**Technische Universiteit Eindhoven**

Faculteit Wiskunde & Informatica

Dictaat en vraagstukken bij

# Approximatie in Functieruimten

2A100

Herfsttrimester 2002

J. de Graaf

Dit college voor 2e-jaars Natuurkunde en Wiskundestudenten aan de Technische Universiteit Eindhoven werd voor het eerst gegeven in het Herfsttrimester van het collegejaar 2001-2002. De hoofdstukken 4 en 5 zijn, vergeleken met de eerste versie, in deze tweede versie aanzienlijk bekort. JdG

# Inhoudsopgave

# Hoofdstuk 0 Voorkennis

## 0.1 Vectorruimten

**0.1.1 Definitie (Vectorruimte)**
Een *vectorruimte* ($\mathbf{E}$, $\mathbb{K}$, $+$, ) is het ensemble van een verzameling $\mathbf{E}$, een lichaam $\mathbb{K}$ bestaande uit getallen of scalairen (in ons geval $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), een optelling $+$ in $\mathbf{E}$ en een vermenigvuldiging van vectoren met getallen; en wel zó dat voldaan is aan de acht axioma's voor een vectorruimte, zoals behandeld in het 1e jaar. Om de soort van de gebruikte scalairen te benadrukken, gebruiken we soms de notatie $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ in plaats van $\mathbf{E}$.

**0.1.2 Voorbeelden ($\mathbb{K}^N$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$)**
Standaardvoorbeelden van vectorruimten zijn
• $\mathbb{K}^N = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_N] \,\big|\, x_j \in \mathbb{K},\, 1 \le j \le N\}$, voor $N \in \mathbb{N}$,
• $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_j, \cdots] \,\big|\, x_j \in \mathbb{K},\, 1 \le j < \infty\}$.
De optelling en scalaire vermenigvuldiging gaan componentsgewijs.

**0.1.3 Voorbeelden (Functieruimten)**
Standaardvoorbeelden van vectorruimten die tevens functieruimten zijn, zijn
• $\mathcal{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{K} \,\big|\, f \text{ is continu}\}$. Hier is $[a,b]$ een interval.
• $\mathbb{P}([a,b]) = \{p\colon [a,b] \to \mathbb{K} \,\big|\, p \text{ is polynoom met coëf in } \mathbb{K}\}$.
• $\mathbb{P}_N([a,b]) = \{p\colon [a,b] \to \mathbb{K} \,\big|\, p \text{ is polynoom met coëf in } \mathbb{K} \text{ van hoogstens graad } N\}$.
De optelling en de scalaire vermenigvuldiging gaan puntsgewijs.
Dus $\alpha f + \beta g$ wordt gedefinieerd door $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, voor alle $x \in [a,b]$.

**0.1.4 Definitie (Onafhankelijk stelsel)**
Gegeven: Een *stelsel* van $p$ stuks vectoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$.
Dit stelsel heet een *onafhankelijk stelsel* als
$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K} : \Big[\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}\Big] \Rightarrow \Big[\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0\Big].$$
Gegeven: Een *oneindig stelsel* van vectoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \ldots\}$.
Dit stelsel heet een *onafhankelijk stelsel* als
$$\forall m \in \mathbb{N}\; \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K} : \Big[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}\Big] \Rightarrow \Big[\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0\Big].$$
(Kort gezegd: Precies dan als IEDER EINDIG DEELSTELSEL een onafhankelijk stelsel is.)

**0.1.5 Definitie (Opspansel)**
Gegeven: Een stelsel van $p$ stuks vectoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$.
Het *opspansel* van dit stelsel is de verzameling
$\big\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \big\rangle = \{\sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbf{x}_j \big| \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}\}$.
Gegeven: Een *oneindig stelsel* van vectoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \ldots\}$.
Het *opspansel* van dit stelsel is de verzameling
$\big\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \ldots \big\rangle = \{\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{x}_j \,\big|\, m \in \mathbb{N}, \ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}\}$.
Dit zijn dus alle mogelijke EINDIGE lineaire combinaties die gefabriceerd kunnen worden met de set $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \ldots\}$.

**0.1.6 Definitie (Basis)**
Gegeven: Een stelsel van $n$ stuks vectoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.
Dit stelsel heet een *basis* voor $\mathbf{E}$ als het een onafhankelijk stelsel is én bovendien geldt dat $\big\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \big\rangle = \mathbf{E}$.

**0.1.7 Definitie (Dimensie)**
Gegeven: Een vectorruimte $\mathbf{E}$.
Als $\mathbf{E} = \{\mathbf{0}\}$ dan $\dim \mathbf{E} = 0$. Als $\mathbf{E}$ een basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ heeft, dan $\dim \mathbf{E} = n$. Als $\mathbf{E} \neq \{\mathbf{0}\}$ en $\mathbf{E}$ heeft geen eindige basis dan $\dim \mathbf{E} = \infty$.

**0.1.8 Voorbeelden**
$\dim \mathbb{K}^N = N, \ \dim \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \infty, \ \dim \mathcal{C}([a,b]) = \infty, \ \dim \mathrm{Pol}(N) = N+1, \ \dim \mathrm{Pol} = \infty$

**0.1.9 Definitie (Lineaire deelruimte)**
Gegeven: Een deelverzameling $\mathbf{U} \subset \mathbf{E}$. Dan heet $\mathbf{U}$ een *lineaire deelruimte* van $\mathbf{E}$ als $(\mathbf{U}, \mathbb{K}, +, )$ een vectorruimte is.

**0.1.10 Stelling**
*Gegeven: Een deelverzameling* $\mathbf{U} \subset \mathbf{E}$.
*Er geldt:* $\mathbf{U}$ *is dan en slechts dan een lineaire deelruimte van* $\mathbf{E}$ *als* $\mathbf{U} \neq \emptyset$ *én* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U} \big[\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \mathbf{U}\big]$. *Dan is ook* $\langle \mathbf{U} \rangle = \mathbf{U}$.

**0.1.11 Voorbeelden**
Belangrijke standaard lineaire deelruimten van $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ zijn:
- $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \{\underline{x} \,\big|\, \underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ \exists M \ \forall j \in \mathbb{N} \big[|x_j| < M\big] \}$.
- $c_0 = \{\underline{x} \,\big|\, \underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ \lim_{j \to \infty} x_j = 0\}$.
- $\ell_2(\mathbb{N}) = \{\underline{x} \,\big|\, \underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \}$.
- $\ell_c(\mathbb{N}) = \{\underline{x} \,\big|\, \underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ x_j \neq 0 \,\text{voor slechts eindig veel}\ j \in \mathbb{N} \}$.

Belangrijke standaard lineaire deelruimten van $\mathcal{C}([a,b])$ zijn:
• $\mathbb{P}([a,b])$ en $\mathbb{P}_N([a,b])$, voor alle $N \in \mathbb{N}$.
Tevens is, voor alle $N \in \mathbb{N}$, de vectorruimte $\mathbb{P}_N([a,b])$ een ($N$+1-dimensionale) lineaire deelruimte van $\mathbb{P}([a,b])$.

## 0.2 Lineaire afbeeldingen

**0.2.1 Definitie (Lineaire afbeelding)**
Gegeven: Twee vectorruimten $\mathbf{E}$ en $\mathbf{F}$. Een afbeelding $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$. Dan heet $\mathcal{A}$ een *lineaire afbeelding* als
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}\left[\, \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} + \beta\mathcal{A}\mathbf{y} \,\right]$.

**0.2.2 Voorbeelden (Lineaire afbeeldingen in functieruimten)**
• De toevoeging $f \mapsto \mathcal{Q}f$ met $(\mathcal{Q}f)(x) = xf(x)$ is een lineaire afbeelding in elk der functieruimten $\mathcal{C}([a,b])$ ,$\mathbb{P}([a,b])$ .
• Ook $\mathcal{Q}\colon \mathbb{P}_N([a,b]) \to \mathbb{P}_{N+1}([a,b])$ is een lineaire afbeelding.
• De toevoeging $f \mapsto \mathcal{J}f$, met $(\mathcal{J}f)(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, definieert de volgende lineaire afbeeldingen: $\mathcal{J} : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$, $\mathcal{J} : \mathbb{P}([a,b]) \to \mathbb{P}([a,b])$, en $\mathcal{J} : \mathbb{P}_N([a,b]) \to \mathbb{P}_{N+1}([a,b])$.
• De toevoeging $f \mapsto \mathcal{D}f$ met $(\mathcal{D}f)(x) = \frac{df}{dx}(x)$ definieert de lineaire afbeeldingen: $\mathcal{D}\colon \mathbb{P}([a,b]) \to \mathbb{P}([a,b])$, en $\mathcal{D}\colon \mathbb{P}_N([a,b]) \to \mathbb{P}_{N-1}([a,b])$, voor alle $N \in \mathbb{N}$.

**0.2.3 Definitie (Nulruimte, beeldruimte)**
Gegeven: Lineaire afbeelding $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$.
De *nulruimte* of *kern* van $\mathcal{A}$ is de verzameling
$\mathbf{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\leftarrow}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E} \,|\, \mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}\} \subset \mathbf{E}$
De *beeldruimte* of het *bereik* van $\mathcal{A}$ is de verzameling
$\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(\mathbf{E}) = \{\mathcal{A}\mathbf{v} \in \mathbf{F} \,|\, \mathbf{v} \in \mathbf{E}\} \subset \mathbf{F}$.

**0.2.4 Stelling (Dimensiestelling)**
*Gegeven: Lineaire afbeelding* $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$, $\dim \mathbf{E} < \infty$.
*Dan geldt:* $\dim \mathbf{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathbf{R}(\mathcal{A}) = \dim \mathbf{E}$.

**0.2.5 Definitie (Eigenwaarden/Eigenvectoren)**
Gegeven: Lineaire afbeelding $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Een getal $\lambda \in \mathbb{K}$.
Dan heet $\lambda \in \mathbb{K}$ een *eigenwaarde* van $\mathcal{A}$, als voor de *eigenruimte* $\mathbf{E}_\lambda(\mathcal{A}) = \mathbf{N}([\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}])$ geldt dat $\mathbf{E}_\lambda(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$. Als $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_\lambda(\mathcal{A})$ dan heet $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq 0$, een *eigenvector* van $\mathcal{A}$ en er geldt $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

## 0.3 Inwendig product

**0.3.1 Definitie (inwendig product)**

Een *inwendig product* of *inproduct* op een vectorruimte $\mathbf{E}$ voegt aan elk tweetal vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ een getal $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{K}$ zodanig dat de volgende drie regels gelden:
$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E}\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}:$ (1) $\big[(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0\big] \Leftrightarrow \big[\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\big]$,
(2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$, (3) $(\mathbf{z}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + \beta(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.
De *lengte* of *norm* $\|\mathbf{x}\|$ van $\mathbf{x}$ is het getal $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.
Als een vectorruimte $\mathbf{E}$ uitgerust is met een inproduct, dan heet $\mathbf{E}$ een *inproductruimte* of *IP-ruimte*.

**0.3.2 Voorbeelden**

Het *standaard inproduct* op $\mathbb{K}^N$ is $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{N} \overline{x_j} y_j$. In het geval $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ doet de complexe conjugatiestreep niks!

**0.3.3 Stelling (Cauchy-Schwarz)**

*Gegeven: Een IP-ruimte* $\mathbf{E}$. *Twee vectoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$.
*Dan geldt:* $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$. *Het =teken geldt precies dan als* $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ *een afhankelijk stelsel is.*

**0.3.4 Definitie (Orthoplement)**

Gegeven: Een IP-ruimte $\mathbf{E}$. Een vector $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$, een deelverzameling $\mathbf{W} \subset \mathbf{E}$.
We definieren: Het *orthoplement* $\mathbf{a}^\perp$ van $\mathbf{a}$, respectievelijk $\mathbf{W}^\perp$ van $\mathbf{W}$ door
$\mathbf{a}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\big|\, (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0\}$ en $\mathbf{W}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{W} \,\big|\, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{W}\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0\}$.

**0.3.5 Stelling**

*Gegeven: Zie voorafgaande definitie.*
*Er geldt:* • $\mathbf{W}^\perp$ *is een lineaire deelruimte.*
• $\dim \mathbf{E} < \infty \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{W}^\perp)^\perp = \big\langle \mathbf{W} \big\rangle$ *(=*$\mathbf{W}$ *als* $\mathbf{W}$ *een lineaire deelruimte is).*
• $\dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\perp = \dim \mathbf{E}$.

**0.3.6 Stelling**

*Gegeven: Een IP-ruimte* $\mathbf{E}$. *Een lineaire deelruimte* $\mathbf{U} \subset \mathbf{E}$, *met* $\dim \mathbf{U} < \infty$. *Een vector* $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
*Er geldt:* • $\exists!\, \mathbf{u} \in \mathbf{U}\, \exists!\, \mathbf{v} \in \mathbf{U}^\perp \big[\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\big]$.
• *De toevoeging* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}$ *is een lineaire afbeelding ( de* projectie *op* $\mathbf{U}$*).*
• *Notatie* $\mathbf{u} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}$.

## 0.4 Complexificatie

**0.4.1** Gezien als een $\mathbb{C}$-vectorruimte is $\dim \mathbb{C} = 1$. De deelverzameling $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ is, complex gesproken, geen *lineaire* deelruimte. Echter, $\mathbb{C}$ kan ook als een $\mathbb{R}$-vectorruimte worden opgevat. Dan is $\dim \mathbb{C} = 2$ en is, reëel gesproken, $\mathbb{R}$ wél een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}$. Net zo kan $\mathbb{C}^N$ als een $2N$-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte worden opgevat. Hierin is dan $\mathbb{R}^N$ een $N$-dimensionale lineaire deelruimte. Complex gesproken is $\mathbb{R}^N$ wél een deelverzameling van, maar géén lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^N$. De complexe vectorruimte $\mathbb{C}^N$ heet wel de *complexificatie* van $\mathbb{R}^N$.

**0.4.2** Uitgaande van een gegeven $\mathbb{R}$-vectorruimrte $\mathbf{F}$ zullen we nu, door 'verdubbeling', een complexe vectorruimte bouwen: de *complexificatie* $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$. Beschouw de verzameling $\mathbf{F}_{\mathbb{C}} = \{\mathbf{z} \,|\, \mathbf{z} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}],\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}\} = \mathbf{F}^2$ van geordende paren van vectoren in $\mathbf{F}$. In $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ definieren we de optelling door $[\mathbf{x}; \mathbf{y}] + [\mathbf{a}; \mathbf{b}] = [\mathbf{x} + \mathbf{a}; \mathbf{y} + \mathbf{b}]$. Als $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, dan definieren we $\gamma \mathbf{z} = [\alpha \mathbf{x} - \beta \mathbf{y}; \beta \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}]$. De aldus ingevoerde optelling en scalaire vermenigvuldiging maken $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ tot een complexe vectorruimte omdat aan de acht axiomas uit het 1e jaar voldaan is. De oorspronkelijke $\mathbf{F}$ identificeren we met dubbelvectoren van de vorm $[\mathbf{x}; \mathbf{0}]$. Merk weer op dat $\mathbf{F}$ aldus als een deelverzameling van $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ opgevat kan worden, maar geen $\mathbb{C}$-lineaire deelruimte ervan is. Vectoren van de vorm $[\mathbf{0}; \mathbf{y}]$ noteren we met $i\mathbf{y}$ zodat $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ geschreven kan worden en alle vertrouwde 'complexe rekenregels' doorgang vinden.

**0.4.3 Stelling**
*Gegeven: Een* stelsel *van $p$ stuks vectoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\} \subset \mathbf{F}$.*
*Er geldt: Genoemd stelsel is $\mathbb{R}$-onafhankelijk in $\mathbf{F}$ dan en slechts dan als het $\mathbb{C}$-onafhankelijk is in $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$.*

**0.4.4 Gevolg**
*Een basis voor $\mathbf{F}$ is ook een basis voor $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$. Omgekeerd natuurlijk niet omdat vectoren in $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ meestal buiten $\mathbf{F}$ liggen. De (reële) dimensie van $\mathbf{F}$ is gelijk aan de (complexe) dimensie van $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$.*

**0.4.5 Definitie**
Gegeven: Twee $\mathbb{R}$-vectorruimten $\mathbf{E}$ en $\mathbf{F}$. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A} \colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$. We definieren de *complexificatie* $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \colon \mathbf{E}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ van $\mathcal{A}$ door $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \mathcal{A}\mathbf{x} + i\mathcal{A}\mathbf{y}$.
Aldus is $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ een $\mathbb{C}-$lineaire afbeelding.

**0.4.6 Voorbeeld**
De matrix $B$ van een lineaire afbeelding $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, definieert ook, wederom via matrixvermenigvuldiging, een lineaire afbeelding van $\mathbb{C}^N$ naar $\mathbb{C}^N$.

## 0.5 Integratie

**0.5.1** De bouwstenen van een *integratietheorie voor functies van één reële variabele* zijn

- Een open interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ met $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
- Een (complexe) vectorruimte, notatie $\mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b))$, van (complexwaardige) functies op $(a, b)$. De toevoeging 'spec' wil zeggen dat de functies in $\mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b))$ aan zekere specificaties moeten voldoen. Voorbeelden van zulke specificaties zijn '(stuksgewijs) continu', 'stuksgewijs constant',ćontinu differentieerbaar', 'polynomiaal',... .
- Een lineaire afbeelding $\mathcal{I}\colon \mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b)) \to \mathbb{C}$

**0.5.2 Definitie (Integratietheorie)**
Gegeven: Bovenstaande bouwstenen. Voorts, willekeurige $f$, $g$, $h \in \mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b))$, willekeurige $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in \mathbb{C}$, willekeurige $c$, $d \in (a, b)$.

De toevoeging: $\mathcal{I}\colon \mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b)) \to \mathbb{C}$, notatie $\mathcal{I}f = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, heet een *integraal* als ze de volgende eigenschappen heeft:

a) Als $(c, d) \subset (a, b)$ en $f \in \mathcal{I}\colon \mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b))$, dan geldt voor de beperking $\chi_{(c,d)}f$ van $f$ tot het interval $(c, d)$, dat $\chi_{(c,d)}f \in \mathcal{L}_{\text{spec}}((c, d))$.

b) $\int\limits_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\,\mathrm{d}x = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
(Dus $\mathcal{I}$ is een lineaire afbeelding)

c) $\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c h(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b h(x)\,\mathrm{d}x$.

d) $\left|\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |h(x)|\,\mathrm{d}x$.

e) Als $\forall x \in (a, b) : \int\limits_a^x h(t)\,\mathrm{d}t = 0$, dan geldt $\int\limits_a^b |h(x)|\,\mathrm{d}t = 0$. Een functie met laatstgenoemde eigenschap noemen wij een *niksfunctie*.

Ter illustratie geven we een voorbeeld van een (zeer beperkte) integratietheorie waarbinnen alle integralen berekend kunnen worden. Ons voorbeeld is de 'moeder van alle integratietheorieën'.

### 0.5.3 Voorbeeld (Integratietheorie voor trapfuncties)

Voor $\mathcal{L}_{\text{spec}}((a,b))$ nemen we $\mathcal{L}_{\text{trap}}((a,b))$, de verzameling van alle *trapfuncties*. Dit zijn functies $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ met de volgende eigenschappen:
• Er zijn $N+1$ getallen $c_j, 0 \leq j \leq N$ met

$$a \leq c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{N-1} < c_N \leq b,$$

doch $-\infty < c_0$ en $c_N < \infty$, zodanig dat de functie $f$ beschreven kan worden door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad c_0 > a \text{ en } a < x < c_0, \\ \alpha_j & \text{als} \quad c_{j-1} < x \leq c_j \text{ en } 1 \leq j \leq N, \\ 0 & \text{als} \quad c_N < b \text{ en } c_N < x < b. \end{cases}$$

Dus $f$ is nul is buiten $(c_0, c_N]$ en constant $(= \alpha_j)$ op elk der begrensde(!) deelintervallen $(c_{j-1}, c_j]$ , $1 \leq j \leq N$.
• De toevoeging ('de integraal') $\mathcal{I}\colon \mathcal{L}_{\text{trap}}((a,b)) \to \mathbb{C}$ wordt voor de hand liggend gedefiniëerd door

$$f \mapsto \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{N} (c_j - c_{j-1})\alpha_j,$$

de 'totale oppervlakte van de rechthoekjes' dus.
Het laat zich gemakkelijk nagaan dat aan alle eisen a) t/m e) uit Definitie (0.5.2) is voldaan. In dit geval is er maar één niksfunctie, de nulfunctie: $f = 0$.

### 0.5.4 Opmerkingen

i) Een *integratietheorie* gaat NIET over het 'exact' berekenen van integralen, dat lukt sowieso tamelijk zelden, maar over het construeren van een toevoeging $\mathcal{I}$ voor vectorruimten $\mathcal{L}$ die naast 'nette' functies ook super discontinue viezeriken bevatten. Zo kan de *Lebesgue-integraal* functies aan als $x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. U weet wel, dat is die functie die gelijk 1 is als $x \in \mathbb{Q}$ en gelijk 0 is als $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Uit het 1e jaar is U min of meer bekend hoe $\mathcal{I}$ geconstrueerd wordt voor (stuksgewijs) continue functies, de *Riemann-integraal*. Alle eigenschappen in de definitie zijn U zeer vertrouwd!

ii) Als $\mathcal{L}$ uitsluitend continue functies bevat dan is er maar één niksfunctie, namelijk de functie die overal 0 is. Binnen de Riemann-integratietheorie is

een functie die slechts in een eindig aantal punten van 0 verschilt een niksfunctie. Daar zijn er heel veel van. Binnen de Lebesgue-integratietheorie is zelfs $\chi_{\mathbb{Q}}$ een niksfunctie. Voor $\chi_{\mathbb{Q}}$ werkt overigens de Riemann-constructie niet: $\chi_{\mathbb{Q}}$ is niet 'Riemann-integreerbaar'.
iii) Niksfuncties hebben de volgende eigenschap: Als $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ een niksfunctie is en $f$ is *continu* in $c \in (a,b)$, dan geldt $f(c) = 0$. Niksfuncties kunnen slechts van de nulfunctie verschillen op een deelverzameling van $(a,b)$ die een 'totale lengte' gelijk nul heeft. Bovendien zijn ze in (die magere set van) punten waar ze $\neq 0$ zijn, discontinu.

De volgende eigenschappen van 'de integraal' zullen verderop een cruciale rol spelen. We zullen deze eigenschappen niet bewijzen. Het zijn onze uitgangspunten voor wat volgt. De eerste eigenschap zegt dat een functie $g$ alleen dan integreerbaar kan zijn als $g$ 'goed te benaderen' is met een trapfunctie.

### 0.5.5 Eigenschappen

- Als de integraal $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ bestaat, dan is er bij ieder getalletje $\varepsilon > 0$ een trapfunctie $T\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ te vinden zodat $\int_a^b \big|g(t) - T(t)\big|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$.
- Als de integraal $\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t$ bestaat voor alle $c$, $d \in \mathbb{R}$, met $a < c < d < b$, en als bovendien de integraal $\int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t$ bestaat, dan is er bij ieder getalletje $\varepsilon > 0$ een trapfunctie $T\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ te vinden zodat $\int_a^b \big|g(t) - T(t)\big|^2\,\mathrm{d}t < \varepsilon^2$.
- Als de integraal $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ bestaat, dan is de functie $F\colon (a,b) \to \mathbb{C}$, gedefiniëerd door $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, een *continue* functie.

Ten behoeve van latere verwijzing vermelden we nog een 'approximatie-eigenschap' voor continue functies. Deze eigenschap staat los van de voorafgaande beschouwingen over het integraalbegrip.

### 0.5.6 Eigenschap

Beschouw het interval $(a,b)$ met $-\infty < a$ en $b < \infty$. Een begrensd interval dus. Beschouw een *continue* functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Op het *gesloten* interval dus! Onder deze voorwaarden bestaat er voor *ieder* getalletje $\varepsilon > 0$ een trapfunctie $T\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ zodat voor *alle* $x \in (a,b)$ geldt dat $\big|f(x) - T(x)\big| <$

$\varepsilon$. Dit wordt wel verwoord door te zeggen dat $f$ willekeurig goed *uniform* te benaderen is met een trapfunctie.

# Hoofdstuk 1 Genormeerde Functieruimten

## 1.1 Functieruimten

Op de lagere school leren de kinderen rekenen met 'concrete getallen die een naam hebben'. De tafels van vermenigvuldiging spelen daarbij een belangrijke rol. Op de middelbare school wordt al 'gerekend met letters'. Daarbij wordt in het midden gelaten wat de getallen precies zijn. Verreweg de meeste reële getallen hebben niet eens een naam! Na verloop van tijd verschijnen op de middelbare school ook 'functies' ten tonele. Dat zijn dan concrete functies als 'machten', 'wortels', $e$-machten, goniometrische functies, etc. Functies die een naam hebben dus. Thans zijn we in het stadium gekomen dat we spelletjes met functies willen doen, zonder die functies nader te specificeren. En net zoals we 'ongrijpbare getallen' als $\pi$, $e$, $\ln 2$ benaderen met rationale getallen zullen we 'moeilijke' functies en functies die niet eens een naam hebben (verreweg de meeste!) gaan 'benaderen' met betrekkelijk eenvoudige functies die wél een naam hebben, (stuksgewijze) polynomen, bijvoorbeeld. Het blijkt, voor dit doel, heel efficiënt te zijn om (grote klassen van) functies op te bergen in een Vectorruimte. Een 'punt' of 'vector' in zo'n ruimte stelt dan een 'functievoorschrift als geheel' voor. Voor de goede orde zij nogmaals vermeld dat een 'functie' en een 'getal' totaal van elkaar verschillende wiskundige objecten zijn. We beginnen met de definitie van Vectorruimte uit het 1e jaar te herhalen.

**1.1.1 Definitie (Vectorruimte)**

Een *vectorruimte* ($\mathbf{E}$, $\mathbb{K}$, $+$, ) is het ensemble van een verzameling $\mathbf{E}$, een lichaam $\mathbb{K}$ bestaande uit getallen of scalairen (in ons geval $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), een optelling $+$ in $\mathbf{E}$ en een vermenigvuldiging van vectoren met getallen; en wel zó dat voldaan is aan de acht axioma's voor een vectorruimte, zoals behandeld in het 1e jaar. Om de soort van de gebruikte scalairen te benadrukken, gebruiken we soms de notatie $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ in plaats van $\mathbf{E}$.

**1.1.2 Definitie (Vectorruimte van alle functies op een interval)**

Beschouw een vast interval $I$ op de reële getallenrechte $\mathbb{R}$. In het vervolg zal vaak $I = [a, b]$, een begrensd *gesloten* interval, dan wel $I = (a, b)$, een begrensd of onbegrensd *open* interval, genomen worden. Met $\mathbb{K}^I$ noteren we de verzameling van alle $\mathbb{K}$-waardige functies $\{f : I \to \mathbb{K}\}$. In $\mathbb{K}^I$ definiëren we een optelling en een scalaire vermenigvuldiging door op de gebruikelijke manier functies puntsgewijs bij elkaar op te tellen, respectievelijk met een constante te vermenigvuldigen. Formeel: Voor alle $f\colon I \to \mathbb{K}$ en $g\colon I \to \mathbb{K}$ in $\mathbb{K}^I$ en alle $\alpha$ en $\beta$ in $\mathbb{C}$ wordt $\alpha f + \beta g\colon I \to \mathbb{K}$ gedefinieerd door $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, voor alle $x \in I$.

**1.1.3 Stelling**
*Met de ingevoerde optelling en scalaire vermenigvuldiging is $\mathbb{K}^I$ een vectorruimte. Sjieker gezegd: Het ensemble $(\mathbb{K}^I, \mathbb{K}, +)$ is een vectorruimte.*

We gaan nu twee typen functieruimten ten tonele voeren die lineaire deelruimten zullen blijken te zijn van $\mathbb{C}^{[a,b]}$, respectievelijk van $\mathbb{C}^{(a,b)}$. Bij het eerste type speelt het integraalbegrip geen rol. Bij het tweede type essentieel wél. We nemen concreet $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**1.1.4 Definitie (Functieruimten 1)**

(1) Beschouw het begrensde interval $[a, b]$. Met $\mathcal{C}([a, b])$ noteren we de verzameling $\{f\colon [a, b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ is continu}\}$. Dit is de verzameling van *alle* continue functies op het interval $[a, b]$.

(2) Met $\mathbb{P}([a, b])$ noteren we de verzameling van alle polynomiale functies $p\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Dit zijn functies van de gedaante

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

met $n \in \mathbb{N}$ willekeurig en $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$ eveneens willekeurig. Dit zijn dus *alle* polynomen van willekeurige, doch eindige, graad.

(3) Met $\mathbb{P}_N([a, b])$ noteren we de verzameling van alle polynomiale functies van ten hoogste graad $N$. Hier is $N \in \mathbb{N}$ vast gekozen. De $n$ in het voorafgaande geval mag dus niet meer bedragen dan die vaste $N$.

(4) We beschouwen nu een, vast gekozen, *open* interval $(a, b)$, met $-\infty \le a < b \le \infty$. Met $\mathbb{T}(a, b)$ noteren we de verzameling van alle trapfuncties $T\colon (a, b) \to \mathbb{C}$. Dit zijn functies die 'stuksgewijs constant zijn'. Nauwkeuriger: $T$ heet een trapfunctie op $(a, b)$, als er $N + 1$ getallen $c_j$, $0 \le j \le N$ zijn zodat

$$a \le c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{N-1} < c_N \le b,$$

doch $-\infty < c_0$ en $c_N < \infty$, zodanig dat de functie $T$ beschreven kan worden door

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } c_0 > a \text{ en } a < x < c_0, \\ \alpha_j & \text{als } c_{j-1} < x \le c_j \text{ en } 1 \le j \le N, \\ 0 & \text{als } c_N < b \text{ en } c_N < x < b. \end{cases}$$

Dus $T$ is nul is buiten $(c_0, c_N]$ en constant $(= \alpha_j)$ op elk der begrensde(!) deelintervallen $(c_{j-1}, c_j]$, $1 \leq j \leq N$. Alleen als $a > -\infty$ staan we toe dat $c_0 = a$. Alleen als $b < \infty$ staan we toe dat $c_N = b$. De laatste trede mist dan een rechtereindpunt. Let op: Het aantal van $N+1$ sprongpunten $c_j$ en ook de grootte van de sprongen ter plekke $c_j$ mag, kan en zal variëren per trapfunctie. Let op: Als $(a,b)$ een onbegrensd interval is, kan een trapfunctie alleen $\neq 0$ zijn op een *begrensd* deelinterval. Tenslotte: Het is niet verboden dat een trapfunctie ter linker en ter rechterzijde van een 'deelpunt' $c_j$ 'toevallig' dezelfde waarde aanneemt.

(5) Een handige notatie ter beschrijving van trapfuncties wordt verkregen op de volgende manier:
Eerst definiëren we de *karakteristieke functie* $\chi_I$ bij een interval $I \subset \mathbb{R}$,

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x \in I, \\ 0 & \text{als} \quad x \notin I. \end{cases}$$

Hierin kan het interval $I$ een van de volgende vormen hebben:
$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a,b)$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(b,\infty)$, $[b,\infty)$.
Onze trapfunctie $T$ uit (4) kan nu geschreven worden als

$$T(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{(c_{j-1}, c_j]}(x).$$

**1.1.5 Stelling**
*Met de in Definitie (1.1.2) ingevoerde optelling en scalaire vermenigvuldiging van functies, geldt het volgende:*

*(1)* $\mathcal{C}([a,b])$ *is een vectorruimte.*

*(2)* $\mathbb{P}([a,b])$ *is een vectorruimte en tevens een lineaire deelruimte van* $\mathcal{C}([a,b])$.

*(3)* $\mathbb{P}_N([a,b])$ *is een vectorruimte en een lineaire deelruimte van zowel* $\mathbb{P}([a,b])$, *als van* $\mathcal{C}([a,b])$.

*(4)* $\mathbb{T}(a,b)$ *is een vectorruimte.*

**Bewijs.**
Omdat alle vier genoemde functieverzamelingen deelverzamelingen zijn van $\mathbb{C}^I$, met $I = [a,b]$, dan wel $I = (a,b)$, hoeven we 'alleen maar' te laten

zien dat we door het nemen van lineaire combinaties van functies uit de verzamelingen zoals genoemd in (1)-(4), niet 'uit deze verzamelingen lopen'. Welnu,
(1) Sommen en veelvouden van continue functies zijn weer continue functies.
(2) Sommen en veelvouden van polynomen zijn weer polynomen.
(3) Sommen en veelvouden van polynomen van ten hoogste graad $N$ zijn weer polynomen van ten hoogste graad $N$.
(4) Ligt wat subtieler dan de vorige drie gevallen. Beschouw de trapfuncties $T_1\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ en $T_2\colon (a,b) \to \mathbb{C}$. Bij $T_1$ behoren getallen

$$a \le a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{K-1} < a_K \le b,$$

zodat $T_1$ constant is op elk der intervallen $(a_{i-1}, a_i]$ met $1 \le i \le K$, voor zekere $K \in \mathbb{N}$. Bij $T_2$ behoren getallen

$$a \le b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{L-1} < b_L \le b,$$

zodat $T_2$ constant is op elk der intervallen $(b_{j-1}, b_j]$ met $1 \le j \le L$, voor zekere $L \in \mathbb{N}$. We nemen nu de discontinuïteitspunten $a_i$ van $T_1$ en de discontinuïteispunten $b_j$ van $T_2$ bij elkaar. Na ze op volgorde te hebben gezet krijgen we het rijtje

$$a \le c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{M-1} < c_M \le b,$$

voor zekere $M \in \mathbb{N}$. Het zal duidelijk zijn dat op elk der intervallen $(c_{k-1}, c_k]$ met $1 \le k \le M$ de trapfuncties $T_1$ en $T_2$ *beide* constant zijn. Maar dan is ook de lineaire combinatie $\alpha T_1 + \beta T_2$ constant op de succesieve deelintervallen $(c_{k-1}, c_k]$. Merk op dat de lineaire combinatie $\alpha T_1 + \beta T_2$ in het algemeen meer 'treden' zal hebben dan $T_1$ of $T_2$ afzonderlijk, maar nooit meer dan $T_1$ en $T_2$ samen. $\square$

**1.1.6 Definitie (Functieruimten 2)**
We beschouwen een, vast gekozen, open interval $(a,b)$, met $-\infty \le a < b \le \infty$. Aan een functie $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ voegen we op twee speciale manieren een (getal)waarde toe, die we ook wel *norm* noemen,

$$(1) \qquad \|f\|_1 = \begin{cases} \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, & \text{als de integraal bestaat (convergeert)}, \\ \infty, & \text{als de integraal NIET bestaat.} \end{cases}$$

$$(2) \qquad \|f\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}, & \text{als de integraal bestaat (convergeert)}, \\ \infty, & \text{als de integraal NIET bestaat.} \end{cases}$$

Als de integraal bestaat (convergeert) zeggen we wel, $\|f\|_1 < \infty$, respectievelijk $\|f\|_2 < \infty$.

• Met $\mathbb{L}_1(a,b)$ noteren we de verzameling van alle functies $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ met de eigenschap $\|f\|_1 < \infty$.

• Met $\mathbb{L}_2(a,b)$ noteren we de verzameling van alle functies $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ met de eigenschap $\|f\|_2 < \infty$.

### 1.1.7 Voorbeelden

• Op een begrensd interval $(a,b)$ beschouwen we de constante functie $x \mapsto f(x) = 1$. Dan geldt $f \in \mathbb{L}_1(a,b)$, $f \in \mathbb{L}_2(a,b)$ en ook $f \in \mathbb{T}(a,b)$.
• Op een onbegrensd interval $(a,b)$ beschouwen we de constante functie $x \mapsto f(x) = 1$. Dan geldt $f \notin \mathbb{L}_1(a,b)$, $f \notin \mathbb{L}_2(a,b)$ en ook $f \notin \mathbb{T}(a,b)$.
• Op het interval $(0,\infty)$ beschouwen de functie $x \mapsto g(x) = \frac{1}{1+x}$. Dan geldt $g \notin \mathbb{L}_1(0,\infty)$, $g \in \mathbb{L}_2(0,\infty)$ en $g \notin \mathbb{T}(0,\infty)$.
• Op het interval $(0,1)$ beschouwen de functie $x \mapsto h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dan geldt $h \in \mathbb{L}_1(0,1)$, $h \notin \mathbb{L}_2(0,1)$ en $h \notin \mathbb{T}(0,1)$.
• Voor de bovengenoemde trapfunctie $T$ geldt

$$\|T\|_1 = \int_a^b |T(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{N} (c_j - c_{j-1})|\alpha_j| < \infty$$

. Dus $T \in \mathbb{L}_1(a,b)$.
• Voor de bovengenoemde trapfunctie $T$ geldt

$$\|T\|_2 = \sqrt{\int_a^b |T(x)|^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (c_j - c_{j-1})|\alpha_j|^2} < \infty$$

. Dus $T \in \mathbb{L}_2(a,b)$.
Beide normen $\|T\|_1$ en $\|T\|_2$ hebben een eindige waarde omdat de 'treden' boven begrensde intervallen zitten en er slechts eindig veel treden zijn.

### 1.1.8 Stelling

*Met de boven ingevoerde optelling en scalaire vermenigvuldiging, zie Definitie (1.1.2), geldt het volgende:*

*(i)* $\mathbb{L}_1(a,b)$ *is een vectorruimte.*

*(ii)* $\mathbb{L}_2(a,b)$ *is een vectorruimte.*

*(iii)* $\mathbb{T}(a,b)$ *is een lineaire deelruimte van* $\mathbb{L}_1(a,b)$.

*(iv)* $\mathbb{T}(a,b)$ *is een lineaire deelruimte van* $\mathbb{L}_2(a,b)$.

*(v) Als* $(a,b)$ *een begrensd interval is, dan is* $\mathbb{L}_2(a,b)$ *een lineaire deelruimte van* $\mathbb{L}_1(a,b)$.

*(vi) Als* $(a,b)$ *een begrensd interval is, dan is* $\mathcal{C}([a,b])$ *een lineaire deelruimte van* $\mathbb{L}_1(a,b)$ *en ook van* $\mathbb{L}_2(a,b)$.

**Bewijs.**
Omdat de ingevoerde functieverzamelingen $\mathbb{L}_1(a,b)$ en $\mathbb{L}_2(a,b)$ deelverzamelingen zijn van $\mathbb{C}^I$, met $I = (a,b)$, hoeven we 'alleen maar' te laten zien dat we door het nemen van lineaire combinaties van functies in $\mathbb{L}_1(a,b)$, respectievelijk $\mathbb{L}_2(a,b)$ niet 'uit deze verzamelingen lopen'.

(i) De vraag is:
Volgt uit $\|f\|_1 < \infty$ en $\|g\|_1 < \infty$, dat $\|\alpha f + \beta g\|_1 < \infty$? Welnu, met de integratietheorie (i.h.b. 0.5.2d) en de driehoeksongelijkheid voor complexe getallen volgt

$$\begin{aligned} \|\alpha f + \beta g\|_1 &= \int_a^b |\alpha f(x) + \beta g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_a^b |\alpha f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |\beta g(x)|\,\mathrm{d}x = |\alpha|\|f\|_1 + |\beta|\|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

(ii) De vraag is:
Volgt uit $\|f\|_2 < \infty$ en $\|g\|_2 < \infty$, dat $\|\alpha f + \beta g\|_2 < \infty$? Welnu, met de driehoeksongelijkheid voor complexe getallen en met de ongelijkheid: $(p+q)^2 \leq 2p^2 + 2q^2$, voor niet-negatieve getallen $p$ en $q$, volgt

$$\begin{aligned} \big(\|\alpha f + \beta g\|_2\big)^2 &= \int_a^b |\alpha f(x) + \beta g(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \big(|\alpha f(x)| + |\beta g(x)|\big)^2\,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq 2\Big(|\alpha|^2 \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + |\beta|^2 \int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big) = \\ &= 2|\alpha|^2\big(\|f\|_2\big)^2 + 2|\beta|^2\big(\|g\|_2\big)^2 < \infty. \end{aligned}$$

(iii)-(iv) In Stelling (1.1.5) hebben we al gezien dat $\mathbb{T}(a,b)$ een vectorruimte is. Voorts blijkt uit voorbeelden onder (1.1.7) dat voor elke $T \in \mathbb{T}(a,b)$ geldt dat zowel $\|T\|_1 < \infty$ alsook $\|T\|_2 < \infty$.

(v) Veronderstel dat $f \in \mathbb{L}_2(a,b)$ dus dat $\|f\|_2 < \infty$. Dan schatten we $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \frac{1}{2}\big(1 + |f(x)|^2\big) = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\big(\|f\|_2\big)^2 < \infty$. Conclusie $f \in \mathbb{L}_1(a,b)$. Opgemerkt zij dat we verderop, met gebruikmaking van een 'inwendig product', een betere afschatting voor $\|f\|_1$ zullen geven. Voor ons actuele doel echter volstaat het voorafgaande.

(vi) Veronderstel dat $f \in \mathcal{C}([a,b])$. De functie $x \mapsto |f(x)|$ is dan niet-negatief en continu op het *gesloten* interval $[a,b]$. Deze functie neemt ergens op $[a,b]$ een maximale waarde aan.(Stelling van Weierstrass). Die maximale waarde noteren we, op een wat curieuze manier, met $\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$.
We schatten dan: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \|f\|_\infty\,\mathrm{d}x = (b-a)\|f\|_\infty < \infty$.
En, net zo:
$\big(\|f\|_2\big)^2 = \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \big(\|f\|_\infty\big)^2\,\mathrm{d}x = (b-a)\big(\|f\|_\infty\big)^2 < \infty$.
Dit voert tot de gewenste conclusie.

$\square$

We bespreken nu een ander type functieruimten, namelijk ruimten die bestaan uit functies $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ of $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Zulke functies noemt men gewoonlijk 'rijtjes'.

**1.1.9 Definitie (Vectorruimten van rijtjes)**

• Met $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ noteren we de verzameling van alle $\mathbb{K}$-waardige functies $\{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K},\ n \mapsto f(n)\}$. De rij van beelden $\{f(n)\}$ noteren we vaak met $\{f_n\}$ en nog vaker met $\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \ldots, x_j, \ldots]$ In $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definiëren we een optelling en een scalaire vermenigvuldiging door op de gebruikelijke manier rijtjes 'componentsgewijs' bij elkaar op te tellen, respectievelijk met een constante te vermenigvuldigen. Formeel: Voor alle $\underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alle $\underline{y} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ en alle $\alpha$ en $\beta$ in $\mathbb{K}$ wordt $\alpha\underline{x}+\beta\underline{y}$ gedefinieerd door kolom$[\alpha x_1+\beta y_1, \ldots, \alpha x_j+\beta y_j, \ldots]$.
Net zo definiëren we de ruimte $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ van alle 'dubbelzijdig oneindige' rijtjes

$$\big\{\underline{x} = \text{kolom}[\ldots, x_{-7}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots]\big\}.$$

Volkomen analoog aan het voorafgaande definiëren we optelling en scalaire vermenigvuldiging voor dubbelzijdig oneindige rijtjes door deze bewerking componentsgewijs uit te voeren. Vervang in het voorafgaande slechts $\mathbb{N}$ door $\mathbb{Z}$.

• Met $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_c$ noteren we de verzameling van alle $\mathbb{K}$-waardige functies $\{f\colon \mathbb{N} \to$

$\mathbb{K},\ n \mapsto f(n)\}$ *waarvoor geldt dat slechts een* EINDIG (doch willekeurig) aantal van de waarden $f(n)$ ongelijk 0 mag zijn. Analoog voeren we de verzameling $\mathbb{K}_c^{\mathbb{Z}}$ in.

**1.1.10 Stelling**
*Met de ingevoerde optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ *beide vectorruimten. Sjieker gezegd: De ensembles* $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}, +)$ *en* $(\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}, \mathbb{K}, +)$ *zijn vectorruimten. Voorts is* $\mathbb{K}_c^{\mathbb{N}}$ *een lineaire deelruimte van* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{K}_c^{\mathbb{Z}}$ *een lineaire deelruimte van* $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.

We gaan nu drie typen rijtjesruimten ten tonele voeren die lineaire deelruimten zullen blijken te zijn van $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, respectievelijk van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Het idee is dat we niet meer alle rijtjes zullen toelaten, maar zekere begrensdheidseisen stellen.

**1.1.11 Definitie (Rijtjesruimten van type $\ell$)**
• Aan een kolom $\underline{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ voegen we op drie speciale manieren een (getal)waarde toe, die we ook wel *norm* noemen,

$$(1) \qquad \|\underline{x}\|_1 = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|, & \text{als de reeks convergent is,} \\ \infty, & \text{als de reeks divergent is.} \end{cases}$$

$$(2) \qquad \|\underline{x}\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2}, & \text{als de reeks convergent is,} \\ \infty, & \text{als de reeks divergent is.} \end{cases}$$

$$(3) \qquad \|\underline{x}\|_\infty = \begin{cases} \sup_{1 \le j < \infty} |x_j|, & \text{als het rijtje begrensd is,} \\ \infty, & \text{als het rijtje onbegrensd is.} \end{cases}$$

Als de respectievelijke reeksen convergeren zeggen we wel, $\|\underline{x}\|_1 < \infty$, respectievelijk $\|\underline{x}\|_2 < \infty$.
Als de rij begrensd is zeggen we $\|\underline{x}\|_\infty < \infty$.
• Aan een kolom $\underline{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ voegen we analoog de normen $\|\underline{x}\|_1$, $\|\underline{x}\|_2$, $\|\underline{x}\|_\infty$ toe door in bovenstaande definities "$\sum_{j=1}^{\infty}$"te vervangen door "$\sum_{j=-\infty}^{\infty}$ ën "$\sup_{1 \le j < \infty}$ "door "$\sup_{-\infty < j < \infty}$ ".
• Met $\ell_1(\mathbb{N})$, respectievelijk $\ell_1(\mathbb{Z})$, noteren we de verzameling van alle kolommen $\underline{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, respectievelijk $\underline{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, met de eigenschap $\|\underline{x}\|_1 < \infty$.
• Met $\ell_2(\mathbb{N})$, respectievelijk $\ell_2(\mathbb{Z})$, noteren we de verzameling van alle kolommen $\underline{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, respectievelijk $\underline{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, met de eigenschap $\|\underline{x}\|_2 < \infty$.

• Met $\ell_\infty(\mathbb{N})$, respectievelijk $\ell_\infty(\mathbb{Z})$, noteren we de verzameling van alle kolommen $\underline{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, respectievelijk $\underline{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, met de eigenschap $\|\underline{x}\|_\infty < \infty$.

**1.1.12 Stelling**

*Met de boven ingevoerde optelling en scalaire vermenigvuldiging, zie Definitie (1.1.9), geldt het volgende:*

*(i)* $\ell_1(\mathbb{N})$ *en* $\ell_1(\mathbb{Z})$ *zijn vectorruimten.*

*(ii)* $\ell_2(\mathbb{N})$ *en* $\ell_2(\mathbb{Z})$ *zijn vectorruimten.*

*(iii)* $\ell_\infty(\mathbb{N})$ *en* $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ *zijn vectorruimten.*

*(iv)* $\ell_1(\mathbb{N})$ *is een lineaire deelruimte van* $\ell_2(\mathbb{N})$*.*
$\ell_1(\mathbb{Z})$ *is een lineaire deelruimte van* $\ell_2(\mathbb{Z})$*.*
*Er geldt* $\|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1$, *voor alle* $\underline{x}$*.*

*(v)* $\ell_2(\mathbb{N})$ *is een lineaire deelruimte van* $\ell_\infty(\mathbb{N})$*.*
$\ell_2(\mathbb{Z})$ *is een lineaire deelruimte van* $\ell_\infty(\mathbb{Z})$*.*
*Er geldt* $\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_2$, *voor alle* $\underline{x}$*.*

*(vi)* $\mathbb{K}_c^{\mathbb{N}}$ *is een lineaire deelruimte van* $\ell_1(\mathbb{N})$*.*
$\mathbb{K}_c^{\mathbb{Z}}$ *is een lineaire deelruimte van* $\ell_1(\mathbb{Z})$*.*

**Bewijs.**

Omdat de ingevoerde rijtjesverzamelingen $\ell_1(\mathbb{N})$, enzovoort, deelverzamelingen zijn van $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, dan wel van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, hoeven we 'alleen maar' te laten zien dat, als we lineaire combinaties nemen van rijtjes in $\ell_1(\mathbb{N}), \ldots$, we respectievelijk steeds binnen $\ell_1(\mathbb{N}), \ldots$, blijven. We geven de bewijzen alleen voor kolommen waarvan de index door $\mathbb{N}$ rent. Als de index door $\mathbb{Z}$ rent gaat het net zo flauw.

(i) De vraag is:
Volgt uit $\|\underline{x}\|_1 < \infty$ en $\|\underline{y}\|_1 < \infty$, dat $\|\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}\|_1 < \infty$? Welnu, met de driehoeksongelijkheid voor complexe getallen volgt

$$\begin{aligned}\|\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}\|_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j + \beta y_j| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |\beta y_j| = |\alpha|\|\underline{x}\|_1 + |\beta|\|\underline{y}\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

(ii) De vraag is:
Volgt uit $\|\underline{x}\|_2 < \infty$ en $\|\underline{y}\|_2 < \infty$, dat $\|\alpha\underline{x}+\beta\underline{y}\|_2 < \infty$? Welnu, met de

driehoeksongelijkheid voor complexe getallen en met de ongelijkheid: $(p+q)^2 \leq 2p^2 + 2q^2$, voor niet-negatieve getallen $p$ en $q$, volgt

$$\begin{aligned}\big(\|\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}\|_2\big)^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j + \beta y_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \big(|\alpha x_j| + |\beta y_j|\big)^2 \leq \\ &\leq 2\big(|\alpha|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 + |\beta|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |y_j)|^2\big) = \\ &= 2|\alpha|^2\big(\|\underline{x}\|_2\big)^2 + 2|\beta|^2\big(\|\underline{y}\|_2\big)^2 < \infty.\end{aligned}$$

(iii) De vraag is:
Volgt uit $\|\underline{x}\|_\infty < \infty$ en $\|\underline{y}\|_\infty < \infty$, dat $\|\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}\|_\infty < \infty$? Welnu, met de driehoeksongelijkheid voor complexe getallen volgt

$$\begin{aligned}\|\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}\|_\infty &= \sup_{1 \leq j < \infty} |\alpha x_j + \beta y_j| \leq \\ &\leq \sup_{1 \leq j < \infty} |\alpha x_j| + \sup_{1 \leq j < \infty} |\beta y_j| = |\alpha|\|\underline{x}\|_\infty + |\beta|\|\underline{y}\|_\infty < \infty.\end{aligned}$$

(iv) Als $\underline{x} \in \ell_1(\mathbb{N})$ dan geldt voor alle $k$ met $1 \leq k < \infty$,
dat $|x_k| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|\underline{x}\|_1$.
Gevolg: $(\|\underline{x}\|_2)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j||x_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\underline{x}\|_1 |x_j| = \|\underline{x}\|_1 \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = (\|\underline{x}\|_1)^2$.

(v) Als $\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N})$ dan geldt voor alle $k$ met $1 \leq k < \infty$ dat $|x_k|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2$.
Trek de wortel aan beide kanten van de ongelijkheid, dan komt er $|x_k| \leq \|\underline{x}\|_2$. Gevolg $\|\underline{x}\|_\infty = \sup_{1 \leq j < \infty} |x_j| \leq \|\underline{x}\|_2$.

$\square$

## 1.2 Functieruimten met een afstandsbegrip

In de functieruimten van de vorige paragraaf willen we de notie van 'afstand tussen twee functies' introduceren. In een eindig dimensionale Euclidische ruimte is het afstandsbegrip gebaseerd op het inwendige product. We beginnen daarom met op complexe vectorruimten formeel een inwendig product te definiëren.

**1.2.1 Definitie (Inproduct)**
Gegeven: Een complexe vectorruimte $\mathbf{E}$.
We noemen de afbeelding

$$(\cdot,\cdot)\ :\ \mathbf{E}\times\mathbf{E}\longrightarrow\mathbb{C},$$

een inwendig product op $\mathbf{E}$, als $\forall\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{E}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ geldt:

a) $(\mathbf{x}\,,\mathbf{y})=\overline{(\mathbf{y}\,,\mathbf{x})}$,

b) $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\,,\mathbf{z})=\overline{\alpha}(\mathbf{x}\,,\mathbf{z})+\overline{\beta}(\mathbf{y}\,,\mathbf{z})$,

c) $(\mathbf{x}\,,\mathbf{x})\geq 0$ en $\Big[(\mathbf{x}\,,\mathbf{x})=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x}=0\Big]$.

Een (complexe) vectorruimte $\mathbf{E}$ die voorzien is van een inwendig product $(\cdot,\cdot)$ heet wel *inproductruimte* , *IP-ruimte*, *pre-Hilbertruimte* en ook wel eens *unitaire ruimte*.

**1.2.2 Voorbeelden (Inproductruimten)**

(a) De verzameling $\mathbb{C}$ kan als een $1-$dimensionale complexe vectorruimte worden opgevat. Een inproduct op $\mathbb{C}$ wordt gegeven door $(x\,,y)\ =\ \overline{x}y$.

(b) Een inproduct op

$$\mathbb{C}^N=\{\underline{x}=\text{kolom}[x_1,\cdots,x_N]\ \Big|\ x_j\in\mathbb{C},1\leq j\leq N\},$$

wordt gegeven door $(\underline{x}\,,\underline{y})=\underline{x}^\dagger\underline{y}=\sum\limits_{j=1}^{N}\overline{x_j}y_j=\overline{\underline{x}}^T\underline{y}$.

(c) Een inproduct op $\mathbb{L}_2(a,b)$ wordt gegeven door

$$(f,g)=\int_a^b\overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

De integraal in het inproduct is convergent want de integrand wordt absoluut gemajoreerd door $\frac{1}{2}\{|f(x)|^2+|g(x)|^2\}$. Het is eenvoudig na te gaan dat aan 1.2.1(a) en (b) voldaan is. We gaan na of ons inwendig product eigenschap 1.2.1(c) heeft: $(f,\,f)=0$ betekent $\int_a^b|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=0$. Dus $f$ is een niksfunctie, maar hoeft geen nulfunctie te zijn! Gelukkig kan een niksfunctie $f$ alleen $\neq 0$ zijn in een punt $x$ waar $f$ niet continu is. En zulke punten zijn er 'niet zo veel' als, bijvoorbeeld, $f$ stuksgewijs continu is. We stellen ons nu op het practische standpunt dat we twee functies als 'dezelfde' beschouwen als ze slechts in wat 'losse' punten van elkaar verschillen. Conclusie: Er is niet in stricte zin voldaan aan 1.2.1(c), maar daar hebben we verder weinig last van. En al helemaal niet als je toevallig een continue $f$ bij de kop hebt.

(d) Een mogelijk inproduct op $\mathbb{T}(a,b)$ wordt eveneens gegeven door

$$(f,g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dit spreekt vanzelf omdat $\mathbb{T}(a,b)$ een lineaire delruimte is van $\mathbb{L}_2(a,b)$. Hier is wel in stricte zin aan 1.2.1(c) voldaan. Immers, vergelijk Voorbeelden 1.1.7, als $(T,T) = \int_a^b |T(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{N}(c_j - c_{j-1})|\alpha_j|^2 = 0$, dan moeten de $\alpha_j$ allemaal 0 zijn.

(e) Laat $(a,b)$ een begrensd interval zijn. Ook op $\mathcal{C}([a,b])$ kan een inproduct ingevoerd worden door

$$(f,g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dit spreekt vanzelf omdat $\mathcal{C}([a,b])$ een lineaire deelruimte is van $\mathbb{L}_2(a,b)$. Ook hier is in stricte zin aan 1.2.1(c) voldaan. Immers als $f(c) \neq 0$ voor een punt $c \in [a,b]$, dan is vanwege de continuiteit $f$ ook $\neq 0$ op een omgeving van $c$. Als gevolg is dan $\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \neq 0$.

(f) Een inproduct op de rijtjesruimten $\ell_2(\mathbb{N})$ en $\ell_2(\mathbb{Z})$ wordt gegeven door, respectievelijk, $(\underline{x}\,,\underline{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_j}y_j$ en $(\underline{x}\,,\underline{y}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{x_j}y_j$. Deze reeksen zijn convergent omdat ze gemajoreerd worden door $\sum \frac{1}{2}\{|x_j|^2 + |y_j|^2\}$.

(g) Een inproduct op de rijtjesruimten $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ wordt eveneens gegeven door, respectievelijk, $(\underline{x}\,,\underline{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_j}y_j$ en $(\underline{x}\,,\underline{y}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{x_j}y_j$. Omdat ten hoogste een eindig aantal der $x_j$ en der $y_j$ ongelijk 0 is zijn deze 'oneindige sommen' effectief 'eindige sommen'. Er is altijd convergentie.

1. In de beschouwingen onder c) en e) kunnen we het interval $(a,b)$ vervangen door $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ of ook door deelgebieden in $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

We voeren nu, formeel, het begrip 'afstand' in, in een (complexe) vectorruimte.

**1.2.3 Definitie**
Gegeven: Een (complexe)vectorruimte $\mathbf{E}$. De afbeelding

$$\|\cdot\| \,:\, \mathbf{E} \longrightarrow [0,\infty),$$

heet een *norm* op $\mathbf{E}$, als $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{E}\;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}$ geldt:

a) $\|\mathbf{x}\| = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{x} = 0$,

b) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|$,

c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ( *De Driehoeksongelijkheid*).

Het getal $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ heet de *afstand* tussen $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$.
Een (complexe) vectorruimte $\mathbf{E}$ die voorzien is van een norm $\|\cdot\|$ heet *Genormeerde Vectorruimte*. Merk op dat $\|\mathbf{x}\| > 0$ als $\mathbf{x} \neq 0$.

De volgende stellingen geven enkele verbanden tussen inproducten, normen en afstanden in een inproductruimte.

**1.2.4 Stelling** *Gegeven: Een inproductruimte* $\mathbf{E}$.
*Notatie:* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ *betekent:* $(\mathbf{x}\,,\mathbf{y}) = 0$.
*Dan geldt* $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{E}$*:*

*i.* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$
$\Rightarrow (\mathbf{x}+\mathbf{y}\,,\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\,,\mathbf{x}) + (\mathbf{y}\,,\mathbf{y})$ *(Pythagoras)*

*ii.* $|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})$. *(Cauchy-Schwarz)*

**Bewijs.** i. Schrijf het linkerlid uit en maak gebruik van $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$.

ii. Voor $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ is de bewering blijkbaar correct. Veronderstel $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $0 \leq (\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}\,,\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) = \mathrm{Re}(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}\,,\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2\lambda\,\mathrm{Re}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y},\mathbf{y})$. Als functie van $\lambda$ is deze kwadratische uitdrukking $\geq 0$. Dit heeft als gevolg dat de discriminant $\leq 0$ moet zijn. In formule: $|\,\mathrm{Re}(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})$. Merk op dat het complexe getal $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ geschreven kan worden als $|(\mathbf{x},\mathbf{y})|e^{i\theta}$ met $\theta \in \mathbb{R}$. Doe bovenstaande beschouwing nu over met $\mathbf{y}$ vervangen door $\mathbf{z} = e^{-i\theta}\mathbf{y}$. Onder toepassing daarvan komt er $|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 = |\,\mathrm{Re}(\mathbf{x},\mathbf{z})|^2 \leq (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{z},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})$.
$\square$

**1.2.5 Stelling**
*Gegeven: Een inproductruimte* $\mathbf{E}$.
*Dan geldt: De toevoeging* $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ *is een norm. Voorts geldt* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E}$ *:*

*i)* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ *(Pythagoras)*

*ii)* $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$. *(Cauchy-Schwarz)*

*iii) De driehoeksongelijkheid:*

$$\Big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\Big| \leq \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

*iv) Geformuleerd met afstanden luidt de driehoeksongelijkheid:*

$$\Big|d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{z}, \mathbf{y})\Big| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

*v) De Parallellogramwet geldt:*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\Big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\Big)$$

**Bewijs.** i.) Zie i) in vorige stelling.

ii.) Zie ii) in vorige stelling.

iii.) Omdat $|\operatorname{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, geldt
$\|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\operatorname{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq$
$\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$.
Worteltrekken levert de te bewijzen bewering.

iv.) Vervang in iii) $\mathbf{x}$ door $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ en $\mathbf{y}$ door $\mathbf{y} - \mathbf{z}$.

v.) Schrijf uit. De 'gemengde' inproducten blijken weg te vallen.

□

**1.2.6 Opmerking** In reële inproductruimten wordt *de hoek* $\theta$ *tussen twee vectoren* $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ gedefinieerd door $\theta = \arccos\{\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\}$. Voor complexe inproducten wordt dit niet gedaan. Het begrip *orthogonaal* (=*loodrecht*) blijft echter gehandhaafd.

**1.2.7 Voorbeelden**

• De 'norm' $f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2\, \mathrm{d}x}$, als ingevoerd in 1.1.6 is precies gelijk aan de wortel uit het inproduct $(f, f)$ op $\mathbb{L}_2(a, b)$.

• De 'norm' $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2}$, als ingevoerd in 1.1.11 is precies gelijk aan de wortel uit het inproduct $(\underline{x}, \underline{x})$ op $\ell_2(\mathbb{N})$.

In Definitie 1.2.3 hebben we gedefinieerd wat we verstaan onder een norm. Vervolgens hebben we op een inproductruimte een norm ingevoerd, uitgaande van het inproduct volgens $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. We zullen spoedig zien dat er ook normen bestaan die niet van een inproduct afkomstig zijn. Met de volgende stelling kun je zien of een blote norm al dan niet van een 'verborgen' inproduct afkomstig is.

**1.2.8 Stelling**

*Gegeven: Een genormeerde vectorruimte* $\mathbf{E}$ *met norm* $\|\cdot\|$.

*a) De norm* $\|\cdot\|$ *is afkomstig van een inproduct als aan de parallelogram wet*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\Big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\Big)$$

*voldaan is.*

*b) Het inproduct kan 'gereconstrueerd' worden met behulp van de 'polarisatieformule'*

$$(\mathbf{x}\,, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{4}\{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + i\|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2\}.$$

**Bewijs.** Als de norm $\|\cdot\|$ afkomstig is van een inproduct, dan gelden de uitdrukkingen onder a) en b). Dit volgt door uitschrijven van $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 =$ $= (\mathbf{x} + \mathbf{y}\,, \mathbf{x} + \mathbf{y})$, etc.. Het bewijs dat de aldus gevonden noodzakelijke voorwaarden ook voldoende zijn leveren we hier niet. □

**1.2.9 Voorbeelden (Genormeerde ruimten die geen IP-ruimten zijn)**

(a) Een tweetal normen op

$$\mathbb{C}^N = \{\underline{x} = \mathrm{kolom}[x_1, \cdots, x_N] \;\Big|\; x_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq N\},$$

wordt gegeven door $\|\underline{x}\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{N} |x_j|$ en $\|\underline{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq j \leq N} |x_j|$. Deze normen kunnen niet van een inproduct afkomstig zijn. Als je $\underline{x} = \mathrm{kolom}[1, 0, 0, \ldots, 0]$ $\underline{y} = \mathrm{kolom}[0, 1, 0, \ldots, 0]$ neemt, dan blijkt niet aan de parallelogramwet 1.2.8(a) te zijn voldaan.

(b) Een norm op de ruimte $\mathbb{L}_1(a,b)$ wordt gegeven door, vergelijk Definitie 1.1.6(1),

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Uit $\|f\|_1 = 0$ volgt dat $f$ een niksfunctie is. Dit houdt niet noodzakelijk in dat $f$ de nulfunctie is. Gelukkig scheelt 't niet zo veel zodat we er geen last van hebben. De beschouwingen hierover onder Voorbeeld 1.2.2(c) zijn ook hier van toepassing.
Ook deze norm kan niet van een inproduct afkomstig zijn. Er is niet aan de parallelogramidentiteit voldaan als $f,\ g \in \mathbb{L}_1(0,1)$, en $f(x) = 1$ en $g(x) = x$ genomen wordt.

(c) Laat $[a,b]$ een begrensd interval zijn. Een norm op $\mathcal{C}([a,b])$ wordt gegeven door $\|f\|_\infty = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$. Ook deze norm kan niet van een inproduct afkomstig zijn. Er is niet aan de parallelogramidentiteit voldaan als $f,\ g \in \mathcal{C}([a,b])$, en $f(x) = 1$ en $g(x) = x$ genomen wordt.

(d) Een norm op de rijtjesruimte $\ell_1(\mathbb{N})$ wordt gegeven door $\|\underline{x}\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|$. Vergelijk Definitie 1.1.11(1).

(e) Een norm op de rijtjesruimte $\ell_\infty(\mathbb{N})$ wordt gegeven door $\|\underline{x}\|_\infty = \sup\limits_{1 \le j < \infty} |x_j|$. Vergelijk Definitie 1.1.11(3).

(f) De rijtjesruimte $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ kan zowel voorzien worden van de norm $\|\cdot\|_1$, als van de norm $\|\cdot\|_2$, en ook nog van de norm $\|\cdot\|_\infty$. Kies een rij vectoren $\{\underline{x}_k\} \subset \mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$, met $\underline{x}_k = \text{kolom}[1,\ldots,1,0,\ldots,0,\ldots]$, dus $k$ enen en daarna allemaal nullen. Dan blijkt $\|\underline{x}_k\|_1 = k$, $\|\underline{x}_k\|_2 = \sqrt{k}$, $\|\underline{x}_k\|_\infty = 1$. Blijkbaar gedragen de drie normen zich voor aangroeiende $k$ heel verschillend!
Uit Stelling 1.1.12(iv) en (v) volgt nog dat voor een rij $\{\underline{y}_k\} \subset \mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$, met $\|\underline{y}_k\|_1 \to 0$, als $k \to \infty$, dan ook $\|\underline{y}_k\|_2 \to 0$ en $\|\underline{y}_k\|_\infty \to 0$, als $k \to \infty$. De norm $\|\cdot\|_1$ is 'sterker dan' de norm $\|\cdot\|_\infty$. Hiermee bedoelen we dat er een $c > 0$ is zodat $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}:\ \|\mathbf{x}\|_\infty \le c\|\mathbf{x}\|_1$. In het onderhavige geval is dit geldig met $c = 1$.

(g) Alle ruimten $\mathbb{C}^N$ kunnen als lineaire deelruimten van $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ opgevat worden door aan de kolomvectoren in $\mathbb{C}^N$ een oneindige staart van nullen te hangen.

## 1.3 Convergentie in genormeerde ruimten

Analoog aan de gang van zaken in $\mathbb{R}$ en in eindig dimensionale ruimten definieren we gesloten deelverzamelingen en limieten van rijen.

**1.3.1 Definitie**
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$, een punt $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$, een getal $r > 0$. Dan heten de verzamelingen

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \Big| \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\},$$

$$\overline{B(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \Big| \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\},$$

$$S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \Big| \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\},$$

respectievelijk *open bal*, *gesloten bal*, *sfeer*, met middelpunt $\mathbf{a}$ en straal $r$.

**1.3.2 Definitie**
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $W \subset \mathbf{E}$. We noemen $W$ een *begrensde deelverzameling* als geldt

$$\exists\, R > 0\, [\, W \subset B(\mathbf{0}, R)\, ].$$

**1.3.3 Definitie** Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$.
Een rij punten $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{E}$. Een punt $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$.
We zeggen: $\{\mathbf{x}_n\}$ convergeert naar $\mathbf{a}$, of ook $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, als geldt $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| \to 0$, als $n \to \infty$. Equivalent hiermee is de uitspraak

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \big[\, \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < \varepsilon\, \big].$$

We zeggen: $\{\mathbf{x}_n\}$ is een *convergente rij*, als er een punt $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ is, zodat $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$. Het punt $\mathbf{a}$ heet de *limiet* van de rij $\{\mathbf{x}_n\}$.

**1.3.4 Stelling**
*Een convergente rij is een begrensde rij, dat wil zeggen:*
*Als* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, *dan is er* $R > 0$, *zodat* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty} \subset B(\mathbf{0}, R)$

**Bewijs.** Omdat $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, geldt $\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 : \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < 1]$. Kies nu voor $R$ het grootste getal uit de (eindige!) set
$\{\|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\|, \|\mathbf{x}_3\|, \ldots, \|\mathbf{x}_{N_1}\|, \|\mathbf{a}\| + 1\}$. □

**1.3.5 Stelling**
*Gegeven: Een genormeerde vectorruimte* $\mathbf{E}$.
*Twee convergente rijen in* $\mathbf{E}$*:* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ *en* $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$.
*Twee convergente rijen in* $\mathbb{C}$*:* $\lambda_n \to \lambda$ *en* $\mu_n \to \mu$.
*Dan geldt:* $\lambda_n \mathbf{x}_n \to \lambda \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $(\lambda_n \mathbf{x}_n,\ \mu_n \mathbf{y}_n) \to (\lambda \mathbf{x},\ \mu \mathbf{y})$, $\|\lambda_n \mathbf{x}_n\| \to \|\lambda \mathbf{x}\|$.

**Bewijs.** We bewijzen hier alleen de tweede bewering. Doe de overige zelf. We schatten: $\|\lambda_n \mathbf{x}_n - \lambda \mathbf{x}\| = \|(\lambda_n - \lambda)\mathbf{x}_n + \lambda(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\| \leq |\lambda_n - \lambda| \|\mathbf{x}_n\| + + |\lambda| \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$. Omdat $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, geldt voor $n$ voldoende groot dat $\|\mathbf{x}_n\| \leq \|\mathbf{x}\| + 1$. Beide termen naderen dus naar 0 als $\lambda_n \to \lambda$ en $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. □

**1.3.6 Definitie**
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $W \subset \mathbf{E}$.
We noemen $W$ een *gesloten deelverzameling* van $\mathbf{E}$ als uit $\{\mathbf{x}_n\} \subset W$ en $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ altijd volgt dat ook $\mathbf{x} \in W$.

Een deelverzameling van $\mathbf{E}$ die niet gesloten is, kunnen we afsluiten, dat wil zeggen 'alle limietpunten toevoegen'. Preciezer:

**1.3.7 Definitie (Afsluiting)**
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $U \subset \mathbf{E}$.
We definieren de *afsluiting* $\overline{U}$ van $U$ door

$$\overline{U} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\big|\, \exists \{\mathbf{x}_n\} \subset U \text{ met } \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}\}.$$

Een verzameling $U$ is dus gesloten als $U = \overline{U}$. De eerder ingevoerde 'gesloten bal' heet terecht zo!

**1.3.8 Stelling**
*De afsluiting van een lineaire deelruimte is weer een lineaire deelruimte.*

**Bewijs.** Laat $U$ een lineaire deelruimte in $\mathbf{E}$ zijn. Neem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{U}$. Laat $\{\mathbf{x}_n\} \subset U$ en $\{\mathbf{y}_n\} \subset U$ convergente rijen zijn met $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ en $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$. Omdat $U$ een lineaire deelruimte is, is voor willekeurige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ de rij $\{\alpha \mathbf{x}_n + \beta \mathbf{y}_n\} \subset U$. Tenslotte geldt op grond van Stelling 1.3.5 $\alpha \mathbf{x}_n + \beta \mathbf{y}_n \to \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}$. Dus $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \overline{U}$. □

**1.3.9 Definitie (Dichte deelverzamelingen)**
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $W \subset \mathbf{E}$.
We zeggen: $W$ is *dicht in* $\mathbf{E}$ als voor de afsluiting $\overline{W}$ van $W$ geldt $\overline{W} = \mathbf{E}$.
Een equivalente formulering is:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \forall \varepsilon > 0\colon\ B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap W \neq \emptyset.$$

Nog een andere equivalente bewering is:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \exists\{\mathbf{w}_n\} \subset W:\ \mathbf{w}_n \to \mathbf{x}.$$

**1.3.10 Stelling**

*a)* $\mathbb{T}(a,b)$ *is dicht in* $\mathbb{L}_1(a,b)$.

*b)* $\mathbb{T}(a,b)$ *is dicht in* $\mathbb{L}_2(a,b)$.

*c)* $\mathbb{T}(a,b)$ *is NIET dicht in* $\mathbb{B}(a,b)$*, als* $(a,b)$ *een onbegrensd interval is.*

*d)* $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ *is dicht in* $\ell_1(\mathbb{N})$.

*e)* $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ *is dicht in* $\ell_2(\mathbb{N})$.

*f)* $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ *is NIET dicht in* $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

**Bewijs.**
a) en b) behoren tot onze uitgangspunten. Zie ook Eigenschappen 0.5.5.

c) Onze afspraak is, dat trapfuncties slechts op een *begrensd* interval van 0 kunnen verschillen, zie Definitie 1.1.4 sub (4). Als nu $(a,b)$ een *onbegrensd* interval is, dan zal het minimale absolute verschil tussen de functie $x \mapsto 1$ en *iedere* trapfunctie tenminste 1 bedragen. Dus $\|1-T\|_\infty \geq 1$. Zelfs de functie $x \mapsto 1$ kan dus in $\mathbb{B}$ niet met een trapfunctie benaderd worden.

d) Als $\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \ldots, x_j, \ldots] \in \ell_1(\mathbb{N})$, dan is $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$. Laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. Kies bij deze $\varepsilon$ een $N \in \mathbb{N}$ zo groot dat $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$. Definiëer nu $\underline{x}_N \in \mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ door $\underline{x}_N = \text{kolom}[x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0, \ldots]$. Dan is blijkbaar $\|\underline{x} - \underline{x}_N\|_1 < \varepsilon$.

d) Als $\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \ldots, x_j, \ldots] \in \ell_2(\mathbb{N})$, dan is $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$. Laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. Kies bij deze $\varepsilon$ een $N \in \mathbb{N}$ zo groot dat $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon^2$. Definiëer nu $\underline{x}_N \in \mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ door $\underline{x}_N = \text{kolom}[x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0, \ldots]$. Dan is blijkbaar $\|\underline{x} - \underline{x}_N\|_2 < \varepsilon$.

c) Onze afspraak is, dat rijtjes in $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ slechts een *eindig* aantal getallen $\neq 0$ bevatten, zie Definitie 1.1.9. Het minimale absolute verschil tussen $\underline{e} = \text{kolom}\, 1,\ 1,\ 1, \ldots, 1, \ldots$ en *iedere* $\underline{x} \in \mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ moet dan tenminste 1 bedragen. Dus $\|\underline{x} - \underline{e}\|_\infty \geq 1$. Blijkbaar kan zelfs $\underline{e} \in \ell_\infty$ op afstand $\geq 1$ van $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$. $\square$

**1.3.11 Stelling (Approximatiestelling van Weierstrass)**
$\mathbb{P}([a,b])$ *is dicht in* $\mathcal{C}([a,b])$.

**Bewijs.** Slechts de volgende toelichting: Bij gegeven $f \in \mathcal{C}([0,1])$ wordt een rij polynomen $\{B_n(f)\}$ geconstrueerd volgens

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Er kan worden bewezen dat voor deze, zogenaamde, *Bernsteinpolynomen van* $f$ geldt $\|f - B_n(f)\|_\infty \to 0$, als $n \to \infty$. □

**1.3.12 Definitie (Compacte deelverzamelingen)**
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $W \subset \mathbf{E}$. We zeggen $W$ is *compact* als iedere rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset W$ een convergente deelrij bevat, met limiet in $W$.

**1.3.13 Stelling**
*Compacte verzamelingen zijn gesloten en begrensd.*

**Bewijs.** i) Laat $W \subset \mathbf{E}$ een compacte deelverzameling zijn. Laat $\{\mathbf{x}_n\} \subset W$ een rij zijn met limiet $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Elke deelrij van $\{\mathbf{x}_n\}$ is dan eveneens convergent met limiet $\mathbf{x}$. Op grond van de compactheid is dan $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Blijkbaar is $W$ gesloten.
ii) Veronderstel eens dat $W \subset \mathbf{E}$ onbegrensd is. Dan bevat $W$ een rij $\{\mathbf{y}_n\}$ met $\|\mathbf{y}_n\| > n$. Elke deelrij van deze rij is dan eveneens onbegrensd en kan dus niet convergent zijn. Bijgevolg kan een onbegrensde verzameling nooit compact zijn. □

**1.3.14 Voorbeelden**

a) In $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{C}^N$ zijn verzamelingen die zowel gesloten als begrensd zijn ook altijd compact. In dit geval geldt dus de omkering van voorafgaande stelling.

b) De gesloten bal $\overline{B(\mathbf{0},1)} \subset \ell_2(\mathbb{N})$ is zowel gesloten als begrensd. Echter de rij $\{\underline{e}_n\}$, met $\underline{e}_n$ de kolom die op de $n$-de positie een 1 heeft en verder overal nullen, bevat geen convergente deelrij. Conclusie: In $\infty$-dimensionale genormeerde ruimten geldt de omkering van laatstgenoemde stelling in het algemeen NIET.

## 1.4 Puntsgewijze en uniforme convergentie

Deze paragraaf beoogt aan te sluiten bij enkele klassieke, geliefde, gevreesde en gehate begrippen.

**1.4.1 Definitie (Functieruimten 3)**
We beschouwen wederom een, vast gekozen, open interval $(a, b)$, met $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Aan een functie $f\colon (a, b) \to \mathbb{C}$ voegen we een (getal)waarde toe, die we ook wel *norm* noemen, op weer een andere manier,

$$\|f\|_\infty = \begin{cases} \sup\limits_{a<x<b} |f(x)|, & \text{als } f \text{ begrensd is,} \\ \infty, & \text{als } f \text{ onbegrensd is.} \end{cases}$$

$f\colon (a, b) \to \mathbb{C}$ begrensd, wil zeggen

$$\exists M \geq 0 \, \forall x \in (a, b)\colon \quad |f(x)| \leq M.$$

In feite is $\|f\|_\infty$ het kleinste (zuinigste) getal $M \geq 0$ waarvoor deze ongelijkheid geldt. Samenvattend, $f$ begrensd betekent niets meer en niets minder dan $\|f\|_\infty < \infty$.

• Met $\mathbb{B}(a, b)$ noteren we de verzameling van alle functies $f\colon (a, b) \to \mathbb{C}$ met de eigenschap $\|f\|_\infty < \infty$.

• Met $\mathcal{C}_\mathbb{B}(a, b)$ noteren we de verzameling van alle *continue* functies $f\colon (a, b) \to \mathbb{C}$ met de eigenschap $\|f\|_\infty < \infty$.

**1.4.2 Voorbeelden**
• Op een willekeurig open interval $(a, b)$ beschouwen we de constante functie $x \mapsto f(x) = 1$. Dan geldt $\|f\|_\infty = 1 < \infty$, dus $f \in \mathbb{B}(a, b)$. Ook $f \in \mathcal{C}_\mathbb{B}(a, b)$, omdat $f$ continu is.

• Op het interval $(0, \infty)$ beschouwen de functie $x \mapsto g(x) = \frac{1}{1+x}$. Dan geldt $\|g\|_\infty = 1 < \infty$, dus $g \in \mathbb{B}(0, \infty)$. Ook $g \in \mathcal{C}_\mathbb{B}(0, \infty)$.

• Op het interval $(0, 1)$ beschouwen de functie $x \mapsto h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dan geldt $\|h\|_\infty = \infty$. Dus $h \notin \mathbb{B}(0, 1)$ en $h \notin \mathcal{C}_\mathbb{B}(0, 1)$.

• Voor een trapfunctie $T$, als ingevoerd in 1.1.4 geldt $\|T\|_\infty = \sup\limits_{a<x<b} |T(x)| = \max\limits_{a<x<b} |T(x)| = \max\limits_{1\leq j\leq N} |\alpha_j| < \infty$. Dus $T \in \mathbb{B}(a, b)$. Echter als $\alpha_j \neq \alpha_k$ voor zekere $j \neq k$ en/of als $(a, b)$ een onbegrensd interval is, dan $T \notin \mathcal{C}_\mathbb{B}$.

**1.4.3 Stelling**
*Met de boven ingevoerde optelling en scalaire vermenigvuldiging, zie Definitie (1.1.2), geldt het volgende:*

*(i)* $\mathbb{B}(a,b)$ *is een vectorruimte.*

*(ii)* $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}(a,b)$ *is een vectorruimte.*

*(iii)* $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}(a,b)$ *is een lineaire deelruimte van* $\mathbb{B}(a,b)$.

*(iv)* $\mathbb{T}(a,b)$ *is een lineaire deelruimte van* $\mathbb{B}(a,b)$.

*(v) Als* $(a,b)$ *een begrensd interval is, dan is* $\mathcal{C}([a,b])$ *een lineaire deelruimte van* $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}(a,b)$ *en dus ook van* $\mathbb{B}(a,b)$.

**Bewijs.** Nog meer van hetzelfde. $\square$

De aansluiting met de klassieke analyseliteratuur wordt gegeven door de volgende definitie.

**1.4.4 Definitie**
Gegeven: Een functierij $\{f_n\} \subset \mathbb{B}(a,b)$. Een functie $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{B}}(a,b)$.
We zeggen: $\{f_n\}$ **convergeert uniform** naar $f$ op $(a,b)$, als

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad \text{als} \quad n \to \infty.$$

Vaak schrijft men kortweg

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \ (\text{uniform op } (a,b))$$

en de functie $f$ heet de **uniforme limiet** van de functierij $\{f_n\}$.

In de volgende stelling formuleren we een klassiek resultaat op twee equivalente manieren.

**1.4.5 Stelling (C-stelling)**
• *De functieruimte* $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}(a,b)$ *is een gesloten lineaire deelruimte in* $\mathbb{B}(a,b)$.
• *De uniforme limiet van een rij continue functies is een continue functie.*

**Bewijs.** Zij $c \in (a,b)$. Zij $\varepsilon > 0$. Omdat $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n > N$ geldt $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Neem $n = N+1$. Omdat $f_n$ continu is, is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in (a,b)$ met $|x-c| < \delta$ geldt $|f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dan is voor alle $x \in (a,b)$ met $|x-c| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \\ &< \quad \|f - f_n\|_\infty \quad + \quad \tfrac{\varepsilon}{3} \quad + \quad \|f_n - f\|_\infty \\ &< \quad \tfrac{\varepsilon}{3} \quad + \quad \tfrac{\varepsilon}{3} \quad + \quad \tfrac{\varepsilon}{3} \quad = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ en $f$ is continu in $c$. Dit geldt voor alle $c \in (a,b)$, dus $f$ is continu. $\square$ $\square$

**1.4.6 Opmerking**
Voor een uniform convergente rij functies geldt volgens de C-stelling

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} f_n(x)$$

voor alle $c \in (a,b)$. Blijkbaar mogen in deze situatie de limieten verwisseld worden.

In de volgende definitie herformuleren we het meest elementaire limietbegrip voor functierijen (rijen van functies), uit het eerste jaar.

**1.4.7 Definitie** Een functierij $\{f_n\}$ op een interval $(a,b)$ heet **puntsgewijs convergent op** $(a,b)$ als voor alle $x \in (a,b)$ de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ bestaat. Als de functierij $\{f_n\}$ puntsgewijs convergeert op $(a,b)$ dan heet de functie $f\colon I \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in (a,b)\ )$$

de **puntsgewijze limiet** van de functierij $\{f_n\}$. Men schrijft dan kortweg

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ (puntsgewijs op } (a,b)).$$

Uit de definitie van een limiet van een rij volgt dat een functierij $\{f_n\}$ op $(a,b)$ puntsgewijs convergent is precies dan als er een functie $f\colon I \to \mathbb{C}$ bestaat zo dat

$$\forall x \in (a,b)\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N > 0\, \forall n \in \mathbb{N};\ n > N: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

De volgende stelling zegt dat een uniforme convergentie rij altijd puntsgewijs convergent is.

**1.4.8 Stelling**
*Gegeven: Een functierij* $\{f_n\} \subset \mathbb{B}(a,b)$. *Een functie* $f \in \mathbb{B}(a,b)$.
*Als* $f_n \to f$ *in* $\mathbb{B}(a,b)$, *dan geldt*

$$\forall x \in (a,b): \quad f_n(x) \to f(x).$$

**Bewijs.** Als $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$, dan geldt $\forall x \in (a,b)$: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. $\square$

Zoals dadelijk uit voorbeelden duidelijk zal worden, geldt de omgekeerde bewering niet.

**1.4.9 Voorbeelden (Uniforme vs Puntsgewijze Convergentie)**
**(a)** Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n} \quad (x \in [0,1]).$$

Dan is $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ (puntsgewijs). Hier is 0 de nulfunctie. Immers, laat $x \in [0,1]$. Laat $\varepsilon > 0$. Neem $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Dan is voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$:

$$|f_n(x) - 0| = \frac{(1-x)^n}{n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon.$$

Er is hier ook uniforme convergentie omdat $\|f_n - 0\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$, als $n \to \infty$.
**(b)** Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$g_n(x) = (1-x)^n \quad (x \in [0,1]).$$

(Zie Figuur) Dan is $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ (puntsgewijs), waarbij $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = 0 \\ 0 & \text{als } x > 0 \end{cases} \quad (x \in [0,1]).$$

Immers, laat $x \in [0,1]$. Laat $\varepsilon > 0$. Als $x = 0$ of $x = 1$ neem $N = 37$ en als $x \in (0,1)$ neem $N = \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-x)}$. Dan voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$ geldt $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ (ga na). De convergentie is niet uniform want $\|g_n - g\|_\infty = 1 \nrightarrow 0$, als $n \to \infty$. Dit kan ook direct worden ingezien. Immers, als de convergentie uniform was, dan zou de limietfunctie $g$ continu zijn en dat is ie niet! Stelling 1.4.5.
**(c)** Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $h_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$h_n(x) = x(1-x)^n \quad (x \in [0,1]).$$

(Zie Figuur) Dan is $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ (puntsgewijs). Voor het bewijs merken we op dat $|h_n(x) - 0| \leq |g_n(x) - g(x)|$ voor alle $x \in [0,1]$, waarbij $g_n$ en $g$ als in Voorbeeld (b) zijn. Laat $x \in [0,1]$. Laat $\varepsilon > 0$. Als $x = 0$ of $x = 1$ neem $N = 37$ en als $x \in (0,1)$ neem $N = \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-x)}$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$ geldt dan $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$ (ga na). In dit stadium is niet duidelijk of de convergentie uniform is, omdat we $N$ niet onafhankelijk van $x$ gekozen hebben. Met wat meer moeite blijkt dit toch te lukken. De functie $h_n$ is differentieerbaar en $h_n'(x) = (1-x)^n - nx(1-x)^{n-1} = [(1-(n+1)x](1-x)^{n-1}$. Omdat $h_n(0) = h_n(1) = 0$ en $h_n \geq 0$ heeft $h_n$ een maximum te $x = \frac{1}{n+1}$ en

$$|h_n(x) - 0| \leq h_n(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n \leq \frac{1}{n+1}$$

voor alle $x \in [0,1]$ en $n \in \mathbb{N}$. Oftewel $\|h_n - 0\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ als $n \to \infty$.

**(d)** Van belang is de standaardlimiet

$$\lim_{n\to\infty} n^p\, a^n = 0$$

voor alle $p \in \mathbb{R}$ en $|a| < 1$.
Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (x \in [0,1]).$$

(Zie Figuur) Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$ voor alle $x \in [0,1]$. (Dit is triviaal als $x = 0$ en volgt uit de standaardlimiet als $x \in (0,1]$.) Dus $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ puntsgewijs. Echter

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n+1}) = \frac{n}{n+1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-n}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. Blijkbaar is

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-n} = e^{-1} \neq 0$$

en de rij $\{f_n\}$ convergeert niet uniform op $[0,1]$.
Zij nu $\delta \in (0,1)$ **vast** en beschouw de restrictie van $f_n$ op het interval$[\delta,1]$. De functie $f_n$ heeft een maximum te $x = \frac{1}{n+1}$ en is dalend op $[\frac{1}{n+1}, 1]$. Daardoor geldt voor alle $n$ zo dat $\frac{1}{n+1} \leq \delta$, ofwel $n \geq \frac{1}{\delta} - 1$:

$$\|f_n - f\|_I = \max_{x\in[\delta,1]} f_n(x) = f_n(\delta) = n\delta(1-\delta)^n.$$

Dus $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_I = \lim\limits_{n\to\infty} n\delta(1-\delta)^n = 0$ en de functierij $\{f_n\}$ convergeert uniform op het gesloten interval $[\delta, 1]$.

**(e)** Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n \quad (x \in [0,1]).$$

(Zie Figuur) Ook nu geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f = 0$ puntsgewijs op $[0,1]$. Maar

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-n} = \infty.$$

Dus de functierij $\{f_n\}$ convergeert NIET uniform op $[0,1]$.

**(f)** Soms is het lastig om $\|f_n - f\|_\infty$ te berekenen, maar lukt het wel om een goede schatting te vinden. Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $f_n\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \frac{x^n \ln x}{x^n + 1} \quad (x \in (0,2).$$

(Zie Figuur) Voor $x \in (0,1]$ is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ en voor $x \in (1,2)$ is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \ln x$. Definieer daarom $f\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in (0,1] \\ \ln x & \text{als } x \in (1,2) \end{cases} \qquad (x \in (0,2)).$$

Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ puntsgewijs op $(0,2)$. Voor de uniforme convergentie onderzoeken we $f_n - f$. Als $x \in (0,1]$ dan is

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n \ln x}{x^n + 1}\right| \le x^n\, |\ln x| \le \max_{y\in(0,1]} |y^n \ln y| = |g_n(e^{-1/n})| = \frac{1}{ne},$$

waarbij $g_n(y) = y^n \ln y$. Als $x \in (1,2)$ dan is

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n \ln x}{x^n + 1} - \ln x\right| = \frac{\ln x}{x^n + 1} \le \frac{\ln x}{x^n} \le \max_{y\in(1,\infty)} \frac{\ln y}{y^n} = h_n(e^{1/n}) = \frac{1}{ne},$$

waarbij $h_n(y) = \frac{\ln y}{y^n}$.
Daardoor is $\|f_n - f\|_\infty \le \frac{1}{ne}$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Dus de functierij $\{f_n\}$ convergeert uniform op $(0,2)$.

**(g)** Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \cos(\frac{x}{n}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(Zie Figuur) Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 =: f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Maar $\|f_n - f\|_\infty = 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ zodat $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 2 \ne 0$. Dus de functierij $\{f_n\}$ convergeert niet uniform op $\mathbb{R}$. Zij $M > 0$ **vast** en beschouw de restrictie van $f_n$ op het interval $[-M, M]$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $x \in [-M, M]$ geldt

$$|f_n(x) - f(x)| = 1 - \cos(\frac{x}{n}) = 2\sin^2(\frac{x}{2n}) \le \frac{x^2}{2n^2} \le \frac{M^2}{2n^2}.$$

Hieruit volgt dat in $\mathbb{B}(-M, M)$ geldt $\|f_n - f\|_\infty \le \frac{M^2}{2n^2}$, zodat $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Dus de functierij $\{f_n\}$ convergeert uniform op $[-M, M]$.

Traditioneel speelt uniforme convergentie een rol bij verwisselen van limietprocessen.

**1.4.10 Stelling (I-stelling)**
*Zij $[a,b]$ een gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ en $f_1, f_2, \ldots$ een rij integreerbare functies op $[a,b]$ die uniform naar een functie $f$ convergeert. Dan is $f$ integreerbaar op $[a,b]$ en*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Definieer $F, F_1, F_2, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ door*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

*Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = F$ uniform op $[a,b]$.*

**Bewijs.** We bewijzen deze stelling alleen voor continue functies. Volgens de C-stelling is $f$ continu, dus integreerbaar. Zij $\varepsilon > 0$. Omdat $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, is er een $N > 0$ zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$ geldt $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Dan is voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$ en alle $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}|F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_a^x \Big(f_n(t) - f(t)\Big)\,\mathrm{d}t \right| \le \int_a^x \Big|f_n(t) - f(t)\Big|\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \Big|f_n(t) - f(t)\Big|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_a^b \|f_n - f\|\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dus $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = F$ uniform op $[a,b]$.
In het bijzonder is dan ook

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} F_n(b) = F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

en de stelling is bewezen. $\square$ $\square$

Volgens de I-stelling geldt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

voor een rij integreerbare uniform convergerende functies. Blijkbaar mogen dan limiet en integraal verwisseld worden.
Net als in de C-stelling is uniforme convergentie een voldoende voorwaarde, maar geen noodzakelijke voorwaarde. In Voorbeeld 1.4.10(d) is $f_n(x)=nx(1-x)^n$ voor alle $x\in[0,1]$ met $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f=0$ puntsgewijs op $[0,1]$ maar niet uniform op $[0,1]$. Niettemin geldt $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Immers $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=n\int_0^1 x(1-x)^n\,\mathrm{d}x=n\int_0^1(1-y)y^n\,\mathrm{d}y=n\int_0^1\left(y^n-y^{n+1}\right)\mathrm{d}y=$
$=\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ Conclusie: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
In Voorbeeld 1.4.10(e) is $f_n(x)=n^2x(1-x)^n$ voor alle $x\in[0,1]$ met $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f=0$ puntsgewijs op $[0,1]$ maar niet uniform op $[0,1]$. Nu is

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}=1\neq 0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Voor de differentieerbaarheid van een limietfunctie is er de volgende stelling. Merk op dat de voorwaarde van uniforme convergentie betrekking heeft op de rij van afgeleiden.

**1.4.11 Stelling (D-stelling)**
*Zij $(a,b)$ een open interval in $\mathbb{R}$ en $f_1,f_2,\ldots$ een rij functies op $(a,b)$. Veronderstel*

1. *$f_n$ is continu differentieerbaar voor alle $n\in\mathbb{N}$,*
2. *de rij $\{f_n'\}$ van* **afgeleiden** *convergeert* **uniform** *op $I$, met limietfunctie $\varphi$ en*
3. *er is een $c\in(a,b)$ zo dat $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(c)$ bestaat.*

*Dan geldt het volgende*

I *De rij* $\{f_n\}$ *is* **puntsgewijs** *convergent op* $I$*, met limietfunctie* $f$*, zeg. Bovendien is* $f$ *continu differentieerbaar en* $f'(x) = \varphi(x)$ *voor alle* $x \in I$*. Dus* $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

II *Als bovendien het interval* $(a,b)$ **begrensd** *is, dan is* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ **uniform** *op* $(a,b)$.

**Bewijs.** Omdat $\varphi$ de uniforme limiet is van continue functies, is $\varphi$ continu (C-stelling). Zij $l = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(c)$. Volgens de hoofdstelling van de integraalrekening is

$$\int_c^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(c),$$

zodat

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

voor alle $x \in (a,b)$ en $n \in \mathbb{N}$. Uit de I-stelling, toegepast op het interval $[c,x]$ of $[x,c]$ volgt dan dat voor alle $x \in (a,b)$ de limiet van het rechterlid bestaat:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t\right) = l + \int_c^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definieer daarom $f\colon I \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = l + \int_c^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \in I).$$

Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ puntsgewijs. Uit de hoofdstelling van de integraalrekening en de continuïteit van $\varphi$ volgt dat $f$ differentieerbaar is, met $f' = \varphi$. Dus $f$ is continu differentieerbaar. Dit bewijst onderdeel I.

In onderdeel II is $(a,b)$ begrensd. We bewijzen dan dat $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniform op $(a,b)$. Voor alle $x \in (a,b)$ is (ook als $x < c$)

$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - l| + \left|\int_c^x \left|f_n'(t) - \varphi(t)\right| \mathrm{d}t\right| \leq |f_n(c) - l| +$
$+ (b-a)\|f_n' - \varphi\|_\infty$, zodat $\|f_n - f\|_\infty \leq |f_n(c) - l| + (b-a)\|f_n' - \varphi\|_\infty$. Hieruit volgt eenvoudig dat $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ en $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniform op $(a,b)$. □

In de D-stelling wordt verondersteld dat de rij $\{f_n'\}$ van afgeleiden uniform convergeert. In het algemeen is het niet voldoende dat de rij $\{f_n\}$ zelf uniform convergeert.

**1.4.12 Voorbeeld**
**(a)**Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(nx) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(Zie Figuur ) Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$, dus de functierij $\{f_n\}$ convergeert uniform op $\mathbb{R}$ met limiet $f = 0$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is $f_n'(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$. In het bijzonder is $f_n'(0) = 1$. We zien dat

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1 \neq 0 = f'(0).$$

De afgeleiden convergeren niet naar de verwachte(?) waarde.
Verder is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dus de puntsgewijze limiet $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'$ is niet continu, terwijl elke $f_n'$ wel continu is. Met Stelling 1.4.11 volgt dat de rij $\{f_n'\}$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

**(b)**In tegenstelling tot de C-stelling is de I-stelling in het algemeen niet geldig op een onbegrensd interval in $\mathbb{R}$. Het volgende voorbeeld demonstreert dit.

Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{als } x \in [0, n] \\ 0 & \text{als } x \notin [0, n] \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0 =: f$ uniform op $\mathbb{R}$. Maar

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

**(c)** De uniforme convergentie van de functierij $\{f_n\}$ in Stelling 1.4.11 II, kan in het algemeen niet geconcludeerd worden voor onbegrensde intervallen. Soms blijkt het mee te vallen.
Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = (x + \tfrac{1}{n})^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Definieer $f, \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = x^2$ en $\varphi(x) = 2x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan is $f_n'(x) = 2(x + \frac{1}{n})$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $\lim\limits_{n\to\infty} f_n' = \varphi$ uniform op ieder *begrensd* deelinterval van $\mathbb{R}$. Ook is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ puntsgewijs op $\mathbb{R}$, en ook uniform op ieder begrensd deelinterval van $\mathbb{R}$. want $f_n - f$ is niet begrensd op $\mathbb{R}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stelling 1.4.11 kan niet direct worden toegepast, maar wel op elk begrensd deelinterval. Aldus komt het toch nog goed.

In de praktijk komen vaak functierijen voor, die vermomd zijn als functiereeksen.

Uit de 1e-jaars analyse is het volgende bekend Zij $\{a_k\}$ een rij in $\mathbb{R}$. Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, de $n^{\text{de}}$ **partiële som**. De rij $s_1, s_2, \ldots$, of $\{s_n\}$, heet de bij $a_1, a_2, \ldots$ behorende **reeks**. Een *reeks* is dus een *rij* van partiële sommen. Deze reeks wordt genoteerd door $\sum a_k$. Een andere notatie die ook wordt gebruikt is: "de reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$".

De reeks $\sum a_k$ heet **convergent**, of anders gezegd, de rij $a_1, a_2, \ldots$ heet **sommeerbaar**, als $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ bestaat. Als de reeks $\sum a_k$ convergent is, dan heet $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ de **som** van de rij $a_1, a_2, \ldots$, notatie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Dus $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ is een reëel getal dat door sommigen ook als notatie voor de reeks wordt gebruikt.

**1.4.13 Definitie**

Laat $\{u_k\}$ een functierij zijn op een interval $(a, b)$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ definieer $S_n\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ door

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Dan heet de functie $S_n$ de $n^{\text{de}}$ **partiële som van de functierij** $\{u_k\}$. De rij $S_1, S_2, \ldots$ wordt een **functiereeks** op $(a, b)$ genoemd, notatie $\sum u_k$, of $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

De resultaten betreffende uniforme convergentie kunnen nu vertaald worden voor functiereeksen. De volgende stelling is het meest gebruikte criterium om vast te stellen dat een functiereeks uniform convergeert.

**1.4.14 Stelling (Kenmerk van Weierstraß)** *Zij* $\sum u_k$ *een functiereeks op het interval* $(a,b)$*. Als* $\sum \|u_k\|_\infty$ *convergeert, dan is* $\sum u_k$ *uniform convergent op* $(a,b)$*. Bovendien convergeert* $\sum u_k(x)$ *absoluut voor alle* $x \in (a,b)$*.*

**Bewijs.** We laten eerst zien dat $\sum u_k(x)$ absoluut convergeert voor alle $x \in (a,b)$. Zij $x \in (a,b)$. Dan is $|u_k(x)| \leq \|u_k\|$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Met het vergelijkingscriterium volgt nu dat $\sum u_k(x)$ absoluut convergent, en dus convergent is.
Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $S_n, S\colon I \to \mathbb{R}$ door

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad , \quad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x).$$

Zij nu $n \in \mathbb{N}$. Dan is voor alle $x \in (a,b)$

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty .$$

Dus $\|S_n - S\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$. Omdat $\sum \|u_k\|_\infty$ convergeert, is

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|u_k\| \right) = 0.$$

Met de insluitstelling volgt dan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$. Dus $\sum u_k$ convergeert uniform. □

**1.4.15 Gevolg (Kenmerk van Weierstraß)**
• *Zij* $\sum u_k$ *een functiereeks op het interval* $(a,b)$ *en* $\{a_k\}$ *een rij niet-negatieve getallen. Stel* $|u_k(x)| \leq a_k$ *voor alle* $k \in \mathbb{N}$ *en* $x \in (a,b)$ *en stel verder dat* $\sum a_k$ *convergeert. Dan is* $\sum u_k$ *uniform convergent op* $(a,b)$*. Bovendien convergeert* $\sum u_k(x)$ *absoluut voor alle* $x \in (a,b)$*.*

• *Als alle* $u_k\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ *tevens continu zijn, dan is de somfunctie* $x \mapsto u(x) = \sum u_k(x)$*, eveneens continu.*

**Bewijs.**
• Omdat $|u_k(x)| \leq a_k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ en $x \in (a,b)$, is $\|u_k\|_\infty \leq a_k$. Uit het vergelijkingscriterium volgt dan dat $\sum \|u_k\|_\infty$ convergeert. Gebruik nu het voorafgaande kenmerk van Weierstraß.
• Pas de C-stelling 1.4.5 toe voor de rij van partiële sommen. □

**1.4.16 Voorbeeld**
**(a)** Voor $k \in \mathbb{N}$ definieer $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$u_k(x) = \frac{x^3}{1 + k^2 x^4} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dan is $u_k'(x) = \frac{3x^2 - k^2 x^6}{(1+k^2x^4)^2}$ en $u_k$ heeft een maximum te $x = 3^{1/4}k^{-1/2}$ en een minimum te $x = -3^{1/4}k^{-1/2}$. Dus $\|u_k\|_\infty = u_k(3^{1/4}k^{-1/2}) = \frac{3^{3/4}}{4k^{3/2}}$. Omdat $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ convergent is, is met het kenmerk van Weierstraß de reeks $\sum u_k$ uniform convergent op $\mathbb{R}$

**(b)** Voor $k \in \mathbb{N}$ definieer $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$u_k(x) = (-1)^{k-1} \frac{1}{k + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $\{u_k(x)\}$ een alternerende rij, $\lim\limits_{k\to\infty} |u_k(x)| = 0$ en de rij $\{|u_k(x)|\}$ is dalend. Met het kenmerk van Leibniz volgt dan dat $\sum u_k(x)$ convergeert. Dus $\sum u_k$ is puntsgewijs convergent. Zij $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ en $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, zoals gewoonlijk. Het kenmerk van Leibniz geeft bovendien de volgende schatting:

$$|S_n(x) - S(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$. Dus voor alle $n \in \mathbb{N}$ is

$$|S_n(x) - S(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n + 1 + x^2} \leq \frac{1}{n+1}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ zodat $\|S_n - S\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$. Hieruit volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$ en de reeks $\sum u_k$ convergeert uniform op $\mathbb{R}$.

# Hoofdstuk 2 Approximatie via Convolutie

## 2.1 Het convolutieproduct als lineaire afbeelding

Uitgaande van een tweetal gegeven functies $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kunnen we, onder bepaalde voorwaarden, trachten een nieuwe functie te construeren volgens het recept $x \mapsto (F \star f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$. Als de integraal convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan heet de nieuw gevonden functie $F \star f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ het *convolutie product* van $F$ en $f$.

### 2.1.1 Definitie

Bij een gegeven $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ definieren we de afbeelding

$$\mathcal{C}_F\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R}), \qquad f \mapsto \mathcal{C}_F f = F \star f,$$

door

$$(\mathcal{C}_F f)(x) = (F \star f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

### 2.1.2 Stelling

*(i) De afbeelding $\mathcal{C}_F\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ uit Definitie 2.1.1 is goed gedefiniëerd.*

*(ii) De afbeelding $\mathcal{C}_F\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ is een lineaire afbeelding.*

*(iii)* $\|\mathcal{C}_F f\| = \|F \star f\|_2 \leq \|F\|_1 \, \|f\|_2$.

**Bewijs.**
(i) We laten zien dat voor $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ geldt dat $\|\mathcal{C}_F f\|_2 < \infty$. Inderdaad $\big(\|\mathcal{C}_F f\|_2\big)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\big|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x-y)|\,|f(y)|\,\mathrm{d}y\big)^2 \,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x-y)|^{\frac{1}{2}}(|F(x-y)|^{\frac{1}{2}}|f(y)|)\,\mathrm{d}y\big)^2 \,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x-y)|\,\mathrm{d}y\big\} \cdot \big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x-y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}y\big\}\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(y)|\,\mathrm{d}y\big\} \cdot \big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x-y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}y\big\}\,\mathrm{d}x = \|F\|_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x-y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}y\big\}\,\mathrm{d}x = \|F\|_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$

$\|F\|_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \big(\|F\|_1\big)^2 \big(\|f\|_2\big)^2 < \infty.$

(ii) Op grond van eigenschap 0.5.2b geldt voor willekeurige $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, dat $\mathcal{C}_F(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{C}_F f + \beta\mathcal{C}_F g$.

(iii) Ligt besloten in bewijs van (i). $\square$

We willen het voorgaande niet alleen doen op de hele $\mathbb{R}$, maar ook op begrensde intervallen $(-L, L)$. We moeten daartoe de functie $F$ ook buiten het interval $(-L, L)$ waarden geven, immers als de variabelen $x$ en $y$ beide, los van elkaar, van $-L$ naar $+L$ mogen rennen, dan beweegt $x - y$ zich tussen $-2L$ en $+2L$. De voortzetting van $F$ buiten $(-L, L)$ gaat op 'periodieke wijze', dat wil zeggen door 'herhaling'.

**2.1.3 Stelling**

*Gegeven:* $F \in \mathbb{L}_1(-L, L)$. *We definiëren* $\tilde{F} \in \mathbb{L}_1(-2L, 2L)$ *door*

$$\tilde{F}(\xi) = \begin{cases} F(\xi + 2L), & \textit{als} \quad -2L < \xi < -L, \\ F(\xi), & \textit{als} \quad -L \le \xi \le L, \\ F(\xi - 2L), & \textit{als} \quad L < \xi < 2L. \end{cases}$$

*Er geldt*

$$\forall a \in (-2L, 0] : \quad \int\limits_{a}^{a+2L} \tilde{F}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{-L}^{L} \tilde{F}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{-L}^{L} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

**Bewijs.**

Voor $a < -L$, dan is $a + 2L < L$, schrijven we $\int\limits_{a}^{a+2L} \tilde{F}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{a}^{-L} \tilde{F}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_{-L}^{a+2L} \tilde{F}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{a}^{-L} F(\xi+2L)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_{-L}^{a+2L} \tilde{F}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{a+2L}^{L} F(\eta)\,\mathrm{d}\eta + \int\limits_{-L}^{a+2L} \tilde{F}(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = \int\limits_{-L}^{L} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Voor $-L < a < 0$ gaat het analoog. $\square$

**2.1.4 Definitie**

Bij een gegeven $F \in \mathbb{L}_1(-L, L)$ definieren we de afbeelding

$$\mathcal{C}_F \colon \mathbb{L}_2(-L, L) \to \mathbb{L}_2(-L, L), \qquad f \mapsto \mathcal{C}_F f = F \star f,$$

door

$$(\mathcal{C}_F)(x) = (F \star f)(x) = \int\limits_{-L}^{L} \tilde{F}(x - y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

**2.1.5 Stelling**

*(i)* *De afbeelding* $\mathcal{C}_F \colon \mathbb{L}_2(-L,L) \to \mathbb{L}_2(-L,L)$ *uit Definitie 2.1.4 is goed gedefiniëerd.*

*(ii)* *De afbeelding* $\mathcal{C}_F \colon \mathbb{L}_2(-L,L) \to \mathbb{L}_2(-L,L)$ *is een lineaire afbeelding.*

*(iii)* $\|\mathcal{C}_F\|_2 = \|F \star f\|_2 \le \|F\|_1 \, \|f\|_2$.

**Bewijs.** Lijkt sterk op het bewijs van Stelling 2.1.2. Vervang in het bewijs aldaar het symbool $\infty$ in de integratiegrenzen door het getal $L$. Ook de eigenschap van $\tilde{F}$ in Definitie 2.1.4 moet natuurlijk gebruikt worden. □

Met een kleine beperking op $F$ blijkt $\mathcal{C}_F f = F \star f$ een continue functie te zijn.

**2.1.6 Stelling**
*Voor* $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, *respectievelijk* $F \in \mathbb{L}_1(-L,L) \cap \mathbb{L}_2(-L,L) = \mathbb{L}_2(-L,L)$, *geldt dat de functie*

$$x \mapsto (\mathcal{C}_F f)(x) = (F \star f)(x) = \int\limits_{-K}^{K} \tilde{F}(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y,$$

*met* $K = \infty$, *respectievelijk* $K = L$, *continu is.*

**Bewijs.**
• In het speciale geval dat $f$ een trapfunctie is volgt de bewering uit de laatste der Eigenschappen 0.5.5. Immers, met $T(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{(c_{j-1},c_j]}(x)$, volgt $(\mathcal{C}_F T)(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \int\limits_{c_{j-1}}^{c_j} F(x-y)\, \mathrm{d}y = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \int\limits_{x-c_j}^{x-c_{j-1}} F(t)\, \mathrm{d}t$.

• Voor $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ en $T \in \mathbb{T}(\mathbb{R})$ en $c \in \mathbb{R}$ geldt $(\mathcal{C}_F f)(x) - (\mathcal{C}_F f)(c) =$
$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{F(x-y) - F(c-y)\}(f(y) - T(y))\, \mathrm{d}y + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{F(x-y) - F(c-y)\} T(y)\, \mathrm{d}y$.
Met Cauchy-Schwarz en de driehoeksongelijkheid vinden we, ongeacht de keuze van $x$ en $c$, dat $|(\mathcal{C}_F f)(x) - (\mathcal{C}_F f)(c)| \le$
$2\|F\|_2 \|f - T\|_2 + |\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{F(x-y) - F(c-y)\} T(y)\, \mathrm{d}y|$. De vraag is of we dit kleiner dan een willekeurige, voorgegeven $\varepsilon > 0$ kunnen krijgen door $x$ voldoende dicht bij $c$ te kiezen. Op grond van Stelling 1.3.10 kunnen we $T$ zodanig kiezen dat $\|f - T\|_2 < \frac{\varepsilon}{4\|F\|_2}$. Vervolgens kiezen we (eerste deel van

dit bewijs) $x$ zo dicht bij $c$, dat de tweede term $< \frac{1}{2}\varepsilon$ is. We vinden dan, alles bijeengenomen, $|(\mathcal{C}_F f)(x) - (\mathcal{C}_F f)(c)| < \varepsilon$.

Voor een begrensd interval $[-L, L]$ gaat het net zo. $\square$

### 2.1.7 Voorbeelden

We maken voor de functie $F$ in Stellingen 2.1.5 en 2.1.6 diverse keuzen die ons in het vervolg goed van pas zullen komen.

**(a)** De Pulsfunctie.
Kies een willekeurig doch vast getal $t > 0$. Neem voor $F$ de functie $x \mapsto P_t(x) = \frac{1}{t}\chi_{[-\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t]}(x)$. Dan $\|P_t\|_1 = 1$. Laat $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, dan is

$$(P_t \star f)(x) = \frac{1}{t} \int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Uit Eigenschappen 0.5.5 volgt ogenblikkelijk dat dit een continue functie van $x$ is. Het is een middeling van $f$ over het interval $[x - \frac{1}{2}t, x + \frac{1}{2}t]$. Verderop zullen we zien dat, voor kleiner wordende $t$ de functie $(P_t \star f)(x)$ een steeds beter wordende benadering van $f$ in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ met continue functies in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ is.
Voor $f \in \mathbb{L}_2(-L, L)$ vinden we

$$(P_t \star f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{t}\int_{-L}^{x+\frac{1}{2}t} f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{t}\int_{2L+x-\frac{1}{2}t}^{L} f(y)\,\mathrm{d}y, & \text{als} \quad -L < x \le -L + \frac{1}{2}t, \\ \frac{1}{t}\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} f(y)\,\mathrm{d}y, & \text{als} \quad -L + \frac{1}{2}t \le\le L - \frac{1}{2}t, \\ \frac{1}{t}\int_{x-\frac{1}{2}t}^{L} f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{t}\int_{-L}^{-2L+x+\frac{1}{2}t} f(y)\,\mathrm{d}y, & \text{als} \quad L - \frac{1}{2}t \le x < L. \end{cases}$$

Merk op dat $(P_t \star f)(L) = (P_t \star f)(-L)$, voor alle waarden $t > 0$.

**(b)** De Tentfunctie.
Kies een vast getal $t > 0$. Neem voor $F$ de functie

$$x \mapsto T_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{als} \quad x \le -t \\ \frac{1}{t}(1 + \frac{1}{t}x), & \text{als} \quad -t \le x \le 0, \\ \frac{1}{t}(1 - \frac{1}{t}x), & \text{als} \quad 0 \le x \le t, \\ 0, & \text{als} \quad x \ge t. \end{cases}$$

De grafiek van $T_t$ stelt een driehoekje met oppervlakte 1 voor.
Laat $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, dan is

$$(T_t \star f)(x) = \frac{1}{t}\int\limits_{x-t}^{x+t} f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{t^2}\int\limits_{x-t}^{x}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{t^2}\int\limits_{x}^{x+t}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Met het oog op de gangbare kunstjes verwacht je dat de afgeleide naar $x$ hiervan gegeven wordt door

$$(T_t \star f)'(x) = (T_t' \star f)(x) = -\frac{1}{t^2}\int\limits_{x-t}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{t^2}\int\limits_{x}^{x+t} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Eigenschappen 0.5.5 laten ons weten dat laatstgenoemde integraal een continue functie van $x$ voorstelt. Vervolgens kun je rechtstreeks nagaan dat

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{(T_t \star f)(x+h) - (T_t \star f)(x)}{h} - (T_t' \star f)(x)\right\} = 0.$$

De conclusie is dat, hoe discontinu $f$ ook moge zijn, $T_t \star f$ met $t > 0$ steeds een continu differentiëerbare functie in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ met afgeleide $T_t' \star f$ in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ is. Verderop zullen we zien dat ook in dit geval, voor kleiner wordende $t$, de functies $(T_t \star f)(x)$ een steeds beter wordende benadering van $f$ in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, met continu differentiëerbare functies in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, zijn.
Analoog aan (a) kan dit overgedaan worden in $\mathbb{L}_2(-L, L)$. Dat is alleen boekhoudkundig wat complexer. In dat geval geldt $(T_t \star f)(L) = (T_t \star f)(-L)$ en ook $(T_t \star f)'(L) = (T_t \star f)'(-L)$.

**(c)** De Gaussfunctie.
Kies een vast getal $t > 0$. Neem voor $F$ de functie

$$x \mapsto G_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t}).$$

Dan $\|G_t\|_1 = 1$ ook hier. Laat $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, dan is

$$(G_t \star f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Met Stelling 2.1.6 vinden we dat de verkregen functie $x \mapsto (G_t \star f)(x)$ continu in $x$ is. In feite is de verkregen functie superglad. Wat we hier niet zullen bewijzen, maar wel aannemelijk maken, is dat $G_t \star f$ oneindig vaak continu differentiëerbaar is. De $n$-e afgeleide wordt gegeven door

$$(G_t \star f)^{(n)}(x) = (G_t^{(n)} \star f)(x).$$

Dit zie je door 'botweg' achter het integraalteken naar $x$ te differentiëren. Dat dit 'mag' zullen we hier niet bewijzen. Wel zie je dat het zinvol is om $G_t^{(n)} \star f$ op te schrijven, omdat

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ x \mapsto \frac{d^n}{d\,x^n} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}),$$

behoort tot zowel $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ als $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Nadere analyse van de uitdrukking voor $G_t \star f$ leert dat deze functie als een convergente Taylorreeks met convergentiestraal $R = \infty$ kan worden geschreven. Slotopmerking: Als $f$ een temperatuursverdeling op een oneindig lange staaf, op tijdstip $t = 0$, voorstelt, dan wordt de temperatuursverdeling op tijdstip $t$ gegeven door $G_t \star f$.

**(d)** De Potentiaalfunctie.
Kies weer een vast getal $t > 0$. Neem voor $F$ de functie

$$x \mapsto H_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}.$$

Dan $\|H_t\|_1 = 1$ voor elke keuze van $t > 0$. Laat $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, dan is

$$(H_t \star f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + (x-y)^2} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Met Stelling 2.1.6 vinden we dat de verkregen functie $x \mapsto (H_t \star f)(x)$ continu in $x$ is. In feite is ook in dit geval de verkregen functie superglad. De opmerkingen dienaangaande onder (c) zijn ook hier van toepassing. Slotopmerking: Als $f$ een electrische potentaal voorstelt langs de $x$-as in het $xy$-vlak, dan wordt de potentiaal langs de rechte $y = t$ gegeven door $(H_t \star f)(x)$.

**(e)** De Fejérkern.
Kies een willekeurig, doch vast, natuurlijk getal $N \in \mathbb{N}$. Neem voor $F \in \mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$ de functie

$$\begin{aligned} x \mapsto K_N(x) = \tfrac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{j=0}^{N} \Big\{ \sum_{n=-j}^{j} e^{inx} \Big\} \quad &= \quad \tfrac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \quad \tfrac{1}{2\pi(N+1)} \frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x}. \end{aligned}$$

Het derde =teken in deze uitdrukking volgt met een elementaire gonioformule. Het tweede =teken vergt wat manipulaties met meetkundige reeksen.....

De goniometrische uitdrukkingen zijn niet gedefiniëerd in $x = 0$, echter de $\lim\limits_{x\to 0}$ bestaat wel en is gelijk aan $\frac{N+1}{2\pi}$. Merk op dat $K_N(x) \geq 0$ voor alle $N$ en alle $x \in \mathbb{R}$. Er geldt $\|K_N\|_1 = 1$ voor elke keuze van $N \in \mathbb{N}$. Laat $f \in \mathbb{L}_2(-\pi,\pi)$, dan is

$$(K_N \star f)(x) = \frac{1}{N+1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)(x-y)}{2}}{\sin^2 \frac{(x-y)}{2}} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Met Stelling 2.1.6 vinden we dat de verkregen functie $x \mapsto (K_N \star f)(x)$ continu in $x$ is. Veel belangrijker voor wat er allemaal nog volgt, is dat $K_N \star f$ een *goniometrisch polynoom* is, dat wil zeggen, geschreven kan worden als

$$(K_N \star f)(x) = \sum_{m=-N}^{m=N} c_m e^{imx} = c_0 + \sum_{m=1}^{N} (c_m + c_{-m}) \cos mx + \sum_{m=1}^{N} i(c_m - c_{-m}) \sin nx,$$

met

$$c_m = \frac{(N+1-|m|)}{(N+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\,\mathrm{d}y.$$

Bij de theorie van de Fourierreeksen zullen we 'willekeurige functies' uiterst efficiënt gaan benaderen met trigonometrische polynomen.

**(f)** De Verzachter.
Beschouw de functie $V : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, gedefiniëerd door

$$V(x) = \begin{cases} \kappa \exp(-\frac{1}{1-x^2}), & \text{als } \; -1 < x < 1, \\ 0, & \text{als } \; |x| \geq 1. \end{cases}$$

Het getal $\kappa > 0$ wordt gedefinieerd door $\kappa = \Big( \int\limits_{-1}^{1} \exp(-\frac{1}{1-x^2})\,\mathrm{d}x \Big)^{-1}$. De functie $V$ is oneindig vaak continu differentiëerbaar. In de punten $x \pm 1$ zijn zelfs alle afgeleiden van $V$ gelijk aan 0.
Kies nu een willekeurig doch vast getal $t > 0$. Neem voor $F$ de functie $x \mapsto V_t(x) = \frac{1}{t} V(\frac{x}{t})$. Dan $\|V_t\|_1 = 1$. Laat $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, dan is

$$(V_t \star f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V_t(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{t} \int\limits_{x-t}^{x+t} V(\frac{x-y}{t}) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dit is, voor elke $t > 0$, een willekeurig vaak differentiëerbare functie van $x$. Verderop zullen we zien dat, voor kleiner wordende $t$ de functie $x \mapsto (V_t \star f)(x)$ een steeds beter wordende benadering van $f$ in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, met zeer gladde functies in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, is. Merk op: Als $f = 0$ buiten een interval $[a,b]$, dan is $V_t \star f = 0$ buiten het interval $[a-2t, a+2t]$.

## 2.2 Benadering via convolutie

We willen functies in $\mathbb{L}_2$ willekeurig dicht gaan benaderen met gladde functies door het nemen van een convolutie met een geschikte $F$. Ter voorbereiding berekenen/schatten we een tweetal integralen, elk over een 2-dimensionaal gebied.

**2.2.1 Lemma**

*Kies getallen $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, met $-\infty < A < B < \infty$. Definiëer het gebied $G_{AB}$ door*

$$\begin{aligned} G_{AB} \quad = \quad & \big\{A < x < B,\ y < A\big\} \bigcup \big\{A < x < B,\ y > B\big\} \bigcup \\ & \bigcup \big\{A < y < B,\ x < A\big\} \bigcup \big\{A < y < B,\ x > B\big\}. \end{aligned}$$

*Laat $K \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ een even functie zijn, dan geldt*

$$\iint\limits_{G_{AB}} K(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int\limits_0^{B-A} \xi K(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 4(B-A)\int\limits_{B-A}^{\infty} K(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

**Bewijs.** Maak een figuur van het gebied $G_{AB}$ door in het $xy$-vlak de rechten $x = A,\ x = B,\ y = A,\ y = B$ te tekenen en de coordinaten van de snijpunten erbij te vermelden. Langs de rechten $y - x = \xi$, met $-\infty < \xi < \infty$, is de functie $K$ constant met waarde $K(\xi)$. Merk op dat voor $\xi = \pm(B-A)$ de rechte door de snijpunten $(A, B)$, dan wel $(B, A)$, gaat. We bepalen de totale lengte $l(\xi)$van de lijnstukken op $y - x = \xi$, voorzover die binnen het gebied $G_{AB}$ liggen. We vinden

$$l(\xi) = \begin{cases} 2\xi\sqrt{2}, & \text{als} \quad 0 \le |\xi| \le B-A, \\ 2(B-A)\sqrt{2}, & \text{als} \quad |\xi| \ge B-A. \end{cases}$$

Merk voorts op dat de afstand tussen de rechten $y-x = \xi$ en $y-x = \xi+\Delta\xi$, gelijk is aan $\frac{\Delta\xi}{\sqrt{2}}$. Met ons timmermansoog zien we dat de bijdrage tot de integraal, geleverd door een 'smal' strookje gelegen tussen $y - x = \xi$ en $y - x = \xi + \Delta\xi$ 'gelijk' is aan $K(\xi)l(\xi)\frac{\Delta\xi}{\sqrt{2}}$. De te berekenen integraal is dus gelijk aan $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\frac{l(\xi)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\xi = 2\int\limits_0^{\infty} K(\xi)\frac{l(\xi)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\xi$. Dit laatste omdat $K(\xi) = K(-\xi)$ verondersteld is. Invullen van $l(\xi)$ leidt tot het gewenste resultaat. □

**2.2.2 Lemma**

*Kies getallen $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $L > 0$, met $-L < A < B < L$. Definiëer het gebied $G_{L;AB}$ door*

$$\begin{aligned} G_{L;AB} \quad = \quad & \big\{A < x < B,\ -L < y < A\big\} \bigcup \big\{A < x < B,\ B < y < L\big\} \bigcup \\ & \bigcup \big\{A < y < B,\ -L < x < A\big\} \bigcup \big\{A < y < B,\ B < x < L\big\}. \end{aligned}$$

*Laat* $K \in \mathbb{L}_1(-2L, 2L)$ *een even en niet-negatieve functie zijn, dan geldt*

$$\iint\limits_{G_{L;AB}} K(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq 4\int\limits_0^{B-A} \xi K(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 4(B-A)\int\limits_{B-A}^{C} K(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

*Hierin is* $C = \max\{L-A, L+B\}$.

**Bewijs.** Een bovengrens voor de gezochte integraal wordt natuurlijk gegeven door de integraal uit Lemma 2.2.1 omdat $G_{L;AB}$ een deelgebied is van $G_{AB}$. Het is niettemin nodig om van deze 'overschatting' nog wat af te knabbelen. Constateer met een tekening dat $G_{L;AB}$ zich bevindt ten Zuid-Oosten van de punten $(-L, B)$ en $(A, L)$ en ten Noord-Westen van de punten $(L, A)$ en $(B, -L)$. De $\xi$-waarde van de rechte $y - x = \xi$ door deze punten zijn respectievelijk $L+B$, $L-A$, $A-L$ en $-L-B$. Het gebied $G_{L;AB}$ wordt blijkbaar ingesloten door de rechten $y - x = \xi$, met $\xi = \pm C = \max\{L - A, L + B\}$. De bovengrens $\infty$ kan blijkbaar verlaagd worden tot $C$. Het resultaat is dan nog steeds een bovengrens voor de gezochte integraal. $\square$

In de volgende definities voeren we een rij functies ten tonele die zich, gaandeweg, steeds meer concentreren op een willekeurig klein te nemen intervalletje rondom 0. De definities lijken sprekend op elkaar. Voor later comfort geven we ze apart voor het begrensde interval $(-L, L)$ en voor het interval $\mathbb{R}$.

**2.2.3 Definitie**

Beschouw een rij functies $\{K_n\}$, met $n \in \mathbb{N}$, in $\mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Zo'n rij van functies heet een *Dirac rij* als ze de volgende eigenschappen heeft:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ K_n(x) = K(-x)$,
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ K_n(x) \geq 0$,
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}:\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$,
(iv) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ \int\limits_{\delta}^{\infty} K_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\varepsilon$.

**2.2.4 Definitie**

Laat $L > 0$. Beschouw een rij functies $\{K_n\}$, met $n \in \mathbb{N}$, in $\mathbb{L}_2(-L, L)$. Zo'n rij van functies heet een *Dirac rij* als ze de volgende eigenschappen heeft:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ K_n(x) = K(-x)$,
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ K_n(x) \geq 0$,
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}:\ \int\limits_{-L}^{L} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$,
(iv) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ \int\limits_{\delta}^{L} K_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\varepsilon$.

### 2.2.5 Voorbeelden

De nummering van de voorbeelden is conform die in Voorbeelden 2.1.7. De verificatie van de eigenschappen (i)-(iii) is zo flauw dat we er geen aandacht aan besteden.

**(a)** De Pulsfunctie.
De rij pulsfuncties $\{P_{1/n}\}$ is een Dirac rij in zowel $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ als $\mathbb{L}_2(-L, L)$. Er geldt zelfs $\int\limits_{\delta}^{\infty} P_{1/n}(x)\,\mathrm{d}x = 0$, als $n > \frac{1}{2\delta}$.

**(b)** De Tentfunctie.
De rij tentfuncties $\{T_{1/n}\}$ is een Dirac rij in zowel $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ als $\mathbb{L}_2(-L, L)$. Er geldt zelfs $\int\limits_{\delta}^{\infty} P_{1/n}(x)\,\mathrm{d}x = 0$, als $n > \frac{1}{\delta}$.

**(c)** De Gaussfunctie.
De rij Gaussfuncties $\{G_{1/n}\}$ is een Dirac rij in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Immers: $\int\limits_{\delta}^{\infty} G_{1/n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{\delta}^{\infty} \exp(-\frac{nx^2}{4})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{n\delta}{2}}^{\infty} \exp(-\xi^2)\,\mathrm{d}\xi$.
Dit kun je net zo klein krijgen als je wil, dus ook kleiner dan $\frac{1}{4}\varepsilon$, door $n$ groot genoeg te kiezen.

**(d)** De Potentiaalfunctie.
De rij Potentiaalfuncties $\{H_{1/n}\}$ is een Dirac rij in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Immers: $\int\limits_{\delta}^{\infty} H_{1/n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{n\delta}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi =$
$= \frac{1}{\pi}\{\frac{\pi}{2} - \arctan(n\delta)\}$.
Dit kun je net zo klein krijgen als je wil, dus ook kleiner dan $\frac{1}{4}\varepsilon$, door $n$ groot genoeg te kiezen.

**(e)** De Fejérkern.
De rij Fejérkern $\{K_n\}$ is een Dirac rij in $\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$.
Immers

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\delta}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int\limits_{\delta}^{\pi} \sin^2 \frac{(n+1)x}{2}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}.
\end{aligned}$$

Dit is kleiner dan $\frac{1}{4}\varepsilon$ als $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon \sin^2 \frac{\delta}{2}}$.

**(f)** De Verzachter.

De rij verzachters $\{V_{1/n}\}$ is een Dirac rij in zowel $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ als $\mathbb{L}_2(-L, L)$. Er geldt zelfs $\int\limits_{\delta}^{\infty} V_{1/n}(x)\,\mathrm{d}x = 0$, als $n > \frac{1}{\delta}$.

In de volgende stellingen tonen we aan dat we een willekeurige functie in $\mathbb{L}_2$ kunnen benaderen door de convolutie te nemen met $K_n$.

**2.2.6 Stelling**
*Laat de functierij $\{K_n\} \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ een Dirac rij zijn. Dan geldt*

$$\lim_{N\to\infty} \|(K_N \star f) - f\|_2 = 0.$$

*Anders geformuleerd: $K_N \star f \to f$ in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ als $N \to \infty$.*

**Bewijs.**
• We laten eerst zien dat de bewering geldt als we $f = \chi_{(A,B]}$ nemen, de karakteristieke functie op het interval $(A, B]$ dus. Bereken en schat

$$\bigl(\|(K_n \star \chi_{(A,B]}) - \chi_{(A,B]}\|_2\bigr)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x-y)\chi_{(A,B]}(y)\,\mathrm{d}y - \chi_{(A,B]}(x)|^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x-y)\bigl[\chi_{(A,B]}(y) - \chi_{(A,B]}(x)\bigr]\,\mathrm{d}y|^2\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x-y)\,\mathrm{d}y\} \cdot \{\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x-y)\bigl|\chi_{(A,B]}(y) - \chi_{(A,B]}(x)\bigr|^2\,\mathrm{d}y\}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x-y)\bigl|\chi_{(A,B]}(y) - \chi_{(A,B]}(x)\bigr|^2\,\mathrm{d}y\}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\int\limits_{0}^{B-A} \xi K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 4(B-A)\int\limits_{B-A}^{\infty} K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Het tweede en ook het voorlaatste =teken geldt omdat $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x-y)\,\mathrm{d}y = 1$, ongeacht de waarde van $x$. De ongelijkheid volgt door Cauchy-Schwarz toe te passen op de productfunctie

$$y \mapsto \bigl\{\sqrt{K_n(x-y)}\bigr\} \cdot \bigl\{\sqrt{K_n(x-y)}\bigl[\chi_{(A,B]}(y) - \chi_{(A,B]}(x)\bigr]\bigr\}.$$

Het laatste =teken volgt met Lemma 2.2.1.
Voor *elke* $\delta$ met $0 < \delta \leq B - A$ geldt, mede omdat $K_n(x) \geq 0$,

$$4\int\limits_{0}^{B-A} \xi K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 4(B-A)\int\limits_{B-A}^{\infty} K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$\leq 4\delta\int\limits_{0}^{\delta} K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 4(B-A)\int\limits_{\delta}^{B-A)} K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 4(B-A)\int\limits_{B-A}^{\infty} K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$= 4\delta \int\limits_0^\delta K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 4(B-A)\int\limits_\delta^\infty K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq 4\delta \int\limits_0^\infty K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 4(B-A)\int\limits_\delta^\infty K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$
$= 2\delta + 4(B-A)\int\limits_\delta^\infty K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$
Laat nu een willekeurige $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. We kiezen nu eerst $\delta = \frac{1}{4}\varepsilon^2$. Vervolgens kiezen we $n$ zo groot dat $\int\limits_\delta^\infty K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi < \frac{1}{8(B-A)}\varepsilon^2$. (Met (iv) van Definitie 2.2.3.) Dan volgt $\|(K_n \star \chi_{(A,B]}) - \chi_{(A,B]}\|_2 < \varepsilon$.

• Vervolgens laten we zien dat de bewering geldt als we voor $f$ een willekeurige trapfunctie $T(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{(c_{j-1},c_j]}(x)$ nemen. Met de driehoeksongelijkheid schatten we $\|(K_n \star T) - T\|_2 \leq \sum\limits_{j=1}^{N} |\alpha_j| \|(K_n \star \chi_{(c_{j-1},c_j]}) - \chi_{(c_{j-1},c_j]}\|_2$. Hier staan een eindig aantal ($N$) termen. Elk van deze termen kun je, volgens het voorafgaande deel van het bewijs, net zo klein krijgen als je wil, door $n$ voldoende groot te kiezen.
• Tenslotte laten we zien dat de bewering voor algemene $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ geldt omdat we zo'n algemene $f$ willekeurig dicht kunnen benaderen met een trapfunctie. Bij gegeven $f$ en elke trapfunctie $T$ hebben we vanwege de driehoeksongelijkheid en (iii) van Stelling 2.1.2,
$\|(K_n \star f) - f\|_2 \leq \|(K_n \star (f-T)) - (f-T)\|_2 + \|(K_n \star T) - T\|_2 \leq$
$\leq \|(K_n \star (f-T))\|_2 + \|f-T\|_2 + \|(K_n \star T) - T\|_2 \leq$
$\leq 2\|f-T\|_2 + \|(K_n \star T) - T\|_2$. Laat een willekeurige $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. Volgens Stelling 1.3.10b is er een trapfunctie voorhanden zodat $\|f - T\|_2 < \frac{1}{3}\varepsilon$. Vervolgens kunnen we volgens het voorafgaande deel van het bewijs, door $n \in \mathbb{N}$ voldoend groot te kiezen, bewerkstelligen dat $\|(K_n \star T) - T\|_2 < \frac{1}{3}\varepsilon$. Alles bijeen genomen leidt dit tot $\|(K_n \star f) - f\|_2 < \varepsilon$. □

We herformuleren nu de voorafgaande stelling voor $\mathbb{L}_2(-L, L)$.

**2.2.7 Stelling**
*Laat de functierij $\{K_n\} \subset \mathbb{L}_2(-L, L)$ een Dirac rij zijn. Dan geldt*

$$\lim_{N\to\infty} \|(K_N \star f) - f\|_2 = 0.$$

*Anders geformuleerd: $K_N \star f \to f$ in $\mathbb{L}_2(-L, L)$ als $N \to \infty$.*

**Bewijs.**
• We laten eerst zien dat de bewering geldt als we $f = \chi_{(A,B]}$ nemen, de karakteristieke functie op het interval $(A, B] \subset (-L, L)$ dus. Bereken en

schat

$$\big(\|(K_n\star\chi_{(A,B]})-\chi_{(A,B]}\|_2\big)^2=\int\limits_{-L}^{L}|\int\limits_{-L}^{L}\tilde{K}_n(x-y)\chi_{(A,B]}(y)\,\mathrm{d}y-\chi_{(A,B]}(x)|^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\int\limits_{-L}^{L}|\int\limits_{-L}^{L}\tilde{K}_n(x-y)\big[\chi_{(A,B]}(y)-\chi_{(A,B]}(x)\big]\,\mathrm{d}y|^2\,\mathrm{d}x$$
$$\leq\int\limits_{-L}^{L}\Big\{\int\limits_{-L}^{L}\tilde{K}_n(x-y)\,\mathrm{d}y\Big\}\cdot\Big\{\int\limits_{-L}^{L}\tilde{K}_n(x-y)\big|\chi_{(A,B]}(y)-\chi_{(A,B]}(x)\big|^2\,\mathrm{d}y\Big\}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int\limits_{-L}^{L}\Big\{\int\limits_{-L}^{L}\tilde{K}_n(x-y)\big|\chi_{(A,B]}(y)-\chi_{(A,B]}(x)\big|^2\,\mathrm{d}y\Big\}\,\mathrm{d}x$$
$$\leq 4\int\limits_{0}^{B-A}\xi\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi+4(B-A)\int\limits_{B-A}^{C}\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Het tweede en ook het voorlaatste =teken geldt omdat $\int\limits_{-L}^{L}K_n(x-y)\,\mathrm{d}y=1$, ongeacht de waarde van $x$. De ongelijkheid volgt door Cauchy-Schwarz toe te passen op de productfunctie

$$y\mapsto\Big\{\sqrt{K_n(x-y)}\Big\}\cdot\Big\{\sqrt{K_n(x-y)}\big[\chi_{(A,B]}(y)-\chi_{(A,B]}(x)\big]\Big\}.$$

Het laatste $\leq$teken volgt met Lemma 2.2.2.
Voor *elke* $\delta>0$ die zo klein is, dat aan de drie voorwaarden $0<\delta<L$, $0<\delta\leq B-A$ en $0<\delta<2L-C$ voldaan is, geldt, mede omdat $K_n(x)\geq 0$,

$$4\int\limits_{0}^{B-A}\xi\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi+4(B-A)\int\limits_{B-A}^{C}\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$\leq 4\delta\int\limits_{0}^{\delta}\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi+4(B-A)\int\limits_{\delta}^{B-A}\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi+4(B-A)\int\limits_{B-A}^{2L-\delta}\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$\leq 4\delta\int\limits_{0}^{L}\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi+4(B-A)\int\limits_{\delta}^{2L-\delta}\tilde{K}_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$=2\delta+8(B-A)\int\limits_{\delta}^{L}K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Laat nu een willekeurige $\varepsilon>0$ gegeven zijn. We kiezen nu eerst $\delta=\frac{1}{4}\varepsilon^2$. Vervolgens kiezen we $n$ zo groot dat $\int\limits_{\delta}^{\infty}K_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi<\frac{1}{16(B-A)}\varepsilon^2$. (Met (iv) van Definitie 2.2.4.) Dan volgt $\|(K_n\star\chi_{(A,B]})-\chi_{(A,B]}\|_2<\varepsilon$.
•• De rest van het bewijs is hetzelfde als bij Stelling 2.2.6. Je moet alleen $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ vervangen door $\mathbb{L}_2(-L,L)$. Ook moet in plaats van naar (2.1.2) nu naar (2.1.5) verwezen worden. □

De slotapotheose van dit hoofdstuk komt er nu aan. In de volgende stelling laten we zien dat het in $\mathbb{L}_2(a,b)$ 'wemelt' van functies van diverse, heel bepaalde typen. Dit wil zeggen dat iedere functie in $\mathbb{L}_2(a,b)$ willekeurig dicht benaderd kan worden in $\|\cdot\|_2$-zin met een rij functies van speciaal, door ons uitverkoren type en die we namen gegeven hebben. De stelling is een vervolg op Stelling 1.3.10 en Stelling 1.3.11. Eerst nog een paar functieruimten als vervolg op Definitie 1.1.4 en Definitie 1.1.6.

**2.2.8 Definitie (Functieruimten 4)**
We beschouwen steeds een (begrensd of onbegrensd) open interval $(a, b)$. Het is dus toegestaan dat $a$ en/of $b$ oneindig is.

(1) Met $\mathcal{C}_c(a, b)$ noteren we de verzameling van alle *continu* functies $f\colon (a, b) \to \mathbb{C}$, met de speciale eigenschap dat ze *buiten* een zeker *begrensd* en *gesloten* interval $[c, d] \subset (a, b)$ gelijk 0 zijn. Dit interval $[c, d]$ kan en mag per functie verschillen. Men spreekt wel van continue functies met *compacte drager.* Losjes gezegd: In de buurt van de eindpunten van het interval $(a, b)$ zijn deze functies al een tijdje 0. Merk op dat $\mathcal{C}_c(a, b)$ een vectorruimte is.

(2) Met $\mathrm{Zaagtand}_c(a, b)$ noteren we de lineaire deelruimte in $\mathcal{C}_c(a, b)$ die bestaat uit alle continue functies $f$ die *stuksgewijs lineair* zijn. Dat wil zeggen, voor zo'n $f$ bestaan er getallen
$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{N-1} < a_N < b$, zodat

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{als} \quad a < x \le a_1, \\ f(a_{i-1}) + (x - a_{i-1})\frac{f(a_i)-f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}, & \text{als} \quad a_{i-1} \le x \le a_i, \\ & \text{en} \quad 1 \le i \le N, \\ 0, & \text{als} \quad a_N \le x < b. \end{cases}$$

Let op! Het aantal $N$ en de positie der punten $a_i$ mag, per functie $f$, verschillen.

(3) Met $\mathcal{C}_c^1(a, b)$ noteren we de lineaire deelruimte in $\mathcal{C}_c(a, b)$ die bestaat uit alle functies $f$ in $\mathcal{C}_c(a, b)$ die de eigenschap hebben differentiëerbaar te zijn met continue afgeleide $f'$. Overigens geldt dan: $f' \in \mathcal{C}_c(a, b)$.

(4) Met $\mathrm{Spline}_c(a, b)$ noteren we de lineaire deelruimte in $\mathcal{C}_c^1(a, b)$ die bestaat uit alle continu differentieerbare functies $f$ die een afgeleide $f' \in \mathrm{Zaagtand}_c(a, b)$ hebben. Deze functies zijn *stuksgewijs* polynomiaal. Beperkt tot geschikte intervallen $[a_{i-1}, a_i]$, als boven, worden ze beschreven door een polynoom van ten hoogste graad 2. Deze stukjes polynoom zijn dan in de *knooppunten* $a_i$ zodanig aan elkaar gekoppeld, dat de afgeleide $f'$ van $f$ continu is in elk punt $a_j$.

(5) Met $\mathcal{C}_c^\infty(a,b)$ noteren we de lineaire deelruimte in $\mathcal{C}_c(a,b)$ die bestaat uit alle functies $f$ in $\mathcal{C}_c(a,b)$ die de eigenschap hebben dat ze willekeurig vaak differentiëerbaar zijn. Voor de $n$-de afgeleide $f^{(n)}$ van $f$ geldt dan: $f^{(n)} \in \mathcal{C}_c^\infty(a,b)$.

(6) Met $\mathbb{H}^\infty(a,b)$ noteren we de lineaire deelruimte in $\mathbb{L}_2(a,b)$ die bestaat uit alle functies $f$ in $\mathbb{L}_2(a,b)$ die de eigenschap hebben dat ze willekeurig vaak differentiëerbaar zijn, met alle afgeleiden $f^{(n)}$ eveneens behorende tot $\mathbb{L}_2(a,b)$. Dus $\forall n \in \mathbb{N} :\ f^{(n)} \in \mathbb{L}_2(a,b)$.

(7) Met $\mathbb{G}(-L,L)$, $0 < L < \infty$, noteren we de verzameling van alle functies $f\colon (-L,L) \to \mathbb{C}$, die geschreven kunnen worden in de vorm

$$f(x) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \cos(m\frac{\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \sin(n\frac{\pi}{L}x),$$

met $M \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, willkeurig, en $\alpha_m \in \mathbb{C}$, $\beta_n \in \mathbb{C}$, eveneens willekeurig. Dit zijn dus alle willekeurige (eindige) lineaire combinaties van $\mathbb{G}$oniometrische functies die 'passen' bij het interval $(-L,L)$. Een andere schrijfwijze voor een functie $g \in \mathbb{G}(-L,L)$ is nog

$$g(x) = \sum_{n=K}^{n=M} \gamma_n \exp(in\frac{\pi}{L}x),$$

met $K \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{Z}$, $K \leq M$, willekeurig, en $\gamma_n \in \mathbb{C}$, eveneens willekeurig.

De volgende stelling zegt dat we een willekeurige functie $f \in \mathbb{L}_2(a,b)$ willekeurig dicht kunnen benaderen met een functie uit elk der functieklassen die genoemd worden in Definitie 2.2.8.

**2.2.9 Stelling**

*Laat $(a,b) \subset \mathbb{R}$ een (begrensd of onbegrensd) open interval zijn. Er geldt het volgende*

*(1) $\mathcal{C}_c(a,b)$ is een dichte lineaire deelruimte in $\mathbb{L}_2(a,b)$.*

*(2) Zaagtand$_c(a,b)$ is een dichte lineaire deelruimte in $\mathbb{L}_2(a,b)$.*

*(3) $\mathcal{C}_c^1(a,b)$ is een dichte lineaire deelruimte in $\mathbb{L}_2(a,b)$.*

*(4) Spline$_c(a,b)$ is een dichte lineaire deelruimte in $\mathbb{L}_2(a,b)$.*

*(5) $\mathcal{C}_c^\infty(a,b)$ is een dichte lineaire deelruimte in $\mathbb{L}_2(a,b)$.*

*(6)* $\mathbb{H}^\infty(a,b)$ *is een dichte lineaire deelruimte in* $\mathbb{L}_2(a,b)$.

*(7) Laat* $L \in \mathbb{R}$ , $0 < L < \infty$. *De functieruimte* $\mathbb{G}(-L,L)$ *is een dichte lineaire deelruimte in* $\mathbb{L}_2(a,b)$.

*(8) Als* $(a,b)$ *een begrensd interval is, dan is* $\mathbb{P}([a,b])$ *een dichte lineaire deelruimte in* $\mathbb{L}_2(a,b)$.

**Bewijs.**
(1) Laat $f \in \mathbb{L}_2(a,b)$ en $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. Onze opdracht is een $\varphi \in \mathcal{C}_c(a,b)$ te construeren, zodat $\|f-\varphi\|_2 < \varepsilon$. Kies eerst $c$, $d$ met $a < c < d < b$, zo dicht bij $a$ repectievelijk $b$, dat $\int\limits_a^c |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_d^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \frac{1}{4}\varepsilon^2$. Dan is $\|\chi_{(c,d]} f - f\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$. Beschouw nu $P_t \star (\chi_{(c,d]} f)$ met $t > 0$ zo klein dat $t < \frac{1}{2}(c-a)$, $t < \frac{1}{2}(b-d)$ en bovendien $\|P_t\star(\chi_{(c,d]} f) - P_t\star(\chi_{(c,d]} f)\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dit is te realiseren op grond van 2.2.4 en 2.2.6. Als we $\varphi = P_t \star (\chi_{(c,d]} f)$ nemen, dan blijkt op grond van 2.1.7 dat $\varphi$ continu is en 0 nabij $a$ en $b$. Onder toepassing van de driehoeksongelijkheid vinden we tenslotte $\|f-\varphi\|_2 = \|(f-\chi_{(c,d]} f) + (\chi_{(c,d]} f - P_t \star (\chi_{(c,d]} f))\|_2 \leq \|(f-\chi_{(c,d]} f)\|_2 + \|(\chi_{(c,d]} f - P_t \star (\chi_{(c,d]} f))\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

(2) Is een verfijning van (1). Kies in plaats van $\chi_{(c,d]} f$ eerst een trapfunctie $T$, die 0 is buiten $(c,d]$, en zodanig dat $\|f-T\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$. Door $T$ te convolueren met $P_t$, $t$ voldoende klein, krijg je dan een zaagtandfunctie die niet verder van $T$ afligt dan $\frac{1}{2}\varepsilon$.

(3) Net als (1). Vervang slechts $P_t$ door de tentfunctie $T_t$ met $t > 0$ zo klein dat $t < \frac{1}{4}(c-a)$ en $t < \frac{1}{4}(b-d)$. Volgens 2.1.7 sub (b) is $T_t \star (\chi_{(c,d]} f)$ een continu differentiëerbare functie.

(4) Verfijning van (3), analoog aan (2). $T_t\star$ toegepast op een trapfunctie levert als approximant een stuksgewijs 2e-graads polynoom.

(5) Wederom analoog aan (1). Neem nu in plaats van $P_t$ de verzachter $V_t$, cf.2.1.7 sub (f).

(6) Volgt uit convolutie met de Gauss functie $G_t$, cf. 2.1.7 sub (c). Daar vind je ook, dat voor alle $t > 0$ en alle $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ de functie $G_t \star f$ de gewenste eigenschappen heeft. Voorts kun je bij iedere $\varepsilon > 0$ het getalletje $t > 0$ zo klein kiezen dat $\|G_t \star f - f\|_2 < \varepsilon$.

(7) Nu gebruiken we 2.1.7 sub (e). Bij gegeven $f \in \mathbb{L}_2(-\pi,\pi)$ en $\varepsilon > 0$, kun je, door $N$ voldoende groot te kiezen, bereiken dat $\|K_N \star f - f\|_2 < \varepsilon$. En $K_N\star f$ is een trigonometrisch polynoom! Het algemene geval, voor $\mathbb{L}_2(-L,L)$

bekom je door in de integraaluitdrukking voor de norm $\|K_N \star f - f\|_2$, de variabele $x$ te vervangen door $\frac{\pi}{L}y$.

(8) Op grond van (1) kun je $g \in \mathcal{C}([a,b])$ kiezen zodat $\|f - g\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$. Als $g$ toevallig 0 is dan ben je klaar. Zoniet, kies dan $p \in \mathbb{P}([a,b])$ zo dat $\|g - p\|_\infty < \frac{1}{2\sqrt{b-a}}\varepsilon$. Dan heb je $\|g - p\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$ en, a fortiori, $\|f - p\|_2 < \varepsilon$.

$\square$

# Hoofdstuk 3 Fourierreeksen

## 3.1 Orthogonale en orthonormale stelsels in inproduct-ruimten

Het begrip *orthonormale basis* uit de theorie van eindig dimensionale vectorruimten wordt hier uitgebreid naar $\infty$-dimensionale inproductruimten zoals ingevoerd in sectie 1.2. Omdat hier oneindige sommen tevoorschijn gaan komen, zal het convergentie-begrip, en dus ook het afstandsbegrip, in de betreffende IP-ruimte een wezenlijke rol spelen.

**3.1.1 Definitie (Orthonormale stelsels)**
Gegeven: Een IP-ruimte $\mathbf{E}$, een stelsel $S \subset \mathbf{E}$ zodat $\mathbf{0} \notin S$.

- Het stelsel $S$ heet een *orthogonaal stelsel* als $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \ \left[ \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \ \Rightarrow \ \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \right]$.
- Het stelsel $S$ heet een *orthonormaal stelsel* als bovendien $\forall\, \mathbf{x} \in S\colon \ \ \|\mathbf{x}\| = 1$.
- We spreken van een *orthonormale rij* als $S = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{I}}$, meestal is $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ of $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$. Dan geldt dus

$$(\mathbf{x}_n\,, \mathbf{x}_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1 & , \quad m = n. \end{cases}$$

Merk op dat van een orthogonaal stelsel $S$ een orthonormaal stelsel $S_1$ gemaakt kan worden door te stellen $S_1 = \{ \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \Big| \mathbf{x} \in S \}$.

**3.1.2 Stelling**
*Orthogonale stelsels zijn lineair onafhankelijke stelsels.*

**Bewijs.** Een (oneindig) stelsel vectoren heet (algebraisch) onafhankelijk als ELK eindig deelstelsel dat is. Zie Definitie 0.1.4. Veronderstel dat $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ en dat alle $\mathbf{x}_j$ ongelijk $\mathbf{0}$ zijn en onderling loodrecht. Dan volgt uit het nemen van inproducten met respectievelijk $\mathbf{x}_k$, $1 \leq k \leq N$, dat alle coëfficienten $\alpha_j$ gelijk 0 moeten zijn. $\square$

**3.1.3 Voorbeelden (Orthonormale Stelsels)**
**(a)** In $\ell_2(\mathbb{N})$ is

$$\{ \underline{e}_n = \text{kolom}[0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots] \Big| n \in \mathbb{N}, 1 \text{ op } n\text{-e positie en verder 0-en} \}$$

een orthonormaal stelsel.

**(b)** In $\mathbb{L}_2(-\pi,\pi)$ vormen de functies

$$\{\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\Big|\ n \in \mathbb{Z}\}$$

een orthonormaal stelsel. Dit geldt eveneens in $\mathbb{L}_2(a-\pi, a+\pi)$, met $a \in \mathbb{R}$ willekeurig, doch vast, gekozen.

**(b1)** In $\mathbb{L}_2(-L, L)$ vormen de functies

$$\{\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\exp(in\frac{\pi}{L}x)\Big|\ n \in \mathbb{Z}\}$$

een orthonormaal stelsel. Dezelfde functievoorschriften leveren ook een orthonormale rij in $\mathbb{L}_2(a-L, a+L)$, met $a \in \mathbb{R}$ willekeurig, doch vast, gekozen.

**(c)** De rij functies

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\}$$

is een orthonormale rij in $\mathbb{L}_2(-\pi,\pi)$. Ook hier geldt dat dezelfde functievoorschriften een orthonormale rij definiëren in $\mathbb{L}_2(a-\pi, a+\pi)$, voor willekeurige, vast gekozen, $a \in \mathbb{R}$.

**(c1)** De rij functies

$$\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\sin\frac{\pi}{L}x}{\sqrt{L}}, \frac{\cos\frac{\pi}{L}x}{\sqrt{L}}, \frac{\sin 2\frac{\pi}{L}x}{\sqrt{L}}, \frac{\cos 2\frac{\pi}{L}x}{\sqrt{L}}, \cdots \frac{\sin n\frac{\pi}{L}x}{\sqrt{L}}, \frac{\cos n\frac{\pi}{L}x}{\sqrt{L}}, \cdots\}$$

is een orthonormale rij in $\mathbb{L}_2(-L, L)$. Dezelfde functievoorschriften leveren ook een orthonormale rij in $\mathbb{L}_2(a-L, a+L)$, voor willekeurige, vast gekozen, $a \in \mathbb{R}$.

**(d)** De rijen functies

$$\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 3x, \cdots \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx, \cdots\},$$

$$\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x, \cdots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \cdots\},$$

zijn beide orthonormale rijen in $\mathbb{L}_2(0,\pi)$.

**(e)** De *Legendre polynomen* $P_n$, $n = 0,\ 1,\ 2\ \cdots$, worden gedefinieerd door

$$P_0(x) = 1, \quad \text{respectievelijk}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

In $\mathbb{L}_2(-1,1)$ vormen de functies

$$\Big\{\sqrt{n+\tfrac{1}{2}}P_n(x)\Big|\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots\Big\}$$

een orthonormaal stelsel.

**(f)** De *Hermite polynomen* $H_n$, $n = 0,\ 1,\ 2\ \cdots$ , worden gedefinieerd door

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

Het stelsel functies

$$\Big\{\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\Big|\ n=0,\ 1,\ 2\ \cdots\Big\}$$

vormt een orthonormaal stelsel in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

**3.1.4 Stelling (Pythagoras)**
*Gegeven:Een orthogonaal stelsel* $S = \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in een IP-ruimte* $\mathbf{E}$.
*Dan geldt*

$$\|\sum_{k=1}^{N}\mathbf{x}_k\|^2 = \sum_{k=1}^{N}\|\mathbf{x}_k\|^2.$$

**Bewijs.** Schrijf het inproduct $(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_N\ ,\ \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_N)$ uit. Vanwege de orthogonaliteit zijn alle 'gemengde' inproducten 0. $\square$

**3.1.5 Stelling (Ongelijkheid van Bessel)**
*Gegeven:Een orthonormale rij* $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in een IP-ruimte* $\mathbf{E}$.
*Dan geldt* $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{E}\ \forall N\in\mathbb{N}$:

**a)** $\|\mathbf{x} - \sum\limits_{k=1}^{N}(\mathbf{e}_k,\ \mathbf{x})\mathbf{e}_k\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{N}|(\mathbf{e}_k,\ \mathbf{x})|^2.$

**b)** $\sum\limits_{k=1}^{N}|(\mathbf{e}_k,\ \mathbf{x})|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2.$

**c)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(\mathbf{e}_k,\ \mathbf{x})|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2.$

*Dus het rijtje complexe getallen* $\{(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{x})\}_{n\in N}\ \in\ \ell_2(\mathbb{N})$.

*In plaats van* $\mathbb{N}$ *kan ook* $\mathbb{Z}$*, of zelfs een willekeurige aftelbare indexverzameling* $\mathbb{I}$*, genomen worden.*

**Bewijs.**
**a)** Voor willekeurige complexe getallen $\alpha_k$ geldt
$\|\mathbf{x} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{e}_k\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(\mathbf{e}_k,\, \mathbf{x})|^2 + \sum_{k=1}^{N} |(\mathbf{e}_k,\, \mathbf{x}) - \alpha_k|^2.$
Neem nu $\alpha_k = (\mathbf{e}_k,\, \mathbf{x})$.

**b)** Volgt uit a) door op te merken dat het linkerlid, dus ook het rechterlid, $\geq 0$ is.

**c)** Neem in b) de limiet voor $N \to \infty$. Deze limiet bestaat omdat de rij van partiële sommen monotoon niet-dalend is en van boven begrensd wordt door $\|\mathbf{x}\|^2$. □

Uit de elementaire lineaire algebra is het volgende bekend: Als $\{\mathbf{b}_1,\, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ een *orthonormale* basis is van een ($n$-dimensionale) vectorruimte $\mathbf{E}$, dan kan *iedere* vector $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ geschreven worden als $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{b}_k, \mathbf{x})\mathbf{b}_k$. De gedachtengang hierachter proberen we na te volgen in ($\infty$-dimensionale) functieruimten.

**3.1.6 Definitie (Gegeneraliseerde Fourierreeks)**
Gegeven: Een orthonormale rij $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in een IP-ruimte $\mathbf{E}$.
Een vector $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
Dan heet de reeks $\mathbf{x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{e}_k,\, \mathbf{x})\mathbf{e}_k$ *de (gegeneraliseerde) Fourierreeks* voor $\mathbf{x}$.

De interessante vraag is natuurlijk: Onder welke omstandigheden wordt $\mathbf{x}$ door genoemde reeks voorgesteld?

**3.1.7 Definitie (Orthonormale Basis)**
Gegeven: Een orthonormale rij $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in een IP-ruimte $\mathbf{E}$.
We zeggen: $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een *orthonormale basis* in $\mathbf{E}$, als

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}: \qquad \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{x})\mathbf{e}_n,$$

met andere woorden

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}: \qquad \lim_{N\to\infty} \|\mathbf{x} - \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{x})\mathbf{e}_n\| = 0.$$

**3.1.8 Opmerking (Notatie)**

Als $\{\Psi_n\}$ een orthonormale basis is in $\mathbb{L}_2(a,b)$ en $f$ is een functie in dezelfde ruimte, dan betekent $f = \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_n,\, f)\Psi_n$ , dat

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n(x) \right|^2 \mathrm{d}x = 0,$$

hierin is

$$\alpha_k = \int_a^b \overline{\Psi_k(t)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Als we genoodzaakt zijn de $x$-afhankelijkheid van $f$ en $\Psi_n$ expliciet aan te geven, dan schrijven we

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Psi_n(x).$$

We geven dan aan dat de functies ter linker- en ter rechterzijde van het $\equiv$-teken 'gelijk' of 'equivalent' zijn, als vectoren in $\mathbb{L}_2(a,b)$. De gelijkheid hoeft echter niet voor iedere waarde van $x$ afzonderlijk te gelden! Misschien verschillen linker- en rechterlid wel een niksfunctie. Zie vooral (het slot van) Voorbeeld 3.1.14 en ook het begin van sectie 3.2.

**3.1.9 Stelling (Parseval)**

*Gegeven: Een orthonormale rij $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in een IP-ruimte $\mathbf{E}$.*
*Dan geldt:*

**a)** $\left[\ \{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ is een orthonormale basis}\ \right] \Longrightarrow$

$$\left[\ \left[\forall n \in \mathbb{N}\, (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{x}) = 0\ \right] \Rightarrow \left[\mathbf{x} = 0\right]\ \right].$$

**b)** $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is een orthonormale basis in* $\mathbf{E}$*, dan en slechts dan als geldt:*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}: \quad \sum_{k=1}^{\infty} |(\mathbf{e}_k,\, \mathbf{x})|^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

**c)** $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is an orthonormal base in* $\mathbf{E}$*, dan en slechts dan als geldt*

$$\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots \rangle = \textit{opspansel}\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{ is dichte deelverzameling in } \mathbf{E}.$$

**Bewijs.**

**a)** Als $\mathbf{x}$ kan worden voorgesteld door $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{e}_n, \mathbf{x})\mathbf{e}_n$ en als $\forall n \in \mathbb{N}\, (\mathbf{e}_n, \mathbf{x}) = 0$, dan moet wel gelden $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**b⇒)** Als in de uitdrukking a) van Stelling 3.1.5 het linkerlid $\to 0$ als $N \to \infty$, dan moet ook het rechterlid $\to 0$ als $N \to \infty$. Deze laatste limiet is precies de Parseval-identiteit.

**b⇐)** Als in de uitdrukking a) van Stelling 3.1.5 het rechterlid $\to 0$ als $N \to \infty$, dan moet ook het linkerlid $\to 0$ als $N \to \infty$. Dit laatste zegt precies dat $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een orthonormale basis in $\mathbf{E}$ is.

**c⇒)** Als $\{\mathbf{e}_n\}$ een orthonormale basis, dan is blijkens Definitie 2.3.7 iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ willekeurig dicht te benaderen door een eindige lineaire combinatie der $\mathbf{e}_n$'s.

**c⇐)** Als $\{\mathbf{e}_n\}$ geen basis is, dan is blijkens de ongelijkheid van Bessel en deel b) van deze stelling $\|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})|^2 = \delta^2 > 0$, voor zekere $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Met de eerste formule uit het bewijs van Stelling 3.1.5a vinden we dat voor willekeurige complexe getallen $\alpha_k$ geldt
$\|\mathbf{x} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{e}_k\|^2 = \delta^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})|^2 + \sum_{k=1}^{N} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x}) - \alpha_k|^2 > \delta^2.$
Dit zegt dat we met eindige lineaire combinaties van $\mathbf{e}_n$'s altijd tenminste op afstand $\delta$ van $\mathbf{x}$ blijven. Dit is in strijd met de veronderstelling dat het opspansel der $\mathbf{e}_n$'s dicht zou liggen. □

### 3.1.10 Opmerkingen

a) Deel a) van de stelling zegt: Als een vector $\mathbf{x}$ loodrecht staat op alle vectoren van een orthonormale basis (en dus op het opspansel van die basisvectoren) dan kan $\mathbf{x}$ alleen de nulvector zijn.

b) We zullen later nog zien dat, onder de veronderstelling dat $\mathbf{E}$ volledig is, ook de omkering van deel a) van de stelling geldt.

c) De Parsevalidentiteit (deel b van de stelling) kan worden gezien als de $\infty-$dimensionale versie van de stelling van Pythagoras.

Nu het belangrijkste resultaat van dit prachtvak tot nu toe.

### 3.1.11 Stelling

*Alle in Voorbeelden 3.1.3 genoemde orthonormale rijen/stelsels zijn ook orthonormale bases.*

**Bewijs.**
We volgen de nummering van 1.1.5. We maken vooral gebruik van de karakterisering 3.1.9 sub c).
**(a)** Het opspansel van de $\underset{=}{e}_n$'s is gelijk aan $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$. Volgens 1.3.10 ligt $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ dicht in $\ell_2(\mathbb{N})$.

**(b), (b1), (c), (c1)** Het opspansel van de betreffende orthogonale rijen is steeds gelijk aan $\mathbb{G}(-L, L)$ en ligt volgens stelling 2.2.9 sub(7) dicht in $\mathbb{L}_2(-L, L)$.

**(d)** Eerst de rij van cosinus-functies. Laat $f \in \mathbb{L}_2(0, L)$ gegeven zijn. We construeren de *even voortzetting* $f_E \in \mathbb{L}_2(-L, L)$ van $f$ volgens

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x), & \text{als} \quad 0 < x < L, \\ f(-x), & \text{als} \quad -L < x < 0. \end{cases}$$

Als we $f_E$ volgens (c1) schrijven als een Fourierreeks, dan komen daar geen termen met $\sin \frac{\pi}{L} x$ in voor omdat derzelven inproduct met $f_E$ gelijk 0 is. De gevonden Fourierreeks convergeert in $\mathbb{L}_2(-L, L)$ naar $f_E$. We interesseren ons nu alleen voor wat er gebeurt op $(0, L)$. Als we ons beperken tot $(0, L)$, dan convergeert de verkregen reeks in $\mathbb{L}_2(0, L)$ naar $f$.
Hetzelfde kunstje doen we nu over met de *oneven voortzetting* $f_O \in \mathbb{L}_2(-L, L)$ van $f$ volgens

$$f_O(x) = \begin{cases} f(x), & \text{als} \quad 0 < x < L, \\ -f(-x), & \text{als} \quad -L < x < 0. \end{cases}$$

Nu zijn juist alle inproducten met de cosinusfuncties gelijk 0, zodat er een reeks met uitsluitend sinustermen overblijft, die we dan weer uitsluitend wensen te beschouwen op $(0, L)$. De verkregen reeks convergeert in $\mathbb{L}_2(0, L)$ naar $f$.

**(e)** Ieder Legendrepolynoom $P_n$ is een $n$e-graadspolynoom met kopterm $c_n x^n$, waarbij $c_n \neq 0$. Met een veegprocede valt in te zien dat ieder *monoom* $x^n$ geschreven kan worden als een lineaire combinatie van $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Dientengevolge is het opspansel van de Legendrepolynomen op $[-1, 1]$ gelijk aan $\mathbb{P}([-1, 1])$. En dat is een dichte lineaire deelruimte in $\mathbb{L}_2(-1, 1)$. Zie 2.2.9 sub (8).

**(f)** We bewijzen hier niet dat het belangrijke stelsel $\{\Psi_n\}$ een orthonormale basis is in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. U zult de $\Psi_n$ nog tegenkomen als eigentoestanden van de 1-dimensionale quantumoscillator. $\square$

**3.1.12 Stelling (+Terminologie)**

• **Fourierreeks met periode** $2L$

*Iedere functie* $f \in \mathbb{L}_2(-L,L)$ *kan worden voorgesteld door*

$$f(x) \equiv a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\frac{\pi}{L}x),$$

*met*

$a_0 = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(y)\,\mathrm{d}y,\ \ a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(y)\cos(n\frac{\pi}{L}y)\,\mathrm{d}y,\ \ b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} \sin(n\frac{\pi}{L}y)f(y)\,\mathrm{d}y.$

*Het zij nogmaals vermeld dat, in dit geval en in de volgende gevallen, de functiereeksen convergeren volgens het* $\mathbb{L}_2$*-afstandsbegrip!!!*

• **Complexe Fourierreeks met periode** $2L$

*Iedere functie* $f \in \mathbb{L}_2(-L,L)$ *kan worden voorgesteld door*

$$f(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\frac{\pi}{L}x),$$

*met*

$$c_n = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(y)\exp(-in\frac{\pi}{L}y)\,\mathrm{d}y.$$

• **Fouriercosinusreeks**

*Iedere functie* $f \in \mathbb{L}_2(0,L)$ *kan worden voorgesteld door*

$$f(x) \equiv a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{\pi}{L}x),$$

*met*

$a_0 = \frac{1}{L}\int\limits_{0}^{L} f(y)\,\mathrm{d}y,\ \ a_n = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(y)\cos(n\frac{\pi}{L}y)\,\mathrm{d}y.$

• **Fouriersinusreeks**

*Iedere functie* $f \in \mathbb{L}_2(0,L)$ *kan worden voorgesteld door*

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\frac{\pi}{L}x),$$

*met*

$b_n = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(y)\sin(n\frac{\pi}{L}y)\,\mathrm{d}y.$

**3.1.13 Voorbeeld**

Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de periodieke functie met periode $2\pi$ zo dat

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x \in (-\pi, 0), \\ 1 & \text{als } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{als } x \in \{-\pi, 0, \pi\}. \end{cases}$$

We berekenen de Fouriercoëficiënten van $f$. Allereerst is

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} (-1)\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 1\, \mathrm{d}x = 0.$$

Voor alle $n \in \mathbb{N}$ is

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos nx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\cos nx\, \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos nx\, \mathrm{d}x = 0$$

en

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin nx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin nx\, \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nx\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n\pi} \Big[ \cos nx \Big]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi} \Big[ \cos nx \Big]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} \Big( 1 - \cos n\pi \Big) = \frac{2}{n\pi} \Big( 1 - (-1)^n \Big) = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even}, \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{als } n \text{ oneven}. \end{cases} \end{aligned}$$

De Fourierreeks behorende bij $f$ is dan

$$f(x) \equiv \frac{4}{\pi} \Big( \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \sin 5x \dots \Big) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}.$$

Volgens de algemene theorie convergeert deze Fourierreeks in $\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$ naar $f$. De partiële sommen $\sum\limits_{m=0}^{N} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$ lijken behoorlijk op $f$ als $N$ groot is en kunnen dienen als benadering voor $f$. Zie figuur. Als we $x = 0$ of $x = \pm\pi$ invullen in de reeks blijkt er precies de functie waarde van $f$ in deze punten (namelijk 0) uit te komen. Als we $x = \frac{\pi}{2}$ in de reeks invullen, dan komt er $\frac{4}{\pi} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$. Dit is $\frac{4}{\pi}$ maal de arctan-reeks voor $\frac{\pi}{4}$. Dus ook hier wordt $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ gereproduceerd.

**3.1.14 Voorbeeld** Zij $f$ de periodieke functie met periode $2\pi$ zo dat

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{als } x = \pi. \end{cases}$$

Dan is $f \in \mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$ en oneven. Er volgt direct dat $a_0 = a_n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. voorts is

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\sin nx\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{2}{n\pi}x\cos nx\Big]_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\pi\cos n\pi + \Big[\frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Big]_0^\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. De Fourierreeks behorende bij $f$ is

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Stelling 3.1.12 zegt dat de Fourierreeks in $\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$ naar $f$ convergeert. De waarde $x = \frac{\pi}{2}$ in de Fourierreeks ingevuld reproduceert $f(\frac{\pi}{2})$. Immers

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} \sin\frac{(2m+1)\pi}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2}{2m+1} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2}).$$

Ook als je $x = \pm\pi$ invult in de Fourierreeks komt er $0 = f(\pm\pi)$ uit.
Merk echter op dat de periodieke functie $g$ met periode $2\pi$ zo dat $g(x) = x$ als $x \in (-\pi, \pi]$ dezelfde Fourierreeks heeft als $f$. Blijkbaar wordt nu in de punten NIET de waarde $g(\pm\pi) = \pi$ gereproduceerd. Gelukkig is $f - g$ slechts een niksfunctie.

# 3.2 Puntsgewijze en uniforme convergentie van Fourierreeksen

Het is triest maar waar dat $\|f_n - f\|_2 \to 0$ in $\mathbb{L}_2(a, b)$, in het algemeen niets zegt over de convergentie, al dan niet, $f_n(c) \to f(c)$ voor enig punt $c \in (a, b)$. Niet zo vreemd omdat convergentie in $\mathbb{L}_2(a, b)$ 'alleen maar' betekent dat het gemiddelde absolute verschil $|f_n(x) - f(x)|^2$ nadert naar 0, als $n$ nadert naar $\infty$! Bovendien wordt $\|f_n - f\|_2$ er niks van gewaar als je bij $f$ een niksfunctie optelt. Het volgende extreme voorbeeld laat zien wat er zoal mis kan gaan.

### 3.2.1 Voorbeeld

Beschouw de rij van karakteristieke functies, cf. 1.1.4(5),

$$\chi_{(0,1]},\ \chi_{(0,\frac{1}{2}]},\ \chi_{(\frac{1}{2},1]},\ \chi_{(0,\frac{1}{3}]},\ \chi_{(\frac{1}{3},\frac{2}{3}]},\ \chi_{(\frac{2}{3},\frac{3}{3}]},\ \chi_{(\frac{1}{4},\frac{2}{4}]},\ \chi_{(\frac{2}{4},\frac{3}{4}]},\ \chi_{(\frac{3}{4},\frac{4}{4}]},\ \ldots,$$
$$\ldots,\chi_{(\frac{1}{m},\frac{2}{m}]},\ \chi_{(\frac{2}{m},\frac{3}{m}]},\ \ldots,\chi_{(\frac{m-2}{m},\frac{m-1}{m}]},\ \chi_{(\frac{m-1}{m},\frac{m}{m}]},\ \chi_{(\frac{1}{m+1},\frac{2}{m+1}]},\ \ldots$$

Enerzijds naderen van deze rij functies de respectievelijke $\mathbb{L}_2(0,1)$-normen naar 0 als $m \to \infty$. Immers de 'pulsjes' hebben steeds hoogte 1, maar worden gaandeweg smaller.
Anderzijds nadert $\chi_{(\frac{m}{n},\frac{m}{n+1}]}(x)$ voor *geen enkele* $x \in (0,1)$ naar 0. Immers, naar verloop van tijd komt er telkens wel weer een pulsje voorbij.

De vraag die zich nu aandient is: Wat garandeert ons dat de diverse Fourierreeksen in 3.1.12, voor zekere waarde van $x \in (-L,L)$ überhaupt convergeren en, áls dat al het geval is, per punt $x$ de functiewaarde $f(x)$ reproduceren? Over dit moeilijke onderwerp zijn dikke boeken volgeschreven. Wij zullen hier twee soorten *voldoende* garanties geven voor deze 'puntsgewijze convergentie': Een voorwaarde zal de coëfficiënten $a_n$, $b_n$, $c_n$ betreffen. De andere voorwaarde zal een aan $f$ te stellen 'gladheidseis' zijn.

### 3.2.2 Stelling

*Veronderstelling: De coëfficiëntenrijtjes in 3.1.12 voldoen aan*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|c_n| < \infty.$$

*(Dit wil zeggen dat de coëfficiëntenrijtjes $\ell_1$-rijtjes zijn!)*
*Dan geldt het volgende:*

- *De somfunctie $f \in \mathbb{L}_2(-L,L)$ is continu op $[-L,L]$.*
  *Dus tevens: $f \in \mathcal{C}([-L,L])$.*

- $\forall\, x \in [-T,T]$: $\displaystyle \lim_{N\to\infty}\Big[a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\tfrac{\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\tfrac{\pi}{L}x)\Big] = f(x)$

*Dat wil zeggen: Er is puntsgewijze convergentie.*

- *De partiële sommen convergeren ook in de functieruimte $\mathcal{C}([-T,T])$ naar $f$. Dit betekent*

$$\max_{-T\le x\le T}\left|a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\tfrac{\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{N} b_n\sin(n\tfrac{\pi}{L}x)\ - f(x)\right| =$$
$$= \|a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\tfrac{\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{N} b_n\sin(n\tfrac{\pi}{L}x)\ - f(x)\|_\infty \to 0, \text{ als } N \to \infty.$$

*Traditioneel heet dit* uniforme convergentie.

• *Voor de andere typen Fourierreeksen in 3.1.12 gelden analoge formuleringen.*

**Bewijs.**
Merk op dat de functies $\sin nx$, $\cos nx$ en $e^{inx}$ allemaal absoluut begrensd worden door 1. Pas het Weierstrass criterium 1.4.14 toe. Merk tenslotte op dat, wegens $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2L}\|\cdot\|_\infty$, uit convergentie in $\mathcal{C}([-L,L])$, convergentie in $\mathbb{L}_2(-L,L)$ volgt. De somfunctie is dus in beide gevallen dezelfde. In $\mathbb{L}_2(-L,L)$ eventueel op een niksfunctie na! □

### 3.2.3 Stelling

*Veronderstelling: De functie $f \in \mathbb{L}_2(-L,L)$ in 3.1.12 is continu op $[-T,T]$ en kan geschreven worden in de vorm*

$$f(x) = f(-L) + \int_{-L}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \textit{met} \;\; \psi \in \mathbb{L}_2(-L,L) \;\; \textit{zodanig dat} \int_{-L}^{L} \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

*Dan geldt:*

• *De coëfficiëntenrijtjes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ en $\{c_n\}$ zijn $\ell_1$-rijtjes.*

• *De Fourierreeks van $f$ alsmede de Complexe Fourierreeks van $f$ convergeert voor iedere $x \in [-L,L]$ naar $f(x)$. Deze convergentie is bovendien uniform op $[-L,L]$.*

**Bewijs.**
Berekenen van de Fouriercoëfficiënten gaat als volgt

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\tfrac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L}\{f(-L) + \int_{-L}^{x}\psi(t)\,\mathrm{d}t\}\sin\tfrac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 + \int_{-L}^{L}\psi(t)\int_{t}^{L}\sin\tfrac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\tfrac{L}{n\pi}\cos n\pi L\int_{-L}^{L}\psi(t)\,\mathrm{d}t + \tfrac{L}{n\pi}\int_{-L}^{L}\psi(t)\cos\tfrac{n\pi}{L}t\,\mathrm{d}t$$

De eerste term is 0 op grond van onze veronderstelling. De tweede term is een Fouriercoëfficiënt met een factor ervoor waar $\frac{1}{n}$ voor staat. Welnu, als $\{c_n\} \in \ell_2$, dan is $\{\frac{1}{n}c_n\} \in \ell_1$ want, met Cauchy-Schwarz, $\sum|\frac{1}{n}c_n| \leq \sqrt{\sum|\frac{1}{n^2}|}\sqrt{\sum|c_n|^2} < \infty$. Met andere typen Fouriercoëfficiënten gaat het ook zo.
Het tweede deel van de stelling volgt met 3.2.2.

□

### 3.2.4 Opmerkingen

• Er is zeker aan de veronderstelling van Stelling 3.2.3 voldaan als
$f \in \mathcal{C}([-L,L])$, continu differentiëerbaar is en ook nog geldt: $f(-L) = f(L)$

en $f'(-L) = f'(L)$. Neem maar $\psi = f'$ in zo'n geval.

• In het geval van de Fouriercosinusreeks met $f \in \mathbb{L}_2(0,T)$ moet de voorwaarde gelezen worden als te gelden voor de *even uitbreiding* van $f$ tot het interval $[-L, L]$. Dit blijkt precies dan goed te komen als $f$ continu is op $[0, T]$ en geschreven kan worden in de vorm

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{met} \quad \psi \in \mathbb{L}_2(0, L).$$

• In het geval van de Fouriersinusreeks met $f \in \mathbb{L}_2(0,T)$ moet de voorwaarde gelezen worden als te gelden voor de *oneven uitbreiding* van $f$ tot het interval $[-L, L]$. Dit blijkt precies dan goed te komen als $f$ continu is op $[0, T]$, met $f(0) = f(L)$, en geschreven kan worden in de vorm

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{met} \quad \psi \in \mathbb{L}_2(0, L) \quad \text{en} \quad \int_0^L \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

**3.2.5 Voorbeeld** Zij $f$ de periodieke functie met periode $2\pi$ zo dat

$$f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Dan voldoet $f$ aan de voorwaarde van Stelling 3.2.3. Neem maar $\psi(x) = \pi \operatorname{sgn} x$. We berekenen de Fouriercoëfficiënten. Allereerst is

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

en

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{n\pi} x \sin nx\Big]_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} \Big[\cos nx\Big]_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}\Big((-1)^n - 1\Big) = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even,} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Omdat $f$ even is, is $b_n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De voorstelling van $f$ met een Fourierreeks is

$$f(x) \equiv \frac{\pi}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2\pi} \cos(2m+1)x.$$

Stelling 3.2.3 zegt dat de Fourierreeks convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$ en dat

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2\pi} \cos(2m+1)x$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Voor $x = 0$ levert dit

$$0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2\pi},$$

waaruit volgt dat

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**3.2.6 Voorbeeld**

Zij $f$ de periodieke functie met periode $2\pi$ zo dat

$$f(x) = x^2 \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Dan is $f$ even, continu en stuksgewijs glad. Dan

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$$

en

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{2}{n\pi} x^2\, \sin nx\Big]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x\, \sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{4}{n^2\pi} x\, \cos nx\Big]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^n - \frac{4}{n^3\pi}\Big[\sin nx\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. Omdat $f$ even is, is $b_n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De Fourierreeks die $f$ voorstelt is

$$f(x) \equiv \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Volgens Stelling 3.2.3 convergeert de Fourierreeks voor alle $x \in [-\pi, \pi]$ naar $f(x)$. Er geldt dus

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

voor alle $x \in [-\pi, \pi]$. Let op: Het laatste geldt uiteraard niet als $|x| > \pi$. Voor $x = \pm\pi$ en $x = 0$ levert dit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{en} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Op $[-\pi, \pi]$ schrijven we

$$x^2 = f(x) = \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 4\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}.$$

De gelijkheid van Parseval, Stelling 3.1.9 sub b), geeft dan

$$\frac{2\pi^5}{9} + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi^5}{5}.$$

Hieruit vinden we

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Zoals we gezien hebben, zit het wel goed met de puntsgewijze convergentie van Fourierreeksen van voldoend gladde periodieke functies. We willen nu een stelling formuleren (doch niet bewijzen), die wat zegt over puntsgewijze convergentie van Fourierreeksen voor periodieke functies die NIET continu zijn, maar wel STUKSGEWIJS erg netjes. Onze Voorbeelden 3.1.13 en 3.1.14 blijken daar onder te vallen. Eerst een notatie voor *rechter*- en *linker*-limieten.

**3.2.7 Definitie**
Laat $f$ een functie zijn die, tenminste, gedefinieerd is op het interval $(a, a+\varepsilon)$, voor zekere $\varepsilon > 0$. We schrijven dan $f(a+) = \lim_{h \downarrow 0} f(a+h)$, mits de limiet bestaat. En net zo: $f(a-) = \lim_{h \downarrow 0} f(a-h)$ voor functies die, tenminste, gedefinieerd zijn op $(a-\varepsilon, a)$.

**3.2.8 Definitie** Een functie $f$ heet **stuksgewijs continu** op een interval $[a, b]$ als

1. $f$ continu is op $(a, b)$, met eventueel uitzondering van een eindig aantal punten $c_1, \ldots, c_p$,
2. voor alle $i \in \{1, \ldots, p\}$ bestaan $f(c_i\pm)$,
3. $f(a+)$ en $f(b-)$ bestaan.

Een functie $f$ heet **stuksgewijs glad** op een interval $[a, b]$ als

1. $f$ differentieerbaar is op $(a, b)$, met eventueel uitzondering van een eindig aantal punten $c_1, \ldots, c_p$,
2. $f'$ is continu op $(a, b)$, met eventueel uitzondering van de punten $c_1, \ldots, c_p$,
3. voor alle $i \in \{1, \ldots, p\}$ bestaan $f(c_i\pm)$ en $f'(c_i\pm) := \lim_{h \downarrow 0} f'(c_i \pm h)$,
4. $f(a+)$, $f(b-)$, $f'(a+)$ en $f'(b-)$ bestaan.

Merk op dat elke functie die stuksgewijs glad is op $[a, b]$ tevens ook tot $\mathbb{L}_2(a, b)$ behoort.

**3.2.9 Stelling**
*Zij $f$ een periodieke functie met periode $p = 2L$ en stuksgewijs glad op $[-L, L]$. Dan is de Fourierreeks behorende bij $f$ puntsgewijs convergent op $\mathbb{R}$. Bovendien is, met $\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{p}$,*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \Big) = \frac{1}{2} \Big( f(x+) + f(x-) \Big)$$

*voor alle $x \in \mathbb{R}$. In het bijzonder, als $f$ continu is te $x$, dan is*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \Big) = f(x).$$

**3.2.10 Voorbeelden**
De functies $f$ in Voorbeelden 3.1.13 en 3.1.14 zijn stuksgewijs glad op $[-L, L]$. De Fourierreeksen aldaar convergeren dus in ieder punt $x \in [-L, L]$. Het amusante is dat in 'sprongpunten' van $f$ de Fourierreeks een waarde oplevert, die precies halverwege de sprong ligt. We zijn daar zo slim geweest om te zorgen dat voor iedere $x$ geldt $f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)$. De functie $g$ op 't eind van Voorbeeld 3.1.14 voldoet daar niet aan!

**3.2.11 Voorbeeld** Zij $f$ de periodieke functie met periode $p = 2L = 4$ zo dat

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in (-2, -1), \\ 1 & \text{als } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{als } x \in (1, 2], \\ \frac{1}{2} & \text{als } x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Dan is $f$ even, stuksgewijs glad en $\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Voor de Fourier-coëfficiënten geldt

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

en

$$a_n = \frac{4}{p} \int_0^{p/2} f(x)\,\cos n\omega x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even} \\ \dfrac{2(-1)^m}{(2m+1)\pi} & \text{als } n \text{ oneven, } n = 2m+1 \text{ met } m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bovendien is $b_n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ omdat $f$ even is. De Fourierreeks behorende bij $f$ met periode 4 is

$$f(x) \equiv \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2}.$$

Deze reeks convergeert in $\mathbb{L}_2(-2, 2)$ naar $f$. Uit Stelling 3.2.9 volgt daarenboven

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos \frac{(2m+1)\pi}{4}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. In het bijzonder, voor $x = 0$ geldt

$$1 = f(0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

zodat $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$. Ga zelf na dat deze relatie ook volgt door Stelling 3.2.9 toe te passen voor $x = 2$.

## 3.3 Toepassingen en nog meer Voorbeelden

Fourierreeksen worden toegepast in fysische verschijnselen die periodiek zijn, hetzij in de tijd, hetzij in de ruimte. Een voorbeeld is een "signaal" $f$ dat periodiek is in de tijd met **periode** of **trillingstijd** $T$. Dan is $f(t+T) = f(t)$ voor alle $t$. De Fourierreeks behorende bij $f$ met periode $T$ gelijk aan

$$f(t) \equiv a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \Big)$$

waarbij $\omega = \frac{2\pi}{T}$ de **grondfrequentie** is. De $n$**-de harmonische** van het signaal is per definitie de $n$-de term in de bovenstaande Fourierreeks , d.w.z. de bijdragen met frequentie $n\omega$ en is gelijk aan

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \Big( \cos \varphi_n \cos n\omega t - \sin \varphi_n \sin n\omega t \Big) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned}$$

waarbij $\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$ en bovendien $\varphi_n$ in het juiste kwadrant genomen wordt. Dit is een **harmonische trilling** met **amplitude** $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, **hoekfrequentie** $n\omega$ en **fasehoek** $\varphi_n$.

**3.3.1 Voorbeeld** Een wisselspanning $E \sin \omega t$ met periode $T$ en (grond)frequentie $\omega = \frac{2\pi}{T}$ wordt toegevoerd aan een gelijkrichter die alleen een positieve spanning doorlaat. Het uitgangssignaal is dan het periodieke signaal $u$ met periode $T$ zo dat

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } -\frac{T}{2} \le t \le 0 \\ E \sin(\omega t) & \text{als } 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \qquad (t \in [-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2})).$$

Merk op dat $u$ stuksgewijs glad en continu is op $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. We berekenen de Fouriercoëfficiënten. Allereerst is

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} E \sin \omega t\,\mathrm{d}t = \Big[ -\frac{E}{\omega T} \cos \omega t \Big]_0^{T/2} = -\frac{E}{2\pi} \Big( \cos \tfrac{1}{2}\omega T - 1 \Big) = \frac{E}{\pi},$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2E}{T}\int_0^{T/2} \sin\omega t\,\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{E}{T}\int_0^{T/2}\sin 2\omega t\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-\frac{E}{2\omega T}\cos 2\omega t\Big]_0^{T/2} = \frac{E}{2\omega T}(1-\cos 2\pi) = 0
\end{aligned}
$$

en voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$ is

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2E}{T}\int_0^{T/2} \sin\omega t\,\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{E}{T}\int_0^{T/2}\Big(\sin(\omega t + n\omega t) + \sin(\omega t - n\omega t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{E}{\omega T}\Big[\frac{\cos(1+n)\omega t}{1+n} + \frac{\cos(1-n)\omega t}{1-n}\Big]_0^{T/2} \\
&= \frac{E}{2\pi}\Big(\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\Big) \\
&= \frac{E}{2\pi}\Big(\frac{1-(-1)^{n+1}}{1+n} + \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-n}\Big) = \frac{E}{2\pi}\frac{2(1-(-1)^{n+1})}{1-n^2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ oneven} \\ -\dfrac{2E}{\pi(n^2-1)} & \text{als } n \text{ even} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ oneven} \\ -\dfrac{2E}{\pi(4m^2-1)} & \text{als } n = 2m \text{ even.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Analoog is $b_1 = \frac{E}{2}$ en $b_n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$. Dan is de Fourierreeks behorende bij $u$ met periode $T$ gelijk aan

$$
u(t) \equiv \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\omega t}{4m^2-1}.
$$

Uit Stelling 3.2.9, en trouwens ook al uit Stelling 3.2.3, volgt dat

$$
u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\omega t}{4m^2-1}
$$

voor alle $t$.

Stelling 3.2.9 is ook van toepassing op Fouriercosinusreeksen, Fouriersinusreeksen en Complexe Fourierreeksen.

**3.3.2 Voorbeeld** Zij $L > 0$ en definieer $f\colon [0,L]\colon \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{L} & \text{als } x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \dfrac{2(L-x)}{L} & \text{als } x \in (\frac{L}{2}, L] \end{cases} \qquad (x \in [0,L]).$$

Dan is $\omega = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{L}$.
Voor de Fouriercosinusreeks moeten we de 'gewone' Fouriercoëfficiënten berekenen van de even voortzetting $f_e$ van $f$. Er komt

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L^2}\int_0^{L/2} x\,\mathrm{d}x + \frac{2}{L^2}\int_{L/2}^{L} (L-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos n\omega x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{L^2}\int_0^{L/2} x\,\cos n\omega x\,\mathrm{d}x + \frac{4}{L^2}\int_{L/2}^{L} (L-x)\,\cos n\omega x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{L^2}\Bigg(\Big[\frac{1}{n\omega}x\,\sin n\omega x\Big]_0^{L/2} - \frac{1}{n\omega}\int_0^{L/2} \sin n\omega x\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \Big[\frac{1}{n\omega}(L-x)\,\sin n\omega x\Big]_{L/2}^{L} + \frac{1}{n\omega}\int_{L/2}^{L} \sin n\omega x\,\mathrm{d}x\Bigg) \\ &= \frac{4}{nL^2\omega}\Bigg(\frac{L}{2}\sin\frac{n\pi}{2} + \Big[\frac{1}{n\omega}\cos n\omega x\Big]_0^{L/2} - \frac{L}{2}\sin\frac{n\pi}{2} - \Big[\frac{1}{n\omega}\cos n\omega x\Big]_{L/2}^{L}\Bigg) \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}\Big(2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - \cos n\pi\Big) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{als } n = 4m, \\ 0 & \text{als } n = 4m+1, \\ -\dfrac{16}{(4m+2)^2\pi^2} & \text{als } n = 4m+2, \\ 0 & \text{als } n = 4m+3. \end{cases} \end{aligned}$$

Uit Stelling 3.2.3 en Opmerkingen 3.2.4 volgt dat

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos\frac{(4m+2)\pi x}{L}$$

voor alle $x \in [0, L]$ en dit is de Fouriercosinusreeks voor $f$
Voor $x = 0$, of voor $x = \frac{L}{2}$, volgt dat

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Tenslotte bepalen we ook de Fouriersinusreeks van $f$. Nu moeten we de 'gewone' Fouriercoëfficiënten berekenen van de oneven voortzetting van $f$. Er komt

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin n\omega x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{L^2}\int_0^{L/2} x\,\sin n\omega x\,\mathrm{d}x + \frac{4}{L^2}\int_{L/2}^{L} (L-x)\,\sin n\omega x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{L^2}\Bigg(\Big[-\frac{1}{n\omega} x\,\cos n\omega x\Big]_0^{L/2} + \frac{1}{n\omega}\int_0^{L/2} \cos n\omega x\,\mathrm{d}x \\
&\qquad - \Big[\frac{1}{n\omega}(L-x)\,\cos n\omega x\Big]_{L/2}^{L} - \frac{1}{n\omega}\int_{L/2}^{L} \cos n\omega x\,\mathrm{d}x\Bigg) \\
&= \frac{4}{nL^2\omega}\Bigg(-\frac{L}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \Big[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega x\Big]_0^{L/2} + \frac{L}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \Big[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega x\Big]_{L/2}^{L}\Bigg) \\
&= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even,} \\ \dfrac{8(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2} & \text{als } n \text{ oneven, } n = 2m+1 \text{ met } m \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dan is wederom met Stelling 3.2.3 en Opmerkingen 3.2.4

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\sin(2m+1)\omega x$$

voor alle $x \in [0, L]$ (ook voor $x = 0$ en $x = L$) en dit is de Fouriersinusreeks van $f$. De identiteit $\sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ volgt andermaal, nu door $x = \frac{L}{2}$ te nemen.

**3.3.3 Voorbeeld** Zij $f$ de periodieke functie met periode $2\pi$ zo dat $f(x) = e^x$ voor alle $x \in [-\pi, \pi)$. Dan is voor alle $n \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\Big[e^{x(1-in)}\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi}\frac{1}{1-in}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}\frac{\sinh\pi}{\pi}.
\end{aligned}
$$

De complexe Fourierreeks is daarom

$$
f(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}\frac{\sinh\pi}{\pi}\, e^{inx}
$$

en uit Stelling 3.2.9 volgt dat

$$
\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}\frac{\sinh\pi}{\pi}\, e^{inx} = \begin{cases} e^x & \text{als } x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi}) & \text{als } x \in \{-\pi, \pi\} \end{cases}
$$

voor alle $x \in [-\pi, \pi]$. In het bijzonder, als $x = 0$ dan

$$
\begin{aligned}
1 &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}\frac{\sinh\pi}{\pi} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n \frac{1}{1+n^2}\frac{\sinh\pi}{\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2}\frac{\sinh\pi}{\pi},
\end{aligned}
$$

waaruit volgt dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\sinh\pi - \pi}{2\sinh\pi}$.

# Hoofdstuk 4 Fourierintegralen

## 4.1 Heuristiek van Fourierintegralen

Fourierreeksen zijn goed voor de beschrijving van *periodieke* functies. Een functie op heel $\mathbb{R}$ die niet-periodiek is op $\mathbb{R}$, is niet te ontwikkelen in een Fourierreeks. In deze paragraaf zal blijken dat zo'n niet-periodieke functie, onder zekere 'technische' voorwaarden, geschreven kan worden als een zogenaamde Fourierintegraal. In de praktijk wordt dit op vele plaatsen gebruikt: bijvoorbeeld in fysische verschijnselen die niet periodiek zijn, vanwege demping bijvoorbeeld.

**4.1.1 Lemma (Integraalvoorstelling van Fourier 1e versie)**
*Beschouw een functie $f$ op $\mathbb{R}$ met de eigenschappen*
• *$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, dat wil zeggen: de afgeleide $f'$ van $f$ bestaat en is (tenminste) continu.*
• *Buiten een zeker interval $(-c, c)$, $c > 0$, is $f$ gelijk 0.*
*Dan geldt:*
*i) $f$ kan geschreven worden als een* **Fourierintegraal**. *Anders gezegd, $f$ heeft de* **Fouriervoorstelling**:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\xi) \cos \xi x \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(\xi) \sin \xi x \, \mathrm{d}\xi.$$

*Deze integralen zijn absoluut convergent. De functies $\xi \mapsto A(\xi)$ en $\xi \mapsto B(\xi)$ zijn continu. De functie $A$ is even. De functie $B$ is oneven. Ze worden gegeven door*

$$A(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos \xi y \, \mathrm{d}y \qquad \text{en} \qquad B(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(y) \sin \xi y \, \mathrm{d}y.$$

*Voorts geldt nog*

*ii)* $$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |A(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |B(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi.$$

**Bewijs.** Merk op dat in alle genoemde integralen over $x$ de integratie 'effectief' van $-c$ tot $c$ loopt. We kunnen daar dus, in plaats van $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \mathrm{d}x$ net zo goed $\int\limits_{-c}^{c} \cdots \mathrm{d}x$ schrijven.

i) Kies $L > c$ willekeurig, doch vast. Volgens Stellingen 3.2.2 en 3.2.3 kan $f$ op het interval $[-L, L]$ geschreven worden als een uniform convergente Fourierreeks:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

met

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2L} \int\limits_{-L}^{L} f(y)\,\mathrm{d}y &&= \tfrac{1}{2L}A(0), \\ a_n &= \tfrac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(y)\cos(\tfrac{n\pi}{L}y)\,\mathrm{d}y &&= \tfrac{1}{L}A(\tfrac{n\pi}{L}), \\ b_n &= \tfrac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(y)\sin(\tfrac{n\pi}{L}y)\,\mathrm{d}y &&= \tfrac{1}{L}B(\tfrac{n\pi}{L}), \end{aligned}$$

Ongeacht de keuze van $L$, mits groter dan $c$ gekozen, geldt voor alle $x \in [-L, L]$

$$f(x) = \frac{1}{2L}A(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{L} A(\frac{n\pi}{L}) \cos(\frac{n\pi}{L}x) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{L} B(\frac{n\pi}{L}) \sin(\frac{n\pi}{L}x).$$

De eerste term in deze uitdrukking nadert naar 0 als $L \to \infty$. Merk eerst op dat de functies $A$ en $B$ continu zijn. Constateer vervolgens dat de tweede en de derde term elk zijn op te vatten als een soort Riemann som voor een integraal over $[0, \infty)$: de breedte van het interval is $\frac{\pi}{L}$ en de evaluatiepunten zijn genomen op de waarden $n\frac{\pi}{L}$ met $n \in \mathbb{N}$. We verwachten (hopen) dat in de limiet $L \to \infty$ de termen zullen convergeren naar $\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} A(\xi)\cos \xi x\,\mathrm{d}\xi$, respectievelijk $\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} B(\xi)\sin \xi x\,\mathrm{d}\xi$. Het bewijs dat deze integralen absoluut convergent zijn, dat wil zeggen $\int\limits_{0}^{\infty} |A(\xi)|\,\mathrm{d}\xi < \infty$ en $\int\limits_{0}^{\infty} |B(\xi)|\,\mathrm{d}\xi < \infty$ wordt onder ii) gegeven.

ii) Volgens Pythagoras-Parseval geldt, voor elke $L > c$

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-c}^{c} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-L}^{L} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \\ &= \tfrac{1}{2L}|A(0)|^2 + \tfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\pi}{L}|A(\tfrac{n\pi}{L})|^2 + \tfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\pi}{L}|B(\tfrac{n\pi}{L})|^2. \end{aligned}$$

Neem ook hier de limiet voor $L \to \infty$. De eerste term nadert naar 0. De overige twee termen zijn weer 'Riemannsommen' die naar, respectievelijk, de integralen $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty |A(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$ en $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty |B(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$ naderen.
Nu nog de onder i) beloofde absolute convergentie. Volgens Pythagoras-Parseval geldt voor de afgeleide $f'$ van $f$ en voor elke $L > c$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-c}^{c} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left|A\left(\frac{n\pi}{L}\right)\right|^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left|B\left(\frac{n\pi}{L}\right)\right|^2.\end{aligned}$$

Beschouw andermaal de limiet voor $L \to \infty$. Het linkerlid hangt niet van $L$ af. Elk der termen in het rechterlid bestaat uitsluitend uit niet-negatieve bijdragen die weer Riemannsommen zijn en voor $L \to \infty$ convergeren naar, respectievelijk, $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \xi^2|A(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$ en $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \xi^2|B(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$ naderen. Beide integralen zijn blijkbaar convergent, dus $< \infty$. Tenslotte, met de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |A(\xi)|\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^1 |A(\xi)|1\,\mathrm{d}\xi + \int_1^\infty \xi|A(\xi)|\tfrac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \leq \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 |A(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi}\sqrt{\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}\xi} + \sqrt{\int_1^\infty \xi^2|A(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi}\sqrt{\int_1^\infty \left(\tfrac{1}{\xi}\right)^2\mathrm{d}\xi} \leq \\ &\leq \sqrt{\int_0^\infty |A(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi} + \sqrt{\int_0^\infty \xi^2|A(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi} < \infty.\end{aligned}$$

Voor $B$ gaat 't net zo.

□

We willen nu graag het voorgaande Lemma uitbreiden tot functies $f$ die buiten *ieder* begrensd interval $\neq 0$ mogen zijn. In het algemeen is de prijs voor het toelaten van 'minder nette' functies $f$, dat de convergentie eigenschappen van de integralen in 4.1.1 i) beroerder worden. In de volgende stelling valt dat overigens nog wel mee:

**4.1.2 Stelling (Integraalvoorstelling van Fourier 2e versie)**
*Beschouw een functie $f$ op $\mathbb{R}$ met de eigenschappen*
- $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, *dat wil zeggen: de afgeleide $f'$ van $f$ bestaat op heel $\mathbb{R}$ en is (tenminste) continu.*
- $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, *dat wil zeggen* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ *én* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$.

• *$f' \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, dat wil zeggen $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty$.*

*Dan geldt:*

*i) $f$ heeft de Fourierrepresentatie*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A(\xi)\cos\xi x \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty B(\xi)\sin\xi x \,\mathrm{d}\xi.$$

*Deze integralen zijn absoluut convergent. De functies $\xi \mapsto A(\xi)$ en $\xi \mapsto B(\xi)$ zijn continu. De functie $A$ is even. De functie $B$ is oneven. Ze worden gegeven door*

$$A(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos\xi y \,\mathrm{d}y \qquad \textit{en} \qquad B(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin\xi y \,\mathrm{d}y.$$

*Voorts geldt nog*

*ii)* $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |A(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |B(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi.$$

**Bewijs.** We beginnen met wat voorbereidende werkzaamheden.

• Laat $c > 1$ en voer de functie $x \mapsto \theta_c(x)$ in door

$$\theta_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x| \le c-1, \\ 0 & \text{als } |x| > c, \\ -|x| + c & \text{als } c-1 \le |x| \le c. \end{cases}$$

• We voeren nu de functie $f_c$ in door $f$ 'geleidelijk' af te kappen: $x \mapsto f_c(x) = \theta_c(x)f(x)$. De resultaten van Lemma 4.1.1 zijn van toepassing op $f_c$. We noteren de bij $f_c$ passende 'getransformeerden' met $\xi \mapsto A_c(\xi)$ en $\xi \mapsto B_c(\xi)$. Je kunt zo narekenen dat, voor $c \to \infty$, geldt $\|f - f_c\|_1 \to 0$, $\|f - f_c\|_2 \to 0$ en $\|f' - (f_c)'\|_2 \to 0$.

• Voorts geldt dat $A_c(\xi) \to A(\xi)$, voor alle $\xi \in \mathbb{R}$ *uniform* op $\mathbb{R}$. Anders gezegd: $\|A - A_c\|_\infty \to 0$, als $c \to \infty$. Immers,

$|A(\xi) - A_c(\xi)| = |\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(f(y) - f_c(y)\big)\cos(\xi y)\,\mathrm{d}y| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(f(y) - f_c(y)||\cos(\xi y)|\,\mathrm{d}y \le$

$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f_c(y)|\,\mathrm{d}y = \|f - f_c\|_1.$

Het uiterste rechterlid hangt niet van $\xi$ af en nadert naar 0 als $c \to \infty$.

Analoog gaat $B_c \to B$, uniform als $c \to \infty$. Omdat $A_c$ en $B_c$ continu zijn, zijn $A$ en $B$ dat dus ook. Samenvattend hebben we gevonden dat $A$ en $B$ begrensde continue functies zijn met $\|A\|_\infty \leq \|f\|_1$ en $\|B\|_\infty \leq \|f\|_1$.

• Uit het bewijs van Lemma 4.1.1 plukken we de volgende Pythagoras-Parseval relatie voor $f_c$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f_c)'(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 |A_c(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 |B_c(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi.$$

Hiermee bouwen we de volgende ongelijkheid, geldig voor alle $\gamma > 0$, en alle $c > 1$,

$$\int_0^{\gamma} \xi^2 |A_c(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi + \int_0^{\gamma} \xi^2 |B_c(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \leq \pi \int_{-\infty}^{\infty} |(f_c)'(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \big(|f(x)|^2 + |f'(x)|^2\big) \, \mathrm{d}x.$$

Merk op dat de termen in deze ongelijkheid alle niet-negatief zijn en dat het uiterste rechterlid NIET afhangt van onze keuze van $c$ en $\gamma$. Als we bij willekeurige, doch vast gekozen $\gamma$ in deze ongelijkheid de limiet voor $c \to \infty$ nemen, komt er vanwege de uniforme convergentie $A_c \to A$ en $B_c \to B$,

$$\int_0^{\gamma} \xi^2 |A(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi + \int_0^{\gamma} \xi^2 |B(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \leq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \big(|f(x)|^2 + |f'(x)|^2\big) \, \mathrm{d}x.$$

Laat nu $\gamma \to \infty$. Dan blijkt

$$\int_0^{\infty} \xi^2 |A(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi + \int_0^{\infty} \xi^2 |B(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \leq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \big(|f(x)|^2 + |f'(x)|^2\big) \, \mathrm{d}x.$$

Net als aan het slot van het bewijs van Lemma 4.1.1 volgt nu

$$\int_0^{\infty} |A(\xi)| \, \mathrm{d}\xi < \infty \qquad \text{en} \qquad \int_0^{\infty} |B(\xi)| \, \mathrm{d}\xi < \infty.$$

Na dit voorspel is het bewijs van de Stelling een fluitje van een cent:
i) Als we $|x| \leq c - 1$ nemen volgt uit Lemma 4.1.1-i dat

$$f(x) = f_c(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_c(\xi) \cos \xi x \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_c(\xi) \sin \xi x \, \mathrm{d}\xi.$$

Als $c$ groter wordt, blijft deze identiteit intact. Als je de limiet $c \to \infty$ neemt convergeert het rechterlid uniform naar de gewenste uitdrukking.
ii) Voor elke $c > 1$ volgt uit Lemma 4.1.1-ii dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_c(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |A_c(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |B_c(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi.$$

Uit onze voorbereidende werkzaamheden volgt dat het, aan beide kanten, nemen van $\lim\limits_{c\to\infty}$ een zinvolle bezigheid is. Dat leidt tot het gewenste resultaat.

□

Bij Fourier*reeksen* hebben we gezien dat de Fourierreeks van een functie $g$ die een 'beschaafde' sprong vertoont in het punt $x = a$, zeg, in zo'n punt convergeert naar een waarde halverwege de sprong. Zie Definitie 3.2.8 en Stelling 3.2.9. Dit verschijnsel doet zich ook voor bij Fourierintegralen. Niet zo vreemd als je bedenkt dat de voorafgaande stellingen op Fourierreeksen gebaseerd zijn: Vervang in de bewijzen $f(x)$ maar door $\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)$. De volgende stelling vermelden we zonder bewijs.

**4.1.3 Stelling (Integraalvoorstelling van Fourier 3e versie)**
*Beschouw een functie $f$ op $\mathbb{R}$ met de eigenschappen*

- *$f$ is stuksgewijs glad op elk interval $[a, b]$ met $-\infty < a < b < \infty$.*
- *$f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, dat wil zeggen dat beide integralen $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ én $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$ convergent zijn.*

*Dan geldt:*
*i) $f$ is voor te stellen als een* **Fourierintegraal**, *volgens*

$$\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) = \int_{0}^{\infty} \Big(A(\xi)\cos\xi x + B(\xi)\sin\xi x\Big)\,\mathrm{d}\xi$$

*voor alle $x \in \mathbb{R}$. Hierin is de functies $A$ continu en even. De functie $B$ is continu en oneven. Ze worden wederom gegeven door*

$$A(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\cos\xi\, y\,\mathrm{d}y \quad , \quad B(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\sin\xi\, y\,\mathrm{d}y.$$

*Voorts geldt nog*

*ii)* $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} |A(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} |B(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi. \qquad \square$$

Evenals als bij de Fourierreeksen treedt vereenvoudiging op als $f$ even of oneven is. Als $f$ even is, dan is

$$A(\xi) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} f(y)\, \cos \xi\, y \,\mathrm{d}y,$$

$B(\xi) = 0$ en

$$\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) = \int\limits_0^{\infty} A(\xi) \cos \xi x \,\mathrm{d}\xi$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. De functie $\xi \mapsto A(\xi)$ heet de **Fouriercosinusgetransformeerde** van de functie $f$. Het toevoegen van de functie $A$ aan een functie $f$ volgens bovenstaand recept, dus de afbeelding $f \mapsto A$, heet **Fouriercosinustransformatie**. Tenslotte wordt, in dit geval, $f$ wel aangeduid als de **inverse Fouriercosinusgetransformeerde** van de functie $\xi \mapsto A(\xi)$. Analoog, als $f$ oneven is, dan is

$$B(\xi) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} f(y)\, \sin \xi\, v \,\mathrm{d}y,$$

$A(\xi) = 0$ en

$$\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) = \int\limits_0^{\infty} B(\xi) \sin \xi x \,\mathrm{d}\xi$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. De functie $\xi \mapsto B(\xi)$ heet de **Fouriersinusgetransformeerde** van de functie $f$. Het toevoegen van de functie $B$ aan een functie $f$ volgens bovenstaand recept, dus de afbeelding $f \mapsto B$, heet **Fouriersinustransformatie**. Tenslotte wordt, in dit geval, $f$ wel aangeduid als de **inverse Fouriersinusgetransformeerde** van de functie $\xi \mapsto B(\xi)$.

**4.1.4 Voorbeeld** Definieer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x| < 1, \\ 0 & \text{als } |x| > 1, \\ 1/2 & \text{als } x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Omdat $f$ even is, is $B(\xi) = 0$ en

$$A(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(y)\, \cos \xi\, y \, \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \xi\, y \, \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi}$$

voor alle $\xi > 0$. De integraalvoorstelling van Fourier geeft

$$\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) = \int_0^\infty A(\xi) \cos \xi x \, \mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \xi \cos \xi x}{\xi} \, \mathrm{d}\xi$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Blijkbaar is

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi \cos \xi x}{\xi} \, \mathrm{d}\xi = \begin{cases} \pi/2 & \text{als } |x| < 1, \\ 0 & \text{als } |x| > 1, \\ \pi/4 & \text{als } x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Voor $x = 0$ levert dit op

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} \, \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}$$

en voor $x \in \{-1, 1\}$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi \cos \xi}{\xi} \, \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{4}.$$

Dus $\int_0^\infty \frac{\sin 2\xi}{\xi} \, \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}$ en na substitutie van $t = 2\xi$ krijgen we opnieuw dat $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

## 4.2 Complexe Fouriertransformatie

Voor voldoend nette $f$ herschrijven we de Fouriervoorstelling uit de vorige paragraaf op de volgende manier:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \big\{A(\xi) \cos \xi x + B(\xi) \sin \xi x\big\} \, \mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \big\{A(\xi) - iB(\xi)\big\} e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \big\{A(\xi) + iB(\xi)\big\} e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

In de eerste integraal van het rechterlid vervangen we de integratievariabele $\xi$ door $-\xi$. Omdat $A(\xi) = A(-\xi)$ en $B(-\xi) = -B(\xi)$, is de eerste integraal gelijk aan $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \big\{A(\xi) + iB(\xi)\big\} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}\xi$. Samenvoegen van beide integralen levert

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\{A(\xi) + iB(\xi)\big\} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Merk op dat

$$A(\xi) + iB(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\big\{\cos\xi y + i\sin\xi y\big\}\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\xi y}\,\mathrm{d}y.$$

Door Stelling 4.1.4 te parafraseren komen we tot

**4.2.1 Stelling (Complexe Fourierintegraal)**
*Beschouw een functie $f$ op $\mathbb{R}$ met de eigenschappen*
- $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, *dat wil zeggen: de afgeleide $f'$ van $f$ bestaat op heel $\mathbb{R}$ en is (tenminste) continu.*
- $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, *dat wil zeggen* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ *én* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$.

*Dan geldt:*
*i) $f$ kan geschreven worden als*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

*Deze integraal is absoluut convergent. De functie $\xi \mapsto F(\xi)$ is continu. Ze wordt gegeven door*

$$F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\xi y}\,\mathrm{d}y.$$

*Voorts geldt nog de* **Parseval-identiteit**

*ii)* $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.$$ □

De functie $\xi \mapsto F(\xi)$ heet de **Fouriergetransformeerde** van de functie $f$. Het toevoegen van de functie $F$ aan een functie $f$ volgens bovenstaand recept, dus de afbeelding $f \mapsto F$, heet **Fouriertransformatie**. Tenslotte wordt, in dit geval, $f$ wel aangeduid als de **inverse Fouriergetransformeerde** van de functie $\xi \mapsto F(\xi)$.

In de literatuur vind je een grote diversiteit inzake de conventies van de Fouriertransformatie. Dit noopt tot grote omzichtigheid bij het gebruik van tabellen van Fouriergetransformeerden!!

**4.2.2 Stelling** *Laat $c_1 > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Als we bij een functie $f$, die aan geschikte 'technische' eisen voldoet, een functie $G$ construeren volgens*

$$G(\xi) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\alpha i \xi y} \, \mathrm{d}y,$$

*Dan kan $f$ uit $G$ teruggeconstrueerd worden via*

$$f(x) = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) e^{-\alpha i \xi x} \, \mathrm{d}\xi.$$

*Hierbij moeten de constanten $c_1$, $c_2$, $\alpha$ met elkaar samenhangen volgens*

$$\frac{c_1 c_2}{|\alpha|} = \frac{1}{2\pi}.$$

*De Parseval identiteit luidt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{c_2}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi.$$

**Bewijs.** We drukken $G$ uit in $F$ met $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\xi y} \, \mathrm{d}y$ volgens $c_1 F(\alpha\xi) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\alpha\xi y} \, \mathrm{d}y = G(\xi)$. Nu rekenen we $f$ terug. Stel $\xi = \alpha\eta$.

$$f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}\xi = \frac{|\alpha|}{2\pi c_1} \int_{-\infty}^{\infty} c_1 F(\alpha\eta) e^{-ix\alpha\eta} \, \mathrm{d}\xi = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta) e^{-i\alpha\eta x} \, \mathrm{d}\eta.$$

Blijkbaar moet $\frac{c_1 c_2}{|\alpha|} = \frac{1}{2\pi}$. Wat Parseval betreft geldt blijkbaar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = (c_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = \frac{(c_1)^2}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\eta)|^2 \, \mathrm{d}\eta = \frac{(c_1)^2 2\pi}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 \, \mathrm{d}y.$$

$\square$

We melden enkele veel voorkomende conventies en notaties

### 4.2.3 Voorbeelden

• Beschrijving van 'staande golven': $c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2\pi},\ \alpha = -1$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2\,\mathrm{d}k.$$

Hier stelt $x$ de plaatscoordinaat voor. De variabele $k$ kan worden geinterpreteerd als 'golfgetal'= 'reciproke golflengte'.

• Beschrijving van 'signalen': $c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2\pi},\ \alpha = 1$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

Hier stelt $t$ de tijd voor. De variabele $\omega$ kan worden geinterpreteerd als 'cirkelfrequentie'= '$2\pi\times$frequentie'. Dit geval in combinatie met het vorige treedt vaak op bij theorie van golfvoortplanting. De functie $(x,t) \mapsto e^{i(kx-\omega t)} = e^{ik(x-ct)}$ stelt een naar *rechts* lopende golf met snelheid $c$ voor als $c = \frac{\omega}{k} > 0$.

• Fouriertransformatie als 'unitaire afbeelding in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$':
$c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \alpha = -1$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}\,\mathrm{d}y,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2\,\mathrm{d}y.$$

Een unitaire afbeelding is zoiets als een orthogonale afbeelding. Inderdaad zegt Parseval in dit geval dat $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Deze conventie is meest favoriet in de functionaalanalyse.

• Fouriertransformatie en harmonische analyse: $c_1 = c_2 = 1,\ \alpha = -2\pi$

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}x, \qquad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |G(y)|^2\,\mathrm{d}y.$$

Favoriete conventie bij groepentheoretici. Lijkt mooi op 't eerste gezicht, maar levert helaas lelijke factoren bij het omzetten van 'differentiaties' naar 'vermenigvuldigingen'. Dit blijkt als je Tabel 4.2.5 aan deze conventie aanpast.

• In de quantummechanica zie je vaak: $c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2\pi\hbar},\ \alpha = \frac{1}{\hbar}$

$$\Psi(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{i\frac{1}{\hbar}Et}\,\mathrm{d}t, \qquad \psi(t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(E) e^{-i\frac{1}{\hbar}Et}\,\mathrm{d}E,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(E)|^2\,\mathrm{d}E.$$

De energie $E$ en de tijd $t$ zijn 'canoniek geconjugeerde' variabelen. De constante van Planck $\hbar$ maakt de exponenten dimensieloos.

### 4.2.4 Voorbeelden

• De Fouriergetransformeerde van de functie $x \mapsto e^{-a|x|},\ a > 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} e^{-a|x|} e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}.$$

Toepassing van de inverse transformatie levert

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+\xi^2} e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi = e^{-a|x|}.$$

• De Fouriergetransformeerde van de functie $x \mapsto e^{-bx^2},\ b > 0$.

Stel $h(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x$. Omdat de integrand glad is en snel afneemt, mag de afgeleide van $h$ bepaald worden door onder het integraalteken te differentieren. Er komt $h'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{-bx^2} e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x$. Omdat $\int ixe^{-bx^2} e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{-i}{2b}\int e^{ix\xi}\,\mathrm{d}e^{-bx^2} = \frac{-i}{2b} e^{ix\xi} e^{-bx^2} + \frac{i}{2b}\int e^{ix\xi} e^{-bx^2} i\xi e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x$, volgt dat $h'(\xi) = -\frac{\xi}{2b}h(\xi)$. De algemene oplossing van deze gewone differentiaalvergelijking is $h(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{4b}}$, met $C$ een willekeurige constante. Echter $C = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$. Dus $h(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

Toepassing van de inverse transformatie levert

$$\sqrt{\frac{\pi}{b}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4b}} e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi = e^{-bx^2}.$$

### 4.2.5 Tabel (Fouriergetransformeerden)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $x \mapsto f(x)$ | $\xi \mapsto F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x$ |
| 2 | $x \mapsto g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\xi)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi$ | $\xi \mapsto G(\xi)$ |
| 3 | $x \mapsto e^{-a\|x\|},\ a > 0$ | $\xi \mapsto \frac{2a}{a^2+\xi^2}$ |
| 4 | $x \mapsto \frac{1}{\alpha^2+x^2},\ \alpha > 0$ | $\xi \mapsto \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha\|\xi\|}$ |
| 5 | $x \mapsto e^{-bx^2},\ b > 0$ | $\xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{\frac{-\xi^2}{4b}}$ |
| 6 | $x \mapsto f(x+c),\ c \in \mathbb{R}$ | $\xi \mapsto e^{-ic\xi}F(\xi)$ |
| 7 | $x \mapsto \overline{f(x)}$ | $\xi \mapsto F(-\xi)$ |
| 8 | $x \mapsto f(\gamma x),\ \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0$ | $\xi \mapsto \frac{1}{\|\gamma\|}F(\frac{\xi}{\gamma})$ |
| 9 | $x \mapsto (f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u$ | $F(\xi)\cdot G(\xi)$ |
| 10 | $x \mapsto f'(x)$ | $\xi \mapsto -i\xi F(\xi)$ |
| 11 | $x \mapsto xf(x)$ | $\xi \mapsto -iF'(\xi)$ |
| 12 | $x \mapsto \big(x \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)f(x)$ | $\xi \mapsto -i\big(\xi \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\big)F(\xi)$ |
| 13 | $x \mapsto \big(x \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)^m e^{-\frac{1}{2}x^2}, m = 0,1,2,\ldots$ | $\xi \mapsto (-i)^m\sqrt{2\pi}\big(\xi \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\big)^m e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, m = 0,1,2,\ldots$ |

**Toelichting op de Tabel**

De bewijzen van de in de tabel vermelde eigenschappen van de Fouriertransformatie berusten op (een combinatie van) verwisseling van integratievolgorde, overgang op een nieuwe integratievariabele en partiele integratie. Enkele van dit soort berekeningen volgen nu.

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\gamma x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\gamma|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it\frac{\xi}{\gamma}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|\gamma|}F(\frac{\xi}{\gamma})$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f\star g)(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x\}g(u)\,\mathrm{d}u =$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i(u+v)\xi}\,\mathrm{d}v\}g(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{iv\xi}\,\mathrm{d}v\cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iu\xi}\,\mathrm{d}u = F(\xi)\cdot G(\xi).$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = (e^{ix\xi}f(x))\big|_{x=-\infty}^{\infty} - i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = -i\xi F(\xi).$

- $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) - i\frac{\partial}{\partial\xi}(e^{ix\xi})\,\mathrm{d}x = -i\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = -iF'(\xi).$

- De functies $x \mapsto \big(x \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)^m e^{-\frac{1}{2}x^2}$ zijn blijkbaar 'eigenfuncties' van de Fouriertransformatie. De eigenwaarden zijn blijkbaar $(-i)^m\sqrt{2\pi}$. De $m$-e eigenfunctie heeft de gedaante $m$-e graadspolynoom$\times e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Als je de Fourierconventie zodanig kiest dat Fouriertransformatie een 'unitaire afbeelding in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$' is, zie Voorbeelden 4.2.3, dan verdwijnt de factor $\sqrt{2\pi}$ en worden de eigenwaarden gelijk aan $(-i)^m$. Deze eigenfuncties beschrijven de discrete toestanden van de quantumoscillator. Genormeerd op lengte 1 zien ze er uit als $\Psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$, $n = 0,\, 1,\, 2\, \cdots$ .

# Hoofdstuk 5 Volledigheid, Convexiteit en Projecties

## 5.1 Volledigheid en Separabiliteit

In Hoofdstuk 1 hebben we gezien wat het wil zeggen dat een rij punten $\{\mathbf{x}_n\}$ in een genormeerde vectoruimte $\mathbf{E}$ *convergeert* naar een punt $\mathbf{a}$ in $\mathbf{E}$. In Def 1.3.3 hebben we vooropgesteld dat zo'n *limietpunt* $\mathbf{a}$ voorhanden is. In dit hoofdstuk zullen we vaak *reeksen* beschouwen. We zeggen dat een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{y}_n$, met $\mathbf{y}_n \in \mathbf{E}$ convergent met som $\mathbf{s}$ is als de rij van partiële sommen naar $\mathbf{s}$ convergeert. Zoals we gezien hebben betekent dit $\|\mathbf{s} - \sum_{n=1}^{N} \mathbf{y}_n\| \to 0$, als $N \to \infty$. De vraag is: Hoe kunnen we zien of zo'n vector $\mathbf{s}$ voorhanden is. In het speciale geval van $\mathbf{E} = \mathcal{C}([a,b])$ zegt het kenmerk van Weierstrass 1.4.14 dat uit $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \infty$ volgt dat er een continue functie $f \in \mathcal{C}([a,b])$ beschikbaar is zodat $\|f - \sum_{n=1}^{N} u_k\|_\infty \to 0$, als $N \to \infty$. Anders gezegd: Uit $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \infty$ volgt $\exists f \in \mathcal{C}([a,b])\colon\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n = f$.

**5.1.1 Definitie ((Absoluut) Convergente Reeksen)**
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een rij $\mathbf{x}_{n}{}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$.

a) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n$ heet *convergent* in $\mathbf{E}$ als

$$\exists\, \mathbf{a} \in \mathbf{E}\colon\ \Big[\|\sum_{j=1}^{N} \mathbf{x}_j - \mathbf{a}\| \to\ 0 \text{ als } N \to \infty\Big]$$

b) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n$ heet *absoluut convergent* in $\mathbf{E}$ als $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$, dus convergent is als een 'getallenreeks'.

We vinden nu dat de ruimte $\mathbf{E}$ zo in elkaar dient te zitten dat uit absolute convergentie van een reeks *altijd* convergentie van die reeks geconcludeerd kan worden.

**5.1.2 Definitie (Banach/Hilbert-ruimten)**
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$.

a) We noemen $\mathbf{E}$ een *volledige* of ook wel *complete* genormeerde vectorruimte als *iedere* absoluut convergente reeks in $\mathbf{E}$ convergent is, dat wil zeggen, de reeks heeft een som binnen $\mathbf{E}$. Dus als geldt

$$\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty\Big] \Rightarrow \Big[\exists \mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\big[\lim_{N\to\infty} \|\sum_{j=1}^{N} \mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| = 0\big]\Big].$$

b) Een genormeerde volledige vectorruimte heet *Banachruimte* . Als $\mathbf{E}$ een reële vectorruimte is dan spreken we van een *reële Banachruimte*. Als $\mathbf{E}$ een complexe vectorruimte is dan spreken we van een *complexe Banachruimte*.

c) Als de norm van een Banachruimte van een inproduct afkomstig is, dan spreken we van een *Hilbertruimte*. Het betreft hier dan een *volledige inproductruimte*. We spreken van een *reële Hilbertruimte* of *complexe Hilbertruimte* als de achterliggende vectorruimte een reële vectorruimte, dan wel een complexe vectorruimte is.

### 5.1.3 Stelling

*Een gesloten lineaire deelruimte van een Banachruimte is eveneens een Banachruimte.*

**Bewijs.** Laat $\mathbf{U}$ een gesloten lineaire deelruimrte zijn in een Banachruimte $\mathbf{E}$. Beschouw een rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{U}$ met de eigenschap $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$. Omdat $\mathbf{E}$ volledig verondersteld is, is er een vector $\mathbf{s} \in \mathbf{E}$ voorhanden zodat $\mathbf{s}_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n \to \mathbf{s}$, als $N \to \infty$. Omdat $\mathbf{U}$ een *lineaire* deelruimte is, zitten alle partiële sommen $\mathbf{s}_N$ in $\mathbf{U}$. Omdat $\mathbf{U}$ *gesloten* verondersteld, moet het limietpunt $\mathbf{s}$ van deze rij van partiële sommen eveneens behoren tot $\mathbf{U}$. Dit bewijst dat $\mathbf{U}$, op zichzelf beschouwd, eveneens een Banachruimte is. $\square$

### 5.1.4 Voorbeelden

**a)** $\ell_2(\mathbb{N})$ is een Hilbertruimte.
Deze ruimte is ingevoerd in Definitie 1.1.11. We hoeven 'alleen maar' te bewijzen dat deze ruimte volledig is. Daartoe bestuderen we de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{x}_n$, met $\underline{x}_n = \text{kolom}[x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots, x_{n,j} \cdots] \in \ell_2(\mathbb{N})$, voor alle $n \in \mathbb{N}$. We veronderstellen dat deze reeks absoluut convergent is, dat wil zeggen $\sum_{n=1}^{\infty} \|\underline{x}_n\|_2 < \infty$. We moeten laten zien dat er een $\underline{s} \in \ell_2(\mathbb{N})$ voorhanden is zodat $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{x}_n =$

$\underline{s}$. Bij de 1e stap maken we een kolom $\underline{s} = \text{kolom}[s_1, s_2, \cdots, s_j, \cdots]$, die kandidaat is om 'som' van onze reeks te zijn. Bij de 2e stap laten we zien dat de vector $\underline{s}$ tot $\ell_2(\mathbb{N})$ behoort. Bij de 3e stap bewijzen we dat $\sum_{n=1}^{N} \underline{x}_n \to \underline{s}$, als $N \to \infty$ in $\ell_2(\mathbb{N})$.

STAP 1: Voor alle $n$, $j \in \mathbb{N}$ geldt $|x_{n,j}| = \sqrt{|x_{n,j}|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^2} = \|\underline{x}_n\|$.

Dit betekent dat voor elke $j \in \mathbb{N}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n,j}$ absoluut convergent is in $\mathbb{C}$. We hebben zelfs $|s_j| = |\sum_{n=1}^{\infty} x_{n,j}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n,j}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\underline{x}_n\|_2 < \infty$. Dus in ieder geval $\underline{s} = \text{kolom}[s_1, s_2, \cdots, s_j \cdots] \in \ell_\infty$.

STAP 2: We laten zien dat $\underline{s} \in \ell_2(\mathbb{N})$. Voor elke vastgekozen $m \in \mathbb{N}_0$ gelden de ongelijkheden

$$\sum_{j=1}^{M} |\sum_{n=m+1}^{N} x_{n,j}|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=m+1}^{N} x_{n,j}|^2 = \|\sum_{n=m+1}^{N} \underline{x}_n\|_2^2 \leq$$

$$\leq \big(\sum_{n=m+1}^{N} \|\underline{x}_n\|_2\big)^2 \leq \big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\underline{x}_n\|_2\big)^2.$$

Merk op dat het uiterste rechterlid noch van $M$, noch van $N$ afhangt. Neem de limiet $N \to \infty$. Er komt $\sum_{j=1}^{M} |\sum_{n=m+1}^{\infty} x_{n,j}|^2 \leq \big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\underline{x}_n\|_2\big)^2$. Neem vervolgens de limiet $M \to \infty$. Omdat alle bijdragen in de som positief zijn, komt er

$$(\star) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=m+1}^{\infty} x_{n,j}|^2 \leq \big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\underline{x}_n\|_2\big)^2.$$

Door $m = 0$ te kiezen komen we tot $\sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=1}^{\infty} x_{n,j}|^2 \leq \big(\sum_{n=1}^{\infty} \|\underline{x}_n\|_2\big)^2$

Gevolg: $\underline{s} \in \ell_2(\mathbb{N})$.

STAP 3: Kies een $\varepsilon > 0$, (zo klein als je maar wil). Kies $m = m_\varepsilon$ in $(\star)$ zo groot dat $\sum_{n=m_\varepsilon+1}^{\infty} \|\underline{x}_n\|_2 < \varepsilon$. Dan komt er

$$\|\underline{s} - \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} \underline{x}_n\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |s_j - \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} x_{n,j}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=m_\varepsilon+1}^{\infty} x_{n,j}|^2 \leq \big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\underline{x}_n\|_2\big)^2 < \varepsilon^2.$$

Omdat dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$, staat er $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{x}_n = \underline{s}$.

**b)** $\mathcal{C}([a, b])$ is een Banachruimte.

Deze ruimte is ingevoerd in Definitie 1.1.4. Zie ook Stelling 1.4.5. We laten ook hier alleen de volledigheid zien. Daartoe bestuderen we de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, met continue functies $x \mapsto f_n(x)$ die voor alle $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{C}([a,b])$ zitten. We veronderstellen dat deze reeks absoluut convergent is in $\mathcal{C}([a,b])$, dat wil zeggen $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. We moeten laten zien dat er een $\psi \in \mathcal{C}([a,b])$ voorhanden is zodat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \psi$. Bij de 1e stap maken we een functie $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, die kandidaat is om 'som' van onze reeks te zijn. Bij de 2e stap laten we zien dat de functie $\psi$ tot $\mathcal{C}([a,b])$ behoort. Bij de 3e stap bewijzen we dat $\sum_{n=1}^{N} f_n \to \psi$, als $N \to \infty$, in $\mathcal{C}([a,b])$.

STAP 1: Voor alle $x \in [a,b]$ geldt $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$. De convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ majoreert, voor elke $x \in [a,b]$, de getallenreeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Deze getallenreeks is dus convergent in iedere $x \in [a,b]$. De som van de reeks noteren we met $\psi(x)$.

STAP 2: We laten zien dat $\psi$ een continue functie is. Wijs een willekeurige $c \in [a,b]$ aan. Kies een $\varepsilon > 0$. Er is een $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ zo dat $\sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Voorts is er, omdat alle $f_n$ continu zijn, een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in [a,b]$, met $|x - c| < \delta$, geldt $|\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Dan geldt voor alle $x \in (a,b)$ met $|x - c| < \delta$:

$|\psi(x) - \psi(c)| \leq$

$$
\begin{array}{lcccccc}
\leq & |\psi(x) - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_n(x))| & + & |\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_n(c)| & + & |\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_n(c) - \psi(c)| \\
\leq & |\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(x))| & + & \frac{\varepsilon}{3} & + & |\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(c))| \\
\leq & \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty & + & \frac{\varepsilon}{3} & + & \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \\
< & \frac{\varepsilon}{3} & + & \frac{\varepsilon}{3} & + & \frac{\varepsilon}{3} \\
= & \varepsilon. & & & &
\end{array}
$$

Dit betekent dat $\psi$ continu is in $c$. Het voorafgaande geldt voor alle $c \in [a,b]$, dus $f$ is continu op $[a,b]$.

STAP 3: $\|\psi - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_n)\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |\psi(x) - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_n(x))| = \max_{a \leq x \leq b} |\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

**c)** $\mathbb{L}_(a,b)$ is een Hilbertruimte.

Het bewijs hiervan laten we zitten omdat we niet genoeg weten van integratietheorie.

**d)** $\ell_1(\mathbb{N})$ en $\ell_\infty(\mathbb{N})$ zijn Banachruimten.
Deze ruimten zijn ingevoerd in Definitie 1.1.11. De volledigheidsbewijzen voor deze ruimten vertonen sterke analogie met, respectievelijk, a) en b).

In de volgende stelling beschouwen we een reeks van vectoren in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$, met als extra aanname dat de termen van de reeks een orthogonaal stelsel vormen. Om tot convergentie van zo'n reeks te besluiten, blijk je met minder dan absolute convergentie toe te kunnen.

**5.1.5 Stelling**
*Gegeven: Een Hilbertruimte* $\mathbf{H}$ *en* $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$. *Een orthonogonale rij* $\{\mathbf{x}_1\,,\,\mathbf{x}_2\,,\,\cdots\,,\mathbf{x}_n\,,\cdots\} \subset \mathbf{H}$. *Een orthonormale rij* $\{\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{e}_2\,,\,\cdots\,,\mathbf{e}_n\,,\cdots\} \subset \mathbf{H}$. *Een rij* $\{\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\cdots\,,\alpha_n\,,\cdots\} \subset \mathbb{C}$. *Er geldt*

*i)*

$$\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n \textit{ is convergent in } \mathbf{H}\Big] \Leftrightarrow \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\|^2 < \infty\Big]$$

*ii)*

$$\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{e}_n \textit{ is convergent in } \mathbf{H}\Big] \Leftrightarrow \Big[\{\alpha_n\} \in \ell_2(\mathbb{N})\Big]$$

*iii)*

$$\Big[\{\mathbf{e}_n\} \textit{ is een orthonormale basis in } \mathbf{H}\Big] \Leftrightarrow \Big[\forall n \in \mathbb{N}\ (\mathbf{e}_n\,,\mathbf{y}) = 0\ \Rightarrow \big[\mathbf{y} = 0\big]\Big]$$

*iv)*

$$\Big[\{\mathbf{e}_n\} \textit{ is een orthonormale basis in } \mathbf{H}\Big] \Leftrightarrow \Big[\textit{opspansel}\{\mathbf{e}_n\} \ \textit{ is dichte deelverzameling in } \mathbf{H}\Big]$$

**Bewijs.**
i) Voor $M > N$ passen we de Stelling van Pythagoras 3.1.4 toe:
$\| \sum_{k=M}^{N} \mathbf{x}_k\|^2 = \sum_{k=M}^{N} \|\mathbf{x}_k\|^2$.
$\Rightarrow$) Neem $M = 1$. Als links $\lim_{N\to\infty}$ bestaat in $\mathbf{H}$, dan is blijkbaar de 'getallenreeks' ter rechterzijde eveneens convergent.

$\Leftarrow$) We gaan de termen van de reeks in groepjes bij elkaar nemen om alsnog tot een *absoluut* convergente reeks te komen. Kies een rij natuurlijke getallen $1 = N_0 < N_1 < N_2 < N_3 < \ldots < N_k < N_{k+1} < \ldots$, met $k \in \mathbb{N}$, zodanig dat voor $k = 2, 3, \ldots$ geldt $\sum\limits_{n=N_{k-1}}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\|^2 \leq \frac{1}{k^4}$. We vormen nu de rij van vectoren $\mathbf{y}_k = \sum\limits_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} \mathbf{x}_n$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Met Pythagoras vinden we $\|\mathbf{y}_k\|^2 = \sum\limits_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} \|\mathbf{x}_n\|^2 \leq \frac{1}{k^4}$, als $k > 1$. Een en ander is nu zo geregeld dat de getallenreeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{y}_k\|$ convergent is. Dus is de reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{y}_k$ convergent in $\mathbf{H}$, met som $\mathbf{s}$, zeg. Dit op grond van de volledigheid van $\mathbf{H}$. Je kunt nu laten zien dat ook $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n = \mathbf{s}$ in $\mathbf{H}$.

ii) De rij $\{\alpha_n \mathbf{e}_n\}$ is een orthogonale rij. Pas i) toe.

iii$\Rightarrow$) Al bewezen in Stelling 3.1.9 (Parseval).

iii$\Leftarrow$) Kies $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ willekeurig. Uit de ongelijkheid van Bessel 3.1.5 volgt dat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{e}_n, \mathbf{x})|^2 < \infty$. De reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mathbf{e}_n, \mathbf{x})\mathbf{e}_n$ is dan convergent (deel ii) van deze stelling), met som $\mathbf{y}$, zeg. Door uitschrijven vinden we dat $\forall n\colon\ (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{e}_n) = 0$. Op grond van onze aanname moet dan $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ zijn.

iv) Staat in Stelling 3.1.9. $\square$

**5.1.6 Definitie (Separabele Hilbertruimte)**
Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ heet *separabel* als ze een orthonormale rij bevat die tevens een orthonormale basis is.

**5.1.7 Voorbeelden**

a) $\mathbb{C}^N$, $\ell_2(\mathbb{N})$, $\mathbb{L}_2(a, b)$, zijn separabele Hilbertruimten.

b) Een voorbeeld van een *niet-separabele* Hilbertruimte wordt geleverd door de vectorruimte van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met de eigenschappen:
(1) $f$ neemt een van 0 verschillende waarde aan in ten hoogste een aftelbaar aantal punten van $\mathbb{R}$.
(2) $\sum\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|^2 < \infty$.
Het inproduct wordt gegeven door $(f,\, g) = \sum\limits_{x\in\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x)$. Merk op dat in deze som 'over alle reële getallen' hoogstens een aftelbaar aantal termen effectief zijn.

**5.1.8 Stelling**
*Gegeven: Een separabele Hilbertruimte* $\mathbf{H}$.
*Er geldt:*

*i) Er bestaat een dichte deelverzameling in* $\mathbf{H}$ *die aftelbaar is.*

*ii) Ieder orthogonaal stelsel in* $\mathbf{H}$ *is eindig of aftelbaar.*

**Bewijs.**
i) Laat $\{\mathbf{e}_k\}$ een orthonormale basis in $\mathbf{H}$ zijn. Definieer het 'rationale opspansel' $W$ van deze orthonormale basis door $W = \{(\alpha_1 + i\beta_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha_n + i\beta_n)\mathbf{e}_n \,\big|\, \alpha_1, \cdots \alpha_n,\ \beta_1, \cdots \beta_n\ \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$. Omdat voor iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ geldt $\| \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\mathbf{e}_k \| \to 0$ als $N \to \infty$, en de coëfficienten $(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})$ willekeurig goed benaderd kunnen worden met rationale complexe getallen, is $W$ dicht in $\mathbf{H}$.
ii) Laat $S$ een orthogonaal stelsel zijn. Als we iedere $\mathbf{x} \in S$ vervangen door $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, dan wordt $S$ een orthonormaal stelsel. De afstand tussen twee willekeurige elementen $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ van $S$ is gelijk aan $\sqrt{2}$ omdat $(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2$. Beschouw nu $\{B(\mathbf{x}, \frac{1}{2}\sqrt{2})\}$, dat is de set van open ballen met straal $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ rond alle $\mathbf{x} \in S$. Deze ballen hebben, vanwege de onderlinge afstand $\sqrt{2}$ der $\mathbf{x}$'en, geen enkele gemeenschappelijk punt. Als er nu in $\mathbf{H}$ een aftelbare dichte deelverzameling $W$ is, dan moet zich in elk van deze ballen minstens 1 punt van $W$ bevinden. Dit impliceert dat het stelsel $S$ ten hoogste aftelbaar kan zijn.

□

**5.1.9 Definitie (Hilbertruimte isomorphisme)**
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}_1$ met inproduct $(\cdot, \cdot)_1$. Een Hilbertruimte $\mathbf{H}_2$ met inproduct $(\cdot, \cdot)_2$.
We noemen $\mathbf{H}_1$ *isomorf* met $\mathbf{H}_2$ als er een lineaire bijectie $\mathcal{T} : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ is, zodat $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}_1 \left[ (\mathcal{T}\mathbf{x},\, \mathcal{T}\mathbf{y})_2 = (\mathbf{x},\, \mathbf{y})_1 \right]$. (Merk op dat $\|\mathcal{T}\| = 1$.)

**5.1.10 Stelling**
*Gegeven: Een separabele Hilberruimte* $\mathbf{H}$.

*i) Als* $\mathbf{H}$ $\infty$*-dimensionaal is, dan is* $\mathbf{H}$ *isomorf met* $\ell_2(\mathbb{N})$.

*ii) Als* $\mathbf{H}$ $N$*-dimensionaal is, dan is* $\mathbf{H}$ *isomorf met* $\mathbb{C}^N$.

**Bewijs.**
i) Op grond van de voorafgaande stelling kan een orthonormale basis ten hoogste een aftelbaar aantal elementen bevatten. Nummer deze bijvoorbeeld met de natuurlijke getallen. Noteer de basis dan met $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Met Stelling

5.1.6i-ii zien we dan dat er bij iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ een kolom $\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N})$ hoort en omgekeerd. Als op deze manier $\underline{x} = \mathcal{T}\mathbf{x}$ en $\underline{y} = \mathcal{T}\mathbf{y}$, dan volgt door uitschrijven $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\underline{x}, \underline{y})$.

ii) Als $\dim \mathbf{H} = N$ gaat de beschouwing onder i) door met $\ell_2(\mathbf{N})$ vervangen door $\mathbb{C}^N$. $\square$

## 5.2 Convexiteit en projecties

Veel meetkundige ideeën uit de gewone drie dimensionale meetkunde, denk aan zaken als projecties en afstandsbepalingen tussen verzamelingen , blijken ook betekenis te hebben in ($\infty$-dimensionale) Hilbertruimten. We kunnen dus ook in zulke 'grote' ruimten meetkundige intuities opbouwen.

**5.2.1 Definitie ( Convexe Verzamelingen)**

Beschouw: Een reële of complexe vectorruimte $\mathbf{E}$.
Een deelverzameling $\mathbf{V} \subset \mathbf{E}$.

De verzameling $\mathbf{V}$ heet *convex* als

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}\, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}\, \forall \alpha \in [0,1]: \quad \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \,\in\, \mathbf{U}.$$

In woorden: De verbindingsrechte tussen twee punten in $\mathbf{V}$ zit, in zijn geheel, in $\mathbf{V}$.

**5.2.2 Opmerking**

Belangrijke voorbeelden van convexe verzamelingen zijn: Lineaire Deelruimten, Hypervlakken, Bollen, Kubussen...
Twee disjuncte bollen vormen, bijeengenomen, géén convexe verzameling.

**5.2.3 Stelling (Closest point property)**

*Gegeven: Een Hilbertruimte* $\mathbf{H}$. *Een gesloten en convexe deelverzameling* $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$. *Een punt* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.

*i) Dan is er precies één punt* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *zodat* $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{V}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. *In woorden: Er is precies één punt in* $\mathbf{V}$ *waar de kortste afstand tot* $\mathbf{x}$ *wordt aangenomen.*

*ii) In het geval dat* $\mathbf{H}$ *een reële Hilbertruimte is, wordt het meest nabijgelegen punt* $\mathbf{v}$ *gekarakeriseerd door* $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{V}\, \big[(\mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{z} - \mathbf{v}) \leq 0\big]$.

**Bewijs.**
**i)** We bewijzen eerst het bestaan van een meest nabij gelegen punt. Schrijf

$d = \inf_{\mathbf{z}\in\mathbf{V}} \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|$. Kies een 'minimaliserende' rij $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathbf{V}$ zodat $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_n\| = d$. Door eventueel de rij wat uit te dunnen kunnen we er ook van eisen dat $\|\mathbf{x}-\mathbf{v}_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^4}$. Merk op dat, wegens de convexiteit van $\mathbf{V}$ geldt: $\forall m, n \in \mathbb{N}\ \ \frac{1}{2}(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_n) \in \mathbf{V}$. En dus $\|\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_m+\mathbf{v}_n)\| \geq d$. Gebruik makend van de paralellogramidentiteit schrijven we: $\|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_{m-1}\|^2 = 2\|\mathbf{x}-\mathbf{v}_m\|^2 + 2\|\mathbf{x}-\mathbf{v}_{m-1}\|^2 - 4\|\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_{m-1})\|^2$. Tip: Teken het parallogram van de vier relevante vectoren. Uit de laatste identiteit vinden we de schatting $\|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_{m-1}\|^2 \leq 2d^2 + 2\frac{1}{m^4} + 2d^2 + 2\frac{1}{(m-1)^4} - 4d^2 \leq 4\frac{1}{(m-1)^4}$. Dus $\|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_{m-1}\| \leq 2\frac{1}{(m-1)^2}$. We gaan nu aantonen dat $\lim_{N\to\infty} \mathbf{v}_N$ bestaat in $\mathbf{H}$ en in $\mathbf{V}$ ligt. Daartoe vertalen we onze rij naar een reeks: $\mathbf{v}_N = \mathbf{v}_1 + \sum_{m=2}^{N}(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_{m-1})$. Als we aantonen dat de reeks $\sum_{m=2}^{\infty}(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_{m-1})$ convergeert in $\mathbf{H}$, dan is de klus geklaard. Omdat $\mathbf{H}$ volledig is volstaat absolute convergentie van onze reeks. Welnu, de convergente reeks $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{(m-1)^2}$ is een majorante voor $\sum_{m=2}^{\infty} \|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_{m-1}\|$. Er is dus een $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ voorhanden zodat $\mathbf{v}_m \to \mathbf{v}$. Omdat $\mathbf{V}$ gesloten is geldt bovendien $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Tenslotte $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{x} - \lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_n\| = d$. Hiermee is de existentie van het meest nabije punt aangetoond. Nu nog de uniciteit ervan: Stel dat ook in $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ de kortste afstand $d$ tot $\mathbf{x}$ wordt aangenomen. Dan is, met gebruikmaking van de parallelogramidentiteit, $\frac{1}{2}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in \mathbf{V}$ en $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|^2 - 4\|\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}+\mathbf{w})\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$. Blijkbaar geldt $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

**ii)** Stel dat de ongelijkheid geldt. Dan $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{V}:\quad \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 = 2(\mathbf{x}-\mathbf{v}, \mathbf{z}-\mathbf{v}) - \|\mathbf{z}-\mathbf{v}\|^2 \leq 0$. Dus $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{V}:\quad \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|$.
Nu bewijzen we de omkering, dus dat voor het meest nabij gelegen punt $\mathbf{v}$ de ongelijkheid geldt. Laat $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$. Omdat $\mathbf{V}$ convex is, geldt $\forall \lambda \in (0,1):\quad \lambda\mathbf{z} + (1-\lambda)\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. We hebben $\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{z} + (1-\lambda)\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{v}) - \lambda(\mathbf{z}-\mathbf{v})\|$. Dit kwadrateren we. Omdat $\mathbf{H}$ reëel is wordt dit $\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 - 2\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{v}, \mathbf{z}-\mathbf{v}) + \lambda^2\|\mathbf{z}-\mathbf{v}\|^2$. Dus $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{V}:\quad (\mathbf{x}-\mathbf{v}, \mathbf{z}-\mathbf{v}) \leq \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{z}-\mathbf{v}\|^2$. Neem nu $\lim_{\lambda\to 0}$, dan volgt de gewenste ongelijkheid.
De meetkundige betekenis is dat je door $\mathbf{v}$ een hypervlak kunt aanbrengen zodat $\mathbf{x}$ aan een kant van dit vlak zit en $\mathbf{V}$ aan de andere kant. De hoek tussen de vectoren $\mathbf{x}-\mathbf{v}$ en $\mathbf{z}-\mathbf{v}$ is stomp. Tenslotte, als het 'scheidend hypervlak' uniek is dan staat $\mathbf{x}-\mathbf{v}$ loodrecht op dit hypervlak. □

**5.2.4 Definitie**
Gegeven: Als in voorgaande stelling.
De toevoeging $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$ heet *projectieafbeelding* of kortweg *projectie* op $\mathbf{V}$.
Merk op dat geldt: $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})) = \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$. In woorden: $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}$ is *idempotent*.

**5.2.5 Definitie (Orthogonale complement)**
Uitgangspunt: Inproductruimte $\mathbf{H}$. Deelverzamelingen $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$ en $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$.

a) $\mathbf{a} \in \mathbf{H}$ heet *orthogonaal*, of ook wel *loodrecht*, op $\mathbf{U}$, notatie: $\mathbf{a} \perp \mathbf{U}$, als $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{U}$ geldt $(\mathbf{a}\,,\mathbf{x}) = 0$.

b) $\mathbf{U} \perp \mathbf{V}$ betekent $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{U}\ \forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ geldt dat $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

c) De verzameling $\mathbf{U}^{\perp} = \{\mathbf{x} \,\big|\, \mathbf{x} \in \mathbf{H},\ \mathbf{x} \perp \mathbf{U}\}$ heet het *orthogonaal complement*, of ook *orthoplement* van $\mathbf{U}$.

**5.2.6 Opmerkingen**

a) $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$.

b) $\mathbf{U} \perp \mathbf{V} \ \Rightarrow\ \big[\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}\big]$ of $\big[\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \emptyset\big]$.

c) $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = \mathbf{H}, \qquad \mathbf{H}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

d) $\mathbf{U}^{\perp}$ is altijd een lineaire deelruimte. Dus ook als $\mathbf{U}$ dat niet is.

**5.2.7 Stelling**
*Gegeven: Een Hilbertruimte* $\mathbf{H}$. *Een deelverzameling* $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$.
*Dan geldt:* $\mathbf{U}^{\perp}$ *is een gesloten lineaire deelruimte in* $\mathbf{H}$.

**Bewijs.**
$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}^{\perp}$ wil zeggen $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\colon\ (\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$ en $(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = 0$. Dan ook $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\colon\ (\mathbf{u}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = 0$. Dus $\mathbf{U}^{\perp}$ is een lineaire deelruimte. Om de geslotenheid te bewijzen beschouwen we een rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{U}^{\perp}$ met $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x} \in \mathbf{H}$. Dan ligt ook $\mathbf{x} \in \mathbf{U}^{\perp}$. Immers $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\ \ (\mathbf{u}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathbf{u}, \mathbf{x}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$. $\square$

**5.2.8 Stelling**
*Gegeven: Een Hilbertruimte* $\mathbf{H}$. *Een gesloten lineaire deelruimte* $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$.
*Dan geldt:*

*i)* $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^{\perp} \ \Leftrightarrow\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\Big[\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{w}\|\Big]$.

*ii)* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\ \exists \mathbf{u} \in \mathbf{U}\ \exists \mathbf{w} \in \mathbf{U}^{\perp} \Big[ \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \Big]$

*iii)* $\mathbf{U}^{\perp\perp} = \mathbf{U}$

*iv)* $\mathbf{H} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^{\perp}$. *Dit betekent dat iedere* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ *op precies één manier geschreven kan worden als* $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ *met* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *en* $\mathbf{y} \in \mathbf{U}^{\perp}$. *In notatie met projectieafbeeldingen:* $\mathbf{y} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}$ *en* $\mathbf{z} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}\mathbf{x}$. *Of:* $\mathbf{x} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x} + \mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}\mathbf{x}$.

**Bewijs.**
i$\Rightarrow$) Met Pythagoras $\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \geq \|\mathbf{w}\|^2$.

ii$\Leftarrow$) Stel dat de ongelijkheid geldt $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Dan ook $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \|\mathbf{w} - \lambda\mathbf{u}\|^2 \geq \|\mathbf{w}\|^2$. Schrijf dit uit als inproducten. Er komt $-2\operatorname{Re}[\lambda(\mathbf{w},\mathbf{u})] + |\lambda|^2\|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$. Kies $\lambda = tz$ met $t > 0$ en $z \in \mathbb{C}$ zodanig dat $z(\mathbf{w},\mathbf{u}) = |(\mathbf{w},\mathbf{u})|$. Dan staat er $-2t|(\mathbf{w},\mathbf{u})| + t^2\|\mathbf{u}\|^2$. Deel door $t$ en neem de limiet voor $t \to 0$. Dan volgt $(\mathbf{w},\mathbf{u}) = 0$.

ii) Laat $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. Omdat $\mathbf{U}$ (ook) een gesloten convexe deelverzameling is, is er een meest nabij $\mathbf{x}$ gelegen $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Schrijf $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$. Voor alle $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$ is ook $\mathbf{u} + \mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$. Omdat $\mathbf{u}$ het dichtst bij $\mathbf{x}$ ligt geldt $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x} - (\mathbf{u} + \mathbf{u}_1)\|$. Dus $\forall \mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}\ \|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_1\|$. Volgens i) van deze stelling is dan $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$.

iii) Enerzijds: Als $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ dan $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}^{\perp}\ (\mathbf{u},\mathbf{w}) = 0$. Dus $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\perp\perp}$. Dus $\mathbf{U} \subset \mathbf{U}^{\perp\perp}$.
Anderzijds: Stel $\mathbf{x} \in \mathbf{U}^{\perp\perp}$. Schrijf $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ met $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ en $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$. Omdat $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{U}^{\perp\perp}$, is ook $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\perp\perp}$. Blijkbaar $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^{\perp} \cap \mathbf{U}^{\perp\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Dus $\mathbf{x} = \mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Dus $\mathbf{U}^{\perp\perp} \subset \mathbf{U}$. Samengevat: $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\perp\perp}$.

iv) Volgt uit ii) en iii). $\square$

## 5.3 De representatiestelling van Riesz

Uit het 1e jaar is bekend dat een lineaire functie $f(\underline{x})$ op een eindig-dimensionale vectorruimte altijd kan worden voorgesteld door een inproduct met een vaste vector $\underline{a}$, zeg. Dus $f(\underline{x}) = (\underline{a}\,,\,\underline{x})$. Zoiets blijkt ook in $\infty$-dimensionale Hilbertruimten te kunnen. Althans voor BEGRENSDE lineaire functionalen!

**5.3.1 Stelling (Riesz)**
*Gegeven: Een Hilbertruimte* $\mathbf{H}$.
*Een functionaal* $f\colon \mathbf{H} \to \mathbb{C}$, *met de eigenschap*

$$\exists M > 0\,\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\colon\quad |f(\mathbf{x})| \leq M\|\mathbf{x}\|.$$

*(Zo'n lineaire functionaal heet* begrensd.*) Dan geldt:*

$$\exists! \mathbf{a} \in \mathbf{H}\, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\colon \quad f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\,,\,\mathbf{x}).$$

*Voor de norm geldt* $\|f\| = \|\mathbf{a}\|$.

**Bewijs.**
Eerst bewijzen we dat er zo'n $\mathbf{a}$ bestaat. Beschouw daartoe de nulruimte $\mathbf{N}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H} \,\big|\, f(\mathbf{x}) = 0\}$. Als $\mathbf{N}(f) = \mathbf{H}$, dan hebben we blijkbaar de 0-functionaal te pakken en voldoet $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Veronderstel dus $\exists \mathbf{z}\colon\ f(\mathbf{z}) \neq 0$. Omdat $\mathbf{N}(f)$ een gesloten lineaire deelruimte is, kunnen we $\mathbf{z}$ opsplitsen: $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_1$, met $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{N}(f)$ en $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{N}(f)^\perp$. Neem nu een willekeurige $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. Splits die ook op: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$, met $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{z}_1)}\mathbf{z}_1$ en $\mathbf{x}_1 = \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{z}_1)}\mathbf{z}_1$. Narekenen leert dat inderdaad $f(\mathbf{x}_0) = 0$ en $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{N}(f)^\perp$. Uit $\mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{z}_1)}\mathbf{z}_1 \perp \mathbf{z}_1$ volgt $(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\frac{(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_1)}{f(\mathbf{z}_1)}$. Neem nu $\mathbf{a} = \frac{\overline{f(\mathbf{z}_1)}}{\|\mathbf{z}_1\|^2}\mathbf{z}_1$. Dan geldt $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\colon\quad f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$.

Nu de uniciteit van $\mathbf{a}$. Veronderstel $\exists \mathbf{b} \in \mathbf{H}\, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\colon\ f(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}, \mathbf{x})$. Dan moet $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\colon\ (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$. Op grond van de derde eigenschap van het inproduct moet dan $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Tenslotte: Met Cauchy-Schwarz zien we $|f(\mathbf{x})| = |(\mathbf{a}, \mathbf{x})| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{x}\|$. Dus moet $\|f\| \leq \|\mathbf{a}\|$. Omdat $f(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^2$ zie je dat niet kan gelden $\|f\| < \|\mathbf{a}\|$. Dan moet wel $\|f\| = \|\mathbf{a}\|$. $\square$

**5.3.2 Opmerkingen**
**i)** In het bewijs zie je dat $\mathbf{N}(f)^\perp$ wordt opgespannen door $\mathbf{z}_1$ in z'n eentje. Dus $\dim \mathbf{N}(f)^\perp = 1$. Dus buiten $\mathbf{N}(f)$ is er nog maar één dimensie over. Dit wordt wel verwoord door te zeggen:
$\mathbf{N}(f)$ heeft *co-dimensie 1* .

ii) De ruimte $\mathbf{H}^\star$ van alle begrensde lineaire functionalen op $\mathbf{H}$ staat blijkbaar in 1-1-correspondentie tot $\mathbf{H}$ via de toevoeging $f \mapsto \mathbf{a}$. De toevoeging $f \mapsto \mathbf{a}$ is anti-lineair. Dat wil zeggen $(\alpha f + \beta g) \mapsto (\overline{\alpha}\mathbf{a} + \overline{\beta}\mathbf{b})$. Blijkbaar staan $\mathbf{H}$ en $\mathbf{H}^\star$ in 1-1-correspondentie via deze toevoeging. Sommigen zeggen zelfs dat $\mathbf{H}$ *gelijk* is aan $\mathbf{H}^\star$, haar *duale*. Deze 'identificatie' is niet altijd verstandig omdat die van het gekozen inproduct afhangt.

# 5.4 De Banach Contractiestelling

De Stelling van het 'meest nabij gelegen punt' is een voorbeeld van een *existentiestelling*. Je bewijst dat er voor een zeker probleem een oplossing bestaat. Bijvoorbeeld een toestand met minimale energie binnen een set van toegestane configuraties. De nu volgende stelling is de moeder van veel existentiestellingen voor differentiaalvergelijkingen, integraalvergelijkingen, enzovoort. De stelling geeft niet alleen een argument voor het *bestaan* van een oplossing, daar liggen veel toepassers niet wakker van, maar geeft bovendien *uniciteit* en een *constructieve benadering* van de oplossing. We formuleren de stelling veel minder algemeen dan in analyse tekstboeken gebruikelijk is.

**5.4.1 Stelling (Banach Contractiestelling)**

*Gegeven:* • *Een Banachruimte* $\mathbf{E}$ *en, daarin, een gesloten deelverzameling* $\mathbf{R}$.
• *Een afbeelding* $\Phi\colon\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *met de eigenschap*

$$\exists \kappa \in \mathbb{R},\ 0 \leq \kappa < 1,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}\, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}\colon \quad \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\| \leq \kappa \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

*(Zo'n afbeelding heet een* contractie.*)*

*Dan geldt:* • *Er bestaat precies één punt* $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$ *zodat* $\Phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.
• *Iedere rij* $\{\mathbf{x}_n\}$, *gedefiniëerd door* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}$ *en* $\mathbf{x}_{n+1} = \Phi(\mathbf{x}_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *convergeert naar* $\mathbf{a}$. *Dus* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$.

*(Het punt* $\mathbf{a}$ *heet 'vast punt' of 'dekpunt' of 'fixed point' van* $\Phi$.*)*

**Bewijs.**
• Eerst laten we zien dat er ten hoogste één vast punt $\mathbf{a}$ kan bestaan, de *uniciteit*. Veronderstel eens dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ beide vaste punten zouden zijn. Dus $\Phi(\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{b})$. Dan zou $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\Phi(\mathbf{a}) - \Phi(\mathbf{b})\| \leq \kappa\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Herinner U nu dat $0 \leq \kappa < 1$. Er volgt $(1 - \kappa)\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = 0$, dus $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = 0$, dus $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
• Nu laten we zien dat er ten minste een vast punt $\mathbf{a}$ bestaat, de *existentie*. Beschouw te dien einde de zo even ingevoerde rij $\{\mathbf{x}_n\}$. Merk op dat $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq \kappa\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\| \leq \ldots \leq \kappa^{n-1}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leq \kappa^n\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$.
Dit betekent dat de (getallen)reeks $\mathbf{x}_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|$ gemajoreerd wordt door de convergente meetkundige reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \kappa^n\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$. Op grond van de volledigheid van $\mathbf{E}$ is dan de reeks $\mathbf{x}_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1})$ convergent in $\mathbf{E}$. Anders gezegd, de rij $\{\mathbf{x}_n\}$ is een *convergente* rij. Geef het limietpunt van deze rij de naam $\mathbf{a}$. Merk op dat $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, omdat $\mathbf{R}$ gesloten is. Uit $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| \to 0$, als $n \to \infty$ halen we dat $\|\Phi(\mathbf{a}) - \mathbf{x}_{n+1}\| \leq \kappa\|\mathbf{a} - \mathbf{x}_n\| \to 0$, als $n \to \infty$. Dus $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_{n+1} = \Phi(\mathbf{a})$. Aangezien $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$, volgt tenslotte dat $\Phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Blijkbaar is $\mathbf{a}$ een vast punt. □

**5.4.2 Voorbeeld (Newton)**
• Het positieve nulpunt van de functie $x \mapsto x^2 - 2$ is het zelfde als de positieve oplossing (= het vaste punt) van de vergelijking $\phi(x) = x$ met

$\phi(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x})$. Dat dit nulpunt gelijk $\sqrt{2}$ is weten we wel. Echter, de toepassing van de Banach contractiestelling levert in dit geval een efficiënte methode om $\sqrt{2}$ te berekenen. Hier hebben we $\mathbf{E} = \mathbb{R}$. Neem voor $\mathbf{R}$ het gesloten interval $[1, 2]$.
1. Er geldt: $\phi$: $[1, 2] \to [1, 2]$. Immers $\dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x}) \geq \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{2}{2}) = 1$ en ook $\dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x}) \leq \dfrac{1}{2}(2 + \dfrac{2}{1}) = 2$.
2. Er geldt voor $1 \leq x \leq y \leq 2$ dat $|\phi(y) - \phi(x)| = \frac{1}{2}|y - x|\,|1 - \dfrac{2}{xy}| \leq \dfrac{1}{2}|y - x|$, omdat $1 \leq xy \leq 4$. Het getal $\kappa = \dfrac{1}{2}$ voldoet dus als contractieconstante. Met startwaarde $x_0 = 1$ vinden we dan de rij .. die naar $\sqrt{2}$ convergeert.
3. Los van de Banach Contractiestelling zie je dat, in dit speciale geval, de convergentie naar $\sqrt{2}$ supersnel gaat. Immers $|\sqrt{2} - x_{n+1}| = |\phi(\sqrt{2}) - \phi(x_n)| = \frac{1}{2}|\sqrt{2} - x_n|\,|1 - \frac{2}{x_n\sqrt{2}}| = \frac{1}{2}|\sqrt{2} - x_n|^2 \frac{1}{|x_n|}| \leq \frac{1}{2}|\sqrt{2} - x_n|^2$. Dit verschijnsel heet *quadratische convergentie*, bij iedere iteratieslag wordt het aantal correcte decimalen ruwweg verdubbeld.

• Nu 'worteltrekken' algemeen. Laat $\alpha > 0$. Het positieve nulpunt van de functie $x \mapsto x^2 - \alpha$ is het zelfde als de positieve oplossing (= het vaste punt) van de vergelijking $\phi(x) = x$ met $\phi(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{\alpha}{x})$. Hier $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ en voor $\mathbf{R}$ nemen we het gesloten interval $[a, \dfrac{\alpha}{a}]$, met $\alpha > a^2$.
1. Er geldt $\phi$: $[a, \dfrac{\alpha}{a}] \to [a, \dfrac{\alpha}{a}]$.
2. $|\phi(y) - \phi(x)| = \frac{1}{2}|y - x|\,|1 - \dfrac{\alpha}{xy}|$. Dit is een contractie op $[a, \dfrac{\alpha}{a}]$ als $a^2 > \dfrac{\alpha}{3}$.
3. Ook in dit geval is er kwadratische convergentie.

• Nu, in het algemeen, de methode van Newton voor het berekenen van nulpunten van functies.
Gegeven: $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ en $\alpha \in (a, b)$ met $f(\alpha) = 0$ en $f'(\alpha) \neq 0$.
Dan geldt: $\exists \delta > 0$ zodat de functie $x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ een contractie is op $\mathbf{R} = [\alpha - \delta,\, \alpha + \delta]$. Dus, met een willekeurig startpunt $x_0 \in [\alpha - \delta,\, \alpha + \delta]$ en $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, geldt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$. Ook hier is kwadratische convergentie.

**5.4.3 Stelling (Locale oplosbaarheid GDV)**

*Gegeven:*
- *Een rechthoek* $W = [-L, L] \times [A, B] \subset \mathbb{R}^2$.
- *Een continue functie* $F\colon W \to \mathbb{R}$ *die voldoet aan*
- $\exists\, M > 0 \forall\, t \in [-L, L] \forall\, y, z \in [A, B]\colon\ |F(t, y) - F(t, z)| \le M|y - z|$, *in woorden:* $F$ *voldoet aan een* locale Lipchitzvoorwaarde.

*Beschouw:*
- *De gewone differentiaalvergelijking* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = F(t, y)$, *met*
- *beginconditie* $y(0) = a \in (A, B)$.

*Dan geldt:*
- *Er is een gesloten interval* $[-T, T] \subset [-L, L]$ *en precies één continu differentieerbare functie* $y\colon [-T, T] \to [A, B]$, *met* $y(0) = a$, *zodanig dat* $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = F(t, y(t))$.
  *(* $y$ *heet* (unieke) oplossing van het beginwaardeprobleem.*)*
- *De functierij* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *gedefinieerd door 'iteratie',*
  $$y_0(t) = a, \quad y_{n+1}(t) = a + \int_0^t F(\tau, y_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau,$$
  *convergeert op* $[-T, T]$ *uniform naar de oplossing* $t \mapsto y(t)$.

**Bewijs.** We beginnen met enkele constanten te definieren.
Laat $C = \max\limits_{(t,x)\in W} |F(t, x)|$. Kies nu een $T > 0$, maar klein genoeg zodat geldt $T \le \frac{1}{C} \max\{B - a, a - A\}$ en ook nog $MT = \kappa < 1$.

• Voor de Banachruimte $\mathbf{E}$ uit Stelling 5.4.1 kiezen we $\mathcal{C}([-T, T])$. Voor de deelverzameling $\mathbf{R}$ uit Stelling 5.4.1 nemen we
$\mathbf{R} = \big\{u \in \mathcal{C}([-T, T])\,\big|u(0) = a \text{ en } \forall t \in [-T, T]\colon\ A \le u(t) \le B\big\}$. Merk op dat een uniform convergente functierij $\{u_n\} \subset \mathbf{R}$ convergeert naar een functie die ook de $\mathbf{R}$-eigenschappen heeft. Dit betekent dat $\mathbf{R}$ een gesloten verzameling in $\mathcal{C}([-T, T])$ is.

• Voor de afbeelding $\Phi$ proberen we $u \mapsto \Phi(u)$ met $\Phi(u)(t) = a + \int\limits_0^t F(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau$.
Dit pakt goed uit, want voor alle $t \in [-T, T]$ geldt
$|\Phi(u)(t) - a| = |\int\limits_0^t F(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau| \le TC$.
Dus, als $u \in \mathbf{R}$, dan zit ook $\Phi(u)$ in $\mathbf{R}$.

• $\Phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is een contractie. Immers, omdat $|F(\tau, u(\tau)) - F(\tau, v(\tau))| \le M|u(\tau) - v(\tau)| \le M\|u - v\|_\infty$, kunnen we schatten $\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_\infty =$
$\max\limits_{-T\le t\le T} \big| \int\limits_0^t \{F(\tau, u(\tau)) - F(\tau, v(\tau))\}\,\mathrm{d}\tau\big| \le TM\|u - v\|_\infty = \kappa\|u - v\|_\infty$.

• Uit Stelling 5.4.1 volgt nu dat er precies een functie $y$ in $\mathbf{R}$ zit die voldoet aan $y(t) = \Phi(y)(t) = a + \int\limits_0^t F(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau$. Hieruit volgt $y(0) = a$ en

$y'(t) = F(t, y(t))$.

• Tenslotte volgt nog met Stelling 5.4.1 dat de bovengenoemde rij $u_n$ naar de oplossing $y$ rent. □

### 5.4.4 Voorbeelden

**a)** Beschouw de GDV $y' = y$ met beginconditie $y(0) = 1$. De oplossing is $y(t) = e^t$. Deze oplossing bestaat blijkbaar op het ieder interval $[-T, T]$, dus op heel $\mathbb{R}$. We gaan na wat er in dit bekende geval terecht komt van de iteratierij. We vinden

$y_0(t) = 1$, $y_1(t) = 1 + \int_0^t 1 \, \mathrm{d}\tau = 1 + t$,

$y_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau) \, \mathrm{d}\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$,

$y_3(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2) \, \mathrm{d}\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2.3}t^3, \ldots\ldots,$

$y_N(t) = 1 + \int_0^t \{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}\tau^n\} \, \mathrm{d}\tau = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}t^n$. Merk op dat dit 'toevallig' precies de partiele sommen zijn van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n = e^t$.

**b)** Beschouw de GDV $y' = y^2$ met beginconditie $y(0) = 1$. Door, op z'n 18e eeuws, de veranderlijken te scheiden, $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{d}t$, dus $-\frac{1}{y} = t + C$, vinden we als oplossing: $y(t) = \frac{1}{1-t}$. Deze oplossing 'explodeert' als $t \uparrow 1$. Voorbij $t = 1$ is er geen oplossing van onze GDV die met onze beginconditie verbonden is. Ook nu gaan we na wat er terecht komt van de iteratierij. We vinden

$y_0(t) = 1$, $y_1(t) = 1 + \int_0^t 1^2 \, \mathrm{d}\tau = 1 + t$,

$y_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau)^2 \, \mathrm{d}\tau = 1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3$,

$y_3(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau + \tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3)^2 \, \mathrm{d}\tau = 1 + t + t^2 + t^3 +$hogere machten van $t$,

$y_N(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^3 + \cdots + t^N +$hogere machten van $t$.

In dit geval zijn dit NIET de partiele sommen van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$. De eerste $N$ termen van $y_n$ zijn WEL dezelfde als de eerste $N$ termen van de reeks.

**c)** Beschouw de GDV $y' = e^y$ met beginconditie $y(0) = 0$. Via scheiding van veranderlijken vinden we voor de oplossing: $y(t) = \frac{1}{1-t}$. Ook deze oplossing 'explodeert' als $t \uparrow 1$. Voorbij $t = 1$ is er ook hier geen oplossing van onze GDV die met de beginconditie verbonden is. In dit geval is de iteratierij niet uit te drukken in elementaire functies. We vinden

$y_0(t) = 0$, $y_1(t) = 1 + \int\limits_0^t e^0 \,\mathrm{d}\tau = t$, $y_2(t) = \int\limits_0^t e^\tau \,\mathrm{d}\tau = e^t - 1$,

$y_3(t) = \int\limits_0^t e^{e^\tau - 1} \,\mathrm{d}\tau =$ niet elementair uit te drukken.

### 5.4.5 Opmerkingen (bij Stelling 5.4.3)

**(i)** Als de functie $F\colon W \to \mathbb{R}$ een partiele afgeleide $\frac{\partial F}{\partial y}$ heeft die ook weer continu is op $W$, dan voldoet $F$ zeker aan de locale Lipchitzvoorwaarde. Immers, toepassen van de middelwaardestelling levert $|F(t,y) - F(t,z)| = |F_y(t,\theta)||y-z| \leq M|y-z|$. Hier is $\theta$ een getal tussen $y$ en $z$. Voorts is $M = \max\limits_{(t,y)\in W} |F_y(t,y)|$ genomen. Dit houdt in dat in de meeste practische gevallen de oplossing van het beginwaarde probleem locaal bestaat, uniek is en zonodig met iteratie benaderd kan worden.

**(ii)** De voorbeelden 5.4.4 b) en c) laten zien dat, ook bij zeer mooie 'gladde' $F$ de oplossing $y$ NIET op willekeurig grote intervallen voortgezet kan worden. Alleen *locale* existentie is, in alle gevallen, gegarandeerd!

**(iii)** Beschouw de gewone differentiaalvergelijking $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3|y|^{\frac{2}{3}}$, met beginconditie $y(0) = 0$. De functies $t \mapsto y(t) = 0$ en $t \mapsto y(t) = t^3$ zijn allebei oplossingen! Blijkbaar is dit beginwaardeprobleem niet eenduidig oplosbaar. Niet verbazingwekkend aangezien de functie $F(t,y) = 3|y|^{\frac{2}{3}}$ NIET aan de Lipchitzvoorwaarde voldoet. Functies $F$ die niet aan de Lipchitzvoorwaarde voldoen zijn dus ongeschikt om een rol te spelen in een GDV die een practisch probleem 'modelleert'.

**(iv)** Precies hetzelfde bewijs werkt ook voor *gekoppelde stelsels* van $n$ stuks 1e orde gewone differentiaalvergelijkingen. Vervang slechts $y$ door $\underline{y}$, met $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. In plaats van het interval $[A,B]$ kan, bijvoorbeeld, een gesloten bal $\overline{B}_{\underline{p},r}$ met middelpunt $\underline{p}$ en straal $r > 0$ genomen worden.De scalaire functie $F$ moet worden vervangen door een vectorfunctie $\underline{F}(t,\underline{y})$. Men neme de beginconditie $\underline{y}(0) = \underline{a} \in \overline{B}_{\underline{p},r}$. Iedere $n$e-orde GDV kan als een gekoppeld stelsel van $n$ stuks 1e-orde GDV geschreven worden. Een mooi voorbeeld is de '2e wet van Newton', in de volksmond '$K = ma$' geheten: $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})$ gaat dan over in het 1e-orde stelsel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{array}{c} x \\ p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{m}p \\ F(t,x,\frac{1}{m}p) \end{array}\right].$$

Hier is $m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p$ gesteld.

**(v)** In plaats van op $t = 0$ kan de beginconditie ook op een willekeurig 'tijdstip' $t = t_0$ gekozen worden. Bij gegeven $y$ en $F$ definieren we, via de substitutie $s = t - t_0$, de functies $\eta(s) = y(t_0 + s)$ en $G(s, \eta) = F(t_0 + s, \eta)$. Uit invullen blijkt dan dat de functie $s \mapsto \eta(s)$, met $\eta(0) = a$, precies dan voldoet aan $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\,s} = G(s, \eta(s))$ als de functie $t \mapsto y(t)$, met $y(t_0) = a$, voldoet aan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\,t} = F(t, y(t))$. Het zal duidelijk zijn dat $F$ aan de locale Lipchitzvoorwaarde voldoet, precies dan als $G$ aan de locale Lipchitzvoorwaarde voldoet.

**(vi)** We zeggen dat $F$ aan een *globale Lipchitzvoorwaarde* voldoet als de schatting $|F(t, y) - F(t, z)| \leq M|y - z|$ niet slechts geldt op een rechthoek $W$ maar op een verticale *strip* $S = [K, L] \times \mathbb{R}$. Op elke verticale strip van de vorm $[t_0 - \frac{1}{2M}, t_0 + \frac{1}{2M}]$, gelegen binnen $S$, kan dan voor elke beginconditie $y(t_0)$, het bewijs van Stelling 5.4.3 worden afgedraaid. In dit geval is steeds $\kappa = \frac{1}{2}$. Door eindig veel stukjes oplossing aan elkaar te plakken zie je dan dat de (unieke) oplossing $y$ gegarandeerd bestaat op het hele interval $[K, L]$ en zich bevindt in $\mathcal{C}([K, L])$. Ook dit gaat weer goed voor vectorwaardige functies $\underline{y}$. Een belangrijke toepassing betreft *lineaire stelsels* gewone differentiaalvergelijkingen met continue coëficiënten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\underline{y}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\underline{y}(t) + \underline{f}(t).$$

De matrixfunctie $\underline{\underline{A}}$ en de vectorfunctie $\underline{f}$ bevatten uitsluitend continue functies als elementen. Allemaal gedefinieerd op het hele interval $[K, L]$. Bij gegeven beginconditie $\underline{y}(t_0) = \underline{a}$ met $t_0 \in [K, L]$ is dan een unieke oplossing op heel $[K, L]$ gegarandeerd.

Er zijn nog andere toepassingen van de contractie stelling.

**5.4.6 Voorbeeld**

Er bestaat precies een $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ zo dat

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\colon\quad x_n = \tfrac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-nm} x_m.$$

Het bewijs is als volgt. De ruimte $\ell_\infty(\mathbb{N})$ is een Banachruimte. Als $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ en $n \in \mathbb{N}$, dan is $|e^{-nm}x_m| \leq \|x\|_\infty e^{-m}$ voor alle $m \in \mathbb{N}$. Omdat $\sum_m \|x\|_\infty e^{-m}$ convergeert, is $\sum_m e^{-nm}x_m$ convergent. Definieer $\Phi\colon \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ door

$$[\Phi(x)](n) = \tfrac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-nm} x_m \quad (x \in \ell_\infty(\mathbb{N}),\ n \in \mathbb{N}).$$

Dan

$$|[\Phi(x)](n)| \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-nm}|x_m| \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}\|x\|_\infty = 1 + \frac{e^{-1}\|x\|_\infty}{1 - e^{-1}}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $\Phi(x) \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ voor alle $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$.
Voor alle $x, y \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ en $n \in \mathbb{N}$ is

$$\begin{aligned}
|[\Phi(x)](x) - [\Phi(y)](n)| &= \Big| \sum_{m=1}^{\infty} e^{-nm}(x_m - y_m) \Big| \leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{-nm} |x_m - y_m| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} \|x - y\|_\infty = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} \|x - y\|_\infty = \frac{1}{e-1} \|x - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Dus $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq \frac{1}{e-1}\|x - y\|_\infty$ voor alle $x, y \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. Omdat $\frac{1}{e-1} < 1$, is $\Phi$ een contractie. Uit de Banach contractie stelling volgt het gevraagde.

**5.4.7 Stelling**

*Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $K\colon [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ continu zo dat*

$$\sup_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x, y)|\, dy < 1.$$

*Zij verder $g \in \mathcal{C}([a, b])$ vast. Dan bestaat er precies een $f \in \mathcal{C}([a, b])$ zo dat*

$$\forall_{x \in [a,b]} \left[ f(x) = g(x) + \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy \right].$$

**Bewijs.** De ruimte $\mathcal{C}([a, b])$ is een volledige metrische ruimte en voor alle $f \in \mathcal{C}([a, b])$ is $x \mapsto \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy$ continu op $[a, b]$. Definieer daarom $\Phi\colon \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$ door

$$[\Phi(f)](x) = g(x) + \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy \quad (f \in \mathcal{C}([a, b]),\ x \in [a, b]).$$

Voor alle $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ en $x \in [a, b]$ is

$$\begin{aligned}
|[\Phi(f)](x) - [\Phi(g)](x)| &= \Big| \int_a^b K(x, y) \Big( f(y) - g(y) \Big)\, dy \Big| \leq \int_a^b |K(x, y)|\, |f(y) - g(y)|\, dy \\
&\leq \int_a^b |K(x, y)|\, \|f - g\|_\infty\, dy = \|f - g\|_\infty \int_a^b |K(x, y)|\, dy.
\end{aligned}$$

Omdat dit geldt voor alle $x \in [a, b]$, is

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty \int_a^b |K(x, y)| \, dy$$

voor alle $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Dus $\Phi$ is een contractie vanwege de afschatting op $K$. De stelling volgt nu uit de Banach contractie stelling. $\square$

# Opgaven

## 0 Voorkennis

### 0.1 Vectorruimten

1. Ga na of de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{C}^3$ lineaire deelruimten van $\mathbb{C}^3$ zijn.

   (a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = 0\}$

   (b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | x_1 + ix_2 + (1+i)\overline{x_3} = 0\}$

   (c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | \operatorname{Re}(x_1) + \operatorname{Im}(x_2) = 0\}$

   (d) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | \overline{x_1} + i\,\overline{x_2} = 0\}$

2. In $\mathbb{C}^3$ zijn de vlakken $x_1 + ix_2 - 2x_3 = 2i + 1$ en $x_2 + x_3 = 2$ gegeven. Geef een parametervoorstelling van de snijlijn van deze vlakken.

3. Laat $\omega$ een positieve reële constante zijn.
   Laat zien dat de functies $f$ van de vorm $f(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}, t \in \mathbb{R}$ met $A, \varphi \in \mathbb{R}$ een complexe vectorruimte vormen en bepaal een basis van deze vectorruimte.

4. Beschouw in $C(\mathbb{R})$, de vectorruimte van continue functies op $\mathbb{R}$, het vlak $V$ met parametervoorstelling $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ waarbij $f_1(x) = \sin(x)$ en $f_2(x) = \cos(x)$.
   Onderzoek of de functies $g_1, g_2$ en $g_3$ met

   $$g_1(x) = e^{ix},\ g_2(x) = e^{2ix} \text{ en } g_3(x) = e^{i(x+p)}, p \in \mathbb{C}$$

   tot het vlak $V$ behoren.

5. Laat $p$ en $q$ reële getallen zijn. In $C(\mathbb{R})$ zijn de functies $f_1, f_2, g_1, g_2$ gedefinieerd door

   $$f_1(x) = e^{(p+iq)x}, f_2(x) = e^{(p-iq)x}, g_1(x) = e^{px}\cos(qx), g_2(x) = e^{px}\sin(qx)\ .$$

Laat $W_1 = \langle f_1, f_2 \rangle$ en$W_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$.
Toon aan dat geldt $W_1 = W_2$.

6. In $\ell_\infty(\mathbb{N})$ zijn gegeven de vectoren

$$\begin{array}{rcl} \underline{v}_1 & = & (1,0,0,0,0,\ldots) \\ \underline{v}_2 & = & (0,1,0,0,0,\ldots) \\ & \vdots & \\ \underline{v}_n & = & (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{plaats n}},0,\ldots) \\ & \vdots & \end{array}$$

   (a) Bewijs dat voor iedere $N \in \mathbb{N}$ het stelsel $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_N\}$ onafhankelijk is.

   (b) Laat zien dat $\{\underline{v}_n\}$ een onafhankelijk stelsel is.

7. Laat zien dat de functies $f_n(x) = x^n, n = 0, 1, \ldots$ een onafhankelijk stelsel vormen in $C(\mathbb{R})$.

8. Gegeven zijn de functies $f_n(t) = e^{nt}, n = 0, 1, \ldots$ in de ruimte $C(\mathbb{R})$.
Laat zien dat $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ een onafhankelijk stelsel is.

9. Wat is de dimensie van het opspansel $\langle \cos(t), \sin(t), \cos(t + \frac{\pi}{4}) \rangle$ in de ruimte $C(\mathbb{R})$?

10. Beschouw de ruimte $C([0,1])$.
Is het stelsel $\{e^x, 1, x, x^2, \ldots\}$ onafhankelijk?

11. Beschouw de reële vectorruimte $\mathbb{R}^3$.

   (a) Wat is het opspansel van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 1$?

   (b) Wat is het opspansel van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 0$?

12. Beschouw de reële vectorruimte $\mathbb{R}^3$.

   (a) Is de eenheidsbol $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ een lineaire deelruimte?

   (b) Is de volle kegel $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$ een lineaire deelruimte?

## 0.2 Lineaire afbeeldingen

1. Beschouw de loodrechte projectie $\mathcal{P}$ op het vlak $x_1+x_2+x_3=0$ in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Bepaal de matrix van $\mathcal{P}$ ten op zichte van de standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

   (b) Bepaal de nulruimte $\mathbf{N}(\mathcal{P})$.

   (c) Bepaal de beeldruimte $\mathbf{R}(\mathcal{P})$.

   (d) Is de afbeelding orthogonaal, symmetrisch?

   (e) Geef een basis van eigenvectoren in $\mathbb{R}^3$.

2. De vectoren $\underline{v}_i, 1 \leq i \leq 4$, zijn eigenvectoren met eigenwaarde $\lambda_i = i$ van de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
   Laat zien dat $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ een basis in $\mathbb{R}^4$ is.

## 0.3 Inwendig product

De vectorruimten $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ worden beschouwd als te zijn voorzien van het standaardinproduct.

1. In $\mathbb{C}^3$ zijn gegeven $\underline{u} = (1, i, 1+i)$ en $\underline{v} = (-i, 1-i, 1)$.
   Bereken $\dfrac{(\underline{u}, \underline{v})}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}$.

2. Laat $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{C}$.
   Bewijs dat $|x_1| + \cdots + |x_N| \leq \sqrt{N}\sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_N|^2}$ .

3. Het stelsel vectoren $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_N\}$ in $\mathbb{C}^N$ heeft de eigenschap dat voor alle $\underline{x} \in \mathbb{C}^N$ geldt

   $$\text{(5.1)} \quad \|\underline{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(\underline{v}_k, \underline{x})|^2$$

   waarbij $(\cdot, \cdot)$ het gewone inproduct in $\mathbb{C}^N$ is.

   (a) Laat zien door invullen van $\underline{x} = \underline{v}_1$ in gelijkheid (5.1) volgt dat $\|\underline{v}_1\| \leq 1$.

   (b) Laat zien door invullen van een vector $\underline{x} \perp \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_N$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, in gelijkheid (5.1) volgt dat $\|\underline{v}_1\| \geq 1$.

   (c) Laat zien dat het stelsel vectoren een orthonormale basis in $\mathbb{C}^N$ is.

4. De deelruimte $\mathbf{W}$ bestaat uit alle vectoren in $\mathbb{C}^4$ die voldoen aan $x_1 + ix_2 - ix_4 = 0$.
   Bepaal het orthoplement $\mathbf{W}^\perp$.

5. Beschouw de inproductruimte $\mathbb{R}^3$.
   Bepaal de loodrechte projectie van de vector $\underline{v} = (2, 1, 3)$ op de lijn met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda(1, 1, 1)$.

6. Beschouw de inproductruimte $\mathbb{C}^2$.
   Bepaal de loodrechte projectie van de vector $\underline{v} = (1, i)$ op de lijn met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda(1, 1)$.

## 0.4 Complexificatie

1. Laat $\mathbf{V}$ een reële vectorruimte zijn. Op $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ definiëren we een optelling en een scalaire vermenigvuldiging door

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2),$$

$$(\alpha + i\beta) \cdot (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\alpha\mathbf{a}_1 - \beta\mathbf{a}_2, \alpha\mathbf{a}_2 + \beta\mathbf{a}_1),$$

   waarbij $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbf{V}$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Laat zien dat $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ met deze bewerkingen een vectorruimte over $\mathbb{C}$ is.
   Deze vectorruimte geven we aan met $\mathbf{V}_\mathbb{C}$.

   (b) Laat zien dat de volgende stappen terecht zijn:
   (1) Identificatie van $(\mathbf{a}, 0) \in \mathbf{V}_\mathbb{C}$ met $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$.
   (2) De schrijfwijze $\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2$ voor $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

2. Het stelsel $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ is een basis in de reële vectorruimte $\mathbf{V}$.
   Laat zien dat het stelsel ook een basis in de complexe uitbreiding $\mathbf{V}_\mathbb{C}$ is.

3. Toon aan dat $(\mathbb{R}^N)_\mathbb{C} = \mathbb{C}^N$.

4. Een polynoom heet reëel/complex als zijn coëfficiënten reëel/complex zijn.
   Laat $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ de vectorruimten van reële polynomen respectievelijk complexe polynomen zijn.
   Laat zien dat $\mathbf{V}_\mathbb{C} = \mathbf{W}$.

5. We beschouwen de vectorruimte $\mathbb{C}^3$ als een reële vectorruimte, die we met $\mathbf{V}$ aangeven. Op $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ definiëren we $(\underline{z}_1, \underline{z}_2)_\mathbb{R} = \mathrm{Re}((\underline{z}_1, \underline{z}_2))$ met $\underline{z}_1, \underline{z}_2$ in $\mathbf{V}$ waarbij $(\cdot, \cdot)$ het complexe inproduct in $\mathbb{C}^3$ is.

(a) Laat zien dat $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}}$ een inproduct is.

(b) Laat zien dat de vectoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ samen met $(i,0,0)$, $(0,i,0)$ en $(0,0,i)$ een orthonormale basis in $\mathbf{V}$ vormen.

6. Het inproduct in de reële inproductruimte $\mathbf{E}$ wordt aangegeven met $(\cdot,\cdot)$.
   Laat zien dat door
   $$(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)_{\mathbb{C}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) - i(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + i(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)$$
   een inproduct op $\mathbf{E}_{\mathbb{C}}$ wordt gedefinieerd.

7. De afbeelding $\mathcal{A}$ is een orthogonale afbeelding op $\mathbb{R}^N$.
   Laat zien dat de complexificatie $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ een orthogonale afbeelding op $\mathbb{C}^N$ is.

# 1 Genormeerde Functieruimten

## 1.1 Functieruimten

1. In $\mathbb{P}([a,b])$ beschouwen we de verzameling $U$ van alle polynomen $p$ waarvoor geldt
   $$\frac{d^{10}}{d\,x^{10}}\, p(x) = 0.$$
   (a) Toon aan dat $U$ een lineaire deelruimte is van $\mathbb{P}([a,b])$.

   (b) Bepaal de dimensie van $U$.

   (c) Vind *twee* bases voor $U$.

   (d) In $\mathbb{P}([a,b])$ beschouwen we de verzameling $V$ van alle polynomen $p$ waarvoor geldt
   $$\frac{d^{10}}{d\,x^{10}}\, p(x) = 7.$$
   Is $V$ een lineaire deelruimte in $\mathbb{P}([a,b])$? Beantwoord uw vraag met een bewijs of met een tegenvoorbeeld!

2. In Definitie 1.1.4 sub (4) kiezen we voor de 'sprongpunten' $c_0, \ldots c_N$ een vaste set getallen. We beschouwen alleen trapfuncties die in deze punten mogen 'springen'. Laat zien dat de verzameling van deze trapfuncties een lineaire deelruimte vormen in $\mathbb{T}(a,b)$. Bepaal de dimensie van deze lineaire deelruimte.

3. Bepaal de dimensie van de doorsnede $\mathcal{C}([a,b]) \cap \mathbb{T}(a,b)$.

4. Op het interval $(0,4)$ beschouwen we functies $x \mapsto f(x)$ van de vorm

$$f(x) = \sum_{j=1}^{4} \chi_{(j-1,j]}(x) p_j(x).$$

Elk der functies $p_j$ is van de vorm $x \mapsto a_j x^2 + b_j x + c_j$, met $a_j$, $b_j$, $c_j$ constanten, een vrij te kiezen polynoom van hoogstens graad 2, dus. Je hoort wel zeggen: $f$ is, *stuksgewijs*, een polynoom van de 2e graad.

(a) Laat zien dat de verzameling van alle $f$ van genoemd type een lineaire deelruimte vormen in $\mathbb{L}_2(0,4)$. Bepaal de dimensie van deze deelruimte.

(b) Leg zodanige voorwaarden op aan $a_j$, $b_j$, $c_j$, zodat $f \in \mathcal{C}([0,4])$. Laat zien dat alle $f$ die aan genoemde voorwaarden voldoen een lineaire deelruimte vormen in $\mathcal{C}([0,4])$. Bepaal de dimensie van deze deelruimte.

(c) Leg zodanige voorwaarden op aan $a_j$, $b_j$, $c_j$, zodat $f \in \mathcal{C}^1([0,4])$. Laat zien dat alle $f$ die aan genoemde voorwaarden voldoen een lineaire deelruimte vormen in $\mathcal{C}^1([0,4])$. Bepaal de dimensie van deze deelruimte.

(d) Leg zodanige voorwaarden op aan $a_j$, $b_j$, $c_j$, zodat $f \in \mathcal{C}^2([0,4])$. Laat zien dat alle $f$ die aan genoemde voorwaarden voldoen een lineaire deelruimte vormen in $\mathcal{C}^2([0,4])$. Bepaal de dimensie van deze deelruimte.

(e) Leg zodanige voorwaarden op aan $a_j$, $b_j$, $c_j$, zodat $f \in \mathbb{P}([0,4])$. Laat zien dat alle $f$ die aan genoemde voorwaarden voldoen een lineaire deelruimte vormen in $\mathcal{C}([0,4])$. Bepaal de dimensie van deze deelruimte.

(f) Beantwoord alle bovenstaande vragen ook voor het geval dat $p_j$ ten hoogste graad 1 mag hebben.

## 1.2 Functieruimten met een afstandsbegrip

1. In de inproductruimte $\mathbb{L}_2(0,\pi)$ zijn de functies $f_1$ en $f_2$ gegeven door $f_1(t) = t + i$ en $f_2(t) = \sin(t)$.
Bereken $(f_1, f_2)$, $\|f_1\|_2$ en $\|f_2\|_2$.

2. Met $\mathbb{P}_2$ wordt de vectorruimte van polynomen van de graad ten hoogste 2 in één variabele weergegeven.
   Laat $(p,q) = \overline{p(-1)}q(-1) + \overline{p(0)}q(0) + \overline{p(1)}q(1),\ p,q \in \mathbb{P}_2)$.
   (a) Is $(\cdot,\cdot)$ een inproduct op $\mathbb{P}_2$?
   (b) Bepaal $q \in \mathbb{P}_2$ zodanig dat voor alle $p \in \mathbb{P}_2$ geldt dat $p(0) = (q,p)$.

3. Beschouw $\mathbb{P}$, de vectorruimte van alle complexe polynomen in één variabele.
   Ga na of in ieder van de volgende onderdelen een inproduct op $\mathbb{P}$ is gedefinieerd.
   (a) $(p,q)_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{p^{(n)}(0)}\, q^{(n)}(0)$
   (b) $(p,q)_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p(\frac{1}{2^n})}\, q(\frac{1}{2^n})$
   (c) $(p,q)_3 = \int_0^{2\pi} \overline{p(e^{it})}\, q(e^{it})\mathrm{d}t$
   (d) $(p,q)_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, \overline{p(\frac{1}{n})}\, q(\frac{1}{n})$

4. In $\mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd $(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ voor vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$.
   (a) Bewijs dat $(\cdot,\cdot)$ een inproduct op $\mathbb{R}^2$ is.
   (b) Bereken $\|\underline{e}_1\|$, $\|\underline{e}_2\|$ en de hoek tussen $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ waarbij $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ de standaardbasisvectoren zijn.
   (c) Schets de verzameling $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 | (\underline{x},\underline{x}) = 1\}$.

5. Voor alle $f$ en $g$ in $\mathcal{C}([-1,1])$ definieert men

$$(f,g)_1 = \int_{-1}^{1} t^2\overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t \quad \text{en} \quad (f,g)_2 = \int_{0}^{1} t^2\overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

   (a) Onderzoek of dit, conform Definitie 1.2.1, inproducten op $\mathcal{C}([-1,1])$ zijn.
   (b) Onderzoek dit ook voor de lineaire deelruimte $\mathbb{P}([-1,1])$.

6. Zij $f$ een op het interval $[0,1]$ continu differentieerbare functie met $f(0) + f(1) = 0$.

(a) Bewijs met partiële integratie dat $\int\limits_0^1 (\frac{1}{2} - t) f'(t) \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(t) \mathrm{d}t$.

(b) Bewijs dat $\left| \int\limits_0^1 f(t) \mathrm{d}t \right|^2 \leq \frac{1}{12} \int\limits_0^1 |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$.

7. Laat zien dat op de vectorruimte $\mathcal{C}^1([0,1])$, de ruimte van continu differentieerbare functies op $[0,1]$, door

$$(f,g)_1 = \int\limits_0^1 \left( \overline{f(x)} g(x) + \overline{f'(x)} g'(x) \right) \mathrm{d}x, \;\; f,g \in \mathcal{C}^1([0,1])$$

een inproduct gedefinieerd is.

8. Bepaal een inproduct op de ruimte $\mathcal{C}^1([0,2])$ zodanig dat de corresponderende norm wordt gegeven door

$$\|f\| = \left( \int\limits_0^2 \left( e^x |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \right) \mathrm{d}x \right)^{1/2} .$$

9. Laat zien dat voor alle continu differentieerbare functies $f$ geldt

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(x) f(x) - \sin(x) f'(x)) \mathrm{d}x \right| \leq \sqrt{2\pi} \left( \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2) \mathrm{d}x \right)^{1/2} .$$

10. Voor welke $s \in \mathbb{R}$ zit $\{\frac{1}{n^s}\}$ in $\ell_2(\mathbb{N})$?

11. Beschouw de inproductruimte $\mathbf{E}$.

(a) Voor welke $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in $\mathbf{E}$ geldt $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$?

(b) Voor welke $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in $\mathbf{E}$ geldt $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$?

12. Beschouw de reële inproductruimte $\mathbb{L}_2(-3,3)$ bestaande uit reëelwaardige functies.

(a) Laat $f$ en $g$ een even respectievelijk oneven functie rond 0 zijn uit deze inproductruimte. Laat zien dat $f \perp g$.

(b) Laat $f(t) = t + 1$ en $g(t) = t^2$.
Bereken de hoek tussen $f$ en $g$.

13. Bewijs dat dat $\|\cdot\|_\infty$ een norm in $\ell_\infty(\mathbb{N})$ is.

14. Bewijs dat dat $\|\cdot\|_1$ een norm in $\ell_1(\mathbb{N})$ is.

15. Beschouw in $\mathbb{C}^2$ de norm $\|\underline{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$.
    Laat zien dat deze norm niet van een inproduct afkomstig is.

16. Beschouw $\mathbb{R}^2$ met de norm $\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

    (a) Laat zien dat de minimumafstand van de oorsprong $\underline{0}$ tot de lijn $x_1 + x_2 = 1$ gelijk aan 1 is.

    (b) Bepaal alle punten op de lijn $x_1 + x_2 = 1$ met afstand 1 tot de oorsprong $\underline{0}$.

    (c) Laat zien dat de norm niet afkomstig is van een inproduct.

17. Beschouw $\mathbb{B}$(0,1).
    Laat zien dat de norm $\|\cdot\|_\infty$ niet afkomstig is van een inproduct.

## 1.3 Convergentie in genormeerde ruimten

1. Beschouw in $\ell_2(\mathbb{N})$ de rijen

$$\underline{b}_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots), n = 1, 2, \ldots$$

$$\underline{b} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$$

   Laat zien dat de rij $\{\underline{b}_n\}$ naar $\underline{b}$ convergeert.

2. De functies $f_n \in \mathbb{L}_2(0,1)$ zijn gedefinieerd door

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{t}{2})^k, t \in [0,1].$$

   (a) Bepaal voor elke $t \in (0,1)$ de limiet $f(t)$ van de rij $\{f_n(t)\}$. (Dit is de zogenaamde puntsgewijze limiet van de rij $\{f_n\}$.)

   (b) Laat zien dat de rij $\{f_n\}$, in $\mathbb{L}_2(0,1)$, naar de functie $f$ uit (a) convergeert.

3. Beschouw $\mathbb{R}^3$, voorzien van het standaardinproduct.

   (a) Wat is de afsluiting van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 2$?

   (b) Wat is de afsluiting van de eenheidssfeer $S(\underline{0}, 1)$?

4. Is een éénpuntsverzameling in een IP-ruimte een gesloten deelverzameling?

5. Geef een verzameling in $\mathbb{R}^2$ die niet open en niet gesloten is.

6. Laat $\mathbf{x}_0$ een element in de IP-ruimte $\mathbf{E}$ zijn.

   (a) Bepaal de afsluiting van $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\big|\, |(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})| < 1\}$.

   (b) Toon aan dat het hypervlak $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\big|\, (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 1\}$ gesloten is.

   Hint: Neem als voorbeeld $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2$ en $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$.

7. Beschouw in de IP-ruimte $\ell_2(\mathbb{N})$ de verzamelingen

$$
\begin{aligned}
U &= \{\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N}) \big| x_1 = x_2 = x_3\}, \\
V &= \{\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N}) \big| |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}, \\
W &= \{\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N}) \big| |x_1| \leq 1, |x_2| < 1\}\ .
\end{aligned}
$$

   Ga na welke van deze deelverzamelingen lineaire deelruimten zijn en welke gesloten zijn.

8. Beschouw de IP-ruimte $\mathbf{E} = \mathbb{L}_2(-1, 1) \cap \mathcal{C}([-1, 1])$.
   Laat zien dat $W = \{f \in \mathbf{E} \big| f(0) = 0\}$ niet gesloten is.

9. Beschouw de IP-ruimte $\mathbf{E} = \mathbb{L}_2(-1, 1)$.
   Voor $n = 0, 1, \ldots$ definiëren we de functies $p_n(x) = x^n$.

   (a) Laat zien dat $\langle p_0, p_1, \ldots \rangle = \mathbb{P}([-1, 1])$.

   (b) Laat zien dat $\mathbb{P}([-1, 1])$ niet-gesloten deelverzameling in $\mathbb{L}_2(-1, 1)$ is.

10. Beschouw in $\mathbf{E} = \ell_2(\mathbb{N})$ de vectoren

$$
\begin{aligned}
\underline{a}_n &= (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ stuks}}, 0, 0, \ldots), n = 1, 2, \ldots, \\
\underline{e}_n &= (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{plaats n}}, 0, \ldots).
\end{aligned}
$$

   (a) Laat zien dat $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots \rangle = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots \rangle = \ell_{2,\mathrm{c}}(\mathbb{N})$.
   Hint: Laat zien dat $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_N \rangle = \langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_N \rangle$ voor iedere $N \in \mathbb{N}$.

   (b) Laat zien dat $\langle \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots \rangle$ niet dicht ligt in $\mathbf{E}$.

11. Beschouw $\mathbb{R}^N$, voorzien van het standaardinproduct.
    Laat zien dat de enige lineaire deelruimte, die dicht ligt in $\mathbb{R}^N$, gelijk is aan $\mathbb{R}^N$.

12. (a) Laat zien dat een begrensde rij getallen in $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft.
    (b) Laat zien dat een begrensde rij in $\mathbb{R}^N$ een convergente deelrij heeft.

13. Beschouw de inproductruimte $\ell_2(\mathbb{N})$. Is de verzameling $\{\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N}) \big| x_1 = 1\}$ compact?

## 1.4 Puntsgewijze en uniforme convergentie

1. Bereken de norm $\|f\|_\infty$ van de volgende functies:

    (a) $f(x) = x^2 - 1$ op $[-1, 1]$,
    (b) $f(x) = x^2 - 1$ op $(-2, 1)$,
    (c) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ op $[-2, 2]$,
    (d) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ op $[1, 2]$,
    (e) $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$ op $[2, 3]$,
    (f) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ op $[1, \infty)$,
    (g) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ op $[\frac{1}{2}, 2)$.

2. Onderzoek de uniforme convergentie van de rij $\{f_n\}$ op $\mathbb{R}$, waarbij

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Beschouw de rij functies $\{f_n\}$ op $\mathbb{R}$, waarbij

$$f_n(x) = n^2 x\, e^{-nx^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

    Onderzoek of de rij uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

4. Beschouw de rij functies $\{f_n\}$ op $[0, 1]$, waarbij

$$f_n(x) = n\, x\, e^{-n^2 x} \quad (x \in [0, 1]).$$

    (a) Bepaal $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor alle $x \in [0, 1]$.
    (b) Ga na of de rij $\{f_n\}$ uniform convergent is op $[0, 1]$.

5. Beschouw de rij functies $\{f_n\}$ op $[0,1]$, waarbij

$$f_n(x) = \frac{n(x+x^2)}{e^{nx}} \qquad (x \in [0,1]).$$

Onderzoek puntsgewijze convergentie en uniforme convergentie van de rij $\{f_n\}$.

6. Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$$

niet uniform convergent is op $[0,1)$ en dat de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n(1-x)$$

wel uniform convergent is op $[0,1)$.

7. Beschouw de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

op $(1,\infty)$.

(a) Toon aan dat de reeks uniform convergent is op $[1+\delta,\infty)$ voor alle $\delta > 0$.

(b) Bewijs dat deze reeks niet uniform convergent is op $(1,\infty)$.

8. Beschouw de rij functies $\{f_n\}$, waarbij

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \qquad (x \in [0,\infty)).$$

(a) Bewijs dat voor alle $x \in [0,\infty)$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convergeert.

(b) Bewijs dat voor alle $\delta > 0$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergeert op $[\delta,\infty)$.

(c) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ niet uniform convergeert op $(0,\infty)$.
*Opmerking.* De moeilijkheidsgraad van onderdeel (c) ligt boven het op examens vereiste niveau voor dit vak.

9. Beschouw de rij functies $\{f_n\}$ op $\mathbb{R}$, waarbij

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Bewijs dat de rij $\{f_n\}$ uniform convergent is op elk interval $[a, b]$ dat 0 niet bevat.

   (b) Bewijs dat de rij $\{f_n\}$ niet uniform convergent is op $[0, 1]$.

   (c) Onderzoek of

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

10. Beschouw de rij $\{f_n\}$ op $\mathbb{R}$, waarbij

$$f_n(x) = \arctan(nx) \quad (x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Bewijs dat de rij $\{f_n\}$ niet uniform convergent is op $[-1, 1]$.

   (b) Bewijs dat voor alle $\delta > 0$ de rij $\{f_n\}$ uniform convergent is op $[\delta, \infty)$.

   (c) Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

11. Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(n-x)}$$

convergent is. Zij $S(x)$ de limiet van de reeks voor die waarden van $x$ waarvoor de reeks convergeert. Bewijs dat $S$ continu differentieerbaar is op $(-1, 1)$.

12. Definieer $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2x} \quad (x \in [1, \infty)).$$

   (a) Is $f$ continu op $[1, \infty)$?

(b) Is $f$ differentieerbaar op $(1, \infty)$?

(c) Beide vorige vragen voor de intervallen, respectievelijk, $[\delta, \infty]$ en $(\delta, \infty)$, met $\delta > 0$.

13. Definieer $T\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)} \qquad (x \in [0,1]).$$

Bewijs dat $T$ differentieerbaar is op $(0,1)$ en dat voor alle $x \in (0,1)$ geldt

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

14. Bereken

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Noem de stellingen die u gebruikt.

15. Laat zien dat

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

(Ter informatie: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.)

# 2 Approximatie via Convolutie

## 2.1 Het convolutieproduct

1. Laat zien dat $f \star g = g \star f$, voor willekeurige $f$, $g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

2. Laat zien dat uit $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ en $g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ volgt dat ook $f \star g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

3. Laat $f$, $g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ gegeven zijn. Veronderstel dat $f = 0$, buiten het interval $(a_1, b_1)$. Veronderstel dat $g = 0$, buiten het interval $(a_2, b_2)$.

(a) Geef een zo klein mogelijk interval $(a, b)$ waarbuiten de functie $x \mapsto (f \star g)(x)$, gegarandeerd alleen de waarde 0 aanneemt.

(b) Wat merkt u op in het speciale geval dat $a_1 = a_2 = 0$ en $b_1 = b_2 = \infty$.

4. Bereken de functie $e^{-|x|} \star e^{-|x|}$.

5. Bereken de functie $\dfrac{1}{1+x^2} \star \dfrac{1}{1+x^2}$.

6. We gebruiken de notatie van Voorbeelden 2.1.7. Laat $t > 0$, $\tau > 0$. Bereken:

   (a) $P_t \star 1,\ T_t \star 1,\ G_t \star 1.$

   (b) $P_t \star P_\tau,\ T_t \star T_\tau,\ G_t \star G_\tau,\ H_t \star H_\tau.$

   (c) $P_t \star T_\tau,\ H_t \star P_\tau,\ H_t \star T_\tau.$

   (d) $K_1 \star K_2,\ K_N \star K_M,$ voor $N \in \mathbb{N}$ en $M \in \mathbb{N}$.

7. Bereken door differentiaties uit te voeren achter het integraalteken

   (a) $\frac{\partial}{\partial t}(G_t \star f)(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(G_t \star f)(x)$,

   (b) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(H_t \star f)(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(H_t \star f)(x)$.

8. Veronderstel $f$ voldoende glad, zodat in de buurt van iedere $x \in \mathbb{R}$ geschreven kan worden $f(y) = f(x)+(y-x)f'(x)+O((y-x)^2)$. Bereken:

   (a) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial t}(P_t \star f)(x)$,

   (b) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial t}(T_t \star f)(x)$.

## 2.2 Approximatie

1. Voor elke $N \in \mathbb{N}$ verdelen we het interval $(0, 1)$ in $N$ gelijke deelintervallen $[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}]$, $\ 1 \le n \le N$. Beschouw de karakteristieke functies $\chi_{(\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}]}$ bij deze intervallen.

   (a) Laat zien dat het opspansel

$$\left\langle \chi_{(\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}]} \;\middle|\; 1 \le n \le N,\ 1 \le N < \infty \right\rangle,$$

   dicht ligt in $\mathbb{L}_2(0, 1)$.

(b) Formuleer en bewijs zelf het analoge resultaat voor een willekeurig interval $(a,b)$ in plaats van $(0,1)$.

2. Beschouw op het interval de verzameling van alle zaagtandfuncties (vergelijk 2.2.8 sub (2)), waarvan de knikpunten $a_j$ zich alleen mogen bevinden ter plekke $\frac{n-1}{N}$, met $1 \le n \le N$, $1 \le N < \infty$.

   (a) Laat zien dat laatstgenoemde verzameling een dichte lineaire deelverzameling is in $\mathbb{L}_2(0,1)$.

   (b) Formuleer en bewijs zelf het analoge resultaat voor een willekeurig interval $(a,b)$ in plaats van $(0,1)$.

3. Op het interval $[-1,1]$ definiëren we de functies $K_N$, $N \in \mathbb{N}$, door $K_N(x) = \frac{1}{c_N}(1-x^2)^N$, met $c_N = \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^N\,\mathrm{d}x$.

   (a) Laat zien dat de functierij $\{K_N\}$ een Dirac rij is in $\mathbb{L}_2(-1,1)$.

   (b) Lat zien dat voor elke $f \in \mathbb{L}_2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, de functie $x \mapsto (K_N \star f)(x) = \frac{1}{c_N}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\big(1-(x-y)^2\big)^N f(y)\,\mathrm{d}y$ een polynoom is. Wat is de graad van dit polynoom?

   (c) Laat zien dat $\|K_N \star f - f\|_2 \to 0$, als $N \to \infty$.

   (d) Laat zien, door op een nieuwe variabele over te gaan, dat voor alle $-\infty < a < b < \infty$ geldt dat $\mathbb{P}([a,b])$ dicht ligt in $\mathbb{L}_2(a,b)$.

   Opm: De rij $\{K_N\}$ wordt wel *Landau-rij* genoemd. Voor verdere didactische beschouwingen in deze, zie S. LANG: Math talks for undergraduates.

# 3 Fourierreeksen

## 3.1Orthogonale/orthonormale stelsels in IP-ruimten

1. In de IP-ruimte $\mathbb{C}^4$ zijn gegeven de vectoren $\underline{a}_1 = (1,0,0,i)$, $\underline{a}_2 = (1,1,i,i)$ en $\underline{a}_3 = (1,1,1,1)$.

   (a) Bepaal met Gram-Schmidt een orthonormale basis in $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \rangle$.

   (b) Vul de gevonden basis in (a) aan tot een orthonormale basis in $\mathbb{C}^4$.

2. De functies $f_1, f_2, f_3$ in $\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$ zijn gedefinieerd door $f_1(t) = \cos(2t)$, $f_2(t) = e^{it}$ en $f_3(t) = e^{2it}$.
   Bepaal een orthonormale basis in $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$.

3. Beschouw de IP-ruimte $\mathbb{L}_2(0, \pi)$ met de functies $f_n(x) = \sin((n + 1/2)x), n = 0, 1, \ldots$

   (a) Laat zien dat het stelsel $\{f_n\}$ een orthogonaal stelsel is.

   (b) Maak van $\{f_n\}$ een orthonormaal stelsel.

4. Laat $\{\mathbf{e}_n\}$ een orthonormale rij in de IP-ruimte $\mathbf{E}$ zijn en laat $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
   Bepaal $\lim\limits_{n \to \infty} (\mathbf{e}_n, \mathbf{x})$.

5. Beschouw $\mathbb{L}_2(-1, 1)$, de polynomen $g_n(x) = x^n$ en de Legendrepolynomen $P_n$ voor $n = 0, 1, \ldots$.

   (a) Pas het Gram-Schmidtprocédé toe op $\{g_0, g_1, g_2\}$ en laat zien dit het orthonormale stelsel $\{\sqrt{1/2}\, P_0, \sqrt{3/2}\, P_1, \sqrt{5/2}\, P_2\}$ oplevert.

   (b) Laat zien dat $\langle g_0, \ldots, g_N \rangle = \langle P_0, \ldots, P_N \rangle$ voor alle $N \geq 0$.

   (c) Laat zien dat toepassen van het Gram-Schmidtprocédé op de rij $\{g_0, g_1, \ldots\}$ het orthonormale stelsel $\{c_0 P_0, c_1 P_1, \ldots\}$ met $c_n > 0$ voor alle $n$ oplevert.

6. Beschouw de IP-ruimte $\mathbf{E} = \mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$.

   (a) Toon aan dat voor alle $f \in \mathbf{E}$ geldt

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) \mathrm{d}t \right|^2 \leq \pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \ .$$

   (b) Controleer de ongelijkheid uit (a) voor de functies $f(t) = e^{it}$ en $f(t) = \sin(3t)$.

   (c) Toon aan dat er geen complexe getallen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bestaan zodanig dat geldt

   $$\lim_{N \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{it} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \sin(kt) \right|^2 \mathrm{d}t = 0 \ .$$

7. Beschouw $\mathbf{E} = \mathcal{C}^1([-\pi,\pi])$ begiftigd met het inproduct

$$(f,g)_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f'(t)} g'(t) \mathrm{d}t \ .$$

De functies $h_n, n \in \mathbb{Z}$ en $f$ worden op het interval $[-\pi,\pi]$ gedefinieerd door $h_n(x) = e^{inx}$ en $f(x) = x$.

(a) Laat zien dat het stelsel $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ orthogonaal is en maak dit stelsel tot een orthonormaal stelsel $\{\hat{h}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

(b) Bepaal $\|f\|_1^2$ en $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|(\hat{h}_n, f)_1\right|^2$.

(c) Is het stelsel $\{\hat{h}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ een orthonormale basis?

8. De functie $f(x) = \sin(3x)\sin(5x)$ heeft periode $2\pi$.
Bepaal de complexe Fourierreeks van $f$.

9. Bepaal de complexe Fourierreeks van de functie $f(x) = x$ op het interval $[-\pi,\pi]$ en leid af dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

10. Bepaal de complexe Fourierreeks van de functie $f(x) = x^2$ op het interval $[-\pi,\pi]$ en leid af dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

11. Beschouw in de IP-ruimte $\ell_2(\mathbb{N})$ de vector $\underline{a} = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$, de standaardbasisvectoren $\underline{e}_n$, $n \geq 2$, en het opspansel $W = \langle \underline{a}, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \ldots \rangle$.

(a) Laat zien dat als voor een $\underline{y} \in W$ geldt dat $\underline{y} \perp \underline{e}_n$, $n \geq 2$, dat dan $\underline{y} = \underline{0}$.

(b) Laat zien dat $\{\underline{e}_n\}_{n\geq 2}$ GEEN orthonormale basis in $W$ is.

(c) Laat zien dat $W$ dicht ligt in $\ell_2(\mathbb{N})$.

12. De functie $f \in \mathcal{C}^1([-\pi,\pi])$ heeft de eigenschap dat $f(-\pi) = f(\pi)$.
De Fouriercoëfficiënten van $f$ worden gegeven door

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, \mathrm{d}t, n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Druk de Fouriercoëfficiënten van $f'$ uit in die van $f$.

(b) Druk $\|f\|^2$ en $\|f'\|^2$ uit in $\gamma_n, n \in \mathbb{Z}$.

13. De continue, $2\pi$-periodieke functie $f$ heeft de Fourierreeks $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} e^{inx}$.

    Laat zien dat de functie $f$ continu differentieerbaar is.

14. Een functie $f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$ heeft de Fourierreeks $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i+n^3} e^{inx}$.

    Is de functie $f$ reëelwaardig?

## 3.2 Berekening van Fourierreeksen

1. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een periodieke functie met periode $p$ en zij $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Definieer $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(x) = f(ax)$. Toon aan dat $g$ een periodieke functie is met periode $p/|a|$.

2. Schets de periodieke functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met periode $2\pi$ waarvoor geldt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in (-\pi, 0), \\ \sin x & \text{als } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

3. Bereken voor alle $n \in \mathbb{N}$

   (a) $\int\limits_0^\pi \sin x \, \cos nx \, \mathrm{d}x$,

   (b) $\int\limits_{-\pi}^\pi x^2 \, \cos nx \, \mathrm{d}x$,

   (c) $\int\limits_{-\pi}^\pi x^2 \, \sin nx \, \mathrm{d}x$.

4. Bepaal de Fourierreeks van de volgende periodieke functies met periode $2\pi$. **Maak altijd eerst een schets van de grafiek van de functie.**

   (a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ 1 & \text{als } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 0 & \text{als } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi], \\ \frac{1}{2} & \text{als } x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{als } x = \pi. \end{cases}$

(c) $f(x) = x^2 \quad (x \in (-\pi, \pi])$.

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 0 & \text{als } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in (-\pi, 0), \\ 1 & \text{als } x \in (0, \pi), \\ \frac{1}{2} & \text{als } x \in \{0, \pi\}. \end{cases}$

Had de Fourierreeks ook meteen gevonden kunnen worden uit onderdeel 4a?

(f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{als } x \in (-\pi, 0), \\ x^2 & \text{als } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{als } x = \pi. \end{cases}$

5. Bepaal de Fourierreeks van de volgende periodieke functies met periode $p$.

   (a) $f(x) = |x| \quad (x \in (-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}])$.
   (b) $f(x) = x^2 \quad (x \in (-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}])$.
   (c) $f(x) = \sin \pi x \quad (x \in (0, 1])$, met $p = 1$.
   (d) $f(x) = \max(0, \sin 100\pi x)$, met $p = 1/50$.

6. Toon met gebruik van opgave 4c aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

7. Bepaal de Fouriersinusreeks van de volgende functies $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$. **Maak altijd eerst een schets van de grafiek van de periodieke voortzetting.**

   (a) $f(x) = x^2 \quad (x \in [0, L])$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in [0, \frac{L}{2}], \\ L - x & \text{als } x \in (\frac{L}{2}, L). \end{cases}$

8. De periodieke functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met periode $2\pi$ wordt gegeven door

$$f(x) = x(1 + \cos x) \quad (x \in [-\pi, \pi)).$$

De Fourierreeks behorende bij $f$ is gelijk aan

$$\tfrac{3}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{(n-1)n(n+1)}.$$

(a) Bereken $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k(2k+1)(2k+2)}$.

(b) Bereken $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n+1)}$.

(c) Bereken $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2(n+1)^2}$.

9. De functies $f$, $g$ en $h$ zijn periodiek met periode $2\pi$ en op het interval $(-\pi, \pi]$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in (-\pi, 0] \\ x & \text{als } x \in (0, \pi] \end{cases} \quad , \quad g(x) = x \quad \text{en} \quad h(x) = |x|.$$

De Fourierreeksen behorende bij $g$ en $h$ zijn

$$g(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \quad \text{en} \quad h(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

(a) Leidt uit het bovenstaande de Fourierreeks behorende bij $f$ af.

(b) Welke van de drie Fourierreeksen convergeert uniform?

(c) Bereken $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$ en $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4}$.

10. De periodieke functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met periode $\pi$ wordt gegeven door

$$f(x) = \cos x \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})).$$

(a) Bepaal de Fourierreeks behorende bij $f$.

(b) Bepaal $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)}$ en $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

# 4 Fourierintegralen

## 4.1 Fouriertransformatie

1. Bewijs met behulp van de integraalvoorstelling van Fourier dat

(a) $$\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ \pi/2 & \text{als } x = 0, \\ \pi\, e^{-x} & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

(b) $$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \pi/2 & \text{als } x \in (0,\pi), \\ 0 & \text{als } x \in (\pi,\infty). \end{cases}$$

2. Schrijf de volgende functies in de vorm van een **Fouriercosinusintegraal**, d.w.z. bepaal een functie $F$ zo dat
$$\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) = \int_0^\infty F(\omega)\,\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega$$
voor alle $x \in (0,\infty)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in (0,1), \\ 0 & \text{als } x \in (1,\infty). \end{cases}$

(b) $f(x) = e^{-x} + e^{-2x} \quad (x \in (0,\infty)$.

3. Bepaal de Fouriergetransformeerde van de volgende functies.

(a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{als } x \in [0,\infty), \\ 0 & \text{als } x \in (-\infty,0). \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{als } x \in (-\infty,0], \\ 0 & \text{als } x \in (0,\infty). \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{als } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{als } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & \text{als } x \in [0,\infty), \\ 0 & \text{als } x \in (-\infty,0). \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & \text{als } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{als } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in [0,1], \\ 0 & \text{als } x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty). \end{cases}$

## 4.2 De Fourieroperator in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$

De conventie die we in deze opgavenparagraaf gebruiken is

$$(\mathcal{F}f)(y) = \hat{f}(y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x, \quad f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}\,\mathrm{d}y,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2\,\mathrm{d}y.$$

1. Bereken de Fouriergetransformeerde van de functie $e^{-|x|} \star e^{-|x|}$.

2. Bereken de Fouriergetransformeerde van de functie $\dfrac{1}{1+x^2} \star \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. We gebruiken de notatie van Voorbeelden 2.1.7. Laat $t > 0$, $\tau > 0$. Bereken de Fouriergetransformeerde van

   (a) $P_t,\ T_t,\ G_t,\ H_t$.

   (b) $P_t \star P_\tau,\ T_t \star T_\tau,\ G_t \star G_\tau,\ H_t \star H_\tau$.

   (c) $P_t \star T_\tau,\ H_t \star P_\tau,\ H_t \star T_\tau$.

   Bereken de limiet voor $t \downarrow 0$ van de Fouriergetransformeerden onder (a) en leg uit waarom het antwoord u niet verbaast.

4. Beschouw de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}$ op $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Laat zien dat er vier orthogonale projecties $\mathcal{P}_i$ bestaan met de eigenschappen

   - $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4$,
   - $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ voor $i \neq j$,
   - $\mathcal{F} = \mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - i\mathcal{P}_4$.

   Beschrijf deze projectoren met behulp van de eigenvectoren van $\mathcal{F}$. Laat zien dat $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$.

5. Laat $f$ loodrecht op alle polynomen in $\mathbb{L}_2(0,1)$ staan.

   (a) Laat zien dat voor alle $k \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^1 e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   (b) Leid met behulp van de Fouriergetransformeerde af dat $f = 0$.

6. Laat $\chi_{[-1,1]}$ de karakteristieke functie van het interval $[-1,1]$ zijn.

   (a) Bepaal de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})(\mathrm{k})$.

   (b) Bepaal de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{k^2}\,\mathrm{d}k$.

   (c) Bepaal de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4(k)}{k^4}\,\mathrm{d}k$.

7. Vervaardig zelf Tabel 4.2.5 bij de, in deze paragraaf gebezigde, conventie voor de Fouriertransformatie.

8. In Voorbeelden 2.2.5 zijn Dirac-rijen ten tonele gevoerd die bestaan uit, respectievelijk, Pulsfuncties, Tentfuncties, Gaussfuncties, en Potentiaalfuncties.

   (a) Bereken de Fouriergetransformeerden $\hat{P_{1/n}}$, $\hat{T_{1/n}}$, $\hat{G_{1/n}}, \hat{H_{1/n}}$ van deze Dirac-rijen.

   (b) Bereken van deze rijen van Fouriergetransformeerden de limiet voor $n \to \infty$. Zitten de limietfuncties in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$? Geef aan waarom (niet)!

   (c) Voor vast gekozen $a \in \mathbb{R}$ beschouwen we nu de functierijen $\{x \mapsto P_{1/n}(x-a)\}$, $\{x \mapsto T_{1/n}(x-a)\}$, $\{x \mapsto G_{1/n}(x-a)\}$, $\{x \mapsto H_{1/n}(x-a)\}$. Bereken ook van deze functierijen de Fouriergetransformeerden.

   (d) Bereken ook van deze rijen de limiet voor $n \to \infty$. Zitten de limietfuncties in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$? Geef aan waarom (niet)!

   Opm: De voorafgaande opgave kan worden opgevat als een wiskundige interpretatie van, veel voorkomende, rituele handelingen met
   $\delta$-"functies", zoals: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-iay}}{\sqrt{2\pi}}$,
   en $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iay}e^{ixy}\,\mathrm{d}y = \delta(x-a)$.

# 5 Volledigheid, Convexiteit en Projecties

## 5.1 Volledigheid en Separabiliteit

1. Laat $\mathbf{E}$ een genormeerde lineaire ruimte zijn en $\{\mathbf{a}_n\}$ een convergente rij in $\mathbf{E}$ met limiet $\mathbf{a}$.
   Toon aan dat $\{\mathbf{a}_n\}$ een Cauchyrij is.

2. Beschouw in de IP-ruimte $C([0,1])$ met het inproduct $(f,g) = \int\limits_0^1 \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$ de rij functies $\{f_n\}$ gedefinieerd door

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \, , \\ 1 - n(t - \frac{1}{2}) & , \quad \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \, , \\ 0 & , \quad t \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \, . \end{cases}$$

(a) Schets de grafiek van $f_n$.

(b) Toon aan dat de rij $\{f_n\}$ puntsgewijs naar een functie convergeert, die niet in $\mathcal{C}([0,1])$ zit.

(c) Toon aan dat de rij $\{f_n\}$ geen convergente rij is.

3. Beschouw in de IP-ruimte $\mathcal{C}([0,1])$ met het inproduct $(f,g) = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$ de rij functies $\{f_n\}$ gedefinieerd door

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2n} \ , \\ -2n(t - \frac{1}{n}) & , \quad \frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{n} \ , \\ 0 & , \quad \frac{1}{n} \geq t \geq 1 \ . \end{cases}$$

(a) Schets de grafiek van $f_n$.

(b) Toon aan dat de rij $\{f_n\}$ puntsgewijs naar een functie convergeert, die niet in $\mathcal{C}([0,1])$ zit.

(c) Toon aan dat de rij $\{f_n\}$ geen convergente rij is.

4. Beschouw de vectorruimte $\mathcal{C}([0,1])$ voorzien van de normen

$$\|f\|_\infty = \max(\{|f(t)| \big| t \in [0,1]\}) \text{ en } \|f\|_2 = \left( \int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2} .$$

Toon aan dat de lineaire deelruimte $M$ van $\mathcal{C}([0,1])$ bestaande uit alle polynomen NIET gesloten is in $\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ en NIET gesloten is in $\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_2)$.

5. Laat $\mathbf{E}$ een Banachruimte zijn met norm $\|\cdot\|$ en laat $\{\mathbf{a}_n\}$ een rij in $\mathbf{E}$ zijn met $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\| < \infty$.

Laat zien dat de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n$ convergeert.

6. Beschouw de vectorruimte $\mathcal{C}([0,1])$ met de norm

$$\|f\|_\infty = \max(\{\, |f(t)| \,\big|\, t \in [0,1] \,\}).$$

(a) Toon aan dat $\mathcal{C}([0,1])$ met deze norm een Banachruimte is.

(b) Toon aan dat dit resultaat in overeenstemming is met de bekende stelling uit Analyse 4 dat een uniform convergente rij van continue functies een continue functie als limiet heeft.

(c) Bewijs dat deze norm niet correspondeert met een inwendig product.

7. Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H}$ en een rij $\{\mathbf{a}_n\}$ in $\mathbf{H}$ met de eigenschappen

   (1) $\|\mathbf{a}_n\| = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$,

   (2) $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{a}_n, \mathbf{x})|^2$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.

   (a) Laat zien dat $\{\mathbf{a}_n\}$ een orthonormaal stelsel is.

   (b) Laat zien dat $\{\mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis van $\mathbf{H}$ is.

8. Laat zien dat in de Hilbertruimte $\mathbb{L}_2(0, \pi)$ de lineaire deelruimte van polynomen dicht ligt.

9. Laat zien dat in de Hilbertruimte $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ de lineaire deelruimte van continue functies dicht ligt.

10. Beschouw in de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \mathbb{H}^1(-\pi, \pi)$, uitgerust met het inwendig product

$$(f, g)_{\mathbb{H}^1} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f'(x)} g'(x)\, dx,$$

de functies

$$h(x) = \frac{\sinh(x)}{\sinh(2\pi)},$$

$$g_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi(1+n^2)}}, n \in \mathbb{Z},$$

$$e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z}.$$

In de deelvragen wordt steeds naar het inproduct $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{H}^1}$ gerefereerd. Dus $f \perp h$ betekent dat $(f, h)_{\mathbb{H}^1} = 0$ etc.
Naast dit inproduct beschouwen we ook het $\mathbb{L}_2$-inproduct

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x.$$

(a) Laat zien dat voor alle $f, g \in \mathbf{H}$ geldt $(f, g)_{\mathbb{H}^1} = (f, g) + (f', g')$.

(b) Laat zien dat $f \perp h$ d.e.s.d. als $f(-\pi) = f(\pi)$.

(c) Laat zien dat $f - (h, f)_{\mathbb{H}^1} h$ in de randpunten $-\pi$ en $\pi$ dezelfde functiewaarden heeft.

(d) Laat $f \in \mathbf{H}$ met $f(-\pi) = f(\pi)$.
Toon aan dat $(e_n, f)_{\mathbb{H}^1} = (1 + n^2)(e_n, f)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

(e) Bewijs dat de functies $h$ en $g_n, n \in \mathbb{Z}$, een orthonormale basis in $\mathbf{H}$ vormen.

## 5.2 Convexiteit en projecties

1. Beschouw in $\mathbb{R}^2$ de punten $(2, 1)$, $(0, 1)$ en $(1, 1)$.
   Beschrijf de kleinste convexe verzameling die deze drie punten omvat.

2. In de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2(0, 1)$ zijn de functies $f_1, f_2, f_3$ gegeven door $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t + i$ en $f_3(t) = t^2$.

   (a) Bereken de afstand van $f_3$ tot het hypervlak $\{f \in \mathbf{H} \,|\, (f_1, f) = 1\}$.

   (b) Bereken de afstand van $f_2$ tot het hypervlak $\{f \in \mathbf{H} \,|\, (f_3, f) = i\}$.

3. Beschouw de Hilbertruimte $\mathbb{R}^3$.
   Welk punt van het vlak $x + y + z = 1$ ligt het dichtst bij $(2, 0, 0)$?

4. Laat $B$ de gesloten eenheidsbal in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn, d.w.z. $B = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H} \,|\, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$.

   (a) Laat zien dat $B$ convex is.

   (b) Laat $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ met $\|\mathbf{u}\| > 1$.
   Bepaal het punt $\mathbf{y} \in B$ dat het dichtst bij $\mathbf{u}$ ligt.

5. Laat $B$ de gesloten eenheidsbal in $\ell_\infty(\mathbb{N})$ zijn en $\underline{u} = (2, 0, 0, \ldots)$.

   (a) Toon aan dat $B$ convex is.

   (b) Bepaal $\inf\limits_{\underline{b} \in B} \|\underline{u} - \underline{b}\|_\infty$.

   (c) Bepaal een punt $\underline{a} \in B$ met minimale afstand tot $\underline{u}$.

   (d) Is $\ell_\infty(\mathbb{N})$ een Hilbertruimte?

6. Bepaal $\min\limits_{a,b,c \in \mathbb{C}} \displaystyle\int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 \mathrm{d}x$.

7. Beschouw in de IP-ruimte $\mathbb{L}_2(-\pi,\pi)$ de functies $f_n(x) = \sin(nx), n \in \mathbb{N}$, en de functie $f(x) = e^{-ix}$. Laat $W$ het lineaire opspansel $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ zijn.

   (a) Toon aan dat de projectie $\mathcal{P}_W(f)$ van $f$ op $W$ bestaat en bereken deze.

   (b) Toon aan dat voor alle $N \in \mathbb{N}$ en alle complexe getallen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ geldt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{-ix} - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin(nx)|^2 \, \mathrm{d}x \geq \pi \, .$$

   (c) Voor welke $N, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ geldt in deze ongelijkheid het gelijkteken?

8. Beschouw het vlak $M = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^3 | z_1 + iz_2 - iz_3 = 0\}$.
Bepaal het orthoplement $M^\perp$.

9. Beschouw in de Hilbertruimte $\ell_2(\mathbb{N})$ de gesloten lineaire deelruimte $M$ bestaande uit alle rijen $\underline{x}$ met $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$, $\dots$, dus met $x_{2n-1} = x_{2n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Geef een orthonormale basis van $M$.

   (b) Bepaal het orthoplement $M^\perp$ en geef een orthonormale basis van $M^\perp$.

   (c) Bepaal de projectie van de vector $\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots)$ op $M$.

10. Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2(-\pi,\pi)$.
Laat $\mathbf{E}$ de verzameling van de even functies $f \in \mathbf{H}$ rond 0 zijn, d.w.z. $f(-t) = f(t)$ voor alle $t \in (-\pi,\pi)$.
Laat $\mathbf{O}$ de verzameling van de oneven functies $f \in \mathbf{H}$ rond 0 zijn, d.w.z. $f(-t) = -f(t)$ voor alle $t \in (-\pi,\pi)$.

   (a) Laat zien dat $\mathbf{E} \perp \mathbf{O}$.

   (b) Laat zien dat er bij iedere functie $f \in \mathbf{H}$ twee eenduidig bepaalde functies $f_e \in \mathbf{E}$ en $f_o \in \mathbf{O}$ bestaan met $f = f_e + f_o$.

   (c) Laat zien dat $\mathbf{E}^\perp = \mathbf{O}$ en $\mathbf{O}^\perp = \mathbf{E}$.

   (d) Laat zien dat $\mathbf{E}$ en $\mathbf{O}$ gesloten lineaire deelruimten zijn.

   (e) Geef twee orthonormale bases, een van $\mathbf{E}$ en een van $\mathbf{O}$.

11. Beschouw in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ een gesloten lineaire deelruimte $M$. Laat $\{\mathbf{v}_n\}$ een orthonormale basis in $M$ zijn. De projectieafbeelding op $M$ wordt aangegeven met $\mathcal{P}_M(\mathbf{x})$.

    (a) Laat zien dat voor iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ geldt $\mathcal{P}_M(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{v}_n, \mathbf{x})\, \mathbf{v}_n$.

    (b) Bepaal de norm $\|\mathcal{P}_M\|$.

12. Laat $\mathcal{P}_M$ de projectie op een gesloten lineaire deelruimte $M$ in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn met $\mathbf{0} \neq M \neq \mathbf{H}$.

    (a) Bepaal de norm $\|\mathcal{P}_M\|$.

    (b) Bepaal de norm $\|\mathcal{I} - \mathcal{P}_M\|$.

    (c) Laat zien dat $(\mathcal{I} - \mathcal{P}_M)$ de projectie op $M^\perp$ is.

## 5.3 De representatiestelling van Riesz

1. De lineaire functionaal $\ell$ op de Hilbertruimte $\mathbb{L}_2(0,1)$ is gedefinieerd door $\ell(f) = \int_0^{1/2} i\, f(x)\, \mathrm{d}\, x$.

    (a) Bepaal een $g \in \mathbb{L}_2(0,1)$ zodanig dat $\ell(f) = (g, f)$ voor alle $f \in \mathbb{L}_2(0,1)$.

    (b) Bepaal de norm $\ell$.

2. Laat $\ell$ een continue lineaire functionaal op de Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn met $\forall_{\mathbf{x} \in \mathbf{H}} \, [\, \ell(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})\, ]$.
   Laat zien dat $\mathbf{H}$ de directe som is van $\langle\, \mathbf{y}\, \rangle$ en de nulruimte $\mathbf{N}(\ell)$, in formule $\mathbf{H} = \langle\, \mathbf{y}\, \rangle \oplus \mathbf{N}(\ell)$.

3. Zij $\ell$ de lineaire functionaal op $\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$ met $\ell(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (e_n, f)$ waarbij $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$.
   Laat zien dat $\ell$ begrensd is en bepaal de norm $\|\ell\|$.

4. Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \ell_2(\mathbb{N})$. Van de begrensde lineaire functionaal $m$ op $\mathbf{H}$ is het volgende gegeven:

    (1) Het orthoplement van de nulruimte $\mathbf{N}(\ell)$ wordt opgespannen door de vector $(1, 0, 0, i, 0, \dots)$.

(2) $m(\,(1,1,1,1,0,\dots)\,) = 2$.

(a) Bereken de projectie van $(1,1,1,1,0,\dots)$ op $\langle\,(1,0,0,i,0\dots)\,\rangle$.

(b) Bepaal $\underline{y} \in \ell_2(\mathbb{N})$ zodanig dat $m(\underline{x}) = (\underline{y}, \underline{x})$ voor alle $\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N})$.

5. Laat $\mathbf{y}$ een element van een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ ongelijk aan $\mathbf{0}$ zijn. De lineaire functionaal $\ell$ voldoet aan $\ell(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.
Laat $M = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H} \mid \ell(\mathbf{x}) = 1\}$.

(a) Toon aan dat $M$ niet leeg, convex en gesloten is.

Laat $\mathbf{x}_0$ het punt van $M$ zijn dat het dichtst bij de oorsprong $\mathbf{0}$ (de nulvector van $\mathbf{H}$) ligt.

(b) Bewijs dat $\mathbf{x}_0 = \dfrac{1}{\|\mathbf{y}\|^2}\,\mathbf{y}$.

## 5.4 De Banach Contractiestelling

1. (a) Op welk van de intervallen $[0,\infty)$, $[\frac{1}{2},\infty)$, $[1,\infty)$ is de functie $\varphi$, gedefinieerd door $\varphi(x) = e^{-x}$, een contractie?

   (b) Op welk van de bovengenoemde intervallen heeft de vergelijking $\varphi(x) = x$ een oplossing?

2. (a) Op het interval $[0,1]$ beschouwen we de functie $\varphi$ gegeven door $\varphi(x) = \cos x$. Bewijs dat de vergelijking $\varphi(x) = x$ precies een oplossing heeft op $[0,1]$.

   (b) Op het interval $[0,\frac{\pi}{2}]$ beschouwen we de functie $\psi$ gegeven door $\psi(x) = \cos x$. Ga na of $\psi$ een contractie is op $[0,\frac{\pi}{2}]$. Heeft de vergelijking $\psi(x) = x$ een oplossing op $[0,\frac{\pi}{2}]$?

3. Beschouw de gesloten eenheidsbol $\overline{B_{0,1}}$ in $\mathbb{R}^n$. Laat $\underline{a} \in \overline{B_{0,1}}$ een gegeven vector zijn. Bewijs dat er precies een $\underline{x} \in \overline{B_{0,1}}$ is die voldoet aan de vergelijking

$$\frac{1}{3 + (\underline{a}, \underline{x})}\underline{x} + \frac{1}{3}\underline{a} = \underline{x}.$$

Hierin stel $(\underline{a}, \underline{x})$ het gewone inproduct in $\mathbb{R}^n$ voor.
Geef vervolgens een aantal termen van een iteratierij met een startfunctie van eigen keuze. Vind $\underline{x}$.

4. Zij $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en stel dat $|\underline{b}| \leq 1$ en $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}|^2 \leq \frac{1}{4}$. Bewijs dat de vergelijking

$$2\underline{x} = (\underline{x}^{\mathrm{T}} A\underline{x})\underline{x} + \underline{b}$$

precies een oplossing $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^n$ heeft waarvoor geldt $|\underline{x}| \leq 1$.

5. Beschouw de gesloten eenheidsbol $\overline{B_{0,1}}$ in $\mathbb{R}^n$. Zij $\underline{a} \in \overline{B_{0,1}}$. Bewijs dat er precies een $\underline{x} \in \overline{B_{0,1}}$ is die voldoet aan de vergelijking

$$[\sin\{2 + (\underline{a}, \underline{x})\}]\underline{x} + \underline{a} = 2\underline{x}.$$

Hierin stelt $(\underline{a}, \underline{x})$ het gewone inproduct voor.

6. Beschouw de gesloten eenheidsbol $\overline{B_{0,1}}$ in $\mathbb{R}^n$. Zij $\underline{a}, \underline{b} \in \overline{B_{0,1}}$. Bewijs dat er precies een $\underline{x} \in \overline{B_{0,1}}$ is die voldoet aan de vergelijking

$$[\arctan\{(\underline{a}, \underline{x})\}](\underline{b} + \underline{x}) = 3\underline{x}.$$

Hierin stelt $(\underline{a}, \underline{x})$ het gewone inproduct voor.

7. Beschouw de gesloten eenheidsbol $\overline{B_{0,1}}$ in $\mathbb{R}^n$. Zij $\underline{a} \in \overline{B_{0,1}}$. Bewijs dat er precies een $\underline{x} \in \overline{B_{0,1}}$ is die voldoet aan de vergelijking

$$\Big(\arcsin(\frac{1}{2}(\underline{a}, \underline{x}))\Big)\underline{x} + \underline{a} = 2\underline{x}.$$

Hier stelt $(\underline{a}, \underline{x})$ het gewone inproduct voor.

8. Laat $\mathbb{R}^2$ voorzien zijn van de Euclidische metriek. Zij $\underline{e}$, $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$, $|\underline{e}| = 1$. Laat $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd zijn door

$$A\underline{x} = \frac{1}{2}\underline{x} + \frac{1}{2 + |\underline{x}|}\underline{e} \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^2).$$

De rij $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door $\underline{x}_1 = \underline{a}$, $\underline{x}_{n+1} = A\underline{x}_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de rij $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert, en bepaal de limiet.

9. Bewijs dat er een $\underline{f} = \text{kolom}[f(1), f(2), \ldots] \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ bestaat die voldoet aan

$$\forall_{m\in\mathbb{N}}\colon \quad \left[f(m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2 + m^2}\right].$$

10. Bewijs dat er een $\underline{a} = \text{kolom}[a_1,\, a_2,\, \ldots] \in \ell_1(\mathbb{N})$ bestaat die voldoet aan

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\colon \quad \left[ a_n = \frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-nm} \right].$$

11. Bewijs dat een een continue reële functie $f$ op $[0,1]$ bestaat die voldoet aan

$$\forall_{x\in[0,1]}\colon \quad \left[ f(x) = 1 + \int\limits_0^1 f(y)\, \sin(xy)\, \mathrm{d}y \right].$$

Schrijf de eerste paar termen op van de iteratierij met startfunctie $x \mapsto f_0(x) = 1$.

12. Bewijs dat er precies een continue functie $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ is die voldoet aan de integraalvergelijking

$$u(x) - \int\limits_0^1 \sin(\tfrac{1}{2}u(xt))\, \mathrm{d}t = e^x.$$

13. Bewijs dat er precies één $f \in \mathcal{C}([0,1])$ bestaat die voldoet aan

$$\forall_{x\in[0,1]}\colon \quad \left[ f(x) = x + \tfrac{1}{2} f(\tfrac{1}{2}x) + \tfrac{1}{3} f(\tfrac{1}{3}x) \right].$$

Vind $f$!

14. Toon aan dat er een $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{B}}(0,\infty)$ is met

$$\forall_{x\in[0,\infty)}\colon \quad \left[ f(x) = xe^{-x} + \frac{1}{2} f(\sqrt{x}) \right].$$

Schrijf de eerste drie termen op van een iteratierij die naar de oplossing convergeert.

15. Beschouw de functieruimte $\mathcal{C}([0,1])$ met de supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$. De afbeelding $\Phi\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ wordt gedefiniëerd door

$$u \mapsto \Phi[u], \qquad \text{met} \quad x \mapsto \Phi[u](x) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 u(xt) t^k \mathrm{d}t + \varphi(x).$$

Hierin is $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$ en $k \in \mathbb{N}$, beide vast gekozen.

(a) Laat zien dat $\Phi$ een contractie is in $\mathcal{C}([0,1])$.

(b) Formuleer de Banach contractiestelling en laat daarmee zien dat de integraalvergelijking

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 u(xt)t^k \mathrm{d}t + \varphi(x), \qquad (*)$$

éénduidig oplosbaar is.

(c) Laat zien dat voor de oplossing van de integraalvergelijking (*), met $k = 0$ genomen, geldt dat

$$u^{(\ell)}(0) = \frac{1}{2\ell+2} u^{(\ell)}(0) + \varphi^{(\ell)}(0), \quad \ell = 1, 2, 3, \cdots .$$

(d) Bepaal de oplossing van de integraalvergelijking

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 u(xt)\mathrm{d}t + 1.$$

(e) Bepaal de oplossing van de integraalvergelijking

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 u(xt)\mathrm{d}t + x.$$

(f) Vind de coëfficiënten van de reeksontwikkeling voor de oplossing $u$ van (*), als $\varphi$ op $[0,1]$ kan worden voor gesteld door

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$