

Syllabus en vraagstukken bij het college

Asymptotiek 1

(2A410)



4 002414 000009

Prijs f.3,50

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

Syllabus en vraagstukken bij het college

ASYMPTOTIEK 1

naar het college van

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

samengesteld door

Ir. J.J.A.M. Brands

Wintertrimester 1986/1987

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit der Wiskunde en Informatica

Syllabus en vraagstukken bij het college

ASYMPTOTIEK 1

(2A410)

Wintersemester 1986/1987

<u>Inhoudsopgave</u>	<u>blz.</u>
HOOFDSTUK 1. INLEIDING	1
HOOFDSTUK 2. ALGEMENE THEORIE	3
2.1. De O , o en \sim symbolen	3
2.2. Asymptotische reeksen	6
HOOFDSTUK 3. IMPLICIETE FUNCTIES	10
HOOFDSTUK 4. DE METHODE VAN LAPLACE VOOR INTEGRALLEN	12
4.1. Inleiding	12
4.2. Een algemeen geval; maximum in inwendig punt	18
4.3. Maximum in randpunt	23
HOOFDSTUK 5. SOMMATIE	24
5.1. Inleiding	24
5.2. Een elementaire methode	25
5.3. De somformule van Euler-Maclaurin	26
5.4. Het bewijs van de somformule van Euler-Maclaurin	31
HOOFDSTUK 6. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN	33
6.1. Inleiding	33
6.2. Stabiele en instabiele buizen	33
6.3. De bepaling van een volledige asymptotische reeks	38
6.4. Toepassing op lineaire niet-oscillerende differentiaal- vergelijkingen van de tweede orde	42
LITERATUUR	45
VRAAGSTUKKEN	46

HOOFDSTUK 1. INLEIDING

Wat is asymptotiek? Een precieze definitie is niet te geven. Een wat ruw omschrijving zou kunnen zijn: Asymptotiek is de kunst om ingewikkelde formules te vervangen door eenvoudigere formules, of, om eenvoudigere en kortere berekeningsmethoden te verschaffen in het geval dat de betreffende grootheid een zeer groot aantal bewerkingen vergt. We zullen van beide soorten problemen een voorbeeld geven.

Stel dat een functie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven is door

$$f(t) := \int_2^{\infty} e^{-tx} (\log x)^{-1} dx \quad (t > 0) .$$

Aan deze integraalvoorstelling voor f kan men niet zien hoe $f(t)$ zich gedraagt voor kleine positieve t . We zullen later zien dat $f(t) \sim -(t \log t)^{-1}$ ($t \downarrow 0$), d.w.z. dat $f(t)$ voor kleine positieve t goed benaderd wordt door $-(t \log t)^{-1}$ met een relatieve fout die naar nul gaat als $t \downarrow 0$.

Voor de berekening van $n! = 1, 2, \dots, n$ zijn vele bewerkingen nodig als n groot is. We zullen later de bekende formule van Stirling afleiden:

$$n! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \quad (n \rightarrow \infty) .$$

In allerlei toepassingen komen problemen voor waarvan moeilijk of zelfs onmogelijk exacte oplossingen te geven zijn; maar zelfs als dat wel lukt, is de (oplossings-)formule dikwijls zo ingewikkeld dat men er nauwelijks iets mee beginnen kan. Enkele voorbeelden zullen het bovenstaande toelichten.

Bij het onderzoek van het spanning-rek gedrag van sommige polymeren speelt de volgende functie $M: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ een belangrijke rol.

$$M(q) := \max\{y(t; q) \mid t \geq 0\} \quad (q > 0)$$

waarin $\forall_{t \geq 0} y(t; q)$ de oplossing is van het beginwaardeprobleem

$$\ddot{y} + q\dot{y} - 0.5(\dot{y})^2 + 0.01e^y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 2/q .$$

Dit probleem kan vermoedelijk niet exact opgelost worden. Het is echter mogelijk om te bewijzen dat $M(q) \sim 2 \log q$ ($q \rightarrow \infty$). (In feite is zelfs aangetoond: $M(q) = 2 \log q + C + R$ met $0 < R < 1/q$). Experimenteel had men het logaritmische karakter van $M(q)$ al lang opgemerkt maar niet begrepen.

Het volgende speciale probleem gaat over grenslagen. Men wil het gedrag weten van $L(\alpha) := \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ voor grote α , waarbij y oplossing is van het beginwaardeprobleem $yy'' + 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\alpha$. Ook hier is het onmogelijk om y en L exact te bepalen. Met asymptotische methoden is het mogelijk om te bewijzen dat

$$L = e^{-(\alpha^2+1)/2} (1 + R) \quad \text{met } |R| < \alpha^{-2} \quad (\alpha \geq 7) .$$

Geen wonder dat numerieke berekeningen steeds $L = 0$ gaven voor niet al te kleine α .

Bij diffusie- en warmtegeleidingsproblemen komt men reeksen tegen waarvan de volgende reeks een typisch en eenvoudig voorbeeld is:

$$F(t) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 t} \quad (t > 0) .$$

Voor kleine t is de gegeven reeks ongeschikt om $F(t)$ te berekenen. We zullen later zien dat

$$F(t) = \frac{1}{2}(\pi/t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + R \quad \text{met } |R| < Ct^{\frac{1}{2}} .$$

We zouden nog vele andere voorbeelden kunnen geven, zowel uit het gebied van de toepassingen als uit de wiskunde zelf. We laten het hierbij.

HOOFDSTUK 2. ALGEMENE THEORIE

2.1. De O , o en \sim symbolen

Laat (R,d) een metrische ruimte zijn, V een niet-lege deelverzameling van R en $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ met $V \subset U \subset R$. Dan betekent

$$(1) \quad f(x) = O(g(x)) \quad (x \in V)$$

(uitgesproken als $f(x)$ is grote oh van $g(x)$ voor alle x in V) dat f een complexwaardige functie is met $V \subset \text{DOM } f \subset R$ met de eigenschap dat er een positieve constante A is zodanig dat $|f(x)| \leq A|g(x)|$ ($x \in V$).

Het symbool $O(g(x))$ ($x \in V$) stelt een verzameling van functies voor:

$$O(g(x)) \quad (x \in V) := \{f: W \rightarrow \mathbb{C} \mid V \subset W \subset R \wedge \exists_{A>0} \forall_{x \in V} |f(x)| \leq A|g(x)|\}.$$

Het $=$ teken in (1) is dus geen gelijkteken; het is eigenlijk een ϵ ; de relatie in (1) is niet symmetrisch.

Formule (1) betekent dus dat $f \in O(g(x))$ ($x \in V$).

Veel voorkomende ruimten R zijn \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , $\mathbb{R}^n \times \mathbb{I}\mathbb{N}$. Meestal worden $\text{DOM } g$ en $\text{DOM } f$ niet expliciet gegeven; men schrijft eenvoudig uitdrukkingen op zoals bijvoorbeeld:

$$x^2 = O(x) \quad (-50 < x < 10) .$$

Met $f := \prod_{x \in \mathbb{R}} x^2$, $g := \prod_{x \in \mathbb{R}} x$ en $V := (-50, 10)$ staat er (1). Andere voorbeelden zijn $\sin x = O(1)$ ($x \in \mathbb{R}$) en $\sin x = O(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Na het voorgaande zal de volgende uitdrukking geen moeilijkheden opleveren. Dan betekent

$$(2) \quad O(h(x)) = O(g(x)) \quad (x \in V)$$

dat $O(h(x))$ ($x \in V$) \subset $O(g(x))$ ($x \in V$).

Bijvoorbeeld, $O(x^2) = O(x)$ ($0 < x < 100$), maar niet $O(x) = O(x^2)$ ($0 < x < 100$).

Laat $a \in \bar{V}$. We schrijven

$$(3) \quad f(x) = O(g(x)) \quad (x \in V, x \rightarrow a)$$

als er een omgeving Ω van a bestaat zodanig dat

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \in \Omega \cap V \setminus \{a\}) .$$

Ook (3) definieert een verzameling van functies.

(4) OPMERKING. Meestal schrijft men $(x \rightarrow a)$ in (4) in plaats van $(x \in V, x \rightarrow a)$ als duidelijk is wat V is. Verder schrijft men $(x \rightarrow 0)$ in plaats van $(x > 0, x \rightarrow 0)$. We zullen ook (3) gebruiken met $a = \infty$; hierbij worden (met $R = \mathbb{R}$) intervallen van de gedaante $[b, \infty)$ of (b, ∞) als omgevingen van ∞ opgevat. Analoog voor $a = -\infty$.

De uitdrukking

$$(5) \quad f(x) = o(g(x)) \quad (x \in V, x \rightarrow a)$$

(uit te spreken als: $f(x)$ is kleine oh van $g(x)$ voor $x \rightarrow a$ in V) betekent dat er een omgeving W van a bestaat zó dat $\text{DOM } f \supset W \cap (V \setminus \{a\})$ en dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een omgeving Ω van a bestaat zodanig dat $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ ($x \in \Omega \cap V \setminus \{a\}$). Het rechterlid van (5) is ook weer op te vatten als een verzameling en het $=$ teken zou eigenlijk \in moeten zijn. Opmerking (4) geldt ook voor (5).

We schrijven

$$(6) \quad f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a)$$

(uit te spreken: $f(x)$ is asymptotisch equivalent met $g(x)$ voor $x \rightarrow a$) als $f(x) - g(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$).

Na het voorgaande zal de betekenis van uitdrukkingen zoals $f(x) = g(x) + o(h(x))$ ($x \rightarrow 0$), $o(o(g(x)))$ ($x \rightarrow 0$), $e^{o(1)}$ ($x \rightarrow 0$), $(o(g(x)))^2$ ($x \in V$) wel duidelijk zijn.

(7) SUBSTITUTIESTELLING. Laat $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) en $u(t) = a + o(1)$ ($t \rightarrow b$). Dan geldt dat

$$f(u(t)) = o(g(u(t))) \quad (t \rightarrow b) .$$

In vraagstuk 8 wordt gevraagd het bewijs te leveren. Analoge uitspraken gelden als o vervangen wordt door O ; ook met $a = \infty$ etc.

(8) VOORBEELD. Er geldt dat

$$\log(1+x) = x + o(x^2) \quad (x \geq 0) .$$

Immers, de functie $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$h(x) := \frac{x - \log(1+x)}{x^2} \quad (x > 0), \quad h(0) := \frac{1}{2} ,$$

is continu en $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$. Dus h is begrensd op $[0, \infty)$.

(9) VOORBEELD. We zullen aantonen dat

$$e^{o(1)} = 1 + o(1) \quad (x \rightarrow \infty) .$$

Laat $u(x) = o(1)$ ($x \rightarrow \infty$). Laat $0 < \epsilon < 1$. Dan is er een $A > 0$ zó dat $|u(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon$ ($x \geq A$). Er volgt dat

$$|e^{u(x)} - 1| = |u(x)e^{\theta u(x)}| \leq \frac{1}{2}\epsilon e^{\frac{1}{2}\epsilon} \leq \frac{1}{2}\epsilon e^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon .$$

Asymptotische uitdrukkingen kunnen uniform zijn met betrekking tot een parameter. De uitdrukking

$$(10) \quad f(x, y) = O(g(x)) \quad (x \in V_1) \text{ uniform in } y \in V_2$$

betekent: $\text{DOM } f \supset V_1 \times V_2$ en er is een $A > 0$, onafhankelijk van y , zodanig dat

$$\forall_{y \in V_2} [|f(x, y)| \leq A |g(x)| \quad (x \in V_1)] .$$

De uitdrukking

$$(11) \quad f(x, y) = O(g(x)) \quad (x \in V_1, x \rightarrow a) \text{ uniform in } y \in V_2$$

betekent dat er een omgeving Ω van a bestaat en een constante $A > 0$ zó dat

$$\forall_{y \in V_2} [|f(x, y)| \leq A |g(x)| \quad (x \in \Omega \cap V_1 \setminus \{a\})] .$$

Op analoge wijze kunnen we uniformiteit voor kleine o symbolen definiëren. We merken op dat (10) hetzelfde betekent als

$$f(x, y) = O(g(x)) \quad (x \in V_1, y \in V_2) .$$

Iets dergelijks geldt niet voor (11).

(12) VOORBEELD.

$$\frac{1 - t^x}{\log t} = o(x) \quad (x > 0) \text{ uniform in } t \in (0, 1) .$$

2.2. Asymptotische reeksen

Laat $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ een rij functies zijn (geen nulfuncties), gedefinieerd op een interval I met $0 \in \bar{I}$, met de eigenschap dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt

$$(13) \quad \varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \quad (x \rightarrow 0) .$$

Als voor een functie f geldt dat er een rij getallen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bestaat zodanig dat

$$(14) \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_0} [f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) + o(\varphi_{n+1}(x)) \quad (x \rightarrow 0)]$$

dan schrijven we

$$(15) \quad f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (x \rightarrow 0) .$$

De reeks in (15) heet een asymptotische reeks voor $f(x)$ of een asymptotische ontwikkeling voor $f(x)$.

De definitie van een asymptotische reeks voor $x \rightarrow \infty$, $x \downarrow 0$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow a$ zijn analoog.

Als (φ_n) voldoet aan (13) en f heeft een asymptotische ontwikkeling (15), dan zijn de coëfficiënten c_0, c_1, \dots eenduidig bepaald. (Waarom?)

(16) STELLING. Laat f een machtreeksontwikkeling rond 0 hebben met positieve convergentiestraal R ; zeg

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (|z| < R) .$$

Dan geldt

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (z \rightarrow 0) .$$

In vraagstuk 14 wordt gevraagd het bewijs te geven.

We zullen nu wat eigenschappen van asymptotische reeksen behandelen. Omwille van de eenvoud zullen we de stof behandelen voor asymptotische machtreeksen

van de gedaante $\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ ($x \rightarrow 0$).

Laat

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (x \rightarrow 0), \quad g(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad (x \rightarrow 0).$$

Dan geldt

$$f(x) + g(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k \quad (x \rightarrow 0)$$

$$f(x)g(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (x \rightarrow 0)$$

waarin

$$c_k := \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Als $b_0 = 0$, dan geldt

$$f \circ g(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k \quad (x \rightarrow 0)$$

waarin de coëfficiënten d_k gevonden worden door formele substitutie waarbij x in $\sum a_k x^k$ vervangen wordt door $\sum b_{\ell} x^{\ell}$.

Dit laatste resultaat kunnen we gebruiken als volgt: Veronderstel dat $a_0 \neq 0$.

We voeren in:

$$p(x) := a_0^{-1} (1 - x)^{-1} \approx a_0^{-1} (1 + x + x^2 + \dots) \quad (x \rightarrow 0)$$

en

$$h(x) := 1 - a_0^{-1} f(x) \approx - \sum_{k=1}^{\infty} a_0^{-1} a_k x^k \quad (x \rightarrow 0).$$

Dan volgt dat

$$(f(x))^{-1} = p \circ h(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k \quad (x \rightarrow 0).$$

Het bewijs van het algemene resultaat gaat als volgt. Uit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

en

$$g(x) = b_1 x + \dots + b_n x^n + O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

volgt dat

$$f(g(x)) = d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n + O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0) .$$

Immers d_k hangt voor $k > 1$ slechts af van a_1 tot en met a_k en b_1 tot en met b_k .

In het algemeen geldt niet

$$f'(x) \approx \sum_1^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (x \rightarrow 0) ,$$

wel

$$\int_0^x f(s) ds \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \quad (x \rightarrow 0)$$

(mits voor voldoende kleine x de integraal bestaat). (Waarom?)

(17) VOORBEELD.

$$f(x) := e^{-x} \sin e^x \approx \sum_0^{\infty} 0 \cdot x^{-k} \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$f'(x) = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x \not\approx \sum 0 \cdot x^{-k} \quad (x \rightarrow \infty) .$$

Het termsgewijze differentiëren van een asymptotische machtreeks is wel goed als we weten dat de afgeleide van de functie een asymptotische machtreeksontwikkeling heeft. Met andere woorden: Als $f'(x) \approx \sum b_k x^k$ ($x \rightarrow 0$) en $f(x) \approx \sum a_k x^k$ ($x \rightarrow 0$), dan $b_k = (k+1)a_{k+1}$.

Bewijs. Laat $n \in \mathbb{N}$. Beschouw

$$g(x) := f(x) - b_0 x - \frac{1}{2} b_1 x^2 - \dots - \frac{b_n}{n+1} x^{n+1} .$$

Dan volgt dat

$$g'(x) = f'(x) - b_0 - b_1 x - \dots - b_n x^n = O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0) .$$

Dus

$$g(x) - g(0) = xg'(\xi) = O(x^{n+2}) \quad (x \rightarrow 0) .$$

Er volgt

$$f(x) = b_0 x - \frac{1}{2} b_1 x^2 - \dots - \frac{b_n}{n+1} x^{n+1} - a_0 = O(x^{n+2}) \quad (x \rightarrow 0) .$$

Uit de eenduidigheid van coëfficiënten in een asymptotische reeks volgt

$$b_k = (k+1)a_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}_0) .$$

We zullen een voorbeeld behandelen.

(18) VOORBEELD. Laat $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) := \int_1^x e^{s-1} ds .$$

Door partiële integratie vinden we

$$f(x) = e^x \left[\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n} \right] + C_n + R_n(x) ,$$

waarin

$$C_n = -[1 + 1! + 2! + \dots + (n-1)!]e \quad \text{en} \quad R_n(x) = n! \int_1^x e^{s-1-n} ds .$$

We schatten R_n als volgt:

$$\begin{aligned} 0 &< \int_1^x e^{s-1-n} ds = \int_1^{\frac{1}{2}x} e^{s-1-n} ds + \int_{\frac{1}{2}x}^x e^{s-1-n} ds < \\ &e^{\frac{1}{2}x} \int_1^{\frac{1}{2}x} s^{-1-n} ds + (\frac{1}{2}x)^{-1-n} \int_{\frac{1}{2}x}^x e^s ds < n^{-1} e^{\frac{1}{2}x} + e^x (\frac{1}{2}x)^{-1-n} = \\ &= O(e^x x^{-1-n}) \quad (x \rightarrow \infty) . \end{aligned}$$

Er volgt dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$(19) \quad f(x) = e^x [x^{-1} + \dots + (n-1)!x^{-n}] + (e^x x^{-1-n}) \quad (x \rightarrow \infty) .$$

Dus

$$f(x) \approx e^x \sum_{k=0}^{\infty} k! x^{-k-1} \quad (x \rightarrow \infty) .$$

Het O -symbool in (19) is niet uniform in n . We zien dat het heel eenvoudig is om (19) af te leiden. Echter, een scherpe schatting van de verborgen constante in (19) geven, is helemaal niet eenvoudig.

HOOFDSTUK 3. IMPLICIETE FUNCTIES

We zullen enkele eenvoudige methoden behandelen om het asymptotisch gedrag van impliciet gedefinieerde functies te bepalen. Dit is van belang voor het volgende hoofdstuk.

We willen steeds het asymptotisch gedrag voor $t \rightarrow \infty$ van $x(t)$, impliciet gedefinieerd door een vergelijking

$$(20) \quad f(x, t) = 0 .$$

In veel gevallen gaat dat met iteratie. We illustreren dit met wat voorbeelden.

(21) VOORBEELD. Laat x gedefinieerd zijn door

$$(22) \quad xe^x = e^t .$$

Als $t \rightarrow \infty$ dan ook $x(t) \rightarrow \infty$. Uit (22) volgt

$$(23) \quad x = t - \log x .$$

Er volgt dat $x < t$ voor t voldoende groot. Daarmee vinden we dat $x > t - \log t$ op den duur. Dus

$$(24) \quad x = t + O(\log t) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

We hebben tenslotte een asymptotische formule en daarmee kunnen we nu een iteratieproces beginnen. We substitueren (24) in het rechterlid van (23). Dan komt er

$$x = t - \log(t + O(\log t)) = t - \log t + O(t^{-1} \log t) \quad (t \rightarrow \infty) ,$$

een scherpere asymptotische uitdrukking dan (24). Op deze manier kunnen we steeds betere asymptotische formules krijgen, zelfs een volledige asymptotische reeks. We zullen nog een keer itereren; we vinden dan (ga na!)

$$(25) \quad x = t - \log t + t^{-1} \log t + \frac{1}{2} t^{-2} \log^2 t + O(t^{-2} \log t) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

(26) VOORBEELD. De vergelijking

$$(27) \quad x^3 - 3x = t^3$$

heeft voor elke $t > 2^{1/3}$ één positieve oplossing x . We willen het gedrag van die oplossing x voor $t \rightarrow \infty$ weten. Uit $g(t) := t^3 - 3t < t^3$ ($t > 0$) en $g(t + t^{-1}) > t^3$ ($t > 0$) volgt dat $x = t + O(t^{-1})$ ($t \rightarrow \infty$). Substitutie van dit laatste resultaat in

$$(28) \quad x = (t^3 + 3t)^{1/3}$$

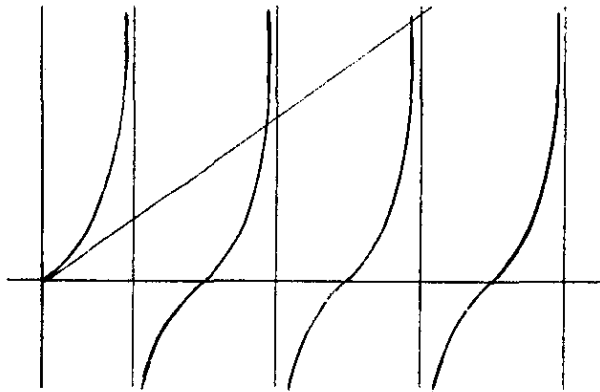
geeft

$$\begin{aligned} x &= (t^3 + 3t + O(t^{-1}))^{1/3} = t(1 + 3t^{-2} + O(t^{-4}))^{1/3} = \\ &= t(1 + t^{-2} + O(t^{-4}))^{1/3} = t + t^{-1} + O(t^{-3}) \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(29) VOORBEELD. De vergelijking

$$(30) \quad x = \tan x$$

heeft in ieder van de intervallen $(\frac{1}{2}\pi + n\pi, \frac{3}{2}\pi + n\pi)$ een wortel x_n .



De figuur suggereert dat $x_n = \frac{3}{2}\pi + n\pi - u_n$, waarbij $u_n \searrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Substitutie van deze uitdrukking in (30) geeft $\cot u_n = \frac{3}{2}\pi + n\pi - u_n$. We stellen $\frac{3\pi}{2} + n\pi = t$ en beschouwen de vergelijking $\cot u = t - u$ voor $t \rightarrow \infty$. Er volgt $u = \arctan(t - u)^{-1}$. We weten al $u = O(1)$. Een eerste iteratie levert $u = t^{-1} + O(t^{-2})$ ($t \rightarrow \infty$). De volgende iteratie geeft $u = t^{-1} + \frac{2}{3}t^{-3} + O(t^{-5})$ ($t \rightarrow \infty$).

HOOFDSTUK 4. DE METHODE VAN LAPLACE VOOR INTEGRALen.

4.1. Inleiding

Functies gedefinieerd door integralen van de vorm

$$(31) \quad F(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(x,t) dx$$

komen veel voor zowel binnen de "zuivere" wiskunde als binnen de "toegepaste" wiskunde.

(32) VOORBEELD. De Gammafunctie Γ , gedefinieerd door

$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \quad (t > 0)$$

speelt een belangrijke rol in vrijwel iedere tak van wiskunde.

(33) VOORBEELD. Integraaltransformaties spelen eveneens een belangrijke rol in de wiskunde. Bekend zijn de Laplace-transformatie

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

en de Fourier-transformatie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(t) dt .$$

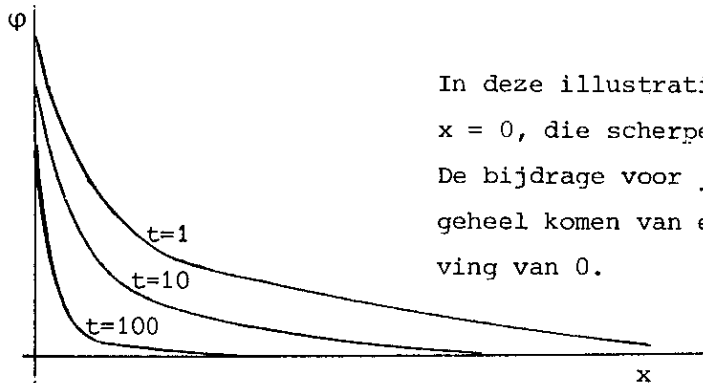
Dikwijls is men geïnteresseerd in het gedrag van zulke integralen voor grote t .

Er zijn immers veel gedragingen van integralen mogelijk. Soms kan men het asymptotisch gedrag vinden door middel van: partiële integratie, substituties, "knippen" en "plakken", methoden uit de complexe integratie, nog vele andere mogelijkheden en combinaties ervan. Wij hebben al een toepassing gezien van partiële integratie bij de behandeling van de integraal $\int_1^x e^s s^{-1} ds$ in Voorbeeld (18). Wij gaan nu niet in op al die bovengenoemde methoden.

Slechts één methode, de methode van Laplace, wordt in dit hoofdstuk behandeld. Deze methode werkt dan als er een interval J is zó dat

$$F(t) \sim \int_J \varphi(x,t) dx \quad (t \rightarrow \infty)$$

en $\varphi(x,t)$ op J benaderd kan worden door eenvoudiger functies waarvoor het asymptotisch gedrag van de integraal over J (eenvoudig) is te bepalen. Deze situatie doet zich o.a. voor als de grafiek van $\varphi(x,t)$ als functie van x een piek heeft die scherper wordt naarmate t groter wordt, en waarbij de bijdrage van een kleine omgeving van de piek vrijwel gelijk is aan de originele integraal.



In deze illustratie is er een piek bij $x = 0$, die scherper wordt als t groeit. De bijdrage voor $\int_0^\infty \varphi(x,t) dx$ kan vrijwel geheel komen van een kleine rechteromgeving van 0.

(34) VOORBEELD. We beschouwen voor t

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \log(2+x) dx .$$

De integrand heeft een maximum $\log 2$ in $x = 0$. De integrand is heel klein tenzij x heel klein is. De functie $\log(2+x)$ kunnen we door eenvoudige functies benaderen op bijvoorbeeld $[0, \frac{1}{2}]$. De integraal $\int_{\frac{1}{2}}^\infty$ is heel klein

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{2}}^\infty e^{-tx} \log(2+x) dx \right| &= \int_{\frac{1}{2}}^\infty e^{-\frac{1}{2}tx} e^{-\frac{1}{2}tx} \log(2+x) dx \\ &\leq \int_{\frac{1}{2}}^\infty e^{-\frac{1}{2}tx} [e^{-\frac{1}{2}t} \log(2+\frac{1}{2})] dx < e^{-\frac{1}{2}t} . \end{aligned}$$

Verder is $\log(2+x) = \log 2 + O(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$). We merken nog op dat

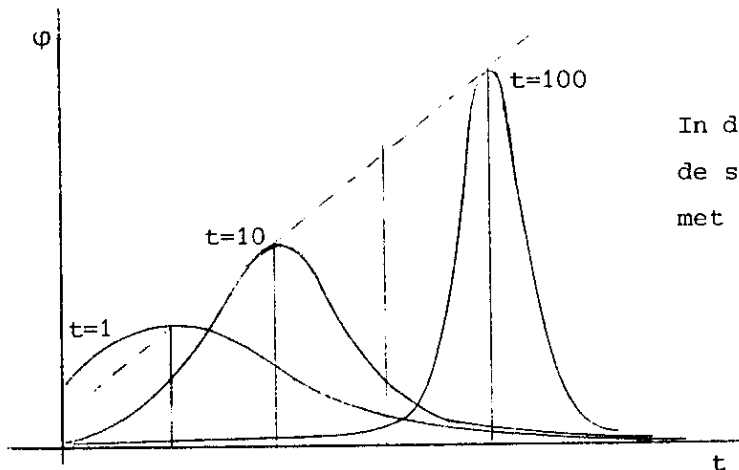
$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-tx} (\log 2 + O(x)) dx = \int_0^{\infty} e^{-tx} (\log 2 + O(x)) dx + O(e^{-\frac{1}{2}t}) .$$

Tenslotte hebben we dus

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \log 2 dx + O\left(\int_0^{\infty} e^{-tx} x dx\right) + O(e^{-\frac{1}{2}t}) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Dus

$$F(t) = \frac{\log 2}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t \rightarrow \infty) .$$



In dit plaatje verschuift de scherper wordende piek met groeiende t .

(35) VOORBEELD. We beschouwen

$$F(t) := \int_0^{\infty} e^{-tx^3 + 3t^3 x} dx .$$

Het maximum e^{2t^4} wordt aangenomen in $x = t$. De situatie is als in het plaatje hierboven. Verschuif het maximum naar de oorsprong door de substitutie $x = t + u$. Dan komt er

$$F(t) = e^{2t^4} \int_{-t}^{\infty} e^{-3t^2 u^2 - tu^3} du .$$

De functie e^{-tu^3} is op $[-t^{-1/3}, +t^{-1/3}]$ te schrijven als

$$e^{-tu^3} = 1 + O(tu^3) \quad (t > 0, |u| \leq t^{-1/3}) . \quad \text{Waarom?}$$

Verder is

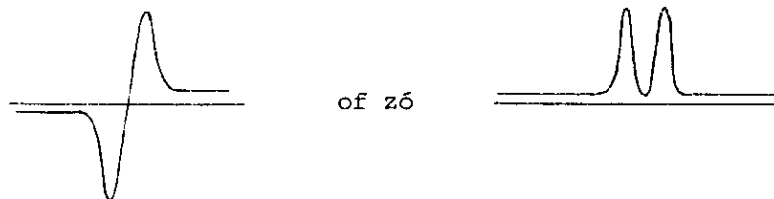
$$0 < \int_{-t \leq u \leq -t^{-1/3}} < t \cdot e^{-3t^{4/3} + 1} \quad \text{en} \quad 0 < \int_{u \geq t^{-1/3}} < e^{-3t^{4/3}} .$$

We hebben tenslotte

$$\begin{aligned} F(t) &= e^{2t^4} \left[\int_{-t^{-1/3}}^{+t^{-1/3}} e^{-3t^2 u^2} (1 + tO(u^3)) du + \text{exp. klein} \right] \\ &= e^{2t^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t^2 u^2} (1 + tO(u^3)) du + \text{exp. klein} \right] \\ &= e^{2t^4} \left[\sqrt{\frac{\pi}{3}} t^{-1} + O(t^{-3}) \right] \quad (t \rightarrow \infty) . \end{aligned}$$

↑
uniform in $t > 0$

(36) OPMERKING. Voorop staat het idee dat de methode van Laplace werkt als de integrand op een interval J (bevat in het integratie-interval) goed benaderd kan worden door "eenvoudige" functies en J de hoofdbijdrage aan de integraal levert. Het is dus niet van belang om de plaats van die piek exact te kennen; een benadering van die plaats is in veel gevallen goed genoeg om het interval J te lokaliseren. Verder hoeft er natuurlijk ook niet precies één piek te zijn. De integrand mag er best zó uitzien:



Twee zeer dicht bij elkaar liggende, eventueel tegengestelde pieken, kunnen dikwijls ook met de methode van Laplace behandeld worden.

We spreken af dat we een functie $f(t)$ voor $t \rightarrow \infty$ exponentieel klein zullen noemen als er positieve constanten α en β bestaan zo dat

$$f(t) = O(e^{-\alpha t^\beta}) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Analoge afspraken gelden ook voor $t \downarrow 0$, $t \rightarrow a$ etc.

(37) VOORBEELD. De integrand van

$$I(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} \log(1 + x + x^2) dx$$

heeft twee tegengestelde pieken in $x \sim (2t)^{-\frac{1}{2}}$ en $x \sim -(2t)^{-\frac{1}{2}}$.

$$\int_{|x| \geq \frac{1}{2}} \text{ is exp. klein, } \log(1 + x + x^2) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \quad (x \in \mathbb{R}),$$

waarin de coëfficiënten c_k berekend kunnen worden door de machtreeksontwikkeling van $\log(1 + x + x^2)$ rond $x = 0$ te bepalen. Er volgt

$$\begin{aligned} I(t) &= \text{exp. klein} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-tx^2} \left(\sum_1^n c_k x^k + O(x^{n+1}) \right) dx = \\ &= \text{exp. klein} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} \left(\sum_1^n c_k x^k + O(x^{n+1}) \right) dx = \sum_{2m \leq n} d_{2m} t^{m+\frac{1}{2}} + O(t^{m+1}). \end{aligned}$$

Dus

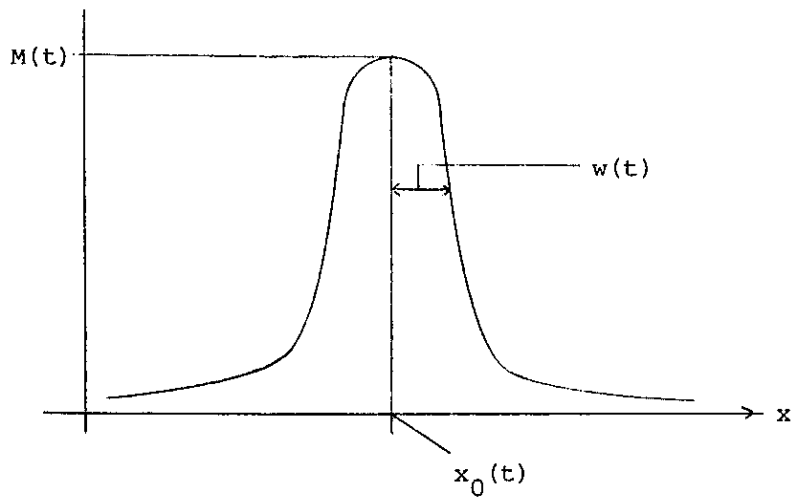
$$I(t) \approx \sum_1^{\infty} d_{2m} t^{m+\frac{1}{2}} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (\text{Hoe volgt dit?})$$

De voorbeelden hebben duidelijk gemaakt dat we de volgende integralen moeten kennen (voor $t > 0$):

$$(38) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^k dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) t^{-\frac{k+1}{2}} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

$$(39) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} x^k dx = \Gamma(k+1) t^{-k-1}.$$

Soms kunnen we de hoofdterm als volgt vinden: Eerst passen we de substitutie $x = x_0(t) + w(t)y$ toe; hierin is $x_0(t)$ een karakteristiek punt van het interval J die de hoofdbijdrage levert (bijv.: het midden van J) en $w(t)$ de breedte van de omgeving om x_0 die een wezenlijk deel (bijv. de helft) bijdraagt. Bijvoorbeeld, als de integrand één piek heeft (zie plaatje) op de plaats $x_0(t)$ en $w(t)$ is bijvoorbeeld de afstand tot x_0 zó dat de integrand ongeveer de helft is van die in x_0 .



Er komt dan

$$F(t) = M(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(y,t) dy .$$

In het geval van die ééntoppige integrand is $M(t)$ het maximum. Dikwijls is het zó dat $g(y,t) \rightarrow g(y)$ ($t \rightarrow \infty$) en dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y,t) dy \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy .$$

Dan geldt dus dat

$$F(t) \sim M(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy \quad (t \rightarrow \infty) .$$

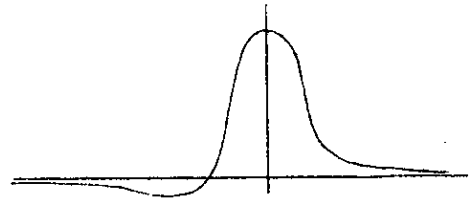
Verdere benaderingen kunnen dan gevonden worden door het verschil

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g(y,t) - g(y)) dy$$

te bestuderen. Het is al goed als $g(y,t) \rightarrow g(y)$ in een omgeving van $y = 0$ en de bijdrage van de integraal buiten die omgeving klein is vergeleken bij de bijdrage van die omgeving.

(40) VOORBEELD. We passen op

$$F(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2tx^2} (1 + x^2 + x^3)^t dx$$



de substitutie $x = t^{-\frac{1}{2}}y$ toe. We vinden

$$\sqrt{t} F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2} \left(1 + \frac{y^2}{t} + \frac{y^3}{t^{3/2}}\right)^t dy \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \quad (t \rightarrow \infty).$$

Hint: $e^{-1.5y^2} \left(1 + \frac{y^2}{t} + \frac{y^3}{t^{3/2}}\right)^t \leq 1$ (stel $y^2 = ts^2 \therefore (e^{-1.5s^2} (1 + s^2 + s^3))^t \leq 1$ want $e^{-1.5s^2} (1 + s^2 + s^3) \leq 1$, en dan gemajoreerde convergentie.

4.2. Een algemeen geval; maximum in inwendig punt

Het maximum van de integrand wordt aangenomen in een inwendig punt van het integratie-interval.

We zullen integralen beschouwen van de vorm

$$(41) \quad I(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} g(x) dx,$$

waarin h en g integreerbare functies zijn met de volgende eigenschappen:

(42) $h(x) \leq 0$ ($x \in \mathbb{R}$) en de integraal convergeert absoluut voor t voldoende groot, zeg voor $t > t_0$.

(43) $h(0) = 0$ is globaal maximum van h .

(44) $h(x) = a_2 x^2 + o(x^2)$ ($x \rightarrow 0$) met $a_2 < 0$

(45) $\forall_{\delta > 0} \sup\{h(x) \mid |x| \geq \delta\} < 0$

(46) $g(x) = b_0 + o(1)$ ($x \rightarrow 0$), $b_0 \neq 0$. ZVA $b_0 > 0$.

Dan geldt dat

$$(47) \quad I(t) = \frac{\sqrt{\pi} b_0}{\sqrt{t} \sqrt{-a_2}} (1 + o(1)) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Bewijs. Laat $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < -a_2$ en $\varepsilon < b_0$ zijn. Dan is er een $\delta > 0$ zó dat op $[-\delta, \delta]$ geldt:

$$(a_2 - \varepsilon)x^2 \leq h(x) \leq (a_2 + \varepsilon)x^2,$$

$$b_0 - \varepsilon \leq g(x) \leq b_0 + \varepsilon.$$

Zij $\eta := \sup\{h(x) \mid |x| \geq \delta\}$. Dan $\eta < 0$. Laat $t_1 > t_0$ en $t > t_1$ zijn. We hebben

$$\left| \int_{|x| \geq \delta} e^{th(x)} g(x) dx \right| \leq \int_{|x| \geq \delta} e^{(t-t_1)h(x)} e^{t_1 h(x)} |g(x)| dx \leq$$

$$e^{(t-t_1)\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| e^{t_1 h(x)} dx$$

en dit is exp. klein. Verder hebben we

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{(a_2 - \varepsilon)tx^2} (b_0 - \varepsilon) dx \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} g(x) dx \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{(a_2 + \varepsilon)tx^2} (b_0 + \varepsilon) dx.$$

Met de schatting (voor $\beta > 0$)

$$0 < \int_{|x| \geq \delta} e^{-\beta tx^2} dx \leq 2 \int_{\delta}^{\infty} e^{-\beta t \delta x} dx = \frac{e^{-\beta \delta^2 t}}{\beta t \delta}$$

is exp. klein vinden we

$$-L(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a_2 - \varepsilon)tx^2} (b_0 - \varepsilon) dx \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} g(x) dx \leq$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a_2 + \varepsilon)tx^2} (b_0 + \varepsilon) dx + R(t)$$

waarin $L(t)$ en $R(t)$ exp. klein zijn (van de vorm $e^{-\alpha t}$).

Er komt

$$\frac{\sqrt{\pi}(b_0 - \varepsilon)}{\sqrt{-a_2 + \varepsilon} \sqrt{t}} - L(t) \leq \int_{-\delta}^{\delta} \leq \frac{\sqrt{\pi}(b_0 + \varepsilon)}{\sqrt{-a_2 - \varepsilon} \sqrt{t}} + R(t)$$

en de conclusie volgt. □

Als we (44) en (46) vervangen door

$$(48) \quad h(x) \approx a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (x \rightarrow 0), \quad a_2 < 0,$$

$$(49) \quad g(x) \approx b_0 + b_1 x + \dots \quad (x \rightarrow 0), \quad b_0 > 0,$$

dan kunnen we een volledige asymptotische reeks voor $I(t)$ vinden.

Laat $N \in \mathbb{N}$, $N > 2$ zijn. Laat $\varepsilon > 0$, voldoende klein zijn. Dan is er een $\delta > 0$ z6 dat voor $|x| \leq \delta$ geldt:

$$\begin{aligned} h(x) &\leq \frac{1}{2} a_2 x^2, \\ h(x) &= a_2 x^2 + \dots + a_N x^N + O(x^{N+1}) \\ g(x) &= b_0 + \dots + b_N x^N + O(x^{N+1}). \end{aligned}$$

De bijdrage $\int_{|x| \geq \delta} \dots$ is weer exponentieel klein. We beschouwen dus

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} g(x) dx.$$

Er zijn nu twee voortzettingen mogelijk.

Eerste aanpak. Op $[-\delta, \delta]$ kunnen we de integrand schrijven als

$$e^{a_2 t x^2} e^{a_3 t x^3 + a_4 t x^4 + \dots + t O(x^{N+1})} (b_0 + \dots + O(x^{N+1})).$$

We willen $a_3 t x^3 + \dots + O(t x^{N+1})$ "naar de grond" brengen. Dat kan als we ons beperken tot een interval waarop $t x^3$ begrensd is. Daarom bestuderen we

$|x| \leq t^{-1/3}$. We moeten dus eerst $t^{-1/3} \leq |x| \leq \delta$ schatten.

$$\left| \int_{t^{-1/3} \leq |x| \leq \delta} \dots \right| \leq K_1 \int_{t^{-1/3}}^{\delta} e^{\frac{1}{2} a_2 t x^2} dx \leq K_2 e^{\frac{1}{2} a_2 t^{1/3}};$$

ook weer exponentieel klein.

Op het interval $[-t^{-1/3}, t^{-1/3}]$ kunnen we de integrand schrijven als

$$(50) \quad e^{a_2 tx^2} (b_0 + \dots + O(x^{N+1})) (1 + (a_3 tx^3 + \dots) + \frac{(\dots)^2}{2} + \dots) =$$

$$= e^{a_2 tx^2} (b_0 + a_3 b_0 tx^3 + \dots + O(tx^{N+1}) \dots) .$$

Hierbij hoeven niet meer termen meegenomen te worden dan dié welke, na toepassing van (38), machten groter dan $\frac{1}{2}N$ van t^{-1} opleveren. Alle andere termen leveren een bijdrage $O(t^{-\frac{1}{2}N})$. De integraal $\int_{|x| \geq t}^{-1/3} (\) dx$ levert een exponentieel kleine bijdrage. We vinden dus, (50) integrerend van $-\infty$ tot ∞ ,

$$I(t) = C_0 t^{-\frac{1}{2}} + C_1 t^{-1} + \dots + O(t^{-N/2}) \quad (t \rightarrow \infty) . \quad \square$$

We zullen bovenstaande methode toelichten voor het geval dat

$$h(x) = -x + \log(1+x) \quad (x > -1) \quad \text{en} \quad g(x) = 1 \quad (x > -1) .$$

Tweede aanpak. In veel gevallen is de reeks in (48) een machtreeks voor h . Dan geldt dus

$$(51) \quad h(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (|x| < R) .$$

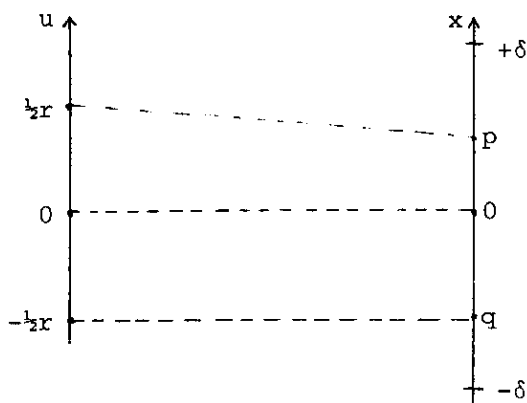
Dan kunnen we de substitutie

$$(52) \quad h(x) = -u^2$$

maken. We kiezen $u > 0$ als $x > 0$. Volgens een stelling (Bürmann, Lagrange) is er een $r > 0$ zó dat x te schrijven is als een machtreeks in u voor $|u| < r$.

$$(53) \quad x = d_1 u + d_2 u^2 + \dots \quad (|u| < r) .$$

Dan moeten we wat "knippen". Zie plaatje



De integralen \int_p^δ en $\int_{-\delta}^{-q}$ zijn weer exp. klein. De integraal \int_{-q}^p wordt dan

$$\int_{-\frac{1}{2}r}^{\frac{1}{2}r} e^{-tu^2} (b_0 + b_1 d_1 u + (b_1 d_2 + b_2 d_1^2) u^2 + \dots O(u^{N+1})) (d_1 + 2d_2 u \dots) du.$$

De integraal $\int_{|u| \geq \frac{1}{2}r} e^{-tu^2} (b_0 d_1 + \dots) du$ is weer exp. klein. Toepassing van (38) levert de gevraagde asymptotische reeks op. \square

(54) VOORBEELD. We zullen hiervoor beschreven methode toepassen op de Γ -functie

$$(55) \quad \Gamma(t_1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^t dt.$$

De integrand $e^{-x} x^t$ bereikt zijn maximum voor $x = t$.

We substitueren $x = t + s$. Dan komt er

$$(56) \quad \Gamma(t + 1) = e^{-t} t^t \int_{-t}^{\infty} e^{-s} \left(1 + \frac{s}{t}\right)^t ds.$$

De substitutie $s = t\xi$ voert (56) over in een integraal van het type $\int e^{th(\xi)} d\xi$. Er komt

$$(57) \quad \Gamma(t + 1) = e^{-t} t^{t+1} \int_{-1}^{\infty} e^{th(\xi)} d\xi$$

waarin $h(\xi) = -\xi + \log(1 + \xi)$. De 1^e aanpak werkt goed, maar de 2^e aanpak gaat hier wat sneller. Immers, h heeft een machtreeksontwikkeling

$$h(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^4 + \dots \quad (|\xi| < 1).$$

We stellen $h(\xi) = -u^2$, met $u > 0$ als $\xi > 0$ (voldoende klein). Volgens de stelling van Bürmann-Lagrange is ξ te ontwikkelen in een machtreeks naar u

$$\xi = d_1 u + d_2 u^2 + d_3 u^3 + \dots \quad (|u| < r).$$

Enkele coëfficiënten zijn: $d_1 = \sqrt{2}$, $d_2 = 2/3$, $d_3 = \sqrt{2}/18$. Na knippen en plakken vinden we

$$(58) \quad \Gamma(t + 1) \approx e^{-t} t^{t+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tu^2} (d_1 + 2d_2 u + 3d_3 u^2 + \dots) du \quad (t \rightarrow \infty).$$

Met behulp van (38) vinden we tenslotte

$$(59) \quad \Gamma(t+1) \approx \sqrt{2\pi} t^{t+1/3} e^{-t} \left(1 + \frac{1}{12} t^{-1} + \dots\right) \quad (t \rightarrow \infty).$$

We zullen later, in hoofdstuk 5, hierop terugkomen.

4.3. Maximum in randpunt

We beschouwen

$$I(t) := \int_0^{\infty} e^{th(x)} g(x) dx,$$

met h en g integreerbare functies met de eigenschappen: $h(x) \leq 0$ ($x \geq 0$) en de integraal convergeert absoluut voor t voldoende groot; $h(x) = a_1 x + o(x)$ ($x \rightarrow 0$) met $a_1 < 0$; $\forall_{\delta > 0} \sup\{h(x) \mid |x| \geq \delta\} < 0$; $g(x) = b_0 + o(1)$ ($x \rightarrow 0$) met $b_0 \neq 0$.

Dan volgt op analoge wijze $I(t) \sim (-a_1 t)^{-1} b_0$ ($t \rightarrow \infty$).

Als h en g asymptotische reeksen hebben voor $x \rightarrow 0$, $h(x) \approx a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ ($x \rightarrow 0$), $g(x) \approx b_0 + b_1 x + \dots$ ($x \rightarrow 0$), dan kunnen we ook een volledige asymptotische reeks voor $I(t)$ vinden.

HOOFDSTUK 5. SOMMATIE

5.1. Inleiding

Functionies gedefinieerd door sommen van de vorm

$$(60) \quad F(t) := \sum_{k=n_1(t)}^{n_2(t)} \varphi(k, t)$$

komen veel voor. We zijn geïnteresseerd in het asymptotische gedrag voor $(t \in \mathbb{N}, t \rightarrow \infty)$ of $(t \in \mathbb{R}, t \rightarrow a)$. Dikwijls hebben we te maken met het eenvoudige geval dat t een natuurlijk getal is, φ niet van t afhangt, en $n_1 = 1$ of 0 en $n_2(t) = t$. Dus het geval

$$(61) \quad F(n) = \sum_{k=1}^n f(k) .$$

(62) VOORBEELD.

$$\log n! = \sum_{k=1}^n \log k .$$

Ook komt het voor dat $n_2 = \infty$.

(63) VOORBEELD. Een bekend voorbeeld is de zèta-functie (Riemann) gedefinieerd door

$$(64) \quad \zeta(t) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-t} \quad (t > 1) .$$

Andere bekende functionies zijn de thèta-functies die ten nauwste samenhangen met sommen zoals

$$(65) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} ,$$

$$(66) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} .$$

Nog wat voorbeelden zijn:

$$(67) \quad \sum_{k=1}^n k^{\alpha} ,$$

$$(68) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (k + k^2 t)^{-1} ,$$

$$(69) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) .$$

De methoden die in dit hoofdstuk behandeld worden, zijn, ruw gesproken, slechts geschikt voor sommen van het type (60) waarbij de totale som $F(t)$ groot is vergeleken met de grootste term in die som; een groot aantal termen draagt wezenlijk bij tot de totale som. Merk op, dat deze situatie heel anders is dan die bij integralen waar de methode van Laplace toegepast kan worden.

5.2. Een elementaire methode

Deze methode zullen we uitleggen voor sommen van de gedaante

$$(70) \quad F(n) := \sum_{k=1}^n f(k) ,$$

waarin $f(k) > 0$ voor $k \in \mathbb{N}$.

We benaderen f door een functie g zodanig dat

$$(71) \quad f(k) \sim g(k) \quad (k \rightarrow \infty) ,$$

en

$$(72) \quad \text{het asymptotisch gedrag van } \sum_{k=1}^n g(k) \text{ gemakkelijk te bepalen is .}$$

Als zo'n benadering gevonden kan worden dan geldt (waarom?)

$$(73) \quad F(n) \sim \sum_{k=1}^n g(k) \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Willen we nog scherpere resultaten dan kunnen we deze methode proberen toe te passen op $\sum_{k=1}^n (f(k) - g(k))$.

(74) VOORBEELD. We zullen het asymptotisch gedrag bepalen van

$$(75) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} .$$

Voor zo'n gladde functie $f(x) = x^{-1}$ is de integraal $\int_k^{k+1} f(x) dx$ meestal een geschikte benadering. Dan hebben we

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k) + \sum_{k=1}^n (k^{-1} - \log(1+k^{-1})) = \\ &= \log(n+1) + C_1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{-1} - \log(1+k^{-1})) = \\ &= \log(n+1) + C_1 + O(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

waarin

$$C_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (k^{-1} - \log(1+k^{-1})) .$$

Dus

$$(76) \quad \sum_{k=1}^n k^{-1} = \log n + C_1 + O(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty) .$$

(77) VOORBEELD.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log k &= \sum_{k=1}^n ((k+1)\log(k+1) - k \log k) - \sum_{k=1}^n (k+1)\log(1+k^{-1}) = \\ &= (n+1)\log(n+1) - \sum_{k=1}^n (1 + (2k)^{-1}) - \sum_{k=1}^n ((k+1)\log(1+k^{-1}) - 1 - \frac{1}{2}k^{-1}) = \\ &= (n+1)\log(n+1) - n - \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{2}C_1 + O(n^{-1}) - C_2 = \\ &= (n + \frac{1}{2})\log n - n + C_3 + O(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty) . \end{aligned}$$

Er volgt dus

$$(78) \quad n! = C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + O(n^{-1})) \quad (n \rightarrow \infty) .$$

De constante C kan bepaald worden met de methode aangegeven in vraagstuk 16.

5.3. De somformule van Euler-MacLaurin

Een korte en efficiënte manier om sommen van de vorm

$$(79) \quad S(n) = \sum_{k=1}^n f(k)$$

te behandelen is toepassing van de somformule van Euler-MacLaurin (lokale afkorting: EM).

(80) STELLING. Laat $f \in C^{2m}([1, \infty))$. Dan geldt

$$(81) \quad \sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(n) + \\ + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1)) \\ - \int_1^n f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x - [x])}{(2m)!} dx .$$

Hierin stellen $B_\ell(t)$ ($t \in \mathbb{R}$), $\ell \in \mathbb{N}_0$, de polynomen van Bernoulli voor en B_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}_0$ de getallen van Bernoulli.

Om stelling (80) te kunnen toepassen is het voldoende om te weten dat

$$\frac{|B_{2m}(x - [x])|}{(2m)!} \leq 1 \quad \text{voor } m \in \mathbb{N}$$

en de Bernoulli-getallen te kennen. Deze zijn te definiëren door

$$z(e^z - 1)^{-1} = \sum_0^\infty B_\ell \frac{z^\ell}{\ell!} .$$

Enkele getallen zijn $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$,
 $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$, $B_{16} = -\frac{3617}{510}$; $B_{2k+1} = 0$
 ($k = 1, 2, \dots$).

We zullen straks het bewijs geven. Nu zullen we eerst een paar toepassingen demonstreren.

(82) VOORBEELD. We zullen het asymptotisch gedrag onderzoeken voor $n \rightarrow \infty$ van

$$(83) \quad S_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k + \frac{1}{2}}} .$$

Het ligt voor de hand om de functie f in (81) te definiëren door $f(x) := (x + \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$. Dan is

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} (x + \frac{1}{2})^{-(k+\frac{1}{2})}; \quad k = 1, 2, \dots .$$

Laat $m \in \mathbb{N}$. De tweede integraal in het rechterlid van (81) behandelen we als volgt:

$$\int_0^n = \int_0^\infty - \int_n^\infty,$$

en

$$\left| \int_n^\infty \right| \leq \int_n^\infty f^{(2m)}(x) dx = -f^{(2m-1)}(n).$$

Verder is

$$\int_0^n f(x) dx = 2\sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{2}.$$

Invullen in (81) geeft

$$S_n = 2\sqrt{n + \frac{1}{2}} + C_m + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k} (4k - 2)!}{(2k)! 2^{4k-2} (2k - 1)!} (n + \frac{1}{2})^{-(2k-\frac{1}{2})} + O(n^{-(2m-\frac{1}{2})}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

en C_m is een constante, namelijk

$$C_m = \frac{1}{2}f(0) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(0) - \int_0^\infty f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x - [x])}{(2m)!} dx - \sqrt{2}.$$

Die $-\sqrt{2}$ is stokterm afkomstig van $\int_0^n f(x) dx$. We merken op dat C_m slechts schijnbaar van m afhangt. Immers we zien dat $C_m = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - 2\sqrt{n + \frac{1}{2}})$. We kunnen dus rustig C schrijven i.p.v. C_m .

Merk op dat de bovengrens m in $\sum_{k=1}^m$ vervangen kan worden door $m - 1$. Er volgt dat we een volledige asymptotische ontwikkeling voor S_n hebben:

$$(84) \quad S_n \approx 2\sqrt{n + \frac{1}{2}} + C + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k} (4k - 2)!}{(2k)! 2^{4k-2} (2k - 1)!} (n + \frac{1}{2})^{-(2k+\frac{1}{2})} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Als in de termen $f(k)$ een parameter voorkomt, werkt EM dikwijls nog heel goed. Zo'n parameter mag best n zelf zijn. Ook sommen van de gedaante $\sum_0^\infty \varphi(k, t)$ kunnen dikwijls goed met EM behandeld worden.

(85) VOORBEELD. We onderzoeken

$$(86) \quad F(n) := \sum_{k=0}^n (n+k)^{-\frac{1}{2}} .$$

Laat $f(x) := (x+n)^{-\frac{1}{2}}$. Dan

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} (x+n)^{-(k+\frac{1}{2})} \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots .$$

De eerste integraal in het rechterlid van (81) wordt

$$\int_0^n (n+x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{2n} - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} .$$

De tweede integraal in het rechterlid behandelen we als volgt:

$$\left| \int_0^n f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x - [x])}{(2m)!} dx \right| \leq K_m \int_0^n (x+n)^{-(2m+\frac{1}{2})} dx = \frac{\tilde{K}_m}{n} n^{-(2m-\frac{1}{2})} .$$

Het splitsen van de integraal in de integralen

$$\int_0^\infty \quad \text{en} \quad \int_n^\infty$$

is hier niet nodig, omdat in dit geval

$$\int_0^\infty \quad \text{en} \quad \int_n^\infty$$

van dezelfde orde van grootte zijn. We krijgen ook hier weer een volledige asymptotische reeks

$$(87) \quad F(n) \approx (2\sqrt{2} - 2)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)n^{-\frac{1}{2}} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{(4k-2)!}{2^{4k-2} (2k-1)!} (1 - 2^{-2k+\frac{1}{2}}) n^{-2k+\frac{1}{2}} \quad (n \rightarrow \infty) .$$

(88) VOORBEELD. We beschouwen

$$(89) \quad S(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + te^n} \quad (t > 0) .$$

Laat $f(x) = (1 + te^x)^{-1}$. Dan $f'(x) = -f(x) + f^2(x)$ en $f''(x) = (-1 + 2f(x))(-f(x) + f^2(x))$. We passen (81) toe op \sum_0^N en met $m = 1$. Dan komt er

$$(90) \quad \sum_0^N (1 + te^n)^{-1} = \int_0^N (1 + te^x)^{-1} dx + \frac{1}{2}(1+t)^{-1} + \frac{1}{2}(1 + te^N)^{-1} \\ + \frac{1}{12}[-(1 + te^N)^{-1} + (1 + te^N)^{-2} + (1+t)^{-1} - (1+t)^{-2}] \\ - \int_0^N f''(x) \frac{B_2(x - [x])}{2!} dx .$$

Laat nu $N \rightarrow \infty$. Alle oneigenlijke integralen bestaan. Er komt

$$(91) \quad \sum_0^{\infty} (1 + te^n)^{-1} = \int_0^{\infty} (1 + te^x)^{-1} dx + \frac{1}{2}(1+t)^{-1} + \frac{1}{12}(1+t)^{-1} - \frac{1}{12}(1+t)^{-2} \\ - \int_0^{\infty} f''(x) \frac{B_2(x - [x])}{2!} dx .$$

Helaas, een schatting voor de tweede integraal in het rechterlid van (91) geeft slechts $O(1)$.

$$\left| \int_0^{\infty} f''(x) \frac{B_2(x - [x])}{2!} dx \right| \leq \int_0^{\infty} |f''(x)| dx = \frac{1}{2} - \frac{t}{(1+t)^2} = O(1) \quad (t \downarrow 0) .$$

Er volgt

$$(92) \quad \sum_0^{\infty} (1 + te^x)^{-1} = \log\left(\frac{1}{t}\right) + O(1) \quad (t \downarrow 0) .$$

Om scherpere asymptotische uitdrukkingen voor $S(t)$ te vinden, is EM niet geschikt. Met behulp van de betrekking

$$S(t/e) - S(t) = (1 + t/e)^{-1}$$

kunnen we vinden

$$S(t) = \log\left(\frac{1}{t}\right) + C + O(t) \quad (t \downarrow 0) .$$

5.4. Het bewijs van de somformule van Euler-Maclaurin

Voor $n \in \mathbb{N}_0$ en $t \in \mathbb{R}$ definiëren we de polynomen van Bernoulli $B_n(t)$ door

$$(93) \quad ze^{zt}(e^z - 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < 2\pi) .$$

Dat de functies $B_n(t)$ polynomen zijn moet nog bewezen worden. De getallen van Bernoulli B_0, B_1, B_2, \dots , worden gedefinieerd door

$$(94) \quad B_n := B_n(0) ,$$

of door

$$(95) \quad z(e^z - 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < 2\pi) .$$

(96) STELLING.

$$(97) \quad B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \quad (n \geq 2)$$

$$(98) \quad B_{2n+1} = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$(99) \quad B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42} .$$

Bewijs. (97) volgt uit (95) door vermenigvuldiging met $e^z - 1$ en ontwikkeling naar machten van z . (99) volgt uit (95) met gebruikmaking van het feit dat $z(e^z - 1)^{-1} + \frac{1}{2}z$ even is. □

(100) STELLING.

$$(101) \quad B_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} t^k \quad (n \geq 0)$$

$$(102) \quad B_n(1) = B_n(0) = B_n \quad (n \geq 2)$$

$$(103) \quad \dot{B}_n(t) = nB_{n-1}(t) \quad (n \geq 1)$$

$$(104) \quad \int_0^1 B_n(t) dt = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$(105) \quad |B_n| \leq n! \quad (n \geq 0) .$$

Bewijs. (101) volgt uit (93) en (95). (102) volgt door $t = 1$ te nemen in (101) en (97) toe te passen. (103) volgt door (101) naar t te differentiëren. (104) volgt door toepassing van (103) en (102). (105) volgt uit (97) met behulp van volledige inductie. \square

(106) STELLING. Laat $f \in C^{2m}([0,1])$ (met $m \in \mathbb{N}$). Dan geldt:

$$(107) \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) + \int_0^1 f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x)}{(2m)!} dx .$$

Bewijs. Partiële integratie via (103) levert (107). We laten de eerste paar stappen zien:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) B_0(x) dx = [B_1(x) f(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x) B_1(x) dx = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}[B_2(x) f'(x)]_0^1 + \frac{1}{2!} \int_0^1 B_2(x) f''(x) dx .$$

Met volledige inductie kan het bewijs voltooid worden, waarbij gebruik gemaakt wordt van (98), (102) en (103).

Het bewijs van Stelling (80) gaat als volgt: We passen (107) toe op de functies f_i gedefinieerd door $f_i(x) := f(x+i)$ ($0 \leq x \leq 1$) voor $i = 1, 2, \dots, n$ en sommeren.

(108) OPMERKING. Soms is het gemakkelijk om over de volgende formule te beschikken:

$$(109) \quad \sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f'(x) (x - [x] - \frac{1}{2}) dx .$$

Het bewijs is al gegeven hierboven (zie 2^e regel van het bewijs van (106)).

HOOFDSTUK 6. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

6.1. Inleiding

Functies, gedefinieerd door een beginwaardeprobleem, bestaande uit een gewone differentiaalvergelijking en een stel beginwaarden, komen veel voor. Problemen over het gedrag van zo'n oplossing kunnen herleid worden tot vragen over het asymptotisch gedrag van zo'n oplossing voor $t \rightarrow \infty$.

Enkele voorbeelden: De differentiaalvergelijkingen genoemd in hoofdstuk 1; De eigenfuncties y_n voor $n \rightarrow \infty$ van $\ddot{y} + \lambda^2 p(t)y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$; Het gedrag voor $x \rightarrow \infty$ van allerlei bijzondere functies zoals Besselfuncties, die voldoen aan

$$y'' + x^{-1}y' + (1 - x^{-2}v^2)y = 0 \quad (\text{Besselfuncties } J_\nu, Y_\nu).$$

We beperken ons in dit hoofdstuk tot een methode die van toepassing is op een beperkte klasse van differentiaalvergelijkingen. Tot deze klasse behoren bijvoorbeeld de Riccati-vergelijkingen, maar niet de oscillerende tweede orde differentiaalvergelijkingen.

Een handig middel, om globale uitspraken over oplossingen te kunnen doen, zijn "buizen".

6.2. Stabiele en instabiele buizen

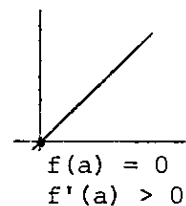
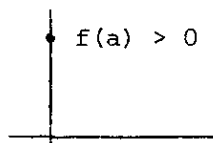
(110) LEMMA. Zij $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en $f(a) \geq 0$. Als $f(x) = 0$ impliceert dat $f'(x) > 0$ ($a \leq x \leq b$), dan is $f(x) > 0$ op $(a,b]$.

Bewijs. We moeten aantonen dat

$$V = \{x \mid a < x \leq b \wedge f(x) \leq 0\} = \emptyset.$$

Stel $V \neq \emptyset$. Zij $c := \inf V$.

Geval $c = a$. We hebben dat $f(a) > 0$ of $f(a) = 0$ en $f'(a) > 0$.



In beide gevallen is er een omgeving van de gedaante $(a, a + \delta)$ met $\delta > 0$ waarop $f(x) > 0$. (Waarom?)

Geval $c > a$. Er zijn nu twee mogelijkheden: $f(c) < 0$ of $f(c) = 0$ en $f'(c) > 0$. In beide gevallen is er een linkeromgeving $(c - \delta, c)$ waarop $f(x) < 0$.



□

(111) OPMERKING. In bovenstaand lemma hebben we $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$. Met $f'(x) \geq 0$ is het lemma niet waar. Een voorbeeld daarvan is $f(x) = -x^2$ op $[0,1]$.

(112) STELLING. De functies φ en ψ zijn differentieerbaar op $[a,b]$ en F is een reële functie gedefinieerd voor de optredende argumenten. Verder is gegeven dat

$$\begin{aligned}\varphi(t) &< F(t, \varphi(t)) & (a \leq t \leq b) , \\ \psi(t) &\geq F(t, \psi(t)) & (a \leq t \leq b) , \\ \varphi(a) &\leq \psi(a) .\end{aligned}$$

Dan geldt $\varphi(t) < \psi(t)$ ($a < t \leq b$).

Bewijs. Als $\psi - \varphi = 0$ dan $(\psi - \varphi)' > 0$.

□

(113) TOEPASSING. We beschouwen de differentiaalvergelijking

$$(114) \quad \dot{y} = F(t, y) .$$

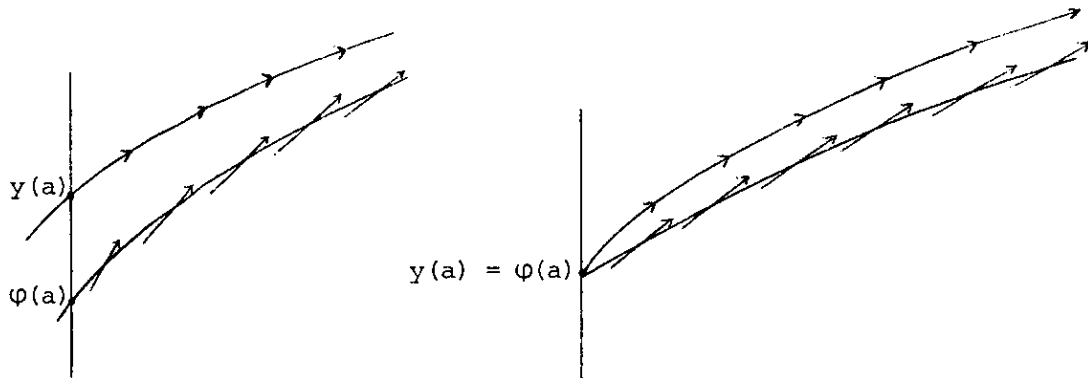
Laat y een oplossing zijn met $\text{DOM } y = [a,b]$. Laat φ voldoen aan

$$(115) \quad \dot{\varphi}(t) < F(t, \varphi(t)) \quad (a \leq t \leq b) .$$

Dan geldt: Als $\varphi(a) \leq y(a)$ dan $\varphi(x) < y(x)$ ($a < x \leq b$).

Het bewijs is een toepassing van Stelling (112).

De volgende plaatjes verduidelijken de situatie.



(116) OPMERKING. In (115) is het strikte ongelijkheidsteken nodig. Een voorbeeld maakt dit duidelijk. De functie y gedefinieerd door

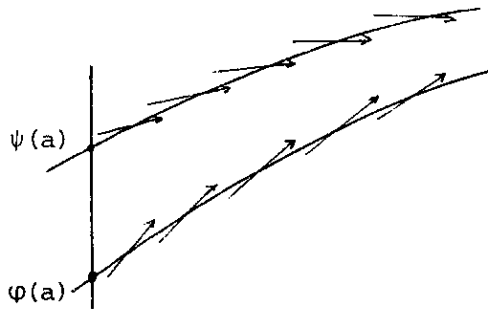
$$y(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 1) \\ (t - 1)^2 & (t > 1) \end{cases}$$

voldoet aan $\dot{y} = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$. De testfunctie $\varphi(t) := t^2$ ($t \geq 0$) voldoet aan $\dot{\varphi} \leq 2\sqrt{\varphi}$, $\varphi(0) \leq y(0)$. Toch geldt niet dat $\varphi(t) \leq y(t)$ ($t \geq 0$).

Als de differentiaalvergelijking $\dot{y} = F(t, y)$ eenduidig oplosbaar is, dan is \leq voldoende.

(117) OPMERKING. Toepassing (113) geldt natuurlijk ook met omgekeerde ongelijkheidstekens. We kunnen nu buizen introduceren.

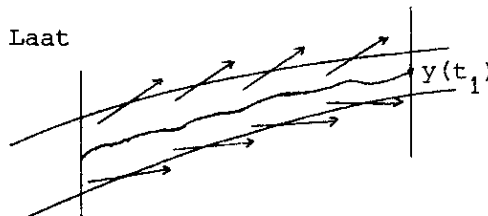
Als we de situatie hebben uit Stelling (112) met $\varphi(a) < \psi(a)$ en $b = \infty$ dan spreken we van een stabiele buis. Iedere oplossing van $\dot{y} = F(t, y)$ die start



binnen zo'n buis, blijft in die buis. Dus als $\varphi(a) \leq y(a) \leq \psi(a)$, dan $\varphi(t) \leq y(t) \leq \psi(t)$ ($t \geq a$).

Zo hebben we ook instabiele buizen. Laat

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &> F(t, \varphi) \\ \dot{\psi} &< F(t, \psi) \\ \varphi(t) &< \psi(t) \quad (t \geq a) . \end{aligned}$$



Dan geldt, dat iedere oplossing y die op een tijdstip $t_1 > a$ eindigt binnen de buis, in het verleden al in die buis was. M.a.w. Als $\varphi(t_1) \leq y(t_1) \leq \psi(t_1)$ dan $\varphi(t) < y(t) < \psi(t)$ ($a \leq t < t_1$).

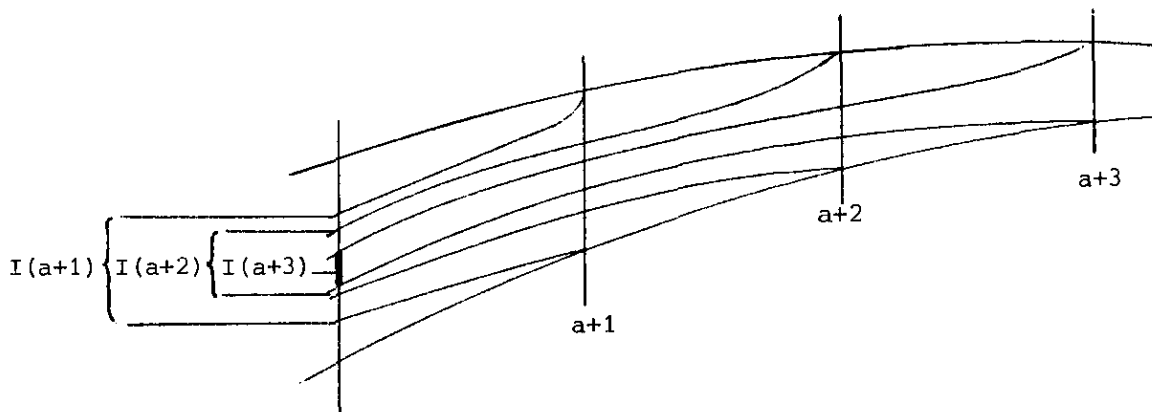
We zullen nu verder aannemen dat $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ continu is met $D = [a, \infty) \times U \subset \mathbb{R}^2$ (meestal $U = (0, \infty)$ of \mathbb{R}); en dat $\dot{y} = F(t, y)$ eenduidig oplosbaar is.

Dan geldt dat voor elke $t > a$ de functiewaarde $y(t)$ continu afhangt van de beginwaarde $y(a)$ en omgekeerd.

Er geldt: Er bestaat tenminste één oplossing y van $\dot{y} = F(t, y)$ die voor alle $t \geq a$ binnen de instabiele buis blijft.

Bewijs. Laat $t_1 > a$. Beschouw de oplossing y die door het punt $(t_1, \psi(t_1))$ gaat; ten tijde $t = a$ is $y(a)$ de grootste startwaarde zodanig dat oplossing op $[a, t_1]$ niet naar boven uit de buis loopt. Evenzo geldt: als z oplossing is door $(t_1, \varphi(t_1))$ dan is $z(a)$ de kleinste startwaarde zodanig dat z niet naar onder uit de buis loopt. Het interval $I(t_1) := [y(a), z(a)]$ bevat dus de startwaarden zodanig dat de oplossingen van het BWP gedurende het tijdsinterval $[a, t_1]$ niet de buis verlaten. Dit alles volgt met behulp van de continue afhankelijkheid van de eindwaarden. De intervallen $I(a+1), I(a+2), \dots$ vormen een geneste rij van gesloten intervallen. We gebruiken nu het bekende lemma: Laat (R, d) een metrische ruimte zijn en laat $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij gesloten verzamelingen zijn met F_1 compact en $\forall_n (F_n \neq \emptyset) \wedge (F_{n+1} \subset F_n)$. Dan geldt dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Er volgt nu dat er tenminste één startwaarde $y(a)$ bestaat in $[\varphi(a), \psi(a)]$ zó dat de oplossing y binnen de buis blijft op $[a, \infty)$.



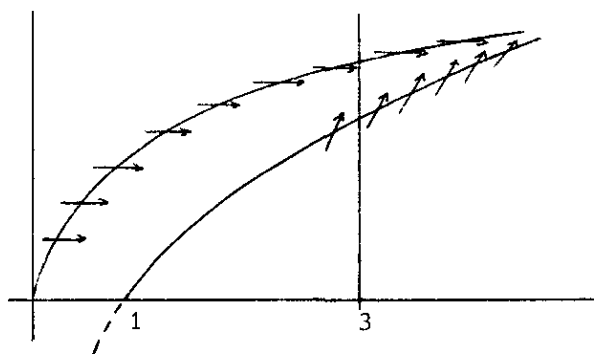
Buizen zijn dikwijls gemakkelijk te vinden, ook als de differentiaalvergelijking niet expliciet oplosbaar is.

In het nu volgende voorbeeld onderzoeken we een differentiaalvergelijking met behulp van buizen. We kunnen de resultaten vergelijken met de expliciete oplossing (die in dit geval bestaat).

(118) VOORBEELD. We beschouwen de differentiaalvergelijking

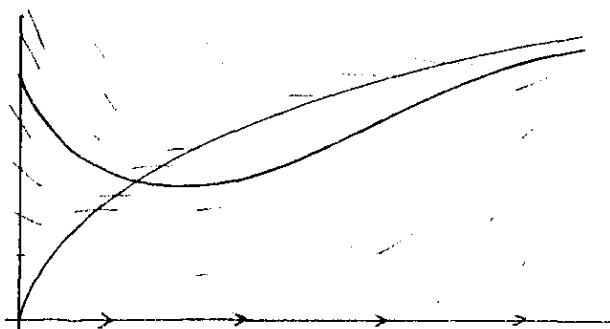
$$(119) \quad \dot{x} = \sqrt{t} x - x^2 =: F(t, x) .$$

Voor $\varphi(t) := \sqrt{t}$ geldt $\dot{\varphi} > F(t, \varphi)$ ($t > 0$) en voor $\psi(t) := \sqrt{t} - \frac{1}{t}$ geldt $\dot{\psi} < F(t, \psi)$ ($t \geq 3$).



De buis (ψ, φ) is een stabiele buis. Alle oplossingen x met $\sqrt{3} - \frac{1}{3} \leq x(3) \leq \sqrt{3}$ voldoen aan $\sqrt{t} - \frac{1}{t} < x(t) < \sqrt{t}$ ($t > 3$). Dat zijn ∞ veel oplossingen. We zullen ons voorlopig beperken tot positieve oplossingen y .

Het is duidelijk dat elke oplossing y met $y(0) > 0$ tenslotte "onder" $\varphi(t) = \sqrt{t}$ komt.



Het vermoeden rijst dat voor elke oplossing y met $y(0) > 0$ geldt dat $y(t) \sim \sqrt{t}$ ($t \rightarrow \infty$).

Laat y een oplossing zijn met $y(0) > 0$. We definiëren

$$A := \min\{y(t) \mid t \geq 0\} =: y(t_0) .$$

Dan is $A > 0$ en $y(t) > A$ ($t > t_0$). Kies een oplossing y_1 in de buis $(\sqrt{t} - \frac{1}{t}, \sqrt{t})$, zo dat $y_1(t) > y(t)$ ($t \geq t_1$). We hebben $\dot{y}_1 = \sqrt{t} y_1 - y_1^2$ en $\dot{y} = \sqrt{t} y - y^2$. Met $v := y_1 - y$ vinden we $\dot{v} = (\sqrt{t} - y_1 - y)v$, $v(t_1) > 0$. Dus $\dot{v} < (\sqrt{t} - \sqrt{t} + \frac{1}{t} - A)v = (-A + \frac{1}{t})v$. Er volgt $0 < v < Ce^{-\beta t}$ (t voldoende groot) met $\beta > 0$. Er volgt dat

$$y(t) = y_1(t) + O(e^{-\beta t}) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Conclusie:

$$y(t) = \sqrt{t} + O(t^{-1}) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Het is niet moeilijk om te bewijzen dat alle positieve oplossingen dezelfde en volledige asymptotische ontwikkeling bezitten van de gedaante

$$y(t) \approx \sqrt{t} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k t^{-k/2} \quad (t \rightarrow \infty) .$$

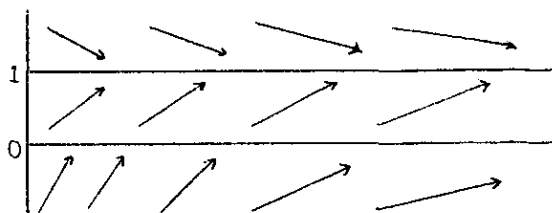
6.3. De bepaling van een volledige asymptotische reeks

Er zijn verschillende methoden om te bewijzen dat een oplossing een volledige asymptotische ontwikkeling heeft. We zullen twee methoden bespreken. Beide methoden berusten op volledige inductie; ze verschillen in de manier waarop de stap van n op $n + 1$ bewezen wordt. We zullen van beide methoden een voorbeeld geven.

(120) VOORBEELD METHODE I. We beschouwen

$$(121) \quad \dot{x} = t^{-2}(x^2 - x^3) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}) .$$

Als $A > 1$, dan is $(\varphi = A, \psi = -A)$ een stabiele buis. Dus alle oplossingen x



met $|x(1)| < A$ zijn begrensd. Hieruit volgt dat alle oplossingen x met eindige beginwaarden $x(1)$ begrensd zijn. Laat x zo'n begrensde oplossing zijn

op $[1, \infty)$ met $|x(t)| \leq M$ ($t \geq 1$). Dan $|\dot{x}(t)| \leq t^{-2}(M^2 + M^3)$. Dus $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ bestaat. Noem die limiet l .

Opmerking: $l \neq 0$ tenzij $x(t) \equiv 0$ en $l \neq 1$ tenzij $x(t) \equiv 1$. We nemen verder aan dat $l \neq 0$ of 1 . Dan

$$x(t) = l - \int_t^{\infty} \dot{x}(s) ds = l + O(t^{-1}) .$$

Veronderstel nu dat we al bewezen hebben dat

$$x(t) = l + c_1 t^{-1} + \dots + c_n t^{-n} + O(t^{-n-1}) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Substitueer deze asymptotische uitdrukking in het rechterlid van (121). Dan komt er $\dot{x} = d_2 t^{-2} + \dots + d_{n+2} t^{-n-2} + O(t^{-n-3})$. Hieruit volgt dat $x = a_0 + a_1 t^{-1} + \dots + a_{n+1} t^{-n-1} + O(t^{-n-2})$. Er volgt dat $a_0 = l$, $a_1 = c_1, \dots, \dots, a_n = c_n$. Conclusie: x heeft een volledige asymptotische ontwikkeling naar machten van t^{-1} :

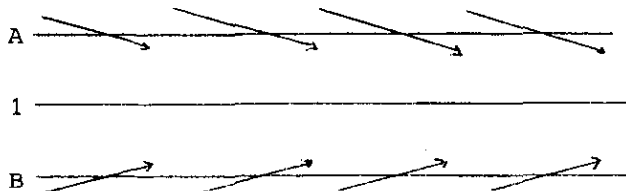
$$x(t) \approx l - (l^2 - l^3)t^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k t^{-k} \quad (t \rightarrow \infty) .$$

De coëfficiënten (c_k) kunnen dor formele substitutie berekend worden (waarom?).

(122) VOORBEELD METHODE II. We beschouwen

$$(123) \quad \dot{y} = 1 + t - ty + y^2 =: F(t, y) .$$

We willen het asymptotisch gedrag onderzoeken van de begrensde oplossingen. Laat A en B reële getallen zijn met $B < 1 < A$. Dan is $(\varphi = A, \psi = B)$ een stabiele buis.



Er zijn dus ∞ veel begrensde oplossingen.

Stel y_1 en y_2 zijn twee verschillende begrensde oplossingen en $y_1 > y_2$. Dan voldoet $v := y_1 - y_2$ aan

$$(124) \quad \dot{v} = -(t - (y_1 + y_2))v .$$

Dus $\dot{v} < -\frac{1}{2}tv$ voor t voldoende groot. Hieruit volgt dat $v = O(e^{-\frac{1}{2}t^2})$ ($t \rightarrow \infty$).
 We vermoeden dat een begrensde oplossing y een asymptotische ontwikkeling heeft van de gedaante

$$y \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} \quad (t \rightarrow \infty),$$

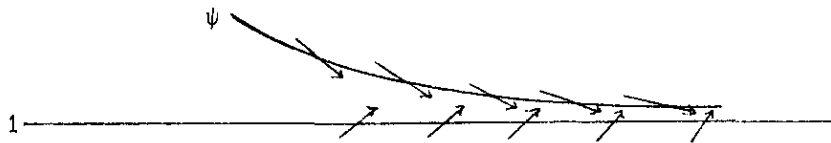
omdat formele substitutie een oplossing van die vorm geeft. Als dat zo is dan hebben alle begrensde oplossingen dezelfde asymptotische ontwikkeling naar machten van t^{-1} .

(125) OPMERKING. Het bovenstaande wil nog niet zeggen dat geen "betere" asymptotische uitdrukking mogelijk is. Bijvoorbeeld $y = \frac{t}{t-1} + O(e^{-t^2})$ ($t \rightarrow \infty$) is heel wat beter dan $y \approx \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k}$ ($t \rightarrow \infty$). □

We vermoeden dat elke begrensde oplossing limiet 1 heeft. We proberen een betere buis te vinden van de gedaante $\phi = 1 + At^{-1}$, $\psi = 1 + Bt^{-1}$. We vinden

$$\begin{aligned} \phi < F(t, \phi) \text{ o.d.d. als } A < 2 \\ \text{en} \\ \psi > F(t, \psi) \text{ o.d.d. als } B > -2. \end{aligned}$$

Dus $\phi \equiv 1$, $\psi = 1 + 3t^{-1}$ is een stabiele buis.



Er zijn dus ∞ veel begrensde oplossingen $y = 1 + O(t^{-1})$. We hoeven maar van één begrensde oplossing de asymptotische ontwikkeling naar machten van t^{-1} te bepalen. We substitueren $y = 1 + t^{-1}u$. Dan komt er

$$(126) \quad t^{-1}\dot{u} = 1 - (1 - 2t^{-1} - t^{-2})u + t^{-2}u^2.$$

We zoeken begrensde oplossingen u . Ook nu weer is er een stabiele buis van de gedaante $1 \pm At^{-1}$. Bovendien geldt ook nu weer dat 2 verschillende begrensde oplossingen u_1 en u_2 exponentieel weinig verschillen: $u_1(t) - u_2(t) = O(e^{-\alpha t^2})$. Opnieuw substitueren we $u = 1 + vt^{-1}$; we vinden

$$(127) \quad t^{-1}\dot{v} = 2 + 2t^{-1} - (1 - 2t^{-1} - 4t^{-2})v + t^{-3}v^2.$$

We merken op dat deze laatste vergelijking veel lijkt op (126). Dit brengt ons op het idee dat we vergelijkingen van het type (126) en (127) misschien kunnen inbedden in een klasse K van vergelijkingen met de volgende eigenschappen:

(128) Voor iedere vergelijking uit K geldt: er zijn oneindig veel begrensde oplossingen met een en dezelfde limiet, zeg ℓ ; het verschil van twee begrensde oplossingen is exponentieel klein; de substitutie $u = \ell + t^{-1}v$ levert een vergelijking in K op.

De klasse K bestaat uit vergelijkingen van het type:

$$(129) \quad t^{-1}\dot{x} = \alpha(t) - \beta(t)x + \gamma(t)x^2$$

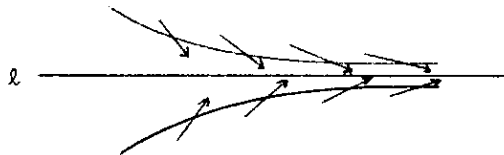
waarin α , β en γ asymptotische reeksen hebben

$$\alpha(t) \approx a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \dots,$$

$$\beta(t) \approx b_0 + b_1 t^{-1} + b_2 t^{-2} + \dots, \quad \text{met } b_0 > 0,$$

$$\gamma(t) \approx c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \dots,$$

We zullen laten zien dat deze klasse K voldoet aan de eisen. Beschouw $\varphi := \ell + t^{-1}A$ met $\ell := a_0 b_0^{-1}$. Het blijkt dat $t^{-1}\dot{\varphi} < F(t, \varphi)$ (t voldoende groot) als $a_1 - \ell b_1 + \ell^2 c_1 - b_0 A > 0$ is. Dit kan bereikt worden door A voldoende klein te kiezen; evenzo $t^{-1}\dot{\varphi} > F(t, \varphi)$ (t voldoende groot) als A voldoende groot. We hebben dan een stabiele buis



Laat x_1 en x_2 twee begrensde oplossingen zijn met $x_1 > x_2$. Dan $\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = (-tb_0 + O(1))(x_1 - x_2)$. Hieruit volgt dat $x_1 - x_2 = O(e^{-\frac{1}{2}b_0 t^2})$ ($t \rightarrow \infty$). Tenslotte, de substitutie $x = \ell + t^{-1}u$ levert de vergelijking

$$t^{-1}\dot{u} = \tilde{\alpha}(t) - \tilde{\beta}(t)u + \tilde{\gamma}(t)u^2,$$

waarin

$$\tilde{\alpha}(t) \approx (a_1 - b_1 \ell + c_1 \ell^2) + \tilde{a}_1 t^{-1} + \dots$$

$$\tilde{\beta}(t) \approx b_0 + (b_1 - 2c_1 \ell)t^{-1} + \dots$$

$$\tilde{\gamma}(t) = t^{-1}\gamma(t) \approx c_1 t^{-2} + \dots,$$

een vergelijking in K .

Hieruit volgt dat elke vergelijking in $K \infty$ veel begrensde oplossingen bezit: alle begrensde oplossingen van een vergelijking uit K hebben dezelfde asymptotische machtreeksontwikkeling

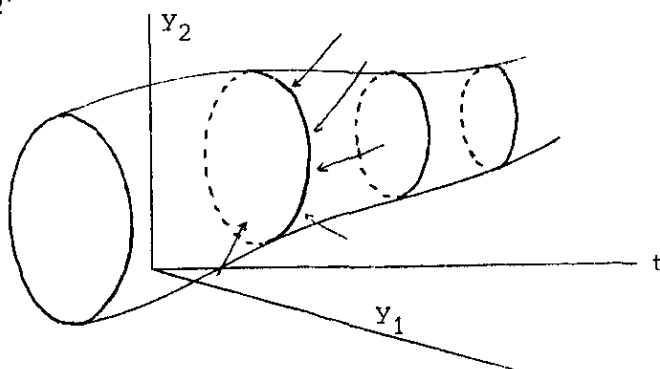
$$y(t) \approx r_0 + r_1 t^{-1} + r_2 t^{-2} + \dots \quad (t \rightarrow \infty).$$

De coëfficiënten r_i kunnen gevonden worden door formele substitutie. Dit kan uit het bovenstaande bewezen worden, maar ook, gemakkelijker, door op te merken dat met x ook \dot{x} een asymptotische machtreeksontwikkeling naar machten van t^{-1} bezit.

(130) OPMERKING. Als de klasse K gedefinieerd wordt met $b_0 < 0$, dan vinden we dat er precies één begrensde oplossing is; deze oplossing heeft een asymptotische ontwikkeling $r_0 + r_1 t^{-1} + \dots$ ($t \rightarrow \infty$). Deze begrensde oplossing is een instabiele oplossing in tegenstelling tot het voorbeeld (122) waar we begrensde stabiele oplossingen bekeken.

(131) OPMERKING. Ook bij stelsels zijn buizen mogelijk:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= F_1(t, y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= F_2(t, y_1, y_2). \end{aligned}$$



6.4. Toepassing op lineaire niet-oscillerende differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

Een differentiaalvergelijking van het type

$$(132) \quad \ddot{y} + A(t)\dot{y} + B(t)y = 0$$

gaat door de substitutie

$$(133) \quad \varphi := \dot{y}/y$$

over in

$$(134) \quad \dot{\varphi}^2 + \varphi^2 + A(t)\varphi + B(t) = 0 .$$

Nulpunten van y corresponderen dan met verticale asymptoten voor φ . Oplossingen φ die gedefinieerd zijn op een interval $[a, \infty)$ corresponderen met niet-oscillerende oplossingen y .

(135) VOORBEELD. We beschouwen

$$(136) \quad \ddot{y} + t^{-1}\dot{y} - y = 0 .$$

Door de substitutie (133) gaat (136) over in

$$(137) \quad \dot{\varphi} = 1 - t^{-1}\varphi - \varphi^2 .$$

Heuristische overwegingen (bekijk het richtingsveld) leiden tot het vermoeden dat er oplossingen $\varphi \sim 1$ ($t \rightarrow \infty$) en $\varphi \sim -1$ ($t \rightarrow \infty$) zijn. Dit vermoeden wordt bevestigd door het bestaan van een stabiele buis van het type $1 \pm ct^{-1}$ en een instabiele buis $-1 \pm ct^{-1}$.

Het geval $\varphi \sim 1$ ($t \rightarrow \infty$).

We substitueren $\varphi = 1 + t^{-1}u$; dat geeft

$$\dot{u} = -1 - 2u - t^{-1}u^2 .$$

Dat is zo'n stabiele (Riccati)-vergelijking; er zijn ∞ veel begrensde oplossingen, en die oplossingen hebben alle de asymptotische ontwikkeling

$$u \approx -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t^{-1} + r_2t^{-2} + \dots \quad (t \rightarrow \infty) ,$$

corresponderend met ∞ veel oplossingen y waarvoor

$$\frac{\dot{y}}{y} \approx 1 - \frac{1}{2}t^{-1} - \frac{1}{8}t^{-2} + r_2t^{-3} + \dots \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\dot{y}/y = 1 - \frac{1}{2}t^{-1} - \frac{1}{8}t^{-2} + \dots + O(t^{-n}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\log|y(t)| = \log|y(t_0)| + t - \frac{1}{2}\log t + c - \frac{1}{8}t^{-1} + \dots + O(t^{-n+1}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$y(t) \approx c \frac{e^t}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{1}{8}t^{-1} + c_2t^{-2} + \dots\right) \quad (t \rightarrow \infty)$$

(stabiele oplossingen).

Het geval $\varphi \sim -1$ ($t \rightarrow \infty$).

Substitutie van $\varphi = -1 + t^{-1}v$ geeft

$$\dot{v} = 1 + 2v + t^{-2}v^2.$$

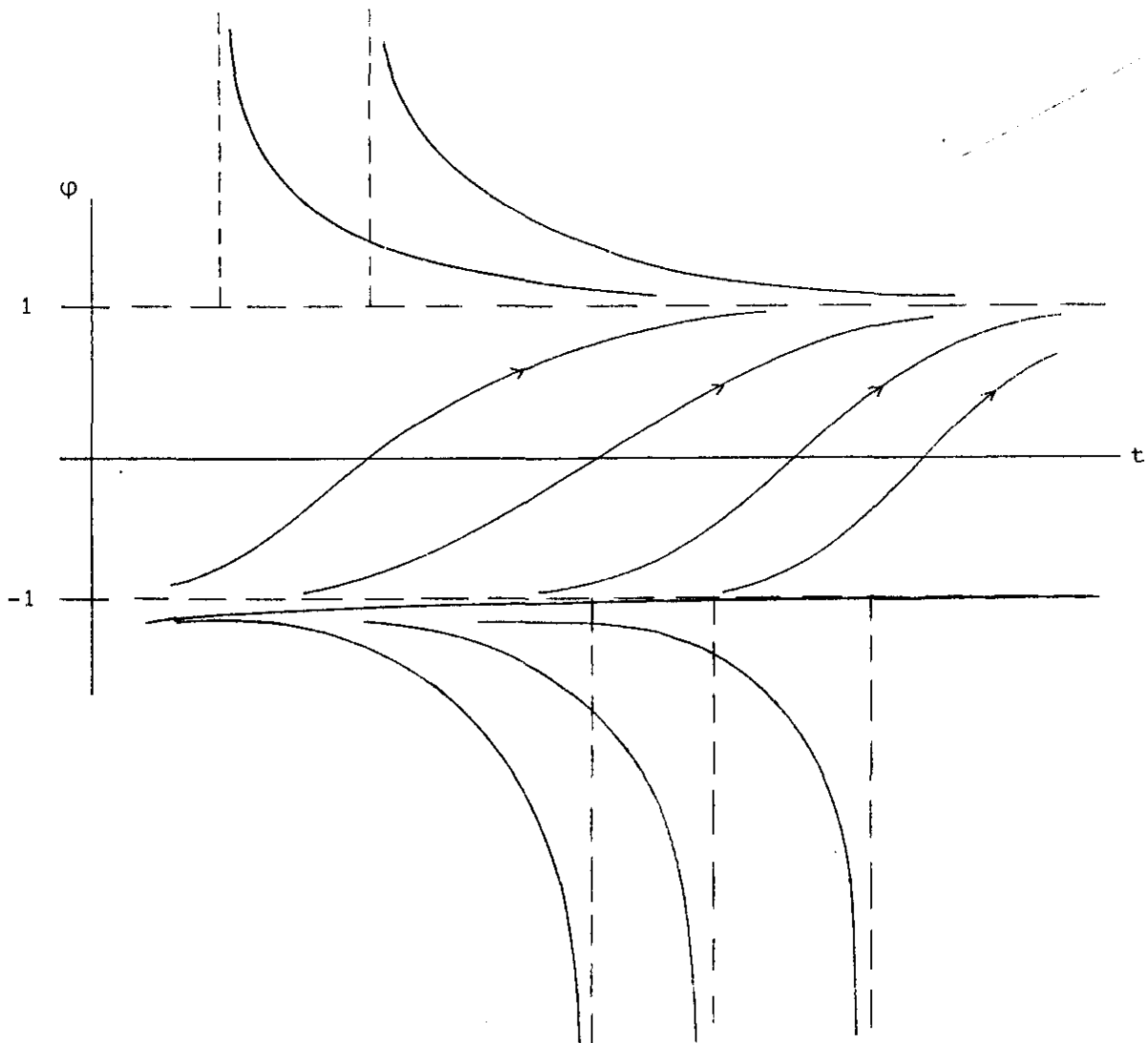
Er is één instabiele oplossing die begrensd is; deze heeft een asymptotische ontwikkeling

$$v \approx -\frac{1}{2} + r_1 t^{-1} + \dots \quad (t \rightarrow \infty)$$

corresponderend met oplossingen y met asymptotische ontwikkeling

$$y(t) \approx c \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} (1 + c_1 t^{-1} + \dots) \quad (t \rightarrow \infty).$$

(instabiele oplossingen).



LITERATUUR.

- [1] de Bruijn, N.G., *Asymptotic Methods in Analysis*, Dover Publications, Inc., 1981.
- [2] Copson, E.T., *Asymptotic Expansions*, Cambridge University Press, 1965.
- [3] Lauwerier, H.A., *Asymptotic Expansions*, Mathematisch Centrum, 1966.
- [4] Murray, J.P., *Asymptotic Analysis*, Applied Mathematical Sciences 48, Springer-Verlag, 1984.

VRAAGSTUKKEN.

HOOFDSTUK 1

Toon aan dat

1. $\sin x = O\left(\frac{x}{1+x}\right) \quad (0 \leq x < \infty)$
2. $O(o(1)) = o(1) \quad (x \rightarrow \infty)$
3. Uit $f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow \infty)$ volgt $g(x) \sim f(x) \quad (x \rightarrow \infty)$.
4. Als $f \in C([0, \infty): \mathbb{C})$, $f(x) = O(x) \quad (x \rightarrow \infty)$, dan $f(x) = O(x+1) \quad (x \geq 0)$.
5. $\log \log(1 + e^x) = O(\log(2 + x^2)) \quad (0 \leq x < \infty)$
6. $\log \log(1 + e^x) = O(1 - x) \quad (-\infty < x \leq 0)$
7. $e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + O\left(\frac{x^2}{n}\right) \quad (x \geq 0, n \in \mathbb{N})$.
8. Bewijs Stelling (7).
9. Laat $f \in C^2([0, \infty))$ met $f''(0) \neq 0$. Bewijs dat $\theta = \theta(x)$ gedefinieerd door $f(x) = f(0) + xf'(x\theta)$ voldoet aan $\theta(x) = \frac{1}{2} + o(1) \quad (x \downarrow 0)$.
10. Laat $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn, $g'(x) > 0 \quad (x > 0)$, $f(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$ en $f'(x) \sim g'(x) \quad (x \rightarrow \infty)$. Dan geldt $f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow \infty)$.
11. Laat $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$. Toon aan dat

$$f(x, y) = O(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \infty) \text{ uniform in } y \in \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = O(x^{-2}) \quad (x \rightarrow \infty) \text{ niet uniform in } y \in \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = O((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$$

12. Laat $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voldoen aan

$$f(x) = yO(1) + y^{-1}O(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \infty),$$

waarin de O -symbolen uniform zijn voor $y > 0$.

Toon aan dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

13. Laat $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tweemaal differentieerbaar zijn met begrensde tweede afgeleide f'' en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ bestaan. Bewijs dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

14. Bewijs Stelling (16).

Toon aan dat

15.
$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \log(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + O(x^{n+1}) \quad (x \geq 0).$$

16.
$$(1+n^{-1})^n = e \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) + O(n^{-3}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

17.
$$x^{-1}O(1) = O(x^{-2}) \quad (0 < x < \infty).$$

18.
$$\frac{1}{x^x} = 1 + \frac{\log x}{x} + \frac{\log^2 x}{2x^2} + O\left(\frac{\log^3 x}{x^3}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

19.
$$x^{\frac{1}{x}} = x + \log^2 x + O\left(\frac{\log^4 x}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

20.
$$\left(1 + \frac{\log n}{n}\right)^n = n - \frac{1}{2} \log^2 n + O\left(\frac{\log^4 n}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

21.
$$\sqrt{x^2 + xy} = x + \frac{1}{2}y + O(y^2 x^{-1}) \quad (x > 0, y > 0).$$

22.
$$x^n e^{2n(x-n)} = O(e^{x^2+x}) \quad (x > 0) \text{ uniform in } n \in \mathbb{N}.$$

23. Zij
$$f(x) \approx a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

a) Heeft $g(x) := f(x) - f(x-1)$ een asymptotische reeks naar machten van $\frac{1}{x}$?

b) Idem $h(x) := e^{f(x)}$?

c) Convergeert de reeks $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \dots$?

24. Bepaal een asymptotische ontwikkeling van

$$\int_0^x e^{t^2} dt \quad \text{voor } x \rightarrow \infty.$$

25. Bepaal enkele termen van een asymptotische ontwikkeling van $\int_0^x t^t dt$ voor $x \rightarrow \infty$.

HOOFDSTUK 3

Bepaal het asymptotische gedrag voor $t \rightarrow \infty$ van alle reële wortels van

1. $x^3 - 3t^2x + tx - t^3 = 0$

2. $e^{-x/t} = \frac{1}{2} e^{-t/t}$

3. $e^x - x^2 = e^t$.

4. Bepaal het asymptotische gedrag voor $t \rightarrow \infty$ van de plaats en de grootte van het maximum van x^{t-x} voor $0 \leq x < \infty$.

5. Bepaal het asymptotische gedrag voor $n \rightarrow \infty$ van de wortel x_n in de buurt van $2\pi n$ van de vergelijking $\sin x = \frac{1}{x^2 + 1}$.

6. Voor grote waarden van n heeft

$$x^3 - x + n^3 = 0$$

één reële wortel x .

Bepaal het asymptotische gedrag van x voor $n \rightarrow \infty$.

7. Bepaal het asymptotische gedrag voor $n \rightarrow \infty$ van $x(n)$ gedefinieerd door

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x(n)}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{n}.$$

HOOFDSTUK 4

Bepaal het asymptotische gedrag voor $t \rightarrow \infty$ van

1.
$$\int_0^{\infty} e^{-2tx} (1+x)^t dx$$

2.
$$\int_0^{\infty} e^{-tx} \log(1+tx^2) dx$$

3.
$$\int_0^{\infty} (1+ax^2)^{-t} dx \quad \text{uniform in } a \in [1,2]$$

4.
$$\int_{-1}^{+1} e^{x^2 - x^4} dx$$

5.
$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^t dx$$

6.
$$\int_0^{\infty} u^{-u+t} du$$

7.
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+t \sin(x^2)}$$

Bepaal het asymptotische gedrag voor $n \rightarrow \infty$ van

8.
$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n$$

HOOFDSTUK 5

Bepaal het asymptotisch gedrag (enkele termen) voor $n \rightarrow \infty$ met behulp van de "elementaire methode" van

1.
$$S_n := \sum_{k=2}^n \sqrt{k} \log \log k .$$

2.
$$\sum_1^n \sin(\log k) .$$

Bij de volgende vraagstukken kunt U gebruik maken van Euler-Maclaurin.

3. Bewijs dat

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sin x \, dx + \frac{\sin 1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

4. Bepaal een polynoom $p(x)$ z6 dat

$$\sum_{k=1}^n k^3 = p(n) \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Toon aan dat

5.
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + O(\sqrt{x}) \quad (x \downarrow 0) .$$

6.
$$\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^2} + O(n^{-3})\right) \quad (n \rightarrow \infty) .$$

7.
$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k^2}\right) = \frac{e^{\pi\sqrt{x}-11/6-c}}{\sqrt{x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \quad (x \rightarrow \infty) \text{ met } c = \int_1^{\infty} \frac{B_2(x - [x])}{x^2} \, dx .$$

8.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2 y^2} = \frac{\pi}{2y} - \frac{1}{2} + O(y^2) \quad (y \downarrow 0) .$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{2} + O(x) \quad (x \downarrow 0) .$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} = \frac{1}{x-1} + C + O((x-1)) \quad (x > 1) .$$

11.
$$\prod_{n=1}^N n^n = CN^{\frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N + 1/12} e^{-\frac{1}{4}N^2} (1 + O(\frac{1}{N^2})) \quad (N \rightarrow \infty) .$$

12.
$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{k^k} = Cn^{\frac{1}{2} \log n} (1 + \frac{1}{2} \frac{\log n}{n} + O(\frac{\log^2 n}{n^2})) \quad (n \rightarrow \infty) .$$

13. Bepaal asymptotisch gedrag voor $t \downarrow 0$ van

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + k^2 t} .$$

14. Idem voor $n \rightarrow \infty$ van

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{n + k^2/n} .$$

15. Bewijs m.b.v. EM dat

$$n! \approx Cn^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)(2k-1)} n^{1-2k}\right) \quad (n \rightarrow \infty) .$$

16. Leid uit integratie van 0 tot $\pi/2$ van

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$$

af dat

$$\frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \rightarrow \pi \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Bepaal nu de constante C in 15.

HOOFDSTUK 6

1. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = t^2 - x^2.$$

Bewijs de volgende uitspraken:

- Er zijn ∞ veel oplossingen x met $x \sim t$ ($t \rightarrow \infty$).
- Voor de oplossingen uit a) geldt: $x(t) = t + O(t^{-1})$ ($t \rightarrow \infty$).
- Alle oplossingen uit a) hebben dezelfde asymptotische machtreeksontwikkeling naar machten van t^{-1} . Bepaal enkele coëfficiënten.
- Er is één oplossing x met $x(t) \sim -t$ ($t \rightarrow \infty$). Deze oplossing heeft asymptotische ontwikkeling naar machten van t^{-1} . Bepaal enkele coëfficiënten daarvan.

2. Beschouw

$$\dot{x} = -t^{-1} + 2t^{-1}x - t^{-2}x^2.$$

Bewijs de uitspraken a), b) en c).

- Er is precies één begrensde oplossing.
- Deze oplossing heeft een asymptotische ontwikkeling naar machten van t^{-1} .
- Er zijn ∞ veel oplossingen x met $x(t) \sim t$ ($t \rightarrow \infty$).
- Bepaal tenminste 4 termen van een asymptotische ontwikkeling van zo'n oplossing uit c).

3. Onderzoek het asymptotische gedrag van oplossingen van

$$\ddot{y} + t^{-1}\dot{y} - (1 - k^2t^{-2})y = 0.$$

(k vast reëel getal).

4. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} + t^{-3}y = 0.$$

a) Toon aan dat er oplossingen y zijn met

$$(*) \quad y \approx C(1 - \frac{1}{2}t^{-1} + p_2t^{-2} + \dots) \quad (t \rightarrow \infty).$$

b) Toon aan: Als y_1 en y_2 twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn dan geldt

$$\dot{y}_2 y_1 - y_2 \dot{y}_1 = C \neq 0 .$$

Hieruit volgt (als y_1 niet-oscillerend is) dat

$$y_2 := y_1^2 \int \frac{ds}{y_1^2(s)}$$

met y_1 een basis vormt van de oplossingsruimte.

Laat y_1 oplossing zijn die correspondeert met $C = 1$ in (*). Toon aan dat

$$y_2 \approx t + (\log t) \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots \right) + b_0 + \frac{b_1}{t} + \dots \quad (t \rightarrow \infty) .$$