TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

OPTIMALISERING

van

REGELSYSTEMEN

Prof. Dr. Ir. M.L.J. Hautus

Najaarssemester 1980

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.228.1
Prijs f. 9,00

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Optimalisering van regelsystemen

Prof.dr.ir. M.L.J. Hautus

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Optimalisering van regelsystemen

Prof. Dr. Ir. M.L.J. Hautus

Najaarssemester 1980

mut 81

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave (vervolg) blz.

1. ALGEMENE BESCHOUWINGEN OVER OPTIMALISERING

1.1. Klassificering van optimaliseringsproblemen

Optimaliseringsproblemen treden op zodra er bij het ontwerp van een systeem (statisch of dynamisch) vrijheidsgraden voorkomen. Deze vrije parameters zijn meestal aan beperkingen onderhevig, maar niettemin zal men vele waarden van die parameters kunnen kiezen die aan die beperkingen voldoen. Gewoonlijk zal men dan deze vrijheid gebruiken om het systeem optimaal* te ontwerpen of te gebruiken. Daarbij moet men natuurlijk een optimaliteitscriterium definiëren.

In algemene vorm kan men een optimaliseringsprobleem als volgt formuleren:

(1.1.1) PROBLEEM. $OP(S,f)$: *Gegeven een verzameling* S *en een functie* $f: S \to \mathbb{R}$, *bepaal een element* $x \in S$ *zo dat* f *maximaal is in* x, *d.w.z. zodanig dat* $f(y) \le f(x)$ *geldt voor alle* $y \in S$.

In vele situaties is S een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ voor zekere n. We noemen S dan een eindigdimensionale verzameling en $OP(S,f)$ een eindigdimensionaal optimaliseringsprobleem. Meestal wordt S hierbij bepaald door een aantal vergelijkingen en ongelijkheden. In het volgende gebruiken we de notaties $C(S \to T)$, $C^1(S \to T)$, $C^k(S \to T)$ voor verzamelingen van functies $f: S \to T$ die continu, continu differentieerbaar, resp. k keer continu differentieerbaar zijn.

(1.1.2) DEFINITIE. *Het optimaliseringsprobleem* $OP(S,f)$ *heet een mathematisch programmering probleem als er functies*

$$r_i \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \qquad (i = 1,\dots,\ell)$$
$$g_j \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \qquad (j = 1,\dots,m)$$

gegeven zijn, zo dat

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_i(x) = 0 \ (i = 1,\dots,\ell);\ g_j(x) \le 0 \ (j = 1,\dots,m)\}\ . \qquad (1.1.3)$$

In zo'n geval noemen we (1.1.3) *een* EI-*representatie van* S.

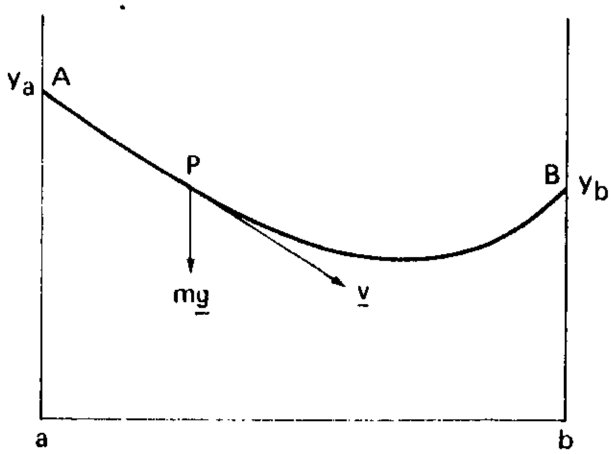
* In tegenstelling tot het in zich in Nederland steeds meer inburgerende spraakgebruik, betekent optimaal hier "zo goed mogelijk" en niet "goed". De uitdrukking "zo optimaal mogelijk" is dus een pleonasme.

In het bijzonder geval dat r_i, g_j en f lineair zijn, spreekt men van lineaire programmering.

Eindigdimensionale optimaliseringsproblemen komen voor in situaties waar het de vrijheid in het ontwerp of instelling van een systeem kan worden gekarakteriseerd door een eindig aantal parameters. Er zijn ook probleemgebieden waarin de optimaal te kiezen grootheid niet kan worden gezien (of gecodeerd) als een element van een eindigdimensionale verzameling. In de variatierekening en de theorie van optimale besturingen zijn de gezochte grootheden *functies*. Er zijn dan oneindig veel vrijheidsgraden.

(1.1.3) VOORBEELD. (*Brachistochrone*). Gegeven twee punten A en B in een verticaal vlak, bepaal een kromme van A naar B zo dat een massapunt dat langs de kromme beweegt onder invloed van de zwaartekracht zich in minimale tijd van A naar B beweegt.

We zullen hier aannemen dat de kromme kan worden gerepresenteerd d.m.v. een C^1-functie y(x) op een interval [a,b] en dat de punten A en B coördinaten (a,y_a) en (b,y_b) hebben. We veronderstellen verder dat het massapunt P



geen wrijving ondervindt. Dan geldt vanwege het behoud van energie de volgende relatie

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg(\alpha - y)$$

waar m de massa, v de snelheid en y de hoogte van het punt is. Het getal α wordt bepaald door de beginsnelheid en beginpositie van het punt:

$$\tfrac{1}{2}mv_a^2 = mg(\alpha - y_a) .$$

We laten toe dat $v_a > 0$. Als we met s de afgelegde weg (d.w.z. de lengte van het stuk van de kromme tussen A en P) aangeven dan kunnen we schrijven

$$v^2 = 2g(\alpha - y) ,$$

waaruit de volgende formule voor de in het totaal benodigde tijd is af te leiden:

$$T = \int_a^b \frac{ds}{v} = \int_{x=a}^b \frac{ds}{\sqrt{2g(\alpha - y)}} .$$

Als we tenslotte $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ substitueren, vinden we

$$(1.1.4) \qquad T = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(\alpha - y)}}\, dx .$$

Derhalve kunnen we het optimaliseringsprobleem als volgt formuleren.

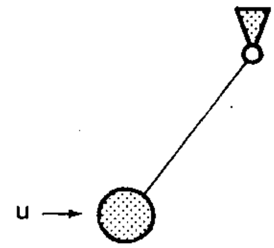
Gegeven getallen a,b,g,y_a,y_b, *die voldoen aan de ongelijkheden* $a < b$, $g > 0$, $\alpha \geq y_a$, $\alpha \geq y_b$, *bepaal een functie* $y \in C^1([a,b] \to \mathbb{R})$ *zo dat* $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ *en zodanig dat* T, *gegeven door* (1.1.4), *minimaal is*.

De ongelijkheden $\alpha \geq y_a$, $\alpha \geq y_b$ zijn natuurlijk noodzakelijk om te garanderen dat de integraal (1.1.4) is gedefinieerd. Ook fysisch zijn deze ongelijkheden gemakkelijk te interpreteren (ga na). □

Bovenstaand voorbeeld is een bijzonder geval van wat men een <u>eenvoudig variatieprobleem met vaste eindwaarden</u> noemt.

Bij optimale besturingsproblemen heeft men gewoonlijk te maken met een dynamisch systeem waarin een grootheid, besturing genoemd, die een functie is van de tijd, vrij kan worden gekozen. In de problemen waar we ons hier mee zullen bezighouden zal meestal de toestand veranderen volgens een stelsel differentiaalvergelijkingen waarin de besturing voorkomt. De besturing moet dan zo gekozen worden dat een of andere grootheid wordt gemaximaliseerd (of geminimaliseerd).

(1.1.5) VOORBEELD (*Slinger*). Op een slinger kan men een horizontale kracht uitoefenen. Men wil daarmee bereiken dat de slinger in de evenwichtsstand tot rust komt. Als optimaliteitscriterium neemt men de tijd, d.w.z. men wil de slinger in minimale tijd in de gewenste toestand hebben. De besturing u waarvoor de benodigde tijd minimaal is wordt optimaal genoemd (voor dit speciaal optimaliteitscriterium ook wel tijdoptimaal).



Als men de kracht u willekeurig groot kan maken, dan kan de benodigde tijd willekeurig klein krijgen. In dat geval bestaat er geen tijdoptimale besturing. Het is echter redelijk aan te nemen dat u begrensd is. Als we verder de uitwijkingen van de slinger zo klein veronderstellen dat we de bewegingsvergelijking mogen lineariseren, vinden we na normalisatie het volgende mathematische model van het genoemde probleem:

"*Gegeven* x_0 *en* v_0 *(reële getallen), bepaal een functie* $u: [0,\infty) \to [-1,1]$ *zodanig dat voor de oplossing van de differentiaalvergelijking*

$$\ddot{x} + x = u,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0$$

$x(T) = \dot{x}(T) = 0$ *geldt met minimale* $T > 0$".

Merk op dat de $\underline{x}(t) = (x(t),\dot{x}(t))$ de toestandsvector is. Het probleem is dus, de toestand vanaf de beginwaarde (x_0,v_0) naar $(0,0)$ te brengen.

De voorwaarde $|u(t)| \leq 1$ geeft de begrensdheid van de kracht aan. □

(1.1.7) VOORBEELD (*Opleidingsstrategie*). Een persoon besluit zijn tijd te verdelen in leer- en werktijd. Laat de verhouding van de hoeveelheid tijd die hij aan zijn opleiding besteedt tot de totale beschikbare tijd gegeven zijn door $u(t)$, zodat $0 \leq u(t) \leq 1$. Ten gevolge van zijn opleiding verwerft de persoon een ontwikkelingsgraad $x(t)$. Deze grootheid ondervindt een toename $u(t)$ t.g.v. de momentane opleiding en een afname $-\alpha x$ tengevolge van het vergeten wat er geleerd is en van vernieuwingen in de betreffende leerstof. Derhalve voldoet x aan de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = -\alpha x + u\ .$$

We nemen aan dat $x(0) = 0$.

Laat $\varphi(t)$ de productiecapaciteit van de persoon voorstellen. Deze productiecapaciteit heeft hij verkregen op grond van ervaring $\varepsilon(t)$ en vanwege zijn ontwikkelingsgraad. Laten we aannemen dat de toename van ervaring evenredig is met de ervaring die de persoon reeds heeft: $\dot{\varepsilon} = \beta\varepsilon$ zodat de ervaring evenredig wordt met $e^{\beta t}$. Verder nemen we aan dat de productiecapaciteit evenredig is met een functie van x: $\omega(x)$. We veronderstellen dat ω positief en stijgend is en verder dat $\omega'(x)/\omega(x)$ dalend is. (Bij toenemende ontwikkelingsgraad, wordt het effect op de productiecapaciteit kleiner.) Een voorbeeld van zo'n functie is $\omega(x) = a + bx$ met $a,b > 0$. We vinden zo, dat de productiecapaciteit gelijk is aan

$$\varphi(t) = e^{\beta t}\omega(x(t)) \ .$$

Het inkomen stellen we evenredig aan $\varphi(t)$ en aan $(1 - u(t))$ dus aan $\varphi(t)(1 - u(t))$. Het op het tijdstip t verkregen inkomen brengt rente op zodat de persoon op het eindtijdstip T een hoeveelheid kapitaal evenredig met

$$\int_0^T e^{(\beta-\gamma)t}(1 - u(t))\omega(x(t))dt$$

krijgt. De factor $e^{(T-t)\gamma}$ (waarvan we $e^{T\gamma}$ hebben weggelaten), geeft de waardevermeerdering tengevolge van de rente aan. Hoe moet de persoon u kiezen om het eindkapitaal te maximaliseren? $\square$

We zullen oneindigdimensionale problemen verder bespreken in hoofdstuk 3.

1.2. *Methoden voor het oplossen van optimaliseringsproblemen*

We zullen achtereenvolgens een aantal begrippen bespreken die van belang zijn bij het probleem $\mathcal{OP}(S,f)$.

(i) Optimaliteitsvoorwaarden. Men maakt onderscheid tussen noodzakelijke voorwaarden en voldoende voorwaarden. Noodzakelijke voorwaarden zijn eigenschappen waaraan een oplossing x van $\mathcal{OP}(S,f)$ voldoet. Zulke voorwaarden zullen we gewoonlijk in de volgende vorm formuleren:

Als **a** *een optimaal punt is, dan .....*

Een bekend voorbeeld is $\mathcal{OP}(S,f)$ met $S = \mathbb{R}$ en $f \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$. Dan geldt:

Als **a** *een optimaal punt is, dan is* $f'(\mathbf{a}) = 0$.

Alle in dit dictaat gegeven noodzakelijke voorwaarden kunnen worden gezien als generalisaties van deze elementaire stelling. Gewoonlijk krijgt men noodzakelijke voorwaarden door in de eerste plaats alleen te gebruiken dat het extremum locaal is en vervolgens te lineariseren. Voor het eerste is nodig dat op S een afstandsbegrip (of algemener, een topologie) is gedefinieerd en voor het tweede moet men aannemen dat S een deelverzameling van een lineaire ruimte is (of althans locaal kan worden ingebed in een lineaire ruimte). Deze extra structuur van

S is zonder meer voorhanden bij eindigdimensionale problemen. Bij oneindigdimensionale problemen ligt weliswaar de lineaire structuur vast, het afstand begrip is daar echter niet eenduidig bepaald.

Noodzakelijke voorwaarden verkregen door linearisatie noemt men gewoonlijk voorwaarden van de eerste orde. Als men ook kwadratische benaderingen gebruikt, verkrijgt men noodzakelijke voorwaarden van de tweede orde. In het ééndimensionale geval hebben we bijv.:

Als $f \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ *en* a *is een optimaal punt dan geldt* $f'(a) = 0$ *en* $f''(a) \leq 0$.

Ook deze voorwaarde kan tot algemenere situaties worden gegeneraliseerd.

Voldoende voorwaarden zijn resultaten van de gedaante:

Als het punt a *voldoet aan* ....., *dan is* a *optimaal.*

Zulke voorwaarden zijn gewoonlijk alleen te verkrijgen voor speciale gevallen. Belangrijk hierbij zijn vooral de situaties waarin convexiteit een rol speelt. Zo kan voor het geval $\mathcal{OP}(S,-f)$ met $S = \mathbb{R}$ en $f \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ het volgende resultaat eenvoudig bewijzen:

Als f *convex is en* $f'(a) = 0$, *dan is* $f(x)$ *minimaal in* $x = a$.

Als men tevreden is met voldoende voorwaarden voor *locale* optimaliteit dan kan men dit vaak bereiken met voorwaarden van de tweede orde. In bovenstaande situatie hebben we:

Als $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$, *dan heeft* f *in* a *een locaal minimum.*

Zo'n locale voldoende voorwaarde voor optimaliteit vindt men vaak door het $\geq$ teken in de tweede orde noodzakelijke voorwaarden te vervangen door $>$.

(ii) Existentiestellingen. Zo'n stelling spreekt uit dat het probleem $\mathcal{OP}(S,f)$ een oplossing heeft. Een dergelijk resultaat berust meestal op het bekende feit dat een continue functie op een compacte verzameling een maximum en een minimum aanneemt (in $\mathbb{R}^n$ is compact hetzelfde als gesloten en begrensd). Gewoonlijk zijn de bewijzen van deze stellingen niet constructief. Men kan er geen optimale punten mee vinden. In oneindigdimensionale problemen is bij het meest voor de hand liggende afstandsbegrip de compactheidsvoorwaarde te stringent. Men maakt hierbij vaak gebruik van zgn. zwakke topologieën, waarin wel alle gesloten begrensde verzamelingen compact zijn.

We illustreren de moeilijkheden bij het bewijzen van existentie van optimale besturingen aan de hand van een voorbeeld.

(1.2.1) VOORBEELD. Zij $T \in \mathbb{R}$ een positief getal, J een interval in $\mathbb{R}$ en $f \in C([0,T] \to \mathbb{R})$. Wij zoeken naar een functie $u: [0,T] \to J$ zo dat

$$I(u) := \int_0^T f(t)u(t)dt$$

maximaal is. (We kunnen ook zeggen: we zoeken u zo dat voor de oplossing $x: [0,T] \to \mathbb{R}$ van

$$\dot{x}(t) = f(t)u(t), \quad x(0) = 0$$

geldt: $x(T)$ is maximaal.) In de eerste plaats is duidelijk dat we alleen de existentie van een optimale u kunnen verwachten als J gesloten en begrensd is. Als bijv. $J = [0,\infty)$ en $f(t) > 0$ op $[0,T]$, dan kunnen we door $u(t) = \alpha$ constant en groot te kiezen de integraal $I(u)$ willekeurig groot maken. Als $J = (0,1)$ en $f(t) > 0$, dan is het duidelijk dat voor elke u geldt

$$I(u) < \int_0^T f(t)dt \; .$$

Anderzijds kunnen we een rij functies $u_k: [0,T] \to (0,1)$ vinden (bijv. $u_k = 1 - 1/k$) waarvoor geldt

$$I(u_k) \to \int_0^T f(t)dt \; .$$

Hieruit volgt dat er geen optimale u bestaat.

Als we nu aannemen dat J gesloten en begrensd is dan hangt de existentie van een optimale u af van welke eisen aan u stellen. Laten we, om de gedachte te bepalen, veronderstellen dat $J = [-1,1]$. Als we bijv. eisen dat u continu is en als $f(t)$ tekenwisselingen heeft, dan bestaat er géén optimale u. Dit kunnen we als volgt inzien.

We definiëren het teken van x (signum x) door

$$\text{(1.2.2)} \qquad \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ -1 & \text{als } x > 0 \; . \end{cases}$$

Als men nu

$$\bar{u}(t) := \operatorname{sgn} f(t)$$

definiëert dan is $\bar{u}$ niet continu. Er geldt

$$I(\bar{u}) = \int_0^T f(t)\bar{u}(t)dt = \int_0^T |f(t)|dt \ .$$

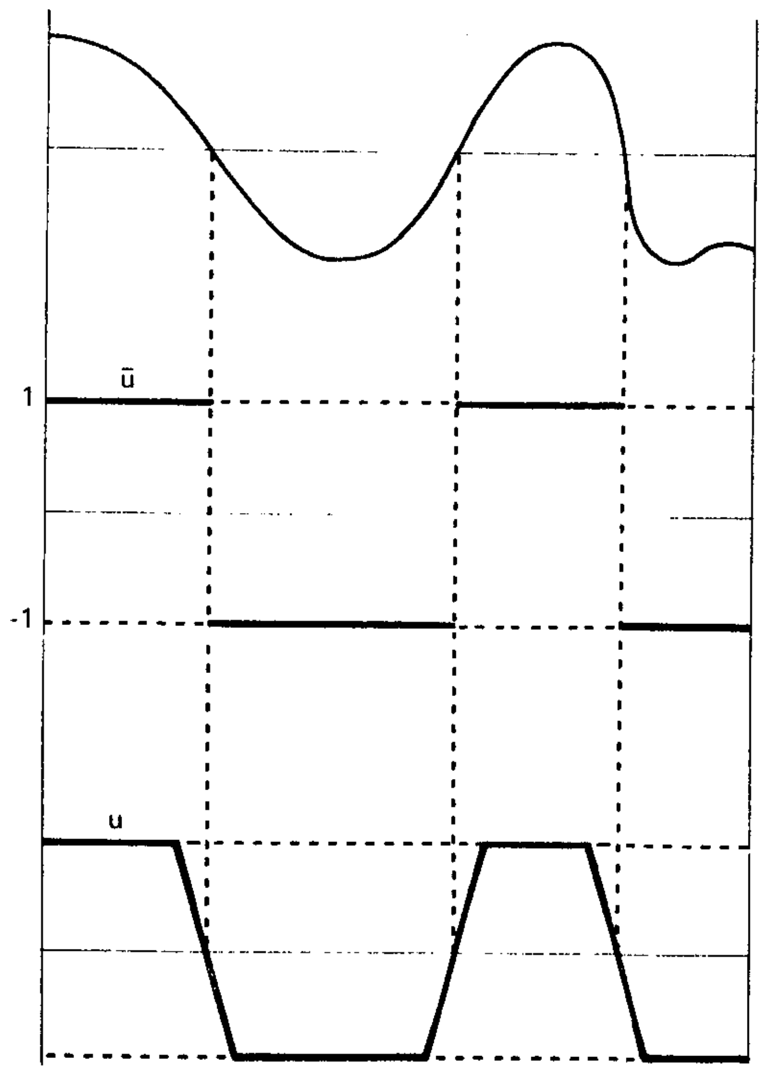
Anderzijds is duidelijk dat

$$I(u) = \int_0^1 f(t)u(t)dt \leq \int_0^T |f(t)|dt = I(\bar{u})$$

geldt voor elke toegelaten functie u. Daarom zou de functie $\bar{u}$ optimaal zijn als zij toegelaten was. Voor continue functies u geldt steeds $I(u) < I(\bar{u})$, immers

$$I(\bar{u}) - I(u) = \int_0^T \{|f(t)| - u(t)f(t)\}dt \ .$$

De integrand in het rechterlid is continu en niet-negatief en de integraal kan alleen maar 0 zijn als $u(t)f(t) = |f(t)|$ voor alle t, d.w.z. als $u(t) = \text{sgn } f(t)$ voor elke t met $f(t) \neq 0$.



Anderzijds kan men $\bar{u}$ door continue u zo benaderen dat $I(\bar{u}) - I(u)$ willekeurig klein wordt (zie figuur). Hieruit volgt dat er geen optimale continue functie u bestaat.

Bovenstaande tekening suggereert dat de verzameling van stuksgewijs continue functies, d.w.z. functies met een eindig aantal discontinuiteiten in welke linker en rechterlimiet bestaan, een betere klasse van toegelaten u's zou zijn. In de meeste practische situaties en in alle voorbeelden die we nog zullen zien is deze klasse inderdaad voldoende ruim voor de existentie van optimale besturingen. De verzameling van continue functies blijkt niet alleen in dit voorbeeld, maar ook in veel andere situaties te beperkt te zijn.

Als men echter existentiestellingen van een algemeen type wil geven, dan is de verzameling van stuksgewijs continue functies ook te beperkt. De functie

$$f(t) := \begin{cases} t^3 \sin 1/t & (0 < t \le T) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

bijv., heeft op het interval $[0,T]$ oneindig veel tekenwisselingen (hoewel zij continu differentieerbaar is). De functie $\bar{u}(t) = \operatorname{sgn} f(t)$ heeft daarom oneindig veel discontinuiteiten en men kan op soortgelijke manier als boven aantonen dat er geen stuksgewijs continue optimale u bestaat. Dit voorbeeld suggereert ons een nog grotere klasse van besturingen toe te laten, bijv. de verzameling van Riemann-integreerbare functies. Men kan echter een functie $f \in C^\infty([0,T] \to \mathbb{R})$ construeren zodat $t \mapsto \operatorname{sgn} f(t)$ niet Riemann-integreerbaar is en zo dat er ook geen Riemann-integreerbare functie $u: [0,T] \to [-1,1]$ bestaat waarvoor $I(u)$ maximaal is. Het blijkt dat wij, om existentiestellingen te kunnen bewijzen, onze toevlucht moeten zoeken tot een nog grotere klasse van functies, nl. de Lebesgue-integreerbare functies $u: [0,T] \to [-1,1]$ (zie [ML],[NA]). We zullen echter in dit college niet gebruik maken van de theorie der Lebesgue-integratie. In het bijzonder zullen we geen bewijzen leveren van existentiestellingen.

In het kader van de Lebesgue-integratie kan men echter wel bewijzen dat er voor dit probleem altijd een optimale u bestaat als J gesloten en begrensd is. $\square$

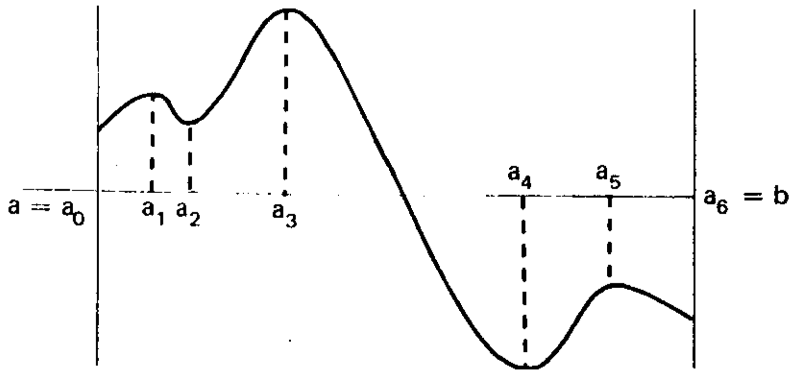
We zullen verder over existentie van optimale besturingen spreken in § 3.3.

(iii) Numerieke Methoden. Voor een uitgebreide behandeling van numerieke methoden bij *eindigdimensionale optimaliseringsproblemen verwijzen we naar* [NO]. In hoofdstuk 8 zullen we een overzicht geven van numerieke methoden voor de berekening van optimale besturingen. Men kan onderscheid maken tussen directe en indirecte methoden. Bij indirecte methoden wordt bij de berekening gebruik gemaakt van noodzakelijke of voldoende voorwaarden voor optimaliteit. Bij directe methoden gebruikt men de optimaliteitseigenschap direct bij de berekening. Deze directe methoden zijn vaak analoog aan eindigdimensionale optimaliseringsmethoden.

1.3. *Het gebruik van optimaliseringsmethoden*

Noodzakelijke voorwaarden voor optimaliteit leveren vergelijkingen op voor het optimale element. Als men een voldoende aantal noodzakelijke voorwaarden heeft, dan hebben deze vergelijkingen gewoonlijk een eindig aantal (of in ieder geval discreet gelegen) oplossingen. In dat geval noemen we het stel noodzakelijke voorwaarde volledig, bijv. $f'(x) = 0$ voor $f \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$. Maar ook een volledig stel noodzakelijke voorwaarden hoeft niet voldoende te zijn. Daarom heeft men nadat men een oplossing van de genoemde vergelijkingen heeft gevonden nog niet de zekerheid dat het gevonden element optimaal is. Er zijn verschillende manieren om dit probleem volledig te behandelen. In de eerste plaats is het mogelijk dat men een existentiestelling voor het optimaliseringsprobleem heeft bewezen. Als men dan alle punten (hopelijk eindig veel) heeft bepaald die voldoen aan de noodzakelijke voorwaarden, dan kan men door de waarden van f te berekenen in die punten, vinden in welke van de gevonden punten f maximaal is. Het zal op grond van deze overweging duidelijk zijn dat bij deze methoden het nodig is dat men *alle* oplossingen van de noodzakelijke voorwaarden vindt!

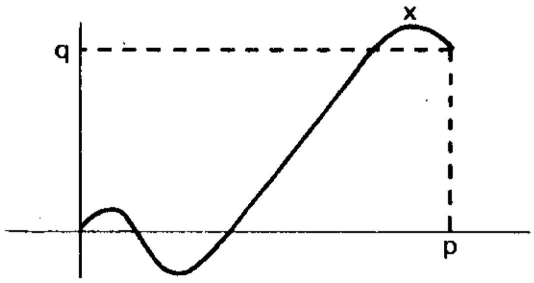
(1.3.1) VOORBEELD. Ter illustratie beschouwen we $S = [a,b]$, een gesloten begrensd interval in $\mathbb{R}^n$, en $f \in C^1([a,b] \to \mathbb{R})$. Op grond van een stelling van Weierstrass is het duidelijk dat er een optimaal punt bestaat. Als noodzakelijke voorwaarde gebruiken we "$f'(x) = 0$ of $x = a$ of $x = b$".



Voor de in de figuur getekende functie vinden we $a_0,\dots,a_6$ als punten die aan de noodzakelijke voorwaarden voldoen. Omdat we weten dat er een optimaal punt moet zijn, concluderen we dat in één van de punten $a_0,\dots,a_6$ de functie f maximaal is. Vergelijking van de functiewaarden $f(a_0),\dots,f(a_6)$ levert dan het optimale punt (in dit geval a_3).

Als men de existentie van een optimaal punt niet heeft bewezen of als men niet alle punten wil bepalen die voldoen aan de noodzakelijke voorwaarden, dan moet men van een gevonden punt achteraf bewijzen dat het inderdaad optimaal is. Als dat mogelijk is, dan zijn de noodzakelijke voorwaarden slechts een heuristisch hulpmiddel om een kandidaat voor optimaliteit te vinden. Het is dan niet nodig dat men deze voorwaarde streng toepast en in feite kan men dan elk heuristisch argument gebruiken om zo'n kandidaat te vinden. Als illustratie beschouwen we het volgende probleem

<u>VOORBEELD</u>. Gegeven zij een punt $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ met $p > 0$. Gevraagd wordt een functie $x \in C^1([0,p] \to \mathbb{R})$ zo te bepalen dat $x(0) = 0$, $x(p) = q$ en zo dat de lengte van de grafiek van de kromme minimaal is. Dit is een voorbeeld van een oneindigdimensionaal optimaliseringsprobleem. Voor zulke problemen zijn



noodzakelijke voorwaarden bekend, die we in hoofdstuk 6 zullen afleiden. Uit die noodzakelijke voorwaarden volgt dat een optimale functie x van de gedaante $x(t) = qt/p$ is, zodat de grafiek de verbindingsrechte van de punten (0,0) en (p,q) is. Uiteraard hebben we deze noodzakelijke voorwaarden niet nodig om tot het vermoeden te komen dat $x(t) = qt/p$ de optimale functie is. We zullen nu laten zien hoe men eenvoudig kan laten zien dat deze functie inderdaad optimaal is.

De lengte van de grafiek van een willekeurige functie $x \in C^1([0,p]\to\mathbb{R})$ is

$$\int_0^p \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt\ .$$

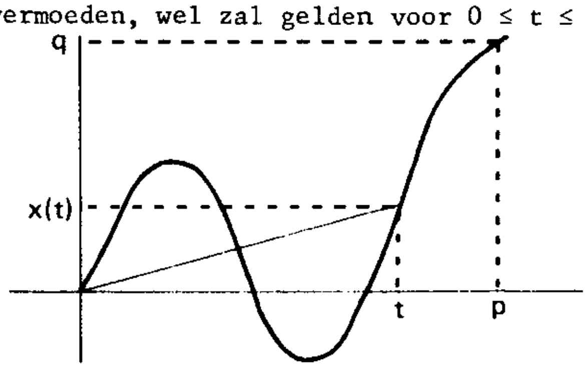
Door de substitutie $x(t) = qt/p$ in deze integraal (of door onmiddellijke toepassing van de stelling van Pythagoras) vinden we dat de lengte van de vermoede optimale grafiek gelijk is aan $\sqrt{p^2+q^2}$. We hebben dus de optimaliteit van de functie $x = qt/p$ aangetoond als we bewezen hebben dat

$$\int_0^p \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt \geq \sqrt{p^2+q^2}$$

voor alle functies $x \in C^1([0,p]\to\mathbb{R})$ met $x(0) = 0$, $x(p) = q$. Iets algemener dan deze ongelijkheid is

$$\lambda(t) := \int_0^t \sqrt{1+\dot{x}^2(\tau)}\,d\tau \geq \sqrt{t^2+x^2(t)} =: \rho(t)$$

welke, naar we vermoeden, wel zal gelden voor $0 \leq t \leq p$.



Het is duidelijk dat $\lambda(0) = \rho(0)$, zodat het gestelde bewezen is zodra $\dot{\lambda}(t) \geq \dot{\rho}(t)$ is aangetoond voor $0 \leq t \leq p$. Er geldt

$$\dot{\lambda}(t) = \sqrt{1+\dot{x}^2(t)},\ \dot{\rho}(t) = \frac{t + x(t)\dot{x}(t)}{\sqrt{t^2+x^2(t)}}\ ,$$

De ongelijkheid $\dot{\rho}(t) \leq \dot{\lambda}(t)$ is daarom equivalent met

$$t + x(t)\dot{x}(t) \leq \sqrt{t^2 + x^2(t)}\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}$$

en dit is niets anders dan de bekende ongelijkheid van Cauchy-Schwarz toegepast op de vectoren $\underline{a} = (x(t),t)$, $\underline{b} = (\dot{x}(t),1)$. □

Het aantonen van de optimaliteit van een gegeven punt gaat relatief gemakkelijk als men de beschikking heeft over voldoende voorwaarden voor optimaliteit. Dan hoeft men slechts na te gaan of het gevonden punt hier aan voldoen.

De tot nu toe beschreven analytische bepaling van optimale punten is alleen uitvoerbaar voor eenvoudige optimaliseringsproblemen. Zulke problemen komen voor bij sterk geïdealiseerde modellen van werkelijke optimaliseringsproblemen en zijn wel nuttig om een eerste indruk te geven in de aard en kwalitatieve eigenschappen van het gezochte optimum. Ook kunnen zulke oplossingen ons een indruk geven van het karakter van oplossingen van analoge maar meer ingewikkelde problemen.

Als men meer realistische problemen wil oplossen dan zal men een beroep moeten doen op numerieke methoden.

2. EENVOUDIGE EINDIGDIMENSIONALE OPTIMALISERINGSPROBLEMEN

2.1. *Raakkegels*

Zoals we in § 1.2 hebben gezien, verkrijgt men noodzakelijke voorwaarden voor optimaliteit van een punt $a \in S$ door linearisatie van het optimaliseringsprobleem in de omgeving van het punt a. Hier zullen we aannemen dat $S \subseteq \mathbb{R}^n$ en $f \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$. Het lineariseren van het probleem valt uiteen in het lineariseren van f en het lineariseren van S. Het eerste is niet zo moeilijk omdat f differentieerbaar is. Daarom kan men voor x in de buurt van a schrijven

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + o(x - a) \qquad (x \to a) . \tag{2.1.1}$$

Hierbij wordt ∇f, de gradiënt van f, opgevat als een rijvector; $\nabla f(a)(x-a)$ is een matrixproduct en dus het inwendige product van de vectoren $\nabla f(a)$ en $x-a$. **Verder** schrijven we $o(x-a)$ $(x \to a)$ voor een willekeurige functie $g(x)$ met de eigenschap

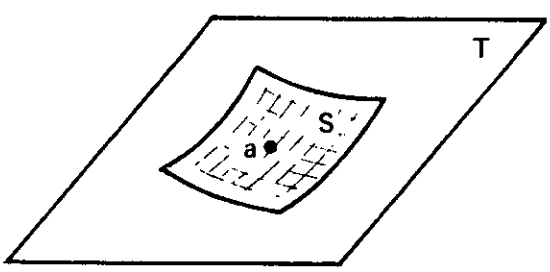
$$\frac{g(x)}{|x - a|} \to 0 \qquad (x \to a) .$$

Het is duidelijk dat

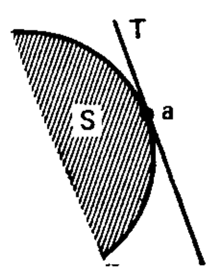
$$f_L(x) := f(a) + \nabla f(a)(x-a)$$

de <u>linearisatie van</u> f <u>in</u> a is. Deze linearisatie wordt voornamelijk gekarakteriseerd door de vector $\nabla f(a)$. De waarde van $f(a)$ treedt alleen op als een irrelevante additieve term. (Als $f(x)$ in een bepaald punt a maximaal is, dan is ook $f(x) + c$ in a maximaal.) Derhalve worden de noodzakelijke voorwaarden (van de eerste orde) wat f betreft volledig uitgedrukt in ∇f.

Het is niet altijd even eenvoudig in te zien hoe een verzameling S moet worden gelineariseerd. We willen nl. betrekkelijk algemene restrictieverzamelingen toelaten, ook in het eindigdimensionale geval. We beschouwen eerst het geval dat S een differentieerbaar oppervlak in $\mathbb{R}^n$ is. Dan is het raakvlak T van S in a kennelijk de aangewezen linearisatie van S in a (figuur 1).



(fig. 1)



(fig. 2)

Als S een verzameling is begrensd door een glad oppervlak en als a op de rand van S ligt (zie figuur 2) dan zal men niet het raakvlak T aan de rand van S beschouwen als de juiste linearisatie van S maar eerder de halfruimte begrensd door T (gelegen aan de geschikte kant van T). Als we meer algemene gebieden gaan beschouwen, zoals doorsneden van gebieden die begrensd worden door gladde oppervlakken, dan zal het voor de hand liggen om de *kegel* als het goede type van verzamelingen beschouwen, waarmee men algemene verzamelingen lineariseert.

(2.1.2) DEFINITIE. *Een verzameling* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *heet een kegel als* $0 \in C$ *en als voor elke* $x \in C$, $\lambda \geq 0$ *geldt* $\lambda x \in C$.

(2.1.3). DEFINITIE. *Zij* $a \in S \subseteq \mathbb{R}^n$. *Een vector* $p \in \mathbb{R}^n$ *heet een* __*raakvector*__ *van* S *in* a *als er een* C^1*-kromme in* S *ligt waaraan* p *raakt, of meer expliciet, als er een functie* $\xi \in C^1([0,\varepsilon) \to S)$ *bestaat voor zekere* $\varepsilon > 0$, *zo dat*

$$\xi(\tau) = a + p\tau + o(\tau) \quad (\tau \to 0) \ .$$

De afsluiting van de verzameling van raakvectoren van S *in* a *heet de* __*raakkegel*__ *van* S *in* a *en wordt aangegeven met* $T_a(S)$.

De raakkegel kan dus worden beschouwd als de linearisatie van S in a. Eigenlijk zouden we $a + T_a(S)$ als benadering moeten opvatten maar $T_a(S)$ is hierbij de relevante informatie (vgl. de discussie over f_L en ∇f).

(2.1.4) EIGENSCHAP.

(i) $T_a(S)$ *is een gesloten kegel.*

(ii) *Als* $S_1 \subseteq S_2$ *en* $a \in S_1$ *dan* $T_a(S_1) \subseteq T_a(S_2)$. □

We geven een paar voorbeelden van verzamelingen en raakkegels.

(2.1.5) STELLING.

(i) *Als*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$$

waar $g \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *en als* $g(a) = 0$, $\nabla g(a) \neq 0$, *dan is*

$$T_a(S) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g(a)p \leq 0\} \ .$$

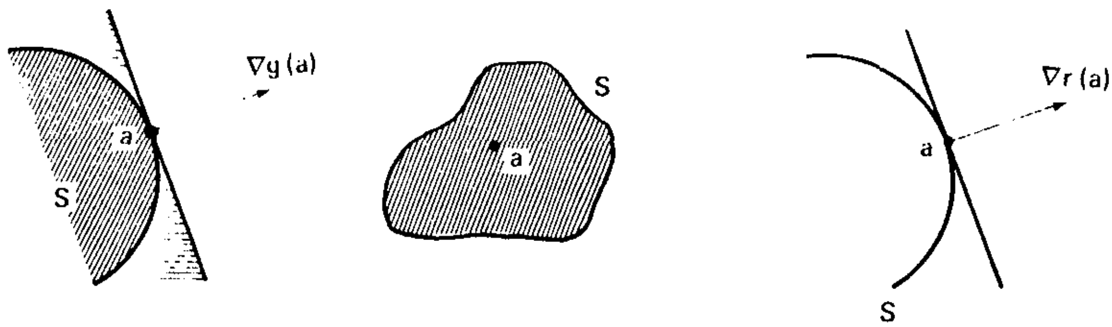
(ii) *Als* $a \in \text{int } S$ *(het inwendige van* S*) dan is* $T_a(S) = \mathbb{R}^n$.

(iii) *Als*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r(x) = 0\}$$

waar $r \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *en als* $r(a) = 0$, $\nabla r(a) \neq 0$, *dan is*

$$T_a(S) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \nabla r(a)p = 0\} .$$



(i) (ii) (iii)

BEWIJS.

(i) Zij

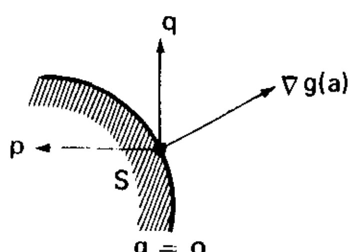
$$C := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g(a)p \leq 0\} .$$

Eerst tonen we $C \subseteq T_a(S)$ aan. Laat $p \in \text{int } C$ (het inwendige van C), dus $\nabla g(a)p < 0$. Dan is $\xi(\tau) := a + p\tau \in S$ voor kleine $\tau > 0$. Immers,

$$g(\xi(\tau)) = g(a + p\tau) = g(a) + \nabla g(a)p\tau + o(\tau) =$$

$$= \tau\{\nabla g(a)p + o(1)\} < 0$$

als τ klein en positief is. De kromme waaraan p raakt is dus in dit geval een recht lijnstukje. Hieruit volgt dat elke $p \in \text{int } C$ een raakvector is. Daar $C = \overline{\text{int } C}$ volgt hieruit $C \subseteq T_a(S)$. *Veronderstel nu*



dat $q \notin C$, d.w.z. dat $\nabla g(a)q > 0$. Als $\xi \in C^1([0,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n)$ voldoet aan

$$\xi(\tau) = a + q\tau + o(\tau) \quad (\tau \downarrow 0)$$

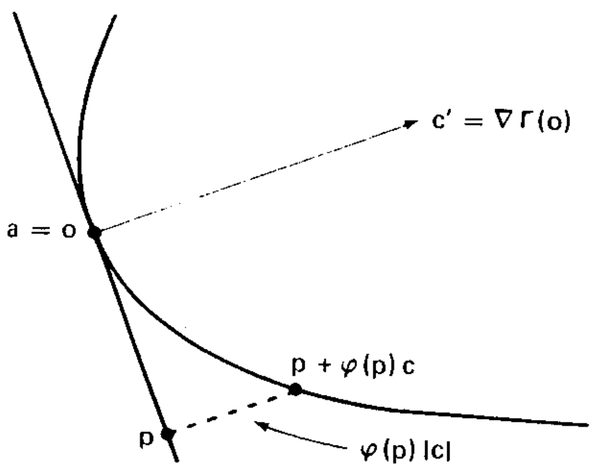
dan geldt

$$g(\xi(\tau)) = g(a) + \nabla g(a)q\tau + o(\tau) > 0$$

voor kleine positieve τ. Dus $\xi(\tau) \notin S$. Blijkbaar is q geen raakvector. Hieruit volgt $T_a(S) \subseteq C$.

(ii) Zij $p \in \mathbb{R}^n$. Daar $a \in \operatorname{int} S$ geldt $\xi(\tau) := a + p\tau \in S$ voor kleine positieve τ. Dus elke $p \in \mathbb{R}^n$ is een raakvector.

(iii) Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $a = 0$. Zij



$$C := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \nabla r(0)p = 0\} .$$

Eerst tonen we $C \subseteq T_a(S)$ aan. We zoeken bij elke p in de omgeving van de oorsprong het snijpunt van het oppervlak S en de rechte door p evenwijdig aan $c' = \nabla r(0)$ (c is een kolomvector). Beschouw $h \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$h(p,\omega) := r(p + \omega c) .$$

Dan geldt $h(0,0) = 0$ en $\partial h/\partial\omega = \nabla r(p + \omega c)c$, dus

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \omega}\right)_{(0,0)} = |c|^2 \neq 0 .$$

We kunnen derhalve de <u>impliciete-functiestelling</u> toepassen ([A&A], (6.6.1), WSK 30, (2.3.3)). Op grond van deze stelling bestaat er een C^1-functie φ gedefinieerd in een omgeving van $a = 0$ met de eigenschappen

$$\varphi(0) = 0, \; h(p,\varphi(p)) = 0 .$$

Het gezochte snijpunt is nu $p + \varphi(p)c$. Immers $r(p + \varphi(p)c) = 0$. Uit

$$0 = \frac{\partial}{\partial p}(h(p,\varphi(p)) = (h_p + h_\omega \nabla\varphi)_{(p,\varphi(p))} =$$

$$= \nabla r(p + \varphi(p)c) + \nabla r(p + \varphi(p))c\nabla\varphi(p)$$

vinden we door substitutie $p = 0$ dat

$$|c|^2\nabla\varphi(0) + \nabla r(0) = 0 .$$

Als nu $p \in C$, dan volgt hieruit dat $\nabla\varphi(0)p = 0$. Voor voldoend kleine $\tau > 0$ is dan $\varphi(\tau p)$ gedefinieerd. We definiëren nu

$$\xi(\tau) = \tau p + \varphi(\tau p)c .$$

Dan geldt blijkbaar $r(\xi(\tau)) = 0$ voor kleine τ en verder

$$\xi(\tau) = \tau p + \{\varphi(0) + \nabla\varphi(0)p\tau + o(\tau)\}c = \tau p + o(\tau)$$

zodat p raakt aan de kromme met parametervoorstelling ξ. Hieruit volgt $C \subseteq T_a(S)$. Het bewijs van de omgekeerde inclusie is analoog aan het overeenkomstige bewijs in (i). □

Met behulp van $\nabla f(a)$ en de raakkegel van S in a zullen we een noodzakelijke voorwaarde voor de optimaliteit van a formuleren. Daartoe zullen we gebruik maken van het begrip polaire kegel. In de volgende paragrafen zullen we dit begrip definiëren en we zullen enige eigenschappen ervan formuleren die van belang zijn voor de rest van het dictaat (in het bijzonder voor hfst. 5).

2.2. *Convexe kegels*

Laat $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ en een lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeven zijn. Dan voeren we de volgende notaties in:

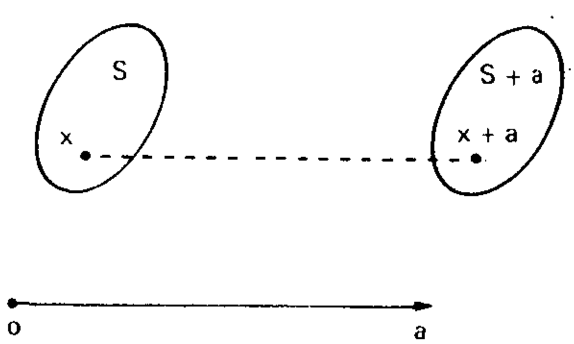
$$a + S := S + a := \{x + a \mid x \in S\} .$$

$$S \pm T := \{x \pm y \mid x \in S, y \in T\} .$$

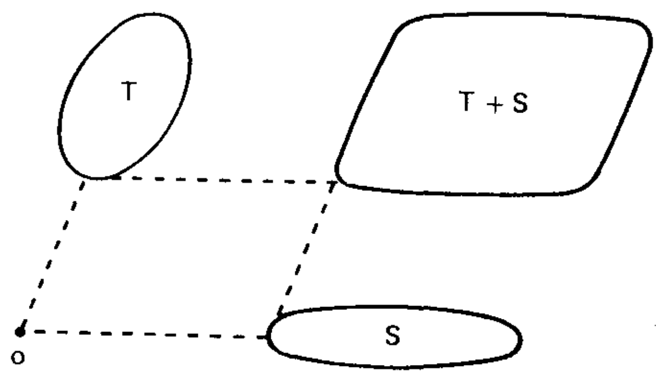
$$\lambda S := \{\lambda x \mid x \in S\} .$$

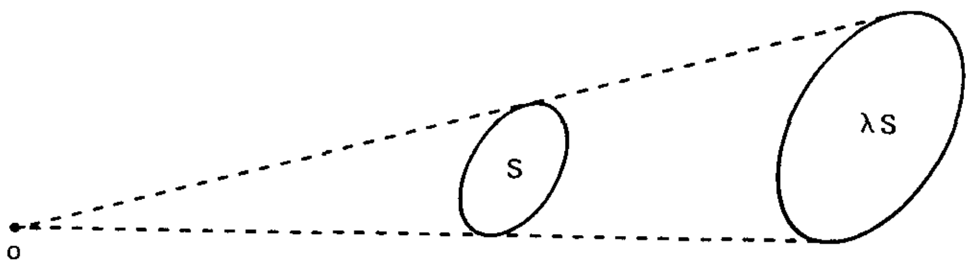
$$AS := \{Ax \mid x \in S\} .$$

Aan de eerste drie begrippen kunnen we een meetkundige interpretatie geven: a + S is het resultaat van een verschuiving over de vector a van de verzameling S.



Verder is $S + T = \bigcup_{a \in T} (S + a)$, en λS is een vermenigvuldiging van S met λ t.o.v. de oorsprong

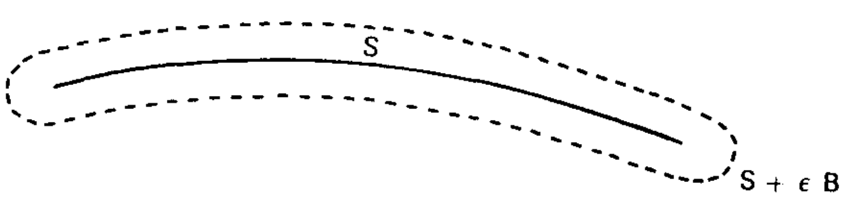




We zullen de volgende notatie gebruiken voor de eenheidsbol:

$$\mathbb{B} := \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\} .$$

Dan is bijvoorbeeld $a + \rho\,\mathbb{B}$ de bol met middelpunt a en straal ρ. Als S een willekeurige verzameling in $\mathbb{R}^n$ is dan is $S + \varepsilon\,\mathbb{B}$ de ε-omgeving van S:



Als T een deelruimte is, dan is $a + T$ het "vlak" (= lineaire variëteit) door a evenwijdig aan T.

(2.2.1). EIGENSCHAP. *Laat* S,T,U *deelverzamelingen van* $\mathbb{R}^n$ *zijn, en* λ,μ *reële getallen. Dan geldt*

(i) $(S + T) + U = S + (T + U)$

(ii) $S + T = T + S$

(iii) $\lambda(S + T) = \lambda S + \lambda T$

(iv) $\lambda(\mu S) = (\lambda\mu)S$

(v) $(\lambda + \mu)S \subseteq \lambda S + \mu S$

(vi) *Als* $\lambda,\mu \geq 0$, *dan is* $\lambda\mathbb{B} + \mu\mathbb{B} = (\lambda + \mu)\mathbb{B}$.

(vii) *Als* S *open is, dan is* $S + T$ *open.*

(viii) *Als* S *gesloten is en* T *compact, dan is* $S + T$ *gesloten.* □

Aan het volgende voorbeeld zien we dat in eigenschap (2.2.1.v) niet noodzakelijk het gelijkteken geldt:

(2.2.2) VOORBEELD. Als $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\}$, d.w.z. de vereniging van de x- en de y-as, dan is $2S = S$ en $S + S = \mathbb{R}^2$. □

Als S en T gesloten zijn, dan is niet noodzakelijk $S + T$ gesloten.

(2.2.3) VOORBEELD. Zij

$$S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ xy \leq -1\},\quad T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ xy \geq 1\}.$$

Dan zijn S en T gesloten en

$$S + T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

is het open bovenhalfvlak. □

Een kegel (zie definitie (2.1.2)) die een convexe verzameling is noemen we een <u>convexe kegel</u>. Een equivalente karakterisering wordt gegeven door

(2.2.4) EIGENSCHAP. *Een verzameling* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *is een convexe kegel als* $0 \in C$ *en als* $\lambda x + \mu y \in C$ *geldt voor elke* $x,y \in C$ *en* $\lambda,\mu \geq 0$. □

Voorbeelden van convexe kegels zijn $\mathbb{R}^n$, $\{0\}$, lineaire deelruimten, en het positieve orthant:

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ (i = 1,\dots,n)\} .$$

(2.2.5) EIGENSCHAP. *De doorsnede van twee of meerdere convexe kegels is een convexe kegel.* □

(2.2.6) DEFINITIE. *Als* $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1,\dots,k)$, *dan heet* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ *een positieve combinatie van* $x_1,\dots,x_k$.

Een positieve combinatie is dus een lineaire combinatie met niet-negatieve coëfficiënten.

(2.2.7) DEFINITIE. *Als* $S \subseteq \mathbb{R}^n$, *dan is* po S *de verzameling van alle positieve combinaties van elementen van* S. *We noemen* po S *het positieve opspansel (of omhulsel) van* S. *Verder geeft* li S *het lineaire opspansel van* S *aan, d.w.z. de verzameling van alle lineaire combinaties van elementen uit* S.
Tenslotte definiëren we **po $\emptyset$ = li $\emptyset$ = $\{0\}$.**

We kunnen po S (li S) beschouwen als de kleinste convexe kegel (lineaire ruimte) waar S in ligt.

(2.2.8) VOORBEELD.
(i) po$\{x,y\}$ is de sector tussen x en y.
(ii) Als $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}^n$, dan is

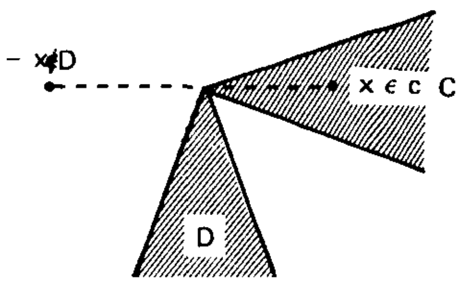
$$\text{po}\{a_1,\dots,a_k\} = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0\} = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^k_+\} = A\mathbb{R}^k_+ ,$$

waar $A := [a_1,\dots,a_k]$ de matrix is met de vectoren $a_1,\dots,a_k$ als kolommen. po$\{a_1,\dots,a_k\}$ is een convexe kegel opgespannen door eindig veel elementen. Zo'n convexe kegel wordt ook wel veelhoekskegel genoemd. Men kan bewijzen dat een veelhoekskegel altijd gesloten is (zie [RO, Thm. 19.1]). □

(2.2.9) EIGENSCHAP. *Als* C *een convexe kegel is, dan is ook* $\bar{C}$ *(de afsluiting van* C*) een convexe kegel.* □

(2.2.10) STELLING. *Als* C *en* D *gesloten convexe kegels zijn en* $C \cap (-D) = \{0\}$ *dan is* C + D *gesloten.*

BEWIJS. Zij $x_n \in C + D$ $(n = 1,2,\ldots)$ en $x_n \to x$. We moeten bewijzen dat



$x \in C + D$. x_n is te schrijven als $x_n = y_n + z_n$ met $y_n \in C$, $z_n \in D$. We beweren dat y_n begrensd is. Is dit namelijk niet het geval dan bestaat er een deelrij y_{n_k} met $|y_{n_k}| \to \infty$ $(k \to \infty)$. Omdat de vectoren $y_{n_k}/|y_{n_k}|$ in de compacte verzameling $S := \{x \mid |x| = 1\}$ liggen, kunnen we door eventueel weer op een deelrij over te gaan (die we voor het gemak weer met y_{n_k} aangeven), bereiken dat $y_{n_k}/|y_{n_k}| \to y \in S$. Ook zien we dat dan $y \in C$ omdat C een gesloten convexe kegel is. Verder geldt:

$$\frac{z_{n_k}}{|y_{n_k}|} = \frac{x_{n_k}}{|y_{n_k}|} - \frac{y_{n_k}}{|y_{n_k}|} \to 0 - y \qquad (k \to \infty)$$

zodat $-y \in D$. Dit levert echter een tegenspraak op met het gegeven, omdat we weten, dat $|y| = 1$ en dus $y \neq 0$ is.

Uit de begrensdheid van y_n volgt dat er een deelrij y_{m_k} bestaat die convergeert: $y_{m_k} \to \bar{y} \in C$. Dan geldt echter $z_{m_k} = x_{m_k} - y_{m_k} \to x - \bar{y} \in D$ en dus $x = \bar{y} + (x - \bar{y}) \in C + D$. □

2.3. *Polaire kegels en separatie*

We zullen naast kolomvectoren ook rijvectoren beschouwen. De verzameling der n-dimensionale rijvectoren geven we aan met $\mathbb{R}_n$. Een vector $\eta \in \mathbb{R}_n$ is dus een $1 \times n$-matrix. Als $x \in \mathbb{R}^n$, dan is x een $n \times 1$-matrix, zodat het matrixproduct $\eta x = \eta_1 x_1 + \ldots + \eta_n x_n$ is gedefinieerd. Dit is het inwendige product van η en x.

Als A een matrix is, dan is A' de getransponeerde matrix (in WSK 20 wordt de notatie A^T gebruikt). In het bijzonder is a' een rijvector als a een kolomvector is en a'b het inwendige product van a en b ($a,b \in \mathbb{R}^n$). Verder zullen we vaak om typografische redenen kolomvectoren noteren als rijvectoren met ronde haken in plaats van rechthoekige haken. Dus $[x_1,\dots,x_n] \in \mathbb{R}_n$, als $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1,\dots,n$) en

$$(x_1,\dots,x_n) = [x_1,\dots,x_n]' = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Als we twee rijvectoren $\xi = [\xi_1,\dots,\xi_n]$ en $\eta = [\eta_1,\dots,\eta_k]$ samenvoegen tot een vector in $\mathbb{R}_{n+k}$, nl. $[\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_k]$, dan gebruiken we de notatie $[\xi,\eta]$. Als $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, dan schrijven we (x,y) i.p.v. $[x',y']'$ voor de vector $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)$. Als $S \subseteq \mathbb{R}^m$, $T \subseteq \mathbb{R}^n$, dan is

$$S \times T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid x \in S,\ y \in T\}$$

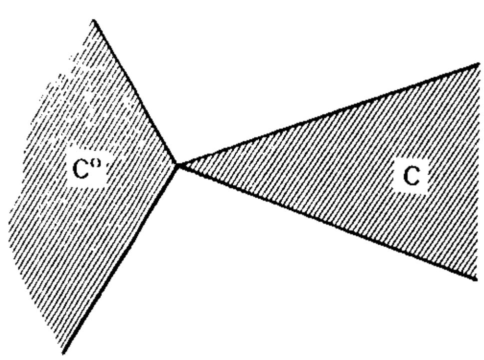
het <u>cartesisch</u> product van S en T. Als C en D convexe kegels zijn, dan is ook $C \times D$ een convexe kegel.

Elke definitie en eigenschap gegeven voor $\mathbb{R}^n$ kan door transpositie worden vertaald in een eigenschap voor $\mathbb{R}_n$. We zullen gewoonlijk deze getransponeerde eigenschappen gebruiken zonder ze expliciet te noemen.

(2.3.1) DEFINITIE. *Als* C *een kegel is, dan is de* <u>*polaire kegel*</u> *van* C *gegeven door*

$$C^0 := \{\eta \in \mathbb{R}_n \mid \eta x \le 0 \text{ voor alle } x \in C\} .$$

(2.3.2) EIGENSCHAP. C^0 *is een gesloten convexe kegel*



(2.3.3) VOORBEELD.

(i) $(\mathbb{R}^n)^0 = \{0\}$, $\{0\}^0 = \mathbb{R}_n$.

(ii) Als M een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is, dan *is* M^0 *het* <u>orthogonale complement</u> van M:

$$M^0 := M^{\perp} := \{\eta \in \mathbb{R}_n \mid \eta x = 0 \text{ voor alle } x \in M\}\ .$$

(*iii*) Als in het bijzonder $L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \eta x = 0\}$ waar $\eta \neq 0$, dan is L een hypervlak loodrecht op η. Dan geldt $L^0 = \{\lambda\eta \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Zij verder $H := \{x \mid \eta x \leq 0\}$. Dan is H een halfruimte, begrensd door L. Er geldt $H^0 = \{\lambda\eta \mid \lambda \geq 0\}$.

(iv) Als $C = A\mathbb{R}^k_+$ een veelhoekskegel is (zie (2.2.8.ii)) dan is $C^0 = \{\eta \in \mathbb{R}_n \mid \eta A \leq 0\}$ (de vectorongelijkheid wordt componentsgewijze opgevat), d.w.z. C^0 is een doorsnede van eindig veel halfruimten. Zo'n kegel wordt een <u>veelvlakskegel</u> genoemd. Men kan bewijzen dat elke veelhoekskegel een veelvlakskegel is en omgekeerd (zie [RO, Thm. 19.1]). □

(2.3.4) EIGENSCHAP. *Laat* C *en* D *kegels zijn. Dan geldt*

(i) *Als* $C \subseteq D$, *dan is* $C^0 \supseteq D^0$,

(ii) $C^0 = (\bar{C})^0$,

(iii) $(C \times D)^0 = C^0 \times D^0$,

(iv) $(-C)^0 = -C^0$,

(v) $(\text{po } C)^0 = C^0$. □

De volgende stelling is fundamenteel:

(2.3.5) STELLING. *Zij* C *een gesloten convexe kegel. Dan geldt* $C^{00} = C$ *(waar* $C^{00} := (C^0)^0$).

BEWIJS. Als $a \in C$, dan geldt $\psi a \leq 0$ voor alle $\psi \in C^0$ en dus $a \in C^{00}$.

Veronderstel nu dat $a \notin C$. We zullen een $\psi \in C^0$ aangeven met $\psi a > 0$, waaruit we kunnen concluderen dat $a \notin C^{00}$. Kies b zo dat $|a - b| = \min\{|a - x| \mid x \in C\}$. Zo'n b bestaat omdat C gesloten is. We definiëren $p := a - b$. Als $x \in C$, $\lambda \geq 0$, $\mu \leq 1$, dan is $(1 - \mu)b + \lambda x \in C$, dus

$|p|^2 \le |a-(1-\mu)b-\lambda x|^2 = |p+\mu b-\lambda x|^2$. Als we het rechterlid van deze ongelijkheid met $F(\lambda,\mu)$ aangeven, dan zien we, dat $F(0,0) \le F(\lambda,\mu)$. Derhalve:

$$\tfrac{1}{2}F_\lambda(0,0) = -p'x \le 0, \quad \tfrac{1}{2}F_\mu(0,0) = p'b = 0 \; .$$

Als dus $\psi := p'$, dan geldt $\psi x \le 0$ voor alle $x \in C$, dus $\psi \in C^0$ en $\psi a = \psi b + \psi p = p'p > 0$, omdat $p \neq 0$. □

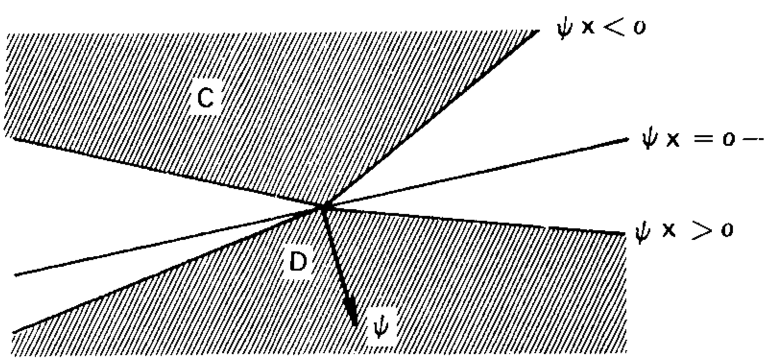
(2.3.6) GEVOLG. *Als* C *een willekeurige kegel is, dan is*

$$C^{00} = \overline{\text{po } C} \; .$$

BEWIJS. Dit volgt uit $C^0 = (\overline{\text{po } C})^0$ (zie (2.3.4)). □

(2.3.7) VOORBEELD. Als $C = A\mathbb{R}^n_+$, dan is $C^0 = \{\eta \in \mathbb{R}_n \mid \eta A \le 0\}$ (zie (2.3.3.(iv)). Het resultaat $C^{00} = C$ kunnen we dan als volgt formuleren:
"*Zij* $b \in \mathbb{R}^n$. *Dan heeft de vergelijking* $Ax = b$ *een oplossing* $x \ge 0$, *dan en slechts een oplossing* $x \ge 0$ *als uit* $\eta A \le 0$ *volgt* $\eta b \le 0$".
Dit is het beroemde Lemma van Farkas. Stelling (2.3.5) kan dus worden gezien als een generalisatie van dit lemma. □

(2.3.8) DEFINITIE. *Twee convexe kegels* C *en* D *heten gesepareerd als er een* $\psi \neq 0$ *bestaat met* $\psi x \le 0$ *voor alle* $x \in C$ *en* $\psi y \ge 0$ *voor* $y \in D$. C *en* D *zijn dus gesepareerd als er een* $\psi \in C^0$, $\psi \neq 0$ *bestaat met* $-\psi \in D^0$, *m.a.w. als* $C^0 \cap (-D)^0 \neq \{0\}$.



(2.3.9) STELLING. *Laat* C *en* D *gesloten convexe kegels zijn. Dan geldt:*
(i) $(C+D)^0 = C^0 \cap D^0$,
(ii) $(C \cap D)^0 = \overline{C^0 + D^0}$,
(iii) *Als* C *en* D *niet gesepareerd zijn, dan is* $(C \cap D)^0 = C^0 + D^0$.

BEWIJS.

(i) Uit $C \subseteq C + D$ volgt $C^0 \supseteq (C + D)^0$. Zo ook $D^0 \supseteq (C + D)^0$ en dus $C^0 \cap D^0 \supseteq (C + D)^0$. Zij nu $\psi \in C^0 \cap D^0$. Dan geldt voor alle $x \in C$ en $y \in D$ dat $\psi(x + y) = \psi x + \psi y \leq 0$, dus $\psi \in (C + D)^0$.

(ii) $C \cap D = C^{00} \cap D^{00} = (C^0 + D^0)^0$ en dus $(C \cap D)^0 = (C^0 + D^0)^{00} = \overline{C^0 + D^0}$.

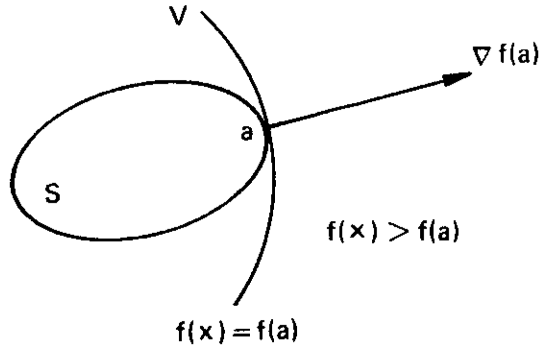
(iii) Als C en D niet gesepareerd zijn, dan is $C^0 \cap (-D^0) = \{0\}$. Uit stelling (2.2.10) volgt dat $C^0 + D^0$ gesloten is. □

2.4. *Een noodzakelijke voorwaarde voor optimaliteit en een existentiestelling*

Laat a een oplossing zijn van $OP(S,f)$, dus $f(x) \leq f(a)$ voor alle $x \in S$. Dan beschouwen we de verzamelingen S en

(2.4.1) $\quad V := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(a)\}$.

Blijkbaar geldt dan $S \subseteq V$.



Uit (2.1.4)(ii) volgt dan $T_a(S) \subseteq T_a(V)$. Deze voorwaarde kan men beschouwen als de linearisatie van de optimaliteitsvoorwaarde $S \subseteq V$. Het is echter gemakkelijker te werken met de polaire vorm:

(2.4.2) $\quad T_a^0(V) \subseteq T_a^0(S)$.

(Vergelijk (2.3.4)(i).) Dit levert ons het volgende resultaat:

(2.4.3) STELLING. *Zij* $f \in C^1$ *in een omgeving van* a *en zij* a *een optimaal punt, d.w.z. een oplossing van* $OP(S,f)$. *Dan geldt*

(2.4.4) $\quad \nabla f(a) \in T_a^0(S)$.

BEWIJS. Als $\nabla f(a) = 0$, dan is aan (2.4.4) zeker voldaan. Als $\nabla f(a) \neq 0$, dan is volgens (2.1.5)(i), toegepast op $g(x) := f(x) - f(a)$, de verzameling $\{p \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(a)p \leq 0\}$ de raakkegel $T_a(V)$. Uit (2.3.3)(iii) volgt dat $T_a^0(V) = \{\mu \nabla f(a) \mid \mu \geq 0\}$ zodat (2.4.2) equivalent is met (2.4.4). □

Merk op dat $T_a^0(S)$ een convexe kegel is, ook al is dit niet het geval voor $T_a(S)$. Als f niet differentieerbaar is, dan geldt wel (2.4.2) maar niet (2.4.4). Bedenk ook dat we hebben afgesproken dat $\nabla f(a)$ een rijvector is, hetgeen in (2.4.4) tot uiting komt.

(2.4.5) VOORBEELD.

(i) Als $S \subseteq \mathbb{R}^n$ en $a \in \text{int } S$, dan is volgens (2.1.5)(ii) $T_a(S) = \mathbb{R}^n$ en dus $T_a^0(S) = \{0\}$. Voor een optimaal punt a geldt dan $\nabla f(a) = 0$, een welbekend resultaat.

(ii) Als

$$S = \{x \mid r(x) = 0\}$$

waar $r \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ en als a een optimaal punt is, dan geldt, onder de voorwaarde $\nabla r(a) \neq 0$, dat

$$T_a(S) = \{p \mid \nabla r(a)p = 0\}$$

(zie (2.1.5)(iii) en dus (zie (2.3.3)(iii)):

$$T_a^0(S) = \{\lambda \nabla r(a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

Voor een optimaal punt a bestaat er dan een reële λ zo dat

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla r(a) .$$

Dit is een eenvoudig geval van een bekend resultaat, nl. de <u>multiplicatorenstelling van Lagrange</u>.

(iii) Zij

$$S = \{x \mid g(x) \leq 0\}$$

waar $g \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$. Als a optimaal is, $g(a) = 0$, $\nabla g(a) \neq 0$, dan vinden we op analoge wijze de existentie van een getal $\mu \geq 0$ met

$$\nabla f(a) = \mu \nabla g(a) .$$

Als $g(a) < 0$, dan is (i) van toepassing. We kunnen beide resultaten als volgt in één keer formuleren

$$\nabla f(a) = \mu \nabla g(a) \quad \text{met} \quad \mu g(a) = 0 . \qquad \square$$

De volgende stelling geeft voorwaarden waaronder de existentie van een optimaal punt is verzekerd.

(2.4.6) STELLING. *Zij* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *niet leeg en* $f \in C(S \to \mathbb{R})$. *Dan bestaat er oplossing van* $OP(S,f)$ *in elk van de volgende situaties.*

(i) S *is compact*

(ii) S *is gesloten en* $f(x) \to -\infty \qquad (x \to \infty)$.

BEWIJS.

(i) Dit is de bekende stelling van Weierstrass (zie [A & A, 5.7.9], WSK20 (2.6.1)).

(ii) Er bestaat een getal r zo dat $f(x) \le f(0)$ $(|x| > r,\ x \in S)$. Op de compacte verzameling

$$K := \{x \in S \mid |x| \le r\}$$

neemt f een maximum aan, zij in $x = a$. Daar ook $0 \in K$, vinden we

$$f(a) \ge f(0) \ge f(x) \qquad (x \in S\backslash K)$$

zodat a ook een oplossing is van $OP(S,f)$. □

(2.4.7) VOORBEELD. Zij A een symmetrische positief definiete matrix (d.w.z. $x'Ax > 0$ voor $x \neq 0$). Dan zijn alle eigenwaarden van A positief, zodat $x'Ax \ge \alpha x'x$, waar $\alpha > 0$ is (we kunnen voor α de kleinste eigenwaarde kiezen). Hieruit volgt dat voor de functie

$$f(x) := x'Ax + 2b'x + c$$

waar $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ geldt $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Uit (2.4.6)(iv) volgt dat f een minimum aanneemt op elke niet-lege gesloten verzameling S. Zij $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p'x = q\}$, waar $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ en $q \in \mathbb{R}$, d.w.z. S is een hypervlak. Dan neemt f een minimum aan in een punt $a \in S$. Volgens (2.4.5)(ii) bestaat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zo dat $\nabla f(a) = \lambda \nabla r(a)$, waar $r(x) := p'x - q$. Dus

$$2a'A + 2b' = \lambda p' ,$$

d.w.z.

$$Aa = \mu p - b \ ,$$

waar $\mu = \frac{1}{2}\lambda$. Daar A niet-singulier is, volgt hieruit

$$a = A^{-1}(\mu p - b) \ .$$

De multiplicator μ moet nog worden bepaald uit de vergelijking $p'x = q$, d.w.z.

$$\mu p'A^{-1}p = p'A^{-1}b + q$$

dus

$$\mu = \frac{p'A^{-1}b + q}{p'A^{-1}p} \ .$$

Merk op dat $p'A^{-1}p > 0$ omdat ook A^{-1} positief definiet is. Uiteindelijk vinden we

$$a = \frac{p'A^{-1}b + q}{p'A^{-1}p} A^{-1}p - A^{-1}b \ .$$

In het geval dat $b = 0$, zien we dat

$$a = \frac{q}{p'A^{-1}p} A^{-1}p$$

een lineaire functie van q is. Voor de minimale waarde van f, dus voor f(a), vinden we (nog steeds onder de veronderstelling $b = 0$),

$$f(a) = \frac{q^2}{p'A^{-1}p} + c \ ,$$

een kwadratische functie in q. $\square$

3. *OPTIMALE BESTURING*

3.1. *Formulering van het probleem*

We beschouwen een systeem waarvan de toestand x (gekarakteriseerd door n reële getallen $x_1,\dots,x_n$) afhankelijk is van een parameter t (gewoonlijk geinterpreteerd als de tijd) en waarbij die afhankelijkheid van x t.a.v. de tijd beschreven wordt door middel van een gewone differentiaalvergelijking.

Hierbij nemen we aan dat op het verloop van het proces x(t) invloed kan worden uitgeoefend. We zeggen dat we zo'n proces kunnen regelen of besturen (eng. control). Hier volgen enkele voorbeelden:

1) In een chemisch proces kunnen we de reacties beinvloeden door middel van de temperatuur, druk (als we te maken hebben met gassen) en door toevoeging van andere stoffen (katalysatoren).
2) Mechanische systemen kan men beinvloeden door op bepaalde punten krachten uit te oefenen. Een auto kan men sturen, men kan gas geven en remmen. In een raket kan men de uitlaatsnelheid regelen.
3) Een electrisch systeem kan men besturen door de spanning van een spanningsbron te veranderen.
4) **Het verloop in een economisch systeem is afhankelijk van prijs- en investeringsbeleid.**

Ook in hoofdstuk 1 hebben we enkele voorbeelden van besturingssystemen gezien. De systemen die wij zullen bespreken worden bepaald door vergelijkingen van de vorm

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \tag{3.1.1}$$

voor $0 \le t \le T$, waarbij T een gegeven positief getal is, $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$ vectorwaardige functies en $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$. Hierin is $U \subseteq \mathbb{R}^m$ een vooraf gegeven verzameling. De functies $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$ die in het rechterlid voorkomen heten besturingen. We eisen van deze functies dat ze voldoen aan de volgende eigenschappen:

(i) $u(t) \in U$ voor $0 \le t \le T$.
(ii) u is stuksgewijs continu.

De verzameling van functies die aan deze eigenschappen voldoen geven we aan met Ω. Volledigheidshalve geven we een definitie van stuksgewijze continuïteit.

(3.1.2) DEFINITIE. *Een functie* $v\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$ *heet stuksgewijs continu als er een partitie* $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ *van* $[0,T]$ *bestaat en functies* $v_i \in C([t_{i-1},t_i] \to \mathbb{R}^m)$ *voor* $i = 1,\dots,p$, *zo dat* $v(t) = v_i(t)$ $(t_{i-1} < t < t_i)$ *geldt voor* $i = 1,\dots,p$.

Equivalent is de volgende omschrijving:
v *is continu op een eindig aantal punten na, in welke de rechter en de linkerlimiet van* v *bestaan.*

We hebben de formulering van (3.1.2) gekozen, omdat deze zich gemakkelijk laat generaliseren (zie definitie (3.1.4)).

De eis dat de besturingen waarden aannemen in een vooraf gegeven verzameling U correspondeert met de beperkingen waaraan stuurvariabelen in concrete problemen onderhevig zijn. De tweede eis, de stuksgewijze continuïteit, wordt gesteld omdat enerzijds de functies u glad genoeg moeten zijn, om de existentie van oplossingen van (3.1.1) te garanderen en anderzijds omdat zoals we in voorbeeld (1.2.1) hebben gezien, we onder de voorwaarde dat u continu is in het algemeen niet de existentie van een optimale besturing kunnen verwachten. Eigenlijk zouden we, om van deze existentie verzekerd te kunnen zijn, een algemenere klasse van besturingen, nl. Lebesgue-integreerbare functie moeten toelaten, maar eenvoudigheidshalve beperken we ons hier tot stuksgewijs continue functies. In § 3.3, zullen we bij de behandeling van existentiestellingen wel een algemenere klasse besturingen toelaten. Bij de afleiding van optimaliteitsvoorwaarden, is het niet belangrijk welke klasse van besturingen men toelaat, mits maar is voldaan aan de volgende voorwaarde: *Als* u *en* v *besturingen zijn en* $\tau \in (0,T)$, *dan is de functie* $w: [0,T] \to \mathbb{R}^m$, *gedefinieerd door*

$$w(t) := \begin{cases} u(t) & (0 \leq t < \tau) \\ v(t) & (\tau \leq t \leq T) \end{cases}$$

ook een besturing. Aan deze voorwaarde voldoen de verzameling van stuksgewijs continue, Riemannintegreerbare, Lebesgue-integreerbare, stuksgewijs constante functies, maar niet de verzameling van continue functies.

Voor gegeven $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$ kunnen we nu het beginwaardeprobleem

(3.1.3) $\quad \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\ x(0) = x_0$

beschouwen. De vraag is of (3.1.3) een eenduidig bepaalde oplossing heeft. Daartoe maken we gebruik van de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen (zie [GDV, hoofdstuk 1], [CL, Ch. I,II]).

(3.1.4) DEFINITIE. *Een functie* $g\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *heet continu t.a.v.* x *en stuksgewijs continu t.a.v.* t *als er een partitie* $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ *van* $[0,T]$ *bestaat en functies*

$$g_i \in C([t_{i-1},t_i] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n) \qquad (i = 1,\dots,p)$$

zo dat

$$g(t,x) = g_i(t,x) \qquad (t_{i-1} < t < t_i,\ x \in \mathbb{R}^n)$$

geldt voor $i = 1,\dots,p$. *De verzameling van functies* g *die aan deze eigenschappen voldoen, geven we aan het* $SC([0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$.

Voor $g \in SC([0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ met partitie $0 = t_0 < \dots < t_p = T$ beschouwen we de differentiaalvergelijking

(3.1.5) $\quad \dot{x}(t) = g(t,x(t))$.

We noemen x een <u>oplossing</u> van (3.1.5) als x continu is op $[0,T]$, continu differentieerbaar op elk der intervallen (t_{i-1},t_i) (we zeggen dat x <u>stuksgewijs continu differentieerbaar</u> is) en als (3.1.5) geldt op elk der intervallen (t_{i-1},t_i).

Dan geldt het volgende resultaat:

(3.1.6) STELLING. *Zij* $g \in SC([0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ *continu differentieerbaar t.a.v.* x. *Dan geldt:*

(i) *Voor elke* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *is er een getal* $T_1 \in (0,T]$ *zo dat er een oplossing* x *van (3.1.5) bestaat op* $[0,T_1]$ *met* $x(0) = x_0$ *(<u>locale existentiestelling</u>).*

(ii) *Als* x *en* y *oplossingen op* $[0,T_2]$ *zijn van (3.1.5) met* $x(0) = y(0)$ *dan geldt* $x(t) = y(t)$, $0 \le t \le T_2$ *(<u>eenduidigheidsstelling</u>).*

Voor het bewijs verwijzen we naar ([CL, Ch. I,II],[GVD, Hoofdstuk 1]).

Op grond van (3.1.6) is er bij elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$ een eenduidig bepaalde oplossing $x(t)$ van (3.1.5) met $x(0) = x_0$. Deze oplossing is gedefinieerd op een interval van de gedaante $[0,T_1]$ met $T_1 > 0$. Het is niet noodzakelijk zo, dat de oplossing op het hele oorspronkelijk gegeven interval $[0,T]$ bestaat, m.a.w. er is niet noodzakelijk globale existentie. We zullen de oplossing van (3.1.5) met <u>beginwaarde</u> x_0 aangeven met $\xi(t,x_0)$, daarbij aannemend dat het duidelijk is over welke differentiaalvergelijking we spreken.

Ook het volgende resultaat wordt bewezen in de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen:

(3.1.7) STELLING *(Continuïteitsstelling). Laat* g *voldoen aan de voorwaarde van stelling (3.1.6). Dan is het domein van de functie* ξ *open en* ξ *is een continue functie. Meer specifiek: Als voor zekere* $\bar{x}_0$ *de oplossing* $\xi(t,\bar{x}_0)$ *gedefinieerd is op* $[0,T_1]$*, dan is er een omgeving* $N = \bar{x}_0 + \varepsilon\mathbb{B}$ *van* $\bar{x}_0$*, zo dat* $\xi(t,x_0)$ *bestaat voor* $0 \le t \le T_1$*,* $x_0 \in N$ *en* $\xi(t,x_0) \to \xi(t,\bar{x}_0)$ $(x_0 \to \bar{x}_0)$ *uniform t.a.v.* t.

We keren nu terug naar het besturingssysteem (3.1.3). We zullen voortaan steeds aannemen dat f continu is en differentieerbaar naar x en dat ook $\partial f/\partial x$ continu is. We noteren de verzameling van functies f met deze eigenschappen als $C\mathcal{D}([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$. Dan voldoet voor elke $u \in \Omega$ de functie g_u gedefinieerd door

$$g_u(t,x) := f(t,x,u(t))$$

aan de voorwaarde van stelling (3.1.6). Derhalve heeft voor elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$ de vergelijking (3.1.3) een eenduidig bepaalde oplossing x met beginwaarde $x(0) = x_0$. Deze oplossing is gedefinieerd op een interval $[0,T_1]$, waar T_1 af kan hangen van x_0 en u. We zullen de oplossing noteren als $\xi_u(t,x_0)$ of soms $\xi_u(t)$, $\xi(t,x_0)$ of zelfs kortweg $\xi(t)$, d.w.z. we laten de vermelding van u en/of x_0 achterwege als dit geen aanleiding tot verwarring geeft.

Bij een besturingsprobleem gaat het erom een geschikte besturing $u \in \Omega$ te kiezen. Soms is daarbij $x_0 \in \mathbb{R}^n$ van te voren vast gegeven, in andere gevallen moeten zowel u als x_0 gekozen worden. De eerste voorwaarden waaraan u en x_0 moeten voldoen is, dat $\xi_u(t,x_0)$ bestaat op een vooraf gegeven interval.

(3.1.8) DEFINITIE. *Bij gegeven* $f \in C\mathcal{D}([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$ *heet een paar* $(x_0,u) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$ *toegelaten als* $t \mapsto \xi_u(t,x_0)$ *gedefinieerd is op* $[0,T]$. *Bij vooraf gegeven* x_0 *heet een besturing* $u \in \Omega$ *toegelaten als* (x_0,u) *toegelaten is.*

Aan een paar (x_0,u) legt men gewoonlijk nog andere voorwaarden op bij een besturingsprobleem. Deze voorwaarden variëren van probleem tot probleem. We noemen een paar voorbeelden:

(i) $x_0 \in X_0$, waarbij $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ een vooraf gegeven verzameling is. Als X_0 één punt bevat, dan hebben we te maken met een probleem met vaste beginwaarde.

(ii) $\xi(T) \in X_1$. Ook hier is $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ een vooraf gegeven verzameling.

(iii) $\xi(t) \in X(t)$ voor $0 \le t \le T$. Hierbij is $X(t)$ voor elke $t \in [0,T]$ een verzameling in $\mathbb{R}^n$. Een probleem waarin zulke voorwaarden voorkomen heten problemen met toestandsbeperkingen. Zulke problemen zullen we in dit dictaat niet behandelen. Een variant hierop is

(iv) $$(\xi(t),u(t)) \in S(t) ,$$

waarin $S(t) \subseteq \mathbb{R}^n \times U$ voor $0 \le t \le T$.

(v) $$\int_0^T g(t,\xi(t),u(t))dt \in S .$$

Hierbij is $g \in \mathcal{CD}([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^p)$ en $S \subseteq \mathbb{R}^p$. Zo'n besturingsprobleem heet een probleem met integraalrestricties. Een veel voorkomend geval is, dat S een éénpuntsverzameling is.

(vi) $$(x_0,\xi(T)) \in X$$

waar $X \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Dit is een probleem met gekoppelde beperkingen aan begin- en eindwaarde. De voorwaarden genoemd in (i) en (ii) kunnen worden beschouwd als bijzondere gevallen hiervan. Een ander voorbeeld is de voorwaarde $\xi(T) = x_0$.

Als er een toegelaten paar (x_0,u) bestaat, dat aan de voorgeschreven voorwaarden voldoet, dan zijn er gewoonlijk oneindig veel. Men zal dan een zo gunstig mogelijk paar willen kiezen. Om zo'n keuze te kunnen maken, moet men een optimaliteitscriterium hebben met behulp waarvan men verschillende paren met elkaar kan vergelijken. Ook hier zijn er tal van mogelijkheden. We noemen een aantal voorbeelden:

a) Maximaliseer $h(\xi(T))$, waar $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een vooraf gegeven functie is. Dit is het probleem van Mayer.

b) Maximaliseer (of minimaliseer)

$$\int_0^T f_0(t,\xi(t),u(t))dt$$

waar $f_0 \in CD([0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ gegeven is. Dit is het zgn. Lagrange-probleem.

c) Maximaliseer

$$h(\xi(T)) + \int_0^T f_0(t,\xi(t),u(t))dt$$

waar h en f_0 zijn als in a) en b). Dit is het zgn. Bolza-probleem, dat kennelijk de problemen van Lagrange en Mayer als speciale gevallen bevat.

d) Maximaliseer $h(x_0,\xi(T))$, waar $h: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Dit is een probleem met gekoppeld begin- en eindwaardecriterium.

Het zal duidelijk zijn dat men een grote variëteit van optimaliseringsproblemen krijgt door combinatie van een aantal beperkingen op (x_0,u) met een optimaliteitscriterium. Daar een simultane behandeling van al deze problemen al gauw onoverzichtelijk en moeizaam wordt, zullen in dit college een specifiek probleem als standaardprobleem kiezen. In de volgende paragraaf zullen we zien dat de meeste optimaliseringsproblemen die we uit bovenstaande beperkingen en optimaliteitscriteria kunnen samenstellen, te herleiden zijn tot dit standaardprobleem.

(3.1.9) PROBLEEM. $SBP(U,X_0,X_1,T,f,h)$. *Gegeven:* $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $f \in CD([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$.
Gevraagd: Bepaal een toegelaten paar (x_0,u) *zo dat*

$$x_0 \in X_0, \ \xi(T) \in X_1$$

en zodanig dat $h(\xi(T))$ *maximaal is.*

Er is nog een belangrijke variant op het optimale besturingsprobleem die we nog niet hebben besproken. Tot nu toe hebben we nl. aangenomen, dat de eindtijd T van het proces van te voren is gegeven. In vele problemen is dit echter niet het geval. Hierbij moet dan T, tezamen met (x_0,u) optimaal worden gekozen. Derhalve definiëren we:

(3.1.10) DEFINITIE. *Bij gegeven* $f \in CD([0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$ *heet het tripel* (x_0,T,u) *toegelaten als* $\xi_u(t,x_0)$ *bestaat voor* $0 \le t \le T$.

En verder

(3.1.11) PROBLEEM. $SBP^*(U,X_0,X_1,f,h)$. *Gegeven*: $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f \in CD([0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R})$.
Gevraagd: Bepaal een toegelaten tripel (x_0,T,u) *zo dat* $x_0 \in X$, $(\xi(T),T) \in X_1$, *en zodanig dat* $h(\xi(T),T)$ *maximaal is.*

We zullen SBP het standaardprobleem met vaste eindtijd en SBP^* het standaardprobleem met variabele eindtijd noemen. Het is duidelijk dat SBP een speciaal geval is van SBP^*. We kunnen nl. de eindrestrictieverzameling X_1 in SBP^* zo kiezen, dat daardoor de eindtijd vastligt, dus $X_1 = \{T\} \times X_2$ met $X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$.

In § 3.3 zullen we SBP herformuleren als een eindigdimensionaal optimaliseringsprobleem en we zullen met behulp hiervan existentiebewijzen kunnen vinden.

3.2. *Herleiding van verschillende optimaliseringsproblemen tot het standaardprobleem*

We geven een aantal voorbeelden van zulke herleidingen.

(3.2.1) VOORBEELD. Als we i.p.v. met het Mayer-probleem te maken hebben met het probleem van Bolza, dus als gevraagd wordt de uitdrukking

$$J(x_0,u) := h(\xi(T)) + \int_0^T f_0(t,\xi(t),u(t))dt$$

te maximaliseren, voeren we een nieuwe variabele x_{n+1} is, die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\dot{x}_{n+1} = f_0(t,x(t),u(t))$$

en aan de beginvoorwaarde $x_{n+1}(0) = 0$. Deze variabele voegen we bij de n componenten van de toestandsvector x tot een $(n+1)$-dimensionale vector $\underline{x} = (x,x_{n+1})$ (zie de notatie-afspraken in het begin van § 2.3). Dan kunnen we het probleem herschrijven als een standaardprobleem. Als oorspronkelijk de voorwaarden $x_0 \in X_0$, $\xi(T) \in X_1$ gegeven zijn, voeren we in

$$\underline{X}_0 := X_0 \times \{0\} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in X_0\} ,$$

$$\underline{X}_1 := X_1 \times \mathbb{R} = \{(x,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in X_1,\ x_{n+1} \in \mathbb{R}\} ,$$

$$\underline{f}(t,\underline{x},u) := (f(t,x,u),f_0(t,x,u)) ,$$

$$\underline{h}(\underline{x}) := h(x) + x_{n+1} .$$

De oplossing $\underline{\xi}(t) = \underline{\xi}_u(t,\underline{x}_0)$ van de differentiaalvergelijking

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t,\underline{x},u(t))$$

met beginwaarde $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \underline{X}_0$, uitgeschreven

$$\dot{x} = f(t,x,u(t)),\ x(0) \in X_0$$

$$\dot{x}_{n+1} = f_0(t,x,u(t)),\ x_{n+1}(0) = 0$$

heeft de eigenschap

$$\underline{h}(\underline{\xi}(T)) = h(\xi(T)) + \xi_{n+1}(T) = J(x_0,u)$$

daar

$$\xi_{n+1}(T) = \int_0^T f_0(t,x,u(t))dt .$$

Derhalve is het probleem equivalent met $\mathcal{SBP}(U,\underline{X}_0,\underline{X}_1,T,\underline{f},\underline{h})$. $\square$

Op analoge manier gaan we te werk in het volgende

(3.2.3) VOORBEELD. Als we een probleem hebben met een integraalrestrictie

$$\int_0^T g(t,\xi(t),u(t))dt \in S$$

waar $g \in \mathcal{CD}([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^p)$ en $S \subseteq \mathbb{R}^p$, voeren we een nieuwe variabele $y \in \mathbb{R}^p$ die voldoet aan de vergelijking

(3.2.4) $\quad \dot{y} = g(t,x,u)$

met beginwaarde $y(0) = 0$. De samengestelde vector (x,y) wordt dan de toestandsvariabele in het standaardprobleem. We introduceren:

$$\underline{X}_0 := X_0 \times \{0\} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^{n+p} \mid x \in X_0\}$$

(0 is hier de nulvector in $\mathbb{R}^p$),

$$\underline{X}_1 := X_1 \times S = \{(x,y) \mid x \in X_1,\ y \in S\} \ ,$$

$$\underline{f}(t,\underline{x},u) := (f(t,x,u),g(t,x,u)) \ ,$$

$$\underline{h}(\underline{x}) := h(x) \ ,$$

en het probleem is equivalent met $SBP(u,\underline{X}_0,\underline{X}_1,T,\underline{f},\underline{h})$. Bedenk, dat voor een oplossing y van (3.2.4) met y(0) geldt

$$y(T) = \int_0^T g(t,x,u)dt \ . \qquad \square$$

(3.2.5) VOORBEELD. Soms komt er een parameter $\mu \in \mathbb{R}^q$ voor in het proces, die optimaal moet worden gekozen, tezamen met (x_0,u). Dan hebben we dus de vergelijkingen

$$\dot{x} = f(t,x,\mu,u)$$

met begin- en eindrestricties:

$$(x_0,\mu) \in X_0 (\subseteq \mathbb{R}^{n+q})$$

$$(\xi(T),\mu) \in X_1 (\subseteq \mathbb{R}^{n+q})$$

en optimaliteitscriterium $h(\xi(T),\mu)$.

Dan kunnen we invoeren een variabele $y \in \mathbb{R}^q$, die voldoet aan de (triviale) vergelijking

$$\dot{y}(t) = 0$$

en een samengestelde toestandsvector $\underline{x} = (x,y)$. Als dan

$$\underline{f}(t,\underline{x},u) := (f(t,x,y,u),0),\ \underline{h}(\underline{x}) = h(x,y) \ ,$$

dan is het probleem equivalent met $SBP(U,X_0,X_1,T,\underline{f},\underline{h})$. Een (constante) parameter wordt hier dus beschouwd als een toestandsvariabele die voldoet aan de vergelijking $\dot{y} = 0$. $\square$

(3.2.6) VOORBEELD. Het probleem met variabele eindtijd kan worden gereduceerd tot een probleem met vaste eindtijd en een parameter, en dus volgens (3.2.5) tot SBP. We kunnen nl. een nieuwe onafhankelijke variabele τ kiezen gedefinieerd door

$$\tau = t/T$$

waarin T de eindtijd is. Dan geldt $0 \leq \tau \leq 1$. De differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u)$$

wordt dan

$$\frac{dx}{d\tau} = Tf(T\tau,x,u)$$

en T verschijnt zowel in deze vergelijking als in de andere gegevens van het probleem als parameter. □

(3.2.7) VOORBEELD. Een probleem met gekoppelde begin- en eindwaarden kan men tot *SBP* herleiden door middel van een nieuwe n-dimensionale variabele y die voldoet aan de differentiaalvergelijking $\dot{y} = 0$. Als bijv. de restrictie luidt

$$(x,\xi(T)) \in X$$

en het criterium gegeven wordt door $h(x_0,\xi(T))$, dan vinden we in het uitgebreide systeem, met toestandsvector $\underline{x} = (x,y)$:

$$\underline{f}(t,\underline{x},u) := (f(t,x,u),0)$$

$$\underline{X}_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x = y\}$$

$$\underline{X}_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (y,x) \in X\}$$

$$\underline{h}(x,y) := h(y,x) \ .$$

Dan is het gestelde probleem equivalent met $SBP(U,\underline{X}_0,\underline{X}_1,T,\underline{f},\underline{h})$. □

Ook tot *SBP* te herleiden zijn de meeste problemen uit de variatierekening, waarvan we enkele voorbeelden in hoofdstuk 1 hebben gezien. De algemene formulering van het eenvoudig variatieprobleem met vaste eindwaarden is

(3.2.8) PROBLEEM. *Gegeven een interval* $[0,T]$ *en een functie* $C^1([0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $(t,x,y) \mapsto f(t,x,y)$ *en getallen* x_0,x_1, *bepaal een functie* $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *zo dat* $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$ *en dat*

$$J(x) := \int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))dt$$

minimaal is.

Dit probleem kan op allerlei manieren worden gevarieerd. Zo kan men:

(i) x_0 of x_1 niet van te voren vast leggen en eisen dat ze optimaal worden gekozen,

(ii) de eindtijd niet vastleggen,

(iii) een integraal van de vorm

$$\int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t))dt$$

minimaliseren. Dit kan men natuurlijk uitbreiden tot afgeleides van hogere orde.

(iv) niet één, maar meerdere functies $x_1,\ldots,x_n$ zoeken en wel zo dat

$$\int_0^T f(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),\dot{x}_1(t),\ldots,\dot{x}_n(t))dt$$

minimaal is.

(v) van de gezochte functie eisen dat ze aan een integraalrestrictie van de vorm

$$\int_0^T g(t,x(t),\dot{x}(t))dt = c$$

of

$$\int_0^T g(t,x(t),\dot{x}(t))dt \leq c$$

voldoet. Men spreekt in zo'n geval van een <u>isoperimetrisch variatieprobleem</u>.

Het laatste voorbeeld dankt zijn naam aan een bijzonder geval, nl. het bepalen van een kromme met een gegeven omtrek (perimeter) waarvan het omsloten oppervlak maximaal is. Een enigszins vereenvoudigde versie hiervan wordt gegeven in het volgende voorbeeld:

(3.2.9) VOORBEELD. Bepaal een functie $x\colon [0,1] \to [0,\infty)$ zo dat $x(0) = x(1) = 0$, de lengte

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\,dt$$

een gegeven waarde heeft en het oppervlak

$$S = \int_0^1 x(t)dt$$

gelegen tussen de grafiek en de t-as maximaal is. □

Bovenstaande variatieproblemen kan men herleiden tot $\mathcal{SBP}$ door eerst een besturingsvariabele te kiezen en vervolgens toestandsvariabelen te introduceren volgens eerder genoemde procedures. Als besturingsvariabele(n) kiest men dan de hoogste afgeleide(n) die in het probleem voorkomen. In (3.2.8) kiest men bijv. $\dot{x} = u$ als besturingsvariabele, x als een toestandsvariabele en

$$y = \int_0^t f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))d\tau$$

als extra toestandsvariabele. Dan krijgt men het volgende systeem van differentiaalvergelijkingen:

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = f(t,x,u)$$

met beginwaarden $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, met eindwaardenrestrictie $x(T) = x_1$ en optimaliteitscriterium $h(x,y) = -y$.

Als men het probleem in voorbeeld (3.2.9) wil herleiden, dan vindt men na de substitutie $\dot{x} = u$,

$$y = \int_0^t \sqrt{1 + \dot{x}^2(\tau)}\,d\tau, \quad z = \int_0^t x(\tau)d\tau \ ,$$

de volgende vergelijkingen en begin- en eindrestricties:

$\dot{x} = u$	$x(0) = 0$	$x(1) = 0$
$\dot{y} = \sqrt{1 + u^2}$	$y(0) = 0$	$y(1) = L$
$\dot{z} = x$	$z(0) = 0$	$z(1)$: maximaal

3.3. *Het standaardprobleem als eindigdimensionaal optimaliseringsprobleem. Existentiestellingen*

We beschouwen weer de vergelijking

(3.3.1) $\dot{x} = f(t,x,u)$

waar $f \in CD([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$, zoals in het standaardprobleem (3.1.9). Met behulp van de oplossingen $\xi_u(t,x_0)$ van die vergelijking definiëren we bij gegeven $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, de vanuit X_0 bereikbare verzameling door

(3.3.2) $W(X_0) := \{\xi_u(T,x_0) \mid (x_0,u) \text{ is toegelaten, } x_0 \in X_0\}$.

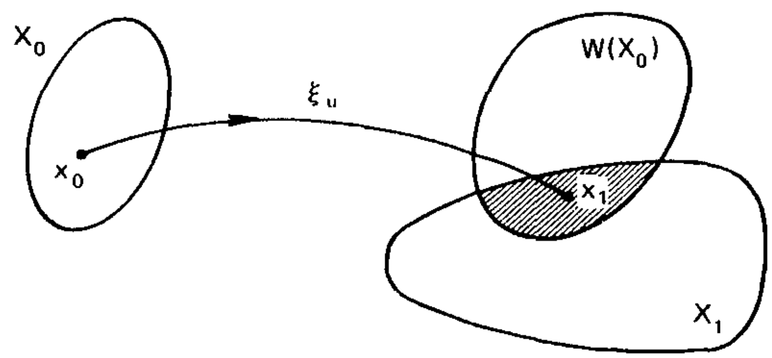
In het bijzonder beschouwen we de vanuit een gegeven $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bereikbare verzameling

$$W(x_0) := W(\{x_0\}) \ .$$

Dan kunnen we bijv. schrijven

$$W(X_0) = \bigcup_{x_0 \in X_0} W(x_0) \ .$$

Met behulp van de bereikbare verzameling kunnen we $SBP(U,X_0,X_1,T,f,h)$ herformuleren als een eindigdimensionaal optimaliseringsprobleem. Er geldt nl.: *Als het paar* (x_0,u) *een oplossing is van* $SBP(U,X_0,X_1,T,f,h)$, *dàn is* $\xi_u(T,x_0)$ *een oplossing van* $OP(W(X_0) \cap X_1,h)$. *Omgekeerd, als* x_1 *een oplossing is van* $OP(W(X_0) \cap X_1,h)$, *dan bestaat er een oplossing* (x_0,u) *van* $SBP(U,X_0,X_1,T,f,h)$ *zo dat* $x_1 = \xi_u(T,x_0)$.



Deze uitspraken volgen onmiddellijk uit de definities. De moeilijkheid bij de toepassing van deze herformulering is natuurlijk het feit dat $W(X_0)$ niet expliciet gegeven is. Daarentegen zijn de verzameling X_0 en X_1 wel gegeven. Eigenschappen van $W(X_0)$ moeten worden afgeleid via de vergelijking (3.3.1).

We onderzoeken eerst de bijzondere situatie waar X_0 uit één punt x_0 bestaat, dus waar de beginwaarde van de baan is vastgelegd. Dan volgt uit bovenstaande en uit (2.4.6), dat voldoende voorwaarden voor de existentie van een oplossing van $\mathcal{SBP}(U,X_0,X_1,T,f,h)$ zijn: X is gesloten èn $X \cap W(x_0) \neq \emptyset$, en

(3.3.3) VOORWAARDE. $W(x_0)$ *is compact.*

We willen nagaan wanneer aan (3.3.3) is voldaan. Het ligt voor de hand te veronderstellen dat U een compacte verzameling is, omdat we anders niet kunnen verwachten dat $W(x_0)$ compact is (zie ook voorbeeld (1.2.1)). Daarnaast zal het ook nodig zijn dat de oplossingen van (3.3.1) met beginwaarden $x(0) = x_0$ uniform begrensd zijn voor $u \in \Omega$, omdat we anders niet kunnen verwachten dat $W(x_0)$ begrensd is. In het bijzonder moeten we eisen dat (x_0,u) voor elke $u \in \Omega$ toegelaten is. De voorwaarden $f \in \mathcal{CD}$, U compact, zijn daartoe niet voldoende.

(3.3.4.) VOORBEELD. Beschouw het systeem in $\mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = u(t)x^2(t)$$

met beginwaarde $x_0 = 1$. Zij $T = 1$, $U = [-1,1]$, zodat $u \in \Omega$ voldoet aan de restrictie $|u(t)| \leq 1$. Dan is f, gedefinieerd door $f(t,x,u) = ux^2$, in $\mathcal{CD}([0,1] \times \mathbb{R} \times [-1,1] \to \mathbb{R})$ en U is compact. Als we u constant nemen vinden we als oplossing

$$\xi_u(t) = \frac{1}{1 - ut} .$$

Voor $u \to 1$ geldt echter $\xi_u(1) \to \infty$, zodat de oplossingen niet uniform begrensd zijn. Verder is de besturing $u(t) = 1$ $(0 \leq t \leq 1)$ niet toegelaten. □

We zullen daarom de existentie en dus de begrensdheid van de oplossingen als expliciete eis formuleren.

(3.3.5) VOORWAARDE. *Elk paar* $(x_0,u) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$ *is toegelaten.*

Men kan bewijzen dat voldoende voor (3.3.5) is, dat elke oplossing ξ van (3.3) met $\xi(0) = x_0$ begrensd is op het interval waarop ze is gedefinieerd (zie [GDV, Hfdst. I], CL, Ch. I) . Om deze begrensdheid aan te tonen kan men gebruik maken van het lemma van Gronwall (zie [GDV] voor een algemenere formulering).

(3.3.6) LEMMA (*Gronwall*). *Zij* $k \in \mathbb{R}$, $L \geq 0$, $T > 0$, $w \in C([0,T] \to \mathbb{R})$.

$$w(t) \leq k + L \int_0^t w(\tau)d\tau \quad (0 \leq t \leq T)$$

dan geldt

$$w(t) \leq ke^{Lt} \; (0 \leq t \leq T).$$

BEWIJS. Definieer

$$\psi(t) := k + L \int_0^t w(\tau)d\tau \; .$$

Dan geldt $w(t) \leq \psi(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ en dus

$$\dot{\psi}(t) = Lw(t) \leq L\psi(t) \quad (0 \leq t \leq T) \; .$$

Hieruit volgt

$$\frac{d}{dt}(e^{-Lt}\psi(t)) \leq 0 \; ,$$

d.w.z. $e^{-Lt}\psi(t)$ is niet-stijgend en dus $e^{-Lt}\psi(t) \leq e^{-Lo}\psi(0) = k$. Derhalve,

$$u(t) \leq \psi(t) \leq ke^{Lt} \; .$$ □

Nu kunnen we een voldoende voorwaarde vinden voor (3.3.5):

(3.3.7) LEMMA. *Laat* $f \in C\mathcal{D}([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$ *voldoen aan de ongelijkheid*

(3.3.8) $\quad |f(t,x,u)| \leq L|x| + N \quad (0 \leq t \leq T,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in U)$

voor zekere constante $L,N \geq 0$. *Dan geldt voorwaarde* (3.3.5).

BEWIJS. Daar voor $\xi(t) := \xi_u(t,x_0)$ geldt

$$\xi(t) = x_0 + \int_0^t f(t,\xi(\tau),u(\tau))d\tau$$

volgt uit (3.3.8):

$$|\xi(t)| \leq |x_0| + \int_0^t (L|\xi(\tau)| + N)d\tau \leq K + L \int_0^t |\xi(\tau)|d\tau \; ,$$

waar $k := |x_0| + NT$. Uit het lemma van Gronwall volgt daarom, dat $|\xi(t)| \leq Ke^{Lt}$. □

Voorwaarde (3.3.8) is een voldoende maar niet noodzakelijke voorwaarde voor (3.3.5) en zijn gemakkelijk voorbeelden te bedenken, waarvoor wel aan (3.3.5) maar niet aan (3.3.8) is voldaan.

We hebben tot nu toe, om te bereiken dat $W(x_0)$ compact is, geeist dat U compact is en dat **alle besturingen toegelaten zijn. Het is verder nog nodig dat we** de verzameling van toegelaten besturingen uitbreiden (zie voorbeeld (1.2.1)):

(3.3.9) VOORWAARDE. *Alle (Lebesgue-)integreerbare functies* $u: [0,T] \to U$ *zullen worden toegelaten. De verzameling van zulke functies geven we aan met* $\hat{\Omega}$.

Hoewel het bij het bewijs van existentiestellingen wezenlijk is dat Lebesgue-integreerbare functies toelaat, zullen we hier niet de theorie van Lebesgue-integratie bekend veronderstellen. Daarom laten we de betreffende bewijzen achterwege.

Zelfs met deze uitbreiding van Ω en met de eerder genoemde voorwaarden (U compact, (3.3.5)), is de existentie van optimale besturingen niet gegarandeerd:

(3.3.10) VOORBEELD. Laat x,y voldoen aan

$$(3.3.11)\quad \begin{cases} \dot{x} = u & , \ x(0) = 0 \ , \\ \dot{y} = u^2 - x^2 & , \ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

met $T = 1$ en $U = [-1,1]$, zodat $u(t)$ moet voldoen aan $|u(t)| \leq 1$. Het is gemakkelijk te verifiëren, dat (3.3.11) aan (3.3.5) voldoet. We beweren, dat het punt (0,1) wel een randpunt is van $W(\underline{x}_0)$ (Hier is $\underline{x}_0 = \underline{0}$,) maar niet tot $W(\underline{x}_0)$ zelf behoort. In het bijzonder heeft het optimaliseringsprobleem: "*Bepaal* u *zodanig dat* $y(1)$ *maximaal is*", geen oplossing.

Dit kunnen we als volgt inzien. Er geldt

$$y(1) = \int_0^1 (u^2 - x^2)dt \ .$$

In de eerste plaats volgt hieruit dat $y(1) = \int_0^1 u^2 dt \leq 1$ voor elke oplossing. Bovendien is $y(1) = 1$ alleen mogelijk als $|x(t)| = 0$ geldt voor $0 \leq t \leq 1$. Maar dan is ook $u(t) = \dot{x}(t) = 0$ voor $0 \leq t \leq 1$ en dus $y(1) = 0$. We zien dus dat voor elke oplossing van (3.3.11) geldt: $y(1) < 1$. Anderzijds kan men een rij besturingen $u_k \in \Omega$ zo kiezen dat voor de oplossingen $\underline{x}_k(t) := \underline{\xi}_{u_k}(t,\underline{0})$ geldt: $\underline{x}_k(1) \to (0,1)$ $(k \to \infty)$. Definieer nl. $u_k(t)$ als volgt:

$$u_k(t)\begin{cases} := +1 & \text{voor } \frac{j}{k} \le t < \frac{j+\frac{1}{2}}{k} \\ := -1 & \text{voor } \frac{j+\frac{1}{2}}{k} \le t < \frac{j+1}{k} \end{cases}$$

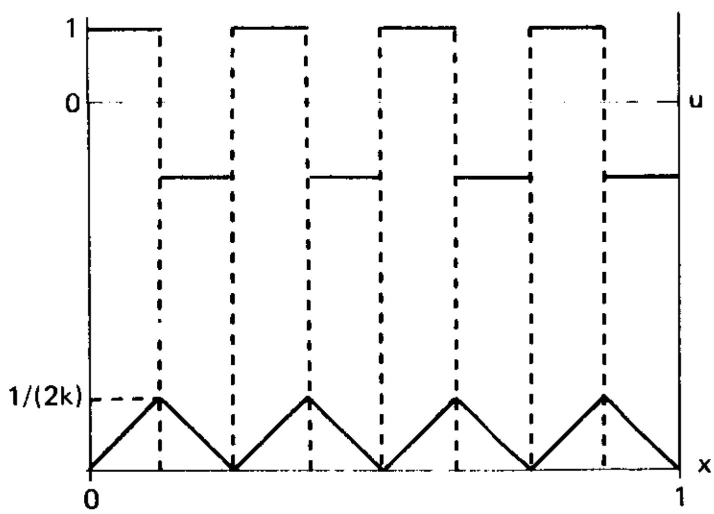
voor $j = 0,\dots,k-1$. Dan geldt

$$x_k(t)\begin{cases} = t - \frac{j}{k} & \text{voor } \frac{j}{k} \le t < \frac{j+\frac{1}{2}}{k} \\ = \frac{j+1}{k} - t & \text{voor } \frac{j+\frac{1}{2}}{k} \le t < \frac{j+1}{k} \end{cases}$$

en in het bijzonder $|x_k(t)| \le 1/2k$ $(0 \le t \le 1)$. Dus

$$x_k(1) = 0$$

$$y_k(1) = \int_0^1 (u_k^2(t) - x_k^2(t))dt \ge 1 - \frac{1}{k^2} \to 1 \quad (k \to \infty) .$$



□

Er is kennelijk nog een voorwaarde nodig om de compactheid van $W(x_0)$ te garanderen. Deze blijkt te zijn

(3.3.12) VOORWAARDE. *Voor elke* $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ *is de* <u>*snelheidsverzameling*</u>

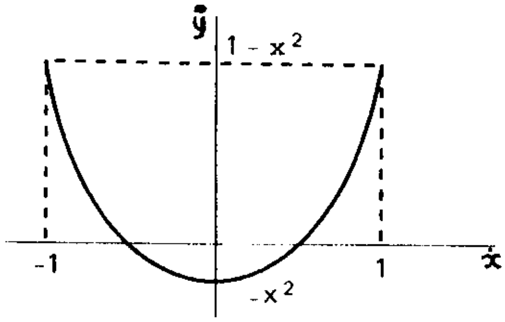
$$V(t,x) := f(t,x,U) := \{f(t,x,u) \mid u \in U\} .$$

convex.

In voorbeeld (3.3.10) is aan deze voorwaarde niet voldaan. Hier is de snelheidsverzameling

$$V(t,\underline{x}) = \{(u,u^2 - x^2) \mid -1 \le u \le 1\}$$

een stuk van een parabool.



De convexiteitsvoorwaarde is niet voldaan aan de "bovenkant". Vandaar dat het optimaliseringsprobleem: "maximaliseer y(1)" geen oplossing heeft. Als we zouden proberen y(1) te minimaliseren zouden we wel een oplossing vinden, want $V(t,\underline{x})$ is convex aan de "onderkant".

(3.3.13) OPMERKING. De meest voorkomende situatie waarin aan (3.3.12) is voldaan, is die waarin u lineair in f voorkomt:

$$f(t,x,u) = g(t,x) + h(t,x)u$$

en U convex is. Hierin zijn g en h continu differentieerbare functies met waarden in $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^{n\times m}$ (de verzameling van n×m-matrices). ||

Met behulp van (3.3.12) kunnen we een existentiestelling formuleren:

(3.3.14) STELLING (*Philippov-Roxin*). *Laat*

(i) U *compact zijn.*

(ii) $f \in \mathcal{CD}([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$.

(iii) *De oplossingen van* (3.3.1) *voldoen aan* (3.3.5).

(iv) $V(t,x)$ *convex zijn voor* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *(zie* (3.3.12)).

Dan is $W(x_0)$ *compact voor elke* $x_0 \in X_0$, *(als besturingen worden elementen uit* $\hat{\Omega}$ *toegelaten (zie* (3.3.9)).

We laten het bewijs achterwege (zie [LM, § 4.1, stelling 2] [RF, Th. 3.2.1])

Nu beschouwen we het algemenere geval dat X_0 een gesloten verzameling is. Om hier een uitspraak te kunnen doen moeten we een versterking van voorwaarde (3.3.5) hebben.

(3.3.15) VOORWAARDE. *Voor elke* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in [0,T]$ *en elke* $u \in \Omega$ *bestaat de oplossing* $\xi(t)$ *van* (3.3.1) *met* $\xi(t_0) = x_0$ *voor* $0 \leq t \leq T$.

Het is gemakkelijk in te zien, dat (3.3.8) ook voor (3.3.15) voldoende is.

(3.3.16) STELLING. *Als* X_0 *gesloten is, als* $W(x_0)$ *compact is voor elke* $x_0 \in X_0$ *en als aan* (3.3.15) *is voldaan, dan is* $W(X_0)$ *gesloten. Als* X_0 *compact is, dan is ook* $W(X_0)$ *compact.*

Ook het bewijs hiervan zullen we achterwege laten. Met behulp van (3.3.16) en (2.4.6) kan men existentiestellingen leveren in verschillende situaties (bijv. X_0 compact, X_1 gesloten; of X_0 gesloten, X_1 compact; of X_0, X_1 gesloten en $h(x) \to -\infty$ voor $x \to \infty$). Voor verdere resultaten over existentie verwijzen we naar [LM], [RF], [Be].

4. EEN ELEMENTAIR BESTURINGSPROBLEEM

4.1. *Het maximumprincipe voor een speciaal geval van het standaardprobleem*

In dit hoofdstuk zullen we ons beperken tot het probleem $SBP(U,\{x_0\},\mathbb{R}^n,T,f,h)$, dus het standaardprobleem met $X_0 = \{x_0\}$, $X_1 = \mathbb{R}^n$, d.w.z. met vaste beginwaarde en vrije eindwaarde. We zullen dit probleem verder aangeven met $EBP(U,x_0,T,f,h)$. In deze paragraaf formuleren we een noodzakelijke voorwaarde voor optimaliteit, het maximumprincipe, voor dit probleem.

In de eerste plaats voeren we in de Hamiltoniaan van f (of van (3.3.1)):

(4.1.1) $$H(\psi,t,x,u) := \psi f(x,u,t)$$

waarbij $\psi \in \mathbb{R}_n$ een rijvector is. De Hamiltoniaan is dus het inwendig product van de rijvector ψ met het rechterlid van de differentiaalvergelijking. Met behulp van de Hamiltoniaan kunnen we de zogenaamde geadjungeerde vergelijkingen invoeren voor een nieuwe (rijvector)variabele $\psi(t)$, genoemd de geadjungeerde variabele van $x(t)$. De geadjungeerde vergelijking luidt:

(4.1.2) $$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t),t,x(t),u(t)) \ .$$

H_x (of $\frac{\partial H}{\partial x}$ of $\nabla_x H$) is de gradiënt van H naar x. De geadjungeerde vergelijking is gedefinieerd voor elk paar (u,x) waarbij $u \in \Omega$ en x een corresponderende oplossing van (3.3.1) is. Als men de gradiënt van H uitschrijft, dan blijkt dat (4.1.2) een lineaire differentiaalvergelijking is:

(4.1.3) $$\dot{\psi} = -\psi f_x(t,x(t),u(t))$$

waar f_x de functionaalmatrix van f naar x is uitgerekend in $(x,y) = (x(t),u(t))$.

We kunnen nu het maximumprincipe formuleren:

(4.1.4) STELLING (*Maximumprincipe voor* EBP). *Laat* $\bar{u}$ *een optimale besturing zijn voor* $EBP(U,x_0,T,f,h)$ *en* $\bar{x} = \xi_{\bar{u}}$ *de bijbehorende baan (d.w.z. oplossing van* (3.3.1)). *Dan geldt*

(4.1.5) $$H(\bar{\psi}(t),t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = \max_{v\in U} H(\bar{\psi}(t),t,\bar{x}(t),v)$$

voor elke t *waarin* $\bar{u}$ *continu is. Hierbij is* $\bar{\psi}(t)$ *de oplossing van de geadjungeerde vergelijking*

(4.1.6) $$\dot{\bar{\psi}}(t) = -H_x(\bar{\psi}(t),t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))$$

met eindwaarde

(4.1.7) $\quad \bar{\psi}(T) = h_x(\bar{x}(T))$.

Het bewijs van deze stelling zullen we in 4.5 geven. In deze paragraaf laten we zien hoe het maximumprincipe kan worden gebruikt bij het bepalen van optimale besturingen. In de eerste plaats merken we op dat de oplossing van (4.1.6) met eindwaarde (4.1.7) bestaat op $[0,T]$ en eenduidig bepaald is. Dit is een gevolg van het feit dat de vergelijking lineair is (zie verder § 4.5).

In principe kunnen we, om optimale besturingen te bepalen, als volgt te werk gaan. Bij gegeven ψ,t,x kiezen we $u \in U$ zo dat $H(\psi,t,x,u)$ maximaal wordt. Dit is een eindigdimensionaal optimaliseringsprobleem. Laten we voor het gemak aannemen dat u door deze optimaliteitsvoorwaarde eenduidig als functie van ψ, t en x is bepaald:

(4.1.8) $\quad u = w(\psi,t,x)$.

Dan kunnen we (4.1.5) vervangen door:

(4.1.9) $\quad \bar{u}(t) = w(\bar{\psi}(t),t,\bar{x}(t))$.

Deze waarde van $\bar{u}$ kunnen we zowel in de oorspronkelijke vergelijking als in de geadjungeerde vergelijking substitueren. Dan vinden we dat de functies $x = \bar{x}$ en $\psi = \bar{\psi}$ voldoen aan

$$
(4.1.10) \qquad
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(t,x(t),w(\psi(t),t,x(t))), \quad x(0) = x_0 \\
\dot{\psi}(t) &= -H_x(\psi(t),t,x(t),w(\psi(t),t,x(t))), \quad \psi(T) = h_x(x(T)) .
\end{aligned}
$$

Dit is een tweepuntsrandwaardeprobleem van de orde 2n voor de functies $x(t),\psi(t)$. In principe kan men hopen dat zulk probleem, met 2n randvoorwaarden, een eenduidige of in ieder geval ten hoogste eindig veel oplossingen heeft. Als men $\bar{x}(t)$ en $\bar{\psi}(t)$ dan heeft gevonden kan men $\bar{u}(t)$ bepalen door substitutie van $\bar{x}(t)$ en $\bar{\psi}(t)$ in (4.1.9). Op grond van deze overwegingen kan men concluderen dat het maximumprincipe een volledig stel noodzakelijke voorwaarden levert.

De grootste moeilijkheid bij de toepassing van deze methode ligt in het tweepuntsrandwaardeprobleem. Expliciete oplossingen kunnen alleen in eenvoudige gevallen gevonden worden. Bij meer gecompliceerde problemen moet men een beroep doen op numerieke methoden. Daarnaast kan bij gecompliceerde problemen ook de maximalisatie van $H(\psi,t,x,u)$ moeilijkheden opleveren. Als $\bar{u}(t)$ een inwendig punt van U is, dan kan men $\bar{u}(t)$ proberen te bepalen uit de voorwaarden

$$H_u(\bar{\psi}(t),t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = 0$$

en

$$H_{uu}(\bar{\psi}(t),t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \leq 0$$

d.w.z. H_{uu} is niet-negatief definiet. Hier is H_{uu} de Hessiaan van H, dat is de matrix met elementen $H_{u_i u_j}$.

Als men een oplossing van het maximumprincipe heeft gevonden, dan moet men nog verifiëren dat deze een optimale besturing is. Dit is niet vanzelfsprekend, daar het maximumprincipe zoals we in voorbeeld (4.5.16) zullen zien géén voldoende voorwaarde is (zie ook § 1.2).

(4.1.11) VOORBEELD. Bepaal het minimum van de integraal

$$\frac{1}{2} \int_0^T (x^2(t) + \dot{x}^2(t))dt$$

over alle stuksgewijs continu differentieerbare functies x die voldoen aan $x(0) = 1$.

We herformuleren het probleem als een *EBP*, zodat we het maximumprincipe kunnen toepassen: Als we $u := \dot{x}$ en

$$y(t) := \frac{1}{2} \int_0^t (x^2 + u^2)d\tau ,$$

invoeren, dan wordt het probleem equivalent met $EBP(U,x_0,T,\underline{f},\underline{h})$ waar, met $\underline{x} = (x,y)$.

$$\underline{f}(\underline{x},u) := \begin{bmatrix} u \\ \frac{1}{2}(x^2+u^2) \end{bmatrix}, \ \underline{x}_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ U := \mathbb{R}, \ h(\underline{x}) := -y .$$

De Hamiltoniaan is met $\underline{\psi} = [\psi,\varphi]$

$$H(\underline{\psi},\underline{x},u) = \psi u + \frac{1}{2}\varphi(x^2 + u^2) .$$

De geadjungeerde vergelijking wordt dus

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\varphi x$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 .$$

De eindwaarde $\underline{\psi}(T) = h_{\underline{x}}(\underline{x}(T))$ levert $\psi(T) = 0$, $\varphi(T) = -1$. Blijkbaar geldt $\varphi(t) = -1$ voor $0 \le t \le T$, terwijl ψ voldoet aan

$$\dot{\psi}(t) = x(t),\ \psi(T) = 0\ .$$

Uit het maximumprincipe volgt $\frac{\partial H}{\partial u}(\underline{\psi}(t),\bar{\underline{x}}(t),\bar{u}(t)) = 0$, dus $u = \psi$. We concluderen, dat x en ψ voldoen aan. (Voor het gemak laten we de strepen boven de optimale grootheden verder weg).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \psi \qquad & x(0) &= 1\ , \\ \dot{\psi} &= x \qquad & \psi(T) &= 0\ . \end{aligned}$$

We combineren dit tot één vergelijking:

$$\ddot{x} = x,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(T) = 0\ .$$

Dit is een tweepuntsrandwaardeprobleem. De oplossing is

$$x(t) = \frac{\cosh(t - T)}{\cosh(T)}\ .$$

De minimale waarde van de integraal wordt: $\frac{1}{2}$ tanh T.
In opgave (0.4.7) wordt aangetoond dat de hier gevonden functie inderdaad optimaal is. □

(4.1.12) VOORBEELD. We beschouwen het optimaliseringsprobleem genoemd in voorbeeld (1.1.5). In de eerste plaats merken we op dat de existentie van een (Lebesgue-integreerbare) besturing hier is verzekerd, omdat u lineair in het probleem voorkomt. We schrijven het probleem in een $\mathcal{EBP}$-vorm:

$$(4.1.13)\qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + u, & x(0) &= 0\ , \\ \dot{y} &= e^{(\beta-\gamma)t}(1-u)\omega, & y(0) &= 0\ . \end{aligned}$$

Hier en verder schrijven we kortweg ω voor $\omega(x)$ of $\omega(x(t))$. Gemaximaliseerd moet worden $y(T)$, zodat $h(x,y) = y$. De Hamiltoniaan is:

$$(4.1.14)\qquad H = -\psi\alpha x + \psi u + \varphi e^{(\beta-\gamma)t}(1-u)\omega\ ,$$

waar ψ en φ de componenten zijn van de geadjungeerde vector. De geadjungeerde vergelijkingen luiden

$$(4.1.15)\qquad \begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha\psi - \varphi e^{(\beta-\gamma)t}(1-u)\omega'\ , \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0\ . \end{aligned}$$

Bij de volgende berekeningen zullen we de strepen die boven de optimale grootheden staan niet vermelden. Laat $\underline{x}$,u een optimaal paar zijn (dus $\underline{x}(t) = \underline{\xi}_u(t)$), dan bestaat er een geadjungeerde vectorfunctie $\underline{\psi}(t) = [\varphi(t),\psi(t)]$ die voldoet aan (4.1.5) en aan de eindvoorwaarde $\psi(T) = 0$, $\varphi(T) = 1$. De optimale besturing u kunnen we dan in ψ,φ,x,y uitdrukken door de Hamiltoniaan (4.1.14) te maximaliseren. Voordat we dit gaan uitvoeren, vereenvoudigen we de situatie, door op te merken dat $\varphi(t) = 1$ voor alle t, zodat we voor de Hamiltoniaan

$$H = \{\psi - e^{(\beta-\gamma)t}\omega\}u - \psi\alpha x + e^{(\beta-\gamma)t}\omega$$

en voor de (eerste) geadjungeerde vergelijking

$$\dot{\psi}(t) = \alpha\psi(t) - e^{(\beta-\gamma)t}(1-u)\omega', \quad \psi(T) = 0$$

vinden. Deze vergelijking vereenvoudigen we nog iets verder door een nieuwe variabele

$$\lambda(t) := e^{-\alpha t}\psi(t)$$

in te voeren. Voor λ geldt dan de vergelijking:

$$\dot{\lambda}(t) = -e^{-\delta t}(1-u)\omega', \quad \lambda(T) = 0$$

waarbij

$$\delta := \alpha - \beta + \gamma \ .$$

Ook in de Hamiltoniaan vervangen we ψ door λ:

$$H = e^{\alpha t}u\{\lambda(t) - e^{-\delta t}\omega\} + H_0$$

waar H_0 een term is die niet van u afhangt. Uit het maximumprincipe volgt nu:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } \rho(t) > 0 \\ 0 & \text{als } \rho(t) < 0 \end{cases}$$

waarbij

$$\rho(t) := \lambda(t) - e^{-\delta t}\omega \ .$$

De waarde van u(t) wordt dus bepaald door het teken van $\rho(t)$. Als voor zekere t geldt $\rho(t) = 0$, dan is voor die t de Hamiltoniaan onafhankelijk van u, zodat het maximumprincipe ons dan géén informatie over de optimale u geeft. Nu is dit niet belangrijk als het een geïsoleerd punt betreft, want, zoals men gemakkelijk kan nagaan, de functie x is onafhankelijk van de waarde van u in geïsoleerde punten. Bezwaarlijker wordt de situatie, wanneer $\rho(t) = 0$ geldt op een interval. Dan is in dat hele interval de waarde van u niet af te leiden uit het maximumprincipe. Men noemt een stuk van een optimale baan en ook de bijbehorende besturing dan <u>singulier</u>. Vooral bij situaties waarbij de besturing lineair in het systeem voorkomt, zijn singuliere stukken mogelijk.

Om de optimale besturing te kunnen bepalen, is het nodig dat we het teken van ρ weten. Daartoe berekenen we de afgeleide van ρ:

(4.1.16) $\dot{\rho}(t) = e^{-\delta t}\omega(x)g(x)$,

waar

(4.1.17) $g(x) := \delta - \frac{\omega'(x)}{\omega(x)}(1 - \alpha x)$.

Merk op dat $1 - \alpha x(t) > 0$ geldt voor $0 \le t \le T$. Uit (4.1.13) volgt immers

$$0 \le \frac{d}{dt}(e^{\alpha t}x) = e^{\alpha t}u \le e^{\alpha t}$$

en dus

$$0 \le e^{\alpha t}x(t) \le \int_0^t e^{\alpha\tau}d\tau = \alpha^{-1}(e^{\alpha t} - 1) < \alpha^{-1}e^{\alpha t} .$$

Uit het gegeven dat $\omega'(x)/\omega(x)$ niet-stijgend is, volgt nu dat g een stijgende functie is voor $0 \le x \le 1/\alpha$. Andere waarden van x hoeven we niet in beschouwing te nemen.
Tenslotte merken we op dat

(4.1.18) $\rho(T) = -e^{-\delta T}\omega(x(T)) < 0$

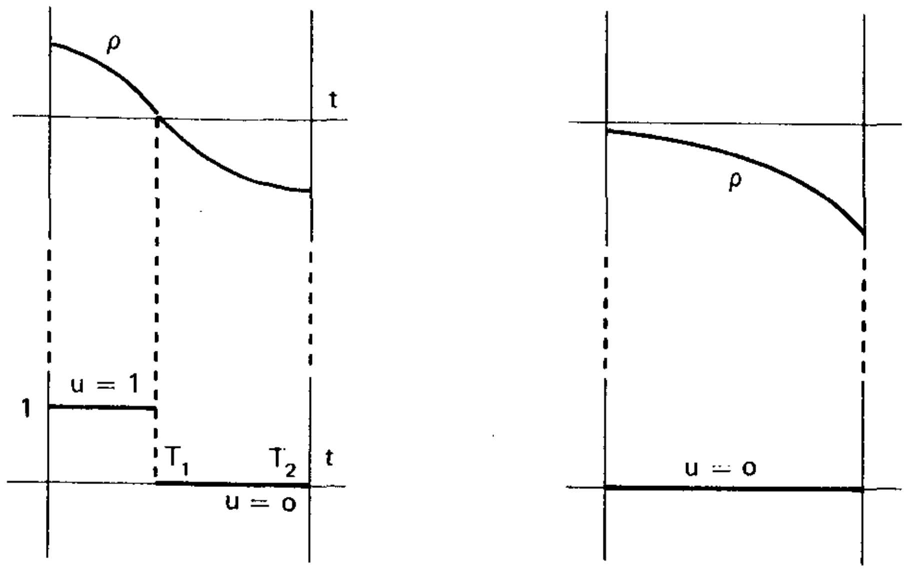
zodat $\rho(t) < 0$ in een zeker interval $(T_1,T]$. In dat eindinterval geldt dus $u(t) = 0$, hetgeen betekent dat de persoon in het laatste gedeelte van het interval niet meer zal studeren.

Voor de verdere analyse moeten we onderscheid maken tussen verschillende gevallen:
I. Als $\delta \le 0$, dan is $g(x) < 0$ voor $0 \le x < 1/\alpha$. De functie ρ is dan dalend. Daar $\rho(T) < 0$, volgt hieruit dat het tekenverloop van ρ de volgende gedaante heeft:

$$\rho(t) > 0,\ 0 < t < T_1 ,$$
$$\rho(t) < 0,\ T_1 < t \le T .$$

waarbij $0 \le T_1 < T$. Als $T_1 = 0$ dan is $\rho(t) < 0$ voor alle $t \in (0,T]$. We vinden dus

$$u(t) = 1,\ 0 < t < T_1 ,$$
$$u(t) = 0,\ T_1 < t \le T .$$



In het geval dat $T_1 = 0$ moet de persoon al zijn aandacht aan werk besteden (zie ook II).

We hebben het optimaliseringsprobleem nu helemaal opgelost, afgezien van de nog onbekende grootheid T_1. Deze kunnen we nu op twee manieren bepalen:

i) We maken gebruik van de voorwaarde 4.1.18, d.w.z. we berekenen de oplossing x met de gegeven besturing, waarin T_1 als een onbekende parameter voorkomt. Dan kunnen we volgens (4.1.18) $\rho(T)$ uitdrukken in T_1. Daarna kunnen we $\rho(t)$ berekenen uit de eindvoorwaarde $\rho(T)$ en de differentiaalvergelijking (4.1.16). Hieruit vinden we een vergelijking voor T_1 nl. $\rho(T_1) = 0$. We kunnen deze procedure enigszins vereenvoudigen. Er geldt

$$\rho(T) = \int_{T_1}^{T} \dot{\rho}(t)dt$$

en dus

$$(4.1.19) \quad -e^{-\delta T}\omega(x(T)) = \int_{T_1}^{T} e^{-\delta t}\{\delta\omega(x(t)) - \omega'(x(t))(1-\alpha x(t))\}dt \; .$$

Daar op het interval $(T_1,T]$ geldt $u(t) = 0$, vinden we daar

$$\frac{d}{dt}\,\omega(x(t)) = \omega'(x(t))\dot{x}(t) = -\omega'(x(t))\alpha x \; .$$

Daarom is

$$\int_{T_1}^{T} e^{-\delta t}\omega'(x(t))\alpha x(t)dt = -e^{-\delta t}\omega(x(t))\Big|_{T_1}^{T} - \delta \int_{T_1}^{T} e^{-\delta t}\omega(x(t))dt \; .$$

We kunnen (4.1.19) vervangen door

$$e^{-\delta T_1}\omega(x(T_1)) = \int_{T_1}^{T} e^{-\delta t}\omega'(x(t))dt \; .$$

We werken dit niet verder uit.

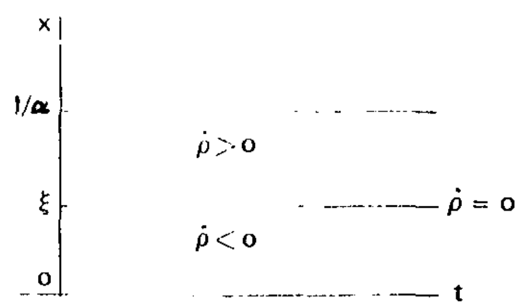
ii) We houden T_1 als onbekende parameter en berekenen $y(T)$. Daarna kiezen we T_1 zo dat $y(T)$ maximaal wordt.

II. Veronderstel nu dat $\delta \geq \omega'(0)/\omega(0)$. Dan is $g(0) \geq 0$. Daar g stijgend is volgt hieruit, dat $g(x) > 0$ voor $0 < x < \frac{1}{\alpha}$. Dus ρ is niet-dalend voor $0 \leq t \leq T$. Daar $\rho(T) < 0$, volgt hieruit dat $\rho(t) < 0$ voor $0 \leq t \leq T$, zodat $u(t) = 0$ voor $0 \leq t \leq T$. In dit geval studeert de persoon helemaal niet, maar besteedt al zijn tijd aan werk.

III. Tenslotte beschouwen we de situatie

$$0 < \delta < \omega'(0)/\omega(0) \; .$$

Dan geldt $g(0) < 0$ en $g(1/\alpha) = \delta > 0$. Daar g stijgend is bestaat er precies een getal ξ met $0 < \xi < 1/\alpha$ waarvoor geldt $g(\xi) = 0$. Als $x(t) < \xi$, dan is ρ



dalend en als $x(t) > \xi$ dan is ρ stijgend. We weten verder dat $x(0) = 0$ en dat $\rho(T) < 0$.

Eerst merken we op dat het onmogelijk is, dat voor zeker t_1 geldt: $x(t_1) \geq \xi$, $\rho(t_1) > 0$. Want, dan is vanwege de continuïteit ρ positief op een interval (t_1,t_2). Hierbij kunnen we t_2 gelijk aan T kiezen of aan het kleinste getal groter dan t_1 waarvoor $\rho = 0$ wordt. Op het interval (t_1,t_2) is $u(t) = 1$ en dus $\dot{x}(t) > 0$. Omdat $x(t_1) > \xi$ volgt hieruit $x(t) > \xi$ op (t_1,t_2). Dan is echter ρ stijgend op (t_1,t_2) en $\rho(t_2)$ dus zeker positief. D.w.z. $t_2 = T$, op grond van de keuze die we voor t_2 hebben gemaakt. In dat geval is $\rho(T) > 0$ in strijd met het gegeven.

Neem anderzijds aan dat $x(t_1) < \xi$, $\rho(t_1) \leq 0$ geldt voor zekere t_1. Dan volgt uit een analoge redenering, dat $\rho(t) < 0$ en dus $u(t) = 0$ geldt voor $t_1 < t \leq T$. Dit levert uiteraard geen tegenspraak op, maar, in dit geval weten we wel het verdere verloop van het proces.

We gaan nu onderscheid maken naar de waarde van $\rho(0)$. Als $\rho(0) \leq 0$, dan is $\rho(t) < 0$ voor $0 < t \leq T$, op grond van bovenstaande, en dus $u(t) = 0$. Dit is dezelfde situatie als in II.

Als $\rho(0) > 0$, dan is er een interval $(0,T_1)$ waarop ρ positief is, terwijl $\rho(T_1) = 0$. Dan is x stijgend op $(0,T_1)$ en dus $x(T_1) > 0$. Als $x(T_1) < \xi$, dan is op grond van bovenstaande $\rho(t) < 0$ voor $T_1 < t \leq T$. Dan vinden we als besturing $u(t) = 1$ $(0 < t < T_1)$, $u(t) = 0$ $(T_1 < t < T)$, net zoals in I. Het is niet mogelijk dat $x(T_1) > \xi$ omdat er dan een $t_1 < T_1$ bestaat met $x(t_1) \geq \xi$, $\rho(t_1) > 0$.

Rest ons nog het geval $x(T_1) = \xi$ te beschouwen. In dat geval, is het mogelijk, dat $\rho(t) < 0$ en $u(t) = 0$ voor $T_1 < t < T$. Maar het is ook mogelijk dat er een interval (T_1,T_2) bestaat waarop geldt $\rho(t) = 0$, $x(t) = \xi$. Op grond van (4.1.13) moet daar ook gelden

$$u(t) = \alpha\xi$$

hetgeen niet in strijd is met het maximumprincipe omdat $\rho(t) = 0$. Hier hebben we dus te maken met singulier stuk baan. Vanaf het ogenblik T_2 geldt dan $\rho(t) < 0$ en $u(t) = 0$. Het is nl. niet mogelijk dat $\rho(t) > 0$ na T_2 omdat dan ook x zou gaan stijgen en als $\rho(t)$ eenmaal negatief wordt, dan daalt ook $x(t)$ en dan hebben we verder $u = 0$.

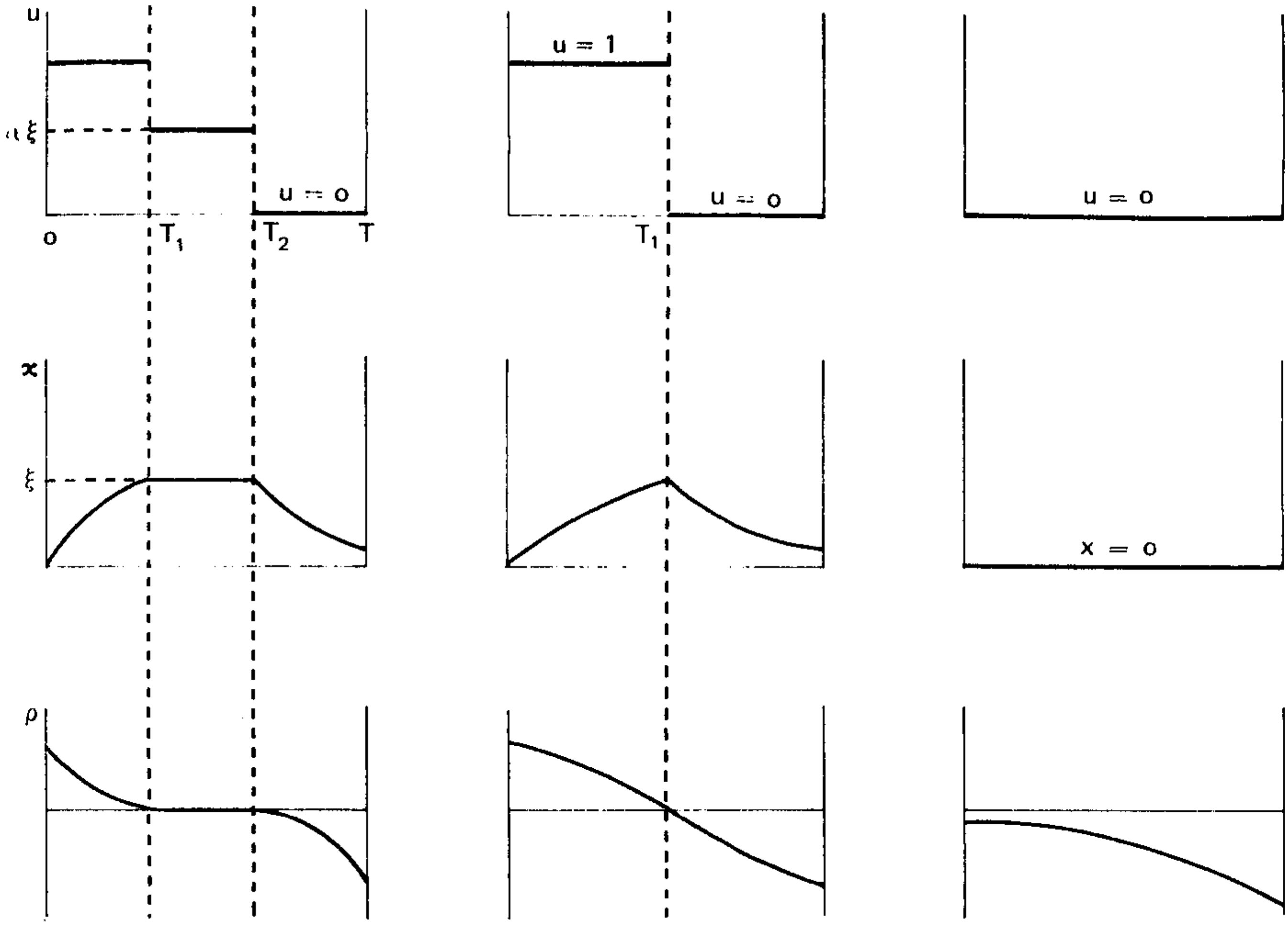
Resumerend, kunnen we zeggen dat we drie typen van optimale besturingen hebben gevonden:

A. $$\begin{aligned} u(t) &= 1 && (0 \leq t < T_1) \ , \\ &= \alpha\xi && (T_1 < t < T_2) \ , \\ &= 0 && (T_2 < t < T) \ , \end{aligned}$$

waar ξ wordt gegeven door $g(\xi) = 0$.

B. $$\begin{aligned} u(t) &= 1 && (0 \leq t < T_1) \ , \\ &= 0 && (T_1 < t < T) \ . \end{aligned}$$

C. $u(t) = 0 \quad (0 \le t \le T)$.



A kan alleen optreden als $0 < \delta < \omega'(0)/\omega(0)$.

C treedt zeker op als $\delta < \omega'(0)/\omega(0)$.

De bepaling van de getallen T_1 en T_2 in A kan op analoge wijze gebeuren als de bepaling van T_1 in het geval B. □

4.2. *De Hamilton-Jacobi theorie*

Voordat we een bewijs geven van het maximumprincipe behandelen we een theorie met behulp waarvan we onder andere een interpretatie kunnen geven **aan** de geadjungeerde vector. Verder zal deze theorie ook voldoende voorwaarden voor optimaliteit kunnen leveren.

Beschouw weer het probleem $EBP(U,T,x_0,f,h)$. We zullen dit probleem enigszins algemener formuleren door voor de begintijd een willekeurig tijdstip $t_0 \in [0,T]$ te kiezen. De oplossing van de differentiaalvergelijking

(4.2.1) $\quad \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$

met beginwaarde

(4.2.2) $\quad x(t_0) = x_0$

geven we aan met $\xi_u(t,t_0,x_0)$. We noemen bij gegeven (t_0,x_0) een $u \in \Omega$ (t_0,x_0)-<u>toegelaten</u> als $\xi_u(t,t_0,x_0)$ bestaat op $[t_0,T]$ (de waarde van u op

$(0,t_0)$ is hierbij irrelevant). Dan kunnen we het volgende probleem formuleren

(4.2.3) PROBLEEM. $\overline{EBP}(U,T,t_0,x_0,f,h)$. *Gegeven* U,T,x_0,f,h *als in* EBP *en* $t_0 \in [0,T]$, *bepaal een* (t_0,x_0)*-toegelaten* u, *zo dat* $h(\xi_u(T,t_0,x_0))$ *maximaal is.*

De maximale waarde van h die we vanuit een gegeven beginsituatie kunnen bereiken geven we aan met $V(t_0,x_0)$:

(4.2.4) DEFINITIE.

$$V(t_0,x_0) := \sup\{h(\xi_u(T,t_0,x_0)) \mid u \textit{ is } (t_0,x_0)\textit{-toegelaten}\}$$

heet de <u>*waardefunctie*</u> *van het probleem* $\overline{EBP}$.

Het is duidelijk dat $V(T,x_0) = h(x_0)$. We spreken af dat $\sup \emptyset = -\infty$, zodat $V(t_0,x_0) = -\infty$ geldt, als er geen (t_0,x_0)-toegelaten besturing bestaat.

We geven eerst twee eenvoudige eigenschappen van de functie V:

(4.2.5) LEMMA. *Zij* u (t_0,x_0)*-toegelaten en* $\xi(t) := \xi_u(t,t_0,x_0)$. *Dan is de functie* $t \mapsto V(t,\xi(t))$ *niet-stijgend op* $[t_0,T]$.

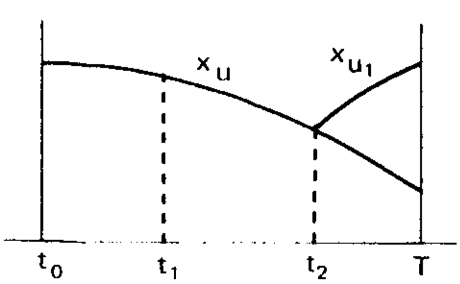
We zullen deze eigenschap in woorden als volgt formuleren: *De waardefunctie is niet-stijgend op de banen.*

BEWIJS. Als voor zekere t_1 en t_2 geldt $t_0 \le t_1 < t_2 \le T$ en $V(t_1,\xi(t_1)) > V(t_2,\xi(t_2))$, dan bestaat er een $(t_2,\xi(t_2))$-toegelaten u_1 zodanig dat

$$V(t_1,\xi(t_1)) < h(\xi_{u_1}(T,t_2,x(t_2))) .$$

Definieer de besturing u_2 door

$$\begin{aligned} u_2(t) &:= u(t) \quad (t_0 \le t < t_2) , \\ &:= u_1(t) \quad (t_2 \le t \le T) . \end{aligned}$$



Dan is u_2 (t_0,x_0)-toegelaten en

$$\xi_{u_2}(T,t_1,\xi(t_1)) = \xi_{u_2}(T,t_2,\xi_{u_2}(t_2,t_1,\xi(t_1))) = \xi_{u_1}(T,t_2,\xi(t_2)) \ ,$$

en dus $h(\xi_{u_2}(T,t_1,\xi(t_1))) > V(t_1,\xi(t_1))$, in strijd met de definitie van V.□

(4.2.6) LEMMA. *Zij* $\bar{u}$ *een oplossing van* $\overline{EBP}(U,T,t_0,x_0,f,h)$, *en* $\bar{\xi}(t) := \xi_{\bar{u}}(t,t_0,x_0)$. *Dan is de functie* $t \mapsto V(t,\bar{\xi}(t))$ *constant op* $[t_0,T]$.

In woorden: *Op optimale banen is de waardefunctie constant.*

BEWIJS. Het is duidelijk dat $V(t_0,x_0) = h(\bar{\xi}(T))$. Als $t_0 < t_1 \le T$, dan geldt

$$V(t_1,\bar{\xi}(t_1)) \ge h(\xi_{\bar{u}}(T,t_1,\bar{\xi}(t_1))) = h(\bar{\xi}(T)) \ .$$

Uit lemma (4.2.5) volgt nu het gestelde. □

Om deze resultaten verder te kunnen verwerken moeten we de functie $t \mapsto V(t,\xi(t))$ gaan differentiëren. Uit de definitie van V is echter geenszins af te leiden dat V differentieerbaar is en er zijn ook voorbeelden bekend waarbij dit niet het geval is. In feite is het meestal zo, dat V niet differentieerbaar zal zijn als de optimale besturingen discontinuïteiten hebben, hetgeen, zoals we hebben gezien, vaak kan voorkomen. We zullen hier echter expliciet veronderstellen dat V wel differentieerbaar is:

(4.2.7) VERONDERSTELLING. $V \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$.

Als nu $\xi(t) = \xi_u(t)$ een willekeurige baan van (4.2.1) is dan volgt uit lemma (4.2.5):

$$\frac{d}{dt} V(t,\xi(t)) \le 0$$

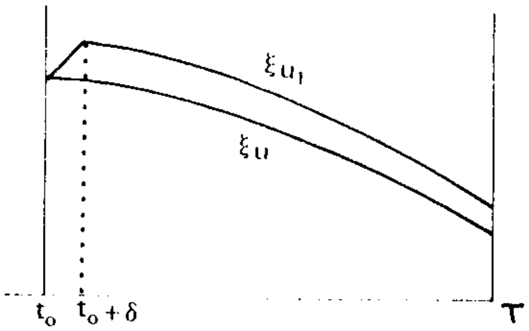
dus

$$V_t(t,\xi(t)) + V_x(t,\xi(t))f(t,\xi(t),u(t)) \le 0 \qquad (t_0 \le t \le T) \ . \tag{4.2.8}$$

Kies nu $v \in U$ willekeurig en definieer voor kleine $\delta > 0$ de besturing u_1 door

$$u_1(t) := v \qquad (t_0 \le t < t_0 + \delta)$$
$$u_1(t) := u(t) \quad (t_0 + \delta \le t \le T) \ .$$

Dan volgt uit stelling (3.1.6) en (3.1.7) dat u_1 (t_0,x_0)-toegelaten is, als δ maar klein genoeg is.



We passen (4.2.8) toe op deze besturing:

$$V_t(t,\xi_{u_1}(t)) + V_x(t,\xi_{u_1}(t))f(t,\xi_{u_1}(t),u_1(t)) \le 0 \qquad (t_0 \le t \le T) .$$

Als we hierin $t = t_0$ invullen, dan volgt

$$\text{(4.2.9)} \qquad V_t(t_0,x_0) + V_x(t_0,x_0)f(t_0,x_0,v) \le 0 .$$

Merk op dat deze ongelijkheid geldt voor elke $v \in U$ en elke $t_0 \in [0,T]$. Als nu $\bar{u}$ optimaal is bij de beginwaarde (t_0,x_0) dan volgt uit lemma (4.2.6):

$$\frac{d}{dt} V(t,\bar{\xi}(t)) = 0$$

en dus

$$V_t(t,\bar{\xi}(t)) + V_x(t,\bar{\xi}(t))f(t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) = 0 \qquad (t_0 \le t \le T) .$$

Anderzijds volgt uit (4.2.9) dat

$$V_t(t,\bar{\xi}(t)) + V_x(t, \bar{\xi}(t))f(t,\bar{\xi}(t),v) \le 0 \qquad (t_0 \le t \le T)$$

geldt voor elke $v \in U$. Derhalve vinden we

$$\text{(4.2.10)} \qquad H(V_x(t,\bar{\xi}(t)),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) = \max_{v\in U} H(V_x(t,\bar{\xi}(t)),t,\bar{\xi}(t),v)$$

waarbij we weer de <u>Hamiltoniaan</u>

$$H(\psi,t,x,u) := \psi f(t,x,u)$$

ingevoerd hebben (vgl. (4.1.1)). Als we dit met (4.1.5) vergelijken, dan zien we dat $V_x(t,\xi(t))$ correspondeert met de geadjungeerde variabele. We zullen dit verband in § 4.4 verder bekijken.

Hier zullen we het gevonden resultaat formuleren m.b.v. de notatie

$$H^0(\psi,t,x) := \sup_{v\in U} H(\psi,t,x,v) \ .$$

Dan vinden we:

(4.2.11) STELLING. *Als* $\bar{u}$ *een oplossing is van* $\overline{EBP}(U,T,t_0,x_0,f,h)$ *en* (4.2.7) *geldt, dan is voor* $t_0 \le t \le T$

$$V_t(t,\bar{\xi}(t)) + H^0(V_x(t,\bar{\xi}(t)),t,\bar{\xi}(t)) = 0$$

en

$$H(V_x(t,\bar{\xi}(t)),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) = H^0(V_x(t,\bar{\xi}(t)),t,\bar{\xi}(t)) \quad ,$$

waar $\bar{\xi}(t) := \xi_{\bar{u}}(t,t_0,x_0)$.

Als men de optimale besturing niet bij één beginwaarde en tijd x_0 en t_0 wil berekenen maar voor alle x_0 en t_0, dan is het voordelig de optimale besturing te geven in de vorm van een <u>terugkoppeling</u> (of <u>regelwet</u>)

$$u(t) = k(t,\xi(t)) \ .$$

De functie k is dan onafhankelijk van de begincondities. Op elk tijdstip wordt u gegeven als functie van t en de momentane toestand ξ. Bij een gegeven regelwet k en bij vaste begincondities wordt een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),k(t,x(t))), \ x(t_0) = x_0 \ .$$

Deze oplossing geven we aan met $x_k(t,t_0,x_0)$. Dan correspondeert daarmee een besturing

$$u_k(t,t_0,x_0) := k(t,x_k(t,t_0,x_0)) \ .$$

Hierbij nemen we aan dat $k \in C^1$. Een meer gedetailleerde bespreking van het begrip terugkoppeling wordt gegeven in [MLS].

(4.2.12) DEFINITIE. *Een terugkoppeling heet <u>toegelaten</u> als voor alle* (t_0,x_0) *de besturing* $u_k(t,t_0,x_0)$ *toegelaten is.* k *heet <u>optimaal</u> als voor elke* (t_0,x_0) *de besturing* $u_k(t,t_0,x_0)$ *optimaal is.*

(4.2.13) DEFINITIE. *De partiële differentiaalvergelijking in de functie* $S(t,x)$:

$$S_t(t,x) + H^0(S_x(t,x),t,x) = 0$$

met randwaarde

$$S(T,x) = h(x)$$

heet de *Hamilton-Jacobivergelijking*.

(4.2.14) STELLING. *Als* $\bar{k}$ *optimaal is en* $V \in C^1$, *dan voldoet* $V(t,x)$ *aan de Hamilton-Jacobivergelijking. Verder geldt*

$$H(V_x(t,x),t,x,\bar{k}(t,x)) = H^0(V_x(t,x),t,x) \ .$$

BEWIJS. Zij (t_0,x_0) gegeven en $\bar{u}(t) := \bar{k}(t,\bar{x}(t))$, waar $\bar{x}(t) := x_{\bar{k}}(t,t_0,x_0)$. Daar $\bar{u}$ een optimale besturing is, volgt uit lemma (4.2.6)

$$V_t(t,\bar{x}(t)) + V_x(t,\bar{x}(t))f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = 0 \qquad (t_0 \le t \le T) \ .$$

Vul $t = t_0$ in:

$$V_t(t_0,x_0) + V_x(t_0,x_0)f(t_0,x_0,\bar{k}(t_0,x_0)) = 0 \ .$$

Verder is reeds aangetoond (zie (4.2.9)) dat voor alle $v \in U$

$$V_t(t_0,x_0) + V_x(t_0,x_0)f(t_0,x_0,v) \le 0 \ .$$

We zien dus dat

$$H(V_x(t_0,x_0),x_0,t_0,\bar{k}(x_0,t_0)) = H^0(V_x(t_0,x_0),x_0,t_0) \ ,$$

en dat $V(t_0,x_0)$ aan de Hamilton-Jacobivergelijking voldoet. Daar (t_0,x_0) willekeurig gekozen was, volgt het gestelde. □

We hebben gezien dat onder de extra veronderstelling (4.2.7) de Hamilton-Jacobivergelijking ons een noodzakelijke voorwaarde voor optimaliteit levert. Nu willen we laten zien dat we ook een voldoende voorwaarde kunnen formuleren in termen van de Hamilton-Jacobivergelijking.

(4.2.15) STELLING. *Als* $\bar{u}$ (t_0,x_0)*-toegelaten is,* $\bar{\xi}(t)$ *de bijbehorende baan en* $S \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *is een functie die voldoet aan de Hamilton-Jacobivergelijking, terwijl*

(4.2.16) $H(S_x(t,\bar{\xi}(t)),t,\xi(t),\bar{u}(t)) = H^0(S_x(t,\bar{\xi}(t)),t,(\bar{\xi}(t))$

dan is $\bar{u}$ *optimaal en* $S(t_0,x_0) = V(t_0,x_0)$.

BEWIJS. Zij u een willekeurige (t_0,x_0)-toegelaten besturing. Dan geldt

$$H^0(S_x(t,x),t,x) \geq H(S_x(t,x),t,x,u(t))$$

en dus

$$0 = S_t(t,x) + H^0(S_x(t,x),t,x) \geq S_t(t,x) + H(S_x(t,x),t,x,u(t))$$

voor $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^n$. In het bijzonder is

$$\frac{d}{dt} S(t,\xi(t)) = S_t(t,\xi(t)) + H(S_x(t,\xi(t),t,\xi(t),u(t)) \leq 0$$

waar $\xi(t) := \xi_u(t,t_0,x_0)$. De functie $t \mapsto S(t,\xi(t))$ is dus niet stijgend. Daarom moet gelden

(4.2.17) $S(t_0,x_0) \geq S(T,\xi(T)) = h(\xi(T))$.

Anderzijds volgt uit (4.2.16) dat

$$\frac{d}{dt} S(t,\bar{\xi}(t)) = 0$$

omdat S voldoet aan de Hamilton-Jacobivergelijking. We zien dat $t \mapsto S(t,\bar{\xi}(t))$ constant is en dus

(4.2.18) $S(t_0,x_0) = S(T,\bar{\xi}(T)) = h(\bar{\xi}(T))$.

Uit (4.2.17) en (4.2.18) volgt dat

$$h(\bar{\xi}(T)) \geq h(\xi(T))$$

zodat $\bar{u}$ optimaal is en

$$S(t_0,x_0) = h(\bar{\xi}(T)) = V(t_0,x_0) \ . \qquad \square$$

Ook kan men eenvoudig een voldoende voorwaarde geven voor de optimaliteit van een regelwet $k(t,x)$.

(4.2.19) STELLING. *Neem aan dat er een functie* $w(\psi,t,x)$ *bestaat zo dat*

$$H(\psi,t,x,w(\psi,t,x)) = H^0(\psi,t,x) .$$

Stel verder dat $S(t,x)$ *een oplossing is van de Hamilton-Jacobivergelijking. Als dan*

$$\bar{k}(t,x) := w(S_x(t,x),t,x)$$

een toegelaten regelwet is dan is $\bar{k}$ *optimaal en* $S(t,x) = V(t,x)$.

BEWIJS. Dit volgt vrij gemakkelijk uit stelling (4.2.15). □

Vergelijk ook de formules (4.1.8) en (4.1.9).

4.3. *Optimalisering van lineaire systemen met een kwadratisch criterium*

Gegeven is het volgende systeem in $\mathbb{R}^n$

(4.3.1) $$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \; x(t_0) = x_0 .$$

Zij $U = \mathbb{R}^m$. Gevraagd wordt een regelwet $k(t,x)$ te bepalen zodanig dat

(4.3.2) $$x(T)'Mx(T) + \int_{t_0}^{T} \{x'Q(t)x + u'R(t)u\}dt$$

minimaal wordt. Hier is $0 \le t_0 < T$. Gegeven is dat $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ en $R(t)$ continue matrixfuncties zijn en verder dat $Q(t) \ge 0$, $R(t) > 0$ en $M \ge 0$. Als we invoeren

$$y(t) := \int_{t_0}^{t} \{x'Q(\tau)x + u'R(\tau)u\}d\tau + y_0$$

dan geldt

$$\dot{y}(t) = x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t), \; y(t_0) = y_0$$

Als we vervolgens

$$\underline{x} := (x,y)$$

definiëren, dan is dit besturingsprobleem van het type $\overline{EBP}(U,T,t_0,\underline{x}_0,f,h)$ waarbij

$$h(\underline{x}) := -y - x'Mx .$$

We willen immers $y(T) + x'(T)Mx(T)$ minimaliseren. De Hamiltoniaan van dit probleem wordt

$$H(\underline{\psi},t,\underline{x},u) = \psi A(t)x + \psi B(t)u + \varphi x'Q(t)x + \varphi u'R(t)u \ .$$

Hier is $\psi \in \mathbb{R}_n$ en $\varphi \in \mathbb{R}$. Als $\varphi = 0$ dan heeft H geen maximum, behalve als ook $\psi B(t) = 0$ maar dan is H onafhankelijk van u. Dit geval is daarom niet interessant en we veronderstellen verder $\varphi \neq 0$. Er geldt

$$H'_u(\underline{\psi},t,\underline{x},u) = B'(t)\psi' + 2\varphi u'R(t) \ .$$

De voorwaarde $H_u = 0$ levert

$$w(\underline{\psi},t,\underline{x}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\varphi}R^{-1}(t)B'(t)\psi' \ .$$

De Hamilton-Jacobivergelijking luidt

$$S_t(t,\underline{x}) + S_x(t,\underline{x})\{A(t)x + B(t)w(S_{\underline{x}}(t,\underline{x}),t,\underline{x})\} +$$
$$+ S_y(t,\underline{x})\{x'Q(t)x + w(S_x(t,\underline{x}),t,\underline{x})'R(t)w(S_x(t,\underline{x}),t,\underline{x})\} = 0,$$

met de randwaarde $S(\underline{x},T) = h(\underline{x}) = -y - x'Mx$. Als we hierin de speciale gedaante van w invullen dan wordt de Hamilton-Jacobivergelijking

$$S_t + S_xA(t)x + S_yx'Q(t)x - \frac{1}{4}\frac{1}{S_y}S_xB(t)R^{-1}(t)B'(t)S'_x = 0$$

onder de aanname dat $S_y \neq 0$. Het blijkt dat deze vergelijking een oplossing heeft van de vorm

$$S(t,\underline{x}) = -y - x'K_*(t)x \ ,$$

waar $K_*(t)$ de symmetrische oplossing is van de matrixdifferentiaalvergelijking (<u>Riccativergelijking</u>):

$$\dot{K}(t) + Q(t) + A'(t)K(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t) = 0$$
$$K(T) = M \ .$$

Immers substitutie van $S(t,\underline{x})$ in de Hamilton-Jacobivergelijking geeft

$$-x'\{\dot{K}_*(t) + K_*(t)A(t) + A'(t)K_*(t) +$$
$$+ Q(t) - K_*(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K_*(t)\}x = 0 \ .$$

Stelling (4.2.18) zegt nu dat de terugkoppeling

$$\bar{k}(t,\underline{x}) := w(S_{\underline{x}}(t,\underline{x}),t,\underline{x})$$

optimaal is, terwijl $h(\underline{x}_{\bar{k}}(T,t_0,x_0)) = S(t_0,\underline{x}(t_0))$.

Dit geeft als resultaat

$$\bar{k}(t,\underline{x}) = -R^{-1}(t)B'(t)K_*(t)x \ ,$$

terwijl de minimale waarde van de integraal gelijk is aan $-S(t_0,\underline{x}(t_0)) = = x_0'K_*(t_0)x_0$. Zo vinden we

(4.3.3) STELLING. *Als* $K_*(t)$ *een (symmetrische) oplossing is van de Riccati-vergelijking op* $[t_0,T]$ *dan wordt de optimale terugkoppeling gegeven door*

$$\bar{k}(x,t) = -R^{-1}(t)B'(t)K_*(t)x \ ,$$

terwijl de minimale waarde van de integraal gelijk is aan

$$x_0'K_*(t_0)x_0 \ .$$

Inderdaad kan bewezen worden dat onder de gestelde voorwaarden ($Q(t) \geq 0$, $R(t) > 0$, $M \geq 0$) de Riccativergelijking een oplossing heeft. (Vergelijk [LMS], hoofdstuk 5).

4.4. *Afleiding van het maximumprincipe uit de Hamilton-Jacobitheorie*

Zoals we reeds in § 4.2 hebben opgemerkt bestaat er een relatie tussen de Hamilton-Jacobivergelijkingen en het maximumprincipe. Als we

(4.4.1) $$\psi(t) := V_x(t,\bar{\xi}(t))$$

definiëren bij een optimale baan $\bar{\xi}(t)$, dan komt (4.2.10) overeen met (4.1.5) en we zouden een bewijs van het maximumprincipe hebben (althans onder de extra veronderstelling (4.2.7)) als we wisten dat $\psi(t)$ voldoet aan de geadjungeerde vergelijking

(4.4.2) $$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) \ .$$

Om dit te kunnen bewijzen moeten we echter een sterkere veronderstelling maken dan (4.2.7) nl.:

(4.4.3) VERONDERSTELLING. $V \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$.

Dan kunnen we uit (4.4.1) onmiddellijk afleiden dat

(4.4.4) $$\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt} V_x(t,\bar{\xi}(t)) = V_{tx}(t,\bar{\xi}(t)) + f'(t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t))V_{xx}(t,\bar{\xi}(t)) \ .$$

Met behulp hiervan kunnen we bewijzen

(4.4.5) STELLING. $\psi(t)$ *gedefinieerd door* (4.4.1) *voldoet aan* (4.4.2) *en aan*

$$\psi(T) = h_x(\bar{\xi}(T))$$

als $\bar{\xi}$ *een optimale baan is en* $\bar{u}$ *de corresponderende optimale besturing. M.a.w. onder de veronderstelling* (4.4.3) *geldt het maximumprincipe.*

BEWIJS. Als $\bar{u}(t)$ en $\bar{\xi}(t)$ optimaal zijn, en $V(t,x)$ is de waardefunctie, dan is $V(T,x) = h(x)$, zodat

$$\psi(T) = V_x(T,\xi(T)) = h_x(\xi(T)) .$$

We moeten nu nog laten zien dat ψ aan (4.4.2) voldoet. Definieer:

$$F(t,x) := V_t(t,x) + V_x(t,x)f(t,x,\bar{u}(t))$$

voor $0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dan volgt uit (4.2.11):

(4.4.6) $\quad F(t,\bar{\xi}(t)) = 0 \quad (t_0 \le t \le T)$.

Kies nu $\tau \in [t_0,T]$ willekeurig. De functie $\bar{\xi}(t)$ voldoet aan

$$\dot{x} = f(t,x,\bar{u}(t)),\ x(\tau) = \bar{\xi}(\tau)$$

voor $\tau \le t \le T$. Uit stelling (3.1.7) volgt dat er voor voldoend kleine $\varepsilon > 0$ een oplossing $\xi_{\bar{u}}(t,\tau,a)$ van

$$\dot{x} = f(t,x,\bar{u}(t)),\ x(\tau) = a$$

op $[\tau,T]$ bestaat als maar $|a - \bar{\xi}(\tau)| < \varepsilon$ is. Daarom is $\bar{u}$ ook (τ,a)-toegelaten. Uit lemma (4.2.5) volgt dan dat

$$V_t(\tau,a) + V_x(\tau,a)f(\tau,a,\bar{u}(\tau)) \le 0$$

d.w.z.

$$F(\tau,a) \le 0$$

voor $|a - \bar{\xi}(\tau)| \le \varepsilon$. De functie $a \mapsto F(\tau,a)$ heeft dus een locaal maximum in $a = \bar{\xi}(\tau)$ (zie (4.4.6)). Derhalve geldt

$$F_x(\tau,\bar{\xi}(\tau)) = 0 .$$

Daar $\tau \in [t_0,T]$ willekeurig is, volgt hieruit

$$F_x(t,\bar{\xi}(t)) = 0 \quad (t_0 \le t \le T) .$$

Uitwerking geeft

$$V_{tx}(t,\bar{\xi}(t)) + f'(t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t))V_{xx}(t,\bar{\xi}(t)) +$$

$$+ V_x(t,\bar{\xi}(t))f_x(t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) = 0 .$$

Uit (4.4.4) volgt nu het gestelde. □

We hebben nu het maximumprincipe bewezen onder de extra veronderstelling (4.4.3). Het onbevredigende hiervan is, dat men nooit kan verifiëren of aan deze veronderstelling is voldaan. Immers, de waardefunctie is niet gemakkelijk te berekenen. Alleen als de optimale besturingen bekend zijn dan kan men V berekenen en nagaan of aan (4.4.3) is voldaan. Maar dan heeft men het maximumprincipe ook niet meer nodig. Eenzelfde bezwaar geldt ook voor de noodzakelijke voorwaarden in de vorm van de Hamilton-Jacobivergelijking zoals deze in § 4.2 zijn afgeleid. Het is daarom niet terecht de Hamilton-Jacobivergelijking als een echte noodzakelijke voorwaarde te beschouwen. Daarentegen kan men wel zeggen dat deze vergelijkingen een voldoende voorwaarde leveren (stelling (4.2.15) en (4.2.18)).

Een verder resultaat van de Hamilton-Jacobitheorie is een interpretatie van de geadjungeerde variabele nl.: de gradiënt van de waardefunctie.

In de volgende paragraaf zullen we een directer bewijs van het maximumprincipe geven, dat niet uitgaat van een extra veronderstelling.

4.5. *Het bewijs van het maximumprincipe*

We beginnen met enkele resultaten uit de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen. De algemene gedaante van een homogeen stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen is

(4.5.1) $\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ x(0) = x_0 \quad (0 \le t \le T)$,

waarbij $A(t)$ een $n \times n$-matrix is en $x(t)$ een n-vector. We nemen aan dat $t \mapsto A(t)$ stuksgewijs continu is. Deze differentiaalvergelijking heeft een éénduidige oplossing op het hele interval $[0,T]$. Merk op dat we voor een *lineaire* differentiaalvergelijking de globale existentie kunnen uitspreken, in tegenstelling tot het algemene geval (zie (3.1.6)). Voor het bewijs verwijzen we naar [GDV], [CL].

Naast de vergelijking (4.5.1) voor vectoren beschouwen we de matrix-vergelijking

(4.5.2) $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, $X(0) = X_0$.

Een matrix $X(t) = [x_1(t),\ldots,x_k(t)]$ voldoet aan deze vergelijking dan en slechts dan als elk van de kolommen x_i van X aan (4.5.1). Hieruit volgt dat ook (4.5.2) een eenduidige oplossing heeft. In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in de $n \times n$-oplossing van

(4.5.3) $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$

die we de fundamentaaloplossing van (4.5.1) of (4.5.2) noemen. Op analoge manier kan men definiëren de <u>geadjungeerde vergelijking</u> van (4.5.1), gegeven door

(4.5.4) $\dot{\psi}(t) = -\psi(t)A(t)$, $(0 \le t \le T)$

waar $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}_n$ een rijvectorwaardige functie is. Ook hier heeft men een fundamentaaloplossing $\Psi(t)$ gedefinieerd door

$$\dot{\Psi}(t) = -\Psi(t)A(t) , \qquad (0) = I .$$

(4.5.5) LEMMA. $\Phi(t)$ *is inverteerbaar op* $[0,T]$ *en* $\Psi(t) = \Phi^{-1}(t)$.

BEWIJS. $\frac{d}{dt}(\Psi\Phi) = \dot{\Psi}\Phi + \Psi\dot{\Phi} = -\Psi A\Phi + \Psi A\Phi = 0$ dus $\Psi(t)\Phi(t) = \Psi(0)\Phi(0) = I$. □

De oplossing van (4.5.1) kan worden uitgedrukt in de fundamentaal-oplossing:

(4.5.6) $x(t) = \Phi(t)x_0$.

Men kan gemakkelijk verifiëren dat (4.5.6) aan (4.5.1) voldoet. Iets algemener is het volgende: De oplossing van

(4.5.7) $\dot{x}(t) = A(t)x(t)\ , \quad x(t_0) = x_0$

waar $0 \leq t_0 \leq T$, wordt gegeven door

(4.5.8) $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0\ .$

Op analoge wijze is $\psi(t) = \eta\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t)$ de oplossing van (4.5.4) met $\psi(t_0) = \eta$. □

Beschouw nu de (niet-lineaire) differentiaalvergelijking

(4.5.9) $\dot{x}(t) = g(t,x(t))$

(vgl. (3.1.5)) en veronderstel dat $\bar{x}(t)$ een oplossing hiervan op $[0,T]$ is. Als we g ontwikkelen in de buurt van $(t,\bar{x}(t))$ vinden we

$$g(t,x) = g(t,\bar{x}(t)) + A(t)(x - \bar{x}(t)) + h(t,x - \bar{x}(t))$$

waarbij $h(t,x - \bar{x}(t)) = o(x - \bar{x}(t))$ als $x \to \bar{x}(t)$, en

$$A(t) := g_x(t,\bar{x}(t))$$

de functionaalmatrix van g naar x in het punt $(t,\bar{x}(t))$ is. De transformatie $y := x - \bar{x}(t)$ in (4.5.9) geeft dan de differentiaalvergelijking

$$\dot{y}(t) = \dot{x} - \dot{\bar{x}} = g(t,\bar{x}) = A(t)y + h(t,y)\ .$$

We noemen nu

(4.5.10) $\dot{z} = A(t)z$

de <u>gelineariseerde</u> vergelijking van (4.5.9) om de baan $\bar{x}(t)$. De oplossingen van deze vergelijking geven een eerste orde benadering van de oplossingen van (4.5.9) in de buurt van de oplossing $\bar{x}(t)$. Dit volgt uit:

(4.5.11) STELLING. *Laat* g *voldoen aan de eisen van stelling* (3.1.6). *Zij* $\bar{x}(t) = \xi(t,x_0)$ *de oplossing van* (4.5.4) *met beginwaarde* $\bar{x}(0) = x_0$. *Dan is de functie* $x_0 \mapsto \xi(t,x_0)$ *differentieerbaar en de functionaalmatrix is de fundamentaaloplossing van* (4.5.10). *Deze is een continue functie van* x_0 *en* t. *Er geldt dus*

(4.5.12) $\xi(t,x_0 + h) = \xi(t,x_0) + \Phi(t)h + o(h) \qquad (h \to 0)$

waarbij $\Phi(t)$ *gegeven wordt door* (4.5.3) *met*

$$A(t) = g_x(t,\xi(t,x_0)) .$$

Formule (4.5.12) *geldt uniform voor* $0 \le t \le T$.

Het bewijs van (4.5.11) kan men vinden in bijv. [CL, Ch. I] of [GDV Hfdst. III,1]. Intuitief kan men als volgt inzien dat $\Phi(t)$ de functionaal matrix van $x_0 \mapsto \xi(t,x_0)$ is. Als men deze functionaalmatrix met $Y(t) = \partial x/\partial x_0$ aangeeft, dan geldt

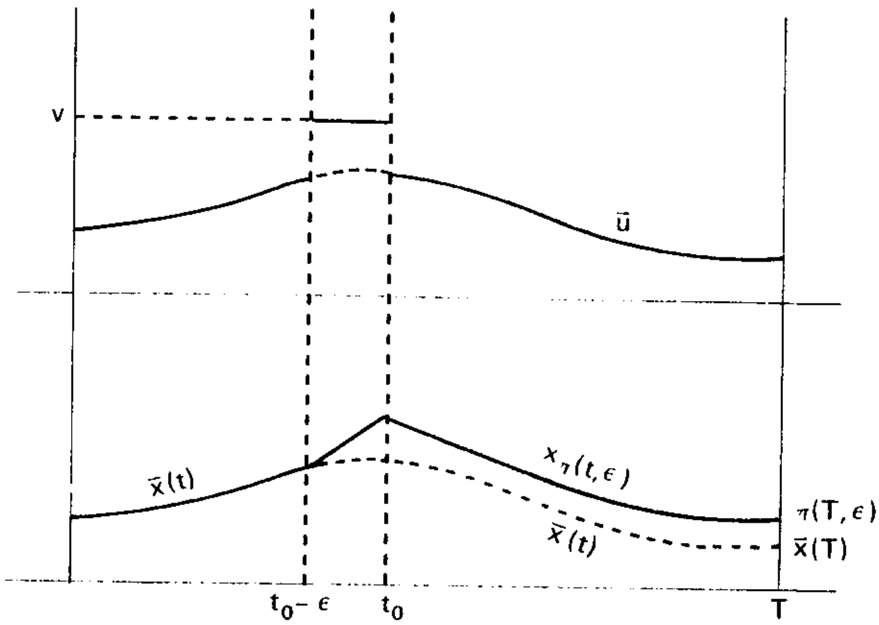
$$\dot{Y}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_0} x = \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial t} x = \frac{\partial}{\partial x_0}\dot{x} = \frac{\partial}{\partial x_0} g_x(t,x) = \frac{\partial x}{\partial x_0} = A(t)Y(t)$$

en $Y(0) = \frac{\partial x_0}{\partial x_0} = I$. In het exacte bewijs moet men natuurlijk bewijzen dat verwisseling van differentiatie volgorde geoorloofd is.

We beginnen nu met het bewijs van het maximumprincipe. Laat $\bar{u}$ een optimale besturing zijn, d.w.z. een oplossing van $EBP(U,T,x_0,f,h)$, en $\bar{\xi}(t) := \xi_{\bar{u}}(t)$ de bijbehorende baan. We brengen een storing aan op $\bar{u}$, d.w.z. we vergelijken $\bar{u}$ met een in zekere zin naburige besturing u en we proberen conclusies te trekken uit de ongelijkheid $h(\bar{\xi}(T)) \ge h(\xi_u(T))$. We zullen voor u een functie nemen die op een klein interval na gelijk is aan $\bar{u}$. Op het kleine interval zullen we u een willekeurige waarde $v_0 \in U$ laten aannemen.

Zij $\pi := (t_0,v_0)$, waar $t_0 \in (0,T)$ een continuïteitspunt van $\bar{u}$ is en $v_0 \in U$. We noemen π een <u>elementaire storing</u>. Voor kleine $\varepsilon > 0$ correspondeert met π de gestoorde besturing $u_\pi(t,\varepsilon)$ en de bijbehorende baan $x_\pi(t,\varepsilon)$. De besturing $u_\pi(t,\varepsilon)$ is gedefinieerd door

$$u_\pi(t,\varepsilon) := \begin{cases} v_0 & (t_0 - \varepsilon \le t \le t_0) \\ \bar{u}(t) & \text{elders in } [0,T] . \end{cases}$$


v
ū
x̄(t)
$x_\pi(t,\epsilon)$
$\pi(T,\epsilon)$
x̄(t)
x̄(T)
$t_0-\epsilon$
t_0
T

We laten zien dat $x_\pi(T,\varepsilon)$ bestaat voor kleine $\varepsilon > 0$ en dat

(4.5.13) $\quad x_\pi(T,\varepsilon) = \bar{\xi}(T) + p_\pi\varepsilon + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \downarrow 0)$.

De vector p_π wordt <u>storingsvector</u> genoemd. Het is duidelijk, dat $x_\pi(t,\varepsilon) = \bar{\xi}(t)$ voor $t < t_0 - \varepsilon$. Voor $t_0 - \varepsilon \le t \le t_0$ geven we een schatting voor $x_\pi(t,\varepsilon)$. In het bijzonder volgt uit stelling (3.1.6) en (3.1.7) dat $x_\pi(t,\varepsilon)$ bestaat op $[t_0 - \varepsilon, t_0]$ en dat $x_\pi(t,\varepsilon) \to \bar{\xi}(t_0)$ $(\varepsilon \downarrow 0,\ t_0 - \varepsilon \le t \le t_0)$. Uiteraard geldt ook $\bar{\xi}(t) \to \bar{\xi}(t_0)$ $(\varepsilon \to 0,\ t_0 - \varepsilon \le t \le t_0)$. Derhalve vinden we

$$x_\pi(t_0,\varepsilon) - \bar{\xi}(t_0) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \{f(t,x_\pi(t,\varepsilon),v_0) - f(t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t))\}dt =$$

$$= \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \{f(t_0,\bar{\xi}(t_0),v_0) - f(t_0,\bar{\xi}(t_0),\bar{u}(t_0))\}dt + o(\varepsilon).$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de continuïteit van $\bar{u}$ in t_0 en van de continuïteit van f. Wanneer we de notatie

$$q_\pi := f(t_0,\bar{\xi}(t_0),v_0) - f(t_0,\bar{\xi}(t_0),\bar{u}(t_0))$$

invoeren, vinden we

$$x_\pi(t_0,\varepsilon) = \bar{\xi}(t_0) + \varepsilon q_\pi + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \downarrow 0) .$$

Op het interval $[t_0,T]$ voldoen $\bar{x}(t)$ en $x_\pi(t,\varepsilon)$ aan dezelfde differentiaalvergelijking. Alleen de beginwaarden zijn verschillend. We kunnen dus stelling 3.1.7 en 4.5.12 toepassen. Er volgt dat $x_\pi(t,\varepsilon)$ op $[t_0,T]$ is gedefinieerd, als $\varepsilon > 0$ klein genoeg is. Verder zien we dat $x_\pi(t,\varepsilon)$ continu differentieerbaar van ε afhangt voor $\varepsilon > 0$. Er geldt

$$x_\pi(t,\varepsilon) = \bar{\xi}(t) + \varepsilon\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)q_\pi + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

voor $0 \le t \le T$, waar $\Phi(t)$ de fundamentaaloplossing is behorende bij de coëfficiëntenmatrix

$$A(t) := f_x(t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) \qquad (0 \le t \le T) .$$

Hiermee hebben we aangetoond dat (4.5.13) geldt men

(4.5.14) $\quad p_\pi = \Phi(T)\Phi^{-1}(t_0)q_\pi$.

Uit de optimaliteit van $\bar{u}$ volgt dat $h(x_\pi(T,\varepsilon)) \le h(\bar{\xi}(T))$ voor kleine $\varepsilon > 0$ en dus, door ontwikkeling naar ε van het linkerlid van deze ongelijkheid

$$h(\bar{\xi}(T)) + \varepsilon h_x(\bar{\xi}(T))p_\pi + o(\varepsilon) \le h(\bar{\xi}(T)) \ .$$

Als we hierin ε naar nul laten naderen vinden we

$$h_x(\bar{\xi}(T))p_\pi \le 0 \ .$$

(4.5.15) OPMERKING. Als we de kegel opgespannen door de vectoren p_π, waarbij de π's elementaire storingen zijn, aangeven met $\tilde{P}$, dan volgt uit (4.5.13) dat

$$h_x(\bar{\xi}(T)) \in \tilde{P}^0 \ .$$

Dit resultaat kunnen we zien als een speciaal geval van stelling (2.4.3). Immers, zoals we in § 3.3 hebben opgemerkt, $\bar{\xi}(T)$ is een oplossing van $OP(W(x_0),h)$ en de vectoren p_π zijn raakvectoren aan $W(x_0)$ vanwege (4.5.7) en het feit, dat $x_\pi(T,\varepsilon) \in W(x_0)$. Derhalve is $\tilde{P} \subseteq T_{\bar{\xi}(T)}(W(x_0))$ en dus

$$h_x(\bar{\xi}(T)) \in T^0_{\bar{\xi}(T)}(W(x_0)) \subseteq \tilde{P}^0 \ . \qquad \square$$

Zij nu $\bar{\psi}(t)$, zoals in stelling (3.4.4) oplossing van (4.1.6) en (4.1.7). Dan is

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = -\bar{\psi}(t)A(t)$$

d.w.z. ψ voldoet aan de geadjungeerde vergelijking van $\dot{y} = A(t)y$. Daarom is $\bar{\psi}(t) = \eta\Phi(T)\Phi^{-1}(t)$, waar $\eta := h_x(\bar{\xi}(T))$. We zien dat (zie 4.5.14):

$$\psi(t_0)q_\pi = \eta\Phi(T)\Phi^{-1}(t_0)q_\pi = \eta p_\pi \le 0 \ .$$

Maar:

$$\bar{\psi}(t_0)q_\pi = H(\bar{\psi}(t_0),t,\bar{\xi}(t_0),v) - H(\bar{\psi}(t_0),t_0,\bar{\xi}(t_0),\bar{u}(t_0)) \ .$$

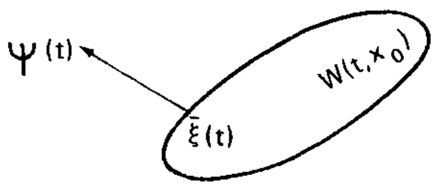
Omdat $\bar{\psi}(t_0)q_\pi \le 0$ geldt voor alle $\pi = (t_0,v)$ waarbij t_0 een continuïteitspunt van $\bar{u}$ is, hebben we (4.1.5) bewezen.

Verder merken we zonder bewijs op dat de geadjungeerde vector $\psi(t)$ (naast de interpretatie van de vorige paragraaf) ook een meetkundige interpretatie heeft:

Als $\bar{u},\bar{\xi}$ optimaal is en $\nabla h(\bar{\xi}(T)) \neq 0$ dan is $\bar{\xi}(T)$ een randpunt van $W(x_0)$ (zie (2.4.5)(i)). Hieruit kan men afleiden dat ook $\bar{\xi}(t)$ randpunt is van $W(t_0,x_0)$, de op het tijdstip t bereikbare verzameling,

$$W(t,x_0) := \{\xi_u(t,x_0) \mid u \text{ toegelaten}\} .$$

Als we verder aannemen dat de rand van $W(t,x_0)$ een glad oppervlak is in de buurt van $\bar{\xi}(t)$, dan kan worden aangetoond dat $\psi(t)$ een normaalvector is op die rand in het punt $\bar{\xi}(t)$. Als $W(t,x_0)$ een inwendige heeft, dan wijst die normaal naar buiten.



Tenslotte willen we aan de hand van een voorbeeld laten zien dat het maximumprincipe geen voldoende voorwaarde voor optimaliteit is.

(4.5.16) VOORBEELD. Beschouw het systeem

$$\dot{x} = ux - vy, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \le 1$$

$$\dot{y} = vx + uy, \quad y(0) = 0, \quad |v(t)| \le 1 \quad .$$

Van dit systeem kunnen we $W(t) := W(t,\underline{x}_0)$ bepalen. In poolcoördinaten worden de vergelijkingen:

$$\dot{r} = ur, \quad r(0) = 1$$

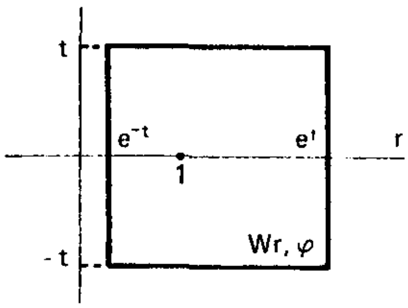
$$\dot{\varphi} = v \ , \quad \varphi(0) = 0 \ .$$

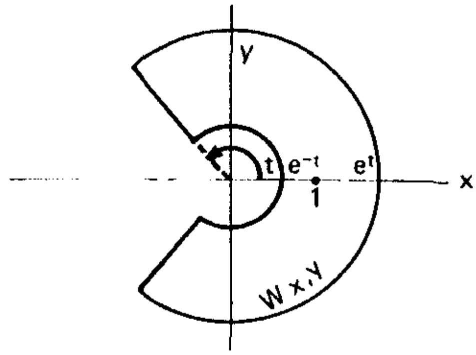
In het (r,φ) vlak zijn de besturingen voor r en φ onafhankelijk. Daarom vinden we

$$W_{r,\varphi}(t) = \{(r,\varphi) \mid e^{-t} \le r \le e^{t}, -t \le \varphi \le t\} .$$

In het (x,y)-vlak hebben we dus

$$W_{x,y}(t) = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid e^{-t} \le r \le e^{t}, -t \le \varphi \le t\} .$$





Beschouw nu het probleem $EBP(U,T,\underline{x}_0,f,h)$ met $U,x_0,\underline{f}$ gegeven door (4.5.16), terwijl $T > 0$ gegeven is, en $h(\underline{x}) := -x$. (We gebruiken de notatie $\underline{x} = (x,y)$.) Volgens het maximumprincipe moet een optimale besturing $\underline{\bar{u}}$ voldoen aan

$$H(\underline{\psi}(t),\underline{\bar{\xi}}(t),\underline{\bar{u}}(t)) = \max_{\underline{v}\in U} H(\underline{\psi}(t),\underline{\bar{\xi}}(t),\underline{u})$$

waar $\underline{\bar{\xi}}$ de optimale baan is, $\underline{\bar{u}}(t) = (\bar{u}(t),\bar{v}(t))$, en $\underline{\psi}(t) = [\psi(t),\varphi(t)]$ oplossing van de geadjungeerde vergelijking

$$\dot{\psi} = -u\psi - v\varphi, \quad \psi(T) = -1$$
$$\dot{\varphi} = v\psi - u\varphi, \quad \varphi(T) = 0 .$$

Verder is

$$H = \psi(ux - vy) + \varphi(vx + uy) .$$

Omgekeerd is het echter niet waar dat een besturing $(\bar{u},\bar{v})$ die aan deze voorwaarden voldoet, optimaal is. Bijv.: Als $\bar{u}(t) = -1$, $\bar{v}(t) = 0$ voor alle t, dan is (met $\underline{\bar{\xi}} = (\bar{\xi},\bar{\eta})$)

$$\bar{\xi}(t) = e^{-t}, \quad \bar{\eta}(t) = 0$$

de bijbehorende baan en $\bar{\xi}(T) = e^{-T}$. Deze besturing is kennelijk niet optimaal. Bij deze besturing vinden we voor de geadjungeerde variabelen:

$$\bar{\psi}(t) := -e^{t-T}, \quad \bar{\varphi}(t) = 0 .$$

Daarom is de Hamiltoniaan

$$H(\bar{\psi}(t),\bar{\xi}(t),\underline{u}) = -e^{-T}u$$

en deze wordt wel gemaximaliseerd door de besturing $(\bar{u}(t),\bar{v}(t)) = (-1,0)$. Merk op dat het eindpunt van de baan $(e^{-T},0)$ zelfs geen locaal maximum is.

Als we $T = \pi$ nemen, wordt het bereikbare gebied de ring

$$W(\pi,\underline{0}) = \{(x,y) \mid e^{-T} \leq x^2 + y^2 \leq e^T\} .$$

De besturing $u = 0$, $v = 1$ voldoet aan de voorwaarde van stelling (4.1.5) als $h(\underline{x}) = -y$. Het eindpunt van de baan $(-1,0)$ is echter een inwendig punt van $W(\pi,\underline{0})$. □

4.6. *Extremale besturingen*

Beschouw weer het systeem

(4.6.1) $\quad \dot{x}(t) = f(t,x,u)$

op het interval $[0,T]$, met $u \in \Omega(U)$.

(4.6.2) DEFINITIE. *Als* $u \in \Omega$, $\xi := \xi_u$ *de corresponderende baan en als* ψ *een oplossing is van de geadjungeerde vergelijking*

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)f_x(t,\xi(t),u(t))$$

dan heet het paar (ψ,u) *<u>extremaal</u> als*

$$H(\psi(t),t,\xi(t),u(t) = \max_{v \in U} H(\psi(t),t,\xi(t),v)$$

voor elk continuïteitspunt t *van* u. *Een besturing* $u \in \Omega$ *heet <u>extremaal</u> als er een* $\psi \neq 0$ *bestaat waarvoor* (ψ,u) *extremaal is.*

Uiteraard is het paar (ψ,u) altijd extremaal als $\psi = 0$. Het maximum-principe zegt dat het paar $(\bar{\psi},\bar{u})$, waarbij $\bar{u}$ een optimale besturing en $\bar{\psi}$ de oplossing van de geadjungeerde vergelijking met $\bar{\psi}(T) = \nabla h(\bar{\xi}(T))$, extremaal is. In het bijzonder is $\bar{u}$ extremaal als $\nabla h(\bar{\xi}(T)) \neq 0$.

(4.6.3) STELLING. *Laat* f *continu differentieerbaar zijn t.a.v.* (t,x). *Zij* (ψ,u) *een extremaal paar en zij*

$$M(t) := H(\psi(t),t,\xi_u(t),u(t)) \ .$$

Dan is M *continu, stuksgewijs continu differentieerbaar en*

$$\dot{M}(t) = H_t(\psi(t),t,\xi_u(t),u(t)) \ .$$

BEWIJS. We schrijven $\xi(t)$ voor $\xi_u(t)$. Het is duidelijk dat $M(t)$ continu is in de punten waar u continu is (want ξ en ψ zijn continu). Laat nu t_0 een discontinuïteitspunt van u zijn. Dan geldt voor $t > t_0$:

$$M(t) = H(\psi(t),t,\xi(t),u(t)) \geq H(\psi(t),t,\xi(t),u(t_0 - 0)) \ .$$

De limietovergang $t \downarrow t_0$ levert $M(t_0+0) \geq M(t_0-0)$. Door $t < t_0$ te bekijken krijgen we op analoge manier $M(t_0+0) \leq M(t_0-0)$. Dus $M(t_0+0) = M(t_0-0)$ hetgeen de continuïteit van M bewijst.

Laat nu t_0 een punt zijn waar u continu is en laat t_1 en t_2 punten zijn in de omgeving van t_0. Als we de notatie

$$A(t) := f_x(t,\xi(t),u(t))$$

$$b(t) := f_t(t,\xi(t),u(t))$$

invoeren, dan geldt

$$\begin{aligned}\psi(t_2) &= \psi(t_1) + \dot{\psi}(t_1)(t_2-t_1) + o(t_2-t_1) = \\ &= \psi(t_1) - (t_2-t_1)\psi(t_1)A(t_1) + o(t_2-t_1)\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}&f(t_2,\xi(t_2),u(t_2)) = f(t_1,\xi(t_1),u(t_2)) + \\ &+ f_x(t_1,\xi(t_1),u(t_2))(\xi(t_2) - \xi(t_1)) + \\ &+ f_t(t_1,\xi(t_1),u(t_2))(t_2-t_1) + o(t_2-t_1) = \\ &= f(t_1,\xi(t_1),u(t_2)) + \{A(t_1)f(t_1,\xi(t_1),u(t_1)) + \\ &+ b(t_1)\}(t_2 - t_1) + o(t_2 - t_1) \ .\end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de continuïteit van u in een omgeving van t_0, zodat we een fout $o(1)$ maken als we $u(t_2)$ vervangen door $u(t_1)$. Deze fout wordt in de formule dan nog vermenigvuldigd met $t_2 - t_1$, zodat ze onder het ordeteken kan worden gebracht. Met behulp van bovenstaande vinden we:

$$\begin{aligned}M(t_2) &= \{\psi(t_1) - (t_2-t_1)\psi(t_1)A(t_1)\}\{f(t_1,\xi(t_1),u(t_2)) + \\ &+ (t_2-t_1)A(t_1)f(t_1,\xi(t_1),u(t_1)) + (t_2-t_1)b(t_1)\} + \\ &+ o(t_2-t_1) = \psi(t_1)f(t_1,\xi(t_1),u(t_2)) + (t_2-t_1)\psi(t_1)b(t_1) + \\ &+ o(t_2-t_1) \leq M(t_1) + (t_2-t_1)\psi(t_1)b(t_1) + o(t_2-t_1) \ .\end{aligned}$$

Substitueren we $t_1 = t_0$, $t_2 = t$, dan volgt

$$M(t) - M(t_0) \leq (t-t_0)\psi(t_0)b(t_0) + o(t-t_0) \ .$$

Als we daarentegen $t_1 = t$, $t_2 = t_0$ invullen vinden we

$$M(t) - M(t_0) \geq (t - t_0)\psi(t)b(t) - o(t - t_0) =$$
$$= (t - t_0)\psi(t_0)b(t_0) + o(t - t_0) \ .$$

We concluderen dat

$$\frac{M(t) - M(t_0)}{t - t_0} = \psi(t_0)b(t_0) + o(1) \qquad (t \to t_0) \ .$$

Dit betekent dat M differentieerbaar is in t_0 en

$$\dot{M}(t_0) = \psi(t_0)b(t_0) = H_t(\psi(t_0),t_0,\xi(t_0),u(t_0)) \ . \qquad \square$$

Voor een extremaal paar (ψ,u) is

$$H(\psi(t),t,\xi_u(t),u(t)) = \max_{v\in U} H(\psi(t),t,\xi_u(t),v)$$

in alle continuïteitspunten van u. In een punt t_0 waar u discontinu is, hoeft deze relatie niet te gelden. De waarde van u in één punt is echter niet van belang voor de oplossing ξ_u, zodat deze uitzondering geen rol speelt bij het maximumprincipe. Uit bovenstaande volgt wel, dat

$$H(\psi(t),t,\xi_u(t),u(t-0)) = H(\psi(t),t,\xi_u(t),u(t+0)) =$$
$$= \max_{v\in U} H(\psi(t),t,\xi_u(t),v)$$

in elk continuïteitspunt.

Men noemt een systeem van de vorm

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t))$$

autonoom, daar het rechterlid niet rechtstreeks, maar alleen via x en u van t afhankelijk is. Voor een autonoom systeem wordt M(t) een constante functie, zoals direct uit (4.6.4) is af te leiden.

5. EINDIGDIMENSIONALE PROBLEMEN MET MEERVOUDIGE RESTRICTIES

5.1. *Een onjuist vermoeden*

Dit hoofdstuk zal weer gewijd zijn aan eindigdimensionale optimalisering. We zullen ons bezighouden met het probleem $OP(S,f)$ waarbij S gegeven wordt als doorsnede van een eindig aantal verzamelingen:

(5.1.1) $\quad S = S_1 \cap \ldots \cap S_k ,$

met $S_i \subseteq \mathbb{R}^n$ $(i = 1,\ldots,k)$. We spreken in zo'n geval van een optimaliseringsprobleem met <u>meervoudige</u> restricties. Het is nuttig de representatie (5.1.1) te gebruiken als de verzamelingen $S_1,\ldots,S_k$ betrekkelijk eenvoudig kunnen worden gekarakteriseerd, terwijl een directe karakterisatie van S gecompliceerd is.

(5.1.2) VOORBEELD. Als de functie r_i en g_j gedefinieerd zijn als in (1.1.2) en als we verzamelingen

$$R_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_i(x) = 0\} \qquad (i = 1,\ldots,\ell) ,$$

$$G_j := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \le 0\} \qquad (j = 1,\ldots,m)$$

invoeren, dan geldt voor de verzameling S gedefinieerd door (1.1.3):

$$S = R_1 \cap \ldots \cap R_\ell \cap G_1 \cap \ldots \cap G_m . \qquad \square$$

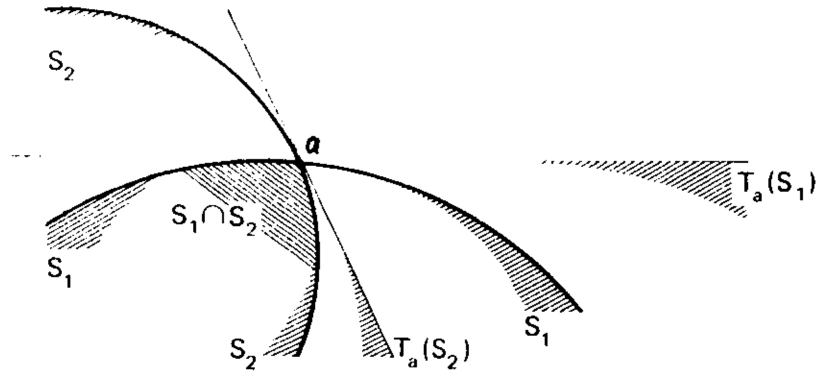
(5.1.3) VOORBEELD. Het probleem $SBP(U,X_0,X_1,T,f,h)$ gedefinieerd in (3.1.9) kan worden geformuleerd als het probleem $OP(W(X_0) \cap X_1,h)$. De representatie $S = W(X_0) \cap X_1$ is hier belangrijk omdat $W(X_0)$ en X_1 op volkomen verschillende manier worden gegeven. $\square$

We hebben in stelling (2.4.3) gevonden dat voor een oplossing a van $OP(S,f)$ geldt

$$\nabla f(a) \in T_a^0(S) ,$$

tenminste als $f \in C^1$. We willen, als S wordt gegeven door (5.1.1), een noodzakelijke voorwaarde voor de optimaliteit van een punt a, uitgedrukt in $S_1,\ldots,S_k$ hebben. Dit betekent, dat we $T_a^0(S)$ willen uitdrukken met behulp van $S_1,\ldots,S_k$.

(5.1.4) FIGUUR.



In de verzameling gegeven door de figuur is het duidelijk dat

(5.1.5) $\quad T_a(S_1 \cap S_2) = T_a(S_1) \cap T_a(S_2)$.

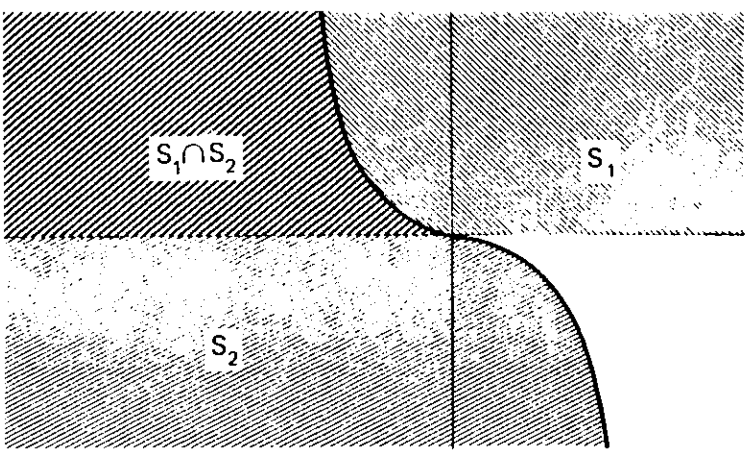
Als zo'n relatie algemeen zou gelden, dan zouden we een eenvoudige manier hebben om $T_a(S)$ in $S_1,\ldots,S_k$ uit te drukken, nl.

$$T_a(S_1 \cap \ldots \cap S_k) = T_a(S_1) \cap \ldots \cap T_a(S_k) .$$

Helaas is (5.1.5) niet algemeen geldig, zoals we met eenvoudige voorbeelden kunnen zien:

(5.1.6) VOORBEELD. Zij

$$S_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} ,$$
$$S_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^3\} ,$$
$$a := (0,0) .$$



Dan volgt uit stelling (2.1.5), dat $T_a(S_1) = S_1$ en $T_a(S_2) = -S_1$. Maar,

$$T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \neq T_a(S_1 \cap S_2)$$

want de vector (1,0) is geen raakvector van $S_1 \cap S_2$. □

(5.1.7) VOORBEELD. Zij

$$S_1 = -S_2 = \{(x,y) \mid y = x^2\} .$$

Hier is de x-as de afgeleide kegel van S_1 én S_2 maar niet van $S_1 \cap S_2 = \{(0,0)\}$.□

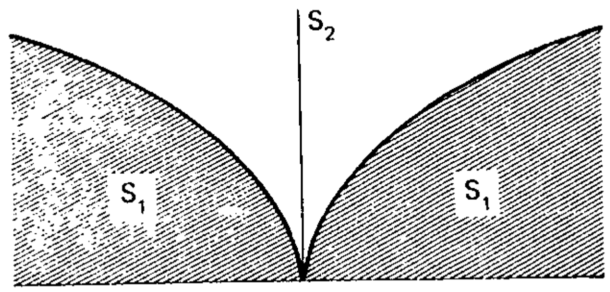
Bij deze en andere tegenvoorbeelden van (5.1.5) kan men opmerken dat de raakkegels $T_a(S_1)$ en $T_a(S_2)$ gesepareerd zijn (zie (2.3.8)), terwijl dat in figuur (5.1.4) niet het geval is. Derhalve komt men tot de volgende vraag: *Als* $T_a(S_1)$ *en* $T_a(S_2)$ *niet gesepareerd zijn geldt dan* (5.1.5)? Helaas is ook dit niet het geval.

(5.1.8) VOORBEELD. Zij

$$S_1 := \{(x,y) \mid y \geq 0,\ |x| \geq y^2\} ,$$

$$S_2 := \{(0,y) \mid y \geq 0\} ,$$

$$a := (0,0) .$$



Dan is

$$T_a(S_1) = \{(x,y) \mid y \geq 0\} ,$$

$$T_a(S_2) = S_2 ,$$

en dus $T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = S_2$. De raakkegels zijn kennelijk niet gesepareerd. Desondanks is $S_1 \cap S_2 = \{a\}$ en dus $T_a(S_1 \cap S_2) \neq S_2$. □

Uit dit voorbeeld blijkt dat de raakkegel niet voldoende informatie geeft over de verzameling: $T_a(S_1)$ signaleert niet de "kloof" van S_1 in het bovenhalfvlak. Zo'n kloof is niet van belang als we alleen zijn geïnteresseerd in $OP(S_1,f)$, maar wel als we S_1 met andere verzamelingen gaan doorsnijden. Deze ontoereikendheid van het begrip raakkegel is de reden dat we een ander soort benaderende kegel gaan invoeren. Dit zal gebeuren in § 5.3. In de volgende paragraaf geven we nog enkele resultaten over convexe kegels, die we in de rest van dit hoofdstuk nog nodig zullen hebben.

5.2. *Het relatief inwendige van een convexe kegel*

Beschouw de convexe kegel

$$C := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}\ .$$

Daar deze kegel een deel is van het vlak $z = 0$, bevat hij geen inwendige punten. Alle punten zijn dus randpunten. Niettemin, zal men geneigd zijn de punten in c met $x = 0$ of $y = 0$ méér als randpunten te zien dan de punten met $x > 0$, $y > 0$. Men kan dit intuitieve onderscheid tussen "echte" en "onechte" randpunten formaliseren, door C niet te beschouwen in $\mathbb{R}^3$ maar in het vlak $z = 0$. In dat vlak, waarin alleen x en y als variabele optreden, zijn inderdaad de punten met $x > 0$, $y > 0$ inwendig, want een omgeving van zo'n punt *in het vlak* $z = 0$ is bevat in C. We zullen daarom de punten $(x,y,0)$ met $x > 0$, $y > 0$ relatief inwendige punten van C noemen. Algemeen kan men de volgende definitie geven:

(5.2.1) DEFINITIE. *Zij* C *een convexe kegel in* $\mathbb{R}^n$. *Dan heet een punt* x *waarvoor er een* $\delta > 0$ *bestaat zo dat*

$$(x + \delta\mathbb{B}) \cap \mathrm{li}(C) \subseteq C\ ,$$

een <u>*relatief inwendig punt*</u> *van* C. *De verzameling van relatief inwendige punten van* C *wordt aangegeven met* ri C. *Verder spreken we af dat* $\mathrm{ri}\{0\} = \{0\}$.

(Zie voor de notatie § 2.3). Als $\mathrm{li}\ C = \mathbb{R}^n$, dan is $\mathrm{ri}\ C = \mathrm{int}\ C$. Als $\mathrm{li}\ C \neq \mathbb{R}^n$, dan is $\mathrm{int}\ C = \emptyset$ terwijl $\mathrm{ri}\ C \neq \emptyset$ (zie stelling 5.2.4).

De eigenschappen van het relatieve inwendige zijn analoog aan die van het inwendige, als we te maken hebben met één convexe kegel. We kunnen ons dan beperken tot het lineair opspansel van die kegel, in welke het relatief inwendige overeenkomt met het gewone inwendige. Ditzelfde kunnen we nog steeds doen als we te maken hebben met meer kegels, als die kegels maar hetzelfde lineaire opspansel hebben. Als dit niet het geval is, dan moet men

oppassen voor verkeerde conclusies. Zo volgt uit $C \subseteq D$ in het algemeen *niet* dat ri $C \subseteq$ ri D.

(5.2.2) VOORBEELD. Zij

$$C := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} ,$$

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\} .$$

Dan geldt

$$\text{ri } C = \{(x,0) \mid x > 0\} \nsubseteq \text{ri } D = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\} . \qquad \square$$

Het is duidelijk dat **wel het volgende geldt**

(5.2.3) EIGENSCHAP. *Laat* C *en* D *convexe kegels zijn,* $C \subseteq D$ *en* li C = li D. *Dan geldt* ri $C \subseteq$ ri D.

De meeste fundamentele eigenschappen van het relatief inwendige worden genoemd in de volgende stelling voor het bewijs waarvan we verwijzen naar appendix A.

(5.2.4) STELLING. *Laat* C *en* D *convexe kegels zijn in* $\mathbb{R}^n$ *en* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *een lineaire afbeelding. Dan geldt*

(i) $\quad$ ri $C \neq \emptyset$

(ii) $\quad \overline{\text{ri } C} = \bar{C}$

(iii) $\quad$ ri $\bar{C}$ = ri C

(iv) $\quad$ ri $AC = A$ ri C

(v) $\quad$ ri$(C \times D)$ = ri $C \times$ ri D

(vi) $\quad$ ri$(C \pm D)$ = ri $C \pm$ ri D .

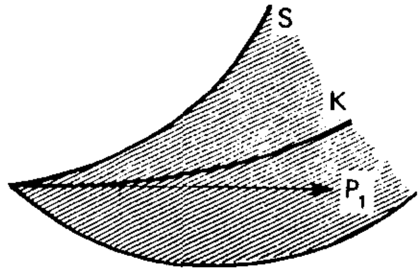
(5.2.5) VOORBEELD. Als $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{R}^n$ en $A := [a_1,\ldots,a_k]$, dan is

$$\text{ri po}\{a_1,\ldots,a_k\} = \text{ri } A\mathbb{R}^k_+ = A \text{ ri } \mathbb{R}^k_+ = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \mid \lambda_i > 0\} .$$

D.w.z., ri po$\{a_1,\ldots,a_k\}$ is de verzameling van strict positieve combinaties van $a_1,\ldots,a_k$. $\square$

5.3. *De afgeleide kegel*

De reden dat de raakkegel onvoldoende informatie geeft over de verzameling is de volgende: Bij elke vector $p \in T_a(S)$ is er een kromme K in S, met parametervoorstelling $\xi(\tau)$, $0 \le \tau \le \varepsilon$ met $\xi(0) = a$, zo dat p in a aan K raakt.



Als we echter p laten variëren in $T_a(S)$, dan zal het niet altijd mogelijk zijn K op een continue manier van p te laten afhangen. In de verzameling S_1 van voorbeeld (5.1.8) zal K noodzakelijkerwijs een sprong moeten maken wanneer bijv. p van het eerste naar het tweede kwadrant draait.

We zullen nu door eventueel een kleinere kegel dan $T_a(S)$ te nemen proberen te bereiken dat K wel continu van p afhangt. In de verzameling S_2 van (5.1.8) kunnen we bijv. als kegel het eerste kwadrant kiezen. Als p binnen het eerste variant varieert dan zal men K wel continu afhankelijk van p kunnen maken.

In de algemene situatie, waarbij $a \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, proberen we $C \subseteq T_a(S)$ zo te kiezen dat K continu afhangt van p, als $p \in C$. In dat geval beschrijft K een continu oppervlak als p varieert. Van zo'n oppervlak kan ook een parametervoorstelling geven, met meerdere parameters.

Als $T \subseteq \mathbb{R}^k$, dan gebruiken we de notatie

(5.3.1) $\quad T_+ := T \cap \mathbb{R}^k_+ ,$

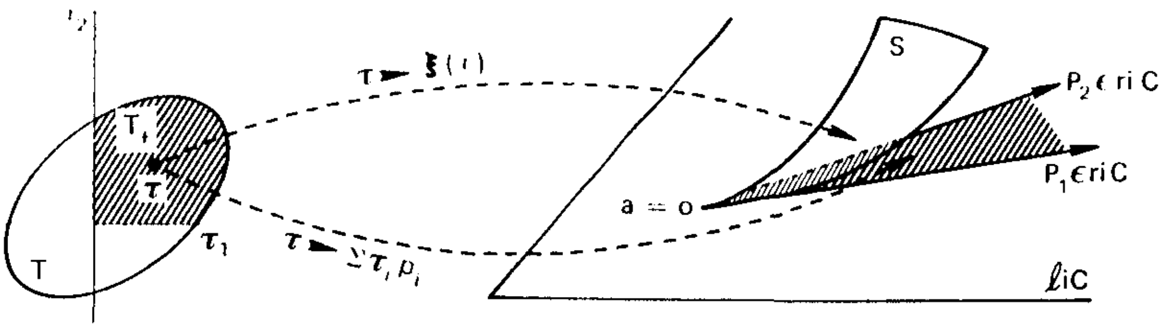
Dan komen we op grond van bovenstaande overwegingen tot de volgende definitie:

(5.3.2) DEFINITIE. *Zij* $a \in S \subseteq \mathbb{R}^n$. *Een gesloten convexe kegel* C *heet een* ***afgeleide kegel*** *van* S *in* a *als voor elk stel vectoren* $p_1,\dots,p_k$ *in* ri C *er een omgeving* T *van de oorsprong in* $\mathbb{R}^k$ *bestaat, en een afbeelding* $\xi \in C^1(T_+ \to S)$ *met de eigenschap*

$$\xi(\tau) = b + \sum_{i=1}^{k} p_i\tau_i + o(\tau) \qquad (\tau \downarrow 0) .$$

We zullen zeggen, dat ξ *een afbeelding is, die* ***correspondeert*** *met de vectoren* $p_1,\dots,p_k$.

De eis $p_i \in \text{ri } C$ i.p.v. $p_i \in C$ hebben we gesteld om het bewijs van een aantal stellingen te vereenvoudigen. Als we slechts zouden eisen dat $p_i \in C$ dan zouden we niet altijd kunnen werken met gesloten kegels. Het essentiële verschil tussen de afgeleide kegel en de raakkegel is, dat bij $T_a(S)$ geëist werd dat er voor elke halfrechte ℓ in $a + T_a(S)$ een kromme in S is waaraan ℓ raakt, terwijl voor een afgeleide kegel wordt geëist dat er bij elke veelhoekskegel in ri C voortgebracht door k vectoren, een oppervlak in S is, waaraan de veelhoekskegel raakt.



De afbeelding $\hat{\xi}(\tau) := a + \Sigma\tau_i p_i$ is de linearisatie van $\xi(\tau)$ en $\hat{\xi}$ beeldt T_+ af op $\text{po}\{p_1,\ldots,p_k\} \subseteq C$.

(5.3.3) OPMERKING. Let wel dat er bij gegeven S en a precies één raakkegel is, terwijl er meer afgeleide kegels kunnen zijn. Ook is het niet zo dat de vereniging van afgeleide kegels weer een afgeleide kegel is. In (5.1.8) zijn zowel het eerste als het tweede kwadrant afgeleide kegels van S_1 in (0,0), maar de vereniging niet. We kunnen wel spreken over *de* raakkegel, maar we moeten zeggen: *een* afgeleide kegel. □

In de meeste practische situaties blijkt de raakkegel ook een afgeleide kegel te zijn:

(5.3.4) STELLING. *Van de verzamelingen* S *genoemd in stelling* (2.1.5)(i), (ii) (iii) *is de raakkegel een afgeleide kegel.*

Het bewijs van deze stelling wordt gegeven in appendix B.

Als we afgeleide kegels i.p.v. raakkegels gebruiken, blijkt het in § 5.1. genoemde vermoeden wel op te gaan:

(5.3.5) LEMMA. *Zij* $a \in S_1 \cap S_2$, *waar* $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, *en zij* C_i *een afgeleide kegel van* S_i *in* a *voor* $i = 1,2$. *Als* C_1 *en* C_2 *niet gesepareerd zijn, dan is* $C_1 \cap C_2$ *een afgeleide kegel van* $S_1 \cap S_2$ *in* a.

Het bewijs van dit resultaat wordt gegeven in appendix C. Verder kunnen we het volgende resultaat vermelden:

(5.3.6) LEMMA. *Laat* $a_i \in S_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ *en laat* C_i *een afgeleide kegel zijn van* S_i *in* a_i *voor* $i = 1,\dots,k$. *Dan is* $\underline{C} := C_1 \times \dots \times C_k$ *een afgeleide kegel van* $\underline{S} := S_1 \times \dots \times S_k$ *in* $\underline{a} := (a_1,\dots,a_k)$.

BEWIJS. Laat $\underline{p}_j = (p_{1j},\dots,p_{kj})$ vectoren zijn in ri $\underline{C}$ = ri$(C_1 \times \dots \times C_k)$ = = ri $C_1 \times \dots \times$ ri C_k voor $j = 1,\dots,m$. Dan is $p_{i1},\dots,p_{im}$ in ri C_i. Er bestaat dus een functie $\xi_i \in C^1(T_{i+} \to S_i)$ met de eigenschap

$$\xi_i(\tau) = a_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\tau_j + o(\tau) \quad (\tau \downarrow 0) .$$

Als we dan definiëren

$$\underline{\xi}(\tau) := (\xi_1(\tau),\dots,\xi_k(\tau))$$

dan geldt $\underline{\xi} \in C^1(T_+ \to \underline{S})$ en

$$\underline{\xi}(\tau) = \underline{a} + \sum_{j=1}^{m} \underline{p}_j\tau_j + o(\tau) \quad (\tau \downarrow 0) ,$$

waar $T = \bigcap_{i=1}^{k} T_i$. □

Met behulp van lemma (5.3.5) en (5.3.6) kunnen we een generalisatie geven van (2.4.3). Merk eerst op dat als C een afgeleide kegel is van S in a, dan $C \subseteq T_a(S)$. Als dan a een oplossing is van $OP(S,f)$ waarbij $f \in C^1$, dan geldt

(5.3.7) $\quad \nabla f(a) \in C^0$

omdat $T_a^0(S) \subseteq C^0$. Het is de voorwaarde (5.3.7) die we gaan verfijnen.

(5.3.8) HOOFDSTELLING. *Laat* $S_1,\dots,S_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in S := S_1 \cap \dots \cap S_k$ *en laat* $C_1,\dots,C_k$ *afgeleide kegels zijn van* $S_1,\dots,S_k$ *in* a. *Als* a *een oplossing is van* $OP(S,f)$ *en als* $f \in C^1$, *dan bestaat er een getal* $\rho \geq 0$ *en vectoren* $\psi_i \in C_i^0$ *voor* $i = 1,\dots,k$ *zo dat*

(5.3.9) HS1: $\rho\nabla f(a) = \psi_1 + \dots + \psi_k$,

(5.3.10) HS2: $[\rho,\psi_1,\dots,\psi_k] \neq 0$ *(d.w.z.* $\rho,\psi,\dots,\psi_k$ *zijn niet allemaal nul).*

BEWIJS. We beschouwen eerst het geval $k = 2$. Als C_1 en C_2 niet gesepareerd zijn, dan is $C = C_1 \cap C_2$ een afgeleide kegel van S in a. Uit (5.3.7) volgt dus

$$\nabla f(a) \subseteq (C_1 \cap C_2)^0 = C_1^0 + C_2^0$$

(zie (2.3.9)(iii)), d.w.z. er bestaan vectoren $\psi_1 \in C_1^0$, $\psi_2 \in C_2^0$ zo dat $\nabla f(a) = \psi_1 + \psi_2$. We zien dat aan HS1 en HS2 voldaan is als we $\rho = 1$ kiezen. Als C_1 en C_2 gesepareerd zijn, bestaat er een $\psi \neq 0$ zo dat $\psi \in C_1^0$, $-\psi \in C_2^0$. Als we kiezen $\rho = 0$, $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = -\psi$, dan is weer aan HS1 en HS2 voldaan.

Nu herleiden we het algemene geval tot het geval $k = 2$. We definiëren

$$\underline{S} := S_1 \times \dots \times S_k \subseteq \mathbb{R}^{nk}$$

$$\underline{T} := \{\underline{x} = (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^{nk} \mid x_1 = \dots = x_k\} =$$

$$= \{(x,x,\dots,x) \in \mathbb{R}^{nk} \mid x \in \mathbb{R}^n\} ,$$

$$\underline{f}(\underline{x}) := f(x_1)$$

waar x_1 bestaat uit de eerste n componenten van $\underline{x}$,

$$\underline{a} := (a,\dots,a) .$$

Dan is $\underline{a}$ een oplossing van $OP(\underline{S} \cap \underline{T},\underline{f})$. Volgens lemma (5.3.6) is $\underline{C} := C_1 \times \dots \times C_k$ een afgeleide kegel van $\underline{S}$. Omdat $\underline{T}$ een lineaire deelruimte is, is $\underline{T}$ een afgeleide kegel van zichzelf in $\underline{a}$. Daarom bestaat er een getal $\rho \geq 0$, en vectoren

$$\underline{\psi} = [\psi_1,\dots,\psi_k] \in \underline{C}^0, \ \underline{\varphi} = [\varphi_1,\dots,\varphi_k] \in \underline{T}^0$$

zo dat

(5.3.11) $\rho\nabla\underline{f}(\underline{a}) = \underline{\psi} + \underline{\varphi}$,

(5.3.12) $[\rho,\underline{\psi},\underline{\varphi}] \neq 0$.

De voorwaarde $\underline{\varphi} \in \underline{T}^0 = \underline{T}^\perp$ betekent $\underline{\varphi x} = 0$ voor alle $\underline{x} \in \underline{T}$, d.w.z. $(\varphi_1 +\ldots+ \varphi_k)x = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$, dus $\varphi_1 +\ldots+ \varphi_k = 0$. De voorwaarde $\underline{\psi} \in \underline{C}^0$ betekent $\psi_i \in C_i^0$, want $\underline{C}^0 = (C_1 \times \ldots \times C_k)^0 = C_1^0 \times \ldots \times C_k^0$. Als we daarom de vergelijkingen in (5.3.11)

$$\begin{aligned} \rho\nabla f(a) &= \psi_1 + \varphi_1 , \\ 0 &= \psi_2 + \varphi_2 , \\ &\vdots \\ 0 &= \psi_k + \varphi_k , \end{aligned}$$

bij elkaar optellen vinden we HS1. Het is duidelijk dat HS2 volgt uit (5.3.12). Als immers $\rho = 0, \psi_1 =\ldots= \psi_k = 0$, dan volgt uit (5.3.11) dat ook $\underline{\varphi} = \underline{0}$, in strijd met (5.3.12). □

De voorwaarde HS2 heet de niet-trivialiteitsvoorwaarde. Het is immers duidelijk dat $\rho,\psi_1,\ldots,\psi_k$ die voldoen aan HS1 alleen,altijd op een triviale manier bestaan, nl. $\rho = 0$, $\psi_1 =\ldots= \psi_k = 0$. De voorwaarde HS2 sluit deze triviale oplossing uit. De voorwaarde HS1 heet de polaire regel (in analogie met multiplicatorenregel zie (5.3.15)) omdat $\psi_1,\ldots,\psi_k$ vectoren zijn in polaire kegels. Het getal ρ heet de regulariteitsconstante. In essentie moeten we twee gevallen onderscheiden, nl., $\rho \neq 0$ en $\rho = 0$. We hebben dit reeds gezien in het bewijs van de hoofdstelling voor k = 2.

Als $\rho \neq 0$, dan kunnen op grond van de homogeniteit van HS1 aannemen dat $\rho = 1$. Immers als $\psi_i \in C_i^0$ dan is ook $\tilde{\psi}_i = \rho^{-1}\psi_i \in C_i^0$. Eigenlijk geeft de hoofdstelling alleen een bruikbare noodzakelijke voorwaarde als $\rho \neq 0$. Want als $\rho = 0$, dan komt de te maximaliseren functie f in de noodzakelijke voorwaarde niet voor! Gewoonlijk probeert men dan ook aan te tonen, dat aan HS1 en HS2 niet voldaan kan zijn met $\rho = 0$, d.w.z. men probeert aan te tonen dat er geen vectoren $\varphi_i \in C_i^0$ bestaan met $\varphi_1 +\ldots+ \varphi_k = 0$ behalve $\varphi_1 =\ldots= \varphi_k = 0$. Als dit mogelijk is dan noemt men de gevonden noodzakelijke voorwaarde regulier. We kunnen derhalve de conclusie van de hoofdstelling enigszins anders formuleren.

(5.3.13) GEVOLG. *Als men onder de voorwaarden van de hoofdstelling kan aantonen, dat voor vectoren* $\varphi_i \in C_i^0$ *met* $\varphi_1 +\ldots+ \varphi_k = 0$ *noodzakelijk geldt* $\varphi_1 =\ldots= \varphi_k = 0$, *dan bestaan er vectoren* $\psi_i \in C_i^0$ *zo dat*

$$\nabla f(a) = \psi_1 +\ldots+ \psi_k .$$

In deze formulering is het duidelijk dat dit resultaat voor het geval $k = 1$ overeenkomt met (5.3.7). Het geval $\rho = 0$ zal dus als een ontaard geval moeten worden beschouwd, dat we helaas in de algemene theorie niet kunnen uitsluiten, maar dat we in concrete situaties willen vermijden, eventueel door extra veronderstellingen te maken over het probleem. Dit ontaard geval treedt vaak op in situaties waar afhankelijke vectoren (gradiënten), matrices met niet maximale rang, gesepareerde convexe verzamelingen etc. voorkomen. In de terminologie van de mathematische programmering: $\rho = 0$ treedt op als niet aan de constraint qualification is voldaan.

Als we (5.3.8) voor de S_i verzamelingen genoemd in stelling (5.3.4) substitueren en voor de C_i de corresponderende raakkegels, krijgen we de gebruikelijke noodzakelijke voorwaarden uit de mathematische programmering:

(5.3.14) STELLING (*Mangasarian-Fromovitz*). *Laat* a *een oplossing zijn van* $OP(S,f)$, *waarbij* S *gegeven wordt door* (1.1.3). *Dan bestaan er getallen* $\rho \geq 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,\ell)$, $\mu_j \geq 0$ $(j = 1,\ldots,m)$ *zo dat*

(5.3.15) $$\rho\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \nabla r_i(a) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(a)$$

(5.3.16) $$[\rho,\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell,\mu_1,\ldots,\mu_m] \neq 0$$

(5.3.17) $$\mu_j g_j(a) = 0 \quad (j = 1,\ldots,m) .$$

BEWIJS. We behandelen eerst een paar ontaarde gevallen: Als $\nabla r_{i_0}(a) = 0$ geldt voor een of andere i_0, dan voldoen $\rho = 0$, $\mu_j = 0$, $\lambda_i = 0$ $(i \neq i_0)$, $\lambda_{i_0} = 1$ aan (5.3.15), (5.3.16), (5.3.17). Als $g_{j_0}(a) = 0$, $\nabla g_{j_0}(a) = 0$ dan kunnen we op analoge manier alle getallen in (5.3.16) behalve μ_{j_0} gelijk aan nul stellen. We nemen verder aan dat deze gevallen niet optreden. Dan definiëren we

$$S_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_i(x) = 0\} \qquad (i = 1,\ldots,\ell) ,$$

$$T_j := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0\} \qquad (j = 1,\ldots,m) ,$$

zodat $S = S_1 \cap \ldots \cap S_\ell \cap T_1 \cap \ldots \cap T_m$. We kunnen de hoofdstelling toepassen als we afgeleide kegels van S_i en T_j in a kennen. Daartoe doen we een beroep op (5.3.4). Omdat $\nabla r_i(a) \neq 0$, is

$$C_i := \{p \mid \nabla r_i(a)p = 0\}$$

een afgeleide kegel van S_i in a. Voor de verzameling en T_j maken we onderscheid tussen twee gevallen: Als $g_j(a) < 0$, dan is $a \in \operatorname{int} T_j$, zodat

$$D_j = \mathbb{R}^n$$

een afgeleide kegel is. Als $g_j(a) = 0$, dan is volgens onze veronderstelling $\nabla g_j(a) \neq 0$, zodat

$$D_j := \{p \mid \nabla g_j(a)p \leq 0\}$$

een afgeleide kegel is. Nu is

$$C_i^0 = \{\lambda \nabla r_i(a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

en $D_j^0 = \{0\}$ in het geval $g_j(a) < 0$ en

$$D_j^0 = \{\mu \nabla g_j(a) \mid \mu \geq 0\}$$

in het geval $g_j(a) = 0$. Deze twee gevallen kunnen we in een formule samenvatten:

$$D_j^0 = \{\mu \nabla g_j(a) \mid \mu \geq 0,\ \mu g_j(a) = 0\} .$$

Op grond van de hoofdstelling bestaan er nu een getal $\rho \geq 0$, vectoren $\psi_i = \lambda_i \nabla r_i(a) \in C_i^0$ en $\varphi_j = \mu_j \nabla g_j(a) \in D_j^0$, met $\mu_j \geq 0$ en $\mu_j g_j(a) = 0$, zo dat

$$\rho \nabla f(a) = \lambda_1 \nabla r_1(a) + \ldots + \lambda_\ell \nabla r_\ell(a) + \mu_1 \nabla g_1(a) + \ldots + \mu_m \nabla g_m(a)$$

en

$$[\rho, \lambda_1 \nabla r_1(a), \ldots, \lambda_\ell \nabla r_\ell(a), \mu_1 \nabla g_1(a), \ldots, \mu_m \nabla g_m(a)] \neq 0 .$$

Hieruit volgt het gestelde. □

De getallen $\rho, \lambda_1, \ldots, \lambda_\ell, \rho_1, \ldots, \rho_m$ heten multiplicatoren, formules (5.3.15), (5.3.16) en (5.3.17) heten respectievelijk de multiplicatorenregel, de niet-trivialiteitsvoorwaarde en de complimentariteitsvoorwaarde. In het bijzondere geval dat $\ell = 0$, is het resultaat afkomstig van F. John. Het geval $m = 0$ is de klassieke multiplicatorenregel van Lagrange, die gewoonlijk als volgt wordt geformuleerd (vgl. (5.3.13)):

(5.3.18) STELLING (*Lagrange*). *Laat de functies* $f, r_1, \ldots, r$ *in* C^1 *zijn en laat* $f(x)$ *een maximum onder de bijvoorwaarden* $r_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ *aannemen in het punt* a. *Als de vectoren* $\nabla r_i(a)$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ *onafhankelijk zijn, bestaan er getallen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ *zo dat*

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_1 \nabla r_i(a) .$$

6. HET MAXIMUMPRINCIPE VOOR HET ALGEMENE BESTURINGSPROBLEEM

6.1. *Het standaardprobleem*

In dit hoofdstuk beschouwen we het algemene standaardprobleem (3.1.9):

(6.1.1) PROBLEEM. $SBP(U,X_0,X_1,T,f,h)$. *Gegeven:* $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $f \in CD([0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$. *Gevraagd: Bepaal een toegelaten paar* (x_0,u) *zo dat*

$$x_0 \in X_0,\ \xi_u(T,x_0) \in X_1$$

en zodanig dat $h(\xi(T))$ *maximaal is.*

Zoals reeds in voorbeeld (5.1.3) is opgemerkt, is (6.1.1) equivalent met $OP(W(X_0) \cap X_1,h)$. We kunnen derhalve de hoofdstelling (5.3.8) toepassen, als we afgeleide kegels kennen van de verzamelingen $W(X_0)$ en X_1 in het eindpunt $\bar{\xi}(T)$ van een optimale baan. Daar X_0 en X_1 gegeven verzamelingen zijn, bijv. van de vorm (1.1.3) is het redelijk te veronderstellen dat afgeleide kegels van X_0 en X_1 bekend zijn. Het is een fundamenteler probleem een afgeleide kegel van $W(X_0)$ te bepalen. Daartoe maken we gebruik van gestoorde besturingen, zoals in § 4.5. In (4.5.15) hebben we gezien dat we d.m.v. zulke storingen een kegel $\tilde{P}$ kunnen bepalen die een deel is van de raakkegel van $W(x_0)$ in $\bar{\xi}(T)$. Hierbij hadden we dus een vaste beginwaarde x_0 gekozen. We zullen nu voor elke $x_0 \in X_0$ de <u>storingskegel</u> van x_0 invoeren door

$$P := \overline{\text{po}}\ \tilde{P}\ .$$

De storingskegel is dus de afsluiting van het positieve opspansel van $\tilde{P}$ en dus een gesloten convexe kegel.

(6.1.2) LEMMA. *Zij* $\bar{u} \in \Omega$, $\bar{x}_0 \in X_0$ *en* $\bar{\xi}(t) := \xi_{\bar{u}}(t,\bar{x}_0)$. *Dan is* P *een afgeleide kegel van* $W(x_0)$ *in* $\bar{\xi}(T)$.

Zowel het bewijs van dit lemma als van het volgende zal worden gegeven in appendix D. Als we een afgeleide kegel van $W(X_0)$ willen bepalen, dan moeten we een afgeleide kegel van X_0 in $\bar{x}_0$ kennen.

(6.1.3) LEMMA. *Zij* $\bar{x}_0 \in X_0$, $\bar{u} \in \Omega$ *en* $\bar{\xi}(t) := \xi_{\bar{u}}(t,\bar{x}_0)$ *en laat* $\Phi(t)$ *de fundamentaaloplossing zijn van de lineaire differentiaalvergelijking*

(6.1.4) $\dot{y}(t) = A(t)y(t) \quad (0 \le t \le T)$

waarbij

$$A(t) := f_x(t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) \ .$$

Als C_0 *een afgeleide kegel van* X_0 *in* $\bar{x}_0$ *is, dan is*

$$D := P + \Phi(T)C_0$$

een afgeleide kegel van $W(X_0)$ *in* $\bar{\xi}(T)$.

We zullen hier proberen lemma (6.1.2) en (6.1.3) enigszins aannemelijk te maken. We hebben gezien dat we door een elementaire storing een kromme $\varepsilon \mapsto x_\pi(T,\varepsilon)$ in $W(x_0)$ kunnen construeren waaraan de storingsvector p_π raakt (4.5.7):

$$x_\pi(T,\varepsilon) = \bar{\xi}(T) + p_\pi\varepsilon + o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \downarrow 0) \ .$$

Zo zien we dat elke vector $p_\pi \in \tilde{P}$ een raakvector is. Het is echter in eerste instantie geenszins duidelijk waarom vector uit $\overline{\text{po}}\ \tilde{P}$ raakvectoren zouden zijn (of door raakvectoren kunnen benaderd). M.a.w. het is niet duidelijk dat $\overline{\text{po}}\ \tilde{P} \subseteq T_{\bar{\xi}(T)}(W(x_0))$. Om in te zien dat dit het geval is hebben we gecombineerde storingen nodig. Laat $t_1,\dots,t_k$ onderling verschillende punten zijn waarin $\bar{u}$ continu is en laat $v_1,\dots,v_k$ willekeurige elementen van U zijn. Dan noemen we $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_k)$, waarin $\pi_i := (t_i,v_i)$ een <u>gecombineerde storing</u> van $\bar{u}$. De corresponderende gestoorde besturing wordt gedefinieerd door

$$\begin{aligned} u_\pi(t,\varepsilon) &:= v_i \qquad (t_i - \varepsilon_i \le t < t_i) \text{ voor } i = 1,\dots,k \ , \\ &:= \bar{u}(t) \quad \text{elders in } [0,T] \ . \end{aligned}$$

Hier is $\varepsilon := (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ voldoende klein. Men kan nu bewijzen dat

(6.1.5) $$x_\pi(T,\varepsilon) = \bar{\xi}(T) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i p_{\pi_i} + o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0)$$

waarbij p_{π_i} de bij π_i behorende storingsvector is. Laat nu

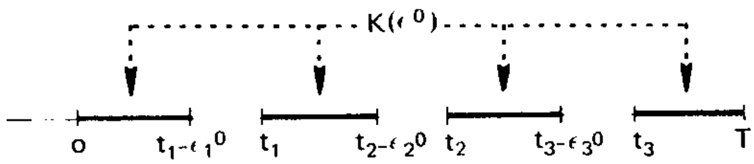
$$q := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_{\pi_i}$$

een positieve combinatie zijn van de vectoren $p_{\pi_1},\dots,p_{\pi_k}$, d.w.z. $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1,\dots,k)$. Als we nu $\varepsilon = \lambda\tau$, dus $\varepsilon_i = \lambda_i\tau$ $(i = 1,\dots,k)$ stellen voor een kleine $\tau > 0$, dan volgt uit (6.1.5) dat

$$x_\pi(T,\lambda\tau) = \bar{\xi}(T) + q\tau + o(\tau)$$

zodat q een raakvector van $W(x_0)$ is. Zo zien we dat een positieve combinatie van storingsvectoren p_{π_i} behorende bij storingen die plaatsvinden op verschillende tijdstippen ook een raakvector is. Hieruit volgt $P \subseteq T_{\bar{\xi}}(W(x_0))$ (bedenk dat een raakkegel per definitie gesloten is). Dat P inderdaad een afgeleide kegel is, volgt uit een nadere beschouwing van (6.1.5). Dit wordt in appendix D bekeken. Hier zullen we ons beperken tot het bewijs van formule (6.1.5).

Voor $\varepsilon^0 = (\varepsilon_1^0,\dots,\varepsilon_k^0)$ definiëren we de $K(\varepsilon^0)$ als de verzameling van die getallen $t \in [0,T]$, die niet in een van de intervallen $[t_i - \varepsilon_i^0, t_i]$ $(i = 1,\dots,k)$ liggen.



We laten zien dat als $\varepsilon^0 > 0$, waar

$$(6.1.6) \qquad x_\pi(t,\varepsilon) = \bar{\xi}(t) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i r_i(t) + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \downarrow 0)$$

geldt uniform voor $t \in K(\varepsilon^0)$,

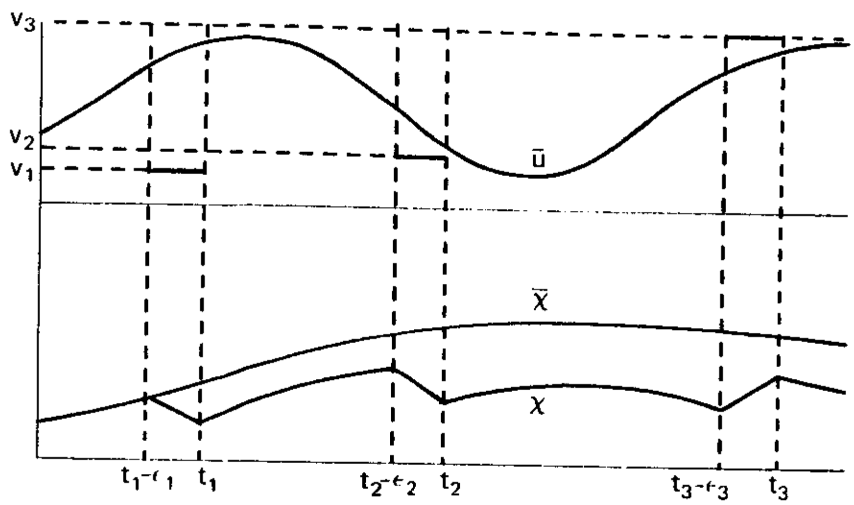
$$r_i(t) := 0 \quad (0 \leq t < t_i) \;, \qquad r_i(t) := \Phi(t)\Phi^{-1}(t_i)q_{\pi_i}$$

en

$$q_{\pi_i} := f(t_i,\bar{\xi}(t_i),v_i) - f(t_i,\bar{\xi}(t_i),\bar{u}(t_i)) \;.$$

Hierbij is $\Phi(t)$ de fundamentaaloplossing behorend bij

$$A(t) := f_x(t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) \;, \qquad (0 \leq t \leq T) \;.$$



BEWIJS van (6.1.6). We mogen veronderstellen dat $0 \le \varepsilon \le \varepsilon^0$. We gebruiken volledige inductie. Voor $k = 1$ is het resultaat bewezen in § 4.5. Stel dat het resultaat voor $k - 1$ is bewezen. Dan heeft de storing π_k geen effect op de baan voor $t \le t_k - \varepsilon_k$. Op het tijdstip $t_k - \varepsilon_k$ geldt derhalve

$$(6.1.7) \qquad x_\pi(t_k - \varepsilon_k, \varepsilon) = \bar{\xi}(t_k - \varepsilon_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i r_i\,(t_k - \varepsilon_k) + o(\varepsilon)\ .$$

Op dezelfde manier als in § 4.5 vinden we

$$(6.1.8) \qquad x_\pi(t_k,\varepsilon) - x_\pi(t_k - \varepsilon_k,\varepsilon) = \varepsilon_k f(t_k, x_\pi(t_k,\varepsilon), v_k) + o(\varepsilon_k)$$

uniform t.a.v. $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k-1}$. Verder:

$$(6.1.9) \qquad \bar{\xi}(t_k) - \bar{\xi}(t_k - \varepsilon_k) = \varepsilon_k f(t_k, \bar{\xi}(t_k), \bar{u}(t_k)) + o(\varepsilon_k)\ .$$

We tellen (6.1.7) en (6.1.8) op en trekken (6.1.9) af van de som. Dan krijgen we (6.1.6) voor $t = t_k$. Voor $t > t_k$ volgt (6.1.6) op grond van stelling (4.5.11). □

We hebben nu lemma (6.1.2) in zoverre aannemelijk gemaakt dat we hebben gezien dat P een deel van de raakkegel van $W(x_0)$ is. Laat ons nu hetzelfde doen in lemma (6.1.3). Daar kunnen we naast storingen op de besturingen ook storingen aanbrengen op de beginwaarden. Als dus $\bar{x}_0$ is gegeven en C_0 is een afgeleide kegel van X_0 in $\bar{x}_0$, dan is er voor elke $q \in \mathrm{ri}\,C_0$ een kromme $\eta(\varepsilon_0) = \bar{x}_0 + q\varepsilon_0 + o(\varepsilon_0)$, $0 \le \varepsilon_0 \le \bar{\varepsilon}_0$ te vinden in X_0. Voor de oplossing $x_\pi(t,\eta(\varepsilon_0),\varepsilon)$ met beginwaarde $\eta(\varepsilon_0)$ van het systeem met besturing $u_\pi(t,\varepsilon)$ geldt nu

(6.1.10) $x_\pi(T,\eta(\varepsilon_0),\varepsilon) = \bar{\xi}(T) + p\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i p_{\pi_i} + o(\varepsilon) + o(\varepsilon_0)$

waar de p_{π_i} zijn gedefinieerd als in (6.1.5) en waar

(6.1.11) $p := \Phi(T)q$.

Het bewijs hiervan berust weer op stelling (4.5.11). Op analoge manier als bij (6.1.5) kan men weer laten zien dat elke positieve combinatie van vectoren p (corresponderend volgens (6.1.8) met $q \in C_0$) en vectoren p_{π_i} (behorende bij verschillende storingstijden t_i) een raakvector is in $\bar{\xi}(T)$ aan $W(X_0)$.

Met behulp van lemma (6.1.3) kunnen we een noodzakelijke voorwaarde geven voor het optimaal zijn van een paar $\bar{x}_0 \in X_0$, $\bar{u} \in \Omega$ in het standaardprobleem:

(6.1.12) STELLING (<u>*Maximumprincipe van Pontryagin*</u>). *Laat* $(\bar{x}_0,\bar{u})$ *een oplossing zijn van* SBP(U,X_0,X_1,T,f,h) *en laat* $\bar{\xi}(t) := \xi_{\bar{u}}(t,\bar{x}_0)$ *de corresponderende baan zijn. Als* C_0 *een afgeleide kegel van* X_0 *in* $\bar{x}_0 = \bar{\xi}(0)$ *is en* C_1 *een afgeleide kegel van* X_1 *in* $\bar{\xi}(T)$*, dan bestaat er een getal* $\rho \geq 0$ *en een rijvector* $\varphi \in C_1^0$*, niet beide nul, zodat voor de oplossing* $\bar{\psi}: [0,T] \to \mathbb{R}_n$ *van de geadjungeerde vergelijking*

(6.1.13) $\dot{\bar{\psi}}(t) = -H_x(\bar{\psi}(t),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t))$

met eindwaarde

(6.1.14) $\bar{\psi}(T) = \rho h_x(\bar{\xi}(T)) - \varphi$

geldt:

(6.1.15) $\bar{\psi}(0) \in C_0^0$

en

(6.1.16) $H(\bar{\psi}(t),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) = \max_{v \in U} H(\bar{\psi}(t),t,\bar{\xi}(t),v)$

in elk punt t *waarin* $\bar{u}$ *continu is.*

Hierbij is de Hamiltoniaan weer gedefinieerd door

$$H(\psi,t,x,u) := \psi f(t,x,u) .$$

Als we dit resultaat vergelijken met stelling (4.1.4) dan zien we dat (6.1.13) en (6.1.16) corresponderen met (4.1.6) en (4.1.5). De voorwaarde (6.1.15) komt in (4.1.4) niet voor. Zij is een gevolg van de keuzemogelijkheden die we hebben voor x_0. M.a.w. het feit dat we x_0 niet kennen en daardoor minder gegevens hebben over het optimale paar $(\bar{x}_0,\bar{u})$ wordt gecompenseerd door meer informatie over $\bar{\psi}(0)$. Als $X_0 = \{x_0\}$ een éénpuntsverzameling is, zijn we in een situatie analoog aan (4.1.4) waar de beginwaarde x_0 vastligt. Het is duidelijk, dat dan $C_0 = \{0\}$ de enig mogelijke afgeleide kegel van X_0 is. De relatie (6.1.15) luidt dan $\bar{\psi}(0) \in \mathbb{R}_n$ hetgeen geen enkele informatie over $\bar{\psi}(0)$ oplevert. Formule (6.1.14) is vergelijkbaar met (4.1.7). Hier hebben echter minder informatie over $\bar{\psi}(T)$ dan in (4.1.7) omdat φ hier een willekeurige onbekende vector in C_1^0 kan zijn, terwijl $\varphi = 0$ geldt in (4.1.7). Dit correspondeert met het feit, dat we nu iets weten over $\bar{\xi}(T)$, nl. $\bar{\xi}(T) \in X_1$. Weer is het gemakkelijk in te zien dat we in het geval $X_1 = \mathbb{R}^n$ terechtkomen in de situatie van (4.1.4) en dat dan $\varphi = 0$ en dus $\rho \neq 0$ geldt. Dan mogen we op grond van de homogeniteit t.a.v. $[\rho,\varphi,\psi]$ zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $\rho = 1$ (vergelijk § 5.3). Het geval $\rho = 0$ is hier, eveneens als in § 5.3, een gedegenereerd geval, dat we in de toepassingen steeds proberen uit te sluiten.

BEWIJS VAN STELLING (6.1.12). We hebben gezien dat $\bar{\xi}(T)$ een oplossing is van $OP(W(X_0) \cap X_1,h)$. In lemma (6.1.3) wordt vermeld dat $D = P + \Phi(T)C_0$ een afgeleide kegel is van $W(X_0)$ in $\bar{\xi}(T)$. Gegeven is dat C_1 een afgeleide kegel van X_1 in $\bar{\xi}(T)$ is. We kunnen daarom stelling (5.3.8) toepassen: Er bestaat een getal $\rho \geq 0$ en vectoren $\varphi \in C_1^0$, $\psi \in D^0$, zo dat

$$\rho\nabla h(\bar{\xi}(T)) = \varphi + \psi$$

en

$$[\rho,\varphi,\psi] \neq 0 \ .$$

Uit $\psi \in D^0 = (P + \Phi(T)C_0)^0 = P^0 \cap (\Phi(T)C)^0$
volgt

(6.1.17) $\psi p_\pi \leq 0$

voor alle storingen π, en

(6.1.18) $\psi\Phi(T)q \leq 0$

voor alle $q \in C_0$. We definiëren $\bar{\psi} : [0,T] \to \mathbb{R}_n$ als de oplossing van de geadjungeerde vergelijking

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = -\bar{\psi}(t)A(t)$$

van (6.1.4), met eindwaarde $\bar{\psi}(T) = \psi$. Dan volgt uit (6.1.17), net zoals bij het bewijs van (4.1.4) dat (6.1.16) geldt (zie § 4.5). Uit (6.1.18) volgt

$$\bar{\psi}(0)q = \psi\Phi(T)q \le 0$$

voor elke $q \in C_0$ en dus $\bar{\psi}(0) \in C_0^0$. □

In het probleem *SBP* zijn X_0 en X_1 meestal van de vorm (1.1.3). Dan kan men op analoge manier als in stelling (5.3.14) de vectoren φ en $\bar{\psi}(0)$ in stelling (6.1.22) vervangen door uitdrukkingen, zoals die voorkomen in (5.3.15). We formuleren hier niet het algemene resultaat, maar beperken ons tot een veel voorkomend speciaal geval: Zij

(6.1.19) $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = a_j \ (j = 1,\dots,k);\ x_j \le b_j \ (j = k+1,\dots,\ell)\}$

waar $a_1,\dots,a_k;\ b_{k+1},\dots,b_\ell$ gegeven getallen zijn en $0 \le k \le \ell \le n$. Dan kan men uit de resultaten van hoofdstuk 5 afleiden dat

$$C := \{p \in \mathbb{R}^n \mid p_j = 0 \ (j = 1,\dots,k);\ p_j \le 0 \text{ als } x_j = b_j \ (j = k+1,\dots,\ell)\}$$

een afgeleide kegel van X is in elk punt van X. Verder is

$$C^0 = \left\{\psi \in \mathbb{R}_n \;\middle|\; \begin{array}{lll} \psi_j \ge 0,\ \psi_j = 0 & \text{als } x_j < b_j & (j = k+1,\dots,\ell) \\ \psi_j = 0 & & (j = \ell+1,\dots,n) \end{array}\right\}$$

Als dus X_0 en X_1 van de vorm gegeven door (6.1.19) zijn, dan kan men de gegevens over $\bar{\psi}(0)$ en $\bar{\psi}(T)$ eenvoudig aangeven. Dit geldt in het bijzonder als de te maximaliseren of te minimaliseren functie een coördinaat van x is. Als bijv. $h(x) = x_r$, dan is $h_x(\bar{\xi}(T)) = e_r = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (de r^{de} eenheidsvector). Zo komen we tot het volgende overzicht:

(6.1.20) TABEL.

voorwaarde op x_i	gegeven over $\bar{\psi}_i$
$x_i(T)$ maximaal	$\bar{\psi}_i(T) \geq 0$
$x_i(T)$ minimaal	$\bar{\psi}_i(T) \leq 0$
$x_i(T) = a_i$	geen informatie over $\bar{\psi}_i(T)$
$x_i(T) \leq b_i$	$\bar{\psi}_i(T) \leq 0$, $(b_i - \bar{\xi}_i(T))\bar{\psi}_i(T) = 0$
$x_i(T) \geq b_i$	$\bar{\psi}_i(T) \geq 0$, $(b_i - \bar{\xi}_i(T))\bar{\psi}_i(T) = 0$
$x_i(T)$ vrij	$\bar{\psi}_i(T) = 0$
$x_i(0) = a_i$	geen informatie over $\bar{\psi}_i(0)$
$x_i(0) \leq b_i$	$\bar{\psi}_i(0) \geq 0$, $(b_i - \bar{\xi}_i(0))\bar{\psi}_i(0) = 0$
$x_i(0) \geq b_i$	$\bar{\psi}_i(0) \leq 0$, $(b_i - \bar{\xi}_i(0))\bar{\psi}_i(0) = 0$
$x_i(0)$ vrij	$\bar{\psi}_i(0) = 0$

De niet-trivialiteitsvoorwaarde $[\rho,\varphi] \neq 0$ uit stelling (6.1.12) kan hier worden vervangen door $\bar{\psi} \neq 0$. (Equivalent hiermee is $\bar{\psi}(0) \neq 0$ of $\bar{\psi}(T) \neq 0$. Op grond van de eenduidigheidsstelling van oplossingen van differentiaalvergelijkingen, volgt uit $\bar{\psi}(0) = 0$ immers dat $\bar{\psi}(t) = 0$ voor alle t.)

Aan de hand van bovenstaande tabel kunnen we nagaan dat het maximumprincipe een volledig stel noodzakelijke voorwaarden voor optimaliteit levert (zie § 1.3).

(6.1.21) VOORBEELD. *Gegeven getallen* a *en* b, *een functie* $g \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ *en een getal* $T > 0$; *bepaal een functie* $u: [0,T] \to \mathbb{R}$ *zo dat de oplossing van de vergelijking*

$$\dot{x} = g(x) + u, \quad x(0) = a$$

bestaat voor $0 \leq t \leq T$, *voldoet aan* $x(T) = b$ *en zó dat*

$$\int_0^T u^2(t)\,dt$$

minimaal is.

We hebben het stelsel

$$\dot{x} = g(x) + u, \; x(0) = a, \; x(T) = b \; ,$$
$$\dot{y} = u^2, \qquad y(0) = 0, \; y(T) = \min$$

De Hamiltoniaan is

$$H = \psi(g(x) + u) + \varphi u^2 \; .$$

De geadjungeerde vergelijkingen zijn (met $g'(x) = \frac{dg}{dx}$)

$$\dot{\psi} = -g'(x) \quad ,$$
$$\dot{\varphi} = 0, \; \varphi(T) \le 0 \; .$$

Als $\varphi(T) = 0$ dan is $\varphi(t) = 0$ voor $0 \le t \le T$. Dan heeft H echter geen maximum tenzij $\psi = 0$, hetgeen niet toegestaan is. Dus $\varphi(T) < 0$ en zonder verlies van algemeenheid nemen we $\varphi(t) = -\frac{1}{2}$ voor $0 \le t \le T$. Dan wordt de Hamiltoniaan

$$H = \psi g(x) + \psi u - \tfrac{1}{2}u^2 \; .$$

H is maximaal voor $u = \psi$. We krijgen derhalve het volgende randwaardeprobleem

$$\dot{x} = g(x) + \psi, \; x(0) = a, \; x(T) = b \; ,$$
$$\dot{\psi} = -g'(x)\psi \; .$$

Hieruit kunnen we ψ elimineren:

$$\ddot{x} = g'(x)\dot{x} + \dot{\psi} = g'(x)(g(x) + \psi) - g'(x)\psi = g'(x)g(x) \; .$$

Het randwaardeprobleem wordt dus:

$$\ddot{x} = g'(x)g(x), \; x(0) = a, \; x(T) = b \; .$$

In het algemeen kan men de oplossing niet analytisch bepalen. We kunnen enig inzicht in de oplossing krijgen door de vergelijking in het fasevlak te beschouwen. Zij $z = \dot{x}$, dan geldt

$$\dot{x} = z,$$
$$\dot{z} = g'g \; .$$

Als we de vergelijkingen op elkaar delen krijgen we

$$z\frac{dz}{dx} = g'g \; ,$$

dus $z^2 = g^2 + C$. Hieruit volgt

$$\dot{x} = \sqrt{g^2 + C} \; .$$

(Een andere manier om deze relatie af te leiden is gebaseerd op het constant zijn van H. Vullen we hierin $u = \psi$ in dan vinden we

$$H = \psi g(x) + \tfrac{1}{2}\psi^2 = c .$$

Substitutie van $\psi = \dot{x} - g$ levert $\dot{x}^2 = g^2 + c$.) Integreren we de relatie $\dot{x}/\sqrt{g^2 + c} = 1$ van 0 tot T dan vinden we

$$(6.1.22) \qquad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{g^2 + c}} = T .$$

We hebben hier aangenomen dat $\dot{x} > 0$ en $b > a$ omdat anders overlapping optreedt. Hiermee hebben we een vergelijking voor c gevonden. Als we hieruit c hebben bepaald, dan kunnen we de functie x bepalen uit de vergelijking $\dot{x} = \sqrt{g^2 + c}$, $x(0) = a$ of uit $\ddot{x} = g'g$, $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = \sqrt{g^2(a) + c}$. Het linkerlid van (6.1.22) is een dalende functie van c die naar nul nadert als $c \to \infty$, zodat de oplossing bestaat en eenduidig is als T niet te groot is. □

6.2. *Variatierekening*

We beschouwen weer het eenvoudigste probleem uit de variatierekening:

(6.2.1) PROBLEEM. *Gegeven* $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R})$ *waarin* $T > 0$ *en twee getallen* a,b. *Gevraagd: Bepaal een stuksgewijs continu differentieerbare functie* $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ *met* $x(0) = a$, $x(T) = b$, *zo dat*

$$\int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))dt$$

minimaal is.

Zoals we hebben gezien in § 3.2 kunnen we dit probleem herformuleren als een *SBP*:

$$(6.2.2) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= u, & x(0) &= a,\ x(T) = b , \\ \dot{y} &= f(t,x,u), & y(0) &= 0,\ y(T)\min . \end{aligned}$$

De Hamiltoniaan is

$$H = \psi u + \varphi f(t,x,u) ,$$

en de geadjungeerde vergelijkingen

$$(6.2.3)\qquad \begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\varphi f_x(t,x,u) \ , \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \ , \end{aligned}$$

met eindvoorwaarde $\varphi(T) < 0$. Als $\bar{u}$ een optimale besturing is, en $\bar{x}$ en $\bar{y}$ de bijbehorende oplossing van (6.2.2), dan is er volgens het maximumprincipe een niet-triviale oplossing $\bar{\psi},\bar{\varphi}$ van (6.2.3) zo dat

$$(6.2.4)\qquad \bar{\psi}(t)v+\bar{\varphi}(t)f(t,\bar{x}(t),v) \le \bar{\psi}(t)\bar{u}(t)+\bar{\varphi}(t)f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))$$

voor alle continuïteitspunten t van u en alle v. Daar er geen beperkingen zijn opgelegd aan u, houdt dit in dat $H_u = 0$ langs de optimale baan, d.w.z.

$$(6.2.5)\qquad \bar{\psi}(t) + \bar{\varphi}(t)f_u(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = 0 \ .$$

Eerst merken we op dat $\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}$ constant is. Als $\bar{\varphi} = 0$ zou gelden, dan was volgens (6.2.5) ook $\bar{\psi}(t) = 0$ hetgeen in strijd is met de niet-trivialiteit van $(\bar{\psi},\bar{\varphi})$. We mogen daarom aannemen, dat $\bar{\varphi} = -1$. Dan wordt (6.2.3):

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = f_x(t,\bar{x},\bar{u}) \ ,$$

en (6.2.5):

$$(6.2.6)\qquad \bar{\psi}(t) = f_u(t,\bar{x},\bar{u}) \ .$$

Hieruit kunnen we $\bar{\psi}$ elimineren. Dan vinden we (na weer $\dot{\bar{x}}$ i.p.v. u te hebben geschreven):

$$(6.2.7)\qquad \frac{d}{dt}(f_u(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) = f_x(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) \ .$$

(Hierbij betekent f_u de afgeleide naar het derde argument.) Vergelijking (6.2.7) heet de <u>vergelijking van Euler</u> voor het variatieprobleem (6.2.1).

Uit (6.2.4) kunnen we ook afleiden dat $H_{uu} \le 0$ langs de baan, dus (met $\bar{\varphi} = -1$):

$$(6.2.8)\qquad f_{uu}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) \ge 0 \ .$$

Dit is de <u>voorwaarde van Legendre</u>.

Wanneer we (6.2.6) in (6.2.4) substitueren, krijgen we de zgn. <u>voorwaarde van Weierstrass</u>

$$(6.2.9)\qquad E(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t),v) \ge 0$$

voor alle $v \in \mathbb{R}$, waarin

$$E(t,x,u,v) := f(t,x,v) - f(t,x,u) - (v-u)f_u(t,x,u)$$

de zgn. <u>E-functie van Weierstrass</u> is.

Verder kunnen we opmerken, dat zowel de functie $\bar{\psi}(t)$ als de functie

$$M(t) := H(\bar{\psi}(t),t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) = \dot{\bar{x}}f_u(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) - f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$$

continu zijn, ook in de punten waar $\dot{\bar{x}}$ discontinu is (zie (4.6.3)). Dit zijn de zgn. hoekvoorwaarden van Weierstrass-Erdmann.

Als f niet van t afhangt, is het stelsel (6.2.2) autonoom. Dan is de functie M constant, dus

(6.2.10) $$\dot{\bar{x}}f_u(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) - f(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) = c\ .$$

Deze formule is vaak handig bij het berekenen van de oplossing van de vergelijking van Euler.

(6.2.11) VOORBEELD (*Brachistochrone*, zie voorbeeld 1.1.3). In de notatie van deze paragraaf en met weglating van de constante factor $1/\sqrt{2g}$, is in het brachistochrone-probleem

$$f(t,x,\dot{x}) = \sqrt{\frac{1+\dot{x}^2}{\alpha - x}}\ .$$

Daar deze functie niet expliciet van t afhangt, geldt (6.2.10) voor een optimale functie x (we laten de strepen verder weg):

$$-1 = c\sqrt{(\alpha - x)(1+\dot{x}^2)}\ .$$

Hieruit volgt dat $c < 0$. We voeren in

$$p := 1/(2c^2)\ .$$

Dan vinden we

$$(\alpha - x)(1 + \dot{x}^2) = 2p\ .$$

We zoeken de een parametervoorstelling voor de gezochte kromme. Daartoe definiëren we

$$\dot{x} = \tan\theta$$

waarin θ de parameter is. Dan is

$$x = \alpha - \frac{2p}{1+\dot{x}^2} = \alpha - p(1 + \cos 2\theta) = (\alpha - p) - p\cos 2\theta$$

waardoor x als functie van θ is gegeven. Verder

$$t + d = \int \frac{dx}{\dot{x}} = \int \frac{2p\sin 2\theta}{\tan\theta}\,d\theta = 2p\theta + p\sin 2\theta$$

waarbij p en d worden bepaald uit de voorwaarden $x(0) = a$, $x(T) = b$. □

6.3. *Variabele eindtijd, tijdoptimale problemen*

We beschouwen nu het probleem met variabele eindtijd (3.1.11).

(6.3.1) PROBLEEM. $SBP^*(U,X_0,X_1,f,h)$: *Gegeven*: $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{X}_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f \in CD([0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R})$. *Gevraagd: Bepaal een toegelaten tripel* (x_0,u,T) *zo dat*

$$x_0 \in X_0 \,, \qquad (\xi_u(T,x_0),T) \in \underline{X}_1$$

en zodanig dat $h(\xi(T),T)$ *maximaal is.*

We zullen verder aannemen dat $f \in C^1$ is t.a.v. de variabele (t,x).
We herleiden dit probleem zoals in (3.2.6) is aangegeven tot SBP, d.w.z. we voeren een nieuwe tijdsvariabele τ in, die loopt over het interval $[0,1]$, en die met de oorspronkelijke tijd t verwant is door $t = T\tau$. In het volgende schrijven we soms $\hat{x}(\tau)$ voor $x(T\tau)$. De vergelijkingen worden

$$\frac{d\hat{x}}{d\tau} = Tf(T\tau,\hat{x},\hat{u})$$

$$\hat{x}(0) \in X_0, \quad (\hat{x}(1),T) \in \underline{X}_1 \;.$$

De functie die moet worden gemaximaliseerd, is $h(\hat{x}(1),T)$. In dit probleem komt T als parameter voor. We vervangen deze parameter door een nieuwe (constante) toestandsvariabele $\hat{x}_{n+1}$. Dan vinden we de vergelijkingen

$$\text{(6.3.2)} \qquad \frac{d\hat{x}}{d\tau} = \hat{x}_{n+1} f(\hat{x}_{n+1}\tau,\hat{x},u) \;, \qquad \frac{d\hat{x}_{n+1}}{d\tau} = 0 \;.$$

Als geadjungeerde variabele nemen we $[\psi,\omega]$ met $\psi \in \mathbb{R}_n$, $\omega \in \mathbb{R}$. De Hamiltoniaan wordt

$$\text{(6.3.3)} \qquad H^*(\psi,\omega,\tau,x,x_{n+1},u) = x_{n+1}\psi f(x_{n+1}\tau,x,u) + \omega.0 \;.$$

De geadjungeerde vergelijking wordt:

$$\text{(6.3.4)} \qquad \frac{d\hat{\psi}}{d\tau} = -\hat{x}_{n+1}\hat{\psi} f_x(\hat{x}_{n+1}\tau,\hat{x},\hat{u}) \,, \qquad \frac{d\hat{\omega}}{d\tau} = -\hat{\psi} f(\hat{x}_{n+1}\tau,\hat{x},\hat{u}) - \hat{x}_{n+1}\tau\hat{\psi} f_t(\hat{x}_{n+1}\tau,\hat{x},\hat{u}) \;.$$

De variabele $\hat{\underline{x}} = (\hat{x},\hat{x}_{n+1})$ moet voldoen aan de beginvoorwaarde

$$\hat{\underline{x}}(0) \in \underline{X}_0 := X_0 \times \mathbb{R}_+$$

en aan de eindvoorwaarden

$$\hat{\underline{x}}(T) \in \underline{X}_1 \ .$$

Laten we veronderstellen, dat $(\bar{x}_0,\bar{u},\bar{T})$ een optimaal tripel voor (6.3.1) is, dat $\bar{T} > 0$, dat C_0 een afgeleide kegel van X_0 in $\bar{x}_0$, en dat $\underline{C}_1$ een afgeleide kegel van $\underline{X}_1$ in $(\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{T})$. Hierbij is $\bar{\xi}(t) := \xi_{\bar{u}}(t,\bar{x}_0)$. Dan is

$$\underline{C}_0 := C_0 \times \mathbb{R}$$

een afgeleide kegel van $\underline{X}_0$ in $(\bar{x}_0,\bar{T})$ (zie lemma (5.3.6)). Volgens het maximumprincipe (6.1.9), toegepast op het getransformeerde systeem, bestaat er een getal $\rho \geq 0$ en een rijvector $\underline{\varphi} = [\varphi,\varphi_{n+1}] \in \underline{C}_1^0$ met $[\rho,\underline{\varphi}] \neq 0$, zo dat voor de oplossing $\hat{\bar{\psi}}: [0,1] \to \mathbb{R}_{n+1}$, van (6.3.4) met eindwaarde

$$\hat{\bar{\psi}}(1) = \rho h_{\underline{x}}(\hat{\bar{\xi}}(1)) - \underline{\varphi} \tag{6.3.5}$$

geldt

$$\hat{\bar{\psi}}(0) \in \underline{C}_0^0 \tag{6.3.6}$$

en

$$H^*(\hat{\bar{\psi}}(\tau),\bar{\hat{\omega}}(\tau),\tau,\hat{\bar{\xi}}(\tau),\hat{\bar{\xi}}_{n+1}(\tau),\bar{\hat{u}}(\tau)) =$$
$$\max_{v\in U} H^*(\hat{\bar{\psi}}(\tau),\bar{\hat{\omega}}(\tau),\tau,\hat{\bar{\xi}}(\tau),\hat{\bar{\xi}}_{n+1}(\tau),v) \ ,$$

voor alle continuïteitspunten van $\hat{\bar{u}}$. Dit resultaat vertalen we terug naar het oorspronkelijke probleem. We voeren de Hamiltoniaan van het oorspronkelijke probleem in:

$$H(\psi,t,x,u) := \psi f(t,x,u) \ .$$

Dan geldt:

$$H^*(\psi,\omega,\tau,x,x_{n+1},u) = x_{n+1}H(\psi,x_{n+1}\tau,x,u) \ .$$

In de vergelijkingen (6.3.4) voeren we weer de oorspronkelijke tijd in: $(\dot{\psi} = \hat{x}_{n+1}^{-1}d\hat{\psi}/d\tau)$

$$\dot{\psi} = -\psi f_x(t,x,u) = -H_x(\psi,t,x,u)$$

$$T\dot{\omega} = -\psi f(t,x,u) - t\psi f_t(t,x,u) = -H(\psi,t,x,u) - tH_t(\psi,t,x,u) \ .$$

We vertalen de voorwaarde (6.3.6) in $\bar{\psi}(0) \in C_0^0$, $\bar{\omega}(0) = 0$. Er geldt

$$h_{\mathbf{x}}(\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{T}) = [h_x(\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{T}),h_T(\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{T})]$$

zodat we (6.3.5) kunnen herschrijven als

$$\bar{\psi}(\bar{T}) = \rho h_x(\bar{\xi}(T),\bar{T}) - \varphi \; .$$

$$\bar{\omega}(\bar{T}) = \rho h_T(\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{T}) - \varphi_{n+1} \; .$$

Uit stelling (4.6.4) volgt:

$$T\dot{\bar{\omega}} = -(H + tH_t) = -(H + t\frac{d}{dt}H) = -\frac{d}{dt}(tH) \qquad (0 \le t \le T)$$

en dus

$$T\bar{\omega}(t) + tH = \text{const} \; .$$

Daar $\omega(0) = 0$ volgt hieruit:

$$T\bar{\omega}(t) = -tH(\bar{\psi}(t),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) \; .$$

We kunnen het gevondene samenvatten in

(6.3.7) STELLING. *(Maximumprincipe met variabele eindtijd)*. *Laat* $(\bar{x}_0,\bar{u},\bar{T})$ *een oplossing zijn van* $SBP^*(U,X_0,X_1,f,h)$, *waar* f *continu differentieerbaar is t.a.v.* (t,x). *Zij* $\bar{\xi}(t) := \xi_{\bar{u}}(t,\bar{x}_0)$ *de optimale baan. Als* $\bar{T} > 0$, C_0 *een afgeleide kegel van* X_0 *is in* $\bar{x}_0$ *en* $\underline{C}_1$ *een afgeleide kegel van* $\underline{X}_1$ *in* $(\xi(\bar{T}),\bar{T})$, *dan bestaat er een getal* $\rho \ge 0$ *en een rijvector* $\underline{\varphi} = [\varphi,\varphi_{n+1}] \in \underline{C}_1^0$, *niet beide nul, zo dat voor de oplossing* $\bar{\psi}: [0,T] \to \mathbb{R}_n$ *van de geadjungeerde vergelijking*

(6.3.8) $\quad \dot{\bar{\psi}}(t) = -H_x(\bar{\psi}(t),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t))$

met eindwaarde

(6.3.9) $\quad \bar{\psi}(\bar{T}) = \rho h_x(\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{T}) - \varphi$

geldt

(6.3.10) $\quad \bar{\psi}(0) \in C_0^0$

en

(6.3.11) $\quad H(\bar{\psi}(t),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) = \max_{v\in U} H(\bar{\psi}(t),t,\bar{\xi}(t),v)$

in elk punt waarin $\bar{u}$ *continu is. Bovendien geldt:*

(6.3.12) $\quad H(\bar{\psi}(\bar{T}),\bar{T},\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T})) + \rho h_T(\bar{T},\bar{\xi}(\bar{T})) = \varphi_{n+1} \; .$

Een belangrijk bijzonder geval van stelling (6.3.7) is het geval dat $\underline{X}_1 = X_1 \times \mathbb{R}$, d.w.z. het geval dat er geen beperking aan de eindtijd, maar wel eventueel beperking aan de eindtoestand worden opgelegd. Als dan C_1 een afgeleide kegel van X_1 in $\bar{\xi}(\bar{T})$ is, dan is $\underline{C}_1 := C_1 \times \mathbb{R}$ een afgeleide kegel van $\underline{X}_1$ in $(\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{T})$. De polaire kegel is $\underline{C}_1^0 = C_1^0 \times \{0\}$, zodat we in stelling (6.3.7) vinden: $\varphi \in C_1^0$ en $\varphi_{n+1} = 0$.

We merken op als $(\bar{x}_0,\bar{u},\bar{T})$ een oplossing is van SBP^*, dat dan $(\bar{x}_0,\bar{u})$ een oplossing is van $SBP(U,X_0,X_1,\bar{T},f,h)$ zodat stelling (6.1.9) van toepassing is. Hieruit volgt onmiddellijk stelling (6.3.7) met uitzondering van (6.3.12). Deze extra vergelijking kan men beschouwen als een gevolg van de optimale keuze van $\bar{T}$. We kunnen ook opmerken dat in vergelijking met (6.1.9) het aantal onbekenden hier is toegenomen met één, nl. $\bar{T}$, maar dat we ook een vergelijking erbij hebben gekregen, nl. (6.3.12). Uiteraard kunnen we stelling (6.3.7) specialiseren tot de situatie waarin tabel (6.1.17) van toepassing is.

Een verdere specialisatie treedt op als we aannemen dat h onafhankelijk is van T. In dat geval (onder de aanname $\underline{X}_1 = X_1 \times \mathbb{R}$), wordt (6.3.12):

(6.3.12)' $H(\bar{\psi}(T),\bar{T},\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T})) = 0$.

Als dan ook nog het systeem autonoom is (zie § 4.6), dan volgt dat

$$H(\bar{\psi}(t),t,\bar{\xi}(t),\bar{u}(t)) = 0$$

voor alle t.

Een ander speciaal geval treedt op als $h(T,x) = -T$. Het probleem is dan vanuit X_0 de verzameling X_1 in minimale tijd te bereiken. Men spreekt van een <u>tijdoptimaliseringsprobleem</u> en men noemt een corresponderende optimale besturing een <u>tijdoptimale</u> besturing. In dat geval wordt (6.3.12)

(6.3.12)" $H(\bar{\psi}(\bar{T}),\bar{T},\bar{\xi}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T})) \geq 0$

en (6.3.9)

(6.3.9)" $\bar{\psi}(T) \in -C_1^0$

waarna we φ kunnen elimineren uit de formulering.

(6.3.13) VOORBEELD. (<u>Zachte maanlanding</u>). Door uitstoting van gassen met een constante snelheid (maar eventueel variabele hoeveelheid) ondervindt een ruimteschip met massa m een kracht $-c\dot{m}(t)$ naar boven (N.B. $\dot{m} \leq 0$). Verder werkt de zwaartekracht $-mg$ op het voertuig, zodat de volgende vergelijking geldt

$$m\ddot{x} + mg + c\dot{m} = 0 \ .$$

Het probleem is nu: *Bepaal* $T > 0$, $\dot{m}$ *op* $[0,T]$ *zo dat bij gegeven* $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $m(0)$, $(x(0) > 0,\ m(0) > 0)$ *geldt:* $x(T) = \dot{x}(T) = 0$, *en zodanig dat* $m(T)$ *maximaal is. Hierbij is de restrictie* $-b \le \dot{m} \le 0$ *opgelegd aan het brandstofverbruik.*

Gevraagd wordt dus, de uitlaathoeveelheid zo te bepalen, dat het voertuig een zachte landing maakt, en wel zó, dat het brandstofgebruik minimaal is.

We herschrijven de vergelijkingen in een stelsel:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y &&, \ x(0) = x_0,\ x(T) = 0 \\ \dot{y} &= -g + cuz^{-1} &&, \ y(0) = y_0,\ y(T) = 0 \\ \dot{z} &= -u &&, \ z(0) = z_0,\ z(T) = \max . \end{aligned}$$

Hierbij hebben we dus $y = \dot{x}$, $z = m$, $u = -\dot{m}$ gesteld. De besturing u moet voldoen aan

$$0 \le u \le b .$$

De Hamiltoniaan is

$$H = \psi y - \varphi g + c\varphi u z^{-1} - \omega u$$

waar $[\psi,\varphi,\omega]$ de geadjungeerde vector is. De geadjungeerde vergelijkingen luiden:

$$(6.3.14) \quad \begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\psi \\ \dot{\omega} &= -\frac{\partial H}{\partial z} = c\varphi u z^{-2} . \end{aligned}$$

Volgens het maximumprincipe bestaat er voor een optimale (u,T) een niet-triviale oplossing $[\psi,\varphi,\omega]$ van deze vergelijkingen waarvoor geldt $\omega(T) \ge 0$,

$$H\big|_T := H(\psi(T),\varphi(T),\omega(T),x(T),y(T),z(T),u(T)) = 0$$

en

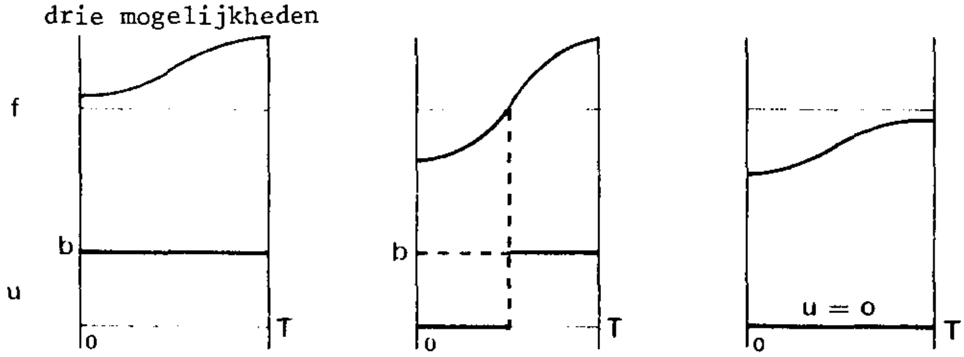
$$\begin{aligned} u(t) &= b \text{ als } \rho(t) > 0 , \\ u(t) &= 0 \text{ als } \rho(t) < 0 . \end{aligned}$$

Hierbij is $\rho(t) = c\varphi z^{-1} - \omega$. Er geldt

$$\dot{\rho}(t) = -c\psi z^{-1} .$$

Het is duidelijk dat $z = m > 0$ $(0 \leq t \leq T)$ moet zijn. Als we geen oplossing kunnen vinden die hieraan voldoet dan kan de raket niet zacht landen. De constante c is positief. Van ψ (die ook constant is) is het teken nog niet duidelijk. We onderscheiden drie gevallen:

i) $\psi < 0$. Dan is ρ stijgend. Er is ten hoogste één nulpunt. Er zijn nu drie mogelijkheden



(a) (b) (c)

a) $\rho > 0$ voor $0 < t \leq T$, dus $u = b$ voor $0 \leq t \leq T$.

b) $\rho < 0$ voor $0 \leq t < T_0$, $\rho > 0$ voor $T_0 < t \leq T$, waar $0 < T_0 < T$, dan is dus $u(t) = 0$ $(0 < t < T_0)$, $u(t) = b$ $(T_0 < t < T)$.

c) $\rho < 0$ voor $0 \leq t < T$. Dan is $u(t) = 0$ voor $0 < t < T$.

Het is eenvoudig in te zien, dat in geval c) niet voldaan kan zijn aan de eindvoorwaarde $y(T) = 0$.

ii) $\psi = 0$. Dan is ρ constant. Ook hier moeten we drie gevallen ondetscheiden:

a) $\rho > 0$ komt overeen met (ia).

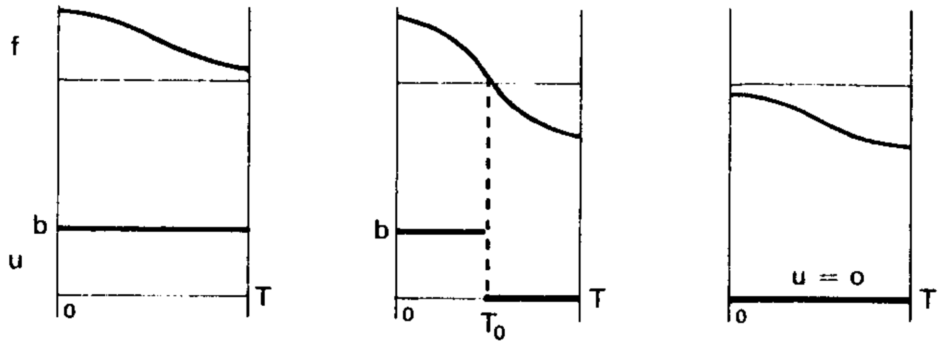
b) $\rho = 0$. Daar

$$H = \psi y - \varphi g + \rho u = -\varphi g = \text{const} = 0$$

moet dan $\varphi = 0$ gelden. Maar uit $\rho = c\varphi z^{-1} - \omega = 0$ volgt dan, dan ook $\omega = 0$, zodat $[\psi,\varphi,\omega]$ een triviale oplossing van (6.3.14) is. Dit geval moeten we daarom uitsluiten.

c) $\rho < 0$ komt overeen met (ic).

iii) $\psi > 0$. Dan is ρ dalend. We onderscheiden weer



(a) (b) (c)

b) $\rho > 0$ $(0 \le t < T_0)$, $\rho < 0$ $(T_0 < t \le T)$. Hier is $u = b$ $(0 \le t < T_0)$, $u = 0$ $(T_0 < t \le T)$. Er kan niet worden voldaan aan $y(T) = 0$ (als we ons tenminste beperken tot oplossingen die voldoen aan $x(t) \ge 0$ $(0 < t < T)$.

c) $\rho < 0$ $(0 < t \le T)$ komt overeen met (ic).

We zien dat de gevallen (ia) en (ib) alle mogelijkheden dekken. We kunnen (ia) opvatten als een speciaal geval van (ib) (nl. $T_0 = 0$), zodat we de oplossing expliciet hebben gevonden afgezien van de bepaling van T_0 en T. Deze moeten we vinden uit de vergelijkingen $x(T) = y(T) = 0$. Niet voor alle situaties bestaat er een oplossing.

Merk op dat we op een essentiële manier gebruik gemaakt hebben aan de voorwaarde $H|_T = 0$ om het geval (iib) te kunnen uitsluiten. $\square$

6.4. *Tijdoptimale besturing van lineaire systemen*

Beschouw het systeem

(6.4.1) $\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0$

waarbij A een $n \times n$-matrix en B een $n \times m$-matrix is. Zij $U \subseteq \mathbb{R}^m$ een verzameling, waarvan de oorsprong een inwendig punt is en Ω de verzameling van stuksgewijs continue functies $[0,\infty) \to U$. We vragen naar een besturing die de toestand x in minimale tijd naar de oorsprong stuurt, d.w.z. we vragen naar $\bar{u} \in \Omega$ en $\bar{T} \geq 0$ zodanig dat $\xi_{\bar{u}}(\bar{T},x_0) = 0$ terwijl voor elke $u \in \Omega$ en elke $T < \bar{T}$ geldt $\xi_u(T,x_0) \neq 0$. Als $\bar{u} \in \Omega$ een optimale besturing is, dan bestaat er volgens § 6.3 een niet-triviale oplossing ψ van de geadjungeerde vergelijking

(6.4.2) $\dot{\psi} = -\psi A$

zo dat

(6.4.3) $\psi(t)B\bar{u}(t) = \max\limits_{v \in U} \psi(t)Bv$.

We willen nu nagaan wanneer er een optimale besturing bestaat en of (6.4.3) ook een voldoende voorwaarde is.
In de eerste plaats moeten we ons afvragen of er wel een besturing bestaat die de toestand naar nul brengt. In het geval dat $U = \mathbb{R}^m$ is dit gemakkelijk te onderzoeken.

(6.4.4) DEFINITIE. *Het systeem (1) heet <u>nulbestuurbaar</u> als er voor elke* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *een stuksgewijs continue functie* $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ *en een getal* $T > 0$ *bestaan waarvoor* $\xi_u(T,x_0) = 0$.

Zonder bewijs (zie bijv. [L & M], Ch. 2,3, [K & S], [LMS]) vermelden we het volgende resultaat.

(6.4.5) STELLING. *Systeem* (6.4.1) *is nulbestuurbaar dan en slechts dan als de rang van de* $n \times (nm)$*-matrix* $[B,AB,\dots,A^{n-1}B]$ *gelijk is aan* n.

Als $U \neq \mathbb{R}^m$ dan wordt de situatie wat gecompliceerder. De voorwaarde $\text{rang}[B,AB,\dots,A^{n-1}B] = n$ is dan wel nodig maar in het algemeen niet meer voldoende. Als we, zoals boven, aannemen dat de oorsprong in $\mathbb{R}^m$ een inwendig punt van U is, dan is deze voorwaarde wel voldoende voor de locale nulbestuurbaarheid van (6.4.1).

(6.4.6) DEFINITIE. *Het systeem* (6.4.1) *met restrictieverzameling* U) *heet* *locaal nulbestuurbaar* *als er een omgeving S van de oorsprong bestaat zo dat voor alle* $x_0 \in S$ *er een besturing* $u \in \Omega$ *en* $T > 0$ *bestaat waarvoor geldt* $\xi_u(T,x_0) = 0$.

Eveneens zonder bewijs vermelden we

(6.4.7) STELLING. *Als* $0 \in \mathrm{int}\, U$, *dan is* (6.4.1) *locaal nulbestuurbaar dan en slechts dan als*

$$\mathrm{rang}[B,AB,\ldots,A^{n-1}B] = n\ .$$

Tenslotte vermelden we een voorwaarde voor globale nulbestuurbaarheid ([H & L]).

(6.4.8) STELLING. *Zij* $0 \in \mathrm{int}\, U$. *Als*

(i) $\qquad \mathrm{rang}[B,AB,\ldots,A^{n-1}B] = n$

(ii) $\qquad \mathrm{Re}\,\lambda \le 0$ *voor elke eigenwaarde van* A

dan is (6.4.1) *nulbestuurbaar met de restrictie* U. *Als* U *compact is dan zijn de voorwaarden* (i) *en* (ii) *noodzakelijk voor de nulbestuurbaarheid.*

We illustreren bovengenoemde eigenschappen aan de hand van een aantal voorbeelden.

(6.4.9) VOORBEELD. $\dot{x} = -x + u$, $\dot{y} = -y + 2u$.
Hier is $n = 2$, $m = 1$, $A = -I$, $B = (1,2)$. Blijkbaar is $\mathrm{rang}[B,AB] =$
$= \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 1$, zodat het systeem niet nulbestuurbaar is. Inderdaad, zien we dat

$$\frac{d}{dt}(2x - y) = -(2x - y)$$

zodat $2x - y = e^{-t}(2x(0) - y(0))$, zodat $x(T) = y(T) = 0$ onmogelijk is als $2x(0) \neq y(0)$. De verzameling van punten die naar nul kunnen worden gestuurd is het vlak gegeven door de vergelijking $2x = y$. Daar dit vlak geen omgeving van de oorsprong bevat is het systeem ook niet locaal nulbestuurbaar. $\square$

(6.4.10) VOORBEELD. $n = 1$, $m = 1$, $\dot{x} = x + u$. Als er geen restrictie aan u wordt opgelegd dan is het systeem natuurlijk nulbestuurbaar. Zij $U = \{u \in \mathbb{R} \mid |u| \leq 1\}$. Op grond van (6.4.7) is dan het systeem nog steeds locaal nulbestuurbaar maar niet globaal nulbestuurbaar. Inderdaad kunnen we gemakkelijk verifiëren dat alle toestanden x op het interval $(-1,1)$ en geen andere naar nul kunnen worden gestuurd. Als bijv. $x > 1$ dan geldt $\dot{x} > 0$. □

We zullen voortaan aannemen dat

(6.4.11) $\quad \operatorname{rang}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$

zodat het systeem (6.4.1) met de stuurverzameling U locaal nulbestuur is. Als x_0 een punt is dat naar nul kan worden gestuurd, dan kan men zich afvragen of er een tijdoptimale besturing bestaat. In het algemeen kunnen we dit niet verwachten als U onbegrensd of niet gesloten is. We zullen derhalve voortaan aannemen dat U compact is. Evenals in § 3.3 moeten we hier meetbare functies toelaten om een algemene existentieuitspraak te krijgen. In het bijzondere geval dat U een polyeder of een strict convexe verzameling is kan men volstaan met stuksgewijs continue functies

(6.4.12) STELLING.

(i) *Zij* U *een compacte verzameling in* $\mathbb{R}^n$ *en zij* $\hat{\Omega}$ *de verzameling van meetbare functies* $[0,\infty) \to U$. *Als er voor zekere* x_0 *een* $u \in \hat{\Omega}$ *bestaat en* $T > 0$ *zo dat* $\xi_u(T, x_0) = 0$, *dan is er ook een tijdoptimale* u *die dit doet.*

(ii) *Als bovendien* U *een strict convexe verzameling, dan bestaat er een continue tijdoptimale besturing. In het geval dat* U *een polyeder is, kan een stuksgewijs constante optimale besturing worden gekozen.*

Tot zover de existentie van tijdoptimale besturingen. Nu zullen we ons bezig houden met de vraag of de voorwaarde (6.4.2) en (6.4.3) ook voldoende zijn voor de optimaliteit van $\bar{u}$. Inderdaad kunnen we bewijzen

(6.4.13) STELLING. *Zij* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$, $\bar{T} > 0$ *en* $\xi_{\bar{u}}(\bar{T},x_0) = 0$. *Neem aan dat* U *compact is en dat* $0 \in \text{int } U$. *Opdat* $\bar{u}$ *optimaal is, is nodig en voldoende dat er een niet-triviale functie* $\psi\colon [0,\bar{T}] \to \mathbb{R}_n$ *bestaat waarvoor geldt*

(6.4.14) $\dot{\psi} = -\psi A$

en

(6.4.15) $\psi(t)B\bar{u}(t) = \max_{v\in U} \psi(t)Bv$.

BEWIJS. We hebben al gezien dat de voorwaarde noodzakelijk is. Stel nu dat aan (6.4.14) en (6.4.15) is voldaan voor een $\psi \neq 0$. We definiëren

$$\alpha(t) := \max_{v\in U} \psi(t)Bv\ , \qquad (0 \le t \le \bar{T})\ .$$

Dan is $\alpha(t) > 0$ behalve eventueel in een eindig aantal punten. Om dit in te zien beschouwen we

$$U_0 := \varepsilon\mathbb{B}^m$$

(waar $\mathbb{B}^m$ de eenheidsbol in $\mathbb{R}^m$ is, zie § 2.2). Als $\varepsilon > 0$ maar klein genoeg is, dan is $U_0 \subseteq U$ en dus

$$\beta(t) := \max_{v\in U_0} \psi(t)Bv \le \alpha(t)\ .$$

Het is gemakkelijk in te zien dat $\beta(t) = \varepsilon|\psi(t)B|$ (het maximum wordt aangenomen voor $v = \varepsilon B'\psi'(t)/|B'\psi'(t)|$ als $B'\psi'(t) \neq 0$). Om te bewijzen dat $\alpha(t) > 0$ is het voldoende aan te tonen dat $\psi(t)B \neq 0$ behalve in een eindig aantal punten. Daar $\psi(t)B$ een analytische functie is, is dit inderdaad het geval tenzij $\psi(t)B$ identiek nul is. Veronderstel, dat $\psi(t)B = 0$ voor alle t. Dan is ook $\psi^{(k)}(0)B = 0$, $k = 0,\ldots,n-1$. Als we $\eta := \psi(0)$ definiëren, dan houdt dit in

$$\eta B = \eta AB = \ldots = \eta A^{n-1}B = 0\ ,$$

dus

$$\eta[B,AB,\ldots,A^{n-1}B] = 0\ .$$

Uit (6.4.11) volgt nu dat $\eta = 0$ hetgeen in strijd is met de aanname dat ψ niet triviaal is. Derhalve geldt $\alpha(t) > 0$.

Voor een willekeurige besturing $u \in \Omega$ definiëren we

$$\omega_u(t) := \psi(t)\xi_u(t,x_0)\ .$$

Dan geldt

$$\dot\omega_u(t) = \psi(t)B(t)u(t) .$$

Derhalve geldt voor elke $u \in \Omega$:

$$\dot\omega_u(t) \le \dot\omega_{\bar u}(t) = \alpha(t) .$$

Daar $\omega_u(0) = \psi(0)x_0 = \omega_{\bar u}(0)$, volgt hieruit

$$\omega_u(t) \le \omega_{\bar u}(t) \qquad (0 \le t \le \bar T) .$$

Verder geldt $\omega_{\bar u}(\bar T) = \psi(\bar T)\xi_{\bar u}(\bar T,b) = 0$. Daar $\dot\omega_{\bar u}(t) = \alpha(t) > 0$ behalve in een eindig aantal punten, is $\omega_{\bar u}(t)$ strict stijgend en dus $\omega_u(t) \le \omega_{\bar u}(t) < 0$ voor alle $u \in \Omega$, $t < \bar T$. Als voor zekere $u \in \Omega$, $T > 0$ geldt $\xi_u(T,x_0) = 0$, dan moet ook gelden $\omega_u(T) = 0$, hetgeen onmogelijk is, als $T < \bar T$. Hieruit volgt de tijdoptimaliteit van $\bar u$. □

Als niet aan (6.4.11) is voldaan dan zijn (6.4.14) en (6.4.15) in het algemeen niet voldoende voor de optimaliteit van $\bar u$.

(6.4.16) VOORBEELD. $\dot x = u$, $\dot y = 0$, $H = \psi u$, $\dot\psi = 0$, $\dot\varphi = 0$. Als $[\psi,\varphi] = [0,1]$, dan voldoet elke $u \in \Omega$ aan (6.4.15) (op een triviale manier), maar niet elke besturing is tijdoptimaal. □

We onderzoeken nu de eenduidigheid van de optimale besturing. Uit het bewijs van (6.4.13) volgt onmiddellijk de volgende uitspraak: *Laat* $\bar u \in \Omega$ *een optimale besturing is en* ψ *een niet-triviale vector die voldoet aan* (6.4.14) *en* (6.4.15). *Dan gelden* (6.4.14) *en* (6.4.15) *(met dezelfde* ψ*) ook voor elke andere optimale besturing* u_0. Immers, als u_0 ook optimaal is, dan is $\xi_{u_0}(\bar T,x_0)=0$ en dus $\omega_{u_0}(\bar T) = 0$. Maar dit is alleen mogelijk als $\dot\omega_{u_0}(t) = \dot\omega_{\bar u}(t)$ voor alle continuïteitspunten van u_0 en $\bar u$, dus als $\psi(t)Bu_0(t) = \alpha(t)$.
We kunnen uit deze uitspraak eenduidigheidsvoorwaarden afleiden:

(6.4.17). STELLING.

(i) *Als* U *strict convex is, dan is de optimale besturing eenduidig.*
(ii) *Als*

(6.4.18) $\quad U := \{u \in \mathbb{R}^m \mid |u_i| \le 1 \ (i = 1,\dots,m)\}$

en

(6.4.19) $\text{rang}[b_i, Ab_i, \ldots, A^{n-1}b_i] = n \quad (i = 1,\ldots,m)$

waar b_i *de* i-de *kolom van de matrix* B *is, dan is de optimale besturing eenduidig.*

BEWIJS.

(i) Als U strict convex is dan is voor elke $\omega \in \mathbb{R}_m$, $\omega \neq 0$ precies een $\bar{v}$ waarvoor geldt

$$\omega\bar{v} = \max_{v \in U} \omega v \ .$$

Het gestelde volgt uit het feit dat $\psi(t)B \neq 0$ (behalve in een eindig aantal punten.

(ii) Als $\omega \in \mathbb{R}^m$ dan geldt

$$\omega\bar{v} = \max_{v \in U} \omega v = \Sigma|\omega_i|$$

voor een eenduidige $\bar{v}$ (nl. $\bar{v}_i = \text{sgn}\ \omega_i$) als tenminste $\omega_i \neq 0$ $(i = 1,\ldots,m)$. In (6.4.15) geldt $\omega_i = \psi(t)b_i$ en uit het gegeven volgt dat $\psi(t)b_i \neq 0$. □

Als aan (6.4.19) wordt voldaan, dan heet het systeem met restrictieverzameling (6.4.18) normaal. We zullen verder aannemen dat U wordt gegeven door (6.4.18) en dat het systeem normaal is. Voor een normaal systeem is de oplossing dus eenduidig met uitzondering van een eindig aantal punten. Voor de optimale besturing geldt steeds $\bar{u}_i(t) = \text{sgn}\ \psi b_i(t) = \pm 1$ $(i = 1,\ldots,m)$. We noemen zulke besturing bang-bang. Merk op dat de optimale besturing stuksgewijs constant is, in overeenstemming met (6.4.12) (ii).

(6.4.20) OPMERKING. Een normaal systeem is ook locaal nulbestuurbaar. Als m = 1 geldt ook het omgekeerde. In het algemeen is echter de normaliteit een sterkere eis dan bestuurbaarheid. Voor het systeem

$$\dot{x} = u$$
$$\dot{y} = v$$

is A = 0, B = I, zodat aan (6.4.11)is voldaan maar niet aan (6.4.19). De optimale besturing van dit systeem is dan ook niet eenduidig en niet noodzakelijk bang-bang. Als bijv. $\underline{x}_0 = (0,1)$, dan is elke (u,v) met $v(t) = -1$, $|u(t)| \le 1$ en $\int_0^1 u(t)dt = 0$ optimaal. □

(6.4.21) OPGAVE. Voor welke $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ is de oplossing in bovenstaand voorbeeld wel eenduidig?

(6.4.22) STELLING. *Als het systeem normaal is en alle eigenwaarden van* A *zijn reëel, dan heeft elke component van* $\bar{u}$ *ten hoogste* $n - 1$ *sprongpunten.*

BEWIJS. De functie $\bar{u}_i$ kan alleen een sprongpunt hebben waar $\psi b_i = 0$. Daar $\dot{\psi} = -\psi A$ zijn de componenten van ψ van de gedaante $\sum_{j=1}^{r} q_j(t)e^{\lambda_j t}$, waar q_j een polynoom is waarvan de graad kleiner is dan de multipliciteit van de eigenwaarde λ_j van $-A$ en r is het aantal eigenwaarden van A. Derhalve heeft $\psi(t)b_i$ de gedaante

$$\beta(t) := \sum_{j=1}^{r} p_j(t)e^{\lambda_j t} .$$

Zulke een functie noemen we een <u>exponentieel polynoom</u>. De graad van β wordt gedefinieerd door

$$\delta(\beta) := \sum_{j=1}^{r} (gr(p_j) + 1) - 1$$

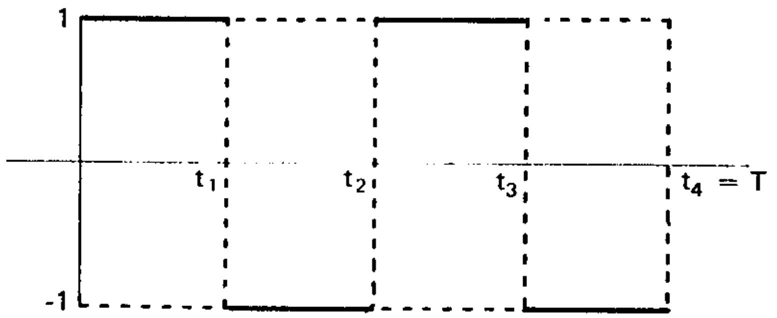
waarin $gr(p)$ de graad van het polynoom p voorstelt. Voor het exponentieel polynoom $\alpha(t) := \psi(t)b_i$ geldt $\delta(\alpha) \le n - 1$. We bewijzen nu dat een willekeurig niet-triviaal exponentieel polynoom β ten hoogste $\delta(\beta)$ nulpunten heeft.
Het bewijs gaat met inductie naar $\delta(\beta)$. Als $\delta(\beta) = 0$, dan is $r = 1$ en $p_1' =$ constant, zodat $\beta(t) = ce^{\lambda_1 t}$. Laat nu het gestelde bewezen zijn voor $k - 1$ en laat $\delta(\beta) = k$. We definiëren

$$\gamma(t) := e^{\lambda_1 t}\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_1 t}\beta(t)) = e^{\lambda_1 t}\frac{d}{dt}(\sum_{j=2}^{n} p_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_1)t} + p_1(t)) =$$

$$= \sum_{2}^{n} q_j(t)e^{\lambda_j t} + p_1'(t)e^{\lambda_1 t} .$$

Dan geldt $\delta(\gamma) = \delta(\beta) - 1$. Daarom heeft γ ten hoogste $k-1$ nulpunten. Maar dan heeft $e^{-\lambda_1 t}\beta(t)$ en dus $\beta(t)$ ten hoogste k nulpunten (stelling van Rolle).□

In het geval van één besturingsvariabele u (dus m = 1) is de optimale besturing op het teken na eenduidig bepaald door n variabelen, nl. de $n-1$ schakeltijden $t_1,\ldots,t_{n-1}$ en de eindtijd $t_n := T$. De bijbehorende optimale baan



wordt ook bepaald door deze variabelen en het taken dat voor u wordt gekozen in het eerste interval: $x_u(T) = \xi^{\pm}(t_1,\ldots,t_n)$. De keuze van de schakeltijden wordt bepaald door de vergelijking

$$\xi^{\pm}(t_1,\ldots,t_n) = 0$$

hetgeen een stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden is.

(6.4.23) VOORBEELD. Een wagen kan met een kracht u geduwd of getrokken worden. Deze kracht is beperkt: $|u| \leq 1$. De plaats van de wagen wordt gegeven door een coordinaat x. Gevraagd een wagen die voor t = 0 een gegeven x en $\dot{x}$ heeft in minimale tijd naar de oorsprong te brengen met eindsnelheid $\dot{x}(T) = 0$. Het probleem luidt dus: *Bepaal een* $T > 0$ *en functie* $u: [0,T] \to [-1,1]$, *zo dat voor de oplossing van de vergelijking* $\ddot{x} = u$ *met beginwaarde* $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$ *geldt* $x(T) = \dot{x}(T) = 0$ *en wel zo dat* T *minimaal is.*

Het systeem is:

$$\dot{x} = y,\ x(0) = a,\ x(T) = 0\ ,$$
$$\dot{y} = u,\ y(0) = b,\ y(T) = 0\ .$$

Dit is een stelsel van de vorm (6.4.1) met $n = 2$, $m = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

De geadjungeerde vergelijking (6.4.14) luidt

$$\dot{\psi} = 0$$
$$\dot{\phi} = -\psi .$$

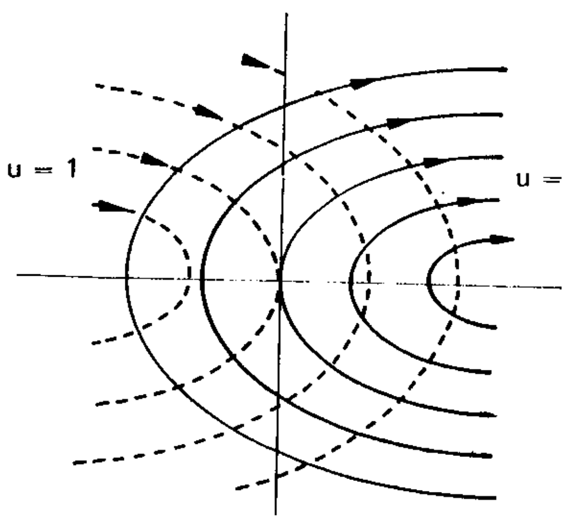
De functie φ is lineair en niet identiek nul omdat anders ook ψ nul zou zijn. Derhalve heeft φ tenhoogste één nulpunt. Dit is in overeenkomst met stelling (6.4.22). Uit (6.4.15) volgt dat $u = \operatorname{sgn} \varphi$ behalve waar $\varphi = 0$, maar dat is slechts één punt en derhalve niet belangrijk. De optimale baan in het xy-vlak bestaat uit twee stukken. Op een ervan is $u = 1$ op het andere $u = -1$. We beschouwen eerst krommen met $u = 1$. De differentiaalvergelijking daarvan luidt:

$$\dot{x} = y, \; \dot{y} = 1 .$$

Eliminatie van t levert $dx/dy = y$ met als oplossingen

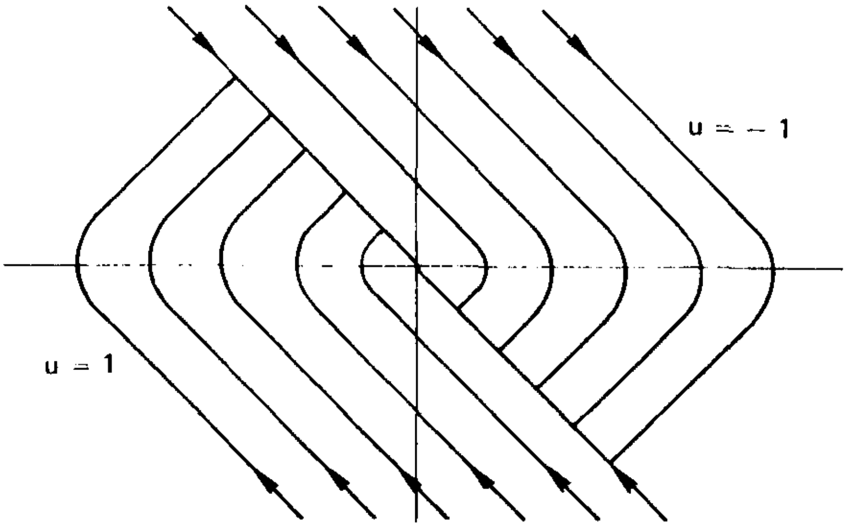
$$x = \tfrac{1}{2}y^2 + C .$$

We zullen deze oplossingen + parabolen noemen.



het bovenhalfvlak van het xy-vlak is de snelheid $\dot{x}$ positief. Daar worden dus de banen van links naar rechts doorlopen. In het benedenhalfvlak geldt $\dot{x} < 0$.

De optimale baan bestaat uit tenhoogste twee stukken: één stuk op een + parabool, één stuk op een - parabool (of omgekeerd). Het laatste stuk eindigt in de oorsprong. Het laatste stuk ligt dus op een van de parabolen $x = \frac{1}{2}y^2$, $x = -\frac{1}{2}y^2$.



Hiervoor komen alleen de gedeelten van deze parabolen voor in aanmerking die in het tweede en vierde kwadrant liggen. Tezamen vormen deze stukken parabool een kromme Γ. Boven deze kromme moet $u = 1$, onder de kromme $u = -1$ gekozen worden. We krijgen derhalve een optimale besturing van de vorm

$$u = -\mathrm{sgn}(x + \tfrac{1}{2}y|y|) \ .$$

De kromme Γ heet de <u>schakelkromme</u>. □

(6.4.24) VOORBEELD. We komen nu terug op het in voorbeeld (1.1.5) besproken probleem: "*Gegeven* x_0 *en* v_0, *bepaal een besturing* u *met* $|u(t)| \leq 1$, *zodanig dat voor de oplossing van de vergelijking*

$$\ddot{x} + x = u, \; x(0) = x_0, \; \dot{x}(0) = v_0 \ ,$$

$x(T) = \dot{x}(T) = 0$ *geldt met minimale* T".

Het systeem is $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + u$. De geadjungeerde vergelijking

$$\dot{\psi} = \varphi$$
$$\dot{\phi} = -\psi \ .$$

De functie φ voldoet aan $\ddot{\varphi} + \varphi = 0$. Deze functie is niet identiek nul, dus van de gedaante $\sin(t + \alpha)$. (6.4.15) levert $u = \operatorname{sgn} \varphi(t)$.

De optimale besturing is weer bang-bang: $u(t) = \pm 1$. Verder zien we dat de sprongpunten (discontinuïteitspunten) op afstanden π van elkaar liggen. We beschouwen weer banen behorende bij besturing $u = +1$ en $u = -1$. Voor $u = 1$ is de vergelijking

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x + 1 ,$$

dus

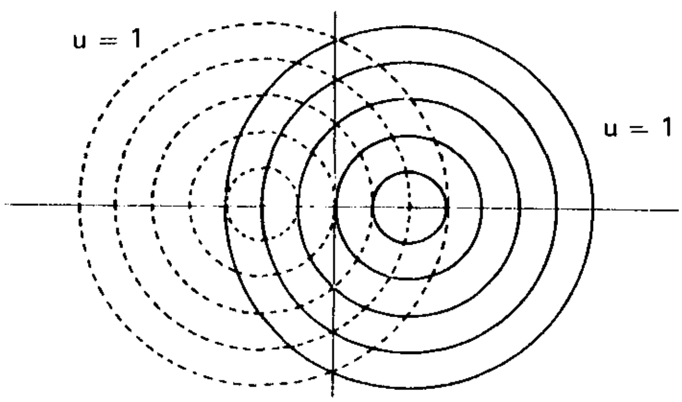
$$y \frac{dy}{dx} = -x + 1 ,$$

d.w.z.

$$y^2 + (x - 1)^2 = C .$$

Als $u = -1$, krijgen we als banen

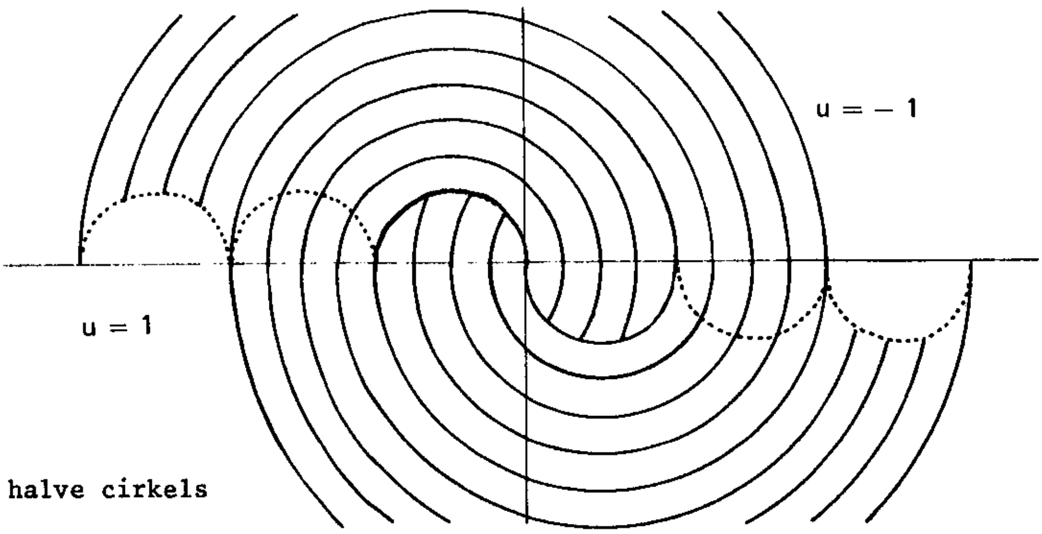
$$y^2 + (x + 1)^2 = C .$$



De optimale baan bestaat uit stukken cirkels, beurtelings cirkels met middelpunt (1,0) en met middelpunt (-1,0). Als we $z = x - 1$ invoeren dan zien we dat voor $u = 1$ geldt: $\ddot{z} = \ddot{x} = \dot{y} = -x + 1 = -z$.

De cirkels worden met hoeksnelheid 1 doorlopen. In een tijdsinterval π wordt dus een halve cirkel doorlopen. Een zelfde opmerking geldt voor de cirkels met middelpunt (-1,0).

De stukken cirkel die de optimale baan doorloopt zijn dus allemaal halve cirkels met eventuele uitzondering van het eerste en het laatste stuk, die echter niet meer dan een halve cirkel zijn. Het laatste stuk ligt steeds op een van de cirkels $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $(x + 1)^2 + y^2 = 1$, die door de oorsprong gaan: Omdat de cirkels in het bovenhalfvlak van links naar rechts en in het benedenhalfvlak van rechts naar links doorlopen worden, en omdat het laatste stuk niet meer dan een halve cirkel is komen alleen de helften in het tweede en vierde kwadrant van de genoemde cirkels in aanmerking.



Het blijkt dat de halve cirkels

$$(x - (2n + 1))^2 + y^2 = 1 , \quad y \leq 0$$

$$(x + (2n + 1))^2 + y^2 = 1 , \quad y \geq 0 ,$$

tezamen de schakelkromme vormen. Boven deze kromme is u =−1, onder deze kromme u = +1. □

Literatuur

Dictaten T.H.E.

[GDV]: Gewone differentiaalvergelijkingen (2.235)

[ML] : Maattheorie en Lebesgue-integratie (2.239)

[MLS]: Multivariabele lineaire systemen (2.220).

Boeken

[A&A] : Algebra en analyse, S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint, Wolters-Noordhoff, Groningen 1970.

[AF] : M. Athans, P.L. Falb, Optimal control, McGraw-Hill, New York, 1966.

[Be] : L.D. Berkovitz, Optimal control theory, Applied Mathematical Theory 12, Springer-Verlag, New York 1974.

[BH] : A.E. Bryson, Y.C. Ho, Applied optimal control, Ginn, Waltham 1969.

[Bo] : W.G. Boltyanskii, Mathematical methods of optimal control, Holt, Rinehart and Winston, New York 1971.

[CCP] : M. Canon, C. Cullum, E. Polak, Theory of optimal control and mathematical programming, McGraw-Hill, New York 1970.

[CL] : E.A. Coddington, N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York 1955.

[FR] : W.H. Fleming, R.W. Rishel, Deterministic and stochastic optimal control, Springer-Verlag, Berlin 1975.

[H] : M. Hestenes, Calculus of variations and optimal control theory, Wiley, New York 1966.

[HL] : H. Hermes, J.P. LaSalle, Functional analysis and time optimal control, Academic Press, New York 1969.

[KS] : H. Kwakernaak, R. Sivan, Linear optimal control systems, Wiley, New York 1972.

[LM] : E.B. Lee, L. Markus, Foundations of optimal control theory, Wiley, New York 1967.

[M] : O.L. Mangasarian, Nonlinear programming, McGraw-Hill, New York 1969.

[Na] : I.P. Natanson, Theory of functions of a real variable, Ungar, New York 1955.

[P] : B.N. Pschenitschny, Notwendige Optimalitätsbedingungen, Oldenbourg, München 1972.

[PBGM]: L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, The mathematical theory of optimal processes, Wiley, New York 1962.

[Ro] : R.T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton University Press, New Jersey 1970.

[SW] : A.P. Sage, C.C. White, Optimum systems control, Prentice-Hall 1977.

APPENDIX A. EIGENSCHAPPEN VAN HET RELATIEF INWENDIGE

In deze appendix geven we het bewijs van stelling (5.2.4).

(A1) BEWIJS van ri $C \neq \emptyset$. Zij dim C (:= dim li C) = k. Dan kunnen we k onafhankelijke vectoren $a_1,\ldots,a_k$ vinden in C. Omdat $\mathrm{po}\{a_1,\ldots,a_k\}$ en C hetzelfde lineaire opspansel hebben is het volgens eigenschap 5.2.3 voldoende te bewijzen dat $\mathrm{po}\{a_1,\ldots,a_k\}$ een niet-leeg relatief inwendige heeft. We weten dat $\mathrm{po}\{a_1,\ldots,a_k\} = A\mathbb{R}^k_+$ (zie voorbeeld 2.2.8(ii)). We kunnen A opvatten als een één-éénduidige lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^k$ op li C. Daarom beeldt A het inwendige van $\mathbb{R}^k_+$ af op het inwendige van $A\mathbb{R}^k_+$ in li C, d.w.z. op het relatieve inwendige van $A\mathbb{R}^k_+$. We zien dat

$$\mathrm{ri}\ \mathrm{po}\{a_1,\ldots,a_k\} = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \mid \lambda_i > 0\}\ . \qquad \square$$

We geven een paar fundamentele eigenschappen:

(A2) LEMMA. *Als* C *een convexe kegel in* $\mathbb{R}^n$ *is,* $a \in \bar{C}$, $b \in \mathrm{ri}\ C$, *dan geldt* $a + \lambda b \in \mathrm{ri}\ C$ *voor alle* $\lambda > 0$.

BEWIJS. We mogen aannemen dat li $C = \mathbb{R}^n$ (anders gaan we op een deelruimte over), dus ri C = int C. Zij $\lambda > 0$.
Er bestaat een $\delta > 0$ zodat $b + \delta\mathbb{B} \subseteq C$.
Omdat $a \in \bar{C}$ geldt $a \in C + \frac{1}{2}\delta\lambda\mathbb{B}$. Dus:
$a + \lambda b + \frac{1}{2}\lambda\delta\mathbb{B} \subseteq C + \lambda b + \delta\lambda\mathbb{B} =$
$= C + \lambda(b + \delta\mathbb{B}) \subseteq C + \lambda C = C$, zodat
$a + \lambda b \in \mathrm{int}\ C$. $\square$

(A3) LEMMA. *Als* C *een convexe kegel is dan is* $a \in \mathrm{ri}\ C$ *dan en slechts dan als er voor elke* $x \in C$ *een getal* $\lambda > 0$ *bestaat zo dat* $a - \lambda x \in C$.

BEWIJS. Weer kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat li $C = \mathbb{R}^n$, zodat int C = ri $C \neq \emptyset$.
"slechts dan": Als $a \in \mathrm{int}\ C$, dan is er een omgeving van a bevat in C. Voor kleine $\lambda > 0$ ligt $a - \lambda x$ in die omgeving.
"dan": Kies $x \in \mathrm{int}\ C \subseteq C$. Op grond van het gegeven bestaat er een $\lambda > 0$ zodat $b := a - \lambda x \in C$. Maar dan is $a = b + \lambda x \in \mathrm{ri}\ C$ vanwege lemma A2. $\square$

We gebruiken bovenstaande lemma's om de andere eigenschappen van stelling (5.2.4) af te leiden.

(A4) BEWIJS van (ii) $\overline{\text{ri } C} = \bar{C}$, (iii) ri $\bar{C} = \bar{C}$.
(ii) Het is duidelijk, dat $\overline{\text{ri } C} \subseteq \bar{C}$. Zij nu $a \in \bar{C}$. We moeten bewijzen $a \in \overline{\text{ri } C}$. Kies een willekeurige $b \in$ ri C (**dit kan, want ri C $\neq \emptyset$). Dan is** $a + \lambda b \in$ ri C voor alle $\lambda > 0$ (lemma (A2). Dus $a \in \overline{\text{ri } C}$ (want $a + \lambda b \to a$ $(\lambda \downarrow 0)$).
(iii) Daar li $\bar{C}$ = li C volgt uit eigenschap (5.2.3) dat ri $\bar{C} \supseteq$ ri C. Zij nu $a \in$ ri $\bar{C}$. Kies $b \in$ ri C. Dan is er een $\lambda > 0$ zodat $a - \lambda b \in \bar{C}$ (lemma (A3) toegepast op $\bar{C}$); maar dan is $a = (a - \lambda b) + \lambda b \in$ ri C volgens lemma (A2). □

(A5) BEWIJS van (iv) ri AC = A ri C.
Eerst merken we op dat $A\bar{C} \subseteq \overline{AC}$. Zij immers $x \in \bar{C}$. Er bestaat dan een rij $x_n \in C$ met $x_n \to x$. Maar dan is $Ax_n \in AC$ en $Ax_n \to Ax$, dus $Ax \in \overline{AC}$. We hebben nu de volgende inclusieketen:

$$A \text{ ri } C \subseteq AC \subseteq A\bar{C} = A\,\overline{\text{ri } C} \subseteq \overline{A \text{ ri } C}\ .$$

Wanneer we overal de afsluiting nemen, dan vinden we links en rechts hetzelfde. We concluderen $\overline{A \text{ ri } C} = \overline{AC}$. Hieruit leiden we af:

$$\text{ri } AC = \text{ri } \overline{AC} = \text{ri } \overline{A \text{ ri } C} = \text{ri } (A \text{ ri } C) \subseteq A \text{ ri } C\ .$$

Om het omgekeerde te bewijzen nemen we aan dat $a \in$ A ri C. We moeten dan laten zien dat $a \in$ ri AC. Daartoe passen we lemma (A3) toe op AC.
Zij $x \in AC$, zeg $x = Ay$, met $y \in C$ en zij $a = Ab$ met $b \in$ ri C (we hadden immers aangenomen dat $a \in$ A ri C). Vanwege lemma (A3) is er een $\lambda > 0$ met $b - \lambda y \in C$. Maar dan is ook $a - \lambda x = Ab - \lambda Ay \in AC$. □

Het bewijs van 1.3.3(v) ri$(C \times D)$ = ri C $\times$ ri D volgt gemakkelijk uit li$(C \times D)$ = li C $\times$ li D en lemma (A3).
(vi) ri$(C \times D)$ = ri C + ri D volgt tenslotte uit (iv) en (v) als we $A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiëren door

$$A(x,y) = x + y\ .$$

We geven enkele eigenschappen, die we zullen gebruiken in appendix C.

(A6) STELLING. *Als* C *en* D *convexe kegels zijn en* $\mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D \neq \emptyset$ *dan geldt*

(i) $\overline{C \cap D} = \bar{C} \cap \bar{D}$

(ii) $\mathrm{ri}(C \cap D) = \mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D$.

BEWIJS. Het is duidelijk, dat $\overline{C \cap D} \subseteq \bar{C} \cap \bar{D}$ (ga dit na). We kiezen een vast element $a \in (\mathrm{ri}\, C) \cap (\mathrm{ri}\, D)$. Als $x \in \bar{C} \cap \bar{D}$, dan is voor $\lambda > 0$, $x + \lambda a \in (\mathrm{ri}\, C) \cap (\mathrm{ri}\, D)$ (lemma (A2) toegepast op C én D). Als $\lambda \downarrow 0$ dan geldt $x + \lambda a \to x$, zodat $x \in \overline{(\mathrm{ri}\, C) \cap (\mathrm{ri}\, D)}$. Dus

(A7) $\bar{C} \cap \bar{D} \subseteq \overline{(\mathrm{ri}\, C) \cap (\mathrm{ri}\, D)} \subseteq \overline{C \cap D}$

zodat (i) bewezen is. Uit (A7) volgt dan ook, dat

$$\mathrm{ri}(C \cap D) = \mathrm{ri}\,\overline{(C \cap D)} = \mathrm{ri}\,\overline{(\mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D)} = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D) \subseteq$$
$$\subseteq \mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D\ .$$

Het omgekeerde bewijzen we weer met lemma (A3). Zij $x \in \mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D$. Dan geldt

$$\forall_{y \in C}\ \exists_{\lambda > 0}\ (x - \lambda y \in C) \text{ en } (\forall_{y \in D}\ \exists_{\mu > 0}\ x - \mu y \in D)\ .$$

Zij $y \in C \cap D$ en $\nu := \min(\lambda, \mu)$. Dan is

$$x - \nu y = (x - \lambda y) + (\lambda - \nu) y \in C\ .$$

Evenzo $x - \nu y \in D$. □

Aan de hand van voorbeelden kan man zien, dat het gestelde in (A6) niet geldt als $\mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D = \emptyset$.

(A8) LEMMA. *Als* C *een convexe kegel is, dan geldt* $C = \mathbb{R}^n$ *dan en slechts dan als* $C^0 = \{0\}$.

BEWIJS. Als $C = \mathbb{R}^n$ dan is $C^0 = (\mathbb{R}^n)^0 = \{0\}$ (2.3.3(i)). Als $C^0 = \{0\}$, dan is (zie (2.3.6): $\bar{C} = C^{00} = \{0\}^0 = \mathbb{R}^n$ en dus

$$C \supseteq \mathrm{ri}\, C = \mathrm{ri}\, \bar{C} = \mathrm{ri}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n\ .$$ □

(A9) LEMMA. *Twee convexe kegels* C *en* D *zijn gesepareerd dan en slechts dan als* $C - D \neq \mathbb{R}^n$.

BEWIJS. $C - D \neq \mathbb{R}^n \Leftrightarrow (C - D)^0 \neq \{0\} \Leftrightarrow C^0 \cap (-D)^0 \neq \{0\}$ waarbij we A8 en (2.3.9) hebben gebruikt. De laatste bewering is equivalent met: Er bestaat een $\psi \neq 0$ zo dat $\psi \in C^0$ en $-\psi \in D^0$ en dit is equivalent met het gesepareerd zijn van C en D. □

(A10) LEMMA. *Een convexe kegel* C *is een deelruimte dan en slechts dan als* $0 \in \text{ri } C$.

BEWIJS. Als C een deelruimte is, dan geldt uiteraard $0 \in \text{ri } C$. Neem nu aan dat $0 \in \text{ri } C$. Als $x \in C$, dan bestaat er volgens lemma (A3) een $\lambda > 0$, zo dat $-\lambda x \in C$ en dus $-x \in C$. Hieruit volgt dat C een deelruimte is. □

(A11) STELLING *(Separatiestelling). Twee convexe kegels zijn niet-gesepareerd dan en slechts dan als*

(i) $\text{ri } C \cap \text{ri } D \neq \emptyset$

(ii) $\text{li } C + \text{li } D = \text{li}(C \cup D) = \mathbb{R}^n$.

BEWIJS. Als $\text{li } C + \text{li } D =: L \neq \mathbb{R}^n$, dan is $C - D \neq \mathbb{R}^n$, want $C - D \subseteq L$. Als $\text{ri } C \cap \text{ri } D = \emptyset$, dan is $0 \notin \text{ri}(C - D) = \text{ri } C - \text{ri } D$ en dus $C - D \neq \mathbb{R}^n$. Veronderstel nu, dat aan (i) en (ii) is voldaan. Dan is $0 \in \text{ri}(C - D)$ en $C - D$ dus een deelruimte. Maar dan moet $\text{li } C \subseteq C - D$ en $\text{li } D \subseteq C - D$ en dus $\mathbb{R}^n = \text{li } C + \text{li } D \subseteq C - D$, d.w.z. $C - D = \mathbb{R}^n$. □

(A12) OPMERKING. De voorwaarde $\text{li } C + \text{li } D = \mathbb{R}^n$ kunnen we ook formuleren als C en D zijn niet samen bevat in een echte deelruimte van $\mathbb{R}^n$. □

APPENDIX B. BEWIJS VAN STELLING (5.3.4).

(B1) LEMMA. *Zij* a int S, *waar* $S \subseteq \mathbb{R}^n$. *Dan is* $C := \mathbb{R}^n$ *een afgeleide kegel van* S *in* a.

BEWIJS. Als $p_1,\ldots,p_k \in \text{ri } C = C$, dan geldt voor kleine $\tau \geq 0$ dat $\xi(\tau) := a + \Sigma\tau_i p_i \in S$, zodat ξ correspondeert met $p_1,\ldots,p_k$. □

(B2) LEMMA. *Zij* $S = \{x \mid g(x) \leq 0\}$, *waar* $g \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *en zij* $g(a) = 0$, $\nabla g(a) \neq 0$. *Dan is*

$$C := \{p \mid \nabla g(a)p \leq 0\}$$

een afgeleide kegel van S *in* a.

BEWIJS. Zij $p_1,\ldots,p_k \in \text{ri } C = \text{int } C$, d.w.z. $\nabla g(a)p_i < 0$ $(i = 1,\ldots,k)$. Voor $\tau \in \mathbb{R}^k_+$, geldt dan

$$\sum_{i=1}^{k} \nabla g(a)p_i\tau_i \leq -\varepsilon \sum_{i=1}^{k} \tau_i$$

waar

$$-\varepsilon := \max\{\nabla g(a)p_i \mid i = 1,\ldots,k\} < 0 .$$

Voor de functie ξ gedefinieerd door $\xi(\tau) := a + \Sigma\tau_i p_i$ geldt dus

$$g(\xi(\tau)) = g(a) + \nabla g(a)(\xi(\tau) - a) + o(\xi(\tau) - a) =$$

$$= \Sigma\nabla g(a)p_i\tau_i + o(\tau) \leq -\varepsilon\Sigma\tau_i + o(\tau) \leq 0$$

voor kleine $\tau \geq 0$. Dus $\xi(\tau) \in S$ voor kleine $\tau \geq 0$, zodat ξ correspondeert met $p_1,\ldots,p_k$. □

(B3) LEMMA. *Zij* $S := \{x \mid r(x) = 0\}$, *waar* $r \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *en zij* $r(a) = 0$, $\nabla r(a) \neq 0$. *Dan is*

$$C := \{p \mid \nabla r(a)p = 0\}$$

een afgeleide kegel van S *in* a.

BEWIJS. We veronderstellen a = 0. In het bewijs van (2.1.5)(iii) hebben we gezien dat er een functie φ bestaat die C^1 is in een omgeving van a = 0 en die eigenschappen

$$\varphi(0) = 0, \; r(p + \varphi(p)c) = 0$$

heeft. Verder geldt voor deze functie

$$\nabla\varphi(0)p = 0 \quad (p \in C) .$$

Zij nu $p_1,\dots,p_k \in \text{ri } C = C$ en definieer

$$\xi(\tau) := \sum_{i=1}^{k} \tau_i p_i + \varphi(\sum_{i=1}^{k} \tau_i p_i)c$$

voor voldoende kleine $\tau \in \mathbb{R}_+^k$. Dan is $r(\xi(\tau)) = 0$ en dus $\xi(\tau) \in S$. Daar verder $\sum_{i=1}^{k} \tau_i p_i \in C$, geldt

$$\varphi(\sum_{i=1}^{k} \tau_i p_i) = o(\tau)$$

en dus $\xi(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \tau_i p_i + o(\tau)$, zodat ξ correspondeert met $p_1,\dots,p_k$. □

APPENDIX C. BEWIJS VAN LEMMA (5.3.5)

We hebben enkele hulpresultaten nodig

(C1) LEMMA. *Zij* C *een convexe kegel en* $x_1,\dots,x_k \in \mathrm{ri}\ C$. *Dan bestaan er vectoren* $y_1,\dots,y_m$ *in* ri C *zo dat*

(i) $\quad C \subseteq \mathrm{li}\{y_1,\dots,y_m\}$,

(ii) $\quad x_1,\dots,x_k \in \mathrm{ri\ po}\{y_1,\dots,y_m\}$.

De uitspraak (ii) kan men ook als volgt formuleren (zie voorbeeld 5.2.5: *Er bestaat een matrix* M *met (strict) positieve elementen zo dat* X = YM, *waar* $X := [x_1,\dots,x_k]$, $Y := [y_1,\dots,y_m]$.

BEWIJS. Kies $x_{k+1},\dots,x_m$ in ri C zo dat

$$\mathrm{li}\{x_1,\dots,x_m\} = \mathrm{li}\ C (= \mathrm{li\ ri}\ C) .$$

Zij

$$b := (x_1 + \dots + x_m)/m$$

$$y_i := x_i + \varepsilon(x_i - b), \quad (i = 1,\dots,m) .$$

Als $\varepsilon > 0$ klein genoeg is, dan geldt $y_i \in \mathrm{ri}\ C$. Immers in li C is ri C een open verzameling en y_i ligt dicht bij x_i. Verder geldt $b = (y_1 + \dots + y_m)/m$. Dus:

$$x_i = (1+\varepsilon)^{-1}(y_i + \varepsilon b) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} y_j ,$$

waar

$$\lambda_{ii} := (1+\varepsilon)^{-1}(1 + \varepsilon/m) > 0 ,$$

$$\lambda_{ij} := (1+\varepsilon)^{-1} m^{-1} > 0, \quad (i \neq j) .$$

Dus $x_i \in \mathrm{ri\ po}\{y_1,\dots,y_m\}$ voor $i = 1,\dots,k$. Bewering (i) volgt uit het feit, dat $\mathrm{li}\{y_1,\dots,y_m\} = \mathrm{li}\{x_1,\dots,x_m\}$. □

(C2) LEMMA. *Als* $f \in C^1(T_{1+} \to \mathbb{R}^m)$, *waar* T_1 *een omgeving is van* 0, *dan bestaat er een voortzetting* $F \in C^1(T \to \mathbb{R}^m)$ *van* f *(*T *is ook een omgeving van* 0*)*.

BEWIJS. Zij $T := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (|x_1|,\ldots,|x_n|) \in T_1\}$. We zetten f stapsgewijs voort:

$$S_k := \{x \in T \mid x_i \geq 0 \text{ voor } i = k+1,\ldots,n\} .$$

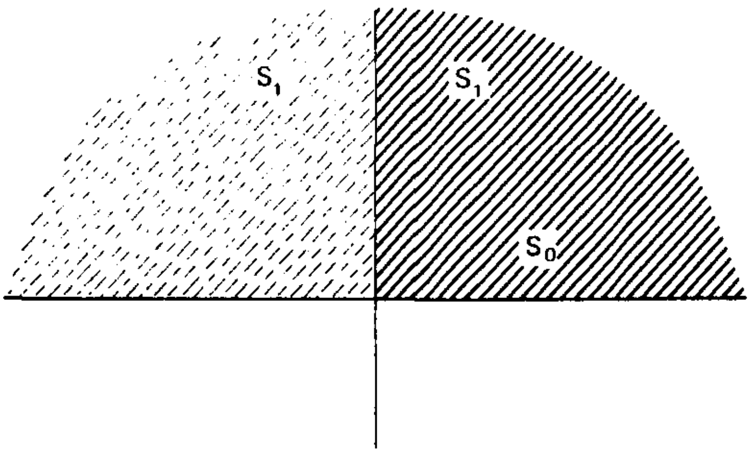
Dan geldt $T_1 \cap \mathbb{R}^k_+ = T \cap \mathbb{R}^k_+ = S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n = T$. We definiëren $f_0\colon S_0 \to \mathbb{R}^m$ door $f_0 := f$. Als $f_k \in C^1(S_k \to \mathbb{R}^m)$ gedefinieerd is, definiëren we $f_{k+1}\colon S_{k+1} \to \mathbb{R}^m$ door

$$f_{k+1}(x) := f_k(x) \quad \text{voor } x \in S_k ,$$

$$f_{k+1}(x) = 4f(x_1,\ldots,x_k, -\tfrac{1}{2}x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n) - $$
$$- 3f(x_1,\ldots,x_k, -x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n) \quad \text{voor } x \in S_{k+1}\backslash S_k .$$

Het is niet moeilijk in te zien dat $f_{k+1} \in C^1(S_{k+1} \to \mathbb{R}^m)$, zodat $F := f_n$ de gewenste voortzetting is.

We laten de continue differentieerbaarheid zien in het geval dat $n = 2$, $m = 1$.



Zij in het eerste kwadrant S_0, $f(x,y)$ continu-differentieerbaar. In S_1 (het bovenhalfvlak) definiëren we

$$f_1(x,y) = f(x,y) \quad (x \geq 0,\ y \geq 0) ,$$

$$f_1(x,y) = 4f(-\tfrac{1}{2}x,y) - 3f(-x,y) \quad (x < 0,\ y \geq 0) .$$

Er geldt:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\leq 0}} f_1(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\geq 0}} \{4f(\tfrac{1}{2}x,y) - 3f(x,y)\} =$$

$$= 4f(0,y_0) - 3f(0,y_0) = f(0,y_0) .$$

Dus f_1 is continu.
Verder geldt voor $x < 0$, dat

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = -2\,\frac{\partial f}{\partial x}(-\tfrac{1}{2}x,y) + 3\,\frac{\partial f}{\partial x}(-x,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$$

$$\text{voor } (x,y) \to (0,y_0),\ x < 0\ .$$

Dus ook $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ is continu.
Dat $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ continu is is ook gemakkelijk in te zien.
Derhalve is f_1 continu differentieerbaar op S_1.
f_2 wordt gedefinieerd door:

$$f_2(x,y) = f_1(x,y) \qquad (y \geq 0)$$

$$f_2(x,y) = 4f_1(x,-\tfrac{1}{2}y) - 3f_1(x,-y) \qquad (y < 0)\ . \qquad \square$$

(C3) BEWIJS VAN LEMMA (5.3.5). We mogen aannemen dat $a = 0$. Stel dat C_1 en C_2 niet gesepareerd zijn. Dan is op grond van de stellingen (A6)(ii) en (A11), $\text{ri } C_1 \cap \text{ri } C_2 = \text{ri}(C_1 \cap C_2) \neq \emptyset$ en $\text{li}(C_1 \cup C_2) = \mathbb{R}^n$. Laat $x_1,\ldots,x_k \in \text{ri}(C_1 \cap C_2)$. Dan moeten we een functie $\xi \in C^1(T_+ \to S_1 \cap S_2)$ construeren waarvoor geldt

$$\xi(\rho) = \sum_{i=1}^{k} x_i\rho_i + o(\rho) \qquad (\rho \downarrow 0)\ .$$

Met behulp van de matrix $X := [x_1,\ldots,x_k]$ kunnen we in plaats hiervan schrijven

$$\xi(\rho) = X\rho + o(\rho) \qquad (\rho \downarrow 0)\ .$$

Hier volgt de constructie van ξ. Omdat $x_1,\ldots,x_k \in \text{ri } C_1$ bestaan er volgens lemma (C1) vectoren $y_1,\ldots,y_m \in \text{ri } C_1$ met de eigenschappen (i) en (ii) van lemma (C1). Als we $Y := [y_1,\ldots,y_m]$ invoeren dan kunnen we de eigenschappen als volgt formuleren

$$\text{rang } Y = \dim C_1$$

(C4) $\qquad X = YM$

waarbij M een matrix is met positieve elementen. Op dezelfde manier vinden we vectoren $z_1,\ldots,z_\ell$ met

$$\text{rang } Z = \dim C_2$$

(C5) $\qquad X = ZN$

waar $Z := \{z_1,\ldots,z_\ell\}$ en N een matrix met positieve elementen is. Omdat $li(C_1 \cup C_2) = \mathbb{R}^n$ volgt dat

$$\mathrm{rang}[Y,Z] = n .$$

Immers, anders zouden C_1 en C_2 in de ruimte opgespannen door de kolommen van $[Y,Z]$ liggen. We zien dat de matrix $[Y,Z]$ n onafhankelijke kolommen bevat. Door de vectoren $y_1,\ldots,y_m$ en $z_1,\ldots,z_\ell$ eventueel **opnieuw te nummeren,** kunnen we bereiken dat $Y = [Y_1,Y_2]$, $Z = [Z_1,Z_2]$, waar Y_1 en Z_1 precies uit de n onafhankelijke kolommen bestaan. Dit betekent, dat $[Y_1,Z_1]$ een vierkante niet-singuliere matrix is. We splitsen de matricws M en N overeenkomstig:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} .$$

Uit (C4) en (C5) volgt $YM = ZN$, dus

(C6) $$Y_1M_1 - Z_1N_1 = Z_2N_2 - Y_2M_2 .$$

Omdat $y_1,\ldots,y_m \in ri\ C_1$, bestaat er een functie $\eta \in C^1(T_{1+} \to S_1)$ met

(C7) $$\eta(\tau) = Y\tau + o(\tau) \quad (\tau \downarrow 0) .$$

Evenzo bestaat er een functie $\zeta \in C^1(T_{2+} \to S_2)$ met

(C8) $$\zeta(\sigma) = Z\sigma + o(\sigma) \quad (\sigma \downarrow 0) .$$

Volgens lemma (C2) kunnen we deze functies voortzetten, totdat ze gedefinieerd zijn in een omgeving van de oorsprong. Formules (C7) en (C8) blijven dan geldig. (In het algemeen hoeven echter $\eta(\tau)$ en $\zeta(\sigma)$ niet meer in S_1 resp. S_2 te liggen!) We splitsen de vectoren τ,σ overeenkomstig de partitie van Y en Z:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

zodat $Y\tau = Y_1\tau_1 + Y_2\tau_2$, $Z\sigma = Z_1\sigma_1 + Z_2\sigma_2$.

We willen een functie ξ construeren die afbeeldt in $S_1 \cap S_2$. We kunnen dit voor elkaar krijgen, door bij elke $\rho \geq 0$ een $\tau \geq 0$ en een $\sigma \geq 0$ te vinden zodat $\eta(\tau) = \zeta(\sigma)$ en door dan $\xi(\rho) := \eta(\tau)$ te definiëren. In eerste instantie letten we niet op de ongelijkheden $\tau \geq 0$, $\sigma \geq 0$. We proberen slechts oplossingen van de vergelijking $\eta(\tau) = \xi(\sigma)$ te vinden.

Beschouw de vergelijking

$$f(\tau_1,\sigma_1,\tau_2,\sigma_2) := \eta(\tau) - \zeta(\sigma) = 0 .$$

Uit (C7) en (C8) volgt:

(C9) $$f(\tau_1,\sigma_1,\tau_2,\sigma_2) = Y_1\tau_1 - Z_1\sigma_1 + Y_2\tau_2 - Z_2\sigma_2 + o(\tau,\sigma) \quad ((\tau,\sigma) \to 0) .$$

Omdat $[Y_1,-Z_1]$ inverteerbaar is, bestaat er op grond van de impliciete functiestelling een C^1-functie $(\tau_2,\sigma_2) \mapsto (\tau_1,\sigma_1) = (\varphi(\tau_2,\sigma_2),\psi(\tau_2,\sigma_2))$ in de omgeving van $(\tau_2,\sigma_2) = (0,0)$ zodanig dat

(C10) $$f(\varphi(\tau_2,\sigma_2),\psi(\tau_2,\sigma_2),\tau_2,\sigma_2) = 0$$

en $\varphi(0,0) = 0$, $\psi(0,0) = 0$. We berekenen de afgeleiden van φ en ψ. Zij

(C11) $$\varphi(\tau_2,\sigma_2) = A\tau_2 + B\sigma_2 + o(\tau_2,\sigma_2)$$

(C12) $$\psi(\tau_2,\sigma_2) = C\tau_2 + D\sigma_2 + o(\tau_2,\sigma_2) .$$

Uit (C9), (C10), (C11) en (C12) volgt:

$$0 = Y_1\varphi(\tau_2,\sigma_2) - Z_1\psi(\tau_2,\sigma_2) + Y_2\tau_2 - Z_2\sigma_2 + o(\tau,\sigma) =$$

$$= (Y_1A - Z_1C + Y_2)\tau_2 + (Y_1B - Z_1D - Z_2)\sigma_2 + o(\tau_2,\sigma_2) .$$

Dus

(C13) $$Y_1A - Z_1C + Y_2 = 0$$

(C14) $$Y_1B - Z_1D - Z_1 = 0 .$$

(Hieruit kunnen A, B, C en D eenduidig worden bepaald, omdat $\mathrm{rang}[Y_1,-Z_1] = n$. We zullen dit echter niet doen.)

We vermenigvuldigen (C13) van rechts met M_2 en (C14) met N_2 en tellen op:

$$Y_1(AM_2 + BN_2) - Z_1(CM_2 + DN_2) = Z_2N_2 - Y_2M_2 .$$

Vergelijken we met (C6), dan kunnen we uit de niet-singulariteit van $[Y_1,-Z_1]$ besluiten, dat

(C15) $$AM_2 + BN_2 = M_1$$

(C16) $$CM_2 + DN_2 = N_1 .$$

We definiëren nu

$$\hat{\xi}(\tau_2,\sigma_2) := \eta(\varphi(\tau_2,\sigma_2),\tau_2) = \zeta(\psi(\tau_2,\sigma_2),\tau_2) .$$

Verder definiëren we

$$\xi(\rho) \ := \hat{\xi}(M_2\rho, N_2\rho) \qquad \text{voor } \rho \in T \subseteq \mathbb{R}^k \ .$$

Dan is ξ de gevraagde afbeelding. In de eerste plaats geldt vanwege (C15)

$$\xi(\rho) = \eta(\varphi(M_2\rho, N_2\rho), M_2\rho) = (Y_1AM_2 + Y_1BN_2 + Y_2M_2)\rho +$$

$$+ o(\rho) = (Y_1M_1 + Y_2M_2)\rho = o(\rho) = X\rho + o(\rho) \ .$$

Omdat M en N positieve elementen hebben, geldt

$$\xi(\rho) = \eta((AM_2 + BN_2)\rho + o(\rho), \ M_2\rho) = \eta(M_1\rho + o(\rho), \ M_2\rho) \in S_1 \ ,$$

voor kleine $\rho \geq 0$, want $M_1\rho + o(\rho) \geq 0$ voor voldoend kleine $\rho \geq 0$ en $M_2\rho \geq 0$ geldt voor alle $\rho \geq 0$. Op analoge manier bewijst men $\xi(\rho) \in S_2$ voor kleine $\rho \geq 0$. □

APPENDIX D. BEWIJS VAN (6.1.2) EN (6.1.3).

Lemma (6.1.2) kan worden beschouwd als bijzonder geval van (6.1.3). Daarom beperken we ons tot het bewijs van (6.1.3). Een van de moeilijkheden waar we mee te maken hebben is de eis dat formule (6.1.10), die we willen gebruiken, alleen geldig is voor gecombineerde storingen met onderling verschillende storingstijdstippen. Het volgende hulpresultaat toont aan hoe we onder deze moeilijkheid uit kunnen komen.

(D3) LEMMA. *Laat* $p_i \in \mathrm{ri}\, P$ $(i = 1,\dots,k)$. *Dan bestaan er getallen* $\alpha_{ij} \geq 0$ *en storingen* $\pi_j = (t_j, v_j)$ *met* $t_j \in (0,T)$, *onderling verschillende continuiteitspunten van* $\underline{u}$, *en* $v_j \in U$, *met de eigenschap*

$$p_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} p_{\pi_j} \qquad (i = 1,\dots,k) . \tag{D4}$$

BEWIJS. Volgens lemma (C1) bestaan er vectoren $q_1,\dots,q_\ell \in \mathrm{ri}\, P$ met de eigenschappen

$$\mathrm{li}(q_1,\dots,q_\ell) = \mathrm{li}\, P,$$

$$p_1,\dots,p_k \in \mathrm{ri}\ \ \mathrm{po}\{q_1,\dots,q_\ell\} .$$

We kunnen schrijven:

$$q_i = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij}\, p_{\pi_{ij}} \qquad (i = 1,\dots,\ell) ,$$

waar $\pi_{ij} = (t_{ij}, v_{ij})$ en $\mu_{ij} \geq 0$. Wanneer nu niet alle t_{ij}'s verschillend zijn, dan kunnen we enkele van de t_{ij}'s veranderen, zo dat ze wel verschillend worden. Daardoor zullen de corresponderende $p_{\pi_{ij}}$ ook een beetje veranderen. Als we de zo ontstane storingen met $\bar{\pi}_{ij} = (\bar{t}_{ij}, v_{ij})$ aangeven, en

$$\bar{q}_i := \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij}\, p_{\bar{\pi}_{ij}}$$

definiëren, dan zal, als de getallen $|\bar{t}_{ij} - t_{ij}|$ maar klein genoeg zijn, nog steeds

$$\mathrm{li}(\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_\ell) = \mathrm{li}\ P\ ,$$

$$p_1,\ldots,p_k \in \mathrm{ri}\ \mathrm{po}\{\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_\ell\}\ ,$$

gelden. Dan bestaan er dus positieve getallen ν_{si}, zo dat

$$p_s = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_{si}\bar{q}_i = \sum_{i=1}^{\ell}\ \sum_{j=1}^{r} \nu_{si}\mu_{ij}p_{\bar{\pi}_{ij}}\ .$$

Dit is een som van de gedaante (D4), geschreven als een dubbelsom. □

Laat nu $s_1,\ldots,s_k$ elementen zijn van $\mathrm{ri}\ D = \mathrm{ri}\ P + \Phi(T)\mathrm{ri}\ C_0$ (zie stelling (5.2.4)), zeg

$$s_i = p_i + \Phi(T)q_i$$

met $p_i \in \mathrm{ri}\ P$, $q_i \in \mathrm{ri}\ C_0$ $(i = 1,\ldots,k)$. Dan bestaat er voor een zekere nulomgeving $T \subseteq \mathbb{R}^k$ een functie $\eta \in C^1(T_+^k \to X_0)$ die voldoet aan

$$\eta(\tau) = \bar{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} q_i\tau_i + o(\tau) \qquad (\tau \to 0,\ \tau \in \mathbb{R}_+^k)\ .$$

Verder bestaan er, volgens lemma D3, getallen $\alpha_{ij} \geq 0$, en storingen $\pi_j = (t_j,v_j)$ met $t_j \in (0,T)$ onderling verschillende continuïteitspunten van $\bar{u}$ en $v_j \in U$, zo dat

$$p_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}p_{\pi_{ij}} \qquad (i = 1,\ldots,k)\ .$$

Nu passen we de gecombineerde storing

$$\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_r)$$

toe en we kiezen bij gegeven τ als storingsparameter

$$\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)$$

waar

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij}\tau_i \ .$$

Een kleine generalisatie van (6.1.10) luidt als volgt:

$$x_\pi(T,\eta(\tau),\varepsilon) = \bar{\xi}(T) + \sum_{i=1}^{k} \Phi(T)q_i\tau_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j p_{\pi_j} + o(\varepsilon) + o(\tau) =$$

$$= \bar{\xi}(T) + \sum_{i=1}^{k} \Phi(T)q_i\tau_i + \sum_{i=1}^{k} \tau_i p_i + o(\tau) =$$

$$= \bar{\xi}(T) + \sum r_i\tau_i + o(\tau) \ .$$

Dit toont aan dat de functie

$$\zeta(\tau) := x_\pi(T,\eta(\tau),\varepsilon)$$

correspondeert met $r_1,\dots,r_k$.