TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

bij het college

LINEAIRE MULTIVARIABELE SYSTEMEN

Prof. Dr. Ir. M.L.J. Hautus

en

Drs. F. Eising

Voorjaarssemester 1978

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

Lineaire Multivariabele Systemen

Prof.dr.ir. M.L.J. Hautus en drs. F. Eising

Dictaatnr. 2.227 Prijs f 2,50

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij het college Lineaire Multivariabele Systemen

Voorjaarssemesterjaar 1978

Onderwerpen:

JdG, 21 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

bij het college

Lineaire Multivariabele Systemen

prof.dr.ir. M.L.J. Hautus en drs. F. Eising

Voorjaarssemester 1978

De nummers (x.y.z) waarbij z $\neq 0$ verwijzen naar het betreffende nummer in de syllabus "Lineaire Multivariabele Systemen".
De literatuurverwijzingen kunnen gevonden worden op blz. 148 van bovengenoemde syllabus.

1. *Opgaven bij hoofdstuk I*

1.1. Laat bij een monovariabel tijdsinvariant lineair systeem S, de ingang $u(t) = t$ $(t \geq 0)$ een uitgang $y(t) = t^2$ op leveren. Wat is de impuls-responsiefunctie? Wat is de overdrachtsfunctie? Kunt U ook toestandsvergelijkingen van dit systeem geven?

1.2. Zij $\alpha > 0$ en beschouw het systeem gegeven door de vergelijkingen

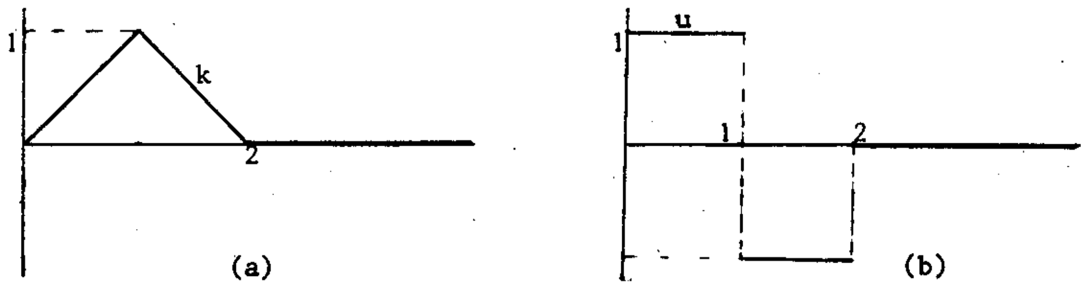
$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) \quad \text{als } t \leq \alpha \\ &= 0 \quad \text{als } t > \alpha \end{aligned}$$

(hier is dus $r = m$). Welke van de volgende eigenschappen heeft het systeem: lineariteit, tijdsinvariantie, causaliteit, stricte causaliteit, geheugenloosheid.

1.3. Gegeven zij het monovariabel systeem

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

met k gegeven door figuur (a).



(a) (b)

Als de ingang wordt gegeven door figuur (b), wat is dan de uitgang?

1.4. Bewijs dat

i) $\quad N(I + MN)^{-1} = (I + NM)^{-1}N ,$

ii) $\quad I - M(I + MN)^{-1}N = I + NM ,$

waar M en N matrices zijn van geschikte afmetingen.

1.5. Als van twee systemen S_1 en S_2 de toestandsvergelijkingen worden gegeven door

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \;,$$
$$y_i = C_i x_i, \quad (i = 1,2) \;,$$

bepaal dan de toestandsvergelijkingen die ontstaan door resp. serie-, parallel- en terugkoppelingschakeling van S_1 en S_2.

1.6. Wat is de oplossing van de matrix differentiaalvergelijking

$$\dot{X} = AX + XB, \; X(0) = C \;?$$

1.7. Laat $t \mapsto X(t)$ een differentieerbare $n \times n$-matrix-waardige functie zijn gedefinieerd voor $t \in \mathbb{R}$. Als

$$X(t + \tau) = X(t)X(\tau) \quad \text{en} \quad X(0) = I$$

bewijs dan dat er een $n \times n$-matrix A bestaat zo dat $X(t) = e^{tA}$.

1.8. Hoe zou u, strict formeel te werk gaande, gegeven een ingang-uitgang functie $S\colon \Omega \to \Gamma$ de impuls-responsie zoals gegeven in (1.1.8) vinden als we aannemen dat S ook gedefinieerd is voor de delta functie en $S(\delta) \in \Gamma$.
Aanwijzing:

$$u(t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \;.$$

1.9. Als A een $n \times n$-matrix is, hoe zou U dan de functies $\cos At$ en $\sin At$ definiëren? Kunt U ook differentiaalvergelijkingen aangeven waaraan deze functies voldoen? Wat is de Laplace getransformeerde van elk van deze functies? Geef, zonder de inverteerbaarheid van A te veronderstellen, de variatie van constantenformule voor het stelsel

$$\ddot{x} = -A^2 x(t) + Bu(t) \;.$$

1.10. Beschouw het niet-lineaire systeem

$$\ddot{y}(t) - (\dot{y}(t))^3 - y(t) = u(t) \;.$$

Schrijf het systeem in (niet-lineaire) toestandsvergelijkingen. Als $u = (\cos t)^3$, dan is $y = \sin t$ een oplossing. Lineariseer het systeem om deze oplossing. Merk op dat het gelineariseerde systeem niet tijdsinvariant is.

1.11. Beschouw het systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + u$$

waar r = m. Laat zien dat een invers systeem bestaat, dat door toestandsvergelijkingen kan worden beschreven en bepaal de toestandsvergelijkingen (twee systemen S_1 en S_2 heten elkaars inverse als hun overdrachtsfuncties elkaars (matrix) inverse zijn).

1.12. Bepaal de oplossing (als functie van de ingang u) van

$$\dot{x} = Ax + Bu \ ,$$
$$y = Cx, \ x(0) = 0 \ ,$$

waar

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \ B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

1.13. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Bepaal $(sI - A)^{-1}$ en met behulp daarvan e^{At}.

1.14. Bepaal e^{tA}, waar resp.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

1.15. Bepaal de oplossingen van

$$x(t + 1) = Ax(t) ,$$

waar

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} .$$

1.16. Het continue systeem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; y(t) = Cx(t)$$

met

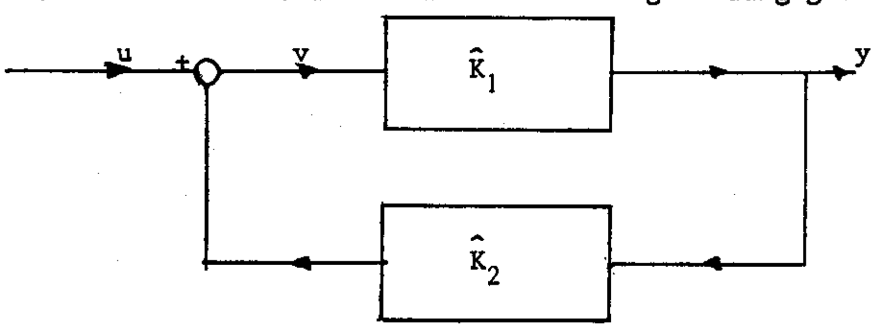
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = [1 \; , \; 1]$$

wordt bemonsterd met monsterperiode θ. Wat zijn de toestandsvergelijkingen van het corresponderende discrete systeem?

1.17. Zij

$$\hat{K}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}, \; \hat{K}_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

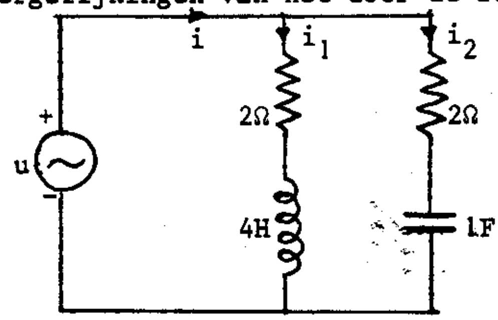
wat is de overdrachtsmatrix van de in de figuur aangegeven schakeling?



1.18. Bepaal e^{At}, waar

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

1.19. Geef toestandsvergelijkingen van het door de figuur aangegeven schakeling.



Bepaal $(sI - A)^{-1}$ en $\hat{K}(s)$ (vat u op als ingang en i als uitgang). Wat merkt U hierbij op?

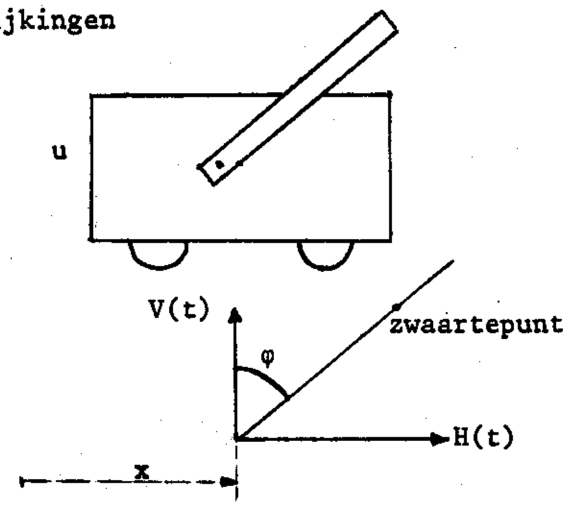
1.20. (Omgekeerde slinger) (zie [K-S (1.2.2) en volgende]).
Laat zien dat het systeem bestaande uit een omgekeerde slinger op een wagentje voldoet aan het volgende stelsel vergelijkingen

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + L \sin \varphi) = H$$

$$m \frac{d^2\varphi}{dt^2}(L \cos \varphi) = V - mg$$

$$J \frac{d^2}{dt^2} = LV \sin \varphi - LH \cos \varphi$$

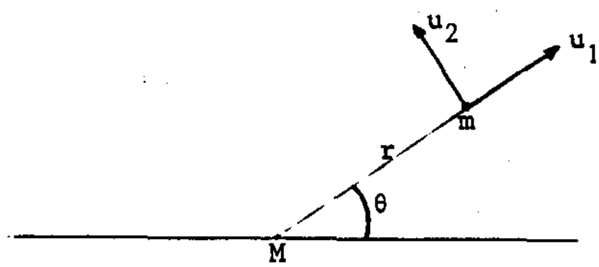
$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = u - H - F \frac{ds}{dt}$$



waar m de massa van de slinger is, L de afstand van het zwaartepunt van de slinger tot het ophangpunt, M de massa van het wagentje, J het traagheidsmoment van de slinger t.o.v. het ophangpunt, φ de hoek die de slinger maakt met de naar boven gerichte normaal, V(t) en H(t) de verticale resp. horizontale reactiekracht uitgeoefend door het wagentje op de slinger, F de wrijvingscoëfficiënt die het wagentje ondervindt in zijn beweging en u(t) de kracht uitgeoefend op de wagen.
Schrijf deze vergelijkingen in toestandsvorm en lineariseer om $x = 0$, $\varphi = 0$ (daar de x lineair in de vergelijkingen voorkomt hoeven we t.a.v. x feitelijk niet te lineariseren).

1.21. (Satellietprobleem) (zie[BR (1.2)]).

Een satelliet met massa m beweegt onder invloed van het veld van een vaste puntmassa M. Bovendien heeft de satelliet de mogelijkheid door middel van raketten te sturen in radiale richting (u_1) en in tangentiale richting (u_2) (t.o.v. de vaste puntmassa).



Laat zien dat voldaan wordt aan de volgende bewegingsvergelijkingen

$$\ddot{r} = r\theta^2 - kr^{-2} + u_1$$
$$\ddot{\theta} = 2r^{-1}\dot{\theta}\dot{r} + r^{-1}u_2 .$$

Als $u_1 = u_2 = 0$ dan is

$$r(t) = \rho = \text{const}, \ \theta(t) = \omega t \qquad (\omega \text{ const})$$

met $\rho^3\omega^2 = K$ een oplossing. Lineariseer om deze vergelijkingen en schrijf de vergelijking in toestandsvorm. Bepaal, als A de coëfficiëntenmatrix is, e^{tA} en geef de oplossing van het gelineariseerde systeem voor gegeven u_1 en u_2.

1.22. In een meer leven twee vissoorten waarvan de eerste soort, prooi genaamd, leeft van planten (in overvloed aanwezig) terwijl de tweede soort, roofdier genaamd, leeft van de prooi. In het meer wordt gevist op het roofdier. Geef het aantal prooidieren aan met x het aantal roofdieren met y en het aantal roofdieren dat per tijdseenheid wordt gevist met u. De relatieve groei $\dot{x}/x$ van de prooi zou zonder roofdieren een positieve constante a zijn. Het effect van de roofdieren zullen we aangeven door de vergelijking

$$\dot{x}/x = a - by$$

waar b een positieve constante is.

De roofdieren zouden zonder aanwezigheid van prooi een negatieve constante relatieve groei hebben, omdat ze niets te eten zouden hebben. De aanwezigheid van prooi laat de relatieve groei echter toenemen volgens de vergelijking

$$\dot{y}/y = -c + dx .$$

Als we nu ook nog het effect van de visserij in rekening brengen vinden we

$$\dot{y}/y = -c + dx - u .$$

Schrijf de toestandsvergelijkingen van het systeem op. Laat zien dat er bij elke u een eenduidig bepaald evenwicht $x = \alpha$, $y = \beta$ bestaat met $\alpha, \beta > 0$. Ga na hoe dit evenwicht afhangt van u. Lineariseer het systeem om de evenwichtsstand die correspondeert met $u = 0$.

1.23. Zij gegeven het i/u systeem

$$y(t) = \int_0^t K(t - \tau)u(\tau)d\tau \ .$$

Zij $\theta > 0$. We veronderstellen $u(\tau)$ constant op de intervallen $[k\theta,(k+1)\theta)$ en we geven $u(\tau)$ hier aan met u_k.
De waarden $y(k\theta)$ geven we aan met y_k.
Schrijf het bemonsterde systeem in de vorm

$$y_k = \sum_{j=0}^{k-1} L_{k-j}u_j, \ k = 1,2,\ldots \qquad y_0 = 0$$

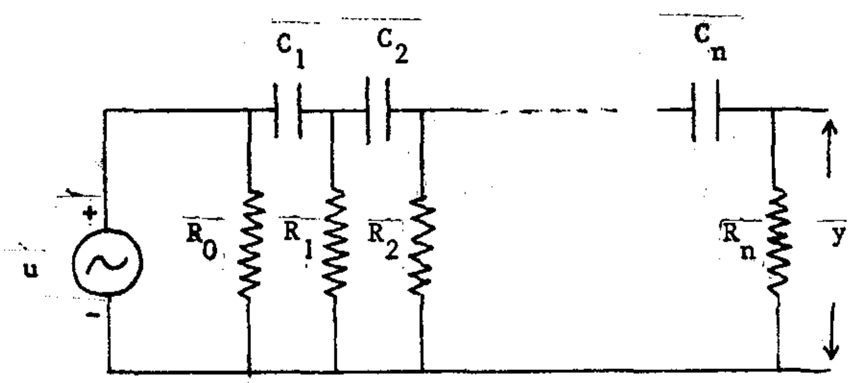
en bepaal L_{k-j}.

1.24. Zij gegeven $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = 0$, $y = Cx$.
Definieer $x_k := x(k\theta)$. Zij u_k gedefinieerd als in bovenstaand vraagstuk.
Schrijf het bemonsterde systeem in de vorm van een discreet systeem

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k, \ y_k = Hx_k \ .$$

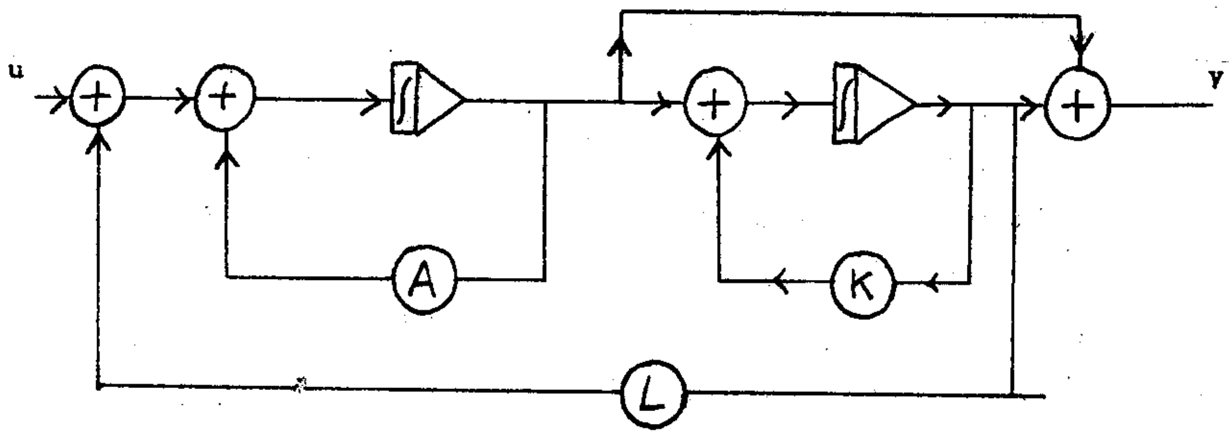
Bepaal F, G, H.

1.25. Schrijf toestandsvergelijkingen voor het electrisch circuit.



1.26. In een schema voor een analoog computer programma komen de volgende symbolen voor

Schrijf toestandsvergelijkingen voor:



1.27. Bereken de transitiematrix van het systeem

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k \; .$$

1.28. De Eulervergelijkingen (hoofdassen) voor de hoeksnelheden van een star lichaam zijn:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 + u_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + u_3$$

I_1, I_2, I_3 zijn de traagheidsmomenten.
Lineariseer dit systeem om

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

1.29. Bepaal de transitiematrix van

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x(t) \; .$$

1.30. Schrijf toestandsvergelijkingen voor

$$\ddot{x}(t) + \frac{4}{3}x^3(t) = \frac{1}{3}\sin 3t.$$

Ga na dat voor een geschikte beginvoorwaarde $x = \sin t$ een oplossing is en lineariseer rond deze oplossing

1.31. Onder welke voorwaarde bestaat er een constante oplossing x_0 voor een vaste u voor het systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu .$$

1.32. Gegeven

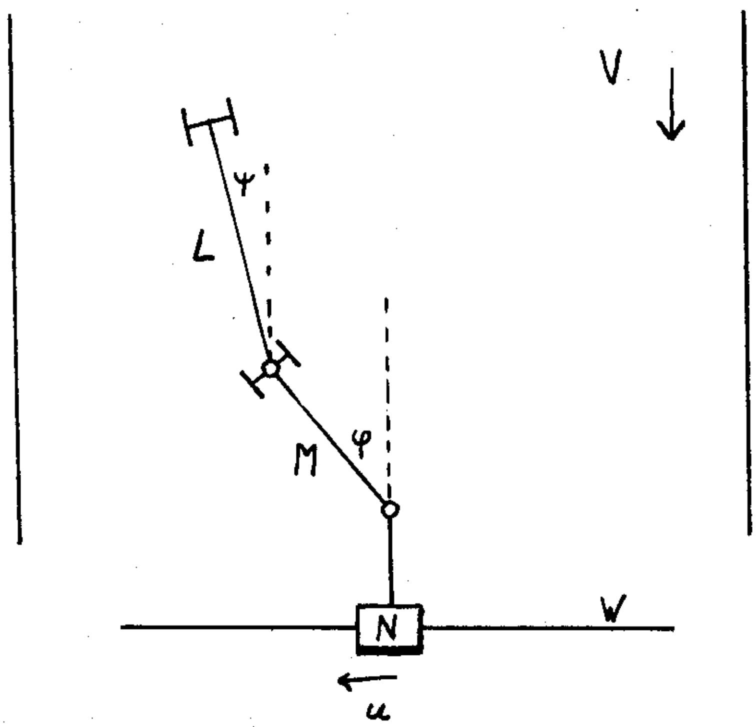
$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_1 x^{(1)}(t) + p_0 x(t) = u(t)$$

$$y(t) = q_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + q_1 x^{(1)}(t) + q_0 x(t)$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0 .$$

p_i, q_i zijn constanten voor $i=0,1,\ldots,n-1$.
Bepaal toestandsvergelijkingen en de overdrachtsfunctie.

1.33. Een achteruit rijdend wagentje willen we zo sturen dat hij recht achteruit rijdt. We maken daarvoor de volgende opstelling.
We plaatsen een vierwielig wagentje op een band die onder het wagentje doorloopt. De besturing willen we realiseren door de dissel te bewegen. Beschouw nu de volgende situatie



o stelt een scharnier voor

Het wagentje heeft lengte L. De dissel heeft lengte M. De band beweegt met snelheid V. Langs een geleider W kan N worden bewogen zodat daardoor de dissel kan worden bewogen. ψ en φ zijn de hoeken tussen de richting van de bandsnelheid en het wagentje resp. de dissel. De snelheid waarmee N beweegt is u. De constructie van het wagentje is zo dat er geen wrijving optreedt. Bovendien zal het wagentje niet slippen of glijden. Bewijs dat de vergelijkingen voor φ en ψ zijn

$$M \frac{d\varphi}{dt} = V \sin \varphi - u \cos \varphi$$

$$L \frac{d\psi}{dt} = V \sin \psi - u \cos \psi - \cos \psi \cos \varphi[V \sin \varphi - u \cos \varphi] -$$

$$+ \sin \varphi \sin \psi[V \sin \varphi - u \cos \varphi] .$$

Bepaal de gelineariseerde vergelijkingen om $\varphi = \psi = 0$.

2. *Opgaven bij hoofdstuk II*

2.1. Ga na of het systeem in 1.12 bestuurbaar en waarneembaar is.

2.2. Onderzoek op dezelfde manier het systeem beschouwd in 1.19, het gelineariseerde systeem in 1.20, 1.21 en 1.22.

2.3. Voor welke α is het paar

$$A := \begin{bmatrix} 2 & \alpha-3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2-\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

bestuurbaar? Wanneer bestaat er een vector $v \in \mathbb{R}^2$ zo dat (A,Bv) bestuurbaar is?

2.4. Zij A een diagonaalmatrix en $m = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Onder welke voorwaarde is (A,B) bestuurbaar? Hoe luidt de bestuurbaarheidsvoorwaarde als $m > 1$? Wat is bij een gegeven matrix A de minimale waarde van m waarvoor er een B bestaat zo dat (A,B) bestuurbaar is?

2.5. Laat zien dat het systeem (2.1.1) nulbestuurbaar is dan en slechts dan als het bestuurbaar is.

2.6. Beschouw het discreet systeem

$$(2.6.0) \qquad \begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \ . \end{aligned}$$

i) Bepaal de algemene oplossing van (2.6.0).

ii) Definieer de begrippen bestuurbaarheid, nulbestuurbaarheid, bereikbaarheid, waarneembaarheid voor (2.6.0).

iii) Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

a) (2.6.0) is bestuurbaar.

b) (2.6.0) is bereikbaar.

c) (A,B) is bestuurbaar, d.w.z. rang $[B,AB,\ldots,A^{n-1}B] = n$.

iii) Laat zien dat (2.6.0) waarneembaar is dan en slechts dan als (C,A) waarneembaar is.

iv) Laat zien dat (2.6.0) nulbestuurbaar is dan en slechts dan als

$$\text{rang } [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = \text{rang } [B, AB, \ldots, A^{n-1}B, A^n]$$

2.7. Definieer

$$Q_k := [B, AB, \ldots, A^{k-1}B] \quad (k=1,2,\ldots)$$

i) Als rang Q_k = rang Q_{k+1}, dan is rang Q_k = rang Q_ℓ voor $\ell \geq k$.

ii) Als (A,B) bestuurbaar is dan geldt rang $Q_k \geq k \quad (k=1,\ldots,n)$

iii) (A,B) is bestuurbaar dan en slechts dan als rang $Q_{n-\ell+1} = n$, waar $\ell :=$ rang B

iv) Als W_t het op het tijdstip t vanuit de oorsprong bereikbare gebied van (2.6.0) voorstelt, dan is

$$W_t = \mathcal{R}(Q_t)$$

v) Interpreteer de resultaten van (i), (ii), (iii) met behulp van (iv) voor het systeem (2.6.0).

2.8. Zij $n = 2$, $m = 1$, $B \neq 0$ en (A,B) onbestuurbaar. Laat zien dat B een eigenvector van A is.

2.9. Dualiseer de resultaten van § 2.6.

2.10. Hoe luidt de in (2.6.5) afgeleide waarneembaarheidsvoorwaarde als $r > 1$? Kunt U dit resultaat gebruiken in vraagstuk 2.1?

2.11. Als A een $n \times n$-matrix is dan definiëren we

$$\omega(A) := n - \min_{\lambda \in \sigma(A)} \text{rang } [A - \lambda I]$$

Laat zien dat $m \geq \omega(A)$ moet gelden, wil het paar (A,B) (met B een $n \times m$-matrix) bestuurbaar zijn. Kunt U dit resultaat gebruiken in 2.3 en 2.4?

2.12. Zij (A,b) bestuurbaar $(m=1)$. Wat wordt de gedaante van het systeem als men $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ als basis van de toestandsruimte kiest?

2.13. Het paar (A,B) is onbestuurbaar dan en slechts dan als er een matrix $C \neq 0$ bestaat zo dat $C(sI - A)^{-1}B = 0$ voor alle $s \notin \sigma(A)$.

2.14. Laat zien dat het paar

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$$

bestuurbaar is, dan en slechts dan als M niet-singulier en (M^2,N) bestuurbaar is.

2.15. Zij

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

met A_{11}: $p \times p$, B_1: $p \times m$, A_{22}:$(n-p) \times (n-p)$

i) Als (A,B) bestuurbaar is, dan is (A_{22},A_{21}) bestuurbaar

ii) Als rang $B_1 = p$ en (A_{22},A_{21}) bestuurbaar is, dan is (A,B) bestuurbaar.

2.18. Zij

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

(A_{11}: $p \times p$) en zij $\sigma(A_{11}) \cap \sigma(A_{22}) = \emptyset$. Dan is (A,B) bestuurbaar dan en slechts dan als (A_{22},B_2) bestuurbaar is en

$$\text{rang } [A_{11} - \lambda I, D(\lambda)] = p$$

voor alle $\lambda \in \sigma(A_{11})$, waar

$$D(\lambda) := B_1 + A_{12} (\lambda I - A_{22})^{-1} B_2$$

2.19. Beschouw twee systemen

$$S_i: \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad y_i = C_i x_i \qquad (i = 1,2)$$

met $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$.

i) Laat zien dat de parallelschakeling van S_1 en S_2 bestuurbaar is dan en slechts dan als S_1 en S_2 beide bestuurbaar zijn.

ii) Laat zien dat de serieschakeling van S_1 en S_2 bestuurbaar is dan en slechts dan als S_1 bestuurbaar is en

$$\text{rang } [A_2 - \lambda I,\ B_2\hat{K}_1(\lambda)] = n_2$$

voor elke $\lambda \in \sigma(A_2)$. Hierbij is

$$\hat{K}_1(\lambda) = C_1(\lambda I - A_1)^{-1}B_1$$

2.20. Het systeem (2.1.1) heet <u>uitgangsbestuurbaar</u> als voor elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_1 \in \mathbb{R}^n$ er een $t > 0$ en een $u \in \Omega$ bestaan zo dat $y(t,x_0,u) = y_1$. Laat zien dat (2.1.1) uitgangsbestuurbaar is dan en slechts dan als

$$\text{rang } [CB, CAB, \ldots, CA^{n-1}B] = r.$$

2.21. Zij A een $n \times n$-matrix, B een $n \times m$-matrix en p een polynoom.

i) Laat zien dat $p(A)$ inverteerbaar is dan en slechts dan als $p(\lambda) \neq 0$ voor elke $\lambda \notin \sigma(A)$.

ii) Laat zien dat

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) := \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\} .$$

(Het zgn. "spectral mapping" theorema.)

iii) Als (A,B) niet bestuurbaar is, dan is ook (p(A),B) niet bestuurbaar.

iv) Als p voldoet aan

a) $p'(z) \neq 0$ $(z \in \sigma(A))$,

b) $p(z) \neq p(w)$ $(z,w \in \sigma(A),\ z \neq w)$,

dan geldt (p(A),B) is bestuurbaar dan en slechts dan als (A,B) bestuurbaar is (<u>Aanwijzing:</u> Kies $\lambda \in \sigma(A)$, definieer

$$q(z) = (p(z) - p(\lambda))/(z - \lambda)$$

en laat zien dat $p(\lambda)$ (p(A),B)-bestuurbaar is dan en slechts dan als λ (A,B)-bestuurbaar is).

v) Bij het bemonsterde systeem met toestandsvergelijkingen gegeven in (1.2.4) veronderstellen we dat $\lambda - \mu \neq 2\pi ik/\theta$ voor elke gehele $k \neq 0$ en $\lambda, \mu \in \sigma(A)$. Laat zien dat dan het bemonsterde systeem bestuurbaar (waarneembaar) is dan en slechts dan als (A,B) bestuurbaar (C,A) waarneembaar)) is.

2.22. Een $n \times n$-matrix A heet cyclisch als er een vector b bestaat zo dat (A,b) bestuurbaar is. Bewijs:

i) A is cyclisch dan en slechts dan als A gelijksoortig is met een companiomatrix (d.w.z. er bestaat een niet singuliere matrix S zo dat $S^{-1}AS$ een companionmatrix is).

ii) Als A cyclisch is, dan is $\omega(A) = 1$ (zie 2.11).

iii) Als A cyclisch is dan is de eigenruimte bij elke eigenwaarde ééndimensionaal.

iv) Als A cyclisch is en $AB = BA$ voor zekere B, dan is er een polynoom p van de graad $\le n-1$ zo dat $B = P(A)$.

2.23. Aan een ronde tafel zitten de personen $P_1,\dots,P_n$ elk met een hoeveelheid geld $x_1,\dots,x_n$. Elke persoon P_k geeft αx_k aan zijn linkerbuurman P_{k-1}, en βx_k aan zijn rechterbuurman P_{k+1} (waar $P_0 = P_{n+1}$, $P_{-1} = P_n$) hierbij is $0 \le \alpha$, β en $\alpha + \beta \le 1$. Als deze handeling $n - 1$ keer wordt herhaald, kan dan P_1 met als enig gegeven de getallen α,β en de bedragen die hij in de $0,1,\dots,n-1^e$ stap heeft gehad, achterhalen welk bedrag elke persoon in het begin had? (N.B.: P_1 weet niet hoeveel hij van zijn linkerbuurman en hoeveel hij van zijn rechterbuurman heeft gekregen. Hij weet alleen hoeveel hij in het totaal heeft gekregen.)
(Aanwijzing: Gebruik 2.21 iv).

2.24. Laat zien dat een matrixpaar (A,B) bestuurbaar is dan en slechts dan als er géén matrix $X \neq 0$ bestaat met de eigenschappen

$$AX = XA\ ,$$
$$XB = 0\ .$$

2.25. Ga na of het gelineariseerde systeem van (1.33) regelbaar is. Is het systeem waarneembaar met

i) alleen φ

ii) alleen ψ

iii) φ en ψ.

2.26. Laten A en B vierkante matrices zijn en zij (A,B) een regelbaar paar. Dan geldt: B is niet singulier dan en slechts dan als er een matrix F bestaat zo dat $A + BF = 0$.

2.27. Zij gegeven het systeem

$$\dot{x} = Bu \qquad (S)$$

De oplossing wordt gegeven door

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} B(\tau)u(\tau)d\tau \ .$$

We noemen $x_1 \in R^n$ bereikbaar als er een $t_1 > t_0$ en een u bestaan zo dat

$$x_1 = x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} B(\tau)u(\tau)d\tau \ .$$

Het zal blijken dat we ons kunnen beperken tot continue besturingen. De afbeelding

$$u \mapsto \int_{t_0}^{t_1} B(\tau)u(\tau)d\tau$$

is een lineaire afbeelding (ga dit na) (notatie L).
$x_1 \in R^n$ is bereikbaar als $x_1 - x(t_0)$ in de beeldruimte van L ligt (ga dit na).
Bewijs het volgende lemma.

LEMMA. $x_1 \in R^n$ ligt in de beeldruimte van L dan en slechts dan als x_1 in de beeldruimte ligt van de (lineaire afbeelding) matrix

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} B(\tau)B'(\tau)d\tau \ . \qquad \square$$

2.28. Het systeem S heet bereikbaar of regelbaar als elke $x_1 \in R^n$ bereikbaar is. Bewijs dat S regelbaar is dan en slechts dan als $W(t_0,t_1) > 0$.
Zij nu S regelbaar, bewijs dan dat voor de besturing

$$u(t) = -B'(t)\Phi'(t_0,t)\eta$$

met

$$W(t_0,t_1)\eta = x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1$$

geldt

$$x(t_1) = x_1 \ .$$

2.29. Bekijk nu het systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(t_0) = x_0 .$$

Zij $\Phi(t,t_0)$ de transitiematrix van dit systeem.
Bewijs de volgende stelling.

STELLING. Voor alle $t_1 > t_0$ en $x_1 \in R^n$ bestaat er een besturing u zodanig dat $x(t_1) = x_1$ dan en slechts dan als $x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1$ in de beeldruimte ligt van

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_0,\tau)d\tau . \qquad \square$$

(Maak daarbij gebruik van de transformatie

$$z(t) = \Phi(t_0,t)x(t).)$$

2.30. De matrix $W(t_0,t_1)$ wordt de regelbaarheidsgramiaan genoemd. Bewijs dat $W(t_0,t_1)$ de volgende eigenschappen heeft:

i) $W(t_0,t_1) = W'(t_0,t_1)$,

ii) $W(t_0,t_1) \geq 0, \ t_1 \geq t_0$,

iii) $\frac{d}{dt} W(t,t_1) = A(t)W(t,t_1) + W(t,t_1)A'(t) - B(t)B'(t), \ W(t_1,t_1) = 0$

iv) $W(t_0,t_1) = W(t_0,t) + \Phi(t_0,t)W(t,t_1)\Phi'(t_0,t_1)$.

3. *Opgaven bij hoofdstuk III*

3.1. Als (C,A) waarneembaar is en $P \geq 0$ is een oplossing van

$$A'P + PA = -C'C$$

dan is $P > 0$.

3.2. Zij $Q = C'C$. Dan is (C,A) waarneembaar dan en slechts dan als (Q,A) waarneembaar is.

3.3. Zij A een stabiele matrix en laat $LP(A)$ gedefinieerd zijn als

$$LP(A) := \{K > 0 \mid KA + A'K < 0\} .$$

Bewijs dat

$$A + (N - M)K$$

stabiel is als $K \in LP(A)$, $M \geq 0$, $N = -N'$.
Zij nu A stabiel, $K \in LP(A)$, $M \geq 0$, $N = -N'$. Bewijs dat bij een systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

elke terugkoppeling

$$u = (N - M)B'Kx$$

een stabiel systeem geeft.

3.4. Laat de $n \times n$-matrices A, P, Q, waarbij $P > 0$ en $Q \geq 0$, voldoen aan de vergelijking $A'P + PA = -Q$. Laat zien dat

$$\Lambda(A) \leq \tfrac{1}{2}\Lambda(-Q)/\Lambda(P) .$$

3.5. Beschouw het discrete systeem

$$(*) \qquad x(t + 1) = Ax(t) .$$

i) Geef een definitie van asymptotische stabiliteit van zo'n systeem.

ii) Laat zien dat $(*)$ asymptotisch stabiel is dan en slechts dan als $r(A) < 1$.

iii) Laat zien dat van de volgende uitspraken over een paar (C,A) elk tweetal de derde impliceert

a) $r(A) < 1$.

b) (C,A) is waarneembaar.

c) De vergelijking $P - A'PA = C'C$ heeft een positief definiete oplossing P.

3.6. Beschouw het discrete regelsysteem

$$(**) \qquad x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t).$$

i) Definieer de begrippen interne en externe stabiliteit voor (**).

ii) Laat zien dat het systeem extern stabiel is dan en slechts dan als

$$\sum_{t=0}^{\infty} \| K(t) \| < \infty$$

waar $K(t)$ de impulsresponsiematrix is.

iii) Laat zien dat voor een minimale (C,A,B) interne en externe stabiliteit equivalent zijn.

3.7. We beschouwen het continue systeem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t) .$$

Als dit systeem extern stabiel is en als $u(t) \to 0$ $(t \to \infty)$, dan geldt ook $y(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.

3.8. i) Laat $x(t)$ en $y(t)$ voldoen aan

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ y(t) = Cx(t)$$

en laat (C,A) waarneembaar zijn. Als $y(t) \to 0$ $(t \to \infty)$, dan geldt ook $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.

Aanwijzing: Druk $\int_t^{t+1} |y(\tau)|^2 dt$ uit in $x(t)$.

ii) Laat een scalaire functie y voldoen aan een homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten, en laat $y(t) \to 0$ $(t \to \infty)$. Bewijs dat $\dot{y}(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.

3.9. Zij x de oplossing van de vergelijking

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = x_0$$

en zij $\Lambda(A) < 0$, zij S een $n \times n$ matrix. Laat zien dat

$$\int_0^{\infty} t^k x'(t) S x(t) dt = k! x_0' S_{k+1} x_0 ,$$

waar S_{k+1} gegeven wordt door de recurrente betrekking

$$A' S_{i+1} + S_{i+1} A = -S_i \quad (i = 0,\dots,k) ,$$

$$S_0 = S .$$

3.10. Zij A een symmetrische matrix. Bewijs dat $\Lambda(A) < 0$ dan en slechts dan als de coëfficiënten van het karakteristieke polynoom van A positief zijn.

3.11. Zij

$$M := \begin{bmatrix} P & q \\ q' & r \end{bmatrix}$$

waar P een symmetrische $n \times n$-matrix is, $q \in \mathbb{R}^n$ en $r \in \mathbb{R}$. Laat zien dat $M > 0$ dan en slechts dan als $r > 0$ en $P > qq'/r$.
Aanwijzing: schrijf de vector $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ als $x' = y',z$ en beschouw $x'Mx$ als een kwadratische vorm in z.

3.12. i) Laat de vierkante matrix L de volgende blokmatrixdecompositie hebben

$$L := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

waarbij A en D vierkante matrices zijn. Als A niet singulier is dan geldt

$$\det L = \det A \,.\, \det(D - CA^{-1}B) \,.$$

Aanwijzing: vermenigvuldig L van links met

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} .$$

ii) Laat M gegeven zijn als in 3.11. Bewijs dat $M >> 0$ dan en slechts dan als $P > 0$ en $r > q'P^{-1}q$.

3.13. i) Laat A_1 en A_2 $n \times n$-matrices zijn met $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$ en laat b een kolomvector en c een rijvector zijn. Dan is de oplossing X van de vergelijking

$$A_1X - XA_2 = bc$$

inverteerbaar dan en slechts dan als (c,A_2) waarneembaar en (A_1,b) bestuurbaar is.

ii) Bewijs met behulp van i) de poolplaatsingsstelling voor het geval $m = 1$.

3.14. Zij (A,B) bestuurbaar en T > 0. Definieer

$$W := \int_0^T e^{-At}BB'e^{-A't}dt$$

dan is W > 0. Als $F := -B'W^{-1}$ dan is $\Lambda(A + BF) < 0$. Bewijs dit.

3.15. Geef de analoga voor systemen met discrete tijd van de resultaten van § 3.1 en § 3.2.

3.16. Beschouw het systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ y = Cx \ ,$$

i) Laat zien dat er een $u \in \Omega$ bestaat zo dat $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ dan en slechts dan als (A,B) stabiliseerbaar is.

ii) Laat zien dat uit $y(t,x_0,u) = y(t,x_1,u)$ $(t \geq 0)$ volgt dat $x(t,x_0,u) - x(t,x_1,u) \to 0$ dan en slechts dan als (C,A) detecteerbaar is.

3.17. Beschouw het discrete systeem

$$x(t + 1) = Ax(t) + Bu(t), \ y(t) = Cx(t) \ .$$

Bewijs de equivalentie van de volgende uitspraken:

i) Elke eigenwaarde van A ongelijk aan nul is bestuurbaar.

ii) Er bestaat een matrix F zo dat A + BF nilpotent is.

iii) Het systeem is nulbestuurbaar.

3.18. Neem aan dat in het systeem genoemd in 3.17 elke eigenwaarde van A ongelijk aan nul bestuurbaar en waarneembaar is. Laat zien dat er een dynamische uitgangsterugkoppeling bestaat zo dat voor elke begintoestand x_0 geldt $x(t) = 0$ voor $t \geq 2n$.

3.19. Zij (A,B) bestuurbaar. Laat zien dat het volgende algoritme een stabiliserende terugkoppeling levert.

i) Los P op uit de vergelijking

$$(\alpha I + A)P + P(\alpha I + A') = 2BB' \ .$$

ii) Bereken F uit FP = -B'.

Hierbij is α een voldoend groot reëel getal, (bijv. $\alpha > \|A\|$. Voldoende is dat $\Lambda(-\alpha I - A) < 0$).
Wat gebeurt er als (A,B) niet bestuurbaar maar slechts stabiliseerbaar verondersteld wordt? (Aanwijzing: Laat zien dat $\eta P = 0 \Rightarrow \eta B = 0$.)
Wat kunt U zeggen over de ligging van de eigenwaarden?

3.20. i) Gebruik het in 3.19 beschreven algoritme om een stabiliserende terugkoppeling voor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

te vinden.

ii) Geef d.m.v. een directe berekening de verzameling van vectoren $F = [\varphi, \psi]$ aan waarvoor $\Lambda(A + BF) < 0$.

3.21. Construeer met de methode van 3.19 een stabiliserende F voor het systeem gegeven in voorbeeld 3.4.11.

3.22. Zij gegeven het regelbaar paar (A,b). Definieer de $n \times n$-matrix Q als volgt

$$Q := [b, Ab, \dots, A^{n-1}b].$$

Ga na dat er een rijvector η bestaat zo dat

$$\eta Q = [0, \dots, 0, 1] .$$

Stel dat we door een terugkoppeling f willen bereiken dat het karakteristiek polynoom van $K = A + bf$ het volgende polynoom is.

$$(3.22.0) \quad p(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n .$$

Ga na dat het volgende geldt

i) $\quad f = -\eta(A^n - K^n)$.

ii) $\quad \eta(A^n - K^n) = \eta p(A)$.

We hebben zo dus zonder een toestandsruimte transformatie een terugkoppeling, nl. $f = -p(A)$, bepaald die het gewenste karakteristiek polynoom geeft.

3.23. Ga na dat het volgende algoritme de terugkoppeling f uit 3.22 bepaalt.

i) $q_1 = b_1$, $q_{k+1} = Aq_k$ $(k = 1,\dots,n-1)$.
$Q = [q_1,\dots,q_n]$.

ii) Bepaal η zodat $\eta Q = [0,\dots,0,1]$.

iii) $\eta_0 = \eta$, $\eta_{k+1} = \eta_k A + c_{k+1}\eta$ $(k = 0,\dots,n-1)$. Hierin worden c_{k+1} gegeven door (3.22.0).

iv) $f = \eta_n$.

3.24. Generaliseer de methode, beschreven in 3.22, tot het multivariabele geval.

3.25. Construeer een stabiliserende regelaar voor het achteruitrijdend wagentje beschreven in 1.33. Neem daarbij aan dat zowel φ als ψ te meten is. Bestaat er ook een stabiele uitgangsterugkoppeling als we aannemen

i) alleen φ is te meten,

ii) alleen ψ is te meten.

Zo ja, bepaal zo'n terugkoppeling.

3.26. Gegeven het tijdsinvariant systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0$$
$$y = Cx\ .$$

Laat (A,B) een regelbaar paar en (C,A) een waarneembaar paar zijn. Bewijs dat de eigenwaarden van A polen zijn van de overdrachtsmatrix $C[sI - A]^{-1}B$. Gebruik bijv. de volgende twee eigenschappen en bewijs deze.

i) Zij $T > 0$ en laat $u \in \Omega$ een besturing zijn zodat $u(t) = 0$ voor $t \notin [0,T]$ dan heeft de Laplace getransformeerde $\hat{u}(s)$ geen polen.

ii) Zij λ een eigenwaarde van A en p een bijbehorende eigenvector dan bestaat er een ingang u zodat de uitgang y geschreven kan worden als

$$y(t) = Cpe^{\lambda t} + y_0(t)$$

waarbij voor y_0 geldt $y_0(t) = 0$ voor $t \notin [0,T]$ en $T > 0$.

4. *Opgaven bij Hoofdstuk IV*

4.1. Minimaliseer

$$\int_0^T (u^2 + 2x^2)\,dt$$

voor het systeem

$$\dot{x} = x + u,\ x(0) = x_0.$$

4.2. Minimaliseer

$$\int_0^T ((\ddot{x})^2 + x^2)\,dt$$

met $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

4.3. Minimaliseer

$$\int_0^T e^{-t}(2u^2 + \tfrac{1}{2}x^2)\,dt$$

voor het systeem

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}x + u,\ x(0) = x_0.$$

4.4. Minimaliseer

$$\int_0^\infty (x^2 + (\dot{x})^2 + u^2)\,dt$$

voor $\ddot{x} + x = u$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

4.5. Minimaliseer

$$\int_0^\infty (x^2 + (\dot{x})^2)\,dt$$

met $x(0) = 1$.

4.6. Minimaliseer

$$\int_0^\infty (x^2 + u^2)dt$$

voor het systeem
$\dot{x} = x + u$, $x(0) = 1$.

4.7. Los bij het systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0$$
$$y = Cx$$

het regulateurprobleem met criterium

$$J = \int_0^\infty e^{2\alpha t}(|u|^2 + |y|^2)dt$$

op.

4.8. Bepaal de optimale besturing voor de differentiaalvergelijking

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n = u(t)$$

met beginwaarden $y(0) = 1$, $y^{(1)}(0) = y^{(n-1)}(0) = 0$ bij het criterium

$$\int_0^\infty (y^2 + ru^2)dt \quad (r > 0) .$$

4.9. Zij gegeven de Riccativergelijking

$$\dot{K} = -A'K - KA + KBB'K, \ K(T) = M > 0 .$$

Veronderstel dat K^{-1} bestaat.
Bewijs dat K^{-1} aan een lineaire differentiaalvergelijking voldoet en bepaal de oplossing voor het geval dat A en B constante matrices zijn.

4.10. Zij gegeven het systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0$$
$$y = Cx .$$

Bepaal u zodanig dat

$$J = \int_0^\infty |u|^2 dt + \int_1^\infty |y|^2 dt$$

minimaal is.

4.11. Zij Q positief semidefiniet en R positief definiet. Bepaal dan de Riccati-vergelijking en de optimale terugkoppeling voor het criterium

$$J = \int_0^T (x'Qx + u'Ru)dt + x'(T)Mx(T)$$

en het systeem $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$.

4.12. Gegeven het systeem

$$S: \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \begin{matrix} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{matrix} .$$

Bewijs dat S niet regelbaar is.
Ga na dat het criterium

$$J = \int_0^T (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt$$

kan worden geminimaliseerd door

$$u = -k_{11}x_1 - k_{12}x_2$$

met

$$\dot{k}_{11} = k_{11}^2 - 1$$
$$\dot{k}_{12} = -k_{11} - k_{12} + k_{11}k_{12}$$
$$\dot{k}_{22} = -2k_{12} - 2k_{22} + k_{12}^2 - 1$$
$$k_{11}(T) = k_{12}(T) = k_{22}(T) = 0 .$$

4.13. Bewijs dat

$$J = \int_0^\infty (x_1^2 + r^2u^2)dt \qquad (r \neq 0)$$

door $u = -\frac{1}{r}x_1 - \frac{1}{r}\sqrt{2r}\,x_2$ geminimaliseerd wordt, als de systeemvergelijkingen zijn:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad \begin{matrix}x_1(0) = x_{10}\\ x_2(0) = x_{20}\end{matrix} .$$

4.14. Beschouw het systeem

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad \begin{matrix}x_1(0) = x_{10}\\ x_2(0) = x_{20}\end{matrix}$$

met criterium

$$J = \int_0^\infty (x_1^2 + qx_2^2 + ru^2)dt \qquad (q > 0,\ r > 0) .$$

De parameters q en r bepalen de polen van het geregelde systeem.
Ga na in de gevallen

i) $a_0 = 0,\ a_1 = 2$
ii) $a_0 = 0,\ a_1 = -2$
iii) $a_0 = 6,\ a_1 = 5$
iv) $a_0 = -2,\ a_1 = 2$

hoe de polen van het systeem veranderen in de gevallen

i) $r = 1$, q variabel
ii) $r = 5$, q variabel
iii) $q = 1$, r variabel
iv) $q = 5$, r variabel .

4.15. Gegeven het systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0 .$$

Laat z een oplossing van de homogene vergelijking zijn dus $\dot{z} = Az$, $z(0) = z_0$.
Bepaal een besturing u zodanig dat het criterium

$$J = \int_0^T (|u|^2 + |x - z|^2)dt$$

geminimaliseerd wordt. Interpreteer deze besturing.

4.16. Beschouw het optimale regulateurprobleem,

Het is mogelijk de oplossing te bepalen met variatie methoden zoals we zullen zien in dit vraagstuk.

Stel dat de optimale besturing bestaat. Laat $u_0(t)$ $(t_0 \le t \le T)$ deze optimale besturing zijn. Beschouw dan de besturing

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon\tilde{u}(t), \quad t_0 \le t \le T .$$

Hierin is $\tilde{u} \in \Omega$ willekeurig en $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Ga na hoe deze verandering van ingang het criterium beinvloedt. Veronderstel dat de toestand wordt

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon\tilde{x}(t), \quad t_0 \le t \le T$$

waarin $x_0(t)$ de toestand is, behorende bij de optimale besturing.

Bewijs dat geldt

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau .$$

Het criterium wordt nu ook een functie van ε, die in $\varepsilon = 0$ zijn minimum moet aannemen. Stel hiervoor condities op en substitueer (4.16.0) hierin.

Definieer daarna

$$p(t) = \int_{t}^{T} \Phi'(\tau,t)x_0(\tau)d\tau + \Phi'(T,t)Mx_0(T) .$$

Druk daarna u_0 uit in p en gebruik 4.2.29 om de Riccativergelijking af te leiden.

4.17. Een lineair Hamiltoniaans systeem is een stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen van de vorm $J\dot{x} = Hx$ waar H een continue symmetrische $2n \times 2n$-matrix is en

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} .$$

Hierin is I de $n \times n$-eenheidsmatrix.

Beschouw het systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BB'p \\ \dot{p} &= -C'Cx - A'p . \end{aligned} \qquad (4.17.0)$$

Ga na dat dit een Hamiltoniaans systeem is. In (4.17.0) kunnen we voor x en p ook n × n-matrices X resp. P substitueren.
Laat X(t) en P(t) n × n-matrix oplossingen zijn van (4.17.0) voor $t_0 \leq t \leq t_1$. Veronderstel dat X(t) niet singulier is voor $t_0 \leq t \leq t_1$. Zij verder P(t) zó dat $P(t_1) = MX(t_1)$. Definieer $K(t) := P(t)X^{-1}(t)$. Bewijs dat K(t) de oplossing is van de Riccativergelijking

$$-\dot{K} = C'C + A'K + KA - KBB'K, \quad K(t_1) = M \; .$$

4.18. Zij (A,B) stabiliseerbaar, (C,A) detecteerbaar en zij $\bar{K}$ de positief semidefiniete oplossing van de algebraische Riccativergelijking.
Ga na dat de oplossing van het randwaardeprobleem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BB'p \\ \dot{p} &= -C'Cx - A'p \end{aligned}$$

$x(t_0) = x_0$, $p(t_1) = \bar{K}x(t_1)$ gegeven wordt door het beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BB'p \\ \dot{p} &= -C'Cx - A'p \end{aligned}$$

$x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = \bar{K}x(t_0)$.

4.19. Zij H gedefinieerd door

$$H := \begin{bmatrix} A & -BB' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix} .$$

Bewijs dat geldt

$$\det(zI - H) = \det(-zI - H) \; .$$

4.20. Veronderstel dat alle eigenwaarden van H verschillend zijn. Bewijs dan dat H op de volgende wijze te diagonaliseren is

$$H = W\begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix}W^{-1}$$

waarin Λ een diagonaalmatrix is waarvan de elementen een niet negatief reëel deel hebben.
Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \Lambda y \\ \dot{z} &= -\Lambda z \end{aligned}$$

dan geldt

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} .$$

Partitioneer W^{-1} als

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} .$$

Bewijs dan dat

i) $W_{11} + W_{12}\bar{K} = 0$.

ii) W_{12}^{-1} bestaat en dus geldt $\bar{K} = -W_{12}^{-1}W_{11}$.

Ga na dat we op deze wijze de oplossing van de algebraische Riccativergelijking kunnen bepalen.

4.21. Gegeven het systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; x(t_0) = x_0 .$$

$x_1 \in \mathbb{R}^n$, $W(t_0,t_1)$ niet singulier (zie voor definitie en eigenschappen vraagstuk 2.27). Kies u zodat

$$u_0(t) := u(t) = -B'(t)\Phi'(t_0,t)\eta$$

met

$$W(t_0,t_1)\eta = x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1 .$$

In vraagstuk 2.28 hebben we gezien dat $x(t_1) = x_1$. Zij nu $u_1(t)$ een besturing waarvoor ook geldt $x(t_1) = x_1$. Bewijs dat dan geldt

$$\int_{t_0}^{t_1} |u_1|^2 dt \geq \int_{t_0}^{t_1} |u_0|^2 dt .$$

Bewijs bovendien

$$\int_{t_0}^{t_1} |u_0|^2 dt = [x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1]'W^{-1}(t_0,t_1)[x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1] .$$

Merk op dat we een regulateurprobleem hebben opgelost met criterium

$J = \int_{t_0}^{t_1} |u|^2 dt$ en vast eindpunt x_1.

4.22. Beschouw het systeem uit 4.21 met uitgang $y = Cx$ en criterium

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (|y|^2 + |u|^2)dt$$

met een extra eis nl. $x(t_1) = x_1 \in \mathbb{R}^n$.
Zij nu $M \geq 0$ en K de oplossing van de Riccativergelijking

$$-\dot{K} = C'C + A'K + KA - KBB'K, \; K(t_1) = M \; .$$

Ga na dat door de substitutie

$$u = v - B'Kx$$

dit probleem herleid wordt tot dat van het vorige vraagstuk en los dit zgn. regulateurprobleem met vast eindpunt op.

4.23. Beschouw een vergelijking

$$f(x) = 0 \; .$$

De methode van Newton-Raphson is een methode om het nulpunt van deze vergelijking te bepalen volgens de recurrente betrekking

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{df}{dx}\bigg|_{x_k}\right)^{-1} f(x_k) \; .$$

Beschouw de algebraische Riccativergelijking

$$\text{(4.23.0)} \quad F(K) = C'C + A'K + KA - KBB'K = 0 \; .$$

Bewijs dat de methode van Newton-Raphson toegepast op de algebraische Riccativergelijking de volgende recurrente betrekking geeft

$$A_h'K_{h+1} + K_{h+1}A_h = -C'C - K_hBB'K_h$$

met

$$A_h = A - BB'K_h \; .$$

Veronderstel dat (A,B) stabiliseerbaar is en dat (C,A) detecteerbaar is. Zij $\bar{K}$ de unieke niet negatief definiete oplossing van (4.23.0). Bewijs dan

i) Als A_h stabiel is dan geldt $K_{h+1} \geq \bar{K}$ $(h = 0,1,\ldots)$.
ii) Als A_h stabiel is dan is ook A_{h+1} stabiel $(h = 0,1,\ldots)$.
iii) Als A_h stabiel is dan geldt $K_{h+1} \leq K_h$ $(h = 0,1,\ldots)$.
iv) Als A_0 stabiel is dan geldt $\lim_{h\to\infty} K_h = \bar{K}$.

We hebben zodoende een algoritme gevonden om $\bar{K}$ te berekenen mits we K_0 zo kunnen bepalen dat A_0 stabiel is.

5. *Opgaven bij hoofdstuk V*

5.1. Zij gegeven

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + u, \quad x(t_0) = x_0$$

$$y = [1 \quad 2]x$$

$E\{x_0\} = \bar{x}_0$, $E\{x_0 x_0'\} = Q_0$, u is witte ruis met intensiteit I, u en x_0 zijn ongecorreleerd.

Bepaal de covariantiefunctie van y.

5.2. Zij w(t) een stochastisch proces met eigenschappen

i) $E\{w(t)\} = 0 \quad (t \geq t_0)$

ii) $w(t_0) = 0$

iii) $R_w(t_1,t_2) = Q(\min(t_1,t_2)) \quad (t_1 \geq t_0,\ t_2 \geq t_0)$.

Bewijs dat w een proces met ongecorreleerde toenames is.

5.3. Zij w(t) een zwak stationair proces met $E\{w(t)\} = \bar{w}$ en covariantie

$$R_w(t) = E\{(w(\tau + t) - \bar{w})(w(\tau) - \bar{w})\} \ .$$

De spectrale dichtheid (matrix) $\Sigma_w(\omega)$ wordt gedefinieerd als de Fourier getransformeerde van $R_w(t)$ dus

$$\Sigma_w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} R_w(t)dt \ .$$

Bewijs

i) $\Sigma_w(-\omega) = \Sigma_w'(\omega)$ voor $\omega \in \mathbb{R}$

ii) $\Sigma_w^*(\omega) = \Sigma_w(\omega)$ voor $\omega \in \mathbb{R}$

iii) $\Sigma_w(\omega) \geq 0$ voor $\omega \in \mathbb{R}$.

Hierin stelt $\Sigma_w^*(\omega)$ de geadjungeerde matrix van $\Sigma_w(\omega)$ voor (getransponeerd en complex toegevoegd).

5.4. Zij T(s) de overdrachtsmatrix van een asymptotisch stabiel systeem. Beschouw de situatie waar het begintijdstip t_0 nadert tot $-\infty$. Veronderstel dat de ingang een zwak stationair proces is met spectrale dichtheid $\Sigma_u(\omega)$.

Bewijs dan dat de uitgang een zwak stationair proces is met spectrale dichtheid

$$\Sigma_y(\omega) = T(i\omega)\Sigma_u(\omega)T'(-i\omega) .$$

5.5. Beschouw het systeem

$$\dot{x} = 0, \; x(t_0) = x_0$$
$$y = x + w .$$

$E\{x_0\} = \bar{x}_0$, $E\{x_0x_0'\} = Q_0$, w is witte ruis met intensiteit $W > 0$. We kunnen dit systeem opvatten als een model voor het meten van een constante. In het bovenstaande stelt x die constante voor.
Ontwerp een Kalmanfilter voor dit systeem.

5.6. Formuleer het stochastisch optimaal regulateurprobleem voor het tijdsinvariant oneindig-horizongeval en los het probleem op.

5.7. Formuleer de separatiestelling voor het tijdsinvariante geval waarbij we zowel voor het regulateurgedeelte als het optimaal filter gedeelte het oneindig horizon geval nemen.

5.8. Bepaal in vraagstuk 5.7 het tijdsgemiddelde van de criteriumwaarde voor $t \to \infty$.

5.9. Zij gegeven de covariantiefunctie

$$R_y(t) = \beta_1 e^{-\sigma_1|t|} + \beta_2 e^{-\sigma_2|t|} .$$

Bepaal een tijdsinvariant systeem

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = [c_1 \quad c_2]x$$

waarin v witte ruis is met intensiteit I zodat R_y de covariantie van y is.

5.10. Beschouw het systeem in 5.9. Bewijs dat de spectrale dichtheid van y gegeven wordt door

$$\Sigma_y(\omega) = \left| \frac{c_1 + (i\omega)c_2}{(i\omega)^2 + a_1(i\omega) + a_0} \right|^2 .$$

5.11. Beschouw de separatiestelling 5.5.11. Bewijs dat geldt

$$\mathrm{tr}[K(t_0,T)Q_0] + \mathrm{tr}[\int_{t_0}^{T} (K(t,T)V(t) + K(t,T)P(t)K(t,T)B(t)B'(t))dt] =$$

$$\mathrm{tr}[MP(T)] + \mathrm{tr}[\int_{t_0}^{T} (D'(t)D(t)P(t) + P(t)K(t,T)P(t)C'(t)C(t))dt] .$$

Zodoende vinden we twee uitdrukkingen voor de criteriumwaarde.

5.12. Beschouw het algoritme van vraagstuk 4.23. Pas dit toe in het geval van de optimale waarnemer. Bewijs dat een filter gebaseerd op K_h een suboptimale filter is.

5.13. Beschouw de algebraische Riccativergelijking

$$AP + PA' - PC'CP + V = 0$$

en de Lyapunov vergelijking

$$AQ + QA' + V = 0 .$$

Zij (A,B) stabiliseerbaar en (C,A) detecteerbaar. Veronderstel verder dat A stabiel is. Bewijs dan dat geldt

$$P \le Q .$$

5.14. Bewijs dat er een filter bestaat zo dat geldt

$$E\{ee'\} = Q .$$

Hierin is $e = x - \hat{x}$ en Q wordt gegeven door vraagstuk 5.13.
Hoe interpreteert U de ongelijkheid uit vraagstuk 5.13?

5.15. Beschouw de gelineariseerde vergelijkingen van vraagstuk 1.33. We willen nu ook nog zorgen dat het wagentje midden op de band blijft rijden. Formuleer vergelijkingen voor dit nieuwe probleem. Ga na dat het zo verkregen systeem regelbaar is. Ga na welke componenten van de toestand u nodig hebt voor waarneembaarheid. Neem aan dat de uitgang verstoord wordt door witte ruis w met intensiteit W > 0.
Construeer een Kalmanfilter voor dit probleem voor een eindig tijdsinterval.

5.16. Laat x de toestand zijn in het vorige vraagstuk en laat de uitgang zijn

$$y = x + w \ .$$

Hierin is w witte ruis met intensiteit $W > 0$.
Deze meetruis kan bijvoorbeeld ontstaan door de sensoren die gebruikt worden voor het meten van de toestand. Formuleer een regulateurprobleem voor het geval we willen minimaliseren:

$$J = E\{ \int_{t_0}^{T} |x|^2 + |u|^2 dt + x(T)'Mx(T)\}, \ M \geq 0 \ .$$

5.17. Los ook het oneindig horizon geval op voor vraagstuk 5.16. Wat zijn de voordelen van deze laatste aanpak boven die van vraagstuk 5.16.

5.18. Gegeven het tijdsinvariant systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu + v, \ x(0) = x_0$$
$$y = Cx + w \ .$$

Met de gebruikelijke aannames voor v, w en x_0. Veronderstel nu dat we alleen kunnen waarnemen gedurende korte perioden $[kT_0, kT_0 + \Delta]$ voor $T_0 > 0$, $\Delta > 0$, $k = 0,1,\ldots$. We krijgen dan een tijdsafhankelijk systeem met uitgangsvergelijking

$$y = \bar{C}(t)x + w \ .$$

Hierin is $\bar{C}(t)$ de matrix

$$C(t) = \begin{cases} C & \text{voor } kT_0 \leq t \leq kT_0 + \Delta, \ k = 0,1,\ldots \ , \\ 0 & \text{voor t buiten deze intervallen} \ . \end{cases}$$

Ontwerp een Kalmanfilter voor dit probleem.
Deze methode kan gebruikt worden voor het schatten van de baan van een vliegtuig m.b.v. radar.

6. *Opgaven bij hoofdstuk VI*

6.1. Als (C,A,B) minimaal is, dan is (C, A + BFC, B) minimaal voor alle F. Bewijs en interpreteer dit resultaat.

6.2. Beschouw het monovariabele (niet noodzakelijk strict causale) systeem

$$(*)\quad \dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx + du$$

Definieer als Markovparameters

$$M_o := d$$

$$M_k := cA^{k-1}b \quad (k=1,2,\ldots)$$

Zij verder:

$$\nu := \min \{k \mid M_k \neq 0\}$$

$$q := 1/M_\nu$$

en zij

$$R(s) := c(sI-A)^{-1}b+d$$

de overdrachtsfunctie

i) Laat zien dat $\lim\limits_{s\to\infty} s^\nu R(s) = 1/q$

ii) Bewijs dat y ν keer continu differentieerbaar is als u continu is. Geef een systeem dat met u als ingang $y^{(\nu)}$ als uitgang heeft (geen differentiator invoeren!)

iii) Laat zien dat het in (ii) genoemde systeem als inverse heeft

$$(**)\quad \begin{aligned} \dot{x} &= Fx + qy^{(\nu)} \\ u &= hx + qy^{(\nu)} \end{aligned}$$

met

$F := A - qbcA^\nu$, $g := qb$, $h := -qcA^\nu$

Dit systeem heet een ν-<u>integrerende inverse</u> van (*)

iv) Bewijs dat de overdrachtsfunktie $R_1(s)$ van (**) wordt gegeven door

$$R_1(s) = s^{-\nu} / R(s)$$

v) Bewijs dat

$$R(s) = \frac{\det(sI - F)}{qs^{\nu}\det(sI - A)}$$

vi) Laat zien dat (**) bestuurbaar is als (*) dat is

vii) Laat zien dat (**) waarneembaar is als (*) waarneembaar is en bovendien $\nu=0$ of $\det A \neq 0$.

6.3. Beschouw een oneindige matrix $A = (a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots)$. De verzameling van alle oneindig lange kolommen geven aan met $\mathcal{L}$. Dit is een vectorruimte. De kolommen van A *zijn elementen van* $\mathcal{L}$. We definiëren de kolomrang van A als de dimensie van de ruimte opgespannen door de kolommen van A. Op analoge wijze wordt de rijrang van A gedefinieerd. Verder definiëren we de determinantrang van A als de grootste r waarvoor er een $r \times r$-deelmatrix van A bestaat met determinant ongelijk aan nul. Tenslotte definiëren we de limietrang van A als $\sup_{K,L} \operatorname{rang} A_{KL}$, waar A_{KL} de deelmatrix $(a_{ij})_{i=1,\ldots,K;\, j=1,\ldots,L}$ voorstelt. Bewijs dat al deze rangen aan elkaar gelijk zijn.

6.5. Geef een direct bewijs van de implicaties (1) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (2), (3) $\Rightarrow$ (1), (4) $\Rightarrow$ (3), (2) $\Rightarrow$ (4), (4) $\Rightarrow$ (5) in stelling (6.2.9).

6.6. Zij (A,B) bestuurbaar. Laat zien hoe een rechterinverse van de matrix $Q := [B,\ldots,A^{n-1}B]$ gebruikt kan worden om expliciet de besturing u te bepalen die de toestand x van het discrete systeem $x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)$ van de oorsprong naar een willekeurig punt in de toestandsruimte brengt. Kunt U de matrix Q ook gebruiken voor het continue systeem

Dualiseer het probleem.

6.7. Zij R(s) een eigenlijke rationale matrix. De (McMillan)graad $\delta(R)$ van R wordt gedefinieerd als de dimensie van een minimale realisatie van R. Bewijs:

i) $\delta(R_1 + R_2) \leq \delta(R_1) + \delta(R_2)$

ii) $\delta(R_1 R_2) \leq \delta(R_1) + \delta(R_2)$

iii) $\delta(R_1 + R_2) = \delta(R_1) + \delta(R_2)$

als R_1 en R_2 geen polen gemeenschappelijk hebben (zie 2.19 en 3.26).

iv) Als $R(s) = \sum_{i=1}^{k} (s - \lambda_i)^{-1} R_i$ en als alle λ_i's verschillend zijn dan is $\delta(R) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rang} R_i$

v) Zij

$$R(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{-1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Bepaal $\delta(R)$ en bereken ook een minimale realisatie van R volgens de bij de berekening van $\delta(R)$ gesuggereerde methode (Aanwijzing: Schrijf $R(s)$ zoals in **iv)**).

vi) Hetzelfde voor

$$R(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{-1}{s} \\ \frac{-1}{s(s+2)} & \frac{1}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

vii) Zij $R(s) = \sum_{j=1}^{m} R_j s^{-j}$. Bepaal $\delta(R)$ met behulp van de **Hankelmatrix**.

viii) Zij $R_2(s) = R_1(s+\alpha)$. Laat zien dat $\delta(R_2) = \delta(R_1)$

ix) Zij

$$R(s) = \sum_{i,j=1}^{m} R_{ij}\,(s+\lambda_i)^{-j}$$

Bepaal $\delta(R)$

x) Zij

$$R(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+5} \\ \frac{1}{(s+3)^2} & \frac{-3}{s+4} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Bepaal $\delta(R)$

8. Zij $f(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t)e^{\lambda_i t}$ een **Bohlfunctie** met $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ verschillend.

Men definieert de graad van f als

$$\delta(f) = \sum_{i=1}^{m} (\mathrm{gr}(p_i)-1).$$

Laat zien dat

$$\delta(f) = \delta(\mathcal{L}(f)).$$

(zie 6.7).

6.9. Zij

$$F=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

en $\theta > 0$. Bepaal A zo dat $e^{\theta A} = F$ (Aanwijzing: diagonaliseer F).

6.10. Zij (C,A,B) minimaal. De bestuurbaarheidsindex van (A,B) is de minimale waarde van k waarvoor rang $[B,\ldots,A^{k-1}B] = n$. De waarneembaarheidsindex van (C,A) wordt duaal gedefinieerd. Kunt U bij een gegeven rij van Markovparameters de bestuurbaarheids- en de waarneembaarheidsindex vinden zonder een realisatie te bepalen?

6.11. Laat (C,A,B) en$(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ minimaal zijn. Dan is de matrix S die voldoet aan (2.4.4) eenduidig.

6.12. Zij de overdrachtsmatrix van een systeem symmetrisch (d.w.z. $\hat{K}'(s) = \hat{K}(s)$ voor alle s en zij (C,A,B) een minimale realisatie. Laat zien dat er een eenduidige, niet singuliere, symmetrische matrix P bestaat zo dat

$$AP = PA'$$
$$B = PC'$$

6.13. Specialiseer de formules (6.4.9), (6.4.10) en (6.4.11) tot het monovariabele geval.

6.14. Laat (m_k) een rij Markovparameters zijn van een monovariabel systeem (dus $m_k \in \mathbb{R}$).

i) Als

$$\text{rang } H_{nn} = \text{rang } H_{n+1,n+j} = n, \quad (j=1,\ldots,n)$$

dan is rang H=n en een realisatie wordt gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \quad 0 \; \ldots\ldots \; 0]$$

Hierbij zijn $a_n,\ldots,a_1$ componenten van de rijvector $x = [a_n,\ldots,a_1,1]$, die voldoet aan

$$xH_{n+1,n+j} = 0 \qquad (j=0,1,\ldots)$$

6.15. Stel dat $K(t)$ een impuls-responsiematrix is die exponentieel afneemt voor $t \to \infty$: $\|K(t)\| < Me^{-\gamma t}$ voor zekere $M > 0$, $\gamma > 0$. Dan kan men de momenten

$$N_k := \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty t^k K(t)dt \quad (k = 0,1,\ldots)$$

definiëren. Laat zien dat voor de overgangsmatrix geldt

$$\hat{K}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k s^k .$$

Hoe kan men een realisatie (C,A,B) construeren uitgaande van de matrices N_k?

6.16. Laat $M_1, M_2, \ldots$ een rij symmetrische $m \times m$-matrices zijn zodat de Hankelmatrix

$$H = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \cdots \\ M_2 & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

positief semidefiniet is (d.w.z. $H_{nn} \geq 0$ voor alle n).

i) Laat zien dat er een minimale realisatie (C,A,B) bestaat met $C = B'$ en A symmetrisch.
(Aanwijzing: Gebruik de Choleski-splitsing.)

ii) Laat zien dat omgekeerd de Hankelmatrix behorende bij een systeem (B',A,B) met symmetrische A, positief semidefiniet is.

iii) Toon aan dat het in i) genoemde systeem intern stabiel is dan en slechts dan als
b) $\tilde{H}_{nn} \leq 0$
c) rang $\tilde{H}_{nn} = n$
waar $\tilde{H}_{nn}$ de Hankelmatrix is van de rij $(M_2, M_3, \ldots)$.

iv) Als (B',A,B) en $(\bar{B}',\bar{A},\bar{B})$ met A en $\bar{A}$ symmetrisch beide minimale realisaties zijn van $M_1, M_2, \ldots$, dan zijn deze systemen orthogonaal isomorf, d.w.z., er bestaat een orthogonale matrix T zo dat $\bar{A} = T^{-1}AT$ en $\bar{B} = T^{-1}B$.

6.17. Beschouw een tijdsafhankelijk systeem

$$(6.17.0) \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) . \end{aligned}$$

Beschouw een matrix $T(t,\tau)$. Bewijs dat $T(t,\tau)$ de impuls responsie is van een tijdsafhankelijk systeem (6.17.0) dan en slechts dan als $T(t,\tau)$ te schrijven is als

$$T(t,\tau) = H(t)G(\tau)$$

waarin H en G eindig dimensionale matrices zijn.
In het algemeen zullen we op deze wijze geen minimale realisatie vinden.