TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

ALGEBRA

en

ANALYSE

Prof. Dr. J.H. van Lint

Najaarssemester 1967

Onderafdeling der Wiskunde

Algebra en Analyse

SYLLABUS VAN HET COLLEGE

VAN

PROF. DR. J.H. VAN LINT

MET VRAAGSTUKKEN

NAJAARSSEMESTER 1967

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 225
PRIJS F 2,00

Onderafd. der Wiskunde
Algebra en Analyse
Syllabus v.h. college van
Prof. dr. J. H. van Lint
najaarssemester 1967
Prijs f 2,00
Dict. nr. 225

Onderafdeling der Wiskunde

A L G E B R A   E N   A N A L Y S E

Syllabus van het college van

Prof. dr. J.H. van Lint

met vraagstukken

Najaarssemester 1967

Technische Hogeschool Eindhoven

Aanvullende inhoudsbeschrijving

van de vraagstukken in ALGEBRA en ANALYSE

najaarssemesterjaar 1967

Vraagstukken over:

JdG, 20 Juli 2005

Inhoud

Voorwoord

Dit dictaat bevat de definities en stellingen van het college Algebra en Analyse. Bij de stellingen waarvan geen bewijs vermeld is staat aangegeven waar in de literatuur een bewijs is te vinden dat in het algemeen zal overeenkomen met de in het college gebruikte bewijsmethode. In dit college wordt de stof van de colleges Wiskunde I en II, een enkele maal ook van Wiskunde III bekend verondersteld. Het is de bedoeling de hiaten in de exacte opbouw, die het college van het eerste jaar, in verband met de noodzakelijke eenvoud, vertoont, nu op te vullen en verder een hoeveelheid analytische kennis en vaardigheid over te dragen. Er is een grote hoeveelheid opgaven aan de tekst toegevoegd. Soms wordt naar de opgaven verwezen in een bewijs. Ook om andere redenen is het kritisch maken van deze opgaven uiterst noodzakelijk.

Zowel in de tekst van de syllabus als in de vraagstukken zijn voor verschillende begrippen vaste notaties gebruikt; de meest voorkomende zijn hieronder in een kleine tabel aangegeven. Kwantoren en andere symbolen uit de logica worden naar behoefte gebruikt, niet systematisch.

De exameneisen voor Algebra en Analyse zijn als volgt: Het moet in zijn geheel zowel schriftelijk als mondeling worden afgelegd; voor hen die aan het praktikum meewerken zijn er drie praktikumtentamens (omstreeks begin september, halverwege maart en begin mei) waarvan de resultaten tot vrijstelling van het schriftelijk tentamen kunnen leiden; het schriftelijk tentamen wordt in iedere examen/tentamenperiode afgenomen; het mondeling volgt kort daarna, maar wordt niet afgenomen als de uitslag van het schriftelijk tentamen van grove onbedrevenheid van de kandidaat blijk geeft.

In de literatuurlijst, voorafgaande aan de tekst, zijn alle titels (met het bijbehorende catalogusnummer) vermeld waarnaar in de tekst wordt verwezen; deze boeken zijn in te zien (maar niet te leen) in de bibliotheek der onderafdeling wiskunde.

Notaties

Nt : de verzameling der natuurlijke getallen

Gh : de verzameling der gehele getallen

Rt : de verzameling der rationale getallen

Rl : de verzameling der reële getallen

C of Cm: de verzameling der complexe getallen

P(X) : de klasse van deelverzamelingen van de verzameling X.

Literatuur

(De vermelde letter-cijfer combinatie is die van de catalogus in de wiskunde-bibliotheek van de THE.)

[1] A.A. Albert, Fundamental concepts of higher algebra. (BB 5911)

[2] G. Birkhoff and S. MacLane, A survey of modern algebra. (BB 5303)

[3] R. Godement, Cours d'algèbre. (BB 6309)

[4] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra (BB 5511)

[5] B.L. van der Waerden, Algebra, (BB 5504)

[6] J. Dieudonné, Foundations of modern analysis. (BK 6006)

[7] E. Hille, Analysis. (BE 6410)

[8] M.E. Munroe, Introductory real analysis. (BE 6504)

[9] H.L. Royden, Real analysis. (BK 6307)

[10] W. Rudin, Principles of mathematical analysis. (BE 6403)

[11] G.F. Simmons, Introduction to topology and modern analysis. (BK 6301)

[12] C. Berge, Espaces topologiques. (BK 5902)

[13] R.P. Boas, A primer of real functions. (BK 6002)

[14] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities. (BE 5203)

[15] I.P. Natanson, Theory of functions of a real variable. (BK 5506)

[16] G. Valiron, Théorie des functions. (BG 5516)

[17] T.M. Apostol, Mathematical analysis. (BE 5704)

[18] G.H. Hardy, Pure mathematics. (BE 5506)

[19] N.G. de Bruijn, Asymptotic methods in analysis. (BG 5805) .

[20] F.B. Hildebrand, Introduction to numerical analysis. (BM 5608)

[21] W. Rogosinski, Fouriersche Reihen. (BJ 3002)

I. Algebra

Literatuur: [1] t/m [5] .

Groepen

(1.1) Definitie: Zij (G,) een verzameling met een productoperatie. (G,) heet een groep indien:

G1: $\forall a \in G \quad \forall b \in G \quad \forall c \in G \quad [(ab)c = a(bc)]$;

G2: $\exists e \in G \quad \forall a \in G \quad [ae = ea = a]$;

G3: $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad [ab = ba = e]$.

(1.2) Definitie: Een groep (G,) heet een abelse of commutatieve groep als

$\forall a \in G \quad \forall b \in G \quad [ab = ba]$.

(1.3) Stelling : In een groep (G,) zijn de vergelijkingen $ax = b$ en $xa = b$ voor alle a en b eenduidig oplosbaar ([2], p.127).

(1.4) Stelling : Zij G een niet lege verzameling; zij $(a,b) \to ab$ een afbeelding van $G \times G$ in G die voldoet aan G1 en aan:

$\forall a \, \forall b \quad (ax = b$ en $xa = b$ eenduidig oplosbaar).

Dan is (G,) een groep ([1], p.7 - 8).

(1.5) Definitie: De groepen $(G,\cdot)$ en $(G^*,*)$ heten isomorf indien en een 1-1-duidige afbeelding ψ van G op G^* bestaat zó dat

$\forall a \in G \quad \forall b \in G \quad [\psi(a \cdot b) = \psi(a) * \psi(b)]$.

Notatie: $(G,\cdot) \sim (G^*,*)$. De afbeelding ψ heet een isomorfisme van $(G,\cdot)$ op $(G^*,*)$.

(1.6) Definitie: Is $(G,\cdot)$ een groep en H een deelverzameling van G dan heet $(H,\cdot)$ een ondergroep van $(G,\cdot)$ indien $(H,\cdot)$ zelf een groep is.

(1.7) Stelling : Als H een niet lege deelverzameling is van G, $(G,\cdot)$ een groep, dan is $(H,\cdot)$ dan en slechts dan ondergroep van $(G,\cdot)$ indien

$\forall h_1 \in H \quad \forall h_2 \in H \quad [h_1 \cdot h_2^{-1} \in H]$.

([5], p.27).

Zij V een verzameling; zij $S(V)$ de verzameling van alle 1-1-duidige afbeeldingen van V op zichzelf. Zij $\circ$ de samenstelling van afbeeldingen. Dan is $(S(V),\circ)$ een groep. Deze heet de groep van de permutaties van de elementen van V (permutatiegroep).

(1.8) Definitie: De <u>symmetrische groep</u> S_n is de permutatiegroep $(S(V),\circ)$ waarin $V = \{1,2,\ldots,n\}$.

(1.9) Stelling : Iedere groep is isomorf met een ondergroep van een permutatiegroep ([2], p.132).

(1.10) Definitie: Een functie f van n variabelen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heet <u>symmetrische functie</u> indien voor iedere permutatie $(1,2,\ldots,n) \to (i_1,i_2,\ldots,i_n)$ uit S_n geldt

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv f(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n}).$$

Voorbeeld: $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ is een symmetrische functie van 3 variabelen.

<u>Ringen</u>

Zij R een verzameling, φ_1 een afbeelding van $R \times R$ in R en φ_2 een afbeelding van $R \times R$ in R. In plaats van $\varphi_1(a,b)$ schrijven we $a+b$; in plaats van $\varphi_2(a,b)$ schrijven we ab. Voor deze verzameling met twee bewerkingen gebruiken we de notatie $(R,+,\ )$.

(1.11) Definitie: $(R,+,\ )$ heet een <u>ring</u> indien:

R1: $(R,+)$ is een commutatieve groep,

R2: $\forall a \in R \quad \forall b \in R \quad \forall c \in R \quad [a(bc) = (ab)c]$ (associatieve wet),

R3: $\forall a \in R \quad \forall b \in R \quad \forall c \in R \quad [a(b+c) = ab + ac]$

$\forall a \in R \quad \forall b \in R \quad \forall c \in R \quad [(a+b)c = ac + ab]$

(distributieve wetten).

(1.12) Definitie: De ring $(R,+,\ )$ heet commutatief indien:

$$\forall a \in R \quad \forall b \in R \quad [ab = ba] .$$

Men noemt $(R,+)$ de additieve groep van de ring. Het eenheidselement van deze groep wordt als 0 geschreven, de inverse van a wordt met $-a$ aangegeven. We maken de volgende afspraken over notatie:

$$a - b := a + (-b)\,,$$
$$ma := a + a + \ldots + a \quad (m \text{ keer}) \text{ als } m \in Nt\,,$$
$$ma := 0 \quad \text{als } m \text{ het getal } 0 \text{ is}\,,$$
$$ma := -((-m)a) \quad \text{als } m \text{ een negatief geheel getal is.}$$

(1.13) Definitie: Als $(R,+,\ )$ een ring is, $a \in R$, $b \in R$ en

$$ab = 0\,,\quad a \neq 0\,,\quad b \neq 0$$

dan heet a een linker <u>nuldeler</u> en b een rechter nuldeler.

In een ring $(R,+,\ )$ wordt het element 0 het <u>nulelement</u> genoemd. We zeggen dat de ring een <u>eenheidselement</u> heeft indien

$$\exists e \in R \quad \forall a \in R \quad [ae = ea = a]\,.$$

(1.14) Definitie: De ringen $(R,+,\ )$ en $(R^*,\dot{+},*)$ heten <u>isomorf</u> indien er een 1-1 duidige afbeelding ψ van R op R^* bestaat zo dat

$$\forall a \in R \quad \forall b \in R \quad [\psi(a+b) = \psi(a) \dot{+} \psi(b)]\,,$$
$$\forall a \in R \quad \forall b \in R \quad [\psi(ab) = \psi(a) * \psi(b)]\,.$$

(1.15) Definitie: Is $(R,+,\ )$ een ring, $S \subset R$, $(S,+,\ )$ een ring dan heet $(S,+,\ )$ <u>deelring</u> van $(R,+,\ )$.

(1.16) Stelling : Zij $(R,+,\ )$ een ring en zij $S \subset R$ en S niet leeg. Dan is $(S,+,\ )$ dan en slechts dan een deelring van $(R,+,\ )$ indien:

$$\forall a \in S \quad \forall b \in S \quad [a - b \in S]\,,$$
$$\forall a \in S \quad \forall b \in S \quad [ab \in S]\,.$$

Bewijs : gevolg van (1.7).

(1.17) Definitie: Zij $(R,+,\ )$ een ring en zij S een niet lege deelverzameling van R. $(S,+,\ )$ heet een <u>ideaal</u> van $(R,+,\ )$ indien:

$$\forall a \in S \quad \forall b \in S \quad [a - b \in S]\,,$$
$$\forall a \in R \quad \forall b \in S \quad [(ab \in S)\ \&\ (ba) \in S]\,.$$

We spreken van een <u>echt</u> ideaal als S een echte deelverzameling van R is.

Uit (1.16) volgt dat een ideaal een deelring is. In de ring $(R,+,\ )$ is $(\{0\},+,\ )$ een ideaal, genaamd <u>nulideaal</u>.

Lichamen

(1.18) Definitie: Een ring $(R,+,\ )$ heet een lichaam indien $(R\setminus\{0\},\ )$ een groep is.

We noemen $(R\setminus\{0\},\ )$ de multiplicatieve groep van het lichaam. Is deze commutatief dan heet het lichaam commutatief. Vaak wordt onder een lichaam een commutatief lichaam verstaan en spreekt men van een scheef lichaam als niet commutatief bedoeld wordt.

Het lichaam van de rationale getallen Rt is gedefinieerd door uitgaande van de ring van de gehele getallen Gh quotiënten te vormen. We laten nu zien dat deze constructie ook bij andere ringen mogelijk is. Laat $(R,+,\ )$ een commutatieve ring zonder nuldelers zijn, die tenminste één van 0 verschillend element bevat. Kies een vast element $r \in R$, $r \neq 0$. Zij V de deelverzameling van $R \times R$ gedefinieerd door

$$V := \{(a,b) \mid a \in R,\ b \in R,\ b \neq 0\} .$$

In V definiëren we de relatie $\sim$ door:

$$\forall_{(a,b)\in V}\ \forall_{(c,d)\in V}\ [((a,b) \sim (c,d)) :\Leftrightarrow (ad = bc)] .$$

Dit is een equivalentierelatie. We gebruiken nu de notatie: $\{(a,b)\} :=$ $:=$ klasse van (a,b). Zij Q de verzameling der equivalentieklassen. In Q definiëren we de bewerkingen $\oplus$ en $\times$ door:

$$\{(a,b)\} \oplus \{(c,d)\} := \{(ad+bc,bd)\} ,$$

$$\{(a,b)\} \times \{(c,d)\} := \{(ac,bd)\} .$$

Deze definitie is zinvol. Nu is $\{Q,\oplus\}$ een commutatieve groep met $\{(0,r)\}$ als eenheidselement. Verder is ook $(Q\setminus\{\{(0,r)\}\},\times)$ een commutatieve groep; (het eenheidselement is $\{(r,r)\}$). Dus is $(Q,\oplus,\times)$ een commutatief lichaam. Zij $\bar{R} := \{\{(ar,r)\} \mid a \in R\}$. Dan is $(\bar{R},\oplus,\times)$ een deelring van $(Q,\oplus,\times)$ die isomorf is met $(R,+,\ )$. Als we nu $(R,+,\ )$ en $(\bar{R},\oplus,\times)$ identificeren hebben we de gegeven ring uitgebreid tot een lichaam. Dit lichaam heet het quotiëntenlichaam van $(R,+,\ )$.

(Zie [5], § 16.)

Uit het bovenstaande trekken we nog een conclusie. Laat $(K,+,\ )$ een lichaam zijn met e als eenheidselement. Als $\forall_{n\in Nt, n\neq 0}\ [ne \neq 0]$ dan bevat $(K,+,\ )$ een deellichaam dat isomorf is met Rt. Dit zien we in door op te merken dat $(\{ne \mid n \in Gh\},+,\ )$ isomorf is met $(Gh,+,\ )$. Daar $(K,+,\ )$ het quotiëntenlichaam van deze deelring bevat, bevat het een lichaam isomorf met $(Rt,+,\ )$.

(1.19) Definitie: Een lichaam $(K,+,\ )$ heet geordend als een deelverzameling P van K is aangewezen met de volgende eigenschappen:

$\sigma 1$: $\forall x \in P \quad \forall y \in P \quad [x+y \in P]$,

$\sigma 2$: $\forall x \in P \quad \forall y \in P \quad [xy \in P]$,

$\sigma 3$: $\forall x \in K \quad [(x \in P) \Rightarrow (-x \notin P)]$,

$\sigma 4$: $\forall x \in K \quad [(x=0) \vee (x \in P) \vee (-x \in P)]$.

De elementen van P noemen we positief. We gebruiken verder de notaties $x < y$ resp. $y > x$ om aan te geven dat $y - x \in P$.
Uit het aan (1.19) voorafgaande volgt dat een geordend lichaam het lichaam Rt bevat.

II. Reële getallen

Literatuur: [6] t/m [10].

Zij $(K,+,\ )$ een lichaam voorzien van een ordening $<$. Is A een deelverzameling van K en m een element van K met de eigenschap $\forall a \in A\ [a \leq m]$ dan heet m een bovengrens van A. We noemen A naar boven begrensd.

(2.1) Definitie: Een geordend lichaam $(K,+,\ ,<)$ heet Dedekinds geordend als iedere niet lege deelverzameling van K die een bovengrens heeft een kleinste bovengrens (supremum) heeft.

Aan het einde van dit college zullen we uitgaande van Rt een Dedekinds geordend lichaam construeren en tevens aantonen dat twee Dedekinds geordende lichamen isomorf zijn. Voorlopig nemen we dit aan:

(2.2) Axioma : Er is één Dedekinds geordend lichaam (op isomorfie na).

We noemen dit lichaam het lichaam der reële getallen $R\ell$. Rt is een deellichaam van $R\ell$. (Zie [8], p.24, p.25 opgave 9; [9], p.21 - 23; [5], § 68.)

(2.3) Stelling : Iedere niet lege deelverzameling van $R\ell$ die een ondergrens heeft, heeft een grootste ondergrens (infimum).

Bewijs : Als V de verzameling is, pas dan (2.1) toe op $W := \{x \mid -x \in V\}$.

(2.4) Stelling (Dedekind): Is $R\ell$ gesplitst in twee disjuncte niet lege deelverzamelingen A en B waarvoor geldt

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad [a < b]$$

dan is er een $c \in R\ell$ met de eigenschappen

$$\forall x \in R\ell \quad [(x < c) \Rightarrow (x \in A)]\,, \quad \forall y \in R\ell \quad [(y > c) \Rightarrow (y \in B)]$$

([9], p.23).

Een splitsing van Rt van bovenstaand type heeft niet de eigenschap van (2.4). Dedekind noemde zo'n splitsing een snede. Men kan voor sneden optelling en vermenigvuldiging definiëren en dan aantonen dat ze een Dedekinds geordend lichaam vormen. Deze definitie van $R\ell$ vindt men in [10] Ch. 1 .

(2.5) Stelling : Voldoen de rijen reële getallen $a_1, a_2, \dots$ en $b_1, b_2, \dots$ aan

$$\forall_{n \in Nt}\ [a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n]$$

dan is er een $c \in R\ell$ met

$$\forall_{n \in Nt} [a_n \leq c \leq b_n] .$$

([7], p.21).

In [6] wordt $R\ell$ gedefinieerd door (2.5) als eigenschap te postuleren i.p.v. (2.1).

(2.6) Definitie: Een geordend lichaam $(K,+, \cdot ,<)$ heet <u>archimedisch geordend</u> als

$$\forall_{\alpha \in K, \alpha > 0} \forall_{\beta \in K} \exists_{n \in Nt} [n\alpha > \beta] .$$

(2.7) Stelling : $R\ell$ is archimedisch geordend ([9], p.25; [8], p.24).

Het is niet moeilijk aan te tonen dat er een getal $\alpha \in R\ell$ is met $\alpha^2 = 2$ en dat $\alpha \notin Rt$ ([10], p.2). Er zijn dus reële getallen die niet rationaal zijn, zg. irrationale getallen.

(2.8) Stelling : Als $a_1, a_2, \ldots$ een rij reële getallen is dan is er ten hoogste één getal $a \in R\ell$ met de volgende eigenschappen:

$$\forall_{x \in R\ell, x > a} \exists_{N \in Nt} \forall_{n \in Nt, n > N} [a_n \leq x] ,$$

$$\forall_{x \in R\ell, x < a} \forall_{N \in Nt} \exists_{n \in Nt, n > N} [a_n > x] .$$

Notatie: $a = \limsup a_n$ of $a = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$.

Als zo'n getal a niet bestaat dan is één van de volgende uitspraken juist:

$$\forall_{x \in R\ell} \exists_{N \in Nt} \forall_{n \in Nt, n > N} [a_n < x] ,$$

(we schrijven dan $a_n \to -\infty$ of $\limsup a_n = -\infty$),

$$\forall_{x \in R\ell} \exists_{n \in Nt} [a_n > x] ,$$

(dat wil zeggen de rij is niet naar boven begrensd; we schrijven dit als: $\limsup a_n = \infty$).

Het begrip $\liminf a_n = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$ wordt op analoge wijze gedefinieerd.

Bewijs van (2.8): a) dat er ten hoogste één getal a is met genoemde eigenschappen is triviaal. b) Als er geen getal a is met de eerste eigenschap dan is de rij niet begrensd. Stel nu dat er wel getallen a zijn met de eerste eigenschap. Als de verzameling van deze getallen niet naar onder begrensd is dan is $a_n \to -\infty$. Is deze verzameling wel naar onder begrensd en α het infimum dan heeft ook α de eerste eigenschap. Daar iedere $x < \alpha$ niet de eerste eigenschap heeft, heeft α de tweede eigenschap ook.

(2.9) Definitie: De rij $a_1, a_2, \ldots$ heeft de limiet a, geschreven als

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

als

$$\forall_{\varepsilon \in R\ell, \varepsilon > 0}\ \exists_{N \in Nt}\ \forall_{n \in Nt, n > N}\ [|a_n - a| < \varepsilon] .$$

(Zie voor limieten [8] Ch. 3.)
We merken op dat uit (2.8) en (2.9) volgt dat als $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = a$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(2.10) Stelling : Is de rij $a_1, a_2, \ldots$ monotoon niet-dalend en naar boven begrensd dan heeft de rij een limiet ([8], p.45).

(2.11) Definitie: Een rij $a_1, a_2, \ldots$ heet <u>fundamentaalrij</u> als

$$\forall_{\varepsilon \in R\ell, \varepsilon > 0}\ \exists_{N \in Nt}\ \forall_{m \in Nt, m > N}\ \forall_{n \in Nt, n > N}\ [|a_m - a_n| < \varepsilon] .$$

We merken op dat in Rt dezelfde definitie voor fundamentaalrijen kan worden genomen (met vervanging van $R\ell$ door Rt). Dit zal later een rol spelen bij de constructie van $R\ell$ uitgaande van Rt.

(2.12) Stelling (Cauchy): Als $a_1, a_2, \ldots$ een fundamentaalrij is dan is er een $a \in R$ zo dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ([8], p.46-47).

(2.13) Stelling (Cauchy): Zij f een functie, gedefinieerd op $[a,b)$ (eventueel $b = \infty$). Als

$$\forall_{\varepsilon \in R\ell, \varepsilon > 0}\ \exists_{c, a < c < b}\ \forall_{p \in R\ell}\ \forall_{q \in R\ell}\ [(c < p < b \ \&\ c < q < b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon]$$

dan bestaat $\lim_{x \uparrow b} f(x)$ ([8], p.47, [6], p.52).

III. Topologie en metriek

Literatuur: [6], [9], [10] en [11].

Topologische ruimten

(3.1) Definitie: Een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ is een niet lege verzameling R met een systeem $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen (die we open verzamelingen noemen) met de volgende eigenschappen:

T1: $\emptyset \in \mathcal{T}$, $R \in \mathcal{T}$,

T2: $(O_1 \in \mathcal{T} \;\&\; O_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T})$,

T3: $(\forall_{\alpha \in A} [O_\alpha \in \mathcal{T}]) \Rightarrow (\cup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{T})$, d.w.z. de vereniging van willekeurig veel open verzamelingen is open.

Het systeem $\mathcal{T}$ wordt de topologie van R genoemd. De elementen van R noemen we punten van de ruimte. Als Ω een open verzameling is (dat betekent dus $\Omega \in \mathcal{T}$) die het punt $P \in R$ bevat noemen we Ω een omgeving van P. Het complement van een open verzameling heet gesloten (zie vooral [11] Ch. 3, [9], p. 124).

(3.2) Definitie: Een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ heet Hausdorff-ruimte als bij elk puntenpaar P_1,P_2 uit R $(P_1 \neq P_2)$ omgevingen Ω_1, Ω_2 van P_1 resp. P_2 bestaan zo dat $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ([9], p. 130).

(3.3) Definitie: Zij $P \in R$, $P_n \in R$, $(n = 1,2,\ldots)$, (we spreken weer van een rij); dan betekent

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad \text{(ook geschreven als: } P_n \to P)$$

dat er bij elke omgeving Ω van P geldt

$$\exists_{k \in \mathbb{N}t}\, \forall_{m \in \mathbb{N}t, m>k} [P_m \in \Omega] .$$

Als er een punt $P \in R$ is met $P_n \to P$ dan heet de rij $P_1,P_2,\ldots$ convergent ([9], p.125).

(3.4) Stelling : Is V een gesloten deelverzameling van een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ en $P_1,P_2,\ldots$ een rij punten van V met $P_n \to P$, $(P \in R)$, dan is $P \in V$.

Bewijs : Voor iedere $Q \in R\backslash V$ is $R \backslash V$ een omgeving die geen punten van de rij bevat. Volgens (3.3) is dan $\neg(P_n \to Q)$.

(3.5) Stelling : Is $(R,\mathcal{T})$ een Hausdorff-ruimte, dan heeft een convergente rij één limiet.

Bewijs : Als $P_n \to P$ en $P_n \to Q$ dan heeft volgens (3.3) iedere omgeving Ω_1 van P met iedere omgeving Ω_2 van Q een niet lege doorsnede. Dus is $P = Q$.

Metrische ruimten

(3.6) Definitie: Een metrische ruimte (R,d) is een niet lege verzameling R en een reële functie d gedefinieerd op $R \times R$ zo dat voor alle P_1, P_2, P_3 uit R geldt

M1: $d(P_1,P_2) = d(P_2,P_1)$,

M2: $d(P_1,P_2) > 0$ als $P_1 \neq P_2$,

$d(P_1,P_1) = 0$,

M3: $d(P_1,P_3) \leq d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3)$ (driehoeksongelijkheid).

(Zie vooral [6], p.27 e.v., [11], p.51 e.v.)

We noemen $d(P_1,P_2)$ de afstand van P_1 en P_2. Vaak worden topologische ruimten en metrische ruimten aangegeven door alleen de verzameling R te noemen.

(3.7) Definitie: Als P een punt is van de metrische ruimte (R,d) en a een positief reëel getal dan heet de verzameling $B_{P,a}$ gedefinieerd door

$$B_{P,a} := \{Q \mid Q \in R \;\&\; d(P,Q) < a\}$$

de open bol met middelpunt P en straal a ([6], p.31).

(3.8) Definitie: Is V een deelverzameling van een metrische ruimte (R,d) en $P \in V$ dan heet P inwendig punt van V als er een $a > 0$ is zo dat $B_{P,a} \subset V$ ([10], p.28, [11], p.63).

(3.9) Definitie: Een deelverzameling V van een metrische ruimte noemen we open als elke $P \in V$ inwendig punt van V is ([11], p.59 e.v.).

Door (3.9) is voor een metrische ruimte een topologie gedefinieerd. We noemen dit de bij de metriek behorende topologie.

(3.10) Definitie: Een deelverzameling V van een metrische ruimte (R,d) heet <u>begrensd</u> als er een $P \in R$ is en een $a > 0$ zo dat $V \subset B_{P,a}$.

(3.11) Stelling : Elke open bol is een open verzameling ([6], p.33, [11], p.61).

(3.12) Stelling : Een metrische ruimte (R,d) met de bij d behorende topologie is een Hausdorff-ruimte.

Bewijs : Als $P \in R$, $Q \in R$ $(P \neq Q)$ en $0 < \delta < \frac{1}{2} d(P,Q)$ dan zijn $B_{P,\delta}$ en $B_{Q,\delta}$ disjuncte omgevingen van P resp. Q.

(3.13) Stelling : Is (R,d) een metrische ruimte, $P \in R$, $P_1, P_2, \ldots$ een rij punten van R, dan is noodzakelijk en voldoende voor $P_n \to P$ dat

$$\forall_{\varepsilon \in R\ell, \varepsilon > 0} \ \exists_{k \in Nt} \ \forall_{n \in Nt, n > k} \ [d(P_n, P) < \varepsilon] .$$

([11], p.70).

(3.14) Definitie: Een rij punten $P_1, P_2, \ldots$ in een metrische ruimte (R,d) heet <u>fundamentaalrij</u> als

$$\forall_{\varepsilon \in R\ell, \varepsilon > 0} \ \exists_{k \in Nt} \ \forall_{m \in Nt, m > k} \ \forall_{n \in Nt, n > k} \ [d(P_m, P_n) < \varepsilon] .$$

([10], p.45).

(3.15) Stelling : In een metrische ruimte is elke convergente rij een fundamentaalrij ([10], p.46).

(3.16) Definitie: Een metrische ruimte heet <u>volledig</u> als elke fundamentaalrij convergeert ([10], p.47, [11], p.71).

In (2.12) is bewezen dat $R\ell$ volledig is.

<u>Hilbert-ruimte</u>

Zij $\mathcal{H}$ de verzameling van alle rijen $x_1, x_2, \ldots, x_i$ complex, waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ convergeert. Als $f := \{x_1, x_2, \ldots\}$ en $g := \{y_1, y_2, \ldots\}$ elementen van $\mathcal{H}$ zijn definiëren we

$$d(f,g) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Dan is $(\mathcal{H}, d)$ een volledige metrische ruimte ([6], p.117). We noemen deze ruimte <u>Hilbert-ruimte</u> (voor andere voorbeelden zie [11]).

Topologische begrippen

(3.17) Stelling : Als $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte is en $V \subset R$ dan is de doorsnede van alle gesloten verzamelingen die V omvatten een gesloten verzameling die V omvat. Deze heet afsluiting van V (notatie: $\bar{V}$).

Bewijs : Dit volgt direct uit T3.

(3.18) Stelling : Als $V_1 \subset V_2$ dan $\bar{V}_1 \subset \bar{V}_2$. Als V gesloten is dan is $\bar{V} = V$. Voor alle V is $\bar{\bar{V}} = \bar{V}$ ([6], p.36).

(3.19) Definitie: Een punt P in de topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ heet verdichtingspunt van de deelverzameling $V \subset R$ als elke omgeving van P een van P verschillend punt van V bevat. Als een punt P een omgeving heeft die met V het punt P als doorsnede heeft, heet P geïsoleerd punt van V. We noemen een punt P een randpunt van V als iedere omgeving van P met V en met $R\setminus V$ een niet lege doorsnede heeft ([11], p.65,68).

(3.20) Definitie: Zij $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte, $V \subset R$.
V heet overal dicht in R als $\bar{V} = R$.
V heet nergens dicht in R als $R\setminus\bar{V}$ overal dicht is.

De ruimte R_n

(3.21) Definitie: R_n := verzameling van alle rijtjes $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ met $p_i \in R\ell$ voor $i = 1,2,\ldots,n$ (d.w.z. de verzameling van alle afbeeldingen van $\{1,2,\ldots,n\}$ in $R\ell$). In plaats van $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ schrijven we ook wel P ([11], p.85).

(3.22) Definitie: In R_n definiëren we drie afstandsbegrippen:

$$d_1(P,Q) := \left(\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$d_2(P,Q) := \max_i |p_i - q_i| ,$$

$$d_3(P,Q) := \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| .$$

(3.23) Stelling : (R_n,d_i) is een metrische ruimte ($n = 1,2,\ldots;\ i = 1,2,3$). De drie afstandsbegrippen induceren dezelfde topologie.

(3.24) Stelling : (R_n, d_i) is een volledige metrische ruimte ([6], p.50).

Compactheid

We komen nu aan enkele zeer belangrijke begrippen en stellingen uit dit hoofdstuk. Een goed begrip hiervan is voor het vervolg zeer belangrijk.

(3.25) Definitie: We noemen een stelsel open verzamelingen $\{O_\alpha | \alpha \in A\}$ een open overdekking van de verzameling V als $V \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$. Is de indexverzameling A eindig dan noemen we de overdekking een eindige overdekking.

Voorbeeld: In R_2 zij $V := \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$. Voor iedere ρ met $0 < \rho < 1$ zij $O_\rho := \{(x,y) | x^2 + y^2 < \rho\}$. Dan is het stelsel $\{O_\rho | \rho \in (0,1)\}$ een open overdekking van V. Het is niet mogelijk uit dit stelsel eindig veel elementen te kiezen die samen een open overdekking van V vormen. Hierdoor is duidelijk dat de volgende definitie bijzondere verzamelingen karakteriseert.

(3.26) Definitie: De topologische ruimte $(R, \mathcal{T})$ heet compact als iedere open overdekking van R een eindige open overdekking bevat. Voor een deelverzameling V van R definiëren we compactheid op dezelfde wijze ([6], p.55; [9], p.136).

(3.27) Definitie: De topologische ruimte $(R, \mathcal{T})$ heet rijcompact als iedere oneindige rij in R een convergente deelrij bevat (d.i. een deelrij met een limiet in R). Voor een deelverzameling V van R definiëren we rijcompact op dezelfde wijze ([9], p. 139).

In bovenstaand voorbeeld is $V \subset R_2$ niet compact en niet rijcompact. Wel heeft iedere rij punten van V een convergente deelrij in R_2 maar het kan voorkomen dat deze limiet niet in V ligt.

(3.28) Stelling (Heine-Borel): Iedere gesloten begrensde deelverzameling van R_n is compact ([9], p.34).

We merken op dat R_n zelf niet compact is.

(3.29) Stelling (Bolzano-Weierstrass): Iedere gesloten begrensde deelverzameling van R_n is rijcompact ([11], p.121).

De ruimte R_n is niet rijcompact.

(3.30) Stelling : Als V en W gesloten, niet lege deelverzamelingen van R_n zijn en V is begrensd, dan is er een getal $d \geq 0$ (de <u>afstand</u> van V en W) zodat geldt

$$\forall_{P \in V} \forall_{Q \in W} [d(P,Q) \geq d] ,$$

$$\exists_{P \in V} \exists_{Q \in W} [d(P,Q) = d] .$$

IV. Limieten en continuïteit

Literatuur: [6] t/m [11].

Limieten

(4.1) Definitie: Als R en R' metrische ruimten zijn, $V \subset R$, f een afbeelding van V in R' en Q een open punt van $\bar{V}$ dan zeggen we

$$\lim_{P \in V, P \to Q} f(P) = A$$

als $A \in R'$ en er bij iedere omgeving Ω' van A in R' een omgeving Ω van Q in R is zodat $f(\Omega \cap V) \subset \Omega'$.

Opmerking: in afwijking van de gebruikelijke definitie speelt de waarde $f(Q)$ als $Q \in V$ hier een rol. Enkele latere bewijzen worden bij deze keuze van de definitie van limiet iets eenvoudiger. Men vergelijke [6], p.47 en [10], p.72. De definitie (4.3) zal zorgen voor aansluiting bij onze oude definitie.

(4.2) Stelling : Als $\lim_{P \in V, P \to Q} f(P) = A$ en $\lim_{P \in V, P \to Q} = B$ dan is $A = B$. ([6], p.47).

(4.3) Definitie: Als R en R' metrische ruimten zijn, $V \subset R$, f een afbeelding van V in R', Q een inwendig punt van R en $W := V \setminus \{Q\}$ dan definiëren we

$$\lim_{P \to Q} f(P) := \lim_{P \in W, P \to Q} f(P) .$$

(4.4) Stelling : Zij R een metrische ruimte, $V \subset R$, f een afbeelding van V in R en $Q \in \bar{V}$. Dan is $\lim_{P \in V, P \to Q} f(P) = A$ dan en slechts dan als voor iedere rij $P_1, P_2, \ldots$ met $P_k \in V$ en $P_k \to Q$ geldt $f(P_k) \to A$. (Bewijs analoog aan [10], p.73 maar dankzij (4.1) eenvoudiger.)

(4.5) Definitie: Laat R en R' metrische ruimten zijn, $V \subset R$, f een afbeelding van V in R', $Q \in V$. Als $\lim_{P \in V, P \to Q} f(P)$ bestaat dan volgt uit (4.1) dat de limiet $f(Q)$ is. We zeggen dan dat <u>f in Q continu ten opzichte van V is</u>. Is Q een inwendig punt van V dan is $\lim_{P \to Q} f(P) = f(Q)$ als f in Q t.o.v. V

continu is. We zeggen dan: f is continu in Q. Als f in elk punt van V continu t.o.v. V is dan heet f continu op V (vgl. [9], p.113; [6], p.42).

We zullen in dit college bij een functie die een inverse heeft deze niet, zoals vaak in Amerikaanse literatuur wel wordt gedaan, met f^{-1} aangeven maar met $f^{\leftarrow}$. Is f een afbeelding van de verzameling A in de verzameling B en $V \subset B$ dan definiëren we $f^{\leftarrow}(V) := \{x | x \in A \ \& \ f(x) \in V\}$. (Zie de discussie over notatiemoeilijkheden in [7], p.165,166.)

(4.6) Stelling : Laten R en R' metrische ruimten zijn, f een afbeelding van R in R'. Dan is f dan en slechts dan continu op R indien voor iedere open deelverzameling $\mathcal{O}$ van R' het origineel $f^{\leftarrow}(\mathcal{O})$ open is in R ([6], p.43; [9], p.113; [10], p.75).

Als R en R' topologische ruimten zijn definieert men continuïteit van een afbeelding door de eigenschap van (4.6) te eisen.

(4.7) Stelling : Laten R, R' en R" metrische ruimten zijn, $V \subset R$, $W \subset R'$, f een afbeelding van V in W en g een afbeelding van W in R". Zij $Q \in V$, f continu t.o.v. V in Q en g continu t.o.v. W in f(Q). Dan is de samengestelde functie $g \circ f$ continu t.o.v. V in Q.

Bewijs : Dit is een direct gevolg van (4.4).

(4.8) Definitie: Als R en R' metrische ruimten zijn, $V \subset R$ en f een afbeelding van V in R' dan heet f uniform continu op V als

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{P \in V} \forall_{Q \in V} [(d(P,Q) < \delta) \Rightarrow (d(f(P),f(Q)) < \varepsilon)] ,$$

([9], p.117; [10], p.78).

(4.9) Stelling : Als V compact is en f continu op V dan is f uniform continu op V ([9], p.143; [10], p.78).

(4.10) Stelling : Als R en R' metrische ruimten zijn, $V \subset R$, f een afbeelding van V in R' en f continu op V dan is f(V) een compacte deelverzameling van R' ([9], p.37 en 137; [10], p.77).

(4.11) Stelling : Zij R een metrische ruimte, V een compacte deelverzameling van R, f een afbeelding van V in $R\ell$, f continu op V. Dan is er een $Q \in V$ met de eigenschap

$\forall_{P \in V} [f(P) \leqslant f(Q)]$,

d.w.z. f neemt in Q een <u>absoluut maximum</u> aan ([10], p.77).

(4.12) Definitie: Laten R en R' metrische ruimten zijn, $f, f_1, f_2, \ldots$ afbeeldingen van $V \subset R$ in R'. Dan betekent

"$f_j \to f$, uniform op V"

dat

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{k \in Nt} \forall_{j \in Nt, j > k} \forall_{P \in V} [d(f_j(P), f(P)) < \varepsilon]$

([11], p.83; [10], p.133; zie ook opgave 3.32).

(4.13) Stelling : Als R en R' metrische ruimten zijn, $V \subset R$, $Q \in V$, f_j afbeeldingen van V in R' die in Q continu t.o.v. V zijn ($j = 1,2,\ldots$) en $f_j \to f$ uniform op V dan is f continu in Q t.o.v. V ([10], p.136).

(4.14) Stelling : Zij f een continue reële functie, gedefinieerd voor $0 \leqslant x \leqslant 1$. Als $f(0) < 0 < f(1)$ dan is er een c met $0 < c < 1$ en $f(c) = 0$ ([7], p.155).

(4.15) Definitie: Een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ heet <u>samenhangend</u> als R niet de vereniging is van twee disjuncte niet lege open verzamelingen. Een deelverzameling V van R heet onder dezelfde voorwaarden samenhangend. Een open samenhangende deelverzameling van R_n noemen we een <u>gebied</u>. (Evenzo voor C, opgevat als R_2.) ([11], p.143).

(4.16) Stelling : Zij $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte, $V \subset R$, V open, V niet leeg. Dan is V dan en slechts dan samenhangend als er voor iedere $P \in V$ en iedere $Q \in V$ een continue functie f van $[0,1]$ in V is met $f(0) = P$ en $f(1) = Q$.

Bewijs : a) Stel $V = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1$ en $\mathcal{O}_2$ open en niet leeg en disjunct. Als f een continue functie op $[0,1]$ is met $f(0) = P$ en $f(1) = Q$ en g op V gedefinieerd door $g(A) = 0$ voor $A \in \mathcal{O}_1$ en $g(A) = 1$ voor $A \in \mathcal{O}_2$ dan is $g \circ f$ een continue reële functie op $[0,1]$ die alleen de waarden 0 en 1 aanneemt in strijd met (4.14).

b) Zij $P \in V$. Alle punten Q met de eigenschap dat er een continue functie op $[0,1]$ bestaat met $f(0) = P$, $f(1) = Q$ heten vanuit P bereikbaar. Het is direct in te zien dat de uit P bereikbare en de uit P niet bereikbare punten open deelverzamelingen vormen. Is V samenhangend dan moet de verzameling niet bereikbare punten dus leeg zijn (zie ook [11], p.144).

(4.17) Stelling : Zij R een metrische ruimte. Als f en g continue functies van R in $R\ell$ (resp. C) zijn, dan zijn ook de som en het product van f en g continue functies evenals het quotiënt voor zover dit gedefinieerd is ([10], p.73 - 75).

(4.18) Definitie: Zij $V \subset R\ell$, f een afbeelding van V in $R\ell$. De functie f heet <u>monotoon niet-dalend</u> op V als

$$\forall_{x \in V} \forall_{y \in V} \left[(x < y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))\right] ,$$

en <u>monotoon stijgend</u> als

$$\forall_{x \in V} \forall_{y \in V} \left[(x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))\right]$$

([10], p.82).

(4.19) Stelling : Als f monotoon niet-dalend is op (a,b) en $c \in (a,b)$ dan bestaan de <u>linker</u>- en <u>rechterlimiet</u> van f in c en bovendien is

$$\lim_{x \uparrow c} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \downarrow c} f(x)$$

([10], p.82; [7], p.161).

(4.20) Definitie: Als f een reële functie is waarvoor $\lim_{x \uparrow c} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow c} f(x)$ bestaan maar niet beide $f(c)$ zijn spreken we van een <u>discontinuïteit van de eerste soort</u>. Uit (4.19) blijkt dat monotone functies alleen dit soort discontinuïteiten bezitten. We noemen dan $\lim_{x \downarrow c} f(x) - \lim_{x \uparrow c} f(x)$ de <u>sprong</u> van van de functie in c ([7], p.149).

(4.21) Stelling (Dini): Zij R een metrische ruimte, $V \subset R$, V compact. Zij $f_1, f_2, \ldots$ een rij continue reële functies gedefinieerd op V en zij $\forall_{n \in Nt} \forall_{P \in V} [f_n(P) \geq f_{n+1}(P)]$ en $\forall_{P \in V} [f_n(P) \to 0]$. Dan is de rij $f_1, f_2, \ldots$ uniform convergent op V ([8], p.135).

V. Continue en convexe functies

Literatuur: [10] en [12] t/m [16].

We zullen nu bewijzen dat een functie die continu is op $[a,b]$ daar door polynomen uniform benaderd kan worden. Het eerste bewijs dat we geven gebruikt de volgende resultaten

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n \quad ,$$

waaruit door te differentiëren en de substitutie $z = x(1-x)^{-1}$ volgt

(5.1) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad ,$$

(5.2) $$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leq \tfrac{1}{4} n \quad .$$

(5.3) Definitie: Als f op $[0,1]$ gedefinieerd en begrensd is dan heet

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

het n^e Bernstein-polynoom van de functie f.

(5.4) Stelling : Als f continu is op $[0,1]$ dan is de rij $\{B_n(x)\}$ uniform convergent met limiet $f(x)$

Bewijs : Bij $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ zó dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ als $|x-y| < \delta$ en x en y in $[0,1]$ liggen. Uit (5.1) volgt

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad .$$

We splitsen de som in twee gedeelten, nl. één over de k met $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ en één over de overige k. Uit (5.2) volgt dan

$$|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon + M/(2n\delta^2) < 2\varepsilon$$

voor voldoend grote n en alle $x \in [0,1]$ ([15], pp. 107 - 111).

(5.5) Stelling (Weierstrass): Als f een op $[a,b]$ gedefinieerde continue functie is en $\varepsilon > 0$ dan is er een polynoom P zo dat

$$\forall_{x \in [a,b]} [|f(x) - P(x)| < \varepsilon] .$$

1e Bewijs: Beschouw $g(y) := f(a + y(b-a))$ en pas (5.4) toe.

2e Bewijs: Ga als boven op g over en vervang g dan door $h(x) := g(x) - g(0) - x[g(1) - g(0)]$ voor $x \in [0,1]$. Definieer nog $h(x) := 0$ als $x \notin [0,1]$. Het is voldoende de stelling voor h te bewijzen. De functie h is uniform continu. Kies c_n zó dat $Q_n(x) := c_n(1-x^2)^n$ de eigenschap $\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1$ heeft. Deze c_n is kleiner dan $\sqrt{n}$.

Definieer

$$P_n(x) := \int_{-1}^{1} h(x+t)Q_n(t)dt .$$

De rij $\{P_n\}$ is een rij polynomen die uniform tot h nadert ([10], pp. 146 - 148).

Convexiteit

(5.6) Definitie: Een verzameling $V \subset R_n$ heet convex als

$$\forall_{P \in V} \forall_{Q \in V} \forall_{\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1} [(\lambda P + (1-\lambda)Q) \in V] .$$

(5.7) Definitie: Zij $V \subset R_n$ een convexe verzameling en f een afbeelding van V in $R\ell$. f heet convex in V als

$$\forall_{P \in V} \forall_{Q \in V} \forall_{\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1} [f(\lambda P + (1-\lambda)Q) \leq \lambda f(P) + (1-\lambda)f(Q)] .$$

Een voorbeeld van een convexe functie op R_n is $f(x) := d(x,C)$, de afstand van x tot de verzameling C, waarin C convex is.

(5.8) Stelling : Zij $C \subset R_n$ convex; $P_1, P_2, \ldots, P_k$ punten in C, f convex op C en $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ met $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Dan is

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i \in C \quad \text{en} \quad f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(P_i)$$

([12], p. 197).

(5.9) Stelling : Zij f gedefinieerd op $R\ell$, f convex. Dan is f continu.

Bewijs : Voor $a-h < x < a+h$ ligt de grafiek van f tussen de rechten door $(a,f(a))$ en $(a+h,f(a+h))$, resp. $(a,f(a))$ en $(a-h,f(a-h))$. Dus is f continu in a. Dit geldt voor iedere a ([16], p.79).

(5.10) Stelling : Zij C open en convex in R_n, f convex op C. Dan is f continu op C ([12], p.201).

(5.11) Stelling : Als f gedefinieerd is op $R\ell$ en differentieerbaar is dan is:

(f is convex) $\Rightarrow$ (f' is niet-dalend).

([12], p.205).

(5.12) Stelling : Als $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positieve getallen zijn en $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, ..., $\alpha_n \geqslant 0$ en $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ dan is

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} .$$

Bewijs : Volgens (5.11) is $-\log x$ voor $x > 0$ convex. Nu volgt (5.12) uit (5.8) ([13], p.148).

(5.13) Stelling (de <u>ongelijkheid van Hölder</u>): Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ niet negatief zijn en $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eveneens niet negatief; verder λ en μ positieve getallen met som 1. Dan is

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/\mu}\right)^{\mu} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{1/\lambda}\right)^{\lambda} .$$

(Het speciale geval $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ heet <u>ongelijkheid van Cauchy</u>.) ([13], p.149).

(5.14) Stelling : Als f gedefinieerd is op $R\ell$ en continu dan volgt uit

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \tfrac{1}{2}\{f(x) + f(y)\} \qquad (*)$$

dat f convex is ([14], p.70; [13], p.142).

Er zijn functies die aan (*) voldoen en niet continu zijn. De voorwaarde (*) wordt in sommige boeken als definitie van "convex" genomen. Een functie die aan (*) voldoet noemt men ook wel Jensen-convex (zie ook [14], p.96).

(5.15) Definitie: f heet logarithmisch convex als log f convex is.

(5.16) Stelling : Als f logarithmisch convex is dan is f convex.

Bewijs : Uit $\log f(\lambda x+\mu y) \leq \lambda \log f(x) + \mu \log f(y)$ volgt $f(\lambda x+\mu y) \leq \{f(x)\}^{\lambda}\{f(y)\}^{\mu} \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$ volgens (5.12).

(5.17) Stelling : Als f en g logarithmisch convex zijn dan is $f+g$ ook logarithmisch convex.

Bewijs : Uit het gegeven, (5.9) en (5.16) volgt dat $f+g$ continu is. Uit (5.14) volgt dat het voldoende is om te bewijzen dat

$$\log \{f(\tfrac{x+y}{2}) + g(\tfrac{x+y}{2})\} \leq \frac{\log\{f(x)+g(x)\} + \log\{f(y)+g(y)\}}{2}$$

voor alle x en y. Uit het gegeven volgt dat $\log f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{\log f(x) + \log f(y)}{2}$ en dat heeft tot gevolg dat $f(x)\xi^2 + 2f(\frac{x+y}{2})\xi + f(y)$ bij vaste x en y een positief definiete functie is, Evenzo voor g en dan ook voor $f+g$. Hieruit volgt omgekeerd de ongelijkheid die bewezen moet worden.

Gemiddelden

(5.18) Definitie: Als $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positieve getallen zijn en a een afkorting voor het rijtje $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan definiëren we

$$\mathfrak{M}_r(a) := \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{1/r} \qquad (r \neq 0) .$$

Het is eenvoudig in te zien dat $\lim_{r\to 0} \mathfrak{M}_r(a) = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$. We definiëren nog

$$\mathfrak{M}_0(a) = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} .$$

Dan is $\mathfrak{M}_r(a)$ een continue functie van r. Als we met $1/a$ het rijtje $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$ aangeven geldt

$$\mathfrak{M}_{-r}(a) = 1/\mathfrak{M}_r(1/a) .$$

We merken nog op dat $\mathfrak{M}_1(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ het rekenkundig gemiddelde van de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ is (zie [14] Ch. 2).

(5.19) Stelling : $\mathfrak{M}_r^r$ is een logarithmisch convexe functie van r ([14], p.72).

(5.20) Stelling : $\mathfrak{M}_r$ is een monotoon niet-dalende functie van r.

Bewijs : Dit volgt direct uit (5.19).

Enkele gevolgen van (5.20) zijn

a) $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2$, dus $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$, dat is de ongelijkheid van Cauchy.

b) $\mathfrak{M}_0 \leq \mathfrak{M}_1$, dat is (5.12) met $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1/n$.

c) $\min_i a_i \leq \mathfrak{M}_r \leq \max_i a_i$. (Zie opgave 5.21.)

VI. Differentieerbaarheid

Literatuur: [13] en [16] t/m [18].

We voeren eerst een aantal notatieafspraken in (zie [18], p.164 en p.183).

(6.1) Definitie: Als f en g afbeeldingen van een verzameling V in C zijn dan schrijven we

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{op } V$$

als

$$\exists_{K>0} \, \forall_{x \in V} \, [|f(x)| \leq K|g(x)|] \; .$$

Als g nergens nul is betekent $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ dat $f(x)/g(x)$ begrensd is.

(6.2) Definitie: Als f en g afbeeldingen van de metrische ruimte R in C zijn en $a \in R$ dan betekent

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \qquad (x \to a)$$

dat er een omgeving Ω van a is zo dat $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ op Ω.

(6.3) Definitie: Als f en g reële functies zijn, gedefinieerd op $R\ell$, en g is positief in een gepuncteerde omgeving van a dan schrijven we

$$f(x) = o(g(x)) \qquad (x \to a)$$

als

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{\text{omgeving } \Omega \text{ van } a} \, \forall_{x \in \Omega\setminus\{a\}} \, [|f(x)| \leq \varepsilon g(x)] \; .$$

Als men aan deze begrippen gewend is kan er iets slordiger mee omgesprongen worden. Zo schrijft men $\mathcal{O}(x)$ voor "een niet nader te noemen functie f die de eigenschap $f(x) = \mathcal{O}(x)$ heeft". Ook de volgende uitspraken zijn dan duidelijk:

$$\mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(x^2) = \mathcal{O}(x^2) \qquad (x \to \infty) \; ,$$

$$\mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(x^2) = \mathcal{O}(x) \qquad (x \to 0) \; .$$

We kunnen de uitspraak "$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$" nu schrijven in de vorm "$f(x) = \ell + o(1)$ voor $x \to a$".

(6.4) Definitie: Laat f gedefinieerd zijn op $[a,b]$, $c \in [a,b)$. We noemen f in c <u>rechts-differentieerbaar</u> als $\lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ bestaat. Dit getal heet de <u>rechter-afgeleide</u> van f in c en wordt met $f'_+(c)$ aangegeven. De linkerafgeleide $f'_-(c)$ wordt op analoge wijze gedefinieerd ([17], p.90). Als de rechter- en linker-afgeleide van f in c bestaan en gelijk zijn heet f in c <u>differentieerbaar</u>. We schrijven $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$.

We kunnen de definitie van "f is differentieerbaar in c" ook schrijven als "$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + o(h)$ $(h \to 0)$". Merk op dat $f(c) + hf'(c) + o(h) = f(c) + O(h) = f(c) + o(1)$ voor $h \to 0$, d.w.z. als f in c differentieerbaar is, dan is f in c continu.

De definitie van "f is differentieerbaar in a" houdt in dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zo dat uit $|h| < \delta$ volgt $|f(a+h) - f(a) - hf'(a)| \leq \varepsilon|h|$. Als nu p en q voldoen aan $a - \delta < p \leq a < q < a + \delta$ en $r := \frac{1}{2}(p+q)$, $\ell := q - p$ dan is:

$$f(p) = f(a) + (p-a)f'(a) + \Delta_1 \quad \text{met} \quad |\Delta_1| < \varepsilon\ell \ ,$$
$$f(q) = f(a) + (q-a)f'(a) + \Delta_2 \quad \text{met} \quad |\Delta_2| < \varepsilon\ell \ ,$$
$$f(r) = f(a) + (r-a)f'(a) + \Delta_3 \quad \text{met} \quad |\Delta_3| < \varepsilon\ell \ ,$$

dus

$$(*) \qquad |f(p) + f(q) - 2f(r)| < 4\varepsilon\ell \ .$$

Zij nu $g(x) := 2|x|$ voor $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ en g periodiek met periode 1. Definieer $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} g(4^n x)$. Dan is f een continue functie. Bij iedere a en iedere $\delta > 0$ zijn er gehele getallen k en m $(m > 0)$ zó dat $a - \delta < \frac{k}{4^m} \leq a < \frac{k+1}{4^m} < a + \delta$.

Voor f vinden we nu

$$(**) \qquad f\left(\frac{k+1}{4^m}\right) + f\left(\frac{k}{4^m}\right) - 2f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{4^m}\right) = 2^{-m}\{g(k+1) + g(k) - 2g(k+\tfrac{1}{2})\} = 2^{-m+1} > 4$$

Uit (*) en (**) zien we dat deze functie f <u>nergens differentieerbaar</u> is, hoewel f overal continu is (zie [13], p.115).

(6.5) Stelling (Rolle): Als f continu is op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) en $f(a) = f(b)$ dan is er een $c \in (a,b)$ met $f'(c) = 0$ ([18], p.232).

(6.6) Stelling (gemiddelde-theorema): Als f continu is op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) dan is er een $c \in (a,b)$ met

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \ .$$

Bewijs : Pas (6.5) toe op $f(x) - \{f(b) - f(a)\}(x-a)/(b-a)$ ([18], p.242).

(6.7) Stelling : Als f en g continu zijn op $[a,b]$, f en g differentieerbaar op (a,b) en $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a,b)$ dan is er een $c \in (a,b)$ met

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Bewijs : Neem λ zó dat $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$ en pas dan (6.5) toe ([18], p.244).

(6.8) Stelling : Als f differentieerbaar is op (a,b) en $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a,b)$ dan is f monotoon stijgend op (a,b) ([18], p.233).

(6.9) Stelling : Is f differentieerbaar op (a,b) en monotoon niet-dalend dan is $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a,b)$ ([10], p.93).

(6.10) Stelling (l'Hôpital): Als f en g differentieerbaar zijn op (a,b), $g'(x) \neq 0$ voor $a < x < b$ en

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$$

terwijl

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell ,$$

dan is

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell .$$

Een analoge stelling geldt voor limieten met $x \to \infty$.

Bewijs : Definieer nog $f(a) = g(a) = 0$ en pas (6.7) toe ([10], p.94).

(6.11) Stelling : Als f continu is op $[a,b]$, differentieerbaar op (a,b) en $\lim_{x \downarrow a} f'(x) = \ell$ dan is $f'_+(a) = \ell$.

Bewijs : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h) \to \ell$ als $h \to 0$, (toepassing van (6.6)).

(6.12) Definitie: Als f een reële of complexe functie is, gedefinieerd in een omgeving van $(a,b) \in R_2$ dan heet f in (a,b) <u>totaal-differentieerbaar</u> als er getallen A en B zijn met de eigenschap:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{h>0}\ \exists_{k>0}\ \forall_x\ \forall_y\ [(|x-a| < h \ \&\ |y-b| < k) \Rightarrow$$
$$|f(x,y) - f(a,b) - A(x-a) - B(y-b)| \leq \varepsilon|x-a| + \varepsilon|y-b|]$$

([16], p.228).

(6.13) Stelling : Als f in (a,b) totaal-differentieerbaar is dan is f in (a,b) continu en verder geldt

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} \quad , \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}$$

([16], p.228).

(6.14) Stelling : Als $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in een omgeving van (a,b) bestaan en continu zijn in (a,b) dan is f in (a,b) totaal-differentieerbaar ([16], p.229; [17], p.118).

(6.15) Stelling : Als $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ in een omgeving van (a,b) bestaan en $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ is continu in (a,b) dan bestaat ook $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ in (a,b) en

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}$$

([17], p.121, zie ook [16], p.227).

VII. Integratie

Literatuur: [7], [10], [16], [17], [18].

Men kan integreren definiëren als het omgekeerde proces van differentiëren, d.w.z. afspreken dat $F(x) = \int f(x)dx$ hetzelfde betekent als $F'(x) = f(x)$. Dit begrip $\int f(x)dx$ heet de onbepaalde integraal. De eigenschappen van de onbepaalde integraal zijn directe vertalingen en stellingen uit de differentiaalrekening. Deze theorie wordt bekend verondersteld (zie [18], p.245 e.v.).

We geven nu de theorie van de bepaalde integraal en wel de zgn. Riemann-integraal. In (7.1) t/m (7.21) zal de functie f waarover wordt gesproken steeds een begrensde functie zijn.

Een rij getallen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ met $x_0 = a$, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_n = b$ noemen we een verdeling van $[a,b]$. Een verdeling geven we soms aan met één letter bijv. V, $V := [x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

(7.1) *Definitie:* Als f een begrensde functie op $[a,b]$ is en $V := [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ een verdeling van $[a,b]$ dan heet

$$S_V := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

een bovensom van f over $[a,b]$ en

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_V S_V$$

de bovenintegraal van f over $[a,b]$. (Hierbij wordt het infimum over alle verdelingen van $[a,b]$ beschouwd.) Ondersommen en de onderintegraal (s_V resp. $\underline{\int_a^b} f(x)dx$) definiëren we op analoge wijze. Verder definiëren we nog

$$\overline{\int_a^a} f(x)dx = \underline{\int_a^a} f(x)dx = 0 ,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = -\overline{\int_b^a} f(x)dx \quad \text{als} \quad b < a$$

(analoog voor $\underline{\int}$).

(7.2) Stelling : Als V en W verdelingen van $[a,b]$ zijn, f begrensd op $[a,b]$, s_V en S_W resp. ondersom van f voor de verdeling V en bovensom voor W dan is $s_V \leqslant S_W$ ([10], p.104).

(7.3) Stelling : Als $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ en $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, dan is

$$m(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

([10], p.107).

(7.4) Stelling : $\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_b^c} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx$.

Bewijs : Het is voldoende het geval $a < b < c$ te beschouwen daar de rest dan uit (7.1) volgt. Als s_1 en s_2 ondersommen voor f zijn over $[a,b]$ resp. $[b,c]$ dan is $s_1 + s_2$ een ondersom voor f over $[a,c]$. D.w.z.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_b^c} f(x)dx \leqslant \underline{\int_a^c} f(x)dx \; .$$

Is s een ondersom van f over $[a,c]$, s^* de ondersom die hieruit ontstaat door zonodig b als deelpunt toe te voegen dan is $s^* \geqslant s$ en $s^* = s_1 + s_2$ waarin s_1 en s_2 ondersommen voor f over $[a,b]$ resp. $[a,c]$ zijn. Hieruit volgt

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_b^c} f(x)dx \geqslant \underline{\int_a^c} f(x)dx \; .$$

Daarmee is (7.4) bewezen.

Als we in (7.4) alle onderintegralen door bovenintegralen vervangen vinden we weer een juiste uitspraak.

(7.5) Stelling : $\overline{\int_a^b}\{f(x) + g(x)\}dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx$,

$$\overline{\int_a^b} \lambda f(x)dx = \begin{cases} \lambda \overline{\int_a^b} f(x)dx & \text{als} \quad \lambda \geqslant 0 , \\ \lambda \underline{\int_a^b} f(x)dx & \text{als} \quad \lambda < 0 . \end{cases}$$

Een analoge uitspraak geldt voor onderintegralen.

Bewijs : De stelling volgt onmiddellijk uit de analoge uitspraken over $\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} \{f(x) + g(x)\}$ en $\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} \{\lambda f(x)\}$.

(7.6) Definitie: Een op $[a,b]$ gedefinieerde begrensde functie f heet <u>integreerbaar</u> over $[a,b]$ als

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx .$$

De gemeenschappelijke waarde van onder- en bovenintegraal schrijven we als

$$\int_a^b f(x)dx$$

([10], p.105).

(7.7) Stelling : Als f integreerbaar is over $[a,b]$ en $[b,c]$ dan ook over $[a,c]$ en

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx .$$

Bewijs : (7.4) + (7.6) ([10], p.109).

(7.8) Stelling : Als f en g integreerbaar zijn over $[a,b]$ dan is ook $\lambda f + \mu g$ integreerbaar over $[a,b]$ en

$$\int_a^b\{\lambda f(x) + \mu g(x)\}dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx .$$

Bewijs : (7.5) + (7.6) ([10], p.109).

(7.9) Stelling : f is dan en slechts dan integreerbaar over $[a,b]$ als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling V van $[a,b]$ is waarvoor $S_V - s_V < \varepsilon$ ([10], p.107).

(7.10) Stelling : f is dan en slechts dan integreerbaar over $[a,b]$ als er bij iedere $\sigma > 0$ en iedere $\eta > 0$ een verdeling V van $[a,b]$ is met de eigenschap dat de som van de lengten van de deelintervallen waarvoor $\sup f(x) - \inf f(x) > \sigma$ is, kleiner is dan η.

Bewijs : a) Zij f integreerbaar, $\sigma > 0$, $\eta > 0$. Pas (7.9) toe met $\varepsilon = \sigma\eta$.

b) Als $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ en $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ dan geldt voor V

$$S_V - s_V \leqslant \sigma(b-a) + (M-m)\eta \ .$$

Bij geschikte keuze van σ en η is $S_V - s_V < \varepsilon$. Het gestelde volgt dan uit (7.9).

(7.11) Stelling : Zij f integreerbaar over $[a,b]$. Dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat voor iedere verdeling $V := [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ van $[a,b]$ met de eigenschap $\max\limits_i (x_i - x_{i-1}) < \delta$ en voor iedere keuze van $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ met $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ geldt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \ .$$

Bewijs : Zij $\varepsilon > 0$. Volgens (7.9) is er een verdeling $W := [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ van $[a,b]$ met de eigenschap

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_W \leqslant S_W \leqslant \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Zij $\Delta := \max\limits_i (x_i - x_{i-1})$. Zij $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ en $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Kies $\delta < \min(\frac{\varepsilon}{2n(M-m)}, \Delta)$. Als V een verdeling van $[a,b]$ is met maaswijdte $< \delta$ dan bevat een deelinterval van V ten hoogste één deelpunt van W. Dus is

$$S_W \geq S_{V \cup W} \geq S_V - n\delta(M-m) \geq S_V - \frac{\varepsilon}{2}$$

d.w.z. $S_V \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$. Analoog voor s_V. Hiermee is het gestelde bewezen.

(7.12) Stelling : Als f en g integreerbaar zijn over $[a,b]$ en $f(x) \leq g(x)$ voor $a \leq x \leq b$ dan is

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

([10], p.109).

(7.13) Stelling : Als f integreerbaar is over $[a,b]$ dan $|f|$ ook en

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

([10], p.111).

(7.14) Stelling : Zij f begrensd op $[a,b]$ en met uitzondering van N punten continu op $[a,b]$. Dan is f integreerbaar over $[a,b]$.

Bewijs : Zij $\sigma > 0$, $\eta > 0$. Neem om iedere discontinuïteit een interval met lengte η/N. Op de rest van $[a,b]$ is f uniform continu. Dit is dus in deelintervallen te verdelen zo dat op elk van deze deelintervallen $\sup f(x) - \inf f(x) < \sigma$ is. Het gestelde volgt nu uit (7.10). (Zie ook [10], p.108.)

(7.15) Stelling : Als f monotoon is op $[a,b]$ dan is f integreerbaar over $[a,b]$ ([10], p.109).

Als f op $[a,b]$ gedefinieerd is, $V := [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ een verdeling van $[a,b]$ is dan definiëren we

$$v_V := \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| .$$

(7.16) Definitie: f heet <u>van begrensde variatie</u> op $[a,b]$ als er een getal S is zo dat $v_V \leq S$ voor alle verdelingen V ([16], p.73).

(7.17) Stelling : f is dan en slechts dan van begrensde variatie als f het verschil is van twee niet-dalende functies ([16], p.73).

(7.18) Stelling : Als f van begrensde variatie is op $[a,b]$ dan is f integreerbaar over $[a,b]$.

Bewijs : (7.15) + (7.17).

(7.19) Stelling : Is f integreerbaar over $[a,b]$ en $a \leq x \leq b$, dan is f integreerbaar over $[a,x]$ en de functie F gedefinieerd door

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

is continu ([16], p.94).

(7.20) Stelling : Als f continu is op $[a,b]$ en $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, dan is F differentieerbaar op (a,b) met f als afgeleide ([16], p.98).

(7.21) Stelling : Als f integreerbaar is over $[a,b]$ en $F'(x) = f(x)$ op $[a,b]$ dan is

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

([16], p.98).

(7.22) Definitie: Zij b een reëel getal of het symbool ∞ . Als op ieder deelinterval $[a,c]$ van $[a,b)$ de functie f begrensd en integreerbaar is en $\lim\limits_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)dx$ bestaat dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)dx \,.$$

Op grond van (7.19) stemt deze definitie overeen met (7.6) als f begrensd is op $[a,b)$. Is f niet begrensd op $[a,b)$ dan is hiermee de definitie van integraal uitgebreid. We spreken af dat in het vervolg $\int_a^b f(x)dx$ bestaat, als (a,b) is te verdelen in eindig veel intervallen waarvoor de integraal van f op grond van (7.22) bestaat.

(7.23) Stelling : Is f integreerbaar op $[a,c]$ voor alle $c > a$ en $f(x) = \mathcal{O}(x^{-\alpha})$ $(x \to \infty)$ met $\alpha > 1$ dan bestaat $\int_a^\infty f(x)dx$.

Bewijs : Toepassing van (2.13) ([16], p.112).

(7.24) Stelling : Is f integreerbaar op $[a,c]$ voor alle $c < b$ en $f(x) = \mathcal{O}((b-x)^{-\alpha})$ $(x \uparrow b)$ met $\alpha < 1$ dan bestaat $\int_a^b f(x)dx$. ([16], p.115).

We geven nu nog een uitbreiding van het integraalbegrip, de zgn. Riemann-Stieltjes integraal. Laat f weer een op $[a,b]$ begrensde functie zijn. Zij g monotoon niet-dalend op $[a,b]$. We definiëren ondersommen en bovensommen van f t.o.v. g over $[a,b]$ als volgt:

$$S_{V,g} := \sum_{i=1}^{n} \{g(x_i) - g(x_{i-1})\} \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) .$$

Dit geeft aanleiding tot bovenintegralen en onderintegralen die we schrijven als $\overline{\int_a^b} f(x)dg(x)$ resp. $\underline{\int_a^b} f(x)dg(x)$. Als deze gelijk zijn spreken we van de Riemann-Stieltjes integraal $\int_a^b f(x)dg(x)$ en f heet integreerbaar t.o.v. g over $[a,b]$. In [10], Chapter 6 worden de door ons bewezen stellingen voor Riemann integralen op precies dezelfde wijze voor Riemann-Stieltjes integralen afgeleid. We kunnen de zaak nog verder uitbreiden door $\int_a^b f(x)dg(x) = \ell$ te schrijven als geldt:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\{g(x_i) - g(x_{i-1})\} = \ell$$

voor iedere rij verdelingen $\{V_n\}$ van $[a,b]$ waarvoor de lengte van het maximale deelinterval (maaswijdte) tot nul nadert. Op grond van (7.11) stemt dit met de oude definitie overeen in het geval $g(x) = x$.

(7.25) Stelling : Als f continu is op $[a,b]$ en g van begrensde variatie op $[a,b]$ dan bestaat $\int_a^b f(x)dg(x)$ ([16], pp. 117 - 119).

(7.26) Stelling : Als f en g continu en van begrensde variatie zijn op $[a,b]$ dan is

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

([16], p. 119).

VIII. De somformule van Euler-Maclaurin

Literatuur: [16] en [19] t/m [21].

Als voorbereiding voor de belangrijkste stelling van dit hoofdstuk voeren we de polynomen en getallen van Bernoulli in. De notaties in de literatuur zijn soms verschillend van de onze (o.a. in [16]).

(8.1) Definitie: $ze^{zt}/(e^z - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\frac{z^n}{n!}$.

De functies B_n heten polynomen van Bernoulli. Dat het polynomen zijn zal in (8.7) aangetoond worden.

(8.2) Definitie: $B_n := B_n(0)$ d.w.z.

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = z/(e^z - 1) .$$

We vinden zo $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, etc.
Uit (8.2) volgt door vermenigvuldiging met $e^z - 1$:

(8.3) Stelling : $B_n = \binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \dots + \binom{n}{n}B_n$ voor $n \geq 2$.

([21], p.33).

Daar $x(e^x - 1)^{-1} + \frac{1}{2}x$ een even functie is vinden we

(8.4) Stelling : $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$.

Door $x = 2iz$ te stellen in de ontwikkeling van $x(e^x - 1)^{-1} + \frac{1}{2}x$ vinden we

(8.5) Stelling : $z \cot z = 1 - 2^2B_2 \frac{z^2}{2!} + 2^4B_4 \frac{z^4}{4!} - \dots$

([16], p.211),

en via de formule $\tan z = \cot z - 2 \cot 2z$

(8.6) Stelling : $\tan z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k} - 1)\frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$

([16], p.211).

Door in (8.2) met e^{zt} te vermenigvuldigen en vergelijken met (8.1) vinden we

(8.7) Stelling : $B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} t^k$ ([21], p.34).

Uit (8.3) volgt nog

(8.8) Stelling : $B_n(1) = B_n$ voor $n \geq 2$ ([21], p.34).

Als we (8.7) differentiëren vinden we

(8.9) Stelling : $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$ $(n \geq 1)$.

Uit (8.9), (7.21) en (8.8) volgt

(8.10) Stelling : $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$ $(n \geq 1)$ ([21], p.34).

De Fourierreeks voor $x^2 - x + \frac{1}{6}$ is bekend. Door integratie vinden we:

(8.11) Stelling : Voor $0 \leq x \leq 1$ is

$$B_n(x) = \begin{cases} n!(2\pi)^{-n}(-1)^{\frac{n}{2}+1}\, 2 \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2\pi kx}{k^n}, & n \geq 2, \text{ even} \\ n!(2\pi)^{-n}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2 \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2\pi kx}{k^n}, & n \geq 3, \text{ oneven.} \end{cases}$$

([21], p.34).

Voor $n = 1$ is (8.11) juist voor $0 < x < 1$.

Door $x = 0$ te nemen vinden we

(8.12) Stelling : $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2n} = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2} \frac{B_{2n}}{(2n)!}$ $(n \geq 1)$

([21], p.35).

Uit (8.1) volgt door t te vervangen door $t+1$:

(8.13) Stelling : $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$.

Hieruit vinden we door te differentiëren:

(8.14) Stelling : $B_n^{(\ell)}(1) = B_n^{(\ell)}(0) = n!\,\dfrac{B_{n-\ell}}{(n-\ell)!}$ voor $\ell < n-1$,

$$B_n^{(n-1)}(1) = B_n^{(n-1)}(0) + n! = \tfrac{1}{2}n! \ .$$

Door $\int_0^1 f(x)dx$ een aantal malen partieel te integreren en daarbij (8.8), (8.9) en (8.10) te gebruiken vinden we

(8.15) Stelling : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{2}\{f(0) + f(1)\} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\{f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\}$

$$+ \int_0^1 f^{(2m)}(x)\,\frac{B_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx$$

([16], p.215; [19], p.40).

Toepassing op $f(x+1)$, $f(x+2)$ enz. en optellen geeft:

(8.16) Stelling (Euler-Maclaurin):

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \int_1^n f(x)dx + C + \tfrac{1}{2}f(n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) - \int_1^n f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}\,dx$$

waarin $C = \tfrac{1}{2}f(1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(1)$

([16], p.218; [19], p.41).

Het belang van (8.16) voor toepassingen is dat we m vast kunnen houden, en daarmee het aantal termen van het linkerlid, terwijl $n \to \infty$.

Voorbeeld: Om $\sum_{n=100}^{\infty} n^{-2}$ in 10 dec. nauwkeurig te bepalen hebben we 2.10^{10} termen van de reeks nodig. Door in (8.16) $m=2$ te nemen, $n \to \infty$ en de rest met behulp van (8.11) te schatten (dat is dus 5 termen!!) vinden we de som met dezelfde nauwkeurigheid.

Voorbeeld: Om $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ te benaderen verdelen we $[0,1]$ in 4 gelijke delen en passen op elk stuk (8.15) toe met $m=2$. Dit geeft de integraal als som van 6 getallen. Het antwoord is in 6 decimalen nauwkeurig!! Zie verder [20], p.152 e.v., [16], p.216, [19], p.46.

IX. Integralen met een parameter; dubbelintegralen

Literatuur: [16].

Laat T een verzameling reële getallen zijn en voor iedere $t \in T$ $f(x,t)$ continu als functie van x op $[a,b]$. Dan bestaat de integraal $\int_a^b f(x,t)dx$ voor iedere $t \in T$.

(9.1) Stelling : Als τ verdichtingspunt van T is en

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in[a,b]}\, \forall_{t\in T}\, [(|t-\tau|<\delta) \Rightarrow |f(x,t)-\ell(x)|<\varepsilon],$$

d.w.z. $\lim_{t\to\tau} f(x,t) = \ell(x)$ uniform in x op $[a,b]$,

dan is

$$\lim_{t\to\tau} \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \ell(x)dx .$$

Bewijs : ℓ is continu op $[a,b]$, dus integreerbaar. Het gestelde volgt uit het gegeven via (7.13) en (7.12) ([16], p.143).

(9.2) Stelling : Als T een interval is, $f(x,t)$ differentieerbaar naar t voor iedere $t \in T$ en f_t' continu als functie van x op $[a,b]$ voor iedere $t \in T$ en bovendien

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in[a,b]}\, \forall_{t\in T}\, \forall_{\tau\in T}[(|t-\tau|<\delta)\Rightarrow|f_t'(x,t)-f_t'(x,\tau)|<\varepsilon]$$

dan is voor $t \in T$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b f_t'(x,t)dx .$$

Bewijs :
$$\frac{\int_a^b f(x,t+h)dx - \int_a^b f(x,t)dx}{h} - \int_a^b f_t'(x,t)dx =$$

$$= \int_a^b \{f_t'(x,t+\theta h) - f_t'(x,t)\}dx .$$

Het gestelde volgt uit het gegeven en (6.4) ([16] , p.145).

(9.3) Definitie: Als voor iedere $t \in T$ de oneigenlijke integraal $\int_a^\infty f(x,t)dx$ bestaat en bovendien

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_A\ \forall_{t\in T}\ \forall_{b>A}\ \left[\left|\int_b^\infty f(x,t)dx\right| < \varepsilon\right]$$

dan zeggen we dat $\int_a^\infty f(x,t)dx$ <u>uniform convergeert</u>.

(9.4) Stelling : Als op ieder interval $[a,b]$ aan de voorwaarden van (9.1) is voldaan en $\int_a^\infty f(x,t)dx$ convergeert uniform dan is

$$\lim_{t\to\tau}\int_a^\infty f(x,t)dx = \int_a^\infty \lim_{t\to\tau} f(x,t)dx\ .$$

([16], p.148).

(9.5) Stelling : Als op ieder interval $[a,b]$ aan de voorwaarden van (9.2) is voldaan, als voor iedere $t \in T$ de functie $f_t^!$ oneigenlijk integreerbaar is over $[a,\infty)$ en de integraal $\int_a^\infty f_t^!(x,t)dx$ uniform convergeert dan is

$$\frac{d}{dt}\int_a^\infty f(x,t)dx = \int_a^\infty f_t^!(x,t)dx\ .$$

([16], p.149).

Belangrijke toepassing vinden deze stellingen bij de bestudering van de <u>gammafunctie</u> gedefinieerd door:

(9.6) Definitie: $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x > 0)$.

Uit (9.4) volgt dat Γ een continue functie is.

(9.7) Stelling : $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ voor $x > 1$

([16], p.169).

Hieruit volgt dat $\Gamma(n) = (n-1)!$. Door toepassing van (9.5) bewijst men

(9.8) Stelling : $\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \log t \, dt \quad (x > 0)$.

De volgende formules worden vaak gebruikt:

(9.9) Stelling : $\Gamma(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{N!\, N^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+N)}$

([16], p.172).

Voor complexe x ($x \neq 0,-1,-2,\dots$) nemen we dit als definitie van $\Gamma(x)$.

(9.10) Stelling : $x\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \{(1 + \frac{x}{k})^{-1} e^{x/k}\}$

([16], p.172).

Hieruit vinden we door differentiatie

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -x^{-1} - \gamma + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+k)}$$

en in het bijzonder

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-t} \log t \, dt = -\gamma .$$

Dubbelintegralen

Laat f een begrensde functie zijn gedefinieerd op een verzameling $B \subset R_2$. We beperken ons tot het geval dat B een rechthoek van het type $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ is. Een verdeling van B (in rechthoeken) wordt gedefinieerd door $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = b$. Aan iedere rechthoek kennen we een oppervlakte toe. We definiëren nu onderintegraal en bovenintegraal van f over B op precies dezelfde manier als in hoofdstuk 7. Dus

$$\underline{\int_B} f(x,y)dV := \sup \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \inf_{\substack{x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ y_{j-1} \leq y \leq y_j}} f(x,y)$$

waarbij het supremum genomen wordt over alle mogelijke verdelingen van B. Als bovenintegraal en onderintegraal gelijk zijn heet f integreerbaar over B. We noteren de integraal als

$$\int_B f(x,y)dV \quad \text{of} \quad \iint_B f(x,y)dx\,dy \;.$$

(9.11) Definitie: Als voor iedere $\varepsilon > 0$ de verzameling A bevat is in een eindige vereniging van open rechthoeken met totaal-oppervlakte $< \varepsilon$ dan heet A een <u>nulverzameling</u> in R_2.

(9.12) Stelling : Als f continu is op B met uitzondering van een nulverzameling dan is f over B integreerbaar.

Bewijs : De punten waar f niet continu is sluiten we op in een vereniging A van eindig veel rechthoeken met totaal-oppervlakte $< \varepsilon/4M$ waarin M het supremum van $|f(x,y)|$ op B is. Op de gesloten verzameling $B\setminus A$ is f uniform continu. Zij b = oppervlakte van B. Kies δ zo klein dat een verdeling met maaswijdte $< \delta$ de eigenschap heeft dat functiewaarden voor punten binnen één deelrechthoek minder dan $\varepsilon/2b$ verschillen. Verfijn een verdeling met maaswijdte $< \delta$ door de lijnen die A bepalen toe te voegen. Voor de verdeling die zo ontstaat verschillen ondersom en bovensom minder dan ε. Het gestelde is hiermee bewezen. (Zie opgave 9.33, iii.)

(9.13) Stelling : Als f begrensd en integreerbaar is op B dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zó dat voor alle verdelingen met maaswijdte $< \delta$ het verschil van bovensom en ondersom $< \varepsilon$ is ([16], p.270).

Voor het uitrekenen van dubbelintegralen is de volgende stelling essentieel:

(9.14) Stelling : Als f integreerbaar is over de rechthoek $B := \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\} \subset R_2$ dan is

$$\int_B f(x,y)dV = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

([16], pp.272 - 274).

Een analoge uitspraak geldt voor $\int_c^d$.

Aanhangsel: Constructie van $R\ell$.

We gaan uit van het lichaam der rationale getallen Rt.

Definities: 1) $\mathcal{R} := Rt^{Nt}$ = de verzameling van alle rijen rationale getallen.

2) $\mathcal{B}$:= de deelverzameling van $\mathcal{R}$ bestaande uit de begrensde rijen.

3) Een rij $a_1, a_2, \ldots$ heet nulrij als

$$\forall_{p \in Rt, p>0} \exists_{k \in Nt} \forall_{n \in Nt} [(n > k) \Rightarrow (|a_n| < p)] .$$

4) Een rij $a_1, a_2, \ldots$ heet fundamentaalrij als

$$\forall_{p \in Rt, p>0} \exists_{k \in Nt} \forall_{m \in Nt, m>k} \forall_{n \in Nt, n>k} [|a_m - a_n| < p] .$$

5) $\mathcal{F}$:= de deelverzameling van $\mathcal{R}$ bestaat uit alle fundamentaalrijen.

6) $\mathcal{N}$:= de deelverzameling van $\mathcal{R}$ bestaande uit alle nulrijen.

(A.1) Stelling : $\mathcal{N} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{B}$.

We definiëren in $\mathcal{R}$ een optelling en vermenigvuldiging door:

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots) ,$$

$$(a_1, a_2, \ldots)(b_1, b_2, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots) .$$

Het is eenvoudig in te zien dat:

$$(a \in \mathcal{B} \ \& \ b \in \mathcal{B}) \Rightarrow (a+b \in \mathcal{B} \ \& \ a-b \in \mathcal{B} \ \& \ ab \in \mathcal{B}) ,$$

$$(a \in \mathcal{N} \ \& \ b \in \mathcal{N}) \Rightarrow (a+b \in \mathcal{N} \ \& \ a-b \in \mathcal{N}) ,$$

$$(a \in \mathcal{F} \ \& \ b \in \mathcal{F}) \Rightarrow (a+b \in \mathcal{F} \ \& \ a-b \in \mathcal{F}) ,$$

$$(a \in \mathcal{B} \ \& \ b \in \mathcal{N}) \Rightarrow (ab \in \mathcal{N}) ,$$

$$(a \in \mathcal{F} \ \& \ b \in \mathcal{F}) \Rightarrow (ab \in \mathcal{F}) .$$

(A.2) Stelling : $\mathcal{F}$ is een commutatieve ring met eenheidselement en $\mathcal{N}$ is een maximaal ideaal in $\mathcal{F}$.

Bewijs : R1, R2, R3 zijn triviaal met (0,0,0,...) als nulelement en (1,1,1,...) als éénheid. Dat $\mathcal{N}$ een ideaal is volgt uit bovenstaande beweringen. Laat nu $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathcal{F}$, $a \notin \mathcal{N}$. Dan is

$\exists_{p \in Rt, p>0} \exists_{N \in Nt} \forall_{n \in Nt, n>N} [|a_n| > p]$.

Als $b = (b_1, b_2, \ldots) \in \mathcal{F}$ dan is de rij

$c := (b_1, b_2, \ldots, b_N, \frac{b_{N+1}}{a_{N+1}}, \frac{b_{N+2}}{a_{N+2}}, \ldots)$ een fundamentaalrij

en verder is

$ac - b = (a_1 b_1 - b_1, \ldots a_N b_N - b_N, 0, 0, 0, \ldots)$

een nulrij. Dit betekent dat, als $\mathcal{M}$ een ideaal is dat $\mathcal{N}$ omvat en $a \in \mathcal{M}$, $a \notin \mathcal{N}$, dan voor iedere $b \in \mathcal{F}$ ook $b \in \mathcal{M}$, dat wil zeggen $\mathcal{M} = \mathcal{F}$. Anders gezegd: $\mathcal{M}$ is een maximaal ideaal.

(A.3) Stelling : $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ is een lichaam.

Bewijs : Zie opgave 1.56.

In $\mathcal{F}$ definiëren we de relatie $>*$ door:

$$(a >* b) :\Leftrightarrow \exists_{p \in Rt, p>0} \exists_{k \in Nt} \forall_{n \in Nt, n>k} [a_n - b_n > p] .$$

Uit de definitie van $\mathcal{N}$ en $\mathcal{F}$ volgt dan dat voor ieder paar a,b uit $\mathcal{F}$ precies één van de uitspraken

$$a >* b \quad , \quad b >* a \quad , \quad a - b \in \mathcal{N}$$

geldt. Als a, b, c en d elementen van $\mathcal{F}$ zijn en $a - c \in \mathcal{N}$, $b - d \in \mathcal{N}$ en $a >* b$ dan is ook $c >* d$. Dit heeft tot gevolg dat de volgende definitie zinvol is:

Definitie : Als σ en τ elementen van $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ zijn definiëren we $\sigma > \tau$ als er representanten a en b van σ resp. τ zijn met $a >* b$. (Dit geldt dan voor alle representanten.)

Nu zijn $\mathcal{O}1$ t/m $\mathcal{O}4$ triviaal om te bewijzen. D.w.z.:

(A.4) Stelling : $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ is een geordend lichaam.

Laat nu A een naar boven begrensde verzameling in $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ zijn. Beschouw de rij $\frac{k}{10^\nu}, \frac{k}{10^\nu}, \frac{k}{10^\nu}, \ldots)$ met $k \in Nt$. Als k voldoende groot is is dit element van $\mathcal{F}$ een representant van een majorant van A in $\mathcal{F}/\mathcal{N}$. Dit geldt niet voor alle k. Zij k_ν de grootste k waarvoor $\frac{k}{10^\nu}, \frac{k}{10^\nu}, \ldots)$ representant is van een niet-majorant van A. We beschouwen de rij $s = \left(\frac{k_1}{10}, \frac{k_2}{10^2}, \frac{k_3}{10^3}, \ldots\right)$. Dit is een element van $\mathcal{F}$, representant van het element $\sigma \in \mathcal{F}/\mathcal{N}$. Neem aan dat $\tau > \sigma$. Dan heeft τ een representant $t = (t_1, t_2, t_3, \ldots)$ met $t >^* s$ d.w.z. $\exists_{p \in R, p>0}$ zodat $t_n > \frac{k_n}{10^n} + p$ vanaf zeker rangnummer. Dus is vanaf zeker rangnummer $t_n > \frac{k_n + 2}{10^n}$. Dit betekent dat t representant is van een majorant van A.

Neem nu aan dat $\tau < \sigma$. Op analoge wijze volgt dat τ geen majorant van A is. Hieruit kunnen we concluderen dat σ de kleinste bovengrens van A is.

Hiermee is bewezen:

(A.5) Stelling : $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ is dedekinds geordend.

Als $r \in Rt$ definiëren we $\varphi(r) \in \mathcal{F}/\mathcal{N}$ als de restklasse die $(r, r, r, \ldots)$ bevat. Dan is

$$\begin{aligned} \varphi(r) + \varphi(s) &= \varphi(r+s)\ , \\ \varphi(r)\varphi(s) &= \varphi(rs)\ , \\ \varphi(0) &= \text{nulelement van } \mathcal{F}/\mathcal{N}\ , \\ \varphi(1) &= \text{eenheidselement van } \mathcal{F}/\mathcal{N}\ , \\ r > s &\Rightarrow \varphi(r) > \varphi(s)\ . \end{aligned}$$

De afbeelding φ beeldt Rt isonorf af in $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ met behoud van ordening. Het beeld is een deellichaam van $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ dat we nu identificeren met Rt. Het lichaam $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ is daardoor een uitbreiding van Rt geworden en wel een dedekinds geordend lichaam dat Rt bevat.

Zij K een dedekinds geordend lichaam. Dan bevat K een deellichaam isomorf met Rt ook wat betreft de ordening. Voor dit deellichaam, dat we met Rt identificeren, kunnen we het proces van dit hoofdstuk herhalen. We vinden een dedekinds geordend lichaam waarvan eenvoudig is in te zien dat het isomorf met het oorspronkelijke lichaam K moet zijn.
We hebben dus:

(A.6) Stelling : Er is, op isomorfie na, precies één dedekinds geordend lichaam. We noemen het $R\ell$.

§ 1. Groepen

1.1. Welke van de volgende paren (S,o) vormen een groep:

i) $S = \{x \mid x \in Gh,\ x < 0\}$; o: optelling.
ii) $S = \{5x \mid x \in Gh\}$; o: optelling.
iii) $S = \{x \mid x \in Gh,\ x \text{ is oneven}\}$; o: vermenigvuldiging.
iv) $S = \{z \in Cm \mid z^n = 1\}$; o: vermenigvuldiging; $(n \in Nt)$.
v) $S = \{-2, -1, 1, 2\}$; o: vermenigvuldiging.
vi) $S = \{1, -1, i, -i\}$; o: vermenigvuldiging.
vii) S = de verzameling der restklassen modulo m; o: optelling; $(m \in Nt)$.
viii) S = de verzameling der restklassen modulo m die met m relatief priem zijn; o: vermenigvuldiging; $(m \in Nt)$.
ix) $S = \{z \in Cm \mid |z| = 1\}$; o: vermenigvuldiging.

1.2. Bewijs dat de restklassen modulo p die ongelijk zijn aan $0 \pmod p$ dan en slechts dan een groep vormen met als compositie vermenigvuldiging als p een priemgetal is.

1.3. Welke van de volgende verzamelingen van restklassen modulo 13 vormen een groep (vermenigvuldiging)

$\{[1],[12]\}$;$\{[1],[2],[4],[6],[8],[10],[12]\}$

$\{[1],[5],[8],[12]\}$?

1.4. In R_3 worden de volgende lineaire afbeeldingen beschouwd:

A : draaiing over π om de x-as
B : " " " " " y-as
C : " " " " " z-as
I : de identiteit.

Bewijs dat $\{I,A,B,C\}$ een groep is als men als compositie neemt

$$(A,B) \to AB : AB(x) = A(Bx) \quad .$$

Bepaal de groepentabel.
Deze groep heet de viergroep van Klein.

1.5. Bewijs de volgende stelling: $(G,\ )$ is een groep; voor iedere $a \in G$ geldt: $(a^{-1})^{-1} = a$.

1.6. Bewijs: voor ieder paar $\{a,b\} \subset G$ geldt

$$(ab)^{-1} = b^{-1}\, a^{-1} \quad .$$

1.7. Bewijs: m geheel dan $(a^{-1})^{m} = (a^{m})^{-1}$.

cyclische ondergroepen

1.8. Bepaal alle ondergroepen van de additieve groep $Gh/(18)$.

1.9. Zij $a \in G$, $(G, \ )$ een groep, en zij

$$H_a = \{x \in G \mid ax = xa\} \quad .$$

Bewijs dat $(H, \ )$ een ondergroep is.

1.10. Bewijs: iedere echte ondergroep van een abelse groep is abels.
Hoe luidt het omgekeerde van deze stelling?
Toon door een tegenvoorbeeld aan dat het omgekeerde onjuist is.

1.11. Bewijs: als $a \in G$, is de orde van a, indien eindig, gelijk aan de orde van de door a voortgebrachte cyclische ondergroep.

1.12. Bepaal de orde van ieder van de volgende elementen van de groep S_4 :

$a = (123) \quad b = (1432) \quad c = (12)(34)$.

1.13. Zij $I_5 = \{x \in Gh \mid 5 \mid x\}$; bewijs dat $(I, +)$ een ondergroep is van $(GH, +)$.

1.14. Bewijs dat $(Gh(\text{mod } 4), +)$ isomorf is met

$$(Gh(\text{mod } 5) \setminus \{[0]\}, \cdot) \quad .$$

Bepaal alle isomorfismen van deze groepen.

1.15. Bewijs dat iedere oneindige cyclische groep isomorf is met $(Gh, +)$; bewijs dat iedere eindige cyclische groep (met n elementen) isomorf is met $(Gh(\text{mod } n), +)$.

1.16. Zij $(G, \ )$ een groep; bewijs dat voor alle $a \in G$ de afbeelding $T_a: x \to ax$ een permutatie van G is.

1.17. (Stelling van Cayley). Iedere eindige groep (met orde n) is isomorf met een ondergroep van S_n.

1.18. Bepaal de permutaties van $\{1,2,3,4\}$ die

i) het element 2 invariant laten;
ii) de elementen 2 en 4 invariant laten;
iii) de uitdrukking $x_1x_2 + x_3x_4$ invariant laten;
iv) de uitdrukking $x_1x_2 + x_3 + x_4$ invariant laten.

1.19. Bewijs dat $(Gh(\text{mod } 13)\setminus[0], \cdot) \sim (Gh(\text{mod } 12), +)$.
Bepaal alle isomorfismen.

1.20. Bepaal alle groepen van vier elementen.

1.21. Zij (H,) een ondergroep van (G,);
definieer: xRy indien $xy^{-1} \in H$.
Bewijs dat R een equivalentie relatie is.

1.22. Zij $a \in G$; bewijs (zie 1.21) dat de afbeelding

$$\forall_{x \in H} \qquad x \to xa$$

een bijectie is van H op de equivalentieklasse waartoe a behoort.

1.23. Bewijs dat voor de orde d van een ondergroep van een groep met orde n geldt: $d|n$.

1.24. Zij $\{H_\alpha\}_\alpha$ een collectie ondergroepen van een groep G.
Bewijs dat $\bigcap_\alpha H_\alpha$ i) een ondergroep is van G;
ii) voor iedere α een ondergroep is van H_α.

1.25. Bepaal in S_3 van alle ondergroepen alle R-equivalentieklassen (vgl. 1.21).

1.26. Zij (H,) een ondergroep van (G,);
definieer: xLy indien $x^{-1}y \in H$.
Bewijs dat L een equivalentie relatie is.

1.27. Bepaal in S_3 van alle ondergroepen alle L-equivalentieklassen.

1.28. Indien voor een ondergroep H geldt: $R = L$, heet H een <u>invariante ondergroep</u>, ook wel <u>normale ondergroep</u>, ook wel <u>normaal deler</u>.
Bepaal de normaal delers van S_3 en van (Gh(mod 18), +).

1.29. Zij φ een homomorfisme van een groep G in een groep H;
zij e het eenheidselement van G.
Bewijs dat:

i) $\varphi(e)$ het eenheidselement is van H;
ii) $\varphi(G)$ een ondergroep is van H;
iii) $\overleftarrow{\varphi}\varphi(e)$ een ondergroep is van G;
iv) $\overleftarrow{\varphi}\varphi(e)$ normaal deler is.

1.30. Zij M_2 de verzameling van matrices van twee rijen en twee kolommen met reële elementen, waarvan de determinant ongelijk is aan 0.
In M_2 neemt men de matrixvermenigvuldiging als compositie; bewijs dat $(M_2, \quad)$ een groep is; ga na of ze abels is; bepaal de ondergroepen en normaal delers.

1.31. Zij $A_n := \{\tau \in S_n \mid \prod_{j<k} (x_j - x_k) = \prod_{j<k} (x_{\tau(j)} - x_{\tau(k)})\}$.

Bewijs dat A_n de maximale echte normaal deler is van S_n.

1.32. Zij φ een monotone bijectie van $R\ell$ op $R\ell$;
zij voor alle $a \in R\ell$, $b \in R\ell$:

$$a \oplus b := \overleftarrow{\varphi}(\varphi(a) + \varphi(b)) \quad .$$

Bewijs dat $(R\ell, \oplus)$ een groep is die isomorf is met $(R\ell, +)$.

1.33. Zij $S = \{a,b\}$; in S worden twee composities + en $\times$ gedefinieerd volgens de tabellen:

+	a	b
a	a	b
b	b	a

$\times$	a	b
a	a	a
b	a	b

Is $(S, +, \times)$ een ring? Zo ja, heeft S een eenheidselement? en nuldelers? Is S een lichaam?
Als men in de tabellen + en $\times$ verwisselt, ontstaat het tripel $(S, \times, +)$; is dit een ring?

1.34. Zij $S = \{u \in R\ell \mid u = x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9};\ \{x,y,z\} \subset Rt\}$.
Bewijs dat $(S, +, \cdot)$ een ring is.
Heeft S een eenheidselement?
Heeft S nuldelers?
Is S een lichaam?

1.35. Zij $\mathcal{V} = R\ell \times R\ell$.
Voor $(a_1, a_2) \in \mathcal{V}$ schrijven we $\underline{a}$.
Als $\underline{a} \in \mathcal{V}$ en $\underline{b} \in \mathcal{V}$ definiëren we: $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) .$$

Bewijs dat $\mathcal{V}$ een ring is; heeft $\mathcal{V}$ een eenheidselement? en nuldelers? Is $\mathcal{V}$ een lichaam?
Bewijs dat $R\ell$ isomorf is met een deelring van $\mathcal{V}$; is deze deelring dan een lichaam?

1.36. In Gh worden twee composities gedefinieerd:

$$a \oplus b = a + b + 1, \quad a \circledcirc b = a + b + ab .$$

Bewijs dat $(Gh, \oplus, \circledcirc)$ een kommutatieve ring is.
Wat is het nulelement? Is er een eenheidselement?

1.37. Zij $(R, +, \cdot)$ een kommutatieve ring; definieer in R een nieuwe compositie $\circ$:
$a \circ b = a + b - ab$.
Ga na of $(R, +, \circ)$ een ring is.
Indien $a \in R$ en er een element $a' \in R$ bestaat zó dat $a \circ a' = 0$ heet a' de <u>quasi-inverse</u> van a; a heet dan quasi-regulier.
Zij Q de verzameling der quasi-reguliere elementen van R;
bewijs dan: $(Q, \circ)$ is een groep.

1.38. Bepaal alle idealen van $(Gh, +, \cdot)$.

1.39. Bepaal alle idealen van $(Gh(\text{mod } 18), +, \cdot)$.

1.40. Zij $I = \{x \in R\ell \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

Zij B(I) de verzameling van alle afbeeldingen van I in $R\ell$; zij C(I) de verzameling van alle continue functies op I. Bewijs:

i) B(I) is een ring (is er een eenheidselement? nuldelers?);

ii) $C(I)$ is één deelring van $B(I)$; (nuldelers?);

iii) $C(I)$ is geen ideaal van $B(I)$.

Zij $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ en zij $\mathcal{i} := \{f \in B(I) | \alpha \leqslant x \leqslant \beta \Rightarrow f(x) = 0\}$;

iv) Bewijs dat $\mathcal{i}$ een ideaal is in $B(I)$ en dat $\mathcal{i} \cap C(I)$ een ideaal is in $C(I)$.

1.41. Een ideaal heet <u>maximaal</u> indien het een echt ideaal is dat niet in een ander echt ideaal is begrepen.
Bepaal de maximale idealen in $(Gh, +, \cdot)$, en ook die in $(Gh(\text{mod } 18), +, \cdot)$.

1.42. In een ring met eenheidselement e is een ideaal $\mathcal{i}$ dan en slechts dan echt als $e \notin \mathcal{i}$.

1.43. Zij $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (zie 2.8) en $\mathcal{m}_\alpha := \{f \in C(I) \mid f(\alpha) = 0\}$;
bewijs dat $\mathcal{m}_\alpha$ een maximaal ideaal is in $C(I)$.

1.44. Zij $(R, +, \ )$ een ring (niet noodzakelijk kommutatief).
Zij $a \in R$, $b \in R$ en $ab = ba$.
Bewijs dat $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

1.45. Zij $(R, +, \ )$ een ring. $\forall_{x \in R} \forall_{y \in R} [x,y] := xy - yx$.
Bewijs (de identiteit van Jacobi):

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \quad .$$

1.46. Zij p een priemgetal; $Z_p := \{x \in Rt \mid x = tn^{-1} \wedge ggd(t,n) = 1 \ \& \ p \nmid n\}$.
Bewijs dat Z_p een deelring is van Rt.

1.47. (Zie 1.46). $\forall_{x \in Rt} [x \in Z_p \vee x^{-1} \in Z_p]$.

1.48. (Zie 1.46). Zij R een deelring van Rt; $R \supset Z_p \Rightarrow [R = Z_p \vee R = Rt]$.

1.49. (Zie 1.46). Bij ieder ideaal $\mathcal{i} \neq \{0\}$ van Z_p bestaat een geheel getal $n \geqslant 0$ zó dat $\mathcal{i} = \{p^n u \mid u \in Z_p\}$.

1.50. Zij $\mathfrak{i}$ een ideaal in de ring $(R, +, \ )$.
In R wordt een relatie $\equiv (\text{mod } \mathfrak{i})$ gedefinieerd door

$$x \equiv y (\text{mod } \mathfrak{i}) :\Longleftrightarrow x - y \in \mathfrak{i} \ .$$

Bewijs dat $\equiv (\text{mod } \mathfrak{i})$ een equivalentie relatie is.

1.51. (Zie 1.50). Bewijs dat $[x' \equiv y' (\text{mod } \mathfrak{i}) \ \& \ x'' \equiv y'' (\text{mod } \mathfrak{i})] \Rightarrow$
$[x' + x'' \equiv y' + y'' (\text{mod } \mathfrak{i}) \ \& \ x'x'' \equiv y'y'' (\text{mod } \mathfrak{i})]$.

1.52. (Vervolg). De verzameling van restklassen wordt aangegeven met $R/\mathfrak{i}$; we beschouwen de afbeelding φ van R op $R/\mathfrak{i}$, die wordt gedefinieerd door aan iedere $x \in R$ toe te voegen de restklasse waartoe x behoort, opgevat als element van $R/\mathfrak{i}$. Dat wil zeggen: φ is dié afbeelding van R in $R/\mathfrak{i}$ waarvoor $\overleftarrow{\varphi}\varphi(x) = \{y \in R \mid y \equiv x (\text{mod } \mathfrak{i})\}$.

1.53. (Vervolg). In $R/\mathfrak{i}$ worden twee "composities" gedefinieerd:

$$\varphi(x) + \varphi(y) := \varphi(x+y)$$

$$\varphi(x) \circ \varphi(y) := \varphi(xy) \quad .$$

Bewijs dat beide "composities" afbeeldingen zijn van

$$R/\mathfrak{i} \times R/\mathfrak{i} \quad \text{in} \quad R/\mathfrak{i} \quad .$$

Het tripel $(R/\mathfrak{i}, +, \circ)$ heet de <u>quotiëntring R modulo $\mathfrak{i}$</u>; bewijs dat het een ring is.

1.54. Een afbeelding φ van een ring R in een ring S die aan de voorwaarden

i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

ii) $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

voldoet heet een (ring) homomorfisme.
In dat geval is

i) $\varphi(R)$ een deelring van S;

ii) $\overleftarrow{\varphi}\varphi(0)$ een ideaal in R.

1.55. Zijn $\mathfrak{i}$ en $\mathfrak{n}$ idealen in R en φ het bij $\mathfrak{i}$ horende homomorfisme $R \to R/\mathfrak{i}$, dan geldt:

i) $\varphi(\mathfrak{n})$ is een ideaal in $R/\mathfrak{i}$;

ii) $\overleftarrow{\varphi}\varphi(\mathfrak{n})$ is een ideaal in R.

iii) $\overleftarrow{\varphi}\varphi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} \Longleftrightarrow \mathfrak{n} \supset \mathfrak{i}$.

1.56. Als $\mathfrak{m}$ een ideaal is in een kommutatieve ring R met eenheidselement dan geldt: $\mathfrak{m}$ maximaal $\Longleftrightarrow R/\mathfrak{m}$ is een lichaam.

1.57. Zij $(R, \underline{+}, \underline{\times})$ een ring, zij $(Gh, +, \;)$ de ring der gehele getallen; in $Gh \times R$ definiëren we composities $\oplus$ en $*$ door

$$(m,a) \oplus (n,b) := (m+n, a \underline{+} b)$$

$$(m,a) * (n,b) := (mn, mb \underline{+} na \underline{+} a \underline{\times} b).$$

Bewijs dat

i) $(Gh \times R, \oplus, *)$ is een ring met eenheidselement

ii) $W := \{(0,a) \mid a \in R\}$ is een deelring van $Gh \times R$

iii) W is isomorf met R.

1.58. Zij K een geordend lichaam dat meer dan één element bevat. Bewijs dat

$$1 > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$$

$$[x < y \ \& \ z > 0] \Rightarrow xz < yz$$

$$[x < y \ \& \ z < 0] \Rightarrow xz > yz$$

$$x > y > 0 \Rightarrow x^{-1} < y^{-1}$$

$$x < y < 0 \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$$

$$x < 0 < y \Rightarrow x^{-1} < 0 < y^{-1}$$

$$x < y \Rightarrow -y < -x$$

$$[x < 0 \ \& \ y < 0] \Rightarrow x + y < 0$$

$$[x > 0 \ \& \ y < 0] \Rightarrow xy < 0$$

$$[x < 0 \ \& \ y < 0] \Rightarrow xy > 0$$

$$x < y \Rightarrow \forall_z \ [x + z < y + z]$$

$$0 < x < y \Rightarrow \forall_{n \in Nt} \ x^n < y^n.$$

1.59. Bewijs dat het niet mogelijk is Cm te ordenen.

1.60. Zij K een geordend lichaam; $P = \{x \in K \mid x < 0\}$; onder de <u>absolute waarde</u> $|\ |$ verstaan we eén afbeelding van K in $P \cup \{0\}$ zodat

$$|a| := a \quad \text{als} \quad a \in P \cup \{0\}$$
$$|a| := -a \quad \text{als} \quad a \notin P \cup \{0\} \quad .$$

Bewijs:

i) $|a| = |-a|$

ii) $|ab| = |a| \cdot |b|$

iii) als $a < b < c$ dan $|b| < \max\{|a|,|c|\}$

iv) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ en $[|a+b| = |a| + |b|] \Longleftrightarrow [a = 0 \vee b = 0 \vee ab > 0]$.

1.61. Zij K een kommutatief lichaam. Onder een <u>waardering</u> w van K verstaat men een afbeelding van K in $R\ell$ die voldoet aan de voorwaarden:

i) $w(a) \geqslant 0$ voor alle $a \in K$, $w(a) = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

ii) $w(ab) = w(a) \cdot w(b)$

iii) $w(a+b) \leqslant w(a) + w(b)$.

Bewijs dat $|\ |$ een waardering is in $R\ell$ (zie 1.60).

Bewijs dat $|\ |$ een waardering is in Cm.

1.62. Beschouw Rt, en zij p een priemgetal.
Als $x \in Rt \setminus \{0\}$ is $x = p^{\nu(x)} \cdot \frac{t}{n}$, waarin $ggd(p,|t|) = ggd(p,|n|) = ggd(|t|,|n|) = 1$.

Bewijs:

i) $\nu(x)$ is door x eenduidig bepaald.

Neemt men $w_p(x) = p^{-\nu(x)}$ voor $x \neq 0$ en $w_p(0) = 0$, dan is:

ii) w_p een waardering van Rt.

§ 2. Reële getallen

2.1. Bewijs dat een geordend lichaam K dan en slechts dan archimedisch geordend is als bij iedere $a \in K$ een $n \in Nt$ bestaat zó dat $n = n \cdot 1 > |a|$.

2.2. Bewijs dat een archimedisch geordend lichaam kommutatief is.
Gevolg: $R\ell$ is kommutatief.

2.3. Onder $Rt[t]$ verstaan we de verzameling van alle polynomen in de variabele t met rationale coëfficiënten.
We noemen een polynoom $p(t)$ "positief" als voor de coëfficiënt pq^{-1} van de hoogste macht van t in $p(t)$ geldt $pq > 0$ (in Gh).
Bewijs dat $Rt[t]$ een ring is (bij de voor de hand liggende composities) met eenheidselement, en ga na of $Rt[t]$ geordend is; zo ja, ook archimedisch?

2.4. Zij K een Dedekinds geordend lichaam en zij U een naar boven begrensd deel van K; zij $V = \{x \in K \mid \forall_{y \in U} : y \leq x\}$.
Bewijs dat $\sup U = \inf V$.

2.5. Een niet-archimedisch geordend lichaam bevat een deelverzameling die een bovengrens heeft maar geen supremum.

2.6. Bepaal $\sup \{ \frac{\sin x}{x} \mid x \in R\ell \setminus \{0\} \}$.

2.7. Zij $I := [-1,1] \subset R\ell$.
Als $f \in R\ell^I$ en $g \in R\ell^I$ wordt $f \vee g$ gedefinieerd als $(f \vee g)(x) := \sup\{f(x), g(x)\}$ voor alle $x \in I$. Dus $f \vee g \in R\ell^I$.
Teken de grafieken van de volgende elementen $R\ell^I$:

i) $f : f(x) = x + 1$

ii) $g : g(x) = -x + 1$

iii) $h : h(x) = \arcsin x$

iv) $f \vee g$

v) $g \vee h$

vi) $(-f) \vee h$

vii) $(f - g) \vee h$.

2.8. Zij $a \in R\ell$ en $b \in R\ell$, en $a < b$; bewijs

i) $\exists_{c \in Rt} : a < c < b$

ii) $\exists_{c \in R\ell \setminus Rt} : a < c < b$.

2.9. Bepaal $\inf\{\frac{\sin x}{x} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$.

2.10. Zij $a_n := \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}$, $b_n := \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$, $n \in Nt$.

Bewijs: $\forall_{n \in Nt} : a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.

Bepaal de verzameling $D := \{d \in R\ell \mid \forall_{n \in Nt}\ a_n < d < b_n\}$.

2.11. Zij $0 < a_1 < b_1$ en $\forall_{n \in Nt} : a_{n+1} := \sqrt{a_n \cdot b_n}$, $b_{n+1} := \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Bewijs: $\forall_{n \in Nt} : a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.

Bewijs dat $\sup\{a_n \mid n \in Nt\} = \inf\{b_n \mid n \in Nt\}$.

2.12. Bepaal $\lim\limits_n \sup\{a_n\}$ en $\lim\limits_n \inf\{a_n\}$ als

i) $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$

ii) $a_n := n + \frac{1}{n} + (-1)^n(n - \frac{1}{n})$

iii) $0 < a_1 < b_1$, $b_{n+1} := \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $a_{n+1} := \dfrac{a_n \cdot b_n}{b_{n+1}}$ voor alle $n \in Nt$;

iv) $a_n := b_n$ uit 2.12 iii).

2.13. Bewijs dat voor iedere rij $\{a_n\}_{n \in Nt}$ geldt

$$\lim \inf a_n \leq \lim \sup a_n .$$

2.14. Bewijs dat $\lim\limits_n \inf a_n = \lim\limits_n \sup a_n$ dan en slechts dan als $\lim\limits_n a_n$ bestaat; in dat geval is

$$\lim_n \inf a_n = \lim_n a_n = \lim_n \sup a_n .$$

2.15. Zij $\{a_n\}_{n \in Nt} \subset R\ell$ en $\exists_{b \in R\ell} \forall_{n \in Nt}\ a_n < b$. Zij $\alpha_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$.
Bewijs dat $\{\alpha_n\}$ een niet-stijgende rij is en dat $\inf\{\alpha_n\} = \limsup\limits_{n} a_n$.

2.16. Zij in Rt:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n :\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon \in Rt, \varepsilon > 0}\ \exists_{n \in Nt}\ \forall_{m > n}\ |a_m - a| < \varepsilon .$$

Bewijs dat $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-1} = 0$ en dat $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{-n} = 0$.

2.17. Zij K een archimedisch geordend lichaam met de eigenschap: Iedere begrensde monotone rij heeft een limiet.
Bewijs dat $K = R\ell$.

2.18. Zij K een archimedisch geordend lichaam met de eigenschap:
Neemt men in K de rijen $\{a_n\}_{n \in Nt}$ en $\{b_n\}_{n \in Nt}$ zó dat

$\forall_{n \in Nt} : a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ dan is er een $c \in K$ met $\forall_{n \in Nt} : a_n \leq c \leq b_n$.
Bewijs dat $K = R\ell$.

2.19. Zij K het lichaam dat in 2.18 wordt beschreven.
Bewijs: als K de vereniging is van niet-lege disjuncte deelverzamelingen A en B, zó dat

$$\forall_{a \in A}\ \forall_{b \in B} \qquad a < b \ ,$$

dan is er een $c \in K$ zó dat

$$\forall_{x \in K} [x < c \Rightarrow x \in A] \text{ en } \forall_{x \in K} [x > c \Rightarrow x \in B] \quad .$$

2.20. Bewijs dat $\forall_{a \in R\ell}\ \forall_{b \in R\ell}\ \forall_{n \in Nt} : (a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

2.21. Zijn a en b reëel en positief en $a < b$ dan is

$$\forall_{n \in Nt} : a^n < b^n \quad .$$

2.22. Zij $A := \{x \in R\ell \mid x > 0,\ x^2 < 2\}$; bewijs dat A een bovengrens heeft en dat, als $\alpha := \sup A$, $\alpha^2 = 2$.

2.23. Zij $a \in R\ell$, $a > 0$; en $k \in Nt$.
Er is precies één positief reëel getal ξ zó dat $\xi^k = a$.
Notatie: $\xi = \sqrt[k]{a}$.

2.24. $0 < a < b$ en $k \in Nt \Rightarrow 0 < \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$.

2.25. Als $a > 0$ is $\{a^n\}_n$ een monotone rij, voor $a < 1$ dalend en voor $a > 1$ stijgend.

2.26. Als $a > 0$ is $\{\sqrt[n]{a}\}_n$ een monotone rij, voor $a < 1$ stijgend en voor $a > 1$ dalend.

2.27. Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is dan en slechts dan convergent als

$$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{N \in Nt}\ \forall_{p \in Nt}\ \forall_{q \in Nt}\ \left|\sum_{n=N+p}^{N+p+q} a_n\right| < \varepsilon \ .$$

2.28. Als de rijen $\{a_n\}_n$ en $\{b_n\}_n$ voldoen aan

i) $\exists_M\ \forall_{n \in Nt} : \left|\sum_{k=1}^{n} a_n\right| < M$

ii) $\forall_{n \in Nt} : b_n \geqslant b_{n+1}$

iii) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergent. (Stelling van Dirichlet)

2.29. Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ is dan en slechts dan uniform convergent op V als

$$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{N \in Nt}\ \forall_{p \in Nt}\ \forall_{q \in Nt}\ \forall_{x \in V} : \left|\sum_{n=N+p}^{N+p+q} f_n(x)\right| < \varepsilon \ .$$

2.30. De rijen $\{f_n(x)\}_n$ en $\{g_n(x)\}_n$ zijn op V gedefinieerd en

i) $\exists_M\ \forall_{n \in Nt}\ \forall_{x \in V} : \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$

ii) $\forall_{n \in Nt} \forall_{x \in V} : g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$

iii) $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ uniform op V.

Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ op V uniform convergeert.

2.31. Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent; bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ uniform op $[0,1]$ convergeert.

2.32. Bewijs dat

i) $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

ii) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

2.33. Als $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = a$ en $\forall_n\ a_n \leq c_n \leq b_n$, dan is $\lim_n c_n = a$.

Als $\lim_n a_n = a$ en $\lim_n b_n = b$ dan is $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim_n a_n b_n = ab$ en (indien $a \neq 0$) $\lim_n a_n^{-1} = a^{-1}$.

2.34. Zij $p \in Nt \setminus \{1\}$ en $x \in R\ell$, $0 \leq x < 1$.
Bewijs dat er een rij $\{a_n\}_{n \in Nt}$ bestaat zo dat $\forall_n\ a_n \in Nt \cup \{0\}$ en

i) $\forall_n \quad 0 \leq a_n < p$

ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$

iii) als $\forall_{n \in Nt}\ p^n x \notin Nt$ is de rij $\{a_n\}_n$ door x eenduidig bepaald;

iv) als $\exists_{n \in Nt}\ p^n x \in Nt$ zijn er precies twee verschillende rijen $\{a_n\}_n$ en $\{a'_n\}_n$ die aan i) en ii) voldoen.

Bewijs dat iedere reeks $\Sigma_1^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ met $0 \leq a_n < p$ convergent is met een som x waarvoor $0 \leq x \leq 1$.

Opmerking: als $p = 2$ resp. 3 resp. 10 heet $\{a_n\}_n$ de <u>binaire</u> resp. <u>ternaire</u> resp. <u>decimale</u> ontwikkeling van x.

2.35. Bepaal de binaire, ternaire en decimale ontwikkelingen van $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$.

§ 3. Topologie en metriek

3.1. Zij $U_\alpha := \{x \in R\ell \mid x > \alpha\}$ voor alle $\alpha \in R\ell$ en zij

$$\mathcal{T} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in R\ell} \cup \{\emptyset, R\ell\} \quad .$$

Bewijs dat $(R\ell, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is.
Ga na of $(R\ell, \mathcal{T})$ hausdorffs is.

3.2. Zij X een verzameling met oneindig veel elementen.

Zij $\mathcal{T} := \{U \in P(X) \mid X \setminus U \text{ is eindig}\} \cup \{\emptyset\}$.

Bewijs dat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is.
Ga na of $(X, \mathcal{T})$ hausdorffs is.

3.3. Zij

$$\begin{aligned} X &:= \{a,b,c,d,e\} \\ \mathcal{T}_1 &:= \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\} \\ \mathcal{T}_2 &:= \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\} \\ \mathcal{T}_3 &:= \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d,e\}\} \quad . \end{aligned}$$

Ga na of $(X, \mathcal{T}_1)$, $(X, \mathcal{T}_2)$, $(X, \mathcal{T}_3)$ topologische ruimten zijn, en zo ja of ze hausdorffs zijn.

3.4. Zij $T := \{\mathcal{T}_\alpha\}_\alpha$ een collectie van topologieën van een verzameling X, bewijs dat $(X, \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha)$ een topologische ruimte is.

3.5. Bepaal alle topologieën van de verzameling $X := \{a,b,c\}$.
Hoe zijn deze topologieën (door inclusie) partieel geordend?
Geef een voorbeeld van een vereniging van twee topologieën die niet een topologie is.

3.6. Zij voor alle $r \in Rt$: $U_r = \{\alpha \in R\ell \mid \alpha > r\}$ en $\mathcal{T} := \{U_r\}_{r \in Rt} \cup \{\emptyset, R\ell\}$.
Ga na of $(R\ell, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is.

3.7. Zij $\mathcal{T} := \{U \in P(Nt) \mid n \in U \Rightarrow [\forall_{m \in Nt}(m \mid n \Rightarrow m \in U)]\}$.
Bewijs dat $(Nt, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is, en dat $\mathcal{T}$ niet de discrete topologie van Nt voorstelt.

3.8. Zij $A \subset R$; $\mathring{A} := \bigcup\limits_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset A}} U$ ($\mathring{A}$ heet het <u>inwendige</u> van A).

Bewijs dat

i) $\mathring{A} \subset A$ en $\mathring{A} \in \mathcal{T}$.

ii) x is inwendig punt van $A \Longleftrightarrow x \in \mathring{A}$.

3.9. Bewijs dat, als $\overline{A}$ de afsluiting van de verzameling A is, $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^{\circ}$.

3.10. Bewijs

i) $(A \cup B)^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$,

ii) $(A \cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$,

iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Geef voorbeelden waarin $(A \cup B)^{\circ} \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$ en $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

3.11. Een deel $\mathcal{B}$ van $\mathcal{T}$ heet <u>basis voor de topologie</u> $\mathcal{T}$ als iedere $U \in \mathcal{T}$ kan geschreven worden als vereniging van elementen van $\mathcal{B}$.

Bewijs dat (R,d) als basis heeft $\{B_{x,\alpha}\}_{\substack{x \in R \\ \alpha \geq 0}}$.

3.12. Zij $\mathcal{G} := \{U \in P(X) \mid X \setminus U \in \mathcal{T}\}$.

Bewijs dat

i) $\emptyset \in \mathcal{G}$

ii) $X \in \mathcal{G}$

iii) Als $\{U_\alpha\}_\alpha \subset \mathcal{G}$ dan $\bigcap\limits_\alpha U_\alpha \in \mathcal{G}$

iv) Als $\{U_i\}_{i=1,\dots,n} \subset \mathcal{G}$ dan $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{G}$.

3.13. In de topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ zij voor iedere $A \subset R$:

i) A' := de verzameling van verdichtingspunten van A.

ii) A^r := de verzameling van randpunten van A.

Bepaal in de topologische ruimte $R := \{a,b,c,d\}$ met de topologie $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, R\}$ van alle deelverzamelingen $\mathring{A}$, A', A^r en $\overline{A}$.

3.14. Bewijs dat voor alle $A \in P(R)$:

i) $\overline{A} = A \cup A'$ en $\overline{A} = A \cup A^r$

ii) $\mathring{A} = A \setminus A^r$ en $A^r = R \setminus (\mathring{A} \cup \widehat{R\setminus A}^{\circ})$

iii) $A \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow A \cap A^r = \emptyset$

iv) $(A \cap A^r)^o = \emptyset$

v) $\overline{A}^r \subset A^r$ en $\neg\overline{A}^r = A^r$

vi) $\mathring{A}^r \subset A^r$ en $\neg\mathring{A}^r = A^r$

vii) $A = A' \Longleftrightarrow R \setminus A \in \mathcal{T}$ & A heeft geen geïsoleerde punten;

en toon door een voorbeeld aan dat $\exists_{A \in P(R)}\ A^{ro} \neq \emptyset$.

3.15. Zij $\alpha(A) := \overline{\mathring{A}}$ en $\beta(A) := \mathring{\overline{A}}$.

Bewijs dat:

i) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A \subset \alpha(A)$; $R\setminus A \in \mathcal{T} \Rightarrow \beta(A) \subset A$.

ii) $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ en $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

iii) $[A \in \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}$ & $A \cap B = \emptyset] \Rightarrow \alpha(A) \cap \alpha(B) = \emptyset$.

3.16. Als A geen geïsoleerde punten bezit, dan $\overline{A}$ evenmin.

3.17. Zij R een verzameling en zij γ een afbeelding van $P(R)$ in $P(R)$ zó dat

i) $\gamma(\emptyset) = \emptyset$

ii) $\forall_{A \in P(R)} : A \subset \gamma(A)$

iii) $\forall_{A \in P(R)} : \gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)$

iv) $\forall_{A \in P(R)} \forall_{B \in P(R)} : \gamma(A \cup B) = \gamma(A) \cup \gamma(B)$.

Zij nu $\mathcal{O} := \{U \in P(R) \mid U = \gamma(U)\}$.

Bewijs:

i) $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \subset \gamma(B)$

ii) dat $\mathcal{O}$ de in 3.12 opgesomde eigenschappen bezit.

3.18. Bepaal de met de vier in 3.17 genoemde eigenschappen van γ corresponderende eigenschappen van de afbeelding ι van $P(R)$ in $P(R)$ die wordt gedefinieerd door

$$\iota(A) := \mathring{A} \quad .$$

Aanwijzing: $\exists_\gamma\ \iota(A) = R \setminus \gamma(R \setminus A)$.

3.19. Zij $(R, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, zij $S \subset R$ en zij $\mathcal{T} \mid S := \{U \cap S \mid U \in \mathcal{T}\}$. Bewijs dat $(S, \mathcal{T} \mid S)$ een topologische ruimte is.
$\mathcal{T} \mid S$ heet <u>relatieve</u> topologie, ook wel <u>geïnduceerde</u> topologie.

3.20. Zijn $(R, \mathcal{T})$ en $(S, \mathcal{T} \mid S)$ als in 3.19.

Bewijs dat:

i) $S \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall_{A \in P(S)}\ [A \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{T} \mid S]$

ii) $R \setminus S \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall_{A \in P(S)}\ [R \setminus A \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow S \setminus A \in \mathcal{T} \mid S]$.

3.21. Zij $R := [0,1[$; $\mathcal{T} := \{\emptyset\} \cup \{[0,a[\mid a \in R\}$.
Bewijs dat $(R, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is; ga na of $(R, \mathcal{T})$ hausdorff is; geef een voorbeeld van een rij in R die meer dan één limiet heeft.

3.22. In $R\ell$ definieert men een metriek door $d(x,y) = |x - y|$; laat zien dat deze functie aan de voorwaarden van een metriek voldoet.
Bewijs dat iedere open verzameling vereniging is van aftelbaar veel disjuncte open intervallen.

3.23. Zij d een metriek op de verzameling R.
Bewijs dat de volgende functies van $R \times R$ in $R\ell$ eveneens metrieken zijn:

i) $d' : \forall_a \forall_b\ d'(a,b) := \inf\{d(a,b), 1\}$.

ii) $d'' : \forall_a \forall_b\ d''(a,b) := \dfrac{d(a,b)}{1 + d(a,b)}$.

3.24. Zij (R,d) een metrische ruimte, zij $B_{x,\alpha}$ de open bol met middelpunt x en straal α (voor alle $x \in R$ en alle $\alpha \geq 0$). Bewijs dat

i) $\alpha \leq \beta \Rightarrow B_{x,\alpha} \subset B_{x,\beta}$

ii) $\forall_{y \in B_{x,\alpha}} \exists_{\beta > 0} : B_{y,\beta} \subset B_{x,\alpha}$

iii) de doorsnede van twee open bollen is vereniging van open bollen;

iv) $(n \in Nt)$ de doorsnede van n open bollen een vereniging is van open bollen.

3.25. Zij (R,d) een metrische ruimte en $\overline{B}_{x,\alpha} := \{y \in R \mid d(y,x) \leq \alpha\}$ voor alle $x \in R$ en alle $\alpha \geq 0$.

i) Bewijs dat $\overline{B}_{x,\alpha}$ gesloten is.

ii) Bewijs dat $\overline{B}_{x,\alpha} \setminus B_{x,\alpha}$ gesloten is.

3.26. Zij $X = R\ell \times R\ell$. Definieer d op $X \times X$ door:

als $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $\underline{y} = (y_1, y_2)$ is $d(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Bewijs dat (X,d) een metrische ruimte is.

Hoe ziet $B_{\underline{x},\alpha}$ er uit?

3.27. Als 3.26; neem $d^*(\underline{x}, \underline{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

3.28. Als 3.26; neem $\tilde{d}(\underline{x}, \underline{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

3.29. Bewijs dat de door d, d^* en $\tilde{d}$ in X bepaalde topologieën dezelfde zijn.

3.30. Zij $(X, \mathcal{T})$ als in 3.26; p_1 is de afbeelding van X in $R\ell$ die wordt gedefinieerd door: $\forall_{\underline{x} \in X} : p_1 \underline{x} = x_1$.

Bewijs dat: U open in $X \Rightarrow p_1(U)$ open in $R\ell$.

Toon door een voorbeeld aan: $\neg[U$ gesloten in $X \Rightarrow p_1(U)$ gesloten in $R\ell]$.

3.31. Zij $X = R\ell^{[0,1]}$ en $d(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$; zij $\{f_n\}_{n \in Nt}$ gedefinieerd door $\forall_{n \in Nt} \forall_{x \in [0,1]} : f_n(x) = x^n$.

Is de rij $\{f_n\}_n$ convergent?

Is de rij $\{f_n(x)\}_n$ voor enige waarde van x convergent?

Beantwoordt deze vragen ook voor $\{g_n\}_n$ met $g_n(x) = 1 - (\frac{2x}{\pi})^n$ en voor $\{h_n\}_n$ met $h_n(x) = \frac{1}{n}$ als $x < \frac{1}{2}$ en $h_n(x) = 1 - \frac{1}{n+1}$ als $x \geq \frac{1}{2}$.

3.32. Zij $X := C([0,1])$, $d(f,g) := \max\{|f(x) - g(x)| \; | x \in [0,1]$.
Geef een voorbeeld van een rij $\{f_n\}_n$ in X zó dat $\forall_{x \in [0,1]} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ en $\lim_{n \to \infty} f_n \neq \sigma$.
Bewijs dat (X,d) volledig is.

3.33. Zij (R,d) een volledig metrische ruimte en $\mathcal{T}$ de bijbehorende topologie; bewijs dat $R \setminus F \in \mathcal{T} \Rightarrow (F, \mathcal{T} | F)$ volledig.

3.34. In een metrische ruimte is de afsluiting $\overline{A}$ van een verzameling A de verzameling van alle limieten van convergente rijen in A.

3.35. Zij $H := \{\{x_n\}_{n \in Nt} \in Cm^{Nt} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$.

In H worden drie composities gedefinieerd:

$$+ \; : \; \{x_n\}_n + \{y_n\}_n := \{x_n + y_n\}_n \quad , \quad H \times H \to H$$

$$: \; \alpha\{x_n\}_n := \{\alpha x_n\}_n \quad , \quad Cm \times H \to H$$

$$(\, , \,) \; : \; (\{x_n\}_n , \{y_n\}_n) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \quad , \quad H \times H \to Cm \quad .$$

Bewijs dat:

i) deze definities geoorloofd zijn;

ii) $(H, +, \;)$ een vectorruimte is;

iii) $(\, , \,)$ voldoet aan de eigenschappen van een inproduct:

I_1 : $(\underline{a}, \underline{b}) = \overline{(\underline{b}, \underline{a})}$ ($\underline{a}$ is de notatie voor $\{a_n\}_n$)

I_2 : $(\lambda\underline{a}, \underline{b}) = \lambda(\underline{a}, \underline{b})$

I_3 : $(\underline{a} + \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{c}) + (\underline{b}, \underline{c})$

en bovendien aan

I_D : $\underline{a} \neq \underline{0} \Rightarrow (\underline{a}, \underline{a}) > 0$.

iv) Laat zien dat deze ruimte H geen eindige basis heeft.

Vervolgens definieert men

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}-\underline{y}, \underline{x}-\underline{y})^{\frac{1}{2}} \quad .$$

v) Laat zien dat d een metriek is.

vi) Bewijs dat (H,d) volledig is.

3.36. $\mathcal{T}$ is een klasse verzamelingen natuurlijke getallen gedefinieerd door

$$E_n := \{k \in \mathrm{Nt} \mid k \geq n\} \; ; \qquad \mathcal{T} := \{E_n\}_{n \in \mathrm{Nt}} \cup \{\emptyset\} \quad .$$

i) Bewijs dat $\mathcal{T}$ een topologie is.

ii) $A := \{7,24,47,85\}$, $B := \{n \in \mathrm{Nt} \mid 3 \mid n\}$.
Bepaal $\overline{A}$ en $\overline{B}$.

iii) Bepaal de deelverzamelingen van Nt die in Nt overal dicht zijn.

3.37. Bewijs dat:

i) Rt in Rℓ overal dicht is.

ii) Rℓ \ Rt in Rℓ dicht is.

3.38. Bewijs: A nergens dicht $\Longleftrightarrow \mathring{\overline{A}} = \emptyset$.

3.39. Bepaal in $(\mathrm{Nt}, \mathcal{T})$ van vraagstuk 3.36 de deelverzamelingen van Nt die nergens dicht zijn.

3.40. Bepaal bij een discrete ruimte alle overal dichte en alle nergens dichte deelverzamelingen.

3.41. Bepaal bij een triviale (topologische) ruimte alle overal dichte en alle nergens dichte verzamelingen.

3.42. Zij A overal dicht in $(R, \mathcal{T})$, $\emptyset \neq B \in \mathcal{T}$.
Bewijs dat $A \cap B \neq \emptyset$.

4.43. Zij $(R, \mathcal{T}_c)$ een oneindige verzameling met de <u>cofinite</u> topologie (gedefinieerd in vraagstuk 3.2).
Zij A een oneindige deelverzameling van R.
Bewijs dat A in R overal dicht is.

3.44. Zij Cm voorzien van de metrische topologie.
Zij $A_{k,\ell} := \{z \in Cm \mid |z-k-\ell i| < 1\}$ voor alle $k \in Gh$ en alle $\ell \in Gh$;
evenzo

$$B_{k,\ell} := \{z \in Cm \mid |z-k-\ell i| < \tfrac{1}{2}\} \quad ,$$

$$C_{k,\ell} := \{z \in Cm \mid |z-k-\ell i| \leq 1\} \quad ;$$

$\mathfrak{A} = \{A_{k,\ell}\}_{k \in Gh, \ell \in Gh}$, $\mathcal{B} := \{B_{k,\ell}\}_{k \in Gh, \ell \in Gh}$, $\mathcal{L} := \{C_{k,\ell}\}_{k \in Gh, \ell \in Gh}$.

Bewijs:

i) $\mathfrak{A}$ is een open overdekking van Cm

ii) $\mathcal{B}$ en $\mathcal{L}$ zijn geen open overdekkingen van Cm.

3.45. Zij R voorzien van de cofinite topologie $\mathcal{T}_c$.
Bewijs dat $(R, \mathcal{T}_c)$ compact is.

3.46. Een eindige verzameling (met welke topologie dan ook) is compact.

3.47. De triviale topologie is compact.

3.48. Een oneindige verzameling met de discrete topologie is niet compact.

3.49. Een deelverzameling A van een topologische ruimte $(R, \mathcal{T})$ heet compact als $(A, \mathcal{T} \mid A)$ compact is.
Bewijs dat in $R\ell$ $]0,1]$ niet compact is, en dat $[0,1]$ compact is.

3.50. Een deelverzameling A van $(R, \mathcal{T})$ is dan en slechts dan compact als iedere open overdekking $\{U_\alpha\}_\alpha$ van A een eindige deeloverdekking bevat.

3.51.X In een hausdorffruimte is iedere compacte verzameling gesloten.

3.52. In een compacte ruimte is iedere gesloten deelverzameling compact.

3.53. Een verzameling in $R\ell$ (en evenzo in R_n) is dan en slechts dan compact als ze gesloten en begrensd is.

3.54. Zij A een rij-compact deel van een metrische ruimte, dan is A gesloten en begrensd.

3.55. Zij $\mathcal{T}_d$ de door de afstand in Rt voortgebrachte topologie; beschouw

$$V := \{x \in \mathrm{Rt} \mid x^2 < 2\} \quad .$$

i) Bewijs dat V gesloten is en dat V open is;

ii) Zij $f : V \to R\ell$ gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{2|x| + 2}$ en zij

$\sigma_x :=]x - f(x),\ x + f(x)[$ voor alle $x \in V$.

Bewijs dat $V \subset \bigcup_{x \in V} \sigma_x$.

iii) Bewijs dat V niet compact is.

3.56. Zij C de deelverzameling van $R\ell$ waarvan de elementen kunnen worden geschreven als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \qquad \text{(vergelijk vraagstuk 2.34)}$$

met $a_n = 0$ of 2;

i) C is eeneenduidig af te beelden op het segment $[0,1]$.

ii) C is niet-aftelbaar.

iii) $C = C'$ en $C = \overline{C}$.

iv) C is nergens dicht.

v) bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een overdekking van C met segmenten $[a_k, b_k]$ zó dat $\Sigma_k \mid b_x - a_k \mid < \varepsilon$. C heet de Cantorverzameling.

3.57. Bewijs dat Rt, $R\ell$ en Cm niet compact zijn.

3.58. Beschouw in R_2 de rechte L met vergelijking $y = 0$

de cirkel C met vergelijking $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

De rechten uit de lijnenbundel door $(0,2)$ definiëren een injectie van L in C; noem deze afbeelding f.

Bewijs:

i) $f(L) = C \setminus \{(0,2)\}$.

ii) U open in $L \Rightarrow f(U)$ open in C .

(L en C bezitten de relatieve topologie, geïnduceerd door de metrische topologie $\mathcal{T}$ van R_2).

iii) K compact in $L \Rightarrow f(L\setminus K) \cup \{(0,2)\}$ open in C.

We definiëren een nieuwe ruimte, $L_\infty := L \cup \{\infty\}$ en een topologie in L_∞,

$\mathcal{T}_\infty := \mathcal{T} \mid L \cup \mathcal{W}$, waarin $\mathcal{W} := \{V \cup \{\infty\} \mid V \subset L \text{ en } L\setminus V \text{ compact}\}$.

We definiëren $g : L_\infty \to C$ door

als $\quad x \in L$ is $g(x) = f(x)$

$\quad g(\infty) = (0,2)$.

Bewijs:

iv) g is een bijectie.

v) W open in $L_\infty \Longleftrightarrow g(W)$ open in C.

vi) L_∞ is compact.

L_∞ heet de <u>eenpuntscompactificatie</u> of <u>Alexandroff-compactificatie</u> van L.

3.59. Bewijs (op geheel aan 3.58 analoge wijze) dat Cm een eenpuntscompactificatie bezit.

§ 4. Limieten, continuïteit

4.1. Een rij $\{x_n\}_n \in R\ell^{Nt}$ (of $\in Cm^{Nt}$) heet een nulrij als $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.
Als $\{x_n\}_n$ een nulrij is en voor de rij $\{y_n\}_n$ geldt

$$\exists_{m \in Nt} \exists_{\alpha \in R\ell} \forall_{n \geq m} |y_n| \leq \alpha |x_n|$$

dan is $\{y_n\}_n$ een nulrij.

4.2. Zij $\{x_n\}_n$ een nulrij en $\{a_n\}_n$ een begrensde rij, dan is $\{a_n x_n\}_n$ een nulrij.

4.3. $\{x_n\}_n$ is dan en slechts dan een nulrij, als $\{|x_n|\}_n$ een nulrij is.

4.4. Is $\{x_n\}_n$ een nulrij, dan ook iedere deelrij van $\{x_n\}_n$.

4.5. Is $\{x_n\}_n$ een nulrij en is π een permutatie van Nt, dan is ook $\{x_{\pi(n)}\}_n$ een nulrij.

4.6. Zij σ een eeneenduidige afbeelding van Nt in Nt; als $\{x_n\}_n$ een nulrij is, dan ook $\{x_{\sigma(n)}\}_n$.

4.7. Als $\{x'_n\}_n$ en $\{x''_n\}_n$ nulrijen zijn en als

$$\exists_{m \in Nt} \forall_{n \geq m} x'_n \leq x_n \leq x''_n \quad ,$$

dan is $\{x_n\}_n$ een nulrij.

4.8. Als $\{x_n\}_n$ en $\{y_n\}_n$ nulrijen zijn, dan ook $\{x_n + y_n\}_n$ en $\{x_n - y_n\}_n$.

4.9. Als $a > 0$ is $\{\sqrt[n]{a} - 1\}_n$ een nulrij.

4.10. Als $|a| < 1$ zijn $\{a^n\}_n$ en $\{n \cdot a^n\}_n$ nulrijen.

4.11. Als $\alpha > 0$ is $\{n^{-\alpha}\}_n$ een nulrij.

4.12. Als $n \geq 2$ en $p > -1$ dan is $(1+p)^n > 1 + np$.

4.13. $\{\sqrt[n]{n}-1\}_n$ is een nulrij.

4.14. Als $\{x_n\}_n$ een nulrij is dan ook $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\}_n$.

4.15. Als $x_n \to x$ dan ook $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \to x$.

4.16. Bewijs dat de rij $\{x_n\}_n$ met $x_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ convergent is.

4.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{2}$.

4.18. Toon door een voorbeeld aan dat het omgekeerde van 4.13 niet geldt.

Ga na of de volgende (4.19 - 4.24) limieten bestaan en zo ja hoe groot ze zijn.

4.19. $f : R\ell \setminus \{0\} \to R\ell$; $f(x) := e^{-\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in V}} f(x)$.

i) $V :=]0,1]$

ii) $V := [-1,0[$.

4.20. $f : R\ell \times R\ell \setminus\{(0,0)\} \to R\ell$; $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in V}} f(x,y)$.

i) $V := \{(x,y) \in R\ell \times R\ell \mid x = y\}$

ii) $V := \{(x,y) \in R\ell \times R\ell \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\}$

iii) $V := \{(x,y) \in R\ell \times R\ell \mid |y| < x^2\}$

iv) $V := \{(x,y) \in R\ell \times R\ell \mid |y| < x\}$.

4.21. Zij $W = \{(x,y) \in R\ell \times R\ell \mid x + y \neq 0\}$, $\varphi : W \to R\ell \times R\ell$;

$\varphi(x,y) = (x+y, \frac{y}{x+y})$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in V}} \varphi(x,y)$.

i) $V := \{y=0\}$

ii) $V := \{x=y\}$

iii) $V := \{x=0\}$

iv) $V := \{2x + y = 0\}$

v) $V := \{x + 2y = 0\}$

vi) $V := \{x + y > 0\}$.

4.22. i) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in R\ell \setminus \{0\}}} \left\{ \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in R\ell \setminus \{0\}}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right\}$$

ii) $$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in R\ell \setminus \{0\}}} \left\{ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in R\ell \setminus \{0\}}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right\}$$

iii) $$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in R\ell \setminus \{0\} \times R\ell \setminus \{0\}}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

4.23. i) $$\lim_{x \to 0} \left\{ \lim_{y \to 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \right\}$$

ii) $$\lim_{y \to 0} \left\{ \lim_{x \to 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \right\}$$

iii) $$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x + y \neq 0}} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \quad .$$

4.24. i) $$\lim_{x \to 0} \left\{ \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} x \sin \frac{1}{y} \right\}$$

ii) $$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \left\{ \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{y} \right\}$$

iii) $$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y \neq 0}} x \sin \frac{1}{y}$$

In het vervolg wordt onder een functie gewoonlijk (dat wil zeggen: tenzij uit de tekst duidelijk anders blijkt) een reële functie verstaan: een afbeelding in $R\ell$; dan is de functie σ op R gedefinieerd door: $\forall_{x \in R} \sigma(x) = 0$.

4.25. Zij f een op $[0,1]$ continue functie met de eigenschap: $\forall_{x \in Rt \cap [0,1]} f(x) = 0$.
Bewijs dat $f = \sigma$.

4.26. De functie f is gedefinieerd door:

Als $x \in Rt$, $x = mn^{-1}$ met $ggd(m,n) = 1$: $f(x) = n^{-1}$.

Als $x \in (R\ell \setminus Rt) \cup \{0\}$: $f(x) = 0$.

Ga na of er punten zijn waar f continu is.

4.27. De functie f is gedefinieerd op $R\ell$, continu in 1 en heeft de eigenschap:
$\forall_x \forall_y \; f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Bewijs: $\exists_{a \in R\ell} \forall_{x \in R\ell} \; f(x) = ax$.

4.28. Zij f een continue functie op een metrische (of topologische) ruimte R en zij $S := \{x \in R \mid f(x) = 0\}$.
Bewijs dat S gesloten is.

4.29. Zij f een functie op $[0,1]$ met de eigenschap $\forall_{y \in R\ell}$: [de vergelijking $f(x) = y$ heeft 0 of 2 oplossingen].
Bewijs dat f op $[0,1]$ niet continu is.

4.30. Zij S een begrensd deel van $R\ell$ en f uniform continu op S;
bewijs dat f begrensd is.

4.31. Zij S een gesloten deel van $R\ell$ en f continu op S;
bewijs dat er een continue functie g op $R\ell$ bestaat zó dat $\forall_{x \in S} \; f(x) = g(x)$.

4.32. Zij R een metrische ruimte waarin A en B disjuncte niet-lege gesloten verzamelingen zijn;
bewijs dat er een functie f op R bestaat die voldoet aan

i) f continu

ii) $\forall_{x \in A} \; f(x) = 0$

iii) $\forall_{x \in B} \; f(x) = 1$

iv) $\forall_{x \in R \setminus (A \cup B)} \; 0 < f(x) < 1$.

4.33. Zij V compact in $R\ell$ en $f: V \to R\ell$ continu;
bewijs:

i) bij iedere $x \in V$ is een interval $I_x \subset V$ zó dat $y \in I_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$

ii) f is begrensd.

4.34. f, g en h zijn functies van R_2 in $R\ell$ waarvoor $f(x) := x+y$, $g(x) := xy$ en $h(x) := xy^{-1}$ (voor $y \neq 0$); bewijs dat f en g op R_2, h op $R_2 \setminus \{y=0\}$ continu zijn.

4.35. Zij $f : R\ell \to R\ell$ monotoon op $]a,b[$; bewijs dat f niet meer dan aftelbaar veel sprongpunten kan hebben.

4.36. De functie $f : V \to R_n$ (V is een willekeurige topologische ruimte) is dan en slechts dan continu als alle componentfuncties continu zijn.

4.37. Zij f continu op $R\ell$, $a_1 \in R\ell$, $\forall_{n \geq 2} : a_n := f(a_{n-1})$ en $a := \lim_{n \to \infty} a_n$. Bewijs dat $f(a) = a$.

4.38. Zij $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ voor $x > 0$; ga na of f uniform continu is op $]0,\infty[$.

4.39. Zij f gedefinieerd en uniform continu op $]0,1]$;
bewijs dat er een continue functie g op $[0,1]$ bestaat zó dat
$\forall_{x \in]0,1]} \; f(x) = g(x)$.

4.40. Bewijs dat de vergelijking

$$x^3 \sin\sqrt{|x|} + x \log(1+x^2) + 2 = 0$$

een reële wortel heeft.

4.41. Zij $I := [0,1]$ en $C(I)$ de verzameling van continue functies van I in $R\ell$ (vergelijk 1.40).
Voor $f \in C(I)$, $g \in C(I)$ zij $d(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \; | x \in I\}$.

Bewijs dat $(C(I),d)$ een metrische ruimte is.
In 1.40 is al bewezen dat $C(I)$ een ring is. Zij voor iedere $p \in I$:

$$\mathfrak{a}_p := \{f \in C(I) \mid \exists_{\varepsilon>0} \;]p-\varepsilon, p+\varepsilon[\cap I \subset f^{\leftarrow}(0)\} \quad .$$

Bewijs:

i) $\mathfrak{a}_p$ is niet een open verzameling in $C(I)$

ii) $\mathfrak{a}_p$ is niet een gesloten verzameling in $C(I)$

iii) $\mathfrak{a}_p$ is een ideaal in $C(I)$.

4.42. Als f en g continue reële functies zijn op een topologische ruimte R, dan zijn ook $f \vee g$ en $f \vee g$ continu.

4.43. Zij f continu op $[a,b]$; zij $V := \{x \in [a,b] \mid \exists_{y>x}\ f(y) > f(x)\}$.
Bewijs dat $V \cap\ ]a,b[$ open is; als $V = \bigcup_k\ ]a_k\,, b_k[$ (vergelijk 3.22.) met $k \neq \ell \Rightarrow\ ]a_k\,, b_k[\,\cap\,]a_\ell\,, b_\ell[\ = \emptyset$ dan is $\forall_k\ f(a_k) \leq f(b_k)$ (stelling van Riesz).

§ 5. Continue en convexe functies

5.1. Zij $C(I)$ als in 4.41. $C(I)$ is een vectorruimte over $R\ell$.
Voor iedere $n \in Nt$ wordt een afbeelding B_n van $C(I)$ in $C(I)$ gedefinieerd door

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad .$$

i) Bewijs dat B_n voor iedere $n \in Nt$ een begrensde lineaire afbeelding is.

ii) Bewijs dat 1 eigenwaarde is van B_n en bepaal de bij 1 behorende eigenruimte.

iii) Bewijs dat $\forall_{n \in Nt}\ B_n\, j^2 = \dfrac{j + (n-1)j^2}{n}$; hierin is $j(x) := x$.

iv) Bewijs dat $\forall_{n \in Nt}\ B_n\, j^3 = \dfrac{j + 3(n-1)j^2 + (n-1)(n-2)j^3}{n^2}$;

v) Bewijs dat voor $n \geq m$ de graad van $B_n\, j^m$ m is.

5.2. Zij $f \in C(I)$ en $M := d(f,\sigma)$; zij $\varepsilon > 0$ en $\delta(\varepsilon) := \sup\{\delta > 0 \mid |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$ dan is (zie het op college besproken bewijs van de stelling van Weierstrass)

$$n > \frac{M}{2\varepsilon\delta^2} \Rightarrow d(f, B_n f) < 2\varepsilon \quad .$$

Bepaal voor de functies $f(x) := |x - \frac{1}{2}|$

en $g(x) := |x - \frac{2}{3}| - |x - \frac{1}{3}|$

i) $\dfrac{M}{2\varepsilon\delta^2}$

ii) $\min\{n \in Nt \mid d(B_n f, f) < \varepsilon\}$ voor een geschikt gekozen ε.

5.3. Zij $f \in C([0,1])$ en $\forall_{n \in Nt \cup \{0\}} : M_n := \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.

M_n heet het n-de moment van f (op $[0,1]$).

Bewijs dat, als $g \in C([0,1])$ en g dezelfde momenten heeft als f, geldt: $f = g$.

5.4. Zij $f \in R\ell^{[0,1]}$; $0 \leq x < \frac{1}{2}$, $f(x) := 1$
$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, $f(x) := 0$.

Bewijs dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ polynomen p en q bestaan zó dat

i) $\forall_{x \in [0,1]} : p(x) \geqslant f(x) \geqslant q(x)$

en

ii) $\int_0^1 \{p(x) - q(x)\}dx < \varepsilon$.

5.5. Zij f continu op $[0,2\pi]$ en periodiek op $R\ell$ met periode 2π; bewijs dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een trigonometrisch polynoom $t(x)$ bestaat zodat $\forall_{x \in R\ell} \; |t(x) - f(x)| < \varepsilon$.

5.6. Zij R een metrische ruimte; $V \subset R$; $\{f_n\}_n \subset R\ell^V$ en $f \in R\ell^V$.
Zij $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ uniform op V en zij f_n begrensd voor alle $n \in Nt$.
Bewijs dat $\exists_M \forall_{x \in V} \forall_{n \in Nt} : |f_n(x)| < M$ (d.w.z. de rij $\{f_n\}$ is <u>uniform begrensd</u>

5.7. Bepaal in drie decimalen nauwkeurig

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\, dx \quad .$$

5.8. Zij $g_n(t) = e^{-nt^2}$ voor alle $n \in Nt$ en alle $t \in R\ell$.

i) Bewijs dat $g_n|\,]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}]$ en $g_n|\,[\frac{1}{\sqrt{n}}, \infty[$ convex zijn.

ii) Bewijs dat $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\infty} e^{-nt^2} dt < 2e^{-\sqrt[3]{n}}$.

5.9. Zijn f en g convexe functies op $R\ell$, en bovendien f niet-dalend.
Zij $f \circ g$ gedefinieerd door $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

Bewijs dat $f \circ g$ convex is op $R\ell$.

5.10. Zij f convex op $R\ell$, dan is door ieder punt van de grafiek van f een rechte die "onder" de grafiek van f ligt.

5.11. Zij $f \in C(R\ell)$ en f begrensd.

Bepaal $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-nt^2} dt$.

5.12. Bewijs dat (voor alle $a,b,c,d \in R\ell$)

i) $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \leqslant (ac - bd)^2$

ii) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqslant (ac + bd)^2$

en dat het gelijkteken alleen geldt als $ad = bc$.

5.13. Bewijs dat (voor alle a en $b \in R\ell$)

$$(a^2 - b^2)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$$

en dat het gelijkteken alleen geldt als $a = b$.

5.14. $\forall_{a>0} \forall_{b>0} \; \frac{2}{a^{-1} + b^{-1}} \leqslant \sqrt{ab}$; wanneer geldt = ?

5.15. $\forall_a \forall_b \forall_c \; a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$; wanneer geldt = ?

$$\left.\begin{array}{l} 5.16.\ \forall_a \forall_b \{ab \geqslant 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)^2 \geqslant (a-b)^4\} \\[2ex] 5.17.\ \forall_a \forall_b \{ab \leqslant 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)^2 \leqslant (a-b)^4\} \\[2ex] 5.18.\ \forall_a \forall_b \{a+b \geqslant 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2\} \end{array}\right\} \quad \text{wanneer geldt = ?}$$

5.19. $\forall_a \forall_b \; [a + b \neq 0 \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}\,]$.

5.20. $\forall_a \forall_b \; \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

5.21. Als $\forall_{i=1,\dots,n} \; y_i \geqslant 0$ en $\forall_{i=1,\dots,n} \; m_i \in Nt$ dan is

$$\frac{\Sigma_i m_i y_i}{\Sigma_i m_i} \geqslant \left(\prod_i y_i^{m_i}\right)^{\frac{1}{\Sigma_i m_i}} .$$

5.22. Bewijs dat:

i) $\lim\limits_{r \to \infty} \mathfrak{M}_r(a) = \max\limits_i a_i$

ii) $\lim\limits_{r \to -\infty} \mathfrak{M}_r(a) = \min\limits_i a_i$.

5.23. Zij f convex en begrensd op $R\ell$. Bewijs dat f constant is.

5.24. Zij $n \in Nt$, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \dots \geq b_n \geq 0$.

Bewijs dat $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

5.25. Zij φ een monotoon stijgende continue functie op $[0,\infty[$, $\varphi(0) = 0$, $a \geq 0$ en $b \in \varphi([0,\infty[)$.

Bewijs dat

$$\int_0^a \varphi(t)dt + \int_0^b \varphi^{\leftarrow}(t)dt \geq ab$$

(<u>ongelijkheid van Young</u>) .

5.26. Zij $f \in C([0,1])$, $g \in C([0,1])$.

Bewijs dat

i) $$\left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 dt \cdot \int_0^1 g(t)^2 dt$$

(<u>ongelijkheid van Cauchy-Schwarz-Bunyakowski</u>) .

ii) als $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 0$, $q > 0$:

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|dt \leq \left\{\int_0^1 |f(t)|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^1 |g(t)|^q\, dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

(<u>ongelijkheid van Hölder</u>) .

5.27. Bewijs dat (voor f en g als in 5.12 en $p \geq 1$)

$$\left\{\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p\, dt\right\} \leq \left\{\int_0^1 |f(t)|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_0^1 |g(t)|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

(<u>ongelijkheid van Minkowski</u>) .

5.28. Als $\{a_n\}_n$ en $\{b_n\}_n$ rijen zijn in $R\ell$ (of Cm) en $p \geq 1$ en als $\Sigma_n |a_n|^p < \infty$

en $\Sigma_n |b_n|^p < \infty$ dan is

$$\Sigma_n |a_n + b_n|^p < \infty \quad \text{en}$$

$$\{\Sigma_n |a_n + b_n|^p\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \{\Sigma_n |a_n|^p\}^{\frac{1}{p}} + \{\Sigma_n |b_n|^p\}^{\frac{1}{p}}$$

(<u>ongelijkheid van Minkowski</u>) .

6. Differentieerbaarheid

6.1. $\left.\begin{array}{ll} e^{-x} = O(x^{-n}) & (x \to \infty) \\ e^{-x} = o(x^{-n}) & (x \to \infty) \end{array}\right\}$ voor alle $n \in$ Nt.

6.2. $(\log x)^{-1} = O(1) \qquad (x \to \infty)$

$(\log x)^{6} = O(x^{\frac{1}{2}}) \qquad (x \to \infty)$.

6.3. $x^{-1}O(1) = O(1) + O(x^{-2}) \qquad (0 < x < \infty)$.

6.4. $2x + x \sin x = O(x) \qquad (x \to \infty)$

$\log(e^{2x \cos x} + e^{x}) = O(x) \qquad (x \to \infty)$.

6.5. $\left(\dfrac{k}{x^2+k^2}\right)^k = O\left(\dfrac{1}{x^k}\right) \qquad (1 < x < \infty)$ uniform in k $(0 < k < \infty)$.

6.6. $\dfrac{k^2}{1+kx^2} = O(\dfrac{1}{x}) \qquad (x \to \infty)$ voor alle $k > 0$, maar niet uniform in k.

6.7. $\cos x = 1 + o(x) \qquad (x \to 0)$

$e^{o(x)} = 1 + o(x) \qquad (x \to 0)$.

6.8. $o(f(x)g(x)) = o(f(x)) \cdot O(g(x)) \qquad (x \to 0)$

$o(f(x)g(x)) = f(x) \cdot o(g(x)) \qquad (x \to 0)$.

6.9. $n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + o(1)) \qquad (n \to \infty)$

$n! = e^{-n+o(1)} n^n \sqrt{2\pi n} \qquad (n \to \infty)$.

6.10. Bewijs dat $f : f(x) := x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ voor $x \in [-1,1]$ in -1 resp. 1 rechts- resp. links differentieerbaar is.

6.11. Bewijs dat $f : f(x) := (x-1)\arcsin x$ in 1 links differentieerbaar is.

6.12. Zij $P_n(x) := \frac{1}{2^n \cdot n!} D^n[(x^2-1)^n]$, voor alle $x \in R\ell$ en alle $n \in Nt$.

P_n heet het n-de polynoom van Legendre.

Bewijs dat P_n van de graad n is en n verschillende nulpunten heeft die tussen -1 en 1 liggen.

6.13. Bewijs dat

$$\forall_{n \in Nt} \forall_x \; (x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

(differentiaalvergelijking van Legendre).

6.14. Teken de grafiek van f:

$$f(x) := \arctan x - \tfrac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} \quad .$$

6.15. $0 < x \Rightarrow \sin x < x$; $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x < \tan x$.

6.16. $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x > \frac{2}{\pi} x$.

6.17. $x > 0 \Rightarrow \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

6.18. $x > 0 \Rightarrow \sin x > x - \frac{1}{6} x^3$.

6.19. $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x > x + \frac{1}{3} x^3$.

6.20. $x > 0 \Rightarrow \log x \leqslant x - 1$.

6.21. $[x > 0 \;\&\; 0 < \alpha < 1] \Rightarrow x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$.

6.22. Teken de grafiek van f: $f(x) := x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.

6.23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\log(e-x) + x - 1}$

6.24. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

Ga na of de volgende functies (6.27 - 6.30) in het vermelde punt α continu of differentieerbaar zijn en of de afgeleide daar continu is.
Schets de grafieken.

6.27. $x \neq 0 : f(x) := \dfrac{e^x - 1}{x}$, $f(0) := 1$; $\alpha = 0$.

6.28. $x > 0 : f(x) := x^2 \log x$, $f(0) := 0$; $\alpha = 0$.

6.29. $x > 0 : f(x) := x^x$, $f(0) := 1$; $\alpha = 0$.

6.30. $x > -1$ en $x \neq 0 : f(x) := \dfrac{e^x - 1}{\log(1+x)}$, $f(0) := 1$; $\alpha = 0$.

6.31. $0 < x < 1 \implies e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$.

6.32. $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^2 x < e^{-x^2}$.

6.33. Als $f \in R\ell^{[a,b]}$ en als f differentieerbaar is op $[a,b]$ met een continue afgeleide, dan is f te schrijven als het verschil van twee monotone functies.

6.34. Formuleer en bewijs de zogenaamde kettingregels voor samengestelde functies $f \circ g$ in de volgende gevallen:

i) $f : R\ell \to R\ell$, $g : R\ell \to R\ell$

ii) $f : R_2 \to R\ell$, $g : R\ell \to R_2$

iii) $f : R_2 \to R_2$, $g : R\ell \to R_2$

iv) $f : R_2 \to R_2$, $g : R_2 \to R_2$.

7. Integratie

7.1. Als $a > 0$, $a \leqslant x \leqslant b$ en $f(x) := x^{-2}$ en V een willekeurige verdeling is van $[a,b]$ geldt voor de Riemannse sommen

$$s_V \leqslant a^{-1} - b^{-1} \leqslant S_V \quad .$$

Bewijs dit en trek de voor de hand liggende conclusie.

7.2. Zij $b > a > 0$, $p > 0$ en $f(x) := x^p$ voor $x \in [a,b]$;

zij $\zeta(n) := (ba^{-1})^{n^{-1}}$ en $V_n := \{a, a\zeta(n), a\zeta(n)^2, \ldots, b = a\zeta(n)^n\}$.

Bepaal de bij f en V_n behorende Riemannse sommen en vervolgens $\int_a^b f(x)dx$.

7.3. Bepaal met behulp van Riemannse sommen $\int_a^b e^x\, dx$.

7.4. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right)$.

7.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{2}{n} + \ldots + \sin\frac{n}{n}\right)$.

7.6. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right\}$.

7.7. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left\{\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{2}{(n^2+2^2)^2} + \ldots + \frac{n}{(2n^2)^2}\right\}$.

7.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.

7.9. f is op $[0,1]$ Riemann-integreerbaar; $0 < \xi < 1$,
f is op $]0,\xi[$ monotoon niet-dalend, op $]\xi,1[$ monotoon niet-stijgend;

$$\Delta_n := \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right\} \quad .$$

Bewijs dat $\Delta_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$.

7.10. Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right\}=\log 2$

en dat $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\dots+\frac{2}{4n-1}\right\}=\log 2$.

7.11. Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{\log 2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\dots-\frac{1}{2n}\right\}=\frac{1}{4}$

en dat $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left\{\log 2-\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n+3}-\dots-\frac{2}{4n-1}\right\}=\frac{1}{32}$.

7.12. Als f op $[0,1]$ integreerbaar is, is

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\dots+(-1)^n f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}=0 .$$

7.13. Als f op $[a,b]$ integreerbaar is en $\forall_{x\in[a,b]}\ m\leq f(x)\leq M$ dan is er een $\mu\in[m,M]$ zó dat

$$\int_a^b f(t)dt=\mu(b-a) .$$

7.14. Als f en g op $[a,b]$ integreerbaar zijn, als $\forall_{x\in[a,b]}\ m\leq f(x)\leq M$ en als $g\geq 0$ of $g\leq 0$ dan is er een $\mu\in[m,M]$ zodanig dat

$$\int_a^b f(t)g(t)dt=\mu\int_a^b g(t)dt .$$

7.15. Als f op $[a,b]$ monotoon niet-stijgend en niet-negatief is en als g op $[a,b]$ integreerbaar is dan is er een $\xi\in[a,b]$ zo dat

$$\int_a^b f(t)g(t)dt=f(a)\int_a^{\xi} g(t)dt .$$

Als f onder overigens gelijke omstandigheden monotoon niet-dalend is dan is er een $\xi\in[a,b]$ met

$$\int_a^b f(t)g(t)dt=f(b)\int_{\xi}^b g(t)dt .$$

7.16. Als f op [a,b] monotoon is en g op [a,b] integreerbaar is dan is er een $\xi \in [a,b]$ zo dat

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^{\xi} g(t)dt + f(b)\int_{\xi}^b g(t)dt \quad .$$

De stelling 7.15 en 7.16 heten naar <u>Bonnet</u>.

7.17. Ga na of de volgende integralen bestaan:

i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$

iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

iv) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$

v) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$

vi) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x}\, dx$

vii) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-b)(x-c)}}$, $a > b > c > 0$

viii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \{e^{-a^2x^{-2}} - e^{-b^2x^{-2}}\}\, dx$

ix) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$

x) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

xi) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$.

7.18. Zij f een voor $x \geqslant 1$ positieve, niet-stijgende continue functie.

i) Bewijs dat $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx\}$ bestaat;

ii) Onderzoek de convergentie van $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$.

7.19. Zij f differentieerbaar voor $x \geqslant 1$, f' monotoon stijgend met $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Bewijs:

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \{\tfrac{1}{2} f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \tfrac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)dx\}$ bestaat;

noem de limiet s en de uitdrukking tussen { } s(n).

ii) $\forall_{n \in \mathbb{N}t} [\frac{1}{8} f'(n) < s(n) - s < 0]$.

Pas deze stelling toe op $f(x) := -\log x$.

7.20. Bewijs de volgende stelling met behulp van stelling 7.10 uit de syllabus:

Zij f_n begrensd en integreerbaar op $[a,b]$ voor alle $n \in \mathbb{N}t$ en

zij $f(x) := \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ uniform op $[a,b]$; dan is f integreerbaar op $[a,b]$ en

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \quad .$$

7.21. Bewijs met behulp van vraagstuk 6.33 dat, als f en g' continue functies zijn op [a,b], geldt:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx \quad .$$

7.22. Als f van begrensde variatie en g continu is op $[a,b]$, dan bestaat

$$\int_a^b f(x)dg(x) .$$

7.23. Zij $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$ en

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Bepaal $\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)$, $\int_{0}^{1} f(x)dg(x)$ en $\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$.

7.24. Als een van de in de volgende formule optredende integralen bestaat, dan geldt:

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) .$$

7.25. (Stelling van Lebesgue). Als f continu is en g monotoon stijgend is op $[a,b]$, is

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(h(v))dv \quad ;$$

h wordt gedefinieerd als volgt:

voor alle $v \in [g(a), g(b)]$ is $h(v) := \sup\{g^{\leftarrow}(w) \mid w \in g([a,b]) \cap [g(a),v]\}$;

(in het bijzonder is, voor $v \in g([a,b])$, $h(v) := g^{\leftarrow}(v)$).

7.26. Bewijs dat:

i) $$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a) ,$$

en dat, als de integralen in de volgende rechterleden bestaan

ii) $$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dh(x) = \int_a^b f(x)dh(x) \pm \int_a^b g(x)dh(x) ,$$

iii) $$\int_a^b f(x)d\{g(x) \pm h(x)\} = \int_a^b f(x)dg(x) \pm \int_a^b f(x)dh(x) \quad ,$$

iv) $$\int_a^b \lambda f(x)d\mu g(x) = \lambda\mu \int_a^b f(x)dg(x) \quad ;$$

als $a < c < b$ en alle voorkomende integralen bestaat, is

v) $$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) \quad .$$

7.27. Bepaal:

i) $$\int_0^2 x^2 \, d \log(1+x)$$

ii) $$\int_0^{\pi/2} x d \sin x$$

iii) $$\int_{-1}^1 |x| d \arctan x$$

iv) $$\int_{-1}^3 x dg(x) , \quad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x = -1 \\ 1 & \text{als } -1 < x < 2 \\ -1 & \text{als } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

v) $$\int_0^2 x^2 dg(x) , \quad g(x) := \begin{cases} -1 & \text{voor } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{voor } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ 2 & \text{voor } x = \frac{3}{2} \\ -2 & \text{voor } \frac{3}{2} < x \leq 2 \end{cases} \quad .$$

7.28) Bewijs de volgende middelwaarde-stelling:

Als $\forall_{x \in [a,b]} \; m \leq f(x) \leq M$, g op $[a,b]$ monotoon stijgt en

$\int_a^b f(x)dg(x)$ bestaat, dan

$$\exists_{\mu \in [m,M]} \int_a^b f(x)dg(x) = \mu\{g(b) - g(a)\} \quad .$$

7.29. Als $a < c < b$, f continu is op $[a,b]$ en g op $[a,b]$ gedefinieerd is door

$$g([a,c[) = \{0\},\ g([c,b]) = \{1\},\ \text{dan is } \int_a^b f(t)dg(t) = f(c).$$

§ 8. De somformule van Euler - Maclaurin

In de opgaven 8.1, 8.2 en 8.4 - 8.6 wordt met B_n het n-de Bernoulli-polynoom dan wel de waarde ervan in 0 bedoeld.

8.1. Bewijs dat de verzameling der Bernoulli-polynomen $\{B_n\}_n$ lineair onafhankelijk is.

8.2. Bewijs dat voor $0 \leq x \leq 1$

i) $$B_2(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^2}$$

ii) $$B_n(x) = \frac{n!}{(2\pi)^n} (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^n} \qquad \text{voor n even en} \geq 2 .$$

iii) $$B_n(x) = \frac{n!}{(2\pi)^n} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k^n} \qquad \text{voor n oneven en} \geq 3 .$$

8.3. Zij de functie ζ voor $s > 1$ gedefinieerd door

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} .$$

Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \zeta(n) = 1$.

8.4. Bepaal de convergentiestraal van de reeksontwikkeling

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} .$$

8.5. Als n oneven is heeft B_n voor $n > 1$ op $[0,1]$ precies drie nulpunten; B_1 heeft er een.

8.6. Als n even is heeft B_n op $[0,1]$ precies twee nulpunten die symmetrisch liggen t.o.v. $\frac{1}{2}$.

8.7. := 7.4 met Euler-Maclaurin.

8.8. := 7.5 met Euler-Maclaurin.

8.9. := 7.6 met Euler-Maclaurin.

8.10. := 7.7 met Euler-Maclaurin.

8.11. := 7.8 met Euler-Maclaurin.

8.12. := 7.9 met Euler-Maclaurin; bovendien worde verondersteld dat f een begrensde tweede afgeleide heeft op $[0,1]$.

8.13. Bewijs de resultaten van 7.10.a en 7.11.a met Euler-Maclaurin. Bepaal tevens log 2 in 3 decimalen nauwkeurig.

8.14. Bewijs 7.10.b en 7.11.b met Euler-Maclaurin.

§ 9. Integralen met een parameter; dubbelintegralen

9.1. Zij $f(x,t)$ gedefinieerd voor alle $x \in [a,b]$ en voor alle $t \in T$; T is een deelverzameling van $R\ell$ met een verdichtingspunt τ en $\lim_{t \to \tau} f(x,t) = \ell(x)$.

Bewijs dat $\lim_{t\to\tau} f(x,t) = \ell(x)$ uniform in x dan en slechts dan als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{u\in T}\ \forall_{v\in T}\ \forall_{x\in[a,b]}\ [|u-\tau| < \delta \ \&\ |v-\tau| < \delta] \Rightarrow$$

$$[|f(x,u) - f(x,v)| < \varepsilon] .$$

9.2. Zij $f(x,t)$ gedefinieerd voor alle $x \in [a,b]$ en voor alle $t \in T$; T is een deelverzameling van $R\ell$ waarvan "∞ een verdichtingspunt is", d.w.z. $\forall_{n\in Nt}\ \exists_{t\in T}\ t > n$.

Zij $\ell(x) := \lim_{t\to\infty} f(x,t)$ voor iedere $x \in [a,b]$.

Geef naar analogie van vorige gevallen de definitie van

$$\ell(x) = \lim_{t\to\infty} f(x,t) \quad \text{uniform in } x .$$

9.3. Formuleer en bewijs het analogon van 9.1 voor het geval $t \to \infty$.

9.4. Zij $f(x,t)$ als boven en τ een verdichtingspunt van T (eventueel ∞ of $-\infty$); $\lim_{t\to\tau} f(x,t) = \ell(x)$.

Bewijs dat $\lim_{t\to\tau} f(x,t) = \ell(x)$ uniform in x dan en slechts dan als voor iedere rij $\{t_n\}_n$ in T met limiet τ geldt: $\lim_{n\to\infty} f(x,t_n) = \ell(x)$ uniform in x.

9.5. Als $f(x,t)$ voor iedere $t \in T$ integreerbaar is op $[a,b]$ en $\ell(x) = \lim_{t\to\tau} f(x,t)$ uniform in x dan is ℓ op $[a,b]$ integreerbaar en

$$\int_a^b \ell(t)dt = \lim_{t\to\tau} \int_a^b f(x,t)dt. \quad \text{(Beschouw ook het geval } \tau = \infty \text{)}.$$

9.6. Bewijs dat $\displaystyle\lim_{y\downarrow 0} \int_0^1 \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \neq \int_0^1 \lim_{y\downarrow 0} \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$.

Aan welke voorwaarde(n) van 9.5 is niet voldaan?

9.7. Als 9.6 met $\int_0^1 \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} dx$.

9.8. Indien $f(x,t)$ continu is als functie van (x,t) op $[a,b] \times [c,d]$ dan is $\int_a^b f(x,t)dx$ een continue functie van t op $[c,d]$.

9.9. Zij $f(x,t)$ als functie van x continu op $[a,b]$ voor iedere $t \in [c,d]$; en differentieerbaar naar t voor iedere $x \in [a,b]$.
Zij $f_t(x,t)$ continu als functie van (x,t) op $[a,b] \times [c,d]$;

dan is $\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b f_t(x,t)dx$.

9.10. Zij $f(x,y)$ continu in (x,y) voor $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ en zij

$$F(y) := \int_a^b f(x,y)dx, \quad c \leqslant y \leqslant d .$$

Bewijs dat voor $c \leqslant p \leqslant q \leqslant d$ geldt

$$\int_p^q F(y)dy = \int_a^b \left(\int_p^q f(x,y)dy \right) dx .$$

9.11. Bepaal $I(a) := \int_0^{\pi/2} \log(a^2 - \sin^2 \theta)d\theta \quad , a > 1$.

9.12. Evenzo $I(r) := \int_0^{\pi} \log(1 - 2r \cos x + r^2)dx \ , \quad |r| < 1$.

9.13. Evenzo $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$.

9.14. Als $f(x,y)$ op $[a,b] \times [c,d]$ continu is met continue partiële afgeleide $f_y(x,y)$; als $\alpha(y)$ en $\beta(y)$ op $[c,d]$ differentieerbare functies zijn waarvoor $a \leqslant \alpha(y) \leqslant b$ en $a \leqslant \beta(y) \leqslant b$; dan geldt de functie (van y) $\displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$

is differentieerbaar naar y op $[c,d]$ en de afgeleide is

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y) \quad .$$

9.15. De oneigenlijke integraal

$$I(y) := \int_a^\infty f(x,y)dx \quad , \quad y \in Y \quad .$$

heet uniform convergent op Y indien

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_B\ \forall_{y\in Y}\ \forall_{b>A}\ \left|\int_a^b f(x,y)dx - I(y)\right| < \varepsilon \quad .$$

Bewijs dat $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)dx$ dan en slechts dan uniform convergent is op Y als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_B\ \forall_{y\in Y}\ \forall_{b>B}\ \forall_{c>B}\ \left|\int_b^c f(x,y)dx\right| < \varepsilon \quad .$$

9.16. Bewijs dat $\displaystyle\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$

uniform convergent is op $\mathbb{R}\ell$.

9.17. Bewijs dat $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx$

uniform convergeert voor $t \geq t_0 > 0$.

9.18. Bewijs dat $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\,x^a \cos x dx \qquad (a \geq 0)$

uniform convergeert voor $t \geq t_0 > 0$.

9.19. Bewijs dat $\int_1^\infty \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx$

niet uniform convergent is op Nt.

9.20. Bewijs dat $\int_0^1 x^{p-1} dx$

uniform voor $p \geqslant p_0 > 0$, niet uniform voor $p > 0$

convergeert (dat betekent hier het convergeren van $\int_\eta^1$ voor $\eta \downarrow 0$).

9.21. Bewijs dat de rij $\{f_n\}_{n \in \mathrm{Nt}}$ gedefinieerd door $x > 0$: $f_n(x) := \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}$, $f_n(0) = 0$ op $[0, \infty[$ uniform convergeert.

Bewijs dat $\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx$.

9.22. Als $f(x,y)$ voor alle $y \in Y$ en voor alle $\eta \in]0, b-a[$ op $[a, b-\eta]$ naar x integreerbaar is; als voor al die waarden van η $\lim_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ uniform op $[a, b-\eta]$; als bovendien $\int_a^{b-\eta} f(x,y)dx$ uniform op Y convergeert voor $\eta \downarrow 0$; dan is

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \ .$$

9.23. $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx$.

9.24. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$.

9.25. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx \qquad (a > 0,\ b > 0)$.

9.26. $\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$; specialiseer voor $t = 0$.

9.27. $\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$.

9.28. Bepaal $\Gamma(\frac{1}{2})$.

9.29. Bewijs met behulp van stelling 9.4 dat Γ continu is.

9.30. Bewijs met behulp van stelling 9.5 dat

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \log t dt \quad .$$

9.31. Bewijs (door $\cos \alpha x$, $\alpha > 0$ en niet geheel, in een fourierreeks te ontwikkelen)

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - \alpha^2} \quad .$$

9.32. Bewijs dat $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$; $(0 < \alpha < 1)$.

9.33. Formuleer en bewijs de stellingen over dubbelintegralen analoog aan

i) stelling 7.7

ii) stelling 7.8

iii) stelling 7.9 .