-matrix van het systeem S en die van S_1 zijn aan elkaar gelijk:

$$Ce^{tA}B = C_1 e^{tA_{11}} B_1$$

en evenzo:

$$C(sI - A)^{-1}B = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 \ .$$

Tenslotte kunnen we bij een niet-bestuurbaar en niet-waarneembaar systeem een basis kiezen die beide facetten naar voren brengt. Zij V de onwaarneembare deelruimte en W de bestuurbare deelruimte. Dan kiezen we eerst een basis $q_1,\ldots,q_k$ in $V \cap W$, vervolgens breiden we die basis met $q_{k+1},\ldots,q_\ell$ en $q_{\ell+1},\ldots,q_p$ tot bases $q_1,\ldots,q_\ell$ van V en $q_1,\ldots,q_k,q_{\ell+1},\ldots,q_p$ van W. Dan is $q_1,\ldots,q_p$ een basis van $V+W := \{x + z \mid x \in V,\ z \in W\}$ zoals men gemakkelijk kan verifieren. Deze basis breiden we tenslotte uit tot een basis van $\mathbb{R}^n$. We kunnen de kolom van $x \in \mathbb{R}^n$ t.o.v. die basis splitsen in vier stukken en de matrices A, B en C overeenkomstig:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \ \bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \ \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}, \ \bar{C} = [C_1, C_2, C_3, C_4].$$

Daar V, W, $V \cap W$ en $V + W$ A-invariant zijn (zie (2.2.8)) zijn A_{21}, A_{31}, A_{41}, A_{32}, A_{42}, A_{43}, A_{23} nulmatrices. Daar de kolommen van B in W liggen geldt $B_2 = 0$, $B_4 = 0$. Omdat de rijen van C loodrecht staan op V geldt $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Hierbij moeten we in het algemeen toelaten dat sommige matrices leeg kunnen zijn omdat bijv. $V = W$ of $V \subset W$. Met dit voorbehoud kunnen we de volgende stelling formuleren.

(2.4.14) STELLING. *Bij gegeven systeem (2.4.1) bestaat er een niet-singuliere matrix* S*, zo dat het tripel* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *de volgende gedaante heeft*

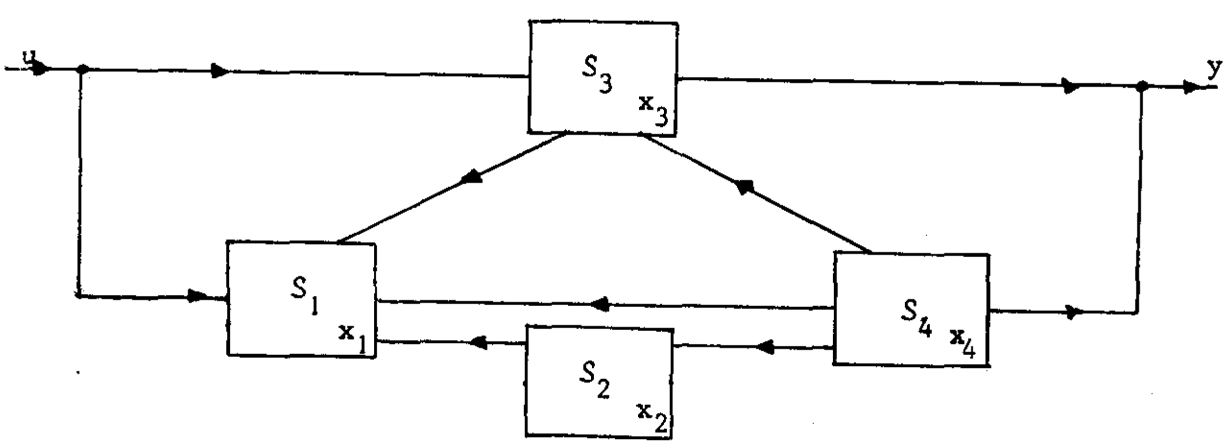
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [0 \quad 0 \quad C_3 \quad C_4] \ .$$

Hierbij zijn (A_{11},B_1) *en* (A_{33},B_3) *bestuurbaar en* (C_3,A_{33}) *en* (C_4,A_{44}) *waarneembaar.*

De vergelijkingen met matrices $\bar{A}$, $\bar{B}$ en $\bar{C}$ kunnen als volgt worden uitgeschreven:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + A_{13}\bar{x}_3 + A_{14}\bar{x}_4 + B_1u \\
\dot{\bar{x}}_2 &= \phantom{A_{11}\bar{x}_1 +{}} A_{22}\bar{x}_2 \phantom{{}+ A_{13}\bar{x}_3} + A_{24}\bar{x}_4 \\
\dot{\bar{x}}_3 &= \phantom{A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 +{}} A_{33}\bar{x}_3 + A_{34}\bar{x}_4 + B_3u \\
\bar{x}_4 &= \phantom{A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + A_{13}\bar{x}_3 +{}} A_{44}\bar{x}_4 \\
y &= \phantom{A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 +{}} C_3\bar{x}_3 + C_4\bar{x}_4 \ .
\end{aligned}$$

Schematisch kunnen we de situatie als volgt aangeven:



De deelsystemen S_1, S_2, S_3, S_4 hebben de volgende bestuurbaarheids en waarneembaarheidseigenschappen (streep betekent "niet". b: bestuurbaar, w: waarneembaar)

S_3: b , w ,
S_1: b , $\bar{w}$,
S_4: $\bar{b}$, w ,
S_2: $\bar{b}$. $\bar{w}$.

2.5. Bestuurbare en waarneembare eigenwaarden

Beschouw weer het systeem

$$(2.5.1)\qquad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\ . \end{aligned}$$

(2.5.2) DEFINITIE. *Een eigenwaarde* λ *van* A *heet* (A,B)*-<u>bestuurbaar</u> (of kortweg <u>bestuurbaar</u>, als het systeem* (2.5.1) *vastligt) als*

$$(2.5.3)\qquad \mathrm{rang}[A - \lambda I, B] = n\ .$$

De eigenwaarde λ *heet* (C,A)*-<u>waarneembaar</u> (of <u>waarneembaar</u>) als*

$$(2.5.4)\qquad \mathrm{rang}\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n\ .$$

In plaats van (2.5.3) kunnen we schrijven: *Uit* $\eta A = \lambda\eta$ *en* $\eta B = 0$ *volgt* $\eta = 0$. Hierbij is η een eventueel complexe rijvector. In woorden: *Bij de eigenwaarde* λ *van* A *hoort geen linker eigenvector die tevens linker nulvector van* B *is*. We kunnen het dualiteitsprincipe weer gebruiken als we opmerken dat (C,A)-waarneembaar is, dan en slechts dan als λ (A',C')-bestuurbaar is. Zo geldt bijv. λ *is* (C,A) *waarneembaar als uit* $Ap = \lambda p$, $Cp = 0$ *volgt* $p = 0$, d.w.z.: *er bestaat geen rechtereigenvector bij* λ *die tevens rechter nulvector is van* C. Ook hier kan p complex zijn.

De bestuurbaarheid en de waarneembaarheid van een eigenwaarde blijft invariant bij basistransformaties:

(2.5.5) STELLING. *Als* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *en* (C,A,B) *voldoen aan* (2.4.4) *dan geldt* $\sigma(\bar{A}) = \sigma(A)$. *Verder is* λ $(\bar{A},\bar{B})$*-bestuurbaar dan en slechts dan als* λ (A,B)*-bestuurbaar is en* λ *is* $(\bar{C},\bar{A})$*-waarneembaar dan en slechts dan als* λ (C,A)*-waarneembaar is.*

BEWIJS. De eerste uitspraak is een bekende stelling (WISK. 30, st. 1.3.3). De tweede uitspraak volgt uit de formule

$$[\bar{A} - \lambda I, \bar{B}] = S^{-1}[A - \lambda I, B]\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\ .$$

De derde uitspraak is duaal aan de tweede. $\square$

De definitie van bestuurbare en waarneembare eigenwaarden wordt gerechtvaardigd door het volgende resultaat:

(2.5.6) STELLING. *Zij* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *een tripel isomorf met* (C,A,B) *van de gedaante gegeven in* (2.4.10). *Dan is* λ $(\bar{A},\bar{B})$*-bestuurbaar dan en slechts dan als* $\lambda \notin \sigma(A_{22})$. *Als* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *van de gedaante is gegeven* (2.4.13) *dan is* λ $(\bar{C},\bar{A})$*-waarneembaar dan en slechts dan als* $\lambda \notin \sigma(A_{22})$. *Hierbij spreken we af dat* $\sigma(A_{22}) = \emptyset$ *als* A_{22} *een lege matrix is (d.w.z. in het geval dat* (2.5.1) *bestuurbaar resp. waarneembaar is).*

BEWIJS. We bewijzen alleen de uitspraak over bestuurbaarheid. Als $\lambda \in \sigma(A_{22})$, dan geldt

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda_1 I & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_{22} - \lambda I & 0 \end{bmatrix} < n$$

zodat λ niet $(\bar{A},\bar{B})$-bestuurbaar is.
Als λ niet $(\bar{A},\bar{B})$-bestuurbaar is, dan is er een rijvector $\eta = [\eta_1,\eta_2] \neq 0$ zo dat $\eta\bar{A} = \lambda\eta$, $\eta\bar{B} = 0$, d.w.z.

$$\eta_1 A_{11} = \lambda\eta_1, \quad \eta_1 A_{12} + \eta_2 A_{22} = \lambda\eta_2$$

$$\eta_1 B_1 = 0 \ .$$

Als $\lambda \notin \sigma(A_{22})$ dan moet $\eta_1 \neq 0$ zijn (want $[\eta_1,\eta_2] \neq 0$). Maar $\eta_1 A_{11}^k = \lambda^k \eta_1$ en dus $\eta_1 A_{11}^k B_1 = 0$ $(k = 0,1,\ldots)$ in strijd met de bestuurbaarheid van (A_{11},B_1) (zie (2.2.8)). □

Een onmiddellijk gevolg van het voorafgaande is:

(2.5.7) STELLING. *Het systeem* (2.5.1) *is bestuurbaar dan en slechts dan als alle eigenwaarden van* A *bestuurbaar zijn, d.w.z. als voor alle* $\lambda \in \sigma(A)$ *geldt*

$$\operatorname{rang}[A - \lambda I, B] = n \ .$$

Het systeem (2.5.1) *is waarneembaar dan en slechts dan als alle eigenwaarden van* A *waarneembaar zijn d.w.z. als voor alle* $\lambda \in \sigma(A)$ *geldt*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n \ .$$

Merk op, dat aan deze rangvoorwaarden zeker is voldaan voor $\lambda \notin \sigma(A)$. De voorwaarden in stelling (2.5.7) kunnen soms handig zijn bij het onderzoeken van bestuurbaarheid en waarneembaarheid van systemen.

(2.5.8) VOORBEELD. Veronderstel dat het systeem (2.5.1) bestuurbaar is en beschouw het systeem dat ontstaat na de toestandsterugkoppeling

$$u = Fx + v \ .$$

Dan is het nieuwe systeem

$$\dot{x} = (A + BF)x + Bv$$

ook bestuurbaar. Immers, anders zou er een λ en een $\eta \neq 0$ met

$$\eta(A + BF) = \lambda\eta, \ \eta B = 0 \ .$$

Maar dan zou ook $\eta A = \lambda\eta$ gelden, zodat λ een niet-bestuurbare eigenwaarde van (A,B) zou zijn. □

2.6. *De bestuurbare kanonieke vorm voor monovariabele systemen*

In het geval van een monovariabel systeem is B een kolomvector en C een rijvector. We zullen daarom b i.p.v. B en c i.p.v. C schrijven. In voorbeeld (1.3.24) hebben we een voorbeeld van een monovariabel systeem gezien. Daar was

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [c_n, \ldots, c_1] \ . \tag{2.6.1}$$

De overdrachtsfunctie van het systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

met A, b en c gegeven door (2.6.1) is

$$\hat{K}(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \tag{2.6.3}$$

waar

$$\begin{aligned} p(s) &= c_1 s^{n-1} + \ldots + c_n \ , \\ q(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n \ . \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

(2.6.5) STELLING. *Het systeem* (2.6.1) *is altijd bestuurbaar. Het systeem is waarneembaar, dan en slechts dan als* p *en* q *onderling ondeelbaar zijn, d.w.z. wanneer de breuk* $\hat{K} = p/q$ *niet meer te vereenvoudigen is.*

BEWIJS. Er geldt

$$[A - \lambda I, b] = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1-\lambda & 1 \end{bmatrix} .$$

Als we hierin de eerste kolom weglaten krijgen we een vierkante niet-singuliere matrix. Dus $\mathrm{rang}[A - \lambda I, b] = n$ voor elke λ, zodat het systeem bestuurbaar is.

Om de waarneembaarheid te onderzoeken veronderstellen we dat $Ap = \lambda p$, $cp = 0$, waar $p = [p_1, \ldots, p_n]'$. Uitgeschreven is dat

$$\begin{aligned} p_2 &= \lambda p_1 \\ &\vdots \\ p_n &= \lambda p_{n-1} \\ -a_n p_1 - a_{n-1}p_2 - \ldots - a_1 p_n &= \lambda p_n \end{aligned}$$

Dus, $p_k = \lambda^{k-1} p_1$ $(k = 1, \ldots, n)$ en $q(\lambda)p_1 = 0$. Als $p \neq 0$ dan moet $p_1 \neq 0$ zijn zodat $q(\lambda) = 0$, d.w.z. λ is een nulpunt van de karakteristieke vergelijking. In dat geval is $p = [1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}]'$. (We mogen $p_1 = 1$ stellen.) Maar

$$cp = c_n + c_{n-1}\lambda + \ldots + c_1\lambda^{n-1} = p(\lambda) .$$

We zien dat er een $p \neq 0$ bestaat met $Ap = \lambda p$, $cp = 0$ dan en slechts dan als $q(\lambda) = 0 = p(\lambda)$. □

(2.6.6) OPMERKING. Als p en q onderling deelbaar zijn, dan zijn de gemeenschappelijke nulpunten van p en q precies de niet-waarneembare eigenwaarden van A. □

Op grond van stelling (2.4.6) en (2.6.5) is ieder monovariabel systeem isomorf met (2.6.1) bestuurbaar. Het omgekeerde geldt ook:

(2.6.7) STELLING. *Elk bestuurbaar monovariabel tripel* (c,A,b) *is isomorf met* $(\bar{c},\bar{A},\bar{b})$ *van de gedaante* (2.6.1).

BEWIJS. Zij $q(s)$ het karakteristieke polynoom (zie (2.6.4)). We definiëren (vergelijk A.2)

$$\begin{aligned} q_0(s) &:= 1 \\ q_1(s) &:= s + a_1 \\ q_2(s) &:= s^2 + a_1 s + a_2 \\ &\;\;\vdots \\ q_{n-1}(s) &:= s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} \\ q_n(s) &= q(s) \;. \end{aligned}$$

Dan geldt $q_{k+1}(s) = sq_k(s) + a_{k+1}$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$. We kiezen de vectoren

$$e_k = q_{n-k}(A)b \quad (k = 1,\dots,n) \;,$$

als nieuwe basis. Dan geldt

$$S := [e_1,\dots,e_n] = [b,Ab,\dots,A^{n-1}b]R$$

waar

$$R := \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & & ⋰ & ⋰ & 0 \\ \vdots & ⋰ & & ⋰ & \vdots \\ \vdots & & ⋰ & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Daar $[b,Ab,\dots,A^{n-1}b]$ en R niet-singulier zijn, is S niet singulier. Verder geldt

$$q_{k+1}(A) = Aq_k(A) + a_{k+1}I, \; q_n(A) = 0$$

en dus

$$Ae_{k+1} = e_k - a_{n-k}e_n, \; Ae_1 = -a_n e_n \;.$$

Dus

$$AS = [Ae_1,\dots,Ae_n] = [e_1,\dots,e_n]\bar{A} = S\bar{A}$$

d.w.z. $\bar{A} = S^{-1}AS$. Het is ook duidelijk dat $b = e_n = S\bar{b}$. Tenslotte wordt $\bar{c}$ gedefinieerd door $\bar{c} = cS$.

□

HOOFDSTUK III. STABILITEIT EN STABILISATIE

3.1. *Asymptotische stabiliteit*

Zoals we in hoofdstuk I hebben gezien voldoen de oplossingen $x(t)$ van de homogene vergelijking

(3.1.1) $\dot{x}(t) = Ax(t)$

met een constante matrix A waarvan alle eigenwaarden een negatief reëel deel hebben, aan

(3.1.2) $|x(t)| \leq Me^{-\alpha t}$

met positieve M en α. We zeggen daarom dat (3.1.1) asymptotisch stabiel is:

(3.1.3) DEFINITIE. *De vergelijking* (3.1.1) *heet* *asymptotisch stabiel* *als voor alle oplossingen* x *van* (3.1.1) *geldt* $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$. *In dat geval heet* A *een* *stabiliteitsmatrix*.

Voor een definitie die op een algemenere dan bovenstaande situatie kan worden toegepast verwijzen we naar [GDV,WI]. Zoals we al in hoofdstuk I hebben opgemerkt geldt:

(3.1.4) STELLING. *Vergelijking* (3.1.1) *is asymptotisch stabiel dan en slechts dan als* $\Lambda(A) < 0$. *In dat geval bestaan er positieve getallen* M *en* α *waarvoor* (3.1.2) *geldt.*

Soms kan men stabiliteit verifiëren m.b.v. Liapunovfuncties. Ook hier verwijzen we voor de algemene situatie naar [GDV,WI]. In dit dictaat zullen we ons beperken tot kwadratische Liapunovfuncties. In verband daarmee zullen we vaak gebruik maken van symmetrische matrices waarvan we in appendix B enige eigenschappen zullen bewijzen. Een symmetrische matrix P heet positief semi-definiet als $x'Px \geq 0$ geldt voor elke x en positief definiet als $x'Px > 0$ voor elke $x \neq 0$. We gebruiken de notaties $P \geq 0$ resp. $P > 0$ om aan te geven dat P positief semi-definiet resp. positief definiet is. De notaties $P \geq Q$, $P > Q$ zijn equivalent met resp. $P - Q \geq 0$, $P - Q > 0$. We maken verder gebruik van de volgende stelling.

(3.1.6) STELLING. *Zij* P *een symmetrische matrix met eigenwaarden* $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

1) *De volgende uitspraken zijn equivalent:* a) $P \geq 0$, b) $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1,\dots,n)$, c) *er is een matrix* D *zo dat* $P = D'D$.

2) *De volgende uitspraken zijn equivalent:* a) $P > 0$, b) $\lambda_i > 0$ $(i = 1,\dots,n)$, c) *er is een niet-singuliere matrix* D *zo dat* $P = D'D$.

BEWIJS. Zie appendix B. □

In deze paragraaf zullen we ook complexe vectoren $z = x + iy$ beschouwen, met x en y reëel. Dan definiëren we $z^* := \bar{z}' = x' - iy'$ als de <u>geadjungeerde</u> vector van z. Het is duidelijk dat $|z|^2 := z^*z = x'x + y'y > 0$ tenzij $z = 0$. Verder geldt $z^*Pz \geq 0$ als $P \geq 0$ en $z^*Pz > 0$ als $P > 0$, $z \neq 0$. Immers, $z^*Pz = x'Px + y'Py$ als P symmetrisch is. We kunnen dit ook afleiden uit $z^*Pz = |Dz|^2$ als $P = D'D$.

Uit bovenstaande kunnen we nog het volgende concluderen:

(3.1.7) STELLING. *Als* $P \geq 0$ *en* $z^*Pz = 0$, *dan is* $Pz = 0$.

BEWIJS. Zij $P = D'D$. Dan volgt uit $z^*Pz = 0$ dat $Dz = 0$ en dus $Pz = D'Dz = 0$. □

Beschouw nu een oplossing x(t) van (3.1.1). Als P een symmetrische matrix is en

(3.1.8) $\quad V(x) := x'Px$

dan is

(3.1.9) $\quad \dfrac{d}{dt} V(x(t)) = -x'(t)Qx(t)$

waar

(3.1.10) $\quad Q := -(A'P + PA)$.

Als $P > 0$, kan V fungeren als een maat voor de grootte van de vector x. Als dan $dV/dt \leq 0$ voor alle t, dan kunnen we daaruit concluderen dat x(t) begrensd is. Als $Q \geq 0$ dan geldt dit voor elke oplossing. Als $Q > 0$, dan is zelfs V(x(t)) strict dalend voor elke oplossing x, zodat we kunnen verwachten dat de vergelijking (3.1.1) dan asymptotisch stabiel is (hoewel dit niet vanzelfsprekend is). De voorwaarde $Q > 0$ willen we echter verzwakken: Daartoe gaan we i.p.v. (3.1.1) uit van een systeem

(3.1.11) $\quad \dot{x} = Ax,\ y = Cx$

zonder ingang maar met uitgang. Vergelijking (3.1.9) vervangen we dan door

$$(3.1.12) \quad \frac{d}{dt} V(x(t)) = -|y|^2 .$$

Dan weten we weliswaar dat $dV/dt \leq 0$ geldt voor elke oplossing maar het is in het algemeen niet waar dat $dV/dt < 0$. Als we echter veronderstellen dat (C,A) waarneembaar is, dan kan men verwachten dat uit (3.1.12) volgt dat dV/dt meestal wel echt negatief is. Vergelijking (3.1.12) is equivalent met (3.1.9) als $Q = C'C$. Als (C,A) waarneembaar is dan hoeft daaruit niet te volgen dat $Q > 0$. Omgekeerd volgt uit $Q > 0$ wel dat (C,A) waarneembaar is (C is dan niet-singulier). We vragen ons dus af of er verband bestaat tussen de existentie van een positief definiete oplossing van de vergelijking (de zgn. <u>Liapunov-vergelijking</u>)

$$(3.1.13) \quad A'P + PA = -C'C$$

en de stabiliteit van A. Eerst laten we zien dat de oplossing P van (3.1.13) eenduidig bepaald is en expliciet kan worden gegeven als $\Lambda(A) < 0$. Als P een oplossing is van (3.1.13) dan voldoet $V(x)$ aan (3.1.12) voor elke oplossing x van (3.1.11). Dan geldt

$$V(x(0)) - V(x(t)) = \int_0^t |y(\tau)|^2 d\tau .$$

Als $\Lambda(A) < 0$ dan geldt $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ voor elke oplossing. Hieruit volgt

$$V(x(0)) = \int_0^\infty |y(\tau)|^2 d\tau$$

of, uitgeschreven, met $x(0) = x_0$

$$x_0'Px_0 = \int_0^\infty x_0' e^{tA'} C'Ce^{tA} x_0 dt .$$

Daar dit voor alle x_0 geldt volgt hieruit dat P voldoet aan

$$(3.1.14) \quad P = \int_0^\infty e^{tA'} C'Ce^{tA} dt .$$

De situatie wordt volledig omschreven door het volgende resultaat

(3.1.15) STELLING. *Zij gegeven het systeem* (3.1.11). *Beschouw de volgende drie beweringen:*

1) A *is een stabiliteitsmatrix*
2) (C,A) *is waarneembaar.*
3) *De vergelijking* (3.1.13) *heeft een positief definiete oplossing* P.

Als twee van deze beweringen waar zijn, dan is ook de derde waar.

BEWIJS. <u>1) $\wedge$ 2) $\Rightarrow$ 3)</u>. Als $\Lambda(A) < 0$, dan convergeert de integraal in (3.1.14) vanwege $\| e^{tA} \| \le Me^{-\alpha t}$ met positieve M en α. Verder is P, gedefinieerd door (3.1.14), symmetrisch. Er geldt

$$x_0'Px_0 = \int_0^\infty |Ce^{tA}x_0|^2 dt \ge 0$$

voor alle x_0 en $x_0'Px_0 = 0$ geldt alleen als $Ce^{tA}x_0 = 0$ voor elke $t \ge 0$. Daar (C,A) waarneembaar is volgt hieruit dat $x_0 = 0$ (zie (2.3.2)). Dus $P > 0$. We hoeven alleen nog aan te tonen dat P voldoet aan (3.1.13):

$$A'P + PA = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{tA'}C'Ce^{tA})dt = e^{tA'}C'Ce^{tA}\Big|_0^\infty = -C'C \ .$$

<u>2) $\wedge$ 3) $\Rightarrow$ 1)</u>. Zij $\lambda \in \sigma(A)$ een p een bijbehorende (eventueel complexe) eigenvector. We vermenigvuldigen (3.1.13) van rechts met p en van links met p^*. Vanwege $p^*A' = \bar{\lambda}p^*$ vinden we

(3.1.16) $(2\ \mathrm{Re}\ \lambda)p^*Pp = -|Cp|^2$.

Daar P positief definiet is en $Cp \neq 0$ (want (C,A) is waarneembaar, zie § 2.5) volgt hieruit dat $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$.

<u>3) $\wedge$ 1) $\Rightarrow$ 2)</u>. Zij $\lambda \in \sigma(A)$ en p bijbehorende eigenvector. Dan geldt weer (3.1.16). Daar $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$ en $P > 0$ volgt dan $Cp \neq 0$. Op grond van (2.5.7) is (C,A) waarneembaar. □

Bovenstaande stelling doet ons een methode aan de hand om te controleren of de vergelijking (3.1.1) asymptotisch stabiel is. We kiezen een positief definiete matrix Q (bijv. Q = I). We berekenen P uit de vergelijking

(3.1.17) $A'P + PA = -Q$

en we controleren of P positief definiet is. Zoals we hebben gezien heeft (3.1.17) altijd een ééndulidige oplossing als $\Lambda(A) < 0$. (Als A geen stabiliteitsmatrix is dan kan het wel eens gebeuren dat de vergelijking geen of meerdere oplossingen heeft.) Om te controleren of de oplossing P van (3.1.17) positief definiet is kan men het <u>criterium van Sylvester</u> gebruiken.

(3.1.18) STELLING. *Zij* P *een symmetrische matrix. Dan is* $P > 0$ *dan en slechts dan als de leidende hoofdminoren*

$$\det\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

voor $k = 1,\dots,n$ *positief zijn.*

We zullen het bewijs achterwege laten. Het berust op de zgn. <u>Choleski-splitsing</u> van een positief definiete matrix (zie [BE], [GA], [MT]).

Tenslotte vermelden we nog een stabiliteitscriterium dat we kunnen gebruiken als we het karakteristieke polynoom van A kennen.

(3.1.19) STELLING. *Zij* $p(s) = p_n s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0$ *eem polynoom met reële coëfficiënten en* $p_n > 0$. *Dan geldt voor alle wortels* λ *van* p *dat* $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ *dan en slechts dan als de leidende hoofdminoren van de volgende* $n \times n$*-matrix positief zijn.*

$$\begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ p_{n-3} & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n & 0 & 0 & & & \vdots \\ p_{n-5} & p_{n-4} & p_{n-3} & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & p_4 \\ 0 & \cdots & & & & & p_0 & p_1 & p_2 \\ 0 & \cdots & & & & & & 0 & p_0 \end{bmatrix} \qquad (3.1.20)$$

Met de leidende hoofdminoren bedoelen we de determinanten

$$p_{n-1},\ \begin{vmatrix} p_{n-1} & p_n \\ p_{n-3} & p_{n-2} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} p_{n-1} & p_n & 0 \\ p_{n-3} & p_{n-2} & p_{n-1} \\ p_{n-5} & p_{n-4} & p_{n-3} \end{vmatrix},\dots$$

De stabiliteitsvoorwaarde van stelling (3.1.19) heet het <u>Routh-Hurwitz-criterium</u>. Voor het bewijs verwijzen we naar [GAII].

3.2. *Interne en externe stabiliteit*

We beschouwen nu het systeem

(3.2.1) $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$.

(3.2.2) DEFINITIE.

i) *Het systeem* (3.2.1) *heet* <u>*intern stabiel*</u> *als de vergelijking* $\dot{x} = Ax$ *asymptotisch stabiel is.*

ii) *Het systeem* (3.2.1) *heet* <u>*extern stabiel*</u> *(*<u>*ingang-uitgang-stabiel*</u>*,* <u>*BIBO-stabiel*</u>*) als er voor elk getal* $M > 0$ *een getal* $N > 0$ *bestaat zo dat voor elke* $u \in \Omega$ *met* $|u(t)| \le M$ $(0 \le t < \infty)$ *geldt* $|y(t,0,u)| \le N$ $(0 \le t < \infty)$.

We willen voorwaarden voor externe stabiliteit vinden en in het bijzonder de relatie tussen interne en externe stabiliteit. Allereerst hebben we het volgende resultaat:

(3.2.3) STELLING. *Zij* $K(t) := Ce^{tA}B$ *de impuls-responsie van* (3.2.1). *Dan geldt*

i) (3.2.1) *is extern stabiel dan en slechts dan als*

$$\int_0^\infty \|K(t)\|dt < \infty \,. \tag{3.2.4}$$

ii) *Als het systeem* (3.2.1) *intern stabiel is dan is het ook extern stabiel.*

BEWIJS.

i) Zij het systeem extern stabiel. Dan bestaat er een getal $N > 0$, zo dat $|y(t)| \le N$ geldt voor alle $t \ge 0$ als maar $|u(t)| \le 1$. We kiezen een vast indexpaar (i,j) uit met $1 \le i \le r$, $1 \le j \le m$ en we geven met $K_{ij}(t)$ het (i,j)-de element van de matrix $K(t)$ aan. Verder gebruiken we de notatie

$$\operatorname{sgn}\alpha := \begin{cases} 1 & (\text{als } \alpha > 0) \\ 0 & (\text{als } \alpha = 0) \\ -1 & (\text{als } \alpha < 0)\,. \end{cases}$$

Bij vaste $T > 0$ definiëren we de besturing u_T door

$$(u_T(t))_k = 0 \qquad (k \neq j)$$

$$(u_T(t))_j = \begin{cases} \operatorname{sgn} K_{ij}(T-t) & (0 \le t \le T) \\ 0 & (t > T)\,. \end{cases}$$

Hierbij is $(v)_k$ de k-de component van de vector v. Dan geldt $|u_T(t)| \le 1$ voor alle $t \ge 0$ en dus $|y_T(t)| \le N$ voor alle $t \ge 0$, waar y_T wordt gegeven door

$$y_T(t) = \int_0^t K(t-\tau)u_T(\tau)d\tau \qquad (t \ge 0) .$$

In het bijzonder is

$$(y_T(T))_i = \int_0^T K_{ij}(T-\tau)(u_T(\tau))_j d\tau = \int_0^T |K_{ij}(T-\tau)|d\tau = \int_0^T |K_{ij}(\tau)|d\tau$$

en dus

$$\int_0^T |K_{ij}(\tau)|d\tau \le N \qquad (T \ge 0) .$$

Dit houdt in

$$\int_0^\infty |K_{ij}(\tau)|d\tau \le N < \infty .$$

Daar dit voor elk indexpaar (i,j) geldt volgt hieruit (3.2.4). Als we omgekeerd veronderstellen dat (3.2.4) geldt, d.w.z.

$$L := \int_0^\infty \|K(t)\|dt < \infty$$

dan geldt voor willekeurige $u \in \Omega$ met $|u(t)| \le M$:

$$|y(t)| = |\int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau| \le M\int_0^t \|K(\tau)\|d\tau \le M\int_0^\infty \|K(\tau)\|d\tau = M.L .$$

ii) Als het systeem intern stabiel is dan is $\|e^{tA}\| \le Me^{-\alpha t}$ met $M > 0$, $\alpha > 0$. Hieruit volgt

$$\|K(t)\| = \|Ce^{tA}B\| \le M\|C\| \cdot \|B\|e^{-\alpha t}$$

en dus (3.2.4). □

We vragen ons nu af of uit de externe stabiliteit ook de interne stabiliteit volgt. Het ligt voor de hand dat het hier van belang is of (3.2.1) waarneembaar en bestuurbaar is. De impuls-responsie en dus de externe stabiliteit hangt nl. alleen af van het bestuurbare en waarneembare gedeelte van (3.2.1).

(3.2.5) STELLING. *Zij* (C,A,B) *bestuurbaar en waarneembaar. Dan zijn de externe en interne stabiliteit van het systeem equivalent.*

BEWIJS. We hebben al gezien dat de interne stabiliteit de externe stabiliteit inhoudt. Zij nu het systeem extern stabiel, zodat (3.2.4) geldt. Als $u \in \Omega$ een besturing is waarvoor er een $T > 0$ bestaat zo dat $u(t) = 0$ $(t > T)$ dan geldt

$$y(t) := \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau \to 0 \qquad (t \to \infty) .$$

Immers, als $|u(t)| \le M$ $(0 \le t \le T)$ dan is voor $t \ge T$:

$$|y(t)| \le M\int_0^T \|K(t-\tau)\|d\tau = M\int_{t-T}^t \|K(\tau)\|d\tau \le M\int_{t-T}^\infty \|K(\tau)\|d\tau \to 0 \ (t\to\infty).$$

We kunnen bij deze beschouwingen ook complexe ingangsfuncties toelaten. Zij $\lambda \in \sigma(A)$ en zij p een eigenvector bij λ, dus $Ap = \lambda p$. Daar (A,B) bestuurbaar is, bestaat er een (eventueel complexe) besturing u_1 zo dat $x(T,0,u_1) = p$. We kiezen nu

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & (0 \le t \le T) \\ 0 & (t > T) . \end{cases}$$

Volgens bovenstaande beschouwingen moet dan gelden $y(t,0,u) \to 0$ $(t \to \infty)$. Voor $t \ge T$ geldt echter

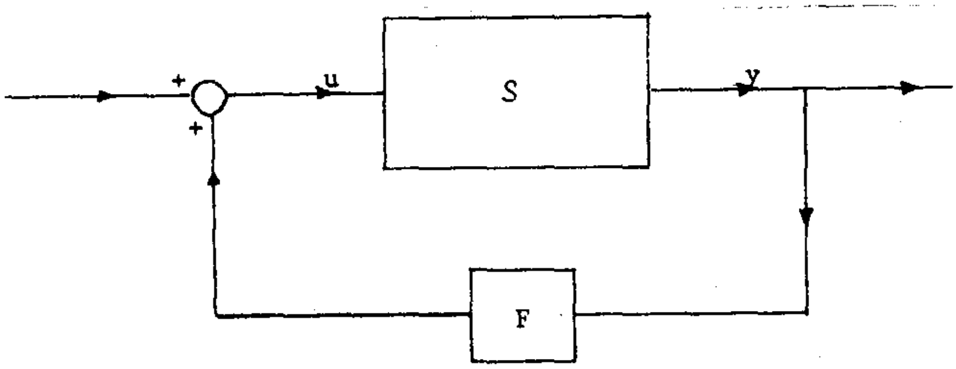
$$y(t,0,u) = Ce^{(t-T)A}p = e^{\lambda(t-T)}Cp .$$

Daar (C,A) waarneembaar is, geldt $Cp \neq 0$. Hieruit volgt $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. □

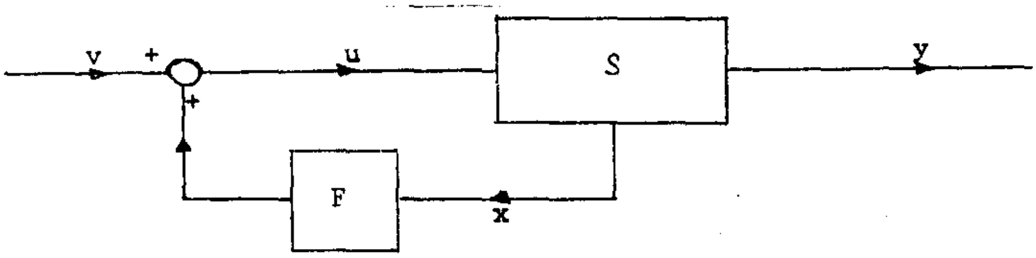
3.3. *Terugkoppeling*

Een besturing waarbij de ingang u bepaald wordt op grond van de uitgang y of de toestand x heet terugkoppeling.

Het eenvoudigste type terugkoppeling is de statische (uitgangs)-terugkoppeling of proportionele regelaar u = Fy waar F een r × m-matrix is.



Omdat de uitgang in tegenstelling tot de toestandsvariabele in het algemeen niet voldoende informatie geeft over de toekomstige responsie van het systeem zijn mogelijkheden van zo'n terugkoppeling beperkt. Beter hanteerbaar is de toestandsterugkoppeling waarin de besturing niet een functie is



van de uitgang maar van de toestandsvariabele x

$$u = Fx$$

of, als men de mogelijkheid tot sturen wil behouden

(3.3.1) $\quad u = Fx + v$.

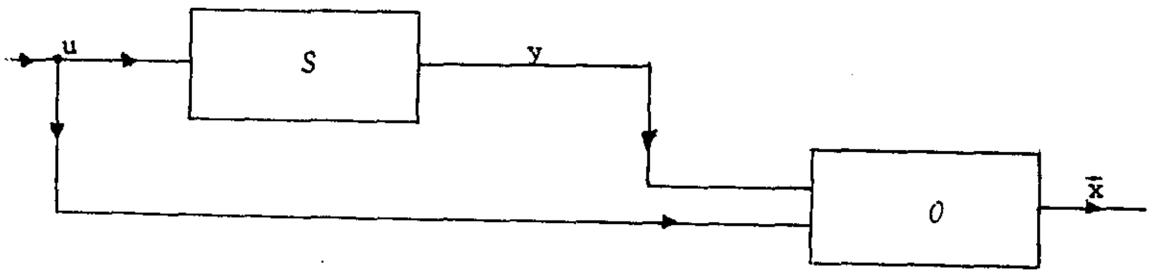
Als de toestandsvergelijkingen luiden

(3.3.2) $\quad \dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$,

vinden we, na substitutie van (3.3.1)

(3.3.3) $\quad \dot{x} = (A + BF)x + Bu,\ y = Cx$.

Gewoonlijk is echter de veronderstelling, dat de toestandsvariabele rechtstreeks meetbaar is, onrealistisch. Men kan echter wel toestandsschatters of waarnemers bouwen, dit zijn systemen die met behulp van de gegeven ingang en uitgang van het systeem een schatting geven voor de toestandsvariabele. Zo'n waarnemer heeft dus u en y als ingang en een grootheid $\bar{x}$ die een benadering is voor x, als uitgang:

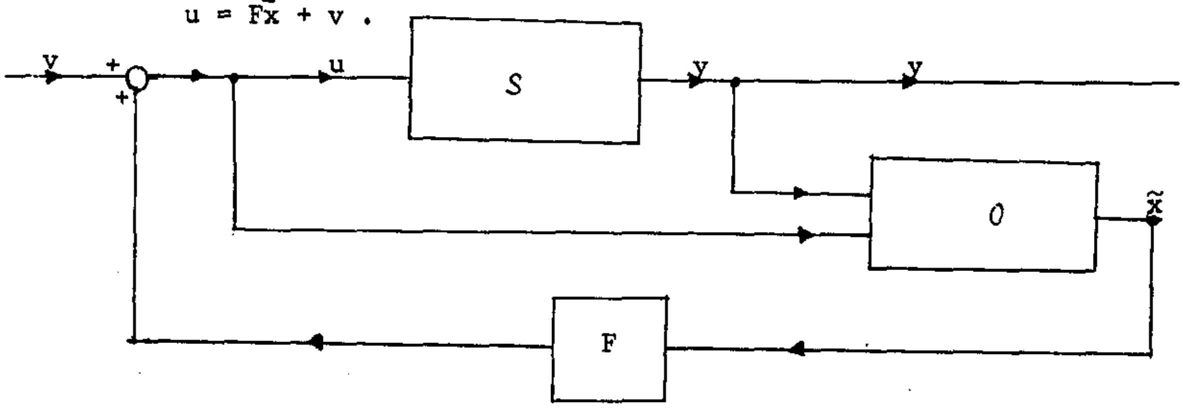


Zo'n systeem *O* kunnen we dus in de vorm

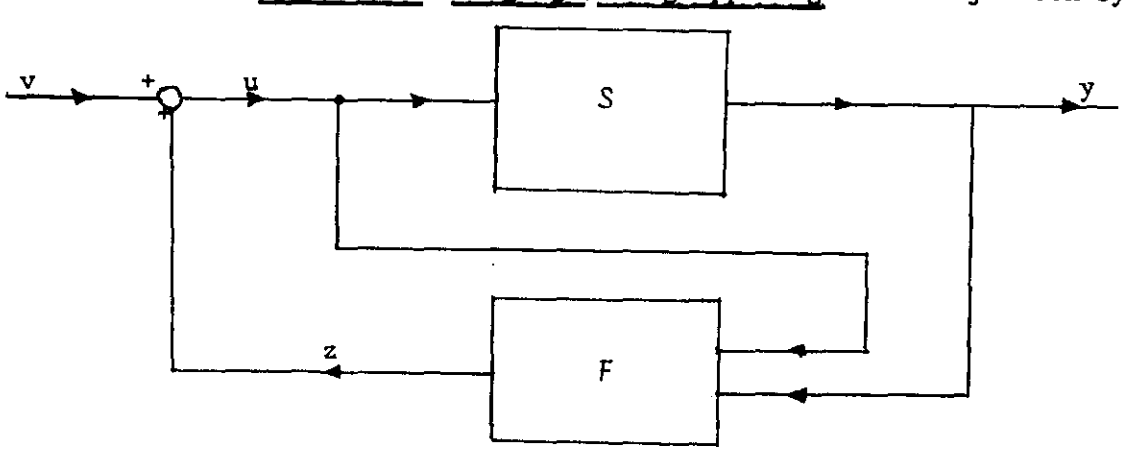
$$(3.3.4)\qquad \begin{aligned} \dot{z} &= Pz + Qu + Ry \\ \dot{\bar{x}} &= Sz \end{aligned}$$

schrijven. Een waarnemer dient zo te worden geconstrueerd, dat het verschil $x - \bar{x}$ op de duur klein is, voor elke beginwaarde x_0 van *S*. Als we nu zo'n schatting $\bar{x}$ van x hebben kunnen we deze grootheid terugvoeren naar de ingang

$$u = F\bar{x} + v .$$



Men kan de combinatie waarnemer *O* en statische terugkoppeling F samen beschouwen als een <u>dynamische</u> <u>(uitgangs)terugkoppeling</u> *F* waarbij *F* een sys-



teem is met u en y als ingang en z als uitgang (zie tekening). Zo'n dynamische terugkoppeling kan men natuurlijk ook definiëren in systemen waarvan geen toestandsvergelijkingen bekend zijn. Het vinden van een dynamische regelwet die het systeem het gewenste gedrag moet geven is echter moeilijk. De methode die wij hierboven (voor systemen met toestandsvergelijkingen) hebben geschetst, bestaat uit het opsplitsen van F in een waarnemer en een statische toestandsterugkoppeling en elk van deze problemen apart is veel eenvoudiger dan het samengestelde probleem. Dit is een van de belangrijke motivaties voor het gebruik van toestandsruimten-methoden.

3.4. *Stabilisatie*

Als het systeem (A: $n \times n$, B: $n \times m$):

(3.4.1) $\dot{x} = Ax + Bu$

niet extern stabiel is, dan kan men proberen het te stabiliseren door terugkoppeling. We denken hier in de eerste plaats aan toestandsterugkoppeling:

$$u = Fx + v .$$

(3.4.2) DEFINITIE. *Het systeem* (3.4.1) *heet* *__stabiliseerbaar__* *als er een* $m \times n$-*matrix* F *bestaat zo dat* $\Lambda(A + BF) < 0$.

Bij discrete systemen wil men juist $r(A + BF) < 1$ hebben voor stabiliteit. Voor continue systemen wil men soms $\Lambda(A + BF) \leq \alpha$ voor een gegeven $\alpha < 0$ bereiken of $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{R}$. Kortom, in het algemeen kan men zich afvragen: *Gegeven het systeem* (3.4.1) *en een verzameling* T *in het complexe vlak* $\mathbb{C}$, *bestaat er een matrix* F *zo dat* $\sigma(A + BF) \subseteq T$?

Een antwoord in de negatieve zin wordt gegeven door het volgende resultaat:

(3.4.3) STELLING. *Als* $\lambda \in \sigma(A)$ *een niet-bestuurbare eigenwaarde van* A *is, dan geldt* $\lambda \in \sigma(A + BF)$ *voor alle* F.

BEWIJS. Als λ niet bestuurbaar is, bestaat er een $\eta \neq 0$ waarvoor geldt $\eta A = \lambda\eta$, $\eta B = 0$. Maar dan geldt ook $\eta(A + BF) = \lambda\eta$ voor alle F dus $\lambda \in \sigma(A + BF)$ voor alle F. $\square$

Hieruit volgt dat een noodzakelijke voorwaarde voor de existentie van een matrix F zo dat $\sigma(A + BF) \subseteq T$ is dat elke onbestuurbare eigenwaarde tot T behoort. We zullen zien dat deze voorwaarde ook voldoende is. Basis van dit resultaat is de bekende <u>poolplaatsingsstelling</u>:

(3.4.4) STELLING. *Het systeem* (3.4.1) *is bestuurbaar dan en slechts dan als er voor elk monisch polynoom* p *van de graad* n *(d.w.z.* p *is van de gedaante* $p(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n$, *dus met coëfficiënt van* z^n *gelijk aan 1) een matrix* F *bestaat zo dat* $\det(zI - (A + BF)) = p(z)$.

Het bewijs van "dan" volgt onmiddellijk uit stelling (3.4.3). We houden ons verder bezig met het "slechts dan" gedeelte.

BEWIJS VOOR HET GEVAL $m = 1$. Als $m = 1$, schrijven we b i.p.v. B. Als (A,b) bestuurbaar is dan kunnen we een isomorf paar $(\bar{A},\bar{b}) = (S^{-1}AS, S^{-1}b)$ vinden van de gedaante (zie stelling (2.6.7)).

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Als $p(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n$ en

$$\bar{f} := [a_n - p_n, a_{n-1} - p_{n-1}, \dots, a_1 - p_1]$$

dan is

$$\bar{A} + \bar{b}\bar{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -p_n & \cdots & \cdots & \cdots & -p_1 \end{bmatrix}$$

zodat $\det(zI - (\bar{A} + \bar{b}\bar{f})) = p(z)$. Als we nu $f = \bar{f}S^{-1}$ definiëren, dan is $A + bf = S(\bar{A} + \bar{b}\bar{f})S^{-1}$ en dus $\det(zI - (A + bf)) = \det(zI - (\bar{A} + \bar{b}\bar{f})) = p(z)$. □

Om het algemene geval $(m > 1)$ te bewijzen hebben we een hulpresultaat nodig.

(3.4.5) LEMMA. *Als* (A,B) *bestuurbaar is, dan bestaan er vectoren* $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, *zodanig, dat de vectoren* $x_1, \ldots, x_n$, *gedefinieerd door*

(3.4.6) $\quad x_0 = 0,\ x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$,

onafhankelijk zijn.

BEWIJS. We construeren $u_0, \ldots, u_{n-1}$ stapsgewijs. Daar (A,B) bestuurbaar is, is $B \neq 0$. Derhalve bestaat er een u_0 zo dat $x_1 = Bu_0 \neq 0$. Daarom is x_1 onafhankelijk (d.w.z. een onafhankelijk stelsel vectoren bestaande uit één vector). Veronderstel dat $x_1, \ldots, x_k$ zijn geconstrueerd volgens (3.4.6) en dat deze vectoren onafhankelijk zijn. Zij $\mathcal{L}$ de ruimte opgespannen door $x_1, \ldots, x_k$. We zijn klaar met de k-de stap als we een vector u_k kunnen vinden, zo dat $x_{k+1} := Ax_k + Bu_k \notin \mathcal{L}$. Als we zo'n u_k nièt kunnen vinden, dan geldt

(3.4.7) $\quad Ax_k + Bu \in \mathcal{L}$

voor alle $u \in \mathbb{R}^m$. In het bijzonder geldt

(3.4.8) $\quad Ax_k \in \mathcal{L}$.

Uit (3.4.7) en (3.4.8) volgt (daar $\mathcal{L}$ een lineaire ruimte is):

$$Bu \in \mathcal{L}$$

voor alle $u \in \mathbb{R}^m$. D.w.z., de kolommen van B behoren tot $\mathcal{L}$. Verder geldt voor $i < k$ dat

$$Ax_i = x_{i+1} - Bu_i \in \mathcal{L} .$$

Dus, $Ax_i \in \mathcal{L}$ $(i = 1, \ldots, k)$ (vanwege (3.4.8)). Hieruit volgt dat $Ax \in \mathcal{L}$ voor elke $x \in \mathcal{L}$, dus $\mathcal{L}$ is A-invariant. Daar (A,B) bestuurbaar is, moet gelden $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$ (zie (2.2.8)) hetgeen alleen mogelijk is als $k = n$. □

BEWIJS VAN (3.4.4) VOOR $m > 1$. We construeren $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ en $x_1, \ldots, x_n$ volgens lemma (3.4.5) en we kiezen $u_n \in \mathbb{R}^m$ willekeurig. Daar $x_1, \ldots, x_n$ onafhankelijk zijn bestaat er een matrix F_0 zo dat $F_0 x_i = u_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, nl.

$$F_0 = [u_1, \ldots, u_n][x_1, \ldots, x_n]^{-1} .$$

Als we verder $b := Bu_0$ definiëren, dan is $x_{k+1} = Ax_k + BF_0 x_k = (A + BF_0)x_k$ en dus

$$x_k = (A + BF_0)^{k-1} b \quad (k = 1, \ldots, n) .$$

Uit de onafhankelijkheid van $x_1,\dots,x_n$ volgt dat $(A+BF_0,b)$ bestuurbaar is. Daarom is er een $1 \times n$-matrix f zo dat

$$\det(zI - (A + BF_0 + bf)) = p(z) .$$

Maar

$$BF_0 + bf = BF_0 + Bu_0f = B(F_0 + u_0f) .$$

Als we dus $F = F_0 + u_0f$ kiezen, dan geldt

$$\det(zI - (A + BF)) = p(z) . \qquad \square$$

Uit het bewijs van stelling (3.4.4) volgt dat de matrix F eenduidig is bepaald door p, als $m = 1$. Als $m > 1$, dan kan men bewijzen dat F niet eenduidig is.

(3.4.9) STELLING. *Gegeven een paar* (A,B) *en een niet-lege verzameling* $T \subseteq \mathbb{C}$. *Er bestaat een matrix* F *zodanig dat* $\sigma(A + BF) \subseteq T$ *dan en slechts dan als elke eigenwaarde* $\lambda \notin T$ *bestuurbaar is. Als er een reëel polynoom bestaat met nulpunten in* T *kan* F *reëel gekozen worden.*

BEWIJS. "slechts dan" hebben we al gezien. Om het omgekeerde te bewijzen nemen we aan dat (A,B) niet bestuurbaar is (anders zijn we direct klaar op grond van (3.4.4)). Dan kunnen we een paar $\bar{A} = S^{-1}AS$, $\bar{B} = S^{-1}B$ vinden van de gedaante (zie stelling (2.4.10))

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Daar elke $\lambda \in \sigma(A_{22})$ onbestuurbaar is moet gelden $\sigma(A_{22}) \subseteq T$. Verder is (A_{11},B_1) bestuurbaar, zodat er een matrix F_1 bestaat met

$$\sigma(A_{11} + B_1F_1) \subseteq T .$$

Definiëren we $\bar{F} = [F_1,0]$, dan is

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{F} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1F_1 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

en dus $\sigma(\bar{A} + \bar{B}\bar{F}) = \sigma(A_{11} + B_1F_1) \cup \sigma(A_{22}) \subseteq T$. Tenslotte kunnen we $F = \bar{F}S^{-1}$ definiëren. Dan is $A + BF = S(\bar{A} + \bar{B}\bar{F})S^{-1}$ en dus $\sigma(A + BF) = \sigma(\bar{A} + \bar{B}\bar{F}) \subseteq T$. De laatste bewering van de stelling is duidelijk op grond van de constructie van F in (3.4.4). $\square$

(3.4.10) GEVOLG. (A,B) *is stabiliseerbaar dan en slechts dan als elke eigenwaarde* λ *met* $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ *bestuurbaar is.*

(3.4.11) VOORBEELD. Zij

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dan is

$$[A - \lambda I, B] = \begin{bmatrix} -3-\lambda & -4 & -6 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2-\lambda & -1 \end{bmatrix}.$$

We kunnen de eigenwaarden λ van A berekenen en dan de rang van $[A - \lambda I, B]$ bepalen. We kunnen ook "vegen", daarbij er zorg voor dragen dat voor geen enkele λ we de rang veranderen. Zo vinden we

$$[A - \lambda I, B] \to \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & -2-2\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

We zien dat $\mathrm{rang}[A - \lambda I, B] = 3$ tenzij $\lambda = -1$. D.w.z., $\lambda = -1$ is de enige niet bestuurbare eigenwaarde. Daarom is het systeem stabiliseerbaar. Merk op dat (A,B) niet bestuurbaar is! □

3.5. *Waarnemers en dynamische terugkoppeling*

In de vorige paragraaf hebben we gezien hoe het systeem

$$(3.5.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad (S)$$

door een statische toestandsterugkoppeling $u = Fx + v$ kan worden beïnvloed, en in het bijzonder wanneer het systeem op deze manier kan worden gestabiliseerd. Daar de toestand van een systeem niet direct te meten is hebben we om zo'n terugkoppeling te kunnen toepassen, een waarnemer nodig (zie § 3.3). In het algemeen heeft een waarnemer de volgende gedaante

$$(3.5.2) \quad \begin{cases} \dot{z} = Pz + Qu + Ry \\ \bar{x} = Sz\,. \end{cases} \qquad (O)$$

We zullen eisen dat $x(t) - \bar{x}(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ voor elk paar van beginwaarden x_0, z_0 en elke $u \in \Omega$. Hier zullen we een waarnemer proberen te construeren met $S = I$, zodat $\bar{x}$ als toestandsvariabele in O kan worden gebruikt. Het ligt voor de hand te eisen, dat uit $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$ volgt dat $x(t) = \bar{x}(t)$ voor alle $t \geq t_0$ en alle $u \in \Omega$: Als de waarnemer eenmaal de goede toestand aangeeft dan moet hij dit blijven doen. Er geldt

$$\frac{d}{dt}(x - \bar{x}) = Ax + Bu - P\bar{x} - Qu - RCx$$

$$= (A - RC)x - P\bar{x} + (B - Q)u \ .$$

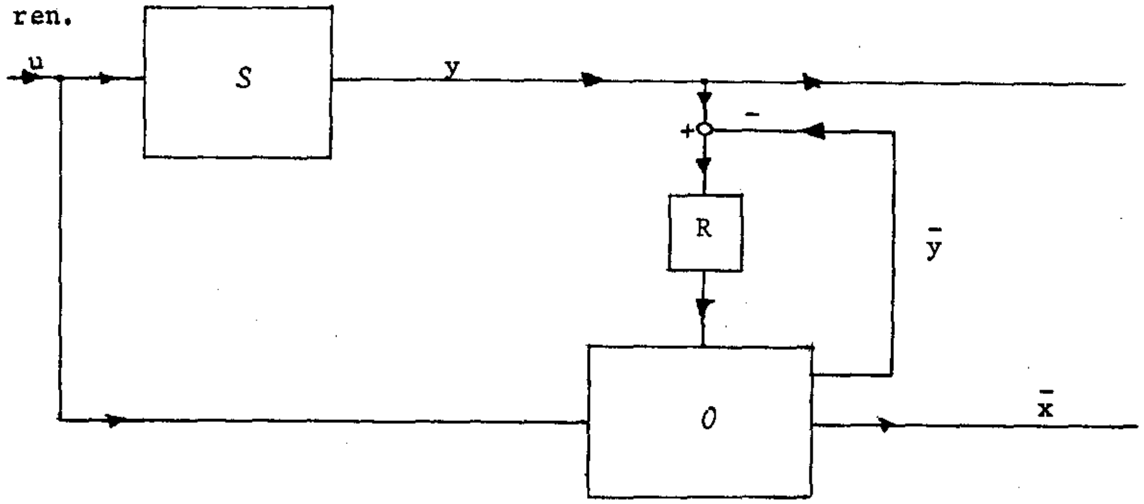
Wil aan bovenstaande eisen voldaan zijn dan moet deze uitdrukking voor alle u gelijk aan nul zijn zodra $x(t) = \bar{x}(t)$. Hieruit volgt dat

$$A - RC = P; \ B = Q$$

moet gelden, zodat de gedaante van (3.5.2) wordt

$$\text{(3.5.3)} \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + R(y - \bar{y}) \\ \bar{y} = C\bar{x} \ . \end{cases} \qquad (O)$$

We kunnen de waarnemer daarom als een duplicaat van het oorspronkelijke systeem beschouwen met een extra ingang om de afwijking van y en $\bar{y}$ te corrigeren.



We moeten nog onderzoeken of inderdaad $e(t) := x(t) - \bar{x}(t) \to 0$ $(t \to \infty)$. Daar

$$\dot{e}(t) = (A - RC)e(t)$$

zoals men gemakkelijk verifieert, geldt $e(t) \to 0$ voor elke beginwaarde dan en slechts dan als $A - RC$ een stabiliteitsmatrix is. We kunnen dus een waarnemer construeren als we een matrix R kunnen vinden zo dat $\Lambda(A - RC) < 0$.

(3.5.4) DEFINITIE. *Het systeem* (3.5.1) *(en ook het paar* (C,A)) *heet* *__detecteerbaar__ als er een matrix* R *bestaat zo dat* $\Lambda(A - RC) < 0$.

Een nodige en voldoende voorwaarde voor de detecteerbaarheid van S kunnen we vinden door (3.4.10) te dualiseren. Het is nl. op grond van de definitie onmiddellijk duidelijk dat (C,A) detecteerbaar is dan en slechts dan als (A',C') stabiliseerbaar is, dus dat detecteerbaarheid de duale eigenschap van stabiliseerbaarheid is. Derhalve vinden we

(3.5.5) STELLING. *Het systeem* (3.5.1) *is detecteerbaar dan en slechts dan als elke eigenwaarde* λ *met* $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ *waarneembaar is.*

In het bijzonder is elk waarneembaar paar (C,A) detecteerbaar. Op grond van het voorafgaande hebben we verder:

(3.5.6) STELLING. *Er bestaat een waarnemer van de gedaante* (3.5.2) *voor het systeem* (3.5.1) *dan en slechts dan als* (3.5.1) *detecteerbaar is.*

BEWIJS. We hebben al gezien dat (3.5.3) met R zo gekozen dat $\Lambda(A - RC) < 0$, een waarnemer is. Als er omgekeerd een waarnemer (3.5.2) bestaat en als $Ap = \lambda p$, $Cp = 0$ met $p \neq 0$, dan geldt bij beginwaarde $x_0 = p$ en besturing $u(t) = 0$ dat $x(t) = e^{\lambda t}p$ en dus $y(t) = 0$ is (we mogen hier met complexe variabele werken). Als dan $z_0 = 0$, dan is $z(t) = 0$ en dus $\bar{x}(t) = 0$ $(t \geq 0)$. De voorwaarde $x(t) - \bar{x}(t) \to 0$ geeft dan $x(t) = e^{\lambda t}p \to 0$ en dus $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. □

Als we nu het systeem (3.5.1) willen stabiliseren, dan kunnen we dit doen door een dynamische terugkoppeling F (zie § 3.3) gegeven door de formule

$$(3.5.7)\qquad \begin{cases} \dot{z} = Mz + Nu + Ly \\ u = Pz + v\,. \end{cases} \qquad (F)$$

De vraag is nu of er zo'n systeem F bestaat zo dat het samengestelde systeem S en F intern stabiel is.

Zoals we in § 3.3 hebben aangegeven kan men zo'n <u>dynamische regulateur</u> proberen te construeren als combinatie van een waarnemer en een stabiliserende toestandsterugkoppeling. We moeten dan laten zien dat we op deze manier een intern stabiel systeem krijgen. Neem dus aan dat F en R zo gekozen zijn dat A + BF en A - RC stabiliteitsmatrices zijn. Beschouw dan het systeem gedefinieerd door (3.5.1), (3.5.3) en de vergelijking $u = F\bar{x} + v$, dus

$$(3.5.8)\qquad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BF\bar{x} + Bv \\ \dot{\bar{x}} &= RCx + (A + BF - RC)\bar{x} + Bv\,. \end{aligned}$$

We voeren de variabele $e := x - \bar{x}$ in. Dan geldt

$$\dot{x} = (A + BF)x - BFe + Bv$$

$$\dot{e} = (A - RC)e\,.$$

De coëfficiëntenmatrix van dit systeem is

$$\tilde{M} := \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A - RC \end{bmatrix}.$$

Daar $\sigma(\tilde{M}) = \sigma(A + BF) \cup \sigma(A - RC)$ en daar $A + BF$ en $A - RC$ stabiliteitsmatrices zijn is ook $\tilde{M}$ een stabiliteitsmatrix.

We hebben nu het volgende resultaat

(3.5.9) STELLING. *Het systeem* (3.5.1) *heeft een stabiliserende dynamische terugkoppeling* F *dan en slechts dan als elke eigenwaarde* λ *met* $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ *bestuurbaar en waarneembaar is, dus als het systeem stabiliseerbaar en detecteerbaar is.*

BEWIJS. We hebben het gezien dat de genoemde voorwaarden voldoende zijn. Veronderstel nu dat S een stabiliserende dynamische terugkoppeling F gegeven door (3.5.7) heeft. Dan is het samengestelde systeem

$$\dot{x} = Ax + BPz + Bv$$

$$\dot{z} = LCx + (M + NP)z + Nv\,.$$

Stel dat voor zekere $\eta \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A)$ geldt $\eta A = \lambda\eta$, $\eta B = 0$. Dan volgt, met $\bar{\eta} := [\eta, 0]$ en

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BP \\ LC & M + NP \end{bmatrix}$$

dat $\bar{\eta}\bar{A} = [\eta A, \eta BP] = \lambda\bar{\eta}$ en dus $\lambda \in \sigma(\bar{A})$. Daar $\Lambda(\bar{A}) < 0$ volgt hieruit $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Op analoge manier zien we dat voor elke onwaarneembare eigenwaarde λ geldt $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. □

Stelling (3.5.9) geeft ons de voorwaarden waaronder het in § 3.3 genoemde regulateurprobleem een oplossing heeft. Bovendien zien we, dat het vinden van zo'n regulateur neerkomt op het zoeken van matrices F en R zo dat de matrices $A + BF$ en $A - RC$ stabiliteitsmatrices zijn. Door deze voorwaarden zijn F en R niet eenduidig bepaald. We zullen in het volgende hoofdstuk een methode aangeven om F eenduidig te bepalen op grond van een voorafgegeven optimaliteitscriterium. In hoofdstuk V zullen we laten zien hoe R optimaal kan worden bepaald in het geval y ruis bevat.

HOOFDSTUK IV. OPTIMALE BESTURINGEN EN TERUGKOPPELINGEN

4.1. *Optimale regulateurs*

We beschouwen weer het systeem

$$(4.1.1)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\ . \end{aligned} \qquad (\tilde{S})$$

We willen een besturing $u \in \Omega$ vinden die de uitgang naar nul toe brengt en die tevens niet al te intensief is. We willen dus zowel u als y klein houden voor alle t. Als we aannemen dat $x(t_0) = x_0 \neq 0$, dan zal intuitief duidelijk zijn dat men door u maar groot genoeg te kiezen y heel vlug erg klein kan krijgen. Anderzijds kan men u heel klein maken (bijv. 0) als men niet geinteresseerd is in het verloop van y. Als men beide variabelen klein zal willen houden dan zal men ze tegen elkaar moeten afwegen. Verder is er ook nog de moeilijkheid dat men u en y niet op een bepaald tijdstip klein wil maken maar over het hele tijdsinterval $[t_0,\infty)$. Men kan bijv. deze grootheden op een bepaald interval erg klein krijgen, maar dan zullen ze op een ander interval weer groot zijn. Het is dus niet vanzelfsprekend hoe men het optimaliteitscriterium moet invoeren. Ook hier moet men het gedrag op verschillende tijd tegen elkaar afwegen. Dit doet men gewoonlijk d.m.v. een integraalcriterium:

$$(4.1.2)\qquad J = \int_{t_0}^{\infty} G(u,y,t)dt$$

waar G een niet-negatieve functie is die voor $(u,y,t) = (0,0,t)$ de minimale waarde 0 aanneemt. We zoeken naar een besturing u die J bij een gegeven beginvoorwaarde $x(t_0) = x_0$ minimaliseert. De gradiënt van G is 0 in $(0,0,t)$. Als we aannemen dat G zich laat ontwikkelen naar machten van u en y, dan zal deze ontwikkeling beginnen bij de kwadratische termen:

$$(4.1.3)\qquad G(u,y,t) = u'P(t)u + 2u'Q(t)y + y'R(t)y + \ldots$$

waar P(t) en R(t) symmetrische matrices zijn. Verder zullen we aannemen dat P,Q,R continue functies op $[t_0,\infty)$ zijn. Als we $y = 0$ substitueren, dan vinden we

$$G(u,0,t) = u'P(t)u + \ldots\ .$$

Daar voor $u = 0$ deze functie een minimum aanneemt moet gelden: $P \geq 0$. We zullen verder aannemen dat $P > 0$ geldt zodat de functie $G(u,0,t) \neq 0$ voor

$u \neq 0$. Dan kunnen we de kruisterm $2u'Qy$ in (4.1.3) wegwerken. We voeren nl. een nieuwe stuurvariabele v in d.m.v.

$$u = Fy + v \ .$$

Dan wordt (4.1.1)

$$\dot{x} = (A + BFC)x + Bv, \ y = Cx$$

en (4.1.3):

$$G(Fy + v,y) = v'Pv + 2v'(PF + Q)y + y'(F'PF + QF + F'Q + R)y + \ldots$$

Als we dus $F = -P^{-1}Q$ kiezen, dan vervalt de kruisterm. We zullen verder aannemen dat de kruistermen in (4.1.3) niet voorkomen, d.w.z. dat $Q = 0$.
In analogie met het feit dat we $\tilde{S}$ hebben verkregen door te lineariseren (zie § 1.5) zullen we ons ook hier tevreden stellen met een benadering, door alleen de kwadratische termen mee te nemen in het optimaliteitscriterium:

$$(4.1.4) \qquad J = \int_{t_0}^{\infty} (u'P(t)u + y'R(t)y)dt \ .$$

Omdat de integrand een minimum bereikt voor $u = 0$, $y = 0$ moet $R \geq 0$ zijn. (We hebben al aangenomen dat $P > 0$). We kunnen het criterium (4.1.4) verder vereenvoudigen door een eenvoudige substitutie. We weten nl. dat er een matrix E en een niet-singuliere matrix D bestaan zo dat

$$P = D'D, \ R = E'E \ .$$

Als we dan substitueren

$$v := Du, \ z := Ey$$

dan wordt (4.1.1):

$$\dot{x} = Ax + BD^{-1}v, \ z = ECx$$

en (4.1.4):

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (|v|^2 + |z|^2)dt \ .$$

We mogen dus zonder verlies van algemeenheid aannemen dat P en R in (4.1.4) eenheidsmatrices zijn. Zo komen we tot het volgende probleem:

(4.1.5) PROBLEEM. *Gegeven het systeem* $\tilde{S}$ *en een begintoestand* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *bepaal* $u \in \Omega$ *zo dat*

$$(4.1.6) \qquad \int_{t_0}^{\infty} (|u|^2 + |y|^2)dt$$

minimaal is, waar y *de uitgang is van* $\tilde{S}$.

We zullen dit probleem alleen oplossen voor het tijdsinvariante geval. In dat geval is het duidelijk dat we zonder verlies van algemeenheid het begintijdstip $t_0 = 0$ kunnen nemen. Door het oneindige integratieinterval is een directe aanpak moeilijk. Daarom zullen we eerst het probleem behandelen waar (4.1.6) vervangen wordt door

$$\int_{t_0}^{T} (|u|^2 + |y|^2)dt \ .$$

Om te bereiken dat de eindtoestand dan niet te groot wordt (in verband met de voortzetting van de besturing) kunnen we aan dit criterium nog een term $x'(T)Mx(T)$ toevoegen, waar M een positief semidefiniete matrix is. Zo krijgen we het volgende probleem.

(4.1.7) PROBLEEM. *Gegeven het systeem* $\tilde{S}$, *een begintoestand* $x(t_0)=x_0$ *een positief semidefiniete matrix* M *en een getal* $T \geq t_0$, *bepaal een besturing* $u \in \Omega$ *zo dat*

$$(4.1.8) \qquad J(x_0,u,t_0,T) := \int_{t_0}^{T} (|u|^2 + |y|^2)dt + x'(T)Mx(T)$$

minimaal is.

In § 4.2 zullen we probleem (4.1.7) behandelen en in § 4.3 zullen we zien hoe met behulp hiervan probleem (4.1.5) kan worden opgelost. Hier zullen we enkele heuristische overwegingen laten volgen die ons een idee geven over de gedaante van de optimale besturing en de minimale waarde van het criterium. We veronderstellen dat in (4.1.7) het systeem S en de matrix M vast zijn gekozen, en dat de beginwaarde x_0 en T verschillende waarden kunnen aannemen. Laten we dan aannemen dat het minimum van (4.1.8) voor elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en $T \geq t_0$ bestaat. Deze minimale waarde geven we aan met $V(x_0,t_0,T)$ en de bijbehorende besturing (waarvan we ook aannemen dat ze eenduidig is) met

$u(t,x_0,t_0,T)$. Als $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeven is en $\lambda \neq 0$, en als we in plaats van $u(t) := u(t,x_0,t_0,T)$ de besturing $\lambda u(t)$ gebruiken, dan volgt uit de lineariteit van $\tilde{S}$ dat de bijbehorende *toestandsfunctie* met beginwaarde λx_0 gegeven wordt door

$$x(t,\lambda x_0,\lambda u) = \lambda x(t,x_0,u) \ .$$

Daarom geldt:

$$J(\lambda x_0,\lambda u,t_0,T) = \lambda^2 J(x_0,u,t_0,T) = \lambda^2 V(x_0,t_0,T)$$

en dus

$$V(\lambda x_0,t_0,T) \leq J(\lambda x_0,u,t_0,T) \leq \lambda^2 V(x_0,t_0,T)$$

voor elke $\lambda \neq 0$ en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Als we in de ongelijkheid

$$V(\lambda x_0,t_0,T) \leq \lambda^2 V(x_0,t_0,T) \ .$$

Substitueren: $\lambda = 1/\mu$, $x_0 = \lambda y_0$, vinden we

$$V(\lambda y_0,t_0,T) \geq \lambda^2 V(y_0,t_0,T)$$

voor alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$. Derhalve geldt

$$V(\lambda x_0,t_0,T) = \lambda^2 V(x_0,t_0,T)$$

voor elke $\lambda \neq 0$. Het is gemakkelijk in te zien dat deze gelijkheid ook voor $\lambda = 0$ geldt. Bovendien zien we dat

$$u(t,\lambda x_0,t_0,T) = \lambda u(t,x_0,t_0,T) \ .$$

Deze formules suggereren dat V een kwadratische functie is van x_0 en dat u lineair van x_0 afhangt. We zullen dit hier niet bewijzen omdat deze overwegingen hier alleen heuristische betekenis hebben. Als we aannemen dat $V(x_0,t_0,T)$ inderdaad een kwadratische functie is, kunnen we schrijven

$$V(x_0,t_0,T) = x_0'P(t_0,T)x_0$$

waar de matrix P uiteraard van de lengte van het interval afhangt. Het is duidelijk dat $J \geq 0$ voor elke x_0,t_0,T en u zodat ook $V(x_0,t_0,T) \geq 0$ is voor elke x_0,t_0 en T. Daarom is $P(t_0,T) \geq 0$ voor alle t_0,T met $T \geq t_0$.

4.2. *Eindige horizon*

We beginnen nu met een wat formelere behandeling van probleem (4.1.7) Laat K(t) een symmetrische matrixwaardige functie gedefinieerd en continu differentieerbaar op $[t_0,T]$ zijn. Dan is voor $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$:

$$J(x_0,u,t_0,T) = \int_{t_0}^{T} (|u|^2 + |y|^2)dt + x'(T)Mx(T) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} (|u|^2 + |y|^2)dt + x'(0)K(0)x(0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}(x'(t)K(t)x(t))dt + x'(T)(M-K(T))x(T) .$$

We voegen de twee integralen bij elkaar. Er geldt

$$|u|^2 + |y|^2 + \frac{d}{dt}(x'Kx) = u'u + x'C'Cx +$$

$$+ (x'A' + u'B')Kx + x'\dot{K}x + x'K(Ax + Bu) =$$

$$= u'u + 2u'B'Kx + x'KBB'Kx + x'Rx = |u + B'Kx|^2 + x'Rx ,$$

waar

$$R := \dot{K} + C'C + A'K + KA - KBB'K .$$

Daarom geldt

$$(4.2.1) \qquad J(x_0,u,t_0,T) = x_0'K(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{T} \{x'Rx + |u + B'Kx|^2\}dt +$$

$$+ x'(T)\{M - K(T)\}x(T) .$$

In het algemeen is het moeilijk het effect van een verandering van $u \in \Omega$ op de waarde van $J(x_0,u,t_0,T)$ gegeven door (4.1.8) of (4.2.1) te overzien. Intuitief zou men bijv. in (4.1.8) kunnen denken dat $u = 0$ de beste keuze zou zijn omdat daar de integrand puntsgewijs wordt geminimaliseerd. Daar echter de keuze van u op het tijdstip t_1 van invloed is op x(T) en ook op y (op het interval $[t_1,T]$) is deze besturing meestal niet optimaal. Dezelfde opmerkingen gelden voor (4.2.1) waar men in eerste instantie geneigd zou zijn $u = -B'Kx$ te kiezen. Als men echter K(t) voor $t_0 \le t \le T$ zo kan kiezen dat $R(t) = 0$ $(t_0 \le t \le T)$ en $K(T) = M$, dan wordt (4.2.1)

$$(4.2.2)\qquad J(x_0,u,t_0,T) = x_0'K(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{T} |u + B'Kx|^2 dt \;.$$

Dan wordt het optimaliseringsprobleem plotseling triviaal. Het is op grond van (4.2.2) nl. duidelijk dat altijd geldt

$$J(x_0,u,t_0,T) \geq x_0'K(t_0)x_0$$

en dat het gelijkteken geldt als $u = -B'Kx$.

(4.2.3) STELLING. *Als* K *een symmetrische matrixwaardige functie is op* $[t_0,T]$ *die voldoet aan de differentiaalvergelijking*

$$(4.2.4)\qquad \dot{K} = KBB'K - A'K - KA - C'C$$

met eindwaarde

$$(4.2.5)\qquad K(T) = M$$

dan is de besturing u *gegeven door de (tijdsafhankelijke) terugkoppeling*

$$(4.2.6)\qquad u(t) = -B'(t)K(t)x(t)$$

de oplossing van probleem (4.1.7). *Verder is*

$$(4.2.7)\qquad V(x_0,T) = x_0^TK(t_0)x_0$$

de minimale waarde van J.

Dat de optimale besturing eenduidig is volgt uit het feit dat in (4.2.2) de integraal echt positief is tenzij (4.2.6) geldt. Als men de besturing niet in de vorm van een terugkoppeling wil geven dan moet men (4.2.6) substitueren in (4.1.1):

$$(4.2.8)\qquad \dot{x}(t) = (A(t) - B(t)B'(t)K(t))x(t) \;.$$

Deze vergelijking, met beginwaarde $x(t_0) = x_0$ kan men oplossen en de oplossing $x(t)$ kan men substitueren in (4.2.6): $u(t) = -B'(t)K(t)x(t)$ waardoor u echt als een functie van t wordt gegeven. Van practisch standpunt is deze "open-loop"-implementering van u niet gunstig. Het is gemakkelijker en beter de "closed-loop"-formulering (4.2.6) direct te gebruiken.

De differentiaalvergelijking (4.2.4) voor $K(t)$ heet een Riccati-vergelijking. We moeten nu de existentie en eenduidigheid van een oplossing van (4.2.4) en (4.2.5) onderzoeken. Het is niet vanzelfsprekend dat zulk een oplossing bestaat. De differentiaalvergelijking

$$\dot{x}(t) = x^2(t) + 1$$

heeft immers als algemene oplossing $x(t) = \tan(t + c)$. Voor geen enkele c bestaat deze functie op een interval met lengte groter dan π. Om de existentie van een oplossing van (4.2.4) en (4.2.5) aan te tonen gebruiken we de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen (zie [GDV], [C-L]), waar het volgende resultaat wordt bewezen:

(4.2.9) STELLING. *Zij* $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n)$ *en zij* $(x,t) \mapsto f(x,t)$ *continu differentieerbaar t.a.v.* x. *Dan geldt*

i) *Er bestaat een* T_1 *met* $0 < T_1 \le T$ *zodat de differentiaalvergelijking*

(4.2.10) $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$, $x(0) = x_0$

een oplossing $x(t)$ *heeft op* $[0,T_1]$.

ii) *Als* (4.2.10) *een oplossing heeft op een interval, dan is deze oplossing eenduidig.*

iii) *Als de oplossing van* (4.2.10) *op elk interval* $[0,T_1]$ *waarop zij bestaat begrensd is met een bovengrens onafhankelijk van* T_1, *dan bestaat er een oplossing van* (4.2.10) *op* $[0,T]$.

We passen deze stelling toe op (4.2.4) en (4.2.5) met t vervangen door $T-t$ en 0 door T. Deze vergelijkingen kunnen worden geinterpreteerd als een stelsel van n^2 vergelijkingen met n^2 onbekenden. Op grond van i) en ii) bestaat er voor elke T een eenduidige oplossing van (4.2.4) en (4.2.5) gedefinieerd op een interval van de vorm $[T_1,T]$. Deze oplossing zal afhangen van de eindtijd T. We zullen daarom de oplossing aangeven met $K(t,T)$.

Merk ook op dat, als M een symmetrische matrix is, de oplossing van (4.2.4) ook symmetrisch moet zijn. Immers K en K' voldoen aan dezelfde differentiaalvergelijking met dezelfde eindwaarde. Uit de eenduidigheidsstelling (4.2.9ii)) volgt dat $K(t,T) = K'(t,T)$ moet gelden voor alle t waarvoor $K(t,T)$ bestaat. Tenslotte volgt uit (4.2.7) dat $K(t,T)$ positief semi-definiet is voor elke t, als $M \ge 0$. Dit is niet zo gemakkelijk direct uit (4.2.4) af te leiden.

(4.2.11) STELLING. *De Riccati-vergelijking* (4.2.4) *heeft voor iedere* $M \geq 0$ *en iedere* $T > 0$ *een oplossing op* $[t_0,T]$ *met* $K(T) = M$.

BEWIJS. Op grond van het voorafgaande hoeven we alleen nog aan te tonen dat de oplossing van (4.2.4) op $[T_1,T]$ begrensd is met bovengrens onafhankelijk van T_1. Zij $x_0 \in \mathbb{R}^n$ een willekeurige vector. Als besturing op $[t_0,T]$ nemen we $u = 0$. Zij $\tilde{x}$ de bijbehorende toestand met $\tilde{x}(T_1) = x_0$ en $\tilde{y}$ de uitgang. We hebben dus $\tilde{y}(t) = C(t)\Phi(t,T_1)x_0$. (Merk op dat $\tilde{y}(t)$ ook gedefinieerd is voor $t_0 \leq t \leq T_1$). Er bestaat dan een getal μ onafhankelijk van T_1 zo dat

$$(4.2.12) \qquad \int_{T_1}^{T} |\tilde{y}|^2 dt + \tilde{x}'(T)M\tilde{x}(T) \leq \mu$$

voor $t_0 \leq T_1 \leq T$. Voor μ kunnen we nemen

$$\mu = \max_{t_0 \leq T_1 \leq T} \int_{t_0}^{T} \| C(t)\Phi(t,T_1) \|^2 |x_0|^2 dt + \|M\| L$$

waar $L := \max\{|\tilde{x}(t)|^2 \mid t_0 < t \leq T\}$.
Laat nu de oplossing $K(t,T)$ van de Riccati-vergelijking bestaan op $[T_1,T]$. Op grond van stelling (4.2.3) geldt dan

$$x_0'K(T_1,T)x_0 \leq \int_{T_1}^{T} |\tilde{y}|^2 dt + \tilde{x}'(T)M\tilde{x}(T) \leq \mu .$$

De ongelijkheid

$$x_0'K(t,T)x_0 \leq \mu$$

geldt ook voor elke $t \in [T_1,T]$ als we $\tilde{x}(t) = x_0$ nemen daar $K(t,T)$ bestaat als $t \in [T_1,T]$. Daar x_0 willekeurig is volgt hieruit dat $K(t,T)$ begrensd is onafhankelijk van T_1 (ga dit na m.b.v. appendix B; merk op dat μ van x_0 afhangt). Uit stelling (4.2.9) volgt nu het gestelde.

We kunnen de resultaten samenvatten in de volgende stelling:

(4.2.13) STELLING. *Zij gegeven* $C(t),A(t),B(t)$ *een getal* t_0 *en een getal* $T \geq t_0$ *en een positief semidefiniete matrix* M *dan geldt het volgende:*

i) *De Riccati-vergelijking*

(4.2.14) $\dot{K} = -C'C - A'K - KA' + KBB'K$

heeft een eenduidige positief semidefiniete oplossing $K(t,T)$ *die voldoet aan de eindvoorwaarde*

$K(T,T) = M$.

ii) *Het probleem* (4.1.7) *heeft voor elke* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *een eenduidige oplossing gegeven door*

(4.2.15) $u(t) = -B'(t)K(t,T)x(t) \qquad (t_0 \leq t \leq T)$

en de minimale waarde wordt gegeven door

(4.2.16) $\min\limits_{u \in \Omega} J(x_0,u,t_0,T) = x_0'K(t_0,T)x_0$.

In het geval van het tijdsinvariant eindige horizon probleem kunnen we door een tijdsverschuiving bereiken dat $t_0 = 0$. Als we dan $P(t,T) := K(T-t,T)$ invoeren zien we dat P voldoet aan de vergelijking

(4.2.17) $\dot{P} = C'C + A'P + PA - PBB'P,\ P(0) = M$.

Uit de eenduidigheidsstelling (4.2.7ii)) volgt dat P niet afhangt van T. Immers T komt in de vergelijkingen en de randvoorwaarde niet voor. In plaats van $P(t,T)$ kunnen we schrijven $P(t)$. Blijkbaar is $K(t,T) = P(T-t)$. Voor $P(t)$ kunnen we nog een extra eigenschap afleiden nl. monotonie. We zullen dit opnemen in een stelling, het analogon van (4.2.13), die we voor de volledigheid zullen geven. Omdat $t_0 = 0$ noteren we $J(x_0,u,t_0,T)$ als $J(x_0,u,T)$.

(4.2.18) STELLING. *Zij gegeven* (C,A,B) *een getal* $T \geq 0$ *en een positief semidefiniete matrix* M. *Dan geldt het volgende:*

i) *De Riccati-vergelijking*

(4.2.19) $\dot{P} = C'C + A'P + PA - PBB'P$

heeft een eenduidige oplossing, die voldoet aan de beginvoorwaarde

(4.2.20) $P(0) = M$.

Deze oplossing bestaat voor alle $t \geq 0$. *Bovendien is* $P(t)$ *positief semidefiniet voor alle* $t \geq 0$. *Verder is, als* $M = 0$, *de functie* $t \mapsto P(t)$ *monotoon niet-dalend, d.w.z.*

(4.2.21) $t_1 \leq t_2 \Rightarrow P(t_1) \leq P(t_2)$.

ii) *De tijdsinvariante versie van probleem* (5.1.7) *heeft voor elke* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *een eenduidige oplossing gegeven door*

(4.2.22) $u(t) = -B'P(T-t)x(t) \quad (0 \le t \le T)$

en de minimale waarde van $J(x_0,u,T)$ *wordt gegeven door*

(4.2.23) $\min\limits_{u\in\Omega} J(x_0,u,T) = x_0'P(T)x_0$.

Het enige dat we nog niet hebben bewezen is (4.2.21); dit volgt echter gemakkelijk uit (4.2.23).

Bovenstaand resultaat geeft ons een methode om de optimale besturing expliciet te bepalen. De belangrijkste stap hierbij is de oplossing van de Riccati-vergelijking. We laten dit zien in een voorbeeld.

(4.2.24) VOORBEELD. *Gegeven* $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *minimaliseer de integraal*

$$J = \int_0^T (x^2 + \dot{x}^2)dt$$

over alle stuksgewijs continu-differentieerbare functies x *met* $x(0) = x_0$.

We kunnen dit probleem zien als een speciaal geval van (4.1.7) met $n = m = r = 1$, $A = 0$, $B = C = 1$, $M = 0$. Vergelijking (4.2.19) wordt (we schrijven $p(t)$ i.p.v. $P(t)$)

$$\dot{p}(t) = 1 - p^2(t),\ p(0) = 0 .$$

De oplossing hiervan kan men vinden door separatie:

$$p(t) = \tanh t \quad (t \ge 0) .$$

Merk op dat deze functie inderdaad niet-negatief en niet-dalend is. De oplossing van het probleem wordt gegeven door

$$u(t) = \dot{x}(t) = -p(T-t)x(t)$$

dus

$$\dot{x}(t) = -\tanh(T-t)x(t),\ x(0) = x_0 .$$

Dit is de oplossing gegeven in de vorm van een terugkoppeling. Men kan hieruit de x oplossen (alweer door separatie)

$$x(t) = x_0 \frac{\cosh(T-t)}{\cosh T} .$$

Tenslotte wordt de minimale waarde van de integraal gegeven door

$$\min J = p(T)x_0^2 = x_0^2 \tanh T \,. \qquad \square$$

Het oplossen van de Riccati-vergelijking moet in algemenere gevallen numeriek gebeuren (zie [K-S] voor meer details). In eenvoudige voorbeelden is het vaak handiger op een andere manier te werk te gaan. Beschouw bij gegeven $C(t)$, $A(t)$, $B(t)$, t_0, x_0, T en M het probleem (4.1.7) dan is $K(t,T)$ bepaald door (4.2.4) en (4.2.5) voor $t_0 \le t \le T$. Definieer

(4.2.25) $\quad p(t) := -K(t,T)x(t), \qquad t_0 \le t \le T$

dan geldt

(4.2.26) $\quad p(T) = -Mx(T)$.

De optimale besturing wordt in p uitgedrukt door

(4.2.27) $\quad u(t) = B(t)p(t)$.

Een korte berekening levert

(4.2.28) $\quad \dot{p} = -A'p + C'y$.

Merk op dat (4.2.28) en (4.2.27) samen het duale systeem van (4.1.1) vormen (zie (2.3.6))!

We kunnen de oplossing van (4.1.7) ook als volgt bepalen:

Bepaal de oplossing van het tweepuntsrandwaardeprobleem:

$$(4.2.29) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BB'p, \; x(t_0) = x_0 \\ \dot{p} &= C'Cx - A'p, \; p(T) = -Mx(T) \,. \end{aligned}$$

Dan wordt de optimale besturing gegeven door (4.2.27).

De methode die gebruik maakt van de duale vergelijking heeft het voordeel dat men met een stelsel lineaire vergelijkingen werkt (nl. (4.2.29)) i.p.v. de niet-lineaire Riccati-vergelijking. Bovendien is het aantal onbekenden meestal kleiner (nl. $2n$ i.p.v. $\frac{1}{2}n(n+1)$ als we de symmetrie gebruiken). Daar staat tegenover dat men een randwaardeprobleem moet oplossen, terwijl men bij de Riccati-vergelijking een beginwaardeprobleem heeft, hetgeen in het algemeen numeriek veel aantrekkelijker is.

(4.2.30) VOORBEELD. We beschouwen weer het probleem van (4.2.24). Het randwaardeprobleem (4.2.29) luidt hier

$$\dot{x} = p,\ x(0) = x_0 ,$$

$$\dot{p} = x,\ p(T) = 0 ,$$

dus $\ddot{x} = x$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(T) = 0$. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $\ddot{x} = x$ kan worden geschreven als

$$x(t) = a \cosh(T - t) + b \sinh(T - t) .$$

De voorwaarde $\dot{x}(T) = 0$ levert $b = 0$, dus

$$x(t) = a \cosh(T - t) .$$

Uit $x(0) = x_0$ volgt dan $a = x_0/\cosh T$, dus

$$x(t) = x_0 \frac{\cosh(T - t)}{\cosh T} .$$

Verder is $u(t) = p(t) = \dot{x}(t)$, waaruit u kan worden bepaald.

4.3. *Oneindige horizon*

We beschouwen nu probleem (4.1.5). We zullen dit alleen doen, uitgaande van een tijdsinvariant criterium (4.1.4), voor een tijdsinvariant systeem. Zij gegeven het systeem

$$\text{(4.3.1)} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (S)$$

met A, B en C constant en een begintoestand x_0. Voor elke $T > 0$ kunnen we het minimum bepalen van

$$\text{(4.3.2)} \qquad J(x_0,u,T) = \int_0^T (|u|^2 + |y|^2)dt$$

voor $u \in \Omega$. Dit minimum is gelijk aan

$$\text{(4.3.3)} \qquad V(x_0,T) = x_0'P(T)x_0$$

waar P oplossing is van

$$\text{(4.3.4)} \qquad \begin{aligned} \dot{P}(t) &= C'C + A'P + PA - PBB'P \\ P(0) &= 0 . \end{aligned}$$

Zoals we in § 4.2 hebben gezien bestaat deze oplossing voor alle $t \geq 0$. Ook hebben we gezien dat $P(t)$ monotoon is, (Hier is $M = 0$.) Als nu $P(t)$ bovendien begrensd is, dan kan men hieruit concluderen dat $\lim_{t\to\infty} P(t) = P$ bestaat (zie appendix B). In het algemeen hoeft echter $P(t)$ niet begrensd te zijn. Zij bijv. $n = r = m = 1$, $C = 1$, $A = 0$, $B = 0$. Dus

$$\dot{x} = 0, \; y = x \; .$$

Dan luidt (4.3.4)

$$\dot{P} = 1, \; P(0) = 0$$

zodat $P(t) = t$.

De oorzaak hiervan is dat er geen enkele $u \in \Omega$ bestaat waarvoor

$$J(x_0,u) = \int_0^\infty (|u|^2 + |y|^2)dt$$

eindig is. Er geldt nl. altijd $y(t) = x_0$, zodat $|u|^2 + |y|^2 \geq |x_0|^2$. Het is duidelijk dat in dat geval probleem (4.1.5) zinloos is. Derhalve maken we de volgende extra veronderstelling:

(4.3.5) VERONDERSTELLING. *Er bestaat voor elke* x_0 *een* $u \in \Omega$ *zo dat de integraal*

$$(4.3.6) \qquad J(x_0,u) := \int_0^\infty (|u|^2 + |y|^2)dt$$

eindig is.

Een voldoende voorwaarde voor (4.3.5) is de stabiliseerbaarheid van (A,B). Als immers er een F bestaat zo dat $\Lambda(A + BF) < 0$, dan vinden we bij de besturing $u = Fx$ dat $|x(t)| = |e^{(A+BF)t}x_0| \leq M|x_0|e^{-\alpha t}$ voor zekere M en $\alpha > 0$. Maar dan is $|u| \leq M . \| F \| . |x_0|e^{-\alpha t}$, $|y| \leq M \| C \| . |x_0|e^{-\alpha t}$. Als we dit substitueren in (4.3.6) vinden we $J(x_0,u) < \infty$. De voorwaarde dat (A,B) stabiliseerbaar is (en zeker de sterkere voorwaarde dat (A,B) bestuurbaar is) is niet noodzakelijk voor (4.3.5). Als bijv. $C = 0$, dan kunnen we $J(x_0,u)$ altijd eindig houden door $u = 0$ te kiezen.

Onder de veronderstelling (4.3.5) is $P(t)$ begrensd. Immers

$$x_0'P(T)x_0 \leq \int_0^T (|u|^2 + |y|^2)dt \leq \int_0^\infty (|u|^2 + |y|^2)dt \leq J(x_0,u)$$

voor elke $u \in \Omega$, $T > 0$ (zie appendix B). Dus:

(4.3.7) $\quad P_0 := \lim_{T\to\infty} P(T)$

bestaat. Uit (4.3.4) volgt dat ook $\dot{P}(t)$ een limiet heeft als $t \to \infty$. Het is gemakkelijk in te zien dat dan $\dot{P}(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ moet gelden (ga na). Als we daarom in (4.3.4) de limietovergang $t \to \infty$ maken vinden we dat de vergelijking

(4.3.8) $\quad C'C + A'P + PA - PBB'P = 0$

voor $P = P_0$. Dit noemt men de <u>algebraïsche Riccati-vergelijking</u>. Uit het voorafgaande volgt dat onder de veronderstelling (4.3.5) er een oplossing $P = P_0$ van (4.3.8) bestaat. Bovendien is P_0 positief semidefiniet, omdat $P(T) \geq 0$ voor alle $T > 0$. In het algemeen is P_0 niet de enige positief semidefiniete oplossing van (4.3.8). We hebben het volgende resultaat:

(4.3.9) STELLING. *Onder de veronderstelling* (4.3.5) *is* P_0 *een positief semidefiniete oplossing van de algebraische Riccati-vergelijking. Voor elke oplossing* $P \geq 0$ *van* (4.3.8) *geldt* $P \geq P_0$. *Verder is de minimale waarde van*

(4.3.10) $\quad J(x_0,u) = \int_0^\infty (|u|^2 + |y|^2)dt$

gelijk aan $V(x_0) = x_0'P_0x_0$. *Deze minimale waarde wordt bereikt door de terugkoppeling*

(4.3.11) $\quad \bar{u} = -B'P_0x$.

BEWIJS. Definieer P_0 als in (4.3.7). Dan geldt voor elke $T > 0$, $u \in \Omega$:

$$J(x_0,u) \geq J(x_0,u,T) \geq x_0'P(T)x_0 ,$$

en dus voor elke $u \in \Omega$

$$J(x_0,u) \geq x_0'P_0x_0 .$$

Als we dus hebben laten zien dat voor $\bar{u}$ gegeven door (4.3.11) geldt $J(x_0,\bar{u}) = x_0'P_0x_0$, dan volgt daaruit dat $\bar{u}$ optimaal is. Daartoe maken we gebruik van formule (4.2.1) met $M = 0$, $K(t) = P$, waar $P \geq 0$ een willekeurige oplossing is van (4.3.8), en $u(t) = -B'Px(t)$. Dan vinden we

(4.3.12) $\quad J(x_0,u,T) = x_0'Px_0 - x'(T)Px(T) \geq x_0'P(T)x_0$.

Als we hier eerst $P = P_0$ substitueren, dan volgt uit

$$0 \le x'(T)P_0x(T) \le x_0'\{P_0 - P(T)\}x_0 \to 0 \quad (T \to \infty)$$

dat

(4.3.13) $x'(T)P_0x(T) \to 0 \quad (T \to \infty)$.

Dus

$$J(x_0,\bar{u}) = \lim_{T\to\infty} J(x_0,\bar{u},T) = \lim_{T\to\infty} \{x_0'P_0x_0 - x'(T)P_0x(T)\} = x_0'P_0x_0 \;.$$

Hieruit volgt dat $\bar{u} = -B'P_0x$ inderdaad optimaal is. Tenslotte laten we zien dat P_0 inderdaad de minimale positief semidefiniete oplossing van (4.3.8) is. Daartoe nemen we voor een willekeurige oplossing $P \ge 0$ in (4.3.12) de limiet voor $T \to \infty$ en we gebruiken daarbij (4.3.13). Er volgt

$$x_0'Px_0 \ge x_0'P_0x_0 \;.$$

Dus is P_0 de minimale oplossing. □

<u>Opmerking</u>. We kunnen dus zeggen dat we van de oplossingen van de algebraische Riccati-vergelijking de minimale moeten nemen (die eenduidig bepaald is door bovenstaande minimaliteitsvoorwaarde) voor de optimale besturing.

Het voordeel van de optimale besturing van het oneindige horizon probleem boven die van het eindige horizon probleem is het feit dat zij een *tijdsinvariante* terugkoppeling is. Bovendien is zij veel gemakkelijker te implementeren o.a. door een veel geringer geheugenruimte. We kunnen nu ook de stabiliteit van het teruggekoppelde systeem onderzoeken. In eerste instantie zou men verwachten dat het systeem S (4.3.1) asymptotisch stabiel zal zijn als (4.3.10) eindig is voor elke x_0. Hierbij zal het echter nodig zijn een waarneembaarheidsvoorwaarde aan S op te leggen. Als bijv. $C = 0$, dan zal de minimale waarde van (4.3.10) gelijk aan nul zijn. De optimale besturing zal $u = 0$ zijn en de minimale oplossing van de algebraische Riccati-vergelijking $P_0 = 0$. Er is echter geen enkele garantie dat het systeem $\dot{x} = Ax$ (ontstaan door dat in S de "terugkoppeling" $u = 0.x$ toegepast is) stabiel is. Het blijkt dat detecteerbaarheid voldoende is voor de stabiliteit van het teruggekoppelde systeem $\dot{x} = A_0x$ met

(4.3.14) $A_0 := A - BB'P_0$.

(4.3.15) STELLING. *Zij* (C,A) *detecteerbaar. Dan is* $\Lambda(A_0) < 0$. *Bovendien is* P_0 *de enige positief semidefiniete oplossing van* (4.3.8).

BEWIJS. Zij $A_0 v = \lambda v$, $v \neq 0$. Vermenigvuldig (4.3.8) (met $P = P_0$) van links met v^* en van rechts met v. Dan vindt men:

(4.3.16) $\quad 2 \operatorname{Re} \lambda . v^* P_0 v = -|Cv|^2 - |B' P_0 v|^2$.

We onderscheiden twee gevallen:

i) Als $\operatorname{Re} \lambda = 0$ of $v^* P_0 v = 0$, dan is $Cv = 0$ en $B' P_0 v = 0$. Dan is ook

$$Av = A_0 v + BB' P_0 v = A_0 v = \lambda v$$

d.w.z. λ is een niet-waarneembare eigenwaarde van A. Hieruit volgt dat $\operatorname{Re} \lambda < 0$, omdat (C,A) detecteerbaar is.

ii) $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ en $v^* P_0 v > 0$. Dan is blijkbaar $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ vanwege (4.3.16). Dus $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Dit bewijst de eerste uitspraak van de stelling. Zij nu $P \geq 0$ een oplossing van (4.3.8). We substitueren $M = 0$, $K(t) = P$ en $\bar{u} = -B' P_0 x$ (de optimale terugkoppeling) in (4.2.1). Dan volgt

$$x_0' P_0 x_0 = J(x_0 u) \geq J(x_0, u, T) = x_0' P x_0 - x'(T) P x(T) + \int_0^T |B'(P - P_0)x|^2 dt \geq x_0' P x_0 - x'(T) P x(T) .$$

Daar $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ vinden we na limietovergang:

$$x_0' P_0 x_0 \geq x_0' P x_0 .$$

Dit geldt voor alle x_0. Dus $P_0 \geq P$. Daar anderzijds $P_0 \leq P$ (stelling (4.3.9)) vinden we $P_0 = P$ (ga na dat deze stap is gerechtvaardigd). $\square$

Stel er is voldaan aan veronderstelling (4.3.5) en zij (C,A) detecteerbaar. Beschouw naast het criterium

(4.3.17) $\quad \displaystyle\int_0^\infty (|u|^2 + |y|^2) dt$

ook het criterium

$$(4.3.18)\quad \lim_{T\to\infty} \{ \int_0^T (|u|^2 + |y|^2)dt + x'(T)Mx(T)\}$$

voor $M \geq 0$. Met (4.3.15) zien we direct dat voor $u = -B'P_0x$ de waarde van (4.3.18) $x_0'P_0x_0$ is. Bovendien zien we dat door $u=-B'P_0x$ ook (4.3.18) geminimaliseerd wordt. Stel nl. dat er een besturing bestaat zo dat

$$(4.3.19)\quad \int_0^\infty (|u|^2 + |y|^2)dt + \lim_{T\to\infty} x'(T)Mx(T) < x_0'P_0x_0 \ .$$

Deze besturing zou dan, aangezien $M \geq 0$ is, voor (4.3.17) een kleinere waarde leveren als $x_0'P_0x_0$. Met (4.3.9) verkrijgen we dan een tegenspraak. Aangezien x_0 in het bovenstaande willekeurig gekozen kan worden krijgen we met (4.2.23) de volgende

(4.3.20) STELLING. *Zij voldaan aan de veronderstelling* (4.3.5). *Zij* (C,A) *detecteerbaar en* $M \geq 0$. *Zij* $P(t)$ *de oplossing van de Riccati-vergelijking*

$$\dot{P} = C'C + A'P + PA - PBB'P,\ P(0) = M$$

dan geldt

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_0$$

waarin P_0 *de enige positief semidefiniete oplossing van* (4.3.8) *is.* □

HOOFDSTUK V. STOCHASTISCHE SYSTEMEN

5.1. *Stochastische processen*

Een stochastisch proces is een stochastische variabele die afhangt van de tijd t. Strict genomen moeten we zo'n stochastische variabele aangeven met $(t,\omega) \mapsto x(t,\omega)$. We zullen echter gewoonlijk $t \mapsto x(t)$ schrijven en de afhankelijkheid van $x(t)$ t.a.v. de elementaire uitkomsten ω onvermeld laten. Voor een strengere en uitgebreidere behandeling van stochastische processen dan hier wordt gegeven verwijzen we naar [SP II], [PA]. Zie ook [K-S].
Daar voor elke t de grootheid $x(t)$ een stochastische variabele is, kan men de verdelingsfunctie

$$P\{x(t) \le \xi\}$$

beschouwen. Deze verdelingsfuncties geven echter nog niet voldoende informatie over het proces. Men heeft ook simultane verdelingsfuncties nodig:

$$P\{x(t_1) \le \xi_1, x(t_2) \le \xi_2, \ldots, x(t_k) \le \xi_k\} \ .$$

Meestal zullen we niet werken met scalaire variabelen maar met stochastische vectoren. Hiervoor gelden analoge beschouwingen. Ongelijkheden voor vectoren worden steeds componentsgewijs opgevat: $x(t) \le \xi$ betekent $x_i(t) \le \xi_i$ $(i = 1,\ldots,n)$.

(5.1.1) DEFINITIE. *Zij* $x(t)$ *een* n*-vectorwaardig stochastisch proces. Dan heet*

$$\bar{x}(t) := E\{x(t)\}$$

de verwachtingswaarde van het proces en

$$R_x(t_1,t_2) = E\{(x(t_1) - \bar{x}(t_1))(x(t_2) - \bar{x}(t_2))'\}$$

de covariantiematrix.

R_x is een $n \times n$-matrixwaardige functie van twee variabelen. De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te verifiëren:

(5.1.2) STELLING.

i) $R_x(t_1,t_2) = R_x'(t_2,t_1)$.
ii) $R_x(t,t)$ *is symmetrisch en positief semidefiniet.*

We zullen in dit hoofdstuk steeds aannemen dat de verwachtingswaarde en de covariantiematrix bestaan. Deze twee grootheden beschrijven natuurlijk de simultane verdelingsfuncties niet helemaal. We zullen ons echter alleen bezighouden met eigenschappen van het stochastisch proces die uitgedrukt kunnen worden in de verwachtingswaarde en de covariantiematrix. Daarom zullen we speciale eigenschappen van een stochastisch proces zoveel mogelijk uitdrukken d.m.v. deze grootheden. De stationariteit van een stochastisch proces is hiervan een voorbeeld:

(5.1.3) DEFINITIE. *Een stochastisch* n-*vectorproces* x(t) *heet* ***stationair*** *als*

$$P\{x(t_1) \le \xi_1,\ldots,x(t_k) \le \xi_k\} = P\{x(t_1+\tau) \le \xi_1,\ldots,x(t_k+\tau) \le \xi_k\}$$

voor elke $\tau \in \mathbb{R}$, $(t_1,\ldots,t_k) \in \mathbb{R}^k$, $(\xi_1,\ldots,\xi_k) \in \mathbb{R}^{kn}$.

(5.1.4) STELLING. *Zij* x(t) *een stationair proces. Dan geldt*

i) $\bar{x}(t)$ *is constant (onafhankelijk van* t*).*

ii) $R_x(t_1,t_2)$ *hangt alleen af van* $t_1 - t_2$, *d.w.z., er bestaat een* $n \times n$-*matrixwaardige functie* $t \mapsto R(t)$ *zo dat* $R_x(t_1,t_2) = R(t_1 - t_2)$ *voor alle* t_1 *en* t_2.

Het bewijs hiervan is duidelijk. Merk op dat volgens afspraak hier is aangenomen dat $\bar{x}(t)$ en $R_x(t_1,t_2)$ bestaan. We zullen bij een stationair proces verder steeds $R_x(t_1 - t_2)$ schrijven i.p.v. $R_x(t_1,t_2)$. Als we alleen in $\bar{x}$ en R_x zijn geïnteresseerd, dan kunnen we volstaan met de in (5.1.4) genoemde eigenschappen i.p.v. de stationariteit.

(5.1.5) DEFINITIE. *Een stochastisch* n-*vectorproces* x(t) *heet* ***zwak stationair*** *als*

i) $\bar{x}(t)$ *constant is.*

ii) $R_x(t_1,t_2)$ *alleen van* $t_1 - t_2$ *afhangt.*

Een analoge situatie hebben we voor het begrip onafhankelijkheid:

(5.1.6) DEFINITIE. *Laat* x(t) *en* y(t) *twee stochastische vectorprocessen zijn van dimensie* m *en* n. *Dan heten* x(t) *en* y(t) *stochastisch* ***onafhankelijk*** *als voor elk* k-*tal getallen* $(t_1,\ldots,t_k)$ *de* mk-*vectoren* $(x(t_1),\ldots,x(t_k))$ *en de* nk-*vectoren* $(y(t_1),\ldots,y(t_k))$ *stochastisch onafhankelijk zijn.*

Dan geldt de volgende eigenschap:

(5.1.7) STELLING. *Als* $x(t)$ *en* $y(t)$ *stochastisch onafhankelijk zijn dan geldt voor elke* t_1 *en* t_2*:*

(5.1.8) $\quad E\{(x(t_1) - \bar{x}(t_1))(y(t_2) - \bar{y}(t_2))'\} = 0$.

Dit geeft weer aanleiding tot een definitie van een verzwakte vorm van onafhankelijkheid.

(5.1.9) DEFINITIE. *Twee stochastische vectorprocessen heten* ***ongecorreleerd*** *als* (5.1.8) *geldt voor elke* t_1 *en* t_2.

Het voordeel van deze verzwakte eigenschappen is dat men ze gemakkelijk kan verifiëren, in het bijzonder omdat ze niet het bekend zijn van de volledig simultane verdelingsfunctie veronderstellen.

Een stochastisch proces $x(t)$ in $\mathbb{R}^n$ heet normaal verdeeld als voor elk k-tal $(t_1,\ldots,t_k)$ de nk-vector $(x(t_1),\ldots,x(t_k))$ normaal verdeeld is. Van een normaal verdeeld proces wordt de simultane verdeling helemaal bepaald door de verwachtingswaarde en de covariantiematrix. Als gevolg hiervan, zijn voor zulke processen de zwakke en sterke eigenschappen in bovenstaande definities equivalent.

(5.1.10) DEFINITIE. *We zeggen dat een stochastisch proces* ***ongecorreleerde toenames*** *heeft op* $[t_0,\infty)$ *als*

i) $x(t_0) = 0$.

ii) *Voor elke* $t \geq t_0$ *heeft* $x(t)$ *verwachtingswaarde nul:* $E\{x(t)\} = 0$.

iii) *Als* (t_1,t_2) *en* (t_3,t_4) *twee disjuncte intervallen zijn in* $[t_0,\infty)$ *dan zijn de toenames van* x *op die intervallen ongecorreleerd, d.w.z.*

$$E\{(x(t_2) - x(t_1))(x(t_4) - x(t_3))'\} = 0 .$$

Als we de notatie

$$Q(t) := R_x(t,t) = E\{x(t)x'(t)\}$$

gebruiken (bedenk dat $\bar{x}(t) = 0$), dan volgt uit de definitie dat voor $t_1 \leq t_2$ geldt:

$$R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)x'(t_2)\} =$$

$$E\{(x(t_1)-x(t_0))(x(t_2) - x(t_1))'\} + Q(t_1) = Q(t_1) .$$

Uit (5.1.2) volgt dan dat $R_x(t_1,t_2) = Q(t_2)$ als $t_1 \geq t_2$. Dus, in het algemeen:

(5.1.11) $$R_x(t_1,t_2) = Q(\min\{t_1,t_2\}) .$$

Als omgekeerd deze relatie geldt voor een stochastisch proces dat voldoet aan i) en ii) van (5.1.10) dan is dit een proces met ongecorreleerde toenames. Verder volgt dat voor $t_0 \leq t_1 \leq t_2$:

$$Q(t_2) = E\{(x(t_2) - x(t_1))(x(t_2) - x(t_1))'\} + Q(t_1) \geq Q(t_1) .$$

De matrixfunctie $Q(t)$ is dus niet-dalend.
Een bijzonder voorbeeld van een proces met ongecorreleerde toenames is een zgn. Wiener-proces ook wel Brownse beweging genoemd. Dit is een normaal verdeeld proces $w(t)$ met ongecorreleerde toenames waarin bovendien

$$Q(t) := R_w(t,t) = (t - t_0)I .$$

Uit (5.1.11) volgt dat voor een Wiener proces geldt

$$R_w(t_1,t_2) = (\min\{t_1,t_2\} - t_0)I .$$

Uit (5.1.11) volgt dat een proces met ongecorreleerde toenames niet zwak stationair kan zijn (tenzij $Q(t) = 0$ voor alle t).

Als laatste voorbeeld van een stochastisch proces noemen we witte ruis. Dit is geen welgedefinieerd stochastisch proces. Bovendien is het fysisch onmogelijk. Desondanks wordt witte ruis vaak gebruik in stochastische modellen enerzijds omdat er gemakkelijk mee gerekend kan worden en anderzijds omdat witte ruis een goede benadering vormt voor vele echte processen. Tenslotte is witte ruis van belang omdat men er vele stochastische processen mee kan genereren (zie § 5.2). Intuitief is witte ruis een stochastisch proces $v(t)$ met verwachtingswaarde 0 en met de eigenschap dat voor $t_1 \neq t_2$ de stochastische vectoren $v(t_1)$ en $v(t_2)$ ongecorreleerd zijn. Opdat het proces niet triviaal wordt, moet men eisen dat de covariantie oneindig wordt als t_1 en t_2 samenvallen. Meer specifiek:

(5.1.12) $$R_v(t_1,t_2) = V(t_1)\delta(t_1 - t_2)$$

waar $V(t)$ een positief semi-definiete matrixwaardige functie is, genoemd de intensiteit van v. Witte ruis is zwak stationair dan en slechts dan als

$V(t) = V$ constant is. We zullen verder aannemen dat $V(t)$ continu is.

Beschouw nu een proces x met ongecorreleerde toenames waarbij $Q_x(t)$ continu differentieerbaar van t afhangt. Dan zij voor $\delta > 0$:

$$y_\delta(t) := \frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} .$$

Als nu $t_2 - t_1 > \delta$ dan zijn $y_\delta(t_1)$ en $y_\delta(t_2)$ ongecorreleerd. Stel nu dat $\lim_{\delta \to 0} y_\delta = v$ bestaat in zekere zin. Het limietproces v heeft dan de eigenschap dat $v(t_1)$ en $v(t_2)$ ongecorreleerd is als $t_1 \neq t_2$. Bovendien is $E\{v(t)\} = 0$ voor alle $t \geq t_0$. D.w.z. v is een witte ruis en formeel kunnen we schrijven:

$$\frac{dx}{dt} = v . \tag{5.1.13}$$

Strikt genomen kunnen we echter het proces y meestal niet differentiëren en vergelijking (5.1.13) moet dan ook formeel worden opgevat. Omgekeerd kan men uitgaan van witte ruis v en dan kan men (formeel) laten zien dat

$$x(t) := \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

een proces met ongecorreleerde toenames is.

Het resultaat is dat men witte ruis kan opvatten als de tijdsafgeleide van een proces met ongecorreleerde toenames. Een strenge behandeling van witte ruis kan men verkrijgen door niet meer te praten over witte ruis zelf maar over het corresponderende proces met ongecorreleerde toenames. We merken nog op dat

$$Q(t) := R_x(t,t) = E\{x(t)x'(t)\} =$$

$$E\{\int_{t_0}^{t} v(\tau_1)d\tau_1 \int_{t_0}^{t} v'(\tau_2)d\tau_2\} = \int_{t_0}^{t} (\int_{t_0}^{t} E\{v(\tau_1)v'(\tau_2)\}d\tau_2)d\tau_1 =$$

$$\int_{t_0}^{t} V(\tau_1) \int_{t_0}^{t} \delta(\tau_1 - \tau_2)d\tau_2 \, d\tau_1 = \int_{t_0}^{t} V(\tau)d\tau$$

en dus

$$\dot{Q}(t) = V(t), \quad Q(t_0) = 0$$

hetgeen de relatie tussen de intensiteit van $v(t)$ en de covariantie van $x(t)$ aangeeft.

5.2. *Lineaire systemen met witte ruis als ingang*

We beschouwen nu het systeem

$$(5.2.1)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)v(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

waarin $v(t)$ een witte ruis is en x_0 een stochastische variabele. We nemen aan dat x_0 en $v(t)$ ongecorreleerd zijn voor alle t, dat x_0 verwachtingswaarde $\bar{x}_0$ en covariantiematrix Q_0 heeft en dat v een intensiteit $V(t)$ heeft. De transitiematrix van de vergelijking $\dot{x} = Ax$ geven we aan met $\Phi(t_1,t_2)$.

(5.2.2) STELLING. *Onder genoemde voorwaarde hebben* x *en* y *verwachtingswaarden gegeven door het systeem*

$$(5.2.3)\qquad \begin{aligned} &\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t),\ \bar{y}(t) = C(t)\bar{x}(t) \\ &\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{aligned}$$

en x *en* y *hebben een covariantiematrix die voor* $t_1 > t_2$ *voldoet aan*

$$(5.2.4)\qquad \frac{\partial R_x(t_1,t_2)}{\partial t_1} = A(t_1)R_x(t_1,t_2)$$

zodat voor $t_1 \geq t_2$ *geldt*

$$(5.2.5)\qquad R_x(t_1,t_2) = \Phi(t_1,t_2)Q_x(t_2)$$

waar $Q_x(t) := R_x(t,t)$.
Verder geldt voor $t_1 < t_2$ *dat*

$$(5.2.6)\qquad R_x(t_1,t_2) = Q_x(t_1)\Phi'(t_1,t_2)$$

ofwel

$$(5.2.7)\qquad \frac{\partial R_x(t_1,t_2)}{\partial t_2} = R_x(t_1,t_2)A'(t_2)\ .$$

Voor de functie $Q_x(t)$ *geldt*

$$(5.2.8)\qquad \begin{aligned} \dot{Q}_x &= AQ_x + Q_xA' + BVB' \\ Q_x(t_0) &= Q_0\ . \end{aligned}$$

Tenslotte vinden we voor het stochastisch proces y *dat*

(5.2.9) $\quad R_y(t_1,t_2) = C(t_1)R_x(t_1,t_2)C'(t_2)$

en in het bijzonder

(5.2.10) $\quad Q_y(t) = C(t)Q_x(t)C'(t)$

waar $Q_y(t) := R_y(t,t)$.

BEWIJS. Formule (5.2.3) volgt gemakkelijk uit het feit dat $E\{v(t)\} = 0$, als men gebruikt dat

$$\frac{d}{dt} E\{x(t)\} = E\{\dot{x}(t)\} .$$

Het is echter correcter gebruik te maken van de variatie-van-constantenformule

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau$$

hetgeen ook onmiddellijk het gewenste resultaat geeft.
Als we nu

$$z(t) := x(t) - \bar{x}(t)$$

invoeren, dan is $\bar{z}(t) = 0$ en $R_x(t_1,t_2) = R_z(t_1,t_2)$. Verder voldoet z aan de vergelijking

$$\dot{z} = Ax + Bv, \quad z(t_0) = z_0$$

met $\bar{z}_0 = 0$. Daarom geldt ook voor z een variatie-van-constanten-formule

(5.2.11) $$z(t) = \Phi(t,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau .$$

Er geldt voor $t_1 > t_2$

$$E\{z(t_2)v'(t_1)\} = E\{\Phi(t_2,t_0)z_0v'(t_1) + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_2,\tau)B(\tau)v(\tau)v'(t_1)d\tau\} =$$

$$\Phi(t_2,t_0)E\{z_0v'(t_1)\} + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_2,\tau)B(\tau)E\{v(\tau)v'(t_1)\}d\tau = 0$$

daar z_0 en $v'(t_1)$ ongecorreleerd zijn en $E\{v(\tau)v'(t_1)\} = 0$ voor $\tau < t_1$. *Dit betekent dat* $x(t_1)$ *in* (5.2.1) *ongecorreleerd is met* $v(t)$ *voor* $t > t_1$. Verder vinden we voor $t_1 > t_2$

$$\frac{\partial R_x(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1} E\{z(t_1)z'(t_2)\} = E\{\dot{z}(t_1)z'(t_2)\} =$$

$$E\{A(t_1)z(t_1)z'(t_2) + B(t_1)v(t_1)z'(t_2)\} = A(t_1)R_x(t_1,t_2)$$

daar $E\{v(t_1)z'(t_2)\} = 0$ voor $t_1 > t_2$. Dit bewijst formule (5.2.4) en ook (5.2.5). Formules (5.2.6) en (5.2.7) verkrijgt men door transpositie (zie (5.1.2)).

Om (5.2.8) te bewijzen substitueren we (5.2.11) in $Q_x(t) = E\{z(t)z'(t)\}$. Dit levert, met gebruikmaking van $E\{z_0 v'(t)\} = 0$, dat

(5.2.12) $$Q_x(t) = \Phi(t,t_0)Q_0\Phi'(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)V(\tau)B'(\tau)\Phi'(t,\tau)d\tau$$

waaruit men (5.2.8) door differentiatie verkrijgt. Formules (5.2.9) en (5.2.10) volgen onmiddellijk.

(5.2.13) OPMERKING. Als we $S_x(t)$ definiëren door

$$S_x(t) = E\{x(t)x'(t)\}$$

dan vinden we

(5.2.14) $$\begin{aligned} &\dot{S}_x = AS_x + S_xA' + BVB' \\ &S_x(t_0) = Q_0 \,. \end{aligned}$$

We kunnen dit direct inzien daar

$$S_x = Q_x + \bar{x}\bar{x}'$$

en omdat $\bar{x}$ aan (5.2.3) voldoet.

Als we in (5.2.1) $A = 0$, $B = I$ hebben, dan geldt de differentiaalvergelijking (5.1.13) voor $x(t)$. De in § 5.1 beschreven situatie is dus een speciaal geval van stelling (5.2.2) als bovendien $\bar{x}(t_0) = 0$, $Q_{t_0} = 0$.

We bekijken ook de tijdsinvariante versie van (5.2.1) waar A een stabiliteitsmatrix en $v(t)$ zwak stationair is. Als gewoonlijk nemen we weer $t_0 = 0$. We kunnen (5.2.12) herschrijven als

$$Q_x(t) = e^{tA}Q_0e^{tA'} + \int_0^t e^{\tau A}BVB'e^{\tau A'}d\tau \ .$$

Omdat $\Lambda(A) < 0$, convergeert de integraal als $t \to \infty$. Er geldt dus

$$\lim_{t\to\infty} Q_x(t) =: Q_x = \int_0^\infty e^{\tau A}BVB'e^{\tau A}d\tau \ .$$

Uit (5.2.8) volgt dat ook $\lim_{t\to\infty} Q_x(t)$ bestaat. Deze limiet moet blijkbaar 0 zijn zodat we zien dat Q_x voldoet aan de vergelijking

(5.2.15) $\quad AQ_x + Q_xA' + BVB' = 0$

d.w.z. Q_x is een constante oplossing van de tijdsinvariante versie van (5.2.8). Dit kunnen we ook verifiëren door substitutie (vgl. § 3.1). Uit de theorie van § 3.1 volgt dat Q_x de enige positief semidefiniete oplossing van (5.2.15) is. Als we voor beginwaarde $x(0)$ een stochastische variabele x_0 hebben met verwachtingswaarde $\bar{x}_0 = 0$ en covariantiematrix $Q_0 = Q_x$, gegeven door (5.2.15), dan geldt $Q_x(t) = Q_x$ voor alle $t \geq 0$. De toestandsvariabele (en ook de uitgangsvariabele) is dan zwak stationair.

5.3. *Optimale waarnemers*

We gaan uit van het systeem

(5.3.1)
$$\dot{x} = Ax + Bu + v \quad (t_0 \leq t \leq T)$$
$$y = Cx + w$$

waar v en w beide witte ruis zijn met intensiteit $V(t)$ en $W(t)$ respectievelijk. In dit systeem worden dus zowel de bewegingsvergelijking als het meetproces gestoord. Het probleem dat wij willen onderzoeken is uit de waarneming van de uitgang y op een interval $[t_0,t]$ een zo goed mogelijke schatting voor de toestand op het eindtijdstip te bepalen. We gaan uit van de veronderstelling dat er van de beginwaarde statistische informatie is gegeven. D.w.z. we beschouwen x_0 als stochastische variabele waarvan we de verwachtingswaarde $\bar{x}_0$ en de covariantiematrix $Q_0 = E\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'\}$ kennen. Hierbij nemen we aan dat v, w en x_0 ongecorreleerd zijn, dus

(5.3.2)
$$E\{v(t_1)w'(t_2)\} = 0$$
$$E\{v(t_1)(x_0 - \bar{x}_0)'\} = 0$$
$$E\{w(t_1)(x_0 - \bar{x}_0)'\} = 0$$

voor alle t_1, t_2. De intensiteit van v geven we aan met V en die van w met W:

$$
(5.3.3)\qquad
\begin{aligned}
E\{v(t_1)v'(t_2)\} &= V(t_1)\delta(t_1 - t_2) \ , \\
E\{w(t_1)w'(t_2)\} &= W(t_1)\delta(t_1 - t_2) \ .
\end{aligned}
$$

We maken de volgende regulariteitsveronderstelling

$$(5.3.4)\qquad W(t) > 0, \quad t_0 \le t \le T \ .$$

Deze voorwaarde betekent, dat we voor geen enkele vector $a \in \mathbb{R}^r$, het inwendige product $a'y$ exact kunnen meten.

We kunnen het schattingsprobleem herleiden tot het speciale geval dat $\bar{x}_{t_0} = 0$ en $u = 0$. De verwachtingswaarden $\bar{x}, \bar{y}$ zijn immers oplossing van (zie stelling (5.2.2)):

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \ , \\
\bar{y} &= C\bar{x} \ .
\end{aligned}
$$

We kunnen definiëren $x_1 := x - \bar{x}$, $y_1 := y - \bar{y}$. Er geldt dan

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= Ax_1 + v, \quad x_1(t_0) = x(t_0) - \bar{x}_0 \ , \\
y_1 &= Cx_1 + w \ .
\end{aligned}
$$

In deze vergelijkingen is inderdaad de besturing en de verwachtingswaarde van de beginwaarde 0. Laten we verder van deze veronderstelling uitgaan in (5.3.1). Dan zal x(t) en y(t) verwachtingswaarde 0 hebben voor alle t. Aangezien $W(t) > 0$ is kunnen we schrijven $W(t) = U(t)U'(t)$ met $U(t)$ regulier voor alle $t \ge t_0$. Als we nu definiëren $z = U^{-1}y_1$ dan geldt

$$z = U^{-1}Cx_1 + U^{-1}w = \tilde{C}x_1 + \tilde{w} \ .$$

Het is nu duidelijk dat de intensiteit van $\tilde{w}$ de eenheidsmatrix I is. In het vervolg zullen we er steeds van uitgaan dat bovengenoemde transformatie heeft plaatsgevonden. Opdat C(t) continu is zullen we bovendien aannemen dat W(t) continu is. We formuleren nu het schattingsprobleem:

(5.3.5) PROBLEEM. *Zij gegeven het systeem*

$$
(5.3.6)\qquad
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + v, \quad x(t_0) = x_0 \\
y &= Cx + w
\end{aligned}
$$

waar v *en* w *beide witte ruis zijn met intensiteit* $V \geq 0$ *en* $W = I$ *en* x_0 *een stochastische variabele met verwachtingswaarde* $\bar{x}_0 = 0$ *en covariantiematrix*

(5.3.7) $\quad Q_0 = E\{x_0 x_0'\}$.

Bepaal een $n \times r$*-matrixwaardige functie* $\psi(t,s)$ *gedefinieerd voor* $t_0 \leq s \leq t$, *zodanig dat voor elke* t

(5.3.8) $\quad E\{|\hat{x}(t) - x(t)|^2\}$

minimaal is, waarbij de schatting $\hat{x}(t)$ *wordt gegeven door*

(5.3.9) $$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \psi(t,s)y(s)ds \ .$$

We zoeken dus een schatting $\hat{x}(t)$ van $x(t)$ die op een lineaire manier afhangt van de waarnemingsgegevens $y(s)$ $(t_0 \leq s \leq t)$ en die optimaal is, in de zin dat (5.3.8) wordt geminimaliseerd. We maken gebruik van het volgende hulpresultaat.

(5.3.10) LEMMA. *Zij* M *een lineaire ruimte van stochastische vectoren met eindige covariantie. Zij* $\mathcal{L}$ *een lineaire deelruimte van* M *en* $x \in M$. *Opdat een stochastische vector* $y \in \mathcal{L}$ *de eigenschap heeft dat*

(5.3.11) $\quad E\{|x - y|^2\} \leq E\{|x - z|^2\}$

voor elke $z \in \mathcal{L}$ *is noodzakelijk en voldoende dat*

(5.3.12) $\quad E\{(x - y)'z\} = 0$

voor alle $z \in \mathcal{L}$. *De oplossing van* (5.3.12) *is eenduidig.*

BEWIJS. Een korte berekening geeft

(5.3.13) $\quad E\{|x - y - z|^2\} - E\{|x - y|^2\} = E\{|z|^2\} - 2E\{(x - y)'z\}$,

voor elke $y,z \in \mathcal{L}$ (in feite voor elk drietal x,y,z in M). Als voor zekere $y \in \mathcal{L}$ (5.3.12) geldt volgt hieruit dat

(5.3.14) $\quad E\{|x - y - z|^2\} - E\{|x - y|^2\} = E\{|z|^2\}$

voor elke $z \in \mathcal{L}$. Als $u \in \mathcal{L}$ willekeurig is, kunnen $z = u - y$ substitueren in (5.3.14). Dit levert

(5.3.15) $E\{|x - u|^2\} = E\{|x - y|^2\} + E\{|u - y|^2\}$

voor elke $u \in \mathcal{L}$. Hieruit volgt (5.3.11). Als omgekeerd (5.3.11) geldt, dan volgt uit (5.3.13) dat

(5.3.16) $E\{|z|^2\} \geq 2E\{(x - y)'z\}$

voor elke $z \in \mathcal{L}$. Zij $u \in \mathcal{L}$ willekeurig en substitueer $z = \lambda u$, met willekeurige reële λ in (5.3.16). Dan vindt men

$$\lambda^2 E\{|u|^2\} \geq 2\lambda E\{(x - y)'u\} .$$

Door λ van links en rechts tot nul te laten naderen ziet men dat $E\{(x - y)'u\} = 0$. Uit (5.3.15) volgt tenslotte de eenduidigheid van de vector y die voldoet aan (5.3.11) dus ook van de oplossing van (5.3.12). □

Als men $(x,y) := E\{x'y\}$ in M opvat als een inwendig product dan zegt bovenstaand lemma dat de projectie van x op $\mathcal{L}$ het punt in $\mathcal{L}$ is dat het dichtste bij x ligt. (De existentie van een y die voldoet aan (5.3.11) kan men onder de aanname dat $\mathcal{L}$ is volledig is, geven.) Zie [LA].

(5.3.17) STELLING. *Een stochastische vector* $\hat{x}(t)$ *van de gedaante* (5.3.9) *is optimaal dan en slechts dan als*

(5.3.18) $E\{\hat{x}(t)y'(\tau)\} = E\{x(t)y'(\tau)\}$

voor $t_0 < \tau < t$. *Er is niet meer dan één* $\hat{x}(t)$ *die deze eigenschap heeft.*

BEWIJS. Zij $\hat{x}(t)$ optimaal. Als we met E_{ij} de matrix aangeven gedefinieerd door

$$(E_{ij})_{k\ell} := \begin{cases} 1 & (k = i,\ \ell = j) , \\ 0 & (\text{anders}) , \end{cases}$$

en als we voor zekere $\tau < t$

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \delta(\tau - s) E_{ij} y(s) ds$$

definiëren, dan geldt op grond van lemma (5.3.10):

$$E\{(x(t) - \hat{x}(t))'\tilde{x}(t)\} = 0 ,$$

d.w.z.

$$E\{(x(t) - \hat{x}(t))_i y_j(\tau)\} = 0 .$$

Dit impliceert (5.3.18). Als we geen deltafunctie willen toelaten bij de keuze van $\Psi(t,s)$, dan moeten we in deze afleiding de deltafunctie benaderen door continue functies en daarbij een limietproces uitvoeren.

Veronderstel nu dat $\hat{x}$ aan (5.3.18) voldoet en zij

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \tilde{\Psi}(t,s)y(s)ds \;.$$

Als $a,b \in \mathbb{R}^n$, dan geldt

$$a'b = \mathrm{tr}(ab') \;.$$

Deze relatie geeft ons:

$$E\{(x(t) - \hat{x}(t))'\tilde{x}(t)\} = E\{\mathrm{tr}[(x(t) - \hat{x}(t))\tilde{x}'(t)]\} =$$

$$\mathrm{tr}[\int_{0}^{t} E\{(x(t) - \hat{x}(t))y'(s)\}\tilde{\Psi}'(t,s)ds] = 0 \;.$$

De eenduidigheidsuitspraak volgt uit lemma (5.3.10). □

We gebruiken de volgende notaties en relaties:

$$E\{x(t)x'(\tau)\} =: R_x(t,\tau) =: R(t,\tau)$$

$$\text{(5.3.19)}\quad E\{y(t)y'(\tau)\} =: R_y(t,\tau) = C(t)R(t,\tau)C(\tau) + \delta(t-\tau)I$$

$$E\{x(t)y'(\tau)\} =: R_{xy}(t,\tau) = R(t,\tau)C'(\tau) \;.$$

De voorwaarde (5.3.18) kunnen we dan schrijven als

$$\text{(5.3.20)}\quad \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)R_y(s,\tau)ds = R_{xy}(t,\tau) \quad (t_0 < \tau < t) \;.$$

Deze voorwaarde kunnen we uitschrijven m.b.v. (5.3.19).

(5.3.21) STELLING. *Een stochastische vector*

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)y(s)ds$$

is optimaal dan en slechts dan als

$$(5.3.22) \qquad \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)C(s)R(s,\tau)C'(\tau)ds + \Psi(t,\tau) = R(t,\tau)C'(\tau)$$

voor $t_0 < \tau < t$.

De integraalvergelijking (5.3.22) wordt genoemd de Wiener-Hopf-vergelijking.

Tot nu toe hebben we de optimale schatter proberen te vinden op een bepaald tijdstip t op grond van waarnemingen van y(s) voor $t_0 \leq s \leq t$. Het blijkt bij de oplossing van de Wiener-Hopf-vergelijking (5.3.22) handig te zijn de afhankelijkheid van $\hat{x}(t)$ t.a.v. t te onderzoeken. In het bijzonder kan men voor $\hat{x}(t)$ een differentiaalvergelijking afleiden. Daartoe hebben we de afgeleide $\partial\Psi/\partial t$ nodig. Deze wordt gegeven door het volgende lemma.

(5.3.23) LEMMA. *Als* $\Psi(t,s)$ *voldoet aan* (5.3.22) *(of* (5.3.20)*), dan geldt*

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,s) = A(t)\Psi(t,s) - \Psi(t,t)C(t)\Psi(t,s) \qquad (t_0 < s < t) .$$

BEWIJS. Differentieer de relatie (5.3.20) naar t en gebruik de relaties

$$R_y(t,\tau) = C(t)R_{xy}(t,\tau) \qquad (t_0 < \tau < t)$$

en (vergelijk (5.2.4))

$$\frac{\partial R_{xy}(t,\tau)}{\partial t} = A(t)R_{xy}(t,\tau) .$$

Dan volgt

$$\{\Psi(t,t)C(t) - A(t)\}R_{xy}(t,\tau) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,s)R_y(s,\tau)ds = 0 .$$

Als men nu (5.3.20) in de eerste term substitueert krijgt men

$$\int_{t_0}^{t} H(t,s)R_y(s,\tau)ds = 0$$

waar

$$H(t,s) := \{\Psi(t,t)C(t) - A(t)\}\Psi(t,s) + \frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,s) .$$

Als Ψ een oplossing is van (5.3.20) dan is dus ook $\Psi + H$ een oplossing van (5.3.20). Uit de eenduidigheid van de oplossing van (5.3.20) (zie stelling (5.3.17)) volgt dat $H(t,s) = 0$, $t_0 < s < t$. □

Met behulp van dit resultaat vinden we een differentiaalvergelijking voor $\hat{x}(t)$. Het blijkt dat we om $\hat{x}(t)$ te berekenen niet $\Psi(t,s)$ voor alle t en s nodig hebben maar alleen

(5.3.24) $K(t) := \Psi(t,t)$.

(5.3.25) STELLING. *De optimale schatter* $\hat{x}(t)$ *voldoet aan*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)y(t) - C(t)\hat{x}(t)),\ \hat{x}(t_0) = 0 .$$

Dit volgt onmiddellijk door differentiatie van (5.3.9) met gebruikmaking van lemma (5.3.23). We zien dat de optimale schatter wordt gevonden als een (tijdsafhankelijke) waarnemer van het type genoemd in § 3.4. We hebben probleem (5.3.5) opgelost als we K(t) kunnen bepalen. Het blijkt dat K(t) een eenvoudige interpretatie heeft:

(5.3.26) LEMMA. *Als* $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ *de foutvector is van de optimale schatter en*

$$P(t) := E\{e(t)e'(t)\}$$

dan is

$$K(t) = P(t)C'(t) .$$

BEWIJS. Zij

$$M(t) := R_{\hat{x}}(t,t) = E\{\hat{x}(t)\hat{x}'(t)\} ,$$

$$Q(t) := R_x(t,t) = E\{x(t)x'(t)\} = R(t,t) .$$

Uit

$$E\{\hat{x}(t)y'(s)\} = E\{x(t)y'(s)\} = R_{xy}(t,s) = R(t,s)C'(s)$$

volgt

(5.3.27) $$M(t) = E\{\hat{x}(t)\hat{x}'(t)\} = E\{\int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)y(s)\hat{x}'(t)ds\} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)C(s)R'(t,s)ds = \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)C(s)R(s,t)ds .$$

Anderzijds is op grond van (5.3.18):

$$P(t) = E\{e(t)e'(t)\} = E\{x(t)x'(t)\} - E\{\hat{x}(t)\hat{x}'(t)\} = Q(t) - M(t) =$$

$$= R(t,t) - \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)C(s)R(s,t)ds$$

en dus (op grond van de Wiener-Hopf-vergelijking):

$$P(t)C'(t) = R(t,t)C'(t) - \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)C(s)R(s,t)C'(t)ds =$$

$$= \Psi(t,t) = K(t) \ . \qquad \square$$

We kennen derhalve $K(t)$ zodra we $P(t)$ kunnen bepalen. Het blijkt dat $P(t)$ aan een Riccati-vergelijking voldoet.

(5.3.28) STELLING. *Er geldt*

$$\dot{P}(t) = V + AP + PA' - PC'CP, \ P(t_0) = Q_0 \ .$$

BEWIJS. Uit (5.3.27) volgt

$$M(t) = \Psi(t,t)C(t)R(t,t) + \int_{t_0}^{t} (A(t)\Psi(t,s) - \Psi(t,t)C(t)\Psi(t,s)C(s)R(s,t)ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)C(s)R(s,t)A'(t)ds = PC'CQ + AM - PC'CM + MA'$$

dus

$$\dot{M}(t) = AM + MA' + PC'CP$$

en, volgens stelling (5.2.2) (zie (5.2.8)):

$$\dot{Q}(t) = AQ + QA' + V \ .$$

Uit $P(t) = Q(t) - M(t)$ volgt nu het gestelde. $\square$

We hebben nu een methode om de optimale schatter te bepalen. We zullen het uiteindelijke resultaat formuleren:

(5.3.29) STELLING. *De oplossing* $\hat{x}(t)$ *van probleem* (5.3.5) *wordt bepaald door*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K(y - C\hat{x}) \ ,$$
$$\hat{x}(t_0) = 0 \ ,$$

waar

$$K(t) = P(t)C'(t)$$

en $P(t)$ *de oplossing is van de Riccati-vergelijking*

$$\dot{P}(t) = V + AP + PA' - PC'CP \ ,$$
$$P(t_0) = Q_0 \ .$$

Nu beschouwen we het originele probleem gegeven door het systeem (5.3.1). Aangezien hier de besturing u en de verwachtingswaarde x_0 nog als gegeven kunnen worden beschouwd naast de waarnemingen $y(t)$, zoekt men hier een optimale schatting van $x(t)$ van de gedaante

$$(5.3.30) \quad \hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)y(s)ds + x_0(t)$$

waarbij $x_0(t)$ op een lineaire manier afhangt van $\bar{x}_0$ en u. Daar $\bar{x}_0$ en $u(t)$ deterministisch is, is ook $x_0(t)$ deterministisch. De verzameling van alle stochastische vectoren $\hat{x}(t)$ van de gedaante (5.3.30) is lineair en lemma (5.3.10) is van toepassing. Voor de optimale $\hat{x}(t)$ geldt daarom

$$E\{(\hat{x}(t) - x(t))'x_0(t)\} = 0$$

voor elke functie $x_0(t)$ die lineair van $\bar{x}_0$ en $u(t)$ afhangt. Hieruit volgt

$$E\{\hat{x}(t)\} = E\{x(t)\} = \bar{x}(t) \ ,$$

d.w.z. de optimale schatter is zuiver. Als we in (5.3.30) de verwachtingswaarde berekenen, vinden we

$$x_0(t) = \bar{x}(t) - \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)\bar{y}(s)ds \ ,$$

waardoor $x_0(t)$ is bepaald. Nu volgt gemakkelijk dat als $\hat{x}(t)$ een optimale schatter is voor (5.3.1),

$$\hat{x}_1(t) := \hat{x}(t) - \bar{x}(t)$$

optimale schatter is in de zin van probleem (5.3.5). We kunnen deze schatter vinden uit stelling (5.3.29) en we vinden zo het volgende algemene resultaat:

(5.3.31) STELLING. *(Kalman-Bucy). Het stochastisch vectorproces* $\hat{x}(t)$ *van de vorm* (5.3.30) *waarvoor* $E\{|x(t) - \hat{x}(t)|^2\}$ *minimaal is, wordt gegeven door de differentiaalvergelijking*

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \\ &\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{aligned} \tag{5.3.32}$$

waar

$$K(t) := P(t)C'(t)$$

en waar $P(t)$ *oplossing is van*

$$\begin{aligned} &\dot{P}(t) = V + AP + PA' - PC'CP \ , \\ &P(t_0) = Q_0 \ . \end{aligned} \tag{5.3.33}$$

Verder wordt de covariantiematrix van de fout $e := x - \hat{x}$ *gegeven door*

$$E\{e(t)e'(t)\} = P(t) \ ,$$

en de minimale waarde van $E\{|x(t) - \hat{x}(t)|^2\}$ *door*

$$E\{|e(t)|^2\} = \operatorname{tr} P(t) \ .$$

De optimale (tijdsafhankelijke) waarnemer gegeven door (5.3.32) wordt wel Kalman-Bucy-filter genoemd. Merk op dat op grond van de theorie in hoofdstuk IV de Riccati-vergelijking (5.3.33) een oplossing heeft gedefinieerd voor elke $t \geq t_0$. Het schil is dat we deze Riccati-vergelijking voorwaarts oplossen en die uit hoofdstuk IV (nl. (4.2.4)) achterwaarts. $P(t)$ kan dus "on line" berekend worden, d.w.z. tegelijk met het proces.

We behandelen nu analoog aan het optimale regulateurprobleem ook een oneindig horizon probleem in het geval van optimaal filteren.
Het analogon voor "we bekijken een proces voor willekeurig lange tijd" is nu "het proces is lang geleden begonnen". We verwachten nu dat $P(t)$, de oplossing van (5.3.33) voor $t_0 \to -\infty$ nadert tot een tijdsonafhankelijke matrix. Net als in het oneindig horizon probleem bij de optimale regulateur zullen we dit probleem alleen bekijken in het tijdsinvariante geval met stationaire ruis v en w zodat ook de transformatie in § 5.3 tijdsinvariant is.
We hebben nu de volgende stelling:

(5.3.34) STELLING. *Zij* (A,V) *stabiliseerbaar en* (C,A) *detecteerbaar dan nadert de oplossing* P(t) *van* (5.3.33) *voor* $t_0 \to -\infty$ *en voor alle* $P(t_0) = Q_0 \geq 0$ *tot een eenduidig bepaalde positief semidefiniete matrix* P_1, *die oplossing is van de algebraische Riccati-vergelijking*

$$V + AP + PA' - PC'CP = 0\ . \tag{5.3.35}$$

Verder wordt de covariantiematrix van de fout e *gegeven door*

$$E\{e(t)e'(t)\} = P_1 \tag{5.3.36}$$

en de minimale waarde van $E\{|x(t) - \hat{x}(t)|^2\}$ *door*

$$E\{|e(t)|^2\} = \operatorname{tr} P_1\ . \tag{5.3.37}$$

BEWIJS. Het resultaat is direct in te zien door dualisering van stelling (4.3.15) en (4.3.20). We maken daarbij gebruik van

$$(A,V) \text{ stabiliseerbaar} \Leftrightarrow (V',A') \text{ detecteerbaar}$$
$$(C,A) \text{ detecteerbaar} \Leftrightarrow (A',C') \text{ stabiliseerbaar}\ .$$

Deze laatste eis geeft ons een voldoende voorwaarde voor de existentie van een oplossing van (5.3.35) (vgl. (4.3.5)). □

We kunnen bovendien nog opmerken dat

$$A_0 = A - P_1C'C$$

asymptotisch stabiel is. We zien verder dat de gevonden waarnemer tijdsinvariant is, hetgeen in de practijk een voordeel is. Een belangrijk voordeel in het tijdsinvariante geval is verder dat we Q_0 niet hoeven te kennen, in tegenstelling tot het tijdsafhankelijke geval (vgl. stelling (5.3.29)). In de praktijk is dit laatste erg belangrijk omdat in het algemeen geen informatie over x_0, in de vorm van Q_0, beschikbaar is.

5.4. *Het stochastisch optimaal regulateurprobleem*

We behandelen nu het zgn. <u>stochastisch optimaal regulateurprobleem</u> bij het systeem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\ . \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

$x(t_0) = x_0$, $\bar{x}_0 = E\{x_0\}$, $Q_0 = E\{x_0x_0'\}$, v is witte ruis met intensiteit V(t), x_0 en v zijn ongecorreleerd.

Het criterium dat we willen minimaliseren is

$$(5.4.2)\qquad \bar{J}(x_0,u,t_0,T) = E\{\int_{t_0}^{T} (|u|^2 + |y|^2)dt + x'(T)Mx(T)\}$$

met M symmetrisch en positief semidefiniet. We zullen ons beperken tot lineaire toestandsterugkoppelingen van de vorm

$$u(t) = -K(t)x(t) \qquad (t_0 \le t \le T)\ .$$

De oplossing van het stochastisch optimaal regulateur probleem wordt gegeven door

(5.4.3) STELLING. *Zij gegeven het systeem* (5.4.1) *met criterium* (5.4.2) *dan wordt de optimale lineaire toestandsterugkoppeling gegeven door*

$$(5.4.4)\qquad u(t) = -B'(t)K(t,T)x(t)$$

waarin $K(t,T)$ *de oplossing is van de Riccati-vergelijking*

$$(5.4.5)\qquad -\dot{K} = A'K + KA - KBB'K + C'C,\ K(T,T) = M\ .$$

Bovendien is de minimumwaarde van het criterium (5.4.2)

$$(5.4.6)\qquad \bar{J}(x_0,u,t_0,T) = \mathrm{Tr}[K(t_0,T)Q_0 + \int_{t_0}^{T} K(t,T)V(t)dt]\ .$$

OPMERKING. Als $V(t) = 0$ en x_0 deterministisch is, zijn we terug bij het normale regulateur probleem met als criteriumwaarde $\mathrm{tr}[K(t_0,T)Q_0] = x_0'K(t_0,T)x_0$.

Voor het bewijs hebben we twee andere resultaten nodig.

(5.4.7) LEMMA. *Zij gegeven het tijdsafhankelijke systeem*

$$(5.4.8)\qquad \begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + v(t),\ y(t) = C(t)x(t) \\ &x(t_0) = x_0,\ \bar{x}_0 = E\{x_0\},\ Q_0 = E\{x_0x_0'\}\ . \end{aligned}$$

$v(t)$ *is witte ruis met intensiteit* $V(t)$, x_0 *en* v *zijn ongecorreleerd, dan geldt:*

(5.4.9) $$E\{\int_{t_0}^{T} |y|^2 dt + x'(T)Mx(T)\} = tr[P(t_0,T)Q_0 + \int_{t_0}^{T} V(t)P(t,T)dt]$$

waarin P(t,T) *gedefinieerd is door*

(5.4.10) $$-\dot{P} = A'P + PA + C'C,\ P(T,T) = M\ .$$

BEWIJS. Zij $S_x(t)$ net als in (5.2.13) gedefinieerd door

$$S_x(t) = E\{x(t)x'(t)\}$$

dan geldt

$$E\{\int_{t_0}^{T} |y|^2 dt + x'(T)Mx(T)\} = tr[\int_{t_0}^{T} S_x(t)C'(t)C(t)dt + S_x(T)M]\ .$$

Met (5.2.14) en (5.4.10) vinden we (merk op dat hier B(t) = I)

$$\frac{d}{dt} S_xP = AS_xP - S_xPA + VP - S_xC'C$$

en dus

$$\frac{d}{dt} tr[S_xP] = tr[VP] - tr[S_xC'C]\ .$$

Nu geldt

$$tr[S_xP]\Big|_{t_0}^{T} = tr[\int_{t_0}^{T} VP\ dt] - tr[\int_{t_0}^{T} S_xC'C\ dt]$$

en ook

$$tr[S_xP]\Big|_{t_0}^{T} = S_x(T)P(T,T) - S_x(t_0)P(t_0,T) = S_x(T)M - Q_0P(t_0,T)$$

waaruit direct (5.4.9) volgt. □

We bekijken nu in (5.4.1) de terugkoppeling u = -Fx. Het systeem wordt dan

$$\dot{x} = [A - BF]x + v,\ y = Cx$$

en voor (5.4.2) vinden we

(5.4.12) $$E\{\int_{t_0}^{T} x'[C'C + F'B'BF]x\ dt + x'(T)Mx(T)\}\ .$$

Met lemma (5.4.7) zien we dat (5.4.12) de waarde (5.4.13) heeft, waar $P(t,T)$ gegeven wordt door

$$(5.4.14) \quad -\dot{P} = [A - BF]'P + P[A - BF] + C'C + F'B'BF, \; P(T,T) = M \; .$$

We zullen nu aantonen dat voor de oplossing P van (5.4.14) geldt

$$P(t,T) \geq K(t,T)$$

waarin $K(t,T)$ de oplossing van (5.4.5) is. Beschouw daarvoor in het bovenstaande het deterministische geval, d.w.z. $V = 0$ en $x(t_0) = \bar{x}_0$. De afleiding blijft nu geldig, d.w.z. de waarde van het criterium (5.4.2) met $u = -Fx$ is:

$$(5.4.15) \quad \bar{J}(\bar{x}_0,u,t_0,T) = \mathrm{tr}[P(t_0,T)Q_0] = \bar{x}_0'P(t_0,T)\bar{x}_0 \; .$$

Als we de optimale besturing $u(t) = -B'(t)K(t,T)x(t)$ nemen krijgen we als criteriumwaarde

$$\bar{J}(\bar{x}_0,u,t_0,T) = \bar{x}_0'K(t_0,T)\bar{x}_0$$

en dus geldt

$$P(t_0,T) \geq K(t_0,T) \; .$$

In feite geldt $P(t,T) \geq K(t,T)$ $(t_0 \leq t \leq T)$ omdat de keuze van t_0 arbitrair is evenals $\bar{x}_0$. We zien tevens dat als we F kiezen als $F = B'K$ de oplossing van (5.4.14) dan juist de oplossing van (5.4.5) is. Het enige wat we nog moeten aantonen voor de optimaliteit van (5.4.4) is

$$\mathrm{tr}[P(t_0,T)Q_0 + \int_{t_0}^{T} P(t,T)V(t)dt] \geq \mathrm{tr}[K(t_0,T)Q_0 + \int_{t_0}^{T} K(t,T)V(t)dt]$$

dit volgt direct uit

(5.4.16) LEMMA. *Zij* $P = P'$, $K = K'$, $Z = Z' \geq 0$ *en* $P \geq K$ *dan geldt* $\mathrm{tr}[PZ] \geq \mathrm{tr}[KZ]$.

BEWIJS. Zie appendix B. □

Hiermede is het stochastisch optimaal regulateur probleem opgelost. □

Merk op dat we in dit geval niet de equivalentie hebben van de "open loop" besturing en de "closed loop" besturing. Men kan nl. niet van te voren een besturing u berekenen die overeen komt met de terugkoppeling

$$u(t) = -B'(t)K(t,T)x(t) \; .$$

Verder gaan we er in het bovenstaande van uit dat x(t) te meten is, anders kunnen we zo'n toestandsterugkoppeling niet gebruiken.

5.5. *De Separatiestelling*

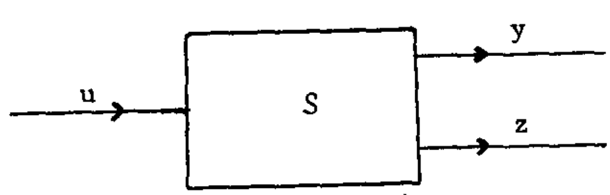
We zullen nu het geval behandelen waar de toestand niet gemeten kan worden en we alleen de beschikking hebben over de te meten variabele (de uitgang)

(5.5.1) $\quad y = Cx + w \; .$

Net als in § 5.3 nemen we zonder verlies van algemeenheid aan dat w witte ruis is met intensiteit I.
In het volgende zal ook ter sprake komen een zgn. te regelen variabele

$$z = Dx \; .$$

Dit is een extra uitgang van het systeem zodat we in de volgende situatie verkeren



Aangezien we nu de toestand x niet kunnen meten ligt het voor de hand de optimale schatting $\hat{x}$ te gebruiken voor de optimale besturing. In het volgende zal blijken dat m.b.v. $\hat{x}$, gevonden in (5.3.13), inderdaad de optimale besturing geconstrueerd kan worden.

We hebben nu het volgende

(5.5.2) PROBLEEM. *Gegeven het tijdsafhankelijke systeem*

$$\dot{x} = Ax + Bu + v,\ x(t_0) = x_0$$
$$(5.5.3)\qquad y = Cx + w$$
$$z = Dx$$

waar v *en* w *witte ruis zijn met intensiteit* V(t) *resp.* I *en* x_0, v, w *zijn paarsgewijs ongecorreleerd.* $E\{x_0\} = \bar{x}_0$, $Q_0 = E\{x_0x_0'\}$.
Gevraagd een besturing u *zodanig dat*

$$(5.5.4)\qquad \bar{J}(x_0,u,t_0,T) = E\{\int_{t_0}^{T}(|u|^2 + |z|^2)dt + x'(T)Mx(T)\}$$

geminimaliseerd wordt, waarin z *de te regelen variabele voorstelt.*

In het volgende is $\hat{x}$ de optimale schatting van x (de zgn. Kalman-filter schatting).
We gaan (5.5.4) herschrijven in de volgende vorm

$$(5.5.5)\qquad \bar{J}(x_0,u,t_0,T) = E\{\int_{t_0}^{T}(|u|^2 + (x-\hat{x}+\hat{x})'D'D(x-\hat{x}+\hat{x}))dt + x'(T)Mx(T)\} =$$

$$E\{\int_{t_0}^{T}(|u|^2 + (x-\hat{x})'D'D(x-\hat{x}) + 2\hat{x}'D'D(x-\hat{x}) + \hat{x}'D'D\hat{x})dt + x'(T)Mx(T)\} =$$

$$(5.5.6)\qquad E\{\int_{t_0}^{T}(|u|^2 + |\hat{z}|^2)dt + \hat{x}(T)M\hat{x}(T)\} + tr[\int_{t_0}^{T}P(t)D'(t)D(t)dt + P(T)M]\ .$$

Deze laatste stap volgt uit stelling (5.3.17) en stelling (5.3.31). Verder is $\hat{z} = D\hat{x}$. Echter, P is de oplossing van de Riccati-vergelijking (5.3.33) en wordt als zodanig niet beinvloed door de keuze van u. De laatste term van (5.5.6) is een niet negatief getal en dus niet van belang voor de minimalisatie. We zien tevens dat (5.5.6) afgezien van de laatste term een soortgelijk criterium is als er optrad bij het stochastisch optimaal regulateur probleem. We zijn er dus in geslaagd probleem (5.5.2) te separeren en krijgen een systeem

$$(5.5.7)\qquad \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + PC'(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(t_0) = \bar{x}_0 \\ \hat{z} &= D\hat{x}\ . \end{aligned}$$

We zijn nu terug in de situatie van het optimaal stochastisch regulateur probleem als we aantonen dat $y - C\hat{x}$, het zgn. vernieuwingsproces, een witte ruis proces is. We zullen in appendix C bewijzen dat het inderdaad witte ruis is met intensiteit I, dezelfde als van de meetruis w.
De oplossing van dit tweede probleem ((5.5.6), (5.5.7)) wordt gegeven door

(5.5.8) $$u(t) = -B'(t)K(t,T)\hat{x}(t)$$

waar $K(t,T)$ voldoet aan

(5.5.9) $$-\dot{K}(t,T) = A'(t)K(t,T) + K(t,T)A(t) - K(t,T)B(t)B'(t)K(t,T) + D'(t)D(t), \quad K(T,T) = M .$$

De waarde van het criterium is nu

(5.5.10) $$\bar{J}(x_0,u,t_0,T) = \bar{x}_0'K(t_0,T)\bar{x}_0 + \mathrm{tr}[\int_{t_0}^{T} K(t,T)P(t)C'(t)C(t)P(t)dt] + \mathrm{tr}[\int_{t_0}^{T} P(t)D'(t)D(t)dt + MP(T)] ;$$

Dit is direct duidelijk op grond van § 5.4.
We hebben nu probleem (5.5.2) in twee stappen opgelost. De stelling die zegt dat dit mogelijk is heet de separatiestelling. Voor een algemeen overzicht formuleren we deze stelling hieronder.

(5.5.11) STELLING. *Zij gegeven het systeem*

(5.5.12) $$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + v, \quad x(t_0) = x_0 \\ y &= Cx + w \\ z &= Dx . \end{aligned}$$

$E\{x_0\} = \bar{x}_0$, $E\{x_0x_0'\} = Q_0$, v *en* w *zijn witte ruis processen met intensiteit* V(t) *resp.* I. x_0, v, w *zijn paarsgewijs ongecorreleerd.*
De besturing u *die*

(5.5.13) $$\bar{J}(x_0,u,t_0,T) = E\{\int_{t_0}^{T}(|u|^2 + |z|^2)dt = x'(T)Mx(T)\}$$

minimaliseert wordt gegeven door

(5.5.14) $$u(t) = -B'(t)K(t,T)\hat{x}(t)$$

waarin K(t,T) *de oplossing is van de Riccati-vergelijking*

(5.5.15) $-\dot{K} = A'K + KA - KBB'K + D'D,\ K(T,T) = M$

en $\hat{x}$ *gegeven wordt door het Kalmanfilter*

(5.5.16) $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + PC'(y - C\hat{x}),\ \hat{x}(t_0) = \bar{x}_0$

waar P *de oplossing is van de Riccati-vergelijking*

(5.5.17) $\dot{P} = AP + PA' - PC'CP + V,\ P(t_0) = Q_0$.

Bovendien is de minimale waarde van het criterium

(5.5.18) $$\bar{J}(x_0,u,t_0,T) = \bar{x}_0'K(t_0,T)\bar{x}_0 + \mathrm{tr}[MP(T) + \int_{t_0}^{T}(K(t,T)P(t)C'(t)C(t)P(t) + P(t)D'(t)D(t))dt] .$$ □

In het bovenstaande hebben we steeds van te voren aangenomen dat de besturing lineair (in x of $\hat{x}$) zou zijn. Men kan bewijzen dat in het geval x_0 Gaussisch is en v en w Gaussische witte ruis processen zijn dit ook inderdaad de optimale besturing is (zonder a priori lineariteit te eisen).

HOOFDSTUK VI. REALISATIETHEORIE

6.1. *Inleiding*

Het i/u-gedrag van een continu systeem kunnen we uitdrukken op verschillende manieren. We kunnen gebruik maken van de impuls-responsie-matrix $K(t)$, van de overdrachtsmatrix $\hat{K}(s)$ of ook van de Markovparameters gedefinieerd door

(6.1.1) $$M_k := K^{(k-1)}(0) \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

aangenomen dat K oneindig vaak differentieerbaar is in $t = 0$. Als $K(t)$ de impuls-responsie-matrix is van een systeem met toestandsvergelijkingen (2.1.1) dan geldt

(6.1.2) $$K(t) = Ce^{tA}B\ ,$$

(6.1.3) $$\hat{K}(s) = C(sI - A)^{-1}B\ ,$$

(6.1.4) $$M_k = CA^{k-1}B\ .$$

In dat geval zijn $K(t)$ en $\hat{K}(s)$ eenduidig door M_k bepaald. Er geldt nl.

(6.1.5) $$K(t) = \sum_{k=0}^{\infty} M_{k+1}t^k/k! \qquad (t \geq 0)$$

en

(6.1.6) $$\hat{K}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k s^{-k}$$

voor Re s groot genoeg.

Voor een discreet systeem met toestandsvergelijkingen (1.7.12) worden de overdrachtsmatrix $\hat{K}(z)$ en de impuls-reponsie-matrix $K(t)$ gegeven door dezelfde formules als (6.1.3) (met z i.p.v. s) en (6.1.4) (met t i.p.v. k) (zie (1.7.21), (1.7.20)). Als we verder over het matrixtripel (C,A,B) praten, dan kunnen we dit interpreteren als continu of een discreet systeem. De relevante i/u-informatie wordt dan gegeven door (6.1.2), (6.1.3) of (6.1.4).

(6.1.7) DEFINITIE. *Het matrixtripel* (C,A,B) *heet een* *realisatie* *van de impuls-responsie-matrix* $K(t)$ *resp. van de overdrachtsmatrix* $\hat{K}(s)$ *resp. van de markovparameters* M_k *als* (6.1.2) *resp.* (6.1.3) *resp.* (6.1.4) *geldt. Als er een realisatie bestaat heten* $K(t)$, $\hat{K}(s)$ *en* M_k *realiseerbaar*.

Daar de geldigheid van (6.1.5) en (6.1.6) een noodzakelijke voorwaarde voor de realiseerbaarheid is, zullen we voortaan aannemen dat hieraan is voldaan. De fundamentele vragen die naar voren komen bij het realisatieprobleem zijn de existentie en de eenduidigheid van een realisatie. In § 6.2 zullen realiseerbaarheidsvoorwaarden geven in termen van $K(t)$, $\hat{K}(s)$ en M_k. In § 6.3 zullen we de eenduidigheid van realisaties onderzoeken.

Daarnaast is het van belang om in een concrete situatie zo'n realisatie te berekenen. In § 6.4 zullen we, uitgaande van de Markovparameters een algoritme voor de berekening van een realisatie aangeven. De reden dat wij de Markovparameters en niet de impuls-responsie-matrix of de overdrachtsfunctie gebruiken is, dat de M_k's numeriek gemakkelijker hanteerbaar zijn. In het discrete tijd geval vormen de Markovparameters de impuls-responsie-matrix, zodat dit uitgangspunt realistisch is. In het continue geval zal het meestal moeilijk zijn de getallen M_k uit (6.1.1) te bepalen. Men kan dan bijv. een bemonsterde impuls-responsie-matrix gebruiken, d.w.z.

$$N_k := K(k\theta) = Ce^{k\theta A}B = CF^kB$$

waar $\theta > 0$ en $F := e^{\theta A}$. Dan moet men dus uit de rij N_k (als Markovparameters) het tripel (C,F,B) bepalen en daarna A uit $e^{\theta A} = F$.

De bruikbaarheid van de realisatie-algoritme hangt uiteraard af van de i/u-gegevens die men ter beschikking heeft.

6.2. *De existentie van een realisatie*

We gaan eerst de realiseerbaarheid van een impuls-responsie-matrix onderzoeken. Zoals we in § 1.3 hebben gezien zijn de elementen van de matrixfunctie e^{tA} van de gedaante $\Sigma p_i(t)e^{\lambda_i t}$, waarin $p_i(t)$ polynomen zijn en λ_i (eventueel complexe) getallen. Als we een reële voorstelling van zo'n functie willen geven moeten we schrijven

$$\Sigma\{p_i(t)e^{\sigma_i t}\sin \omega_i t + q_i(t)e^{\sigma_i t}\cos \omega_i t\} \tag{6.2.1}$$

waarin p_i en q_i polynomen zijn en σ_i en ω_i *reële* getallen.

(6.2.2) DEFINITIE. *Een functie van de gedaante* (6.2.1) *heet een* ***Bohl-functie****. Een matrix waarvan de elementen Bohl-functie zijn heet een* ***Bohl-matrix****.*

Het is duidelijk dat de verzameling van Bohl-functies een lineaire ruimte vormt. We kunnen hieruit concluderen dat een realiseerbare impuls-respons-matrix $K(t) = Ce^{tA}B$ een Bohl-matrix is. Ook het omgekeerde geldt zoals we direct zullen zien.

We zullen verder een matrix invoeren met oneindig veel kolommen en oneindig veel rijen nl.:

$$(6.2.3) \qquad H := \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & \cdots \\ M_2 & M_3 & M_4 & & \\ M_3 & M_4 & & & \\ M_4 & & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} .$$

We noemen deze matrix de <u>Hankelmatrix</u> van de rij $M_1, M_2, \ldots$.

(6.2.4) OPMERKING. Men noemt gewoonlijk een (eindige) matrix $H = (h_{ij})$ waarin de elementen h_{ij} te schrijven zijn als a_{i+j} een <u>Hankelmatrix</u> (zie [GA], X, § 10). Alleen in het monovariabele geval is de matrix H, gedefinieerd door (6.2.3), een echte Hankelmatrix. In het multivariabele geval zou men beter van Hankel-blokmatrix kunnen spreken. □

We zullen ook nog zgn. <u>Hankelblokken</u> beschouwen:

$$(6.2.5) \qquad H_{k\ell} := \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_\ell \\ \vdots & & & \vdots \\ M_k & \cdots & \cdots & M_{k+\ell-1} \end{bmatrix} .$$

We zeggen dat de Hankelmatrix H rang n heeft als voor alle Hankelblokken geldt rang $H_{k\ell} \le n$ terwijl er ook een Hankelblok met rang n bestaat. Dus

$$(6.2.6) \qquad \text{rang } H := \max_{k,\ell} \text{ rang } H_{k\ell} .$$

Als dit maximum niet bestaat zeggen we rang $H = \infty$. Als de rij M_k realiseerbaar is, dan geldt (6.1.4). Als men dan de matrices

$$(6.2.7) \qquad Q_\ell := [B, AB, \ldots, A^{\ell-1}B]$$

en

$$(6.2.8) \qquad P_k := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

invoert, dan ziet men:

$$H_{k\ell} = P_k Q_\ell \; .$$

Daar rang $P_k \le n$, rang $Q_\ell \le n$, volgt onmiddellijk dat rang $H < \infty$ moet gelden, wil de Markovrij (M_k) realiseerbaar zijn. Ook hier geldt het omgekeerde, zoals we nu zullen laten zien.

(6.2.9) STELLING. *Laat* $K(t)$ *een impuls-respons̄ie-matrix,* $\hat{K}(s)$ *de corresponderende overdrachtsmatrix en* M_k *de rij Markovparameters van* $K(t)$ *zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1) $K(t)$ *(resp.* $\hat{K}(s)$ *of* M_k*) heeft een realisatie.*
2) $K(t)$ *is een Bohl-functie.*
3) $\hat{K}(s)$ *is een eigenlijke rationale matrix.*
4) M_k *voldoet aan een recurrente betrekking van de vorm*

$$M_{k+\ell} = A_1 M_{k+\ell-1} + \ldots + A_\ell M_k$$

   waar $A_1, \ldots, A_\ell$ *constante* $r \times r$*-matrices zijn.*

5) rang $H < \infty$.

BEWIJS. We tonen het volgende implicatieschema aan:

$$\begin{tikzcd} & (1) \arrow[r] \arrow[dl] & (2) \arrow[dd] \\ (5) \arrow[dr] & & \\ & (4) \arrow[uu] & (3) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(1) → (2) hebben we al gezien.

(2) → (3) Een Bohl-functie is een lineaire combinatie van termen van de vorm

$$f(t) = t^k e^{\lambda t}$$

(met λ eventueel complex). De Laplace-getransformeerde van zo'n functie is

$$\hat{f}(s) = k!(s - \lambda)^{-k-1}$$

hetgeen een eigenlijke rationale functie is voor $k \ge 0$. Daar een lineaire combinatievan zulke functies weer een eigenlijke rationale functie is volgt hieruit het gestelde.

3 → 4 Als $\hat{K}(s)$ eigenlijk rationaal is, dan is $\hat{K}(s)$ van de vorm

$$\hat{K}(s) = H(s)/p(s)$$

met

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$H(s) = H_1 s^{n-1} + \ldots + H_n \;.$$

Als we $\hat{K}(s)$ ontwikkelen voor $s \to \infty$ krijgen we

$$\hat{K}(s) = M_1 s^{-1} + M_2 s^{-2} + \ldots +$$

dus

$$(H_1 s^{n-1} + \ldots + H_n) = (s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n)(M_1 s^{-1} + \ldots) \;.$$

Als we links en rechts coëfficiënten van gelijke machten van s aan elkaar gelijk stellen vinden we

$$\begin{aligned} &M_1 = H_1 \\ &a_1 M_1 + M_2 = H_2 \\ &\vdots \\ &a_{n-1} M_1 + a_{n-2} M_2 + \ldots + M_n = H_n \end{aligned}$$

en

$$M_{k+n} + a_1 M_{k+n-1} + \ldots + a_n M_k = 0$$

voor $k = 1,2,\ldots$. Hier is dus $A_k = -a_k I$.

4 → 1 Laat de rij M_k voldoen aan

$$M_{k+\ell} = A_1 M_{k+\ell-1} + \ldots + A_\ell M_k \;.$$

Dan is

$$A := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & 0 & I \\ A_\ell & \ldots & \ldots & \ldots & A_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_\ell \end{bmatrix}, \; C = [I \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0] \;.$$

een realisatie. Met volledige inductie bewijst men namelijk gemakkelijk dat

$$A^k B = [M'_{k+1}, \ldots, M'_{k+\ell}]' \;.$$

1 → 5 hebben we al gezien.

5 → 4 Er bestaan getallen ℓ_0 en k_0 zo dat rang $H_{k_0\ell_0}$ = rang H =: n. Dan geldt natuurlijk ook

$$\text{rang } H_{k\ell} = n \quad (k \geq k_0,\ \ell \geq \ell_0)\ .$$

In het bijzonder

$$\text{(6.2.10)} \quad \text{rang } H_{k_0\ell} = \text{rang } H_{k_0+1,\ell} \quad (\ell \geq \ell_0)\ .$$

Zij N_ℓ de lineaire ruimte van $r \times r(k_0+1)$-matrices $M = [A_1,\ldots,A_{k_0+1}]$ die voldoen aan $MH_{k_0+1,\ell} = 0$. Dan geldt $N_{\ell+1} \subseteq N_\ell$. Voor $\ell \geq \ell_0$ is echter rang $H_{k_0+1,\ell}$ = rang H_{k_0+1,ℓ_0} en dus dim N_ℓ = dim N_{ℓ_0+1}. Hieruit volgt dat $N_\ell = N_{\ell_0}$ voor $\ell \geq \ell_0$. Uit (6.2.10) volgt dat er een matrix van de vorm $M_0 = [A_1,\ldots,A_{k_0},-I]$ in N_{ℓ_0} ligt. Dus $M_0 \in N_\ell$ voor alle $\ell \geq \ell_0$. Dit betekent

$$[A_1,A_2,\ldots,A_k,-I]H_{k_0+1,\ell} = 0 \quad (\ell \geq \ell_0)$$

waaruit 4 onmiddellijk volgt. □

6.3. *Eenduidigheid van realisaties*

We hebben reeds verschillende malen kunnen zien dat realisaties niet eenduidig zijn. Zo is in stelling (2.4.6) bewezen dat (C,A,B) en $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ beide realisaties van eenzelfde overdrachtsmatrix zijn als ze isomorf zijn. Daar we isomorfe systemen voor de meeste doeleinden kunnen identificeren zullen we verder tevreden zijn met een verzwakte eenduidigheidsstelling waarin alleen wordt aangetoond dat twee realisaties van een overdrachtsmatrix isomorf zijn. Dit resultaat geldt echter ook niet. We hebben nl. na het bewijs van stelling (2.4.10) gezien dat een niet-bestuurbaar systeem dezelfde overdrachtsmatrix heeft als zijn bestuurbaar deel. Een dergelijke uitspraak geldt ook voor niet-waarneembare realisaties.

We kunnen dit ook op een andere manier begrijpen. Bij de relatie tussen impuls-responsie en de realisatie wordt er steeds van uitgegaan dat de begintoestand gelijk aan nul is. Dat betekent dat alleen toestanden die vanuit de oorsprong bereikbaar zijn (dus elementen van W), van belang zijn voor het i/u-gedrag. Als het systeem niet volledig bereikbaar is, dan is de toestandsruimte kennelijk te groot voor het doel waarvoor zij is ingevoerd, nl. een geheugen om de relevante informatie uit het verleden te onthouden (zie §1.4). Ook als het systeem niet-waarneembaar is, is de toestandsruimte te groot. Dan bestaan er immers toestanden $x_0 \neq 0$ (nl. elementen van V), die bij een willekeurige ingang u dezelfde uitgang y leveren als de begintoestand 0. Zulke toestanden bevatten kennelijk informatie over de verleden ingang die *niet relevant* is voor de toekomst. Deze beschouwingen brengen ons er toe het volgende te definiëren.

(6.3.1) DEFINITIE. *Een realisatie* (C,A,B) *van een impuls-responsie-matrix heet* *minimaal als zij bestuurbaar en waarneembaar is.*

Bij een minimale realisatie spelen alle toestanden een rol (want zij zijn bereikbaar) en bevatten alle toestanden relevante gegevens uit het verleden (want ze zijn waarneembaar).

Voordat we tot de formulering van de belangrijke resultaten van deze paragraaf overgaan noemen we een resultaat uit de matrixtheorie:

(6.3.2) LEMMA.

i) *Als* P *een* $k \times n$*-matrix is en* rang P = n *dan is er een* $n \times k$*-matrix* P^+ *zo dat* $P^+P = I$ (P^+ *heet een linkerinverse van* P).

ii) *Als* Q *een* $n \times \ell$*-matrix is en* rang Q = n *dan is er een* $\ell \times n$*-matrix* Q^+ *zo dat* $QQ^+ = I$ (Q^+ *heet een rechterinverse van* Q).

BEWIJS. Zie appendix B. □

De matrices P^+ en Q^+ zijn niet eenduidig, maar voor de toepassingen in deze en de volgende paragraaf is het niet van belang welke linkerinverse we kiezen.

Na de beschouwingen die vooraf gingen aan definitie (6.3.1) ligt het volgende resultaat voor de hand.

(6.3.3) STELLING. *Zij* (C,A,B) *een realisatie van een impuls-responsie met dimensie (van de toestandsruimte)* n. *De volgende beweringen zijn equivalent*

i) (C,A,B) *is een minimale realisatie.*

ii) *Voor elke realisatie* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *met dimensie* $\bar{n}$ *geldt* $\bar{n} \geq n$.

Anders gezegd: een realisatie is minimaal dan en slechts dan als zij van minimale dimensie is.

BEWIJS. ii) $\Rightarrow$ i). Als (C,A,B) niet bestuurbaar is dan is er volgens stelling (2.4.10) een realisatie (nl. (C_1,A_{11},B_1)) met lagere dimensie. Evenzo als (C,A,B) niet waarneembaar is.

i) $\Rightarrow$ ii). We hebben in § 6.2 gezien dat voor elke realisatie met dimensie $\bar{n}$ geldt $\bar{n} \geq$ rang H, waar H de Hankelmatrix is. We zullen laten zien dat als (C,A,B) minimaal is, geldt: rang H = n. Zij

$$Q := [B,AB,\dots,A^{n-1}B]$$

en

$$P' := [C',(CA)',\dots,(CA^{n-1})'] \ .$$

Dan is

$$H_{nn} = PQ \ .$$

Daar rang P = rang Q = n volgt hieruit $P^+H_{nn}Q^+ = I$, zodat rang $H_{nn} \geq$ rang $P^+H_{nn}Q^+ = n$. Daar we al weten dat rang $H_{nn} \leq n$ volgt hieruit dat gestelde. □

We kunnen uit het voorafgaande nog twee conclusies trekken:

(6.3.4) GEVOLG.

i) *Als een impuls-responsie-matrix realiseerbaar is, dan heeft zij ook een minimale realisatie.*

ii) *De dimensie van een minimale realisatie is gelijk aan de rang van de Hankelmatrix.*

BEWIJS.

i) Kies een realisatie met minimale dimensie.

ii) Volgt uit het bewijs van (6.3.3). □

Nu keren we terug naar het eenduidigheidsprobleem. In verband met voorafgaande beschouwingen is het volgende resultaat zowat het beste dat we kunnen verwachten.

(6.3.5) STELLING. *Als* (C,A,B) *en* $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ *minimale realisaties zijn van dezelfde impuls-reponsie-matrix dan zijn ze isomorf.*

BEWIJS. We definiëren

$$(6.3.6)\qquad \begin{aligned} Q &:= [B,AB,\ldots,A^{n-1}B] \\ \bar{Q} &:= [\bar{B},\bar{A}\bar{B},\ldots,\bar{A}^{n-1}\bar{B}] \end{aligned}$$

$$(6.3.7)\qquad P := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},\ \bar{P} := \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

De matrix P heeft een linkerinverse P^+ en Q een rechterinverse Q^+. Omdat (C,A,B) en $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ dezelfde Markovrij (M_k) realiseren geldt

$$(6.3.8)\qquad PQ = H_{nn} = \bar{P}\bar{Q}$$

en

$$(6.3.9)\qquad PAQ = \tilde{H}_{nn} = \bar{P}\bar{A}\bar{Q}$$

waar $\tilde{H}$ de Hankelmatrix van de rij $(M_2,M_3,\ldots)$ is. Uit (6.3.8) volgt

$$(P^+\bar{P})(\bar{Q}Q^+) = I .$$

Als we dus

$$(6.3.10)\qquad S := P^+\bar{P}$$

definiëren, dan is S inverteerbaar en

$$(6.3.11)\qquad S^{-1} = \bar{Q}Q^+ .$$

Uit (6.3.9) volgt nu

$$(6.3.12)\qquad A = S\bar{A}S^{-1}$$

en als we (6.3.8) rechts met Q^+ vermenigvuldigen

$P = \bar{P}S^{-1}$ en dus $PS = \bar{P}$. Als we dit uitschrijven volgt gemakkelijk

(6.3.13) $CS = \bar{C}$.

Als we in (6.3.8) van links met P^+ vermenigvuldigen vinden we

$$S^{-1}Q = \bar{Q}$$

en dus

(6.3.14) $S^{-1}B = \bar{B}$.

Uit (6.3.12), (6.3.13) en (6.3.14) zien we dat (C,A,B) en $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ isomorf zijn. □

6.4. *Realisatiealgoritmen*

Zoals we in § 6.1 hebben vermeld zullen we uitgaande van de Markovparameters (M_k) een realisatie construeren. In de eerste plaats zullen we moeten weten dat er een realisatie bestaat. D.w.z. we zullen op een of andere manier moeten weten dat $n :=$ rang $H < \infty$. Voorlopig zullen we aannemen dat we weten dat dit het geval is en dat we n inderdaad kennen. In de tweede plaats ligt het op grond van § 6.3 voor de hand dat we naar een minimale realisatie zoeken, daar een niet-minimale realisatie een hoeveelheid voor het i/u-gedrag overbodige informatie bevat. De bekende realisatiealgoritmen berusten op de factorisatie van de Hankelmatrix:

(6.4.1) $H_{nn} = PQ$

waar

(6.4.2)
$$P' = [P_1', \ldots, P_n'] \, ,$$
$$Q = [Q_1, \ldots, Q_n]$$

en waar de P_i: $r \times n$ en Q_i: $n \times m$-matrices zijn.

(6.4.3) STELLING. *Als* rang $H = n$ *en* P *en* Q *zijn matrices van de gedaante* (6.4.2) *waarvoor* $H_{nn} = PQ$ *geldt, dan bestaat er een eenduidig bepaalde minimale realisatie* (C,A,B) *van* (M_k) *waarvoor geldt*

(6.4.4) $P_i = CA^{i-1}$, $Q_i = A^{i-1}B$.

BEWIJS. Daar rang H = n, bestaat er een minimale realisatie $(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ van (M_k) met dimensie n. Definieer $\bar{P}$ en $\bar{Q}$ door (6.3.6) en (6.3.7), zodat $\bar{P}\bar{Q} = H_{nn} = PQ$. Maar dan is

$$\bar{P}^+PQ\bar{Q}^+ = I$$

zodat, als we $S := Q\bar{Q}^+$ definiëren, geldt $\bar{P}^+P = S^{-1}$.
Verder

$$Q = S\bar{Q},\ P = \bar{P}S^{-1} .$$

Uitgeschreven wordt dit

$$Q_i = S\bar{A}^{i-1}\bar{B} = A^{i-1}B ,$$
$$P_i = \bar{C}\bar{A}^{i-1}S^{-1} = CA^{i-1} .$$

waar $A := S\bar{A}S^{-1}$, $B := S\bar{B}$, $C := \bar{C}S^{-1}$. Daar $CA^{i-1}B = \bar{C}\bar{A}^{i-1}\bar{B} = M_i$ en daar de dimensie van (C,A,B) gelijk aan n is, volgt dat (C,A,B) een minimale realisatie is. We moeten nog laten zien dat (C,A,B) eenduidig bepaald is door H en (6.4.4). Blijkbaar is

$$B = Q_1,\ C = P_1 . \tag{6.4.5}$$

Als we verder met $\tilde{H}$ de Hankelmatrix van de rij $(M_2,M_3,\ldots)$ aangeven en met $\tilde{H}_{nn}$ het overeenkomstige Hankelblok, dan geldt

$$PAQ = \tilde{H}_{nn}$$

zodat

$$A = P^+\tilde{H}_{nn}Q^+ . \tag{6.4.6}$$

Bedenk dat P^+ en Q^+ bestaan omdat (C,A,B) minimaal is. De formules (6.4.5) en (6.4.6) geven de realisatie (C,A,B). □

Deze stelling geeft ons het volgende realisatiealgoritme:

(6.4.7) ALGORITME.
STAP 1. *Factoriseer* H_{nn}:

$$H_{nn} = PQ$$

met P *en* Q *als in* (6.4.2).
STAP 2. *Bereken een linkerinverse* P^+ *van* P *en een rechterinverse* Q^+ *van* Q.
STAP 3. *Dan is* $C := P_1$, $A := P^+\tilde{H}_{nn}Q^+$, $B := Q_1$ *een minimale realisatie. Hierbij is*

$$\tilde{H}_{nn} := \begin{bmatrix} M_2 & M_3 & \cdots & M_{n+1} \\ M_3 & & & \\ & & & \\ M_{n+1} & & & M_{2n} \end{bmatrix} .$$

OPMERKING. Uit stelling (6.4.3) volgt ook dat, als rang $H = n$, geldt rang $H_{nn} = n$ en dat in de factorisatie (6.4.1) ook P en Q rang n hebben. □

Als we $H_{n,n+1}$ in plaats van H_{nn} factoriseren: $H_{n,n+1} = P\hat{Q}$ met

$$\hat{Q} = [Q_1,\ldots,Q_n,Q_{n+1}] = [Q,Q_{n+1}] = [Q_1,\tilde{Q}] ,$$

waar $\tilde{Q} = [Q_2,\ldots,Q_{n+1}]$ dan is $Q_{i+1} = AQ_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ zodat $\tilde{Q} = AQ$. Daar Q rechts inverteerbaar is volgt hieruit $A = \tilde{Q}Q^+$. We hoeven in dit geval geen links-inverse van P te weten.

In het zgn. Ho-algoritme wordt het bepalen van een inverse helemaal vermeden. Men gaat dan uit van een veegproces waar de matrix H_{nn} door rij- en kolomoperaties wordt schoongeveegd tot de matrix

$$E := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

waar I de $n \times n$-eenheidsmatrix is. Het schoonvegen kunnen we interpreteren als matrixvermenigvuldigingen, zodat we kunnen schrijven

(6.4.8) $\quad UH_{nn}V = E .$

Hierbij zijn U en V inverteerbare matrices van afmetingen $rn \times rn$ en $mn \times mn$. We voeren de volgende notatie in:

$$E_{k\times\ell} := \begin{bmatrix} I_\ell \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{als } \ell < k$$
$$:= I_k = I_\ell \quad \text{als } \ell = k$$
$$:= [I_k \quad 0] \quad \text{als } k < \ell .$$

dus

$$(E_{k\times\ell})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j . \end{cases}$$

Dan geldt in het bijzonder $E = E_{rn\times n}E_{n\times mn}$. Uit (6.4.8) volgt daarom $H_{nn} = PQ$ met $P := U^{-1}E_{rn\times n}$, $Q := E_{n\times mn}V^{-1}$. De matrices P en Q hebben de goede afmetingen en kunnen dus worden gebruikt in algoritme (6.4.6). Inverse matrices kunnen gemakkelijk worden bepaald:

$$P^+ = E_{n\times rn}U,\ Q^+ = VE_{mn\times n}$$

zodat

$$(6.4.9)\qquad A = E_{n\times rn}U\tilde{H}_{nn}VE_{mn\times n}$$

(d.w.z. A is de $n\times n$-matrix in de linkerbovenhoek van $U\tilde{H}_{nn}V$). Ook B en C kunnen we zonder matrix-inversie bepalen uit U, H en V. Er geldt nl.

$$B = Q_1 = QE_{mn\times m},\ C = P_1 = E_{r\times rn}P$$

en daar

$$Q = P^+H_{nn},\ P = H_{nn}Q^+$$

vinden we

$$(6.4.10)\qquad B = QE_{mn\times n} = E_{n\times rn}UH_{nn}E_{mn\times m}$$

$$(6.4.11)\qquad C = E_{r\times rn}P = E_{r\times rn}H_{nn}VE_{mn\times n}\ .$$

Bovenstaande algoritmen gaan uit van de veronderstelling dat rang H eindig en bekend is. Of dit realistisch is hangt af van de wijze waarop de Markovparameters zijn verkregen. Als de matrices $M_1, M_2, \ldots$ experimenteel worden gevonden, dan kent men natuurlijk altijd slechts een eindig aantal M_k's. Dan is het ook in principe onmogelijk na te gaan of rang $H < \infty$. In dat geval zal men gewoonlijk tevreden zijn met een zgn. <u>partiële realisatie</u>, d.w.z. een systeem (C,A,B) waarvoor geldt

$$CA^{k-1}B = M_k \quad (k = 1,\ldots,N)\ .$$

Als de Markovparameters bepaald worden uit de rationale overdrachtsmatrix volgens formule (6.1.6), dan weet men wel dat rang $H < \infty$ (volgens stelling (6.2.9)) maar het is niet bekend hoe groot rang H nu precies is. Men kan nu bovenstaande algoritmen gemakkelijk aanpassen, als men een bovengrens voor rang H heeft. Als men bijv. weet dat rang $H \le N$, dan volgt hier uit dat rang $H_{NN} \ge$ rang $H_{nn} = n$. Als men dan het Hankelblok H_{NN} schrijft als een product $H_{NN} = PQ$ waarin P een minimaal aantal kolommen en Q een minimaal aantal rijen bevat, dan is dit minimale aantal gelijk aan rang $H_{NN} = n$. Het komt er dus op neer dat men tegelijkertijd rang H_{NN} en een factorisatie van H_{NN} bepaalt. We zullen details verder achterwege laten.

APPENDIX A. ENKELE RESULTATEN UIT DE MATRIXTHEORIE

A.1 *Formules van Newton*

Beschouw het polynoom

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = (s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_n) .$$

De grootheden

$$s_k := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \qquad (k = 0,1,\dots)$$

heten de Newtonsommen van p. Er bestaat een eenvoudige relatie tussen deze grootheden en de coëfficiënten $a_1,\dots,a_n$ van p.

(A.1.1) STELLING. *Er gelden in bovenstaande notatie de volgende formules (zgn. formules van Newton)*

$$\begin{aligned}
&s_0 = n\\
&a_1 + s_1 = 0\\
&2a_2 + a_1 s_1 + s_2 = 0\\
&3a_3 + a_2 s_1 + a_1 s_2 + s_3 = 0\\
&\vdots\\
&(n-1)a_{n-1} + \dots + a_1 s_{n-2} + s_{n-1} = 0\\
&s_{n+k} + a_1 s_{n+k-1} + \dots + a_n s_k = 0 \qquad (k = 0,1,\dots) .
\end{aligned}$$

BEWIJS. Er geldt

$$\frac{sp'(s)}{p(s)} = s\frac{d}{ds}\log p(s) = s\{\frac{1}{s-\lambda_1} + \dots + \frac{1}{s-\lambda_n}\} =$$

$$= (1 - \frac{\lambda_1}{s})^{-1} + \dots + (1 - \frac{\lambda_n}{s})^{-1} .$$

Dus

$$ns^n + (n-1)a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} = (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) \sum_{k=0}^{\infty} s_k s^{-k} .$$

Als men hierin links en rechts coëfficiënten van gelijke machten aan elkaar gelijk stelt vindt men de formules van Newton. □

A.2 *Algoritmen van Leverrier, Faddeev, Souriau*

Het spoor van een matrix is de som van de diagonaalelementen

(A.2.1) $\quad \mathrm{tr}(A) := \Sigma a_{ii}$.

Als

(A.2.2) $\quad p(s) := \det(sI - A)$

het karakteristieke polynoom van A is, dan is $-\mathrm{tr}\,A$ de coëfficiënt van s^{n-1} in p. Hieruit volgt

(A.2.3) $$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

waarin $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn. De eigenwaarden van A^k zijn $\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^n$. Derhalve is

(A.2.4) $$\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = s_k \quad (k = 0,1,\ldots) \; .$$

Met behulp van deze formule kunnen we de Newtonsommen van het karakteristieke polynoom van A berekenen. De coëfficiënten van het karakteristieke polynoom kunnen we dan door middel van de formules van Newton bepalen. Dit is het algoritme van Leverrier.

Het is mogelijk een algoritme te geven waarmee men tegelijk de coëfficiënten van het karakteristieke polynoom van A en de matrix $(sI - A)^{-1}$ berekent. Er geldt

(A.2.5) $$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{p(s)} B(s)$$

waar p(s) gegeven is door (A.2.2) en B(s) van de vorm

$$B(s) = B_0 s^{n-1} + \ldots + B_{n-1} \; .$$

Hierbij zijn $B_0,\ldots,B_{n-1}$ $n \times n$-matrices.
Dat $(sI - A)^{-1}$ zo geschreven kan worden ziet men in als men $(sI - A)$ inverteert met de regel van Cramer. Als we (A.2.5) met $(sI - A)$ en met p(s) vermenigvuldigen krijgen we:

$$p(s)I = (sI - A)B(s)$$

dus

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n)I = (sI - A)(B_0 s^{n-1} + \ldots + B_{n-1}) \; .$$

We stellen de coëfficiënten van elke macht van s links en rechts aan elkaar gelijk:

$$(A.2.6)\qquad \begin{aligned} I &= B_0 \\ a_1 I &= B_1 - AB_0 \\ &\vdots \\ a_{n-1} I &= B_{n-1} - AB_{n-1} \\ a_n I &= -AB_{n-1} \end{aligned} \quad .$$

Hieruit volgt

$$(A.2.7)\qquad \begin{aligned} B_0 &= I \\ B_1 &= a_1 I + A \\ B_2 &= a_2 I + a_1 A + A^2 \\ &\vdots \\ B_{n-1} &= a_{n-1} I + a_{n-2} A + \ldots + a_1 A^{n-2} + A^{n-1} \ . \end{aligned}$$

De laatste vergelijking van (A.2.6) levert

$$a_n I + a_{n-1} A + \ldots + A^n = 0 \ .$$

Hiermee hebben we de stelling van Cayley-Hamilton bewezen!

We voeren in de Horner-polynomen van p(s):

$$\begin{aligned} p_0(s) &= 1 \\ p_1(s) &= s + a_1 \\ p_2(s) &= s^2 + a_1 s + a_2 \\ &\vdots \\ p_n(s) &= p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n \ . \end{aligned}$$

Men kan $p_1, \ldots, p_n$ successievelijk berekenen m.b.v. de betrekking

$$p_{k+1}(s) = sp_k(s) + a_k \qquad (k = 0, \ldots, n-1) \ .$$

We kunnen nu (A.2.7) als volgt formuleren:

$$B_k = p_k(A) \qquad (k = 0, \ldots, n-1) \ ,$$

zodat we de volgende formule voor $(sI - A)^{-1}$ hebben

$$(A.2.8) \qquad (sI - A)^{-1} = \frac{p_0(A)s^{n-1} + p_1(A)s^{n-2} + \ldots + p_{n-1}(A)}{p(s)} .$$

Hieruit volgt onmiddellijk het bewijs van (1.3.20), nl.

$$\hat{K}(s) = H(s)/p(s)$$

waar

$$H(s) = H_0 s^{n-1} + H_1 s^{n-2} + \ldots + H_{n-1} ,$$

en

$$H_k = Cp_k(A)B .$$

Verder kunnen we ook de coëfficiënten van het karakteristieke polynoom berekenen tezamen met de matrices B_k. Er geldt nl.

$$tr(B_k) = tr(a_k I + \ldots + a_1 A^{k-1} + A^k) = na_k + s_1 a_{k-1} + \ldots + s_k = (n-k)a_k ,$$

volgens de formules van Newton. Als we in de formules (A.2.6)

$$a_k I = B_k - AB_{k-1}$$

het spoor nemen, vinden we

$$na_k = (n-k)a_k - tr(AB_{k-1})$$

en dus

$$a_k = -\frac{1}{k} tr(AB_{k-1}) .$$

Samengevoegd vinden we zo het algoritme van Faddeev-Souriau:

$$\begin{array}{ll}
 & B_0 = I , \\
a_1 = -tr(AB_0) , & B_1 = a_1 I + AB_0 , \\
a_2 = -\frac{1}{2} tr(AB_1) , & B_2 = a_2 I + AB_1 , \\
\vdots & \vdots \\
a_{n-1} = -\frac{1}{n-1} tr(AB_{n-2}) , & B_{n-1} = a_{n-1} I + AB_{n-2} , \\
a_n = -\frac{1}{n} tr(AB_{n-1}) , & [0 = a_n I + AB_{n-1}] .
\end{array}$$

(De laatste berekening kan men eventueel ter controle uitvoeren.)

APPENDIX B.

B.1. *De norm van een matrix*

De norm of lengte van een vector $x \in \mathbb{R}^n$, notatie $|x|$, wordt gedefinieerd als

$$(B.1.1) \qquad |x| := [\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2]^{\frac{1}{2}} .$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$|x|^2 = x'x .$$

De norm van een $r \times m$ matrix A, notatie $\|A\|$, wordt gedefinieerd als

$$(B.1.2) \qquad \|A\| := \max_{|x|=1} |Ax| .$$

In de volgende eigenschappen zijn de afmetingen van de matrices zo dat de optredende operaties gedefinieerd zijn

i) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, (\alpha \in \mathbb{R})$,

ii) $|Ax| \leq \|A\| |x|$,

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$,

v) voor elk element a_{ij} van A geldt $|a_{ij}| \leq \|A\|$,

vi) $\|A\| \leq (m.r)^{\frac{1}{2}} \max |a_{ij}|$.

Voor een bewijs van deze eigenschappen verwijzen we naar [MT], [NM].

B.2. *Enkele eigenschappen van symmetrische matrices*

Een symmetrische matrix P heet positief semidefiniet als $x'Px \geq 0$ voor elke x en positief definiet als $x'Px > 0$ voor $x \neq 0$. Notatie: $P \geq 0$ resp. $P > 0$. De notaties $P \geq Q$, $P > Q$ zijn equivalent met resp. $P - Q \geq 0$, $P - Q > 0$. Als P symmetrisch is, dan bestaat er een orthogonale matrix U en een (reële) diagonaalmatrix

$$(B.2.1) \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

zodat $P = U'\Lambda U = U^{-1}\Lambda U$ (zie WISK. 30, Hoofdstuk 1).

We geven een bewijs van stelling (3.1.6) die we voor het gemak even herhalen.

STELLING. *Zij* P *een symmetrische matrix met eigenwaarden* $\lambda_1,..,\lambda_n$

1) *De volgende uitspraken zijn equivalent:*
   a) $P \geq 0$,
   b) $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1,\dots,n)$,
   c) *er is een matrix* D *zo dat* $P = D'D$.
2) *De volgende uitspraken zijn equivalent:*
   a) $P > 0$,
   b) $\lambda_i > 0$ $(i = 1,\dots,n)$,
   c) *er is een niet singuliere matrix* D *zo dat* $P = D'D$.

BEWIJS.
1) <u>a ⇒ b</u>: Als $Pc_i = \lambda c_i$ met $|c_i| = 1$, dan is $\lambda = \lambda c_i'c_i = c_i'Pc_i \geq 0$.
   <u>b ⇒ c</u>: Zij U orthogonaal en $P = U'\Lambda U$, waar Λ gegeven wordt door (B.2.1).
   Als $\lambda_i \geq 0$ voor $i = 1,\dots,n$, kunnen we

$$M := \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

   definiëren. Dan is $M^2 = \Lambda$ en als dus $D := MU$, dan is $P = D'D$.
   <u>c ⇒ a</u>: $x'Px = |Dx|^2 \geq 0$ voor elke x.
2) Gaan analoog. □

(B.2.2) Als P symmetrisch is dan geldt

$$\max_{|x|=1} |x'Px| = \|P\| = \max_i (|\lambda_i|) \ .$$

Dit kunnen we inzien door P te diagonaliseren. □

(B.2.3) Als P positief semidefiniet is dan geldt dus

$$\max_{|x|=1} x'Px = \|P\| = \max_i (\lambda_i) \ . \qquad \square$$

(B.2.4) Voor het bewijs van stelling (4.2.11) kunnen we de volgende eigenschap gebruiken.
Zij $P(t)$ positief semidefiniet voor $t \geq t_0$ en $x'P(t)x \leq \mu$ voor $t \geq t_0$ en $|x| = 1$, waarbij μ een vast getal is, dan geldt

$$\|P(t)\| \leq \mu \qquad \text{voor } t \geq t_0 \ .$$

We merken verder nog op dat voor L, genoemd in stelling (4.2.11), geldt

$$L \leq \bar{L}|x_0|^2$$

voor een zekere $\bar{L}$ die onafhankelijk van x_0 is.

(B.2.5) Zij $P(t) = P'(t)$, $\|P(t)\| \leq \mu$ $(t \geq t_0)$ en $P(t_1) \geq P(t_2)$ voor $t_1 \geq t_2 \geq t_0$. Dan convergeert $P(t)$ voor $t \to \infty$.

BEWIJS. Als e_i de i^e basisvector voorstelt, dan is $e_i'P(t)e_i$ een begrensde functie van t. Hieruit volgt dat alle diagonaalelementen convergeren voor $t \to \infty$.
Uit de relatie

$$(e_i' + e_j')P(t)(e_i + e_j) = e_i'P(t)e_i + e_j'P(t)e_j + 2e_i'P(t)e_j$$

volgt dat ook het element van $P(t)$ met index (i,j) convergeert. We concluderen dan dat $P(t)$ convergeert voor $t \to \infty$. □

(B.2.6) LEMMA. *Als* P, Q *en* Z *symmetrische matrices zijn en* $P \geq Q$, $Z \geq 0$ *dan geldt* $\mathrm{tr}(PZ) \geq \mathrm{tr}(QZ)$.

BEWIJS. Er bestaat een matrix Y zo dat $Z = YY'$. Als we deze gebruiken vinden we

$$\mathrm{tr}((P - Q)Z) = \mathrm{tr}((P - Q)YY') = \mathrm{tr}(Y'(P - Q)Y) \geq 0$$

want

$$Y'(P - Q)Y \geq 0 \ .$$

□

(B.2.7) BEWIJS van LEMMA (6.3.2), dat we eerst herhalen:

LEMMA.

i) *Als* P *een* $k \times n$*-matrix is en* rang $P = n$ *dan is er een* $n \times k$*-matrix* P^+ *zo dat* $P^+P = I$ *(*P^+ *heet een* *<u>linkerinverse</u>* *van* P*).*

ii) *Als* Q *een* $n \times \ell$*-matrix is en* rang $Q = n$ *dan is er een* $\ell \times n$*-matrix* Q^+ *zo dat* $QQ^+ = I$ *(*Q^+ *heet een* *<u>rechterinverse</u>* *van* Q*).*

BEWIJS.

i) De $n \times n$-matrix $P'P$ is niet-singulier. Als immers $P'Px = 0$, dan is $|Px|^2 = x'P'Px = 0$ en dus $Px = 0$. Uit de voorwaarde rang $P = n$ volgt dat de kolommen van P onafhankelijk zijn zodat $x = 0$. Definieer nu

$$P^+ := (P'P)^{-1}P' \ .$$

Dan volgt onmiddellijk dat $P^+P = I$.

ii) Het bewijs hiervan gaat analoog. $\square$

APPENDIX C. HET VERNIEUWINGSPROCES

Beschouw het zgn. vernieuwingsproces

(C.1.1) $\quad y - C\hat{x}$

dat optrad in § 5.5. We zullen bewijzen dat het een witte ruis proces is met intensiteit gelijk aan die van de meetruis nl. I. Daartoe laten we zien dat het de afgeleide is van een proces met ongecorreleerde toenames. Daarvoor voeren we in de variabele u zó dat

$$\dot{u} = y - C\hat{x}, \; u(t_0) = 0 \; .$$

We zullen bewijzen dat u een proces met ongecorreleerde toenames is. Zij als gewoonlijk

$$e := x - \hat{x} \; .$$

De variabelen u en e voldoen aan

(C.1.2) $$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} .$$

Hierin is $K(t) := P(t)C'(t)$ en $P(t)$ is de oplossing van de Riccativergelijking in stelling (5.3.29). We definiëren $Q(t)$ als volgt

$$Q(t) := E\{\begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix}[u',e']\}$$

dan is $Q(t)$ de oplossing van de volgende vergelijking

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C' & A' - C'K' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 1 & -K' \end{bmatrix}$$

$$Q(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_0 \end{bmatrix}$$

waar Q_0 dezelfde betekenis heeft als in hoofdstuk V (zie (5.2.8)). De matrix Q partitioneren we op de volgende wijze

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

m.b.v. (C.1.3) vinden we voor Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} ($Q_{12} = Q_{21}'$) de volgende vergelijkingen

$$
\text{(C.1.4)} \quad
\begin{aligned}
Q_{11} &= CQ'_{12} + Q_{12}C' + I, & Q_{11}(t_0) &= 0 \\
Q_{12} &= CQ_{22} + Q_{12}[A - KC]' - K', & Q_{12}(T_0) &= 0 \\
Q_{22} &= [A - KC]Q_{22} + Q_{22}[A - KC]' + V + KK', & Q_{22}(t_0) &= Q_0 \; .
\end{aligned}
$$

M.b.v. stelling (5.3.31) zien we dat

$$CQ_{22} - K' = 0$$

waaruit volgt

$$Q_{12} = 0 \; .$$

Voor Q_{11} geldt dan

$$\text{(C.1.5)} \quad Q_{11} = (t - t_0)I \; .$$

Zij nu $R(t_1,t_2)$ de covariantiematrix van $[{u \atop e}]$ dan geldt (zie stelling (5.2.2))

$$
\text{(C.1.6)} \quad
\begin{aligned}
R(t_1,t_2) &= \Phi(t_1,t_2)Q(t_2), & (t_1 \geq t_2) \\
R(t_1,t_2) &= Q(t_1)\Phi'(t_2,t_1), & (t_2 \geq t_1) \; .
\end{aligned}
$$

Hierin voldoet Φ aan de vergelijking

$$\text{(C.1.7)} \quad \dot{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \Phi, \qquad \Phi(t_0,t_0) = I \; .$$

We bepalen nu de covariantiematrix van u.
Als we R partitioneren als

$$\text{(C.1.8)} \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

zien we dat R_{11} de covariantiematrix van u is.
Als we ook Φ partitioneren is het voldoende te weten wat Φ_{11} is omdat $Q_{12} = Q_{21} = 0$.
Het is direct in te zien dat moet gelden

$$\text{(C.1.9)} \quad \Phi_{11} = I$$

zodat met (C.1.6) geldt

$$\text{(C.1.10)} \quad R_{11}(t_1,t_2) = (\min(t_1,t_2) - t_0)I \; .$$

We merken bovendien op dat geldt $E\{e(t)\} = 0$ voor $t \geq t_0$ (zie bijv. (5.3.32)). Hieruit volgt dat $E\{u(t)\} = 0$ voor $t \geq t_0$. Het is nu verder eenvoudig in te zien dat u een proces met ongecorreleerde toenames is. Omdat $y - C\hat{x} = \dot{u}$ hebben we bewezen dat $y - C\hat{x}$ witte ruis is met intensiteit I. $\square$

Literatuurlijst

[A-M] ANDERSON, B.D.O., MOORE, J.B., Linear optimal control (DPQ-71-AND).

[AR] ARNOLD, L., Stochastische Differentialgleichungen (CWX-73-ARN).

[AS] ASTRÖM, K.J., Introduction to stochastic control theory (DPT-70-AST).

[BE] BELLMAN, R., Introduction to matrix analysis (CDX-60-BEL).

[BR] BROCKETT, R.W., Finite dimensional linear systems (CND-70-BRO).

[CH] CHEN, C.T., Introduction to linear system theory (DPG-70-CHE).

[C-L] CODDINGTON, E.A., LEVINSON, N., Theory of ordinary differential equations (CND-55-COD).

[DO] DOETSCH, G., Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (CQQ-58-DOE).

[GA] GANTMACHER, F.R., Matrizenrechnung I, II (CDX-58-GAN, CDX-59-GAN).

[JH] JOHN, F., Partial differential equations (CNH-71-JOH).

[K-F-A] KALMAN, R.E., FALB, P.L., ARBIB, M.A., Topics in mathematical system theory (DPC-69-KAL).

[K-S] KWAKERNAAK, H., SIVAN, R., Linear optimal control systems (DPQ-72-KWA).

[L-M] LEE, E.B., MARKUS, L., Foundations of optimal control theory (DPQ-67-LEE).

[L-O] LEWIS, T.O., ODELL, P.L., Estimation in linear models (CXP-71-LEW).

[PA] PAPOULIS, A., Probability, random variables and stochastic processes (CWD-65-PAP).

[P-A] PADULO, L., ARBIB, M.A., System theory: A unified state-space approach to continuous and discrete systems (ED-7143-BSE).

[RO] ROSENBROCK, H.H., State-space and multivariable theory (DPS-70-ROS).

[WG] WONG, E., Stochastic processes in information and dynamical systems (DPT-71-WON).

[WH] WONHAM, W.M., Linear multivariable control: A geometric approach (DPS-74-WON).

[WI] WILLEMS, J.L., Stability theory of dynamical systems (CNG-70-WIL).

[WL] WOLOVICH, W.A., Linear multivariable systems (DPS-74-WOL).

[Z-D] ZADEH, L.A., DESOER, Ch.A., Linear system theory; the state-space approach (DPL-63-ZAD).

[ZE] ZEMANIAN, A.H., Distribution theory and transform analysis (CSF-65-ZEM).

Dictaten

[GDV] Gewone differentiaalvergelijkingen (2.235)

[MT] Matrixtheorie

[PDV] Partiële differentiaalvergelijkingen (2.252)

[OR] Optimalisering van regelsystemen (2.228)

[SP II] Stochastische processen II (2.229)

[LA] Lineaire Analyse I (2.238)

[NM] Numerieke Methoden (2.211)

Literatuuroverzicht

Onderwerpen verwant met de inhoud van hoofdstuk I kan men bijv. vinden in [P-A], [K-F-A], [BR], [CH], [Z-D]. [P-A], [K-F-A], [Z-D] bevatten fundamentele beschouwingen over de begrippen systeem en toestand. In [BR], [CH] worden tijdsafhankelijke systemen tamelijk uitgebreid behandeld. De inhoud van hoofdstuk II kan men min of meer vinden in [BR], [CH], [K-S], [P-A], [WH]. Hoofdstuk III wordt besproken in [CH]. In [K-F-A], hoofdstuk 10, vindt men een tamelijk abstracte behandeling van de realisatietheorie. Een behandeling die uitgaat van tijdsafhankelijke systemen vindt men bijv. in [BR]. Hoofdstuk IV, § 1,2 wordt besproken in [CH], [BR], en § 3,4 in [CH], [WH]. Voor hoofdstuk V verwijzen we naar [A-M], [BR]. Een volledig andere behandeling van het optimaliseringsprobleem wordt gegeven in [L-M], Ch. III. In [A-M], [K-S], [AS], vindt men een behandeling van stochastische systemen met verschillende afleidingen van de Kalman-Bucy filter. De afleiding die hier gegeven wordt, komt overeen met die van [L-O]. Een theoretische verdieping wordt gegeven in [AR], [WG]. Zeer veel informatie bevat ook een speciale uitgave van het tijdschrift IEEE Transactions on Automatic Control nl: vol. AC-16 dec. 1971.

Het boek [K-S] bevat het grootste gedeelte van dit dictaat (met uitzondering van hoofdstuk III). Het is bijzonder aan te bevelen bij de verdere bestudering. Ook het boek [A-M] is erg nuttig.
In [RO] en [WL] wordt een moderne versie van de frequentiedomeinmethoden behandeld en in [WH] een abstracte meetkundige behandeling van de toestandsruimtenmethoden.

Woordenlijst

Ned.	Eng.	blz.
algebraïsche Riccati-vergelijking	algebraic Riccati equation	94
asymptotisch stabiel	asymptotically stable	62
bemonstering	sampling	38
bereikbaar	reachable	40
bereikbare verzameling	reachable set	41
besturing	control	1
bestuurbaar	controllable	40,56
bestuurbaarheid	controllability	25
BIBO-stabiel	BIBO-stable (Bounded Input Bounded Output)	67
Bohlfunctie	Bohl function	125
Bohlmatrix	Bohl matrix	125
breuksplitsing	partial fraction decomposition	13
Brownse beweging	Brownian motion	101
cascadeschakeling	cascade connection, tandem connection	10
causaal	causal	2
Cayley-Hamilton		42
Choleski splitsing	Choleski decomposition	66
commuteren	commute	49
companionmatrix	companion matrix	21
concetenatie	concatenation	5
constant	constant	13
covariantiematrix	covariance matrix	98
defectief	defective	16
deltafunctie	delta function	6
detecteerbaar	detectable	78
diagonalisatie	diagonalisation	17
discrete tijd	discrete time	34
duale systeem	dual system	48
dualiteitsprincipe	duality principle	48
dynamische regulateur	dynamic regulator	78
dynamische terugkoppeling	dynamic feedback	71
dynamisch systeem	dynamic system	1

Ned.	Eng.	blz.
eigenlijke rationale matrix	proper rational matrix	19
evenwichtsbesturing	equilibrium control	30
evenwichtstoestand	equilibrium state	30
exponentieel begrensd	exponentially bounded	9,35
extern stabiel	externally stable	67
frequentiedomein	frequency domain	11
fundamentaaloplossing	fundamental solution	13
geheugenloos	memoryless	2
geadjungeerde vector	adjoint vector	63
Hankelblok	Hankel block	126
Hankelmatrix	Hankel matrix	126
Ho-algoritme	Ho-algorithm	135
impuls-functie	impulse function	7
impuls-responsie	impulse response	4
ingangsvariabele	imput variable	1
ingang-uitgang (i/u)-functie	input-output function i/o function	2
ingang-uitgang-stabiel	input-output stable	67
intensiteit	intensity	101
intermitterend systeem	sampled data system	34
intern stabiel	internally stable	67
invariant	invariant	44
inverse Laplacetransformatie	inverse Laplace transform	12
inversieformule	inversion formula	12
isomorf	isomorphic	49
Kalman-Bucy-filter	Kalman-Bucy filter	115
Laplace-getransformeerde	Laplace transform	9
lege matrix	empty matrix	53
Liapunovfunctie	Liapunov function	62
Liapunov-vergelijking	Liapunov equation	64
lineair regulateurprobleem	linear regulator problem	33
lineair systeem	linear system	2
linearisatie	linearization	29
linker inverse	left inverse	130
Markovparameters	Markov parameters	124
matrixnorm	matrix norm	12
minimale realisatie	minimal realization	130

Ned.	Eng.	blz.
monisch polynoom	monic polynomial	73
monovariabel	monovariable	
	single variable	1
monsterperiode	sampling period	38
multivariabel	multivariable	1
niet-anticiperend	nonanticipating	2
nilpotent	nilpotent	40
normaal verdeeld	normally distributed	100
nulbestuurbaar	null controllable	40
observeerbaar	observable	41
omkeerformule	inversion formule	12
onafhankelijk	independent	99
ongecorreleerd	uncorrelated	100
ongecorreleerde toenames	uncorrelated increments	100
onwaarneembare deelruimte	unobservable subspace	46
overdrachtsfunctie	transfer function	9
overdrachtsmatrix	transfer matrix	9,35
parallelschakeling	parallel connection	10
partiële realisatie	partial realization	136
poolplaatsingsstelling	pole placement theorem	
	pole assignment theorem	73
positief definiet	positive definite	62
positief semidefiniet	positive semidefinite	62
proces	process	1
proportionele regelaar	proportional controller	70
realisatie	realization	124
realisatieprobleem	realization problem	25
realiseerbaar	realizable	124
rechterinverse	right inverse	130
regelbaar	controllable	40
regelsysteem	control system	1
regelwet	control law	33
regulateur	regulator	33
regulateurprobleem	regulator problem	33
respons	response	1
Riccati-vergelijking	Riccati equation	87
Routh-Hurwitz		66

Ned.	Eng.	blz.
waarnemer	observer	70,76
Wiener proces	Wiener process	101
Wiener-Hopf-vergelijking	Wiener-Hopf-equation	111
witte ruis	white noise	101
z-getransformeerde	z-transform	35
zuivere vertrager	pure delay	6
zwak stationair	wide-sense stationary	99
zwarte doos	black box	25