Technische Universiteit Eindhoven

Faculteit Wiskunde & Informatica

Dictaat en vraagstukken bij

LINEAIRE ALGEBRA & LINEAIRE ANALYSE 3

2Y590

J. de GRAAF

Lentetrimester 2000

Inhoudsopgave

0 Voorkennis **5**
0.1 Vectorruimten 5
0.2 Lineaire afbeeldingen 6
0.3 Inwendig product 7
0.4 Complexificatie 8
0.5 Integratie 9

1 Vectorruimten van polynomen **11**
1.1 Vectorruimten van polynomen in een reële variabele 11
1.2 Vectorruimten van polynomen in twee reële variabelen 13
1.3 Vectorruimten van polynomen in drie reële variabelen 19

2 Genormeerde Vectorruimten **27**
2.1 Inproductruimten 27
2.2 Convergentie in genormeerde ruimten 32
2.3 Orthogonale en orthonormale stelsels in IP-ruimten 34
2.4 Genormeerde vectorruimten die geen IP-ruimten zijn 39

3 Lineaire Operatoren tussen genormeerde vectorruimten **45**
3.1 Lineaire afbeeldingen 45
3.2 Vectorruimten van lineaire afbeeldingen 52

4 Banachruimten, Hilbertruimten **55**
4.1 Volledigheid en Separabiliteit 55
4.2 Convexiteit en projecties 69
4.3 De representatiestelling van Riesz 72

5 Operatoren in Hilbertruimten **75**
5.1 Sesquilineaire Functionalen 75
5.2 (Zelf-)geadjungeerde Operatoren 82
5.3 Normale Operatoren 86

5.4 Projectie Operatoren 87
5.5 Compacte Operatoren 91

6 Spectrale Ontbinding van Operatoren 95
6.1 Eigenwaarden en eigenvectoren 95
6.2 Spectrale resolutie van compacte zelfgeadjungeerde operatoren 99
6.3 De Fouriertransformatie als unitaire operator in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. 106

7 Opgaven 111
0 Voorkennis 111
1 Vectorruimten van polynomen 115
2 Genormeerde vectorruimten 119
3 Lineaire operatoren tussen genormeerde vectorruimten 127
4 Banachruimten. Hilbertruimten 130
5 Operatoren in Hilbertruimten 136
6 Spectrale Ontbinding van Operatoren 143

Hoofdstuk 0 Voorkennis

0.1 Vectorruimten

0.1.1 Definitie (Vectorruimte)

Een *vectorruimte* ($\mathbf{E}$, $\mathbb{K}$, $+$,) is het ensemble van een verzameling $\mathbf{E}$, een lichaam $\mathbb{K}$ bestaande uit getallen of scalairen (in ons geval $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), een optelling $+$ in $\mathbf{E}$ en een vermenigvuldiging van vectoren met getallen; en wel zó dat voldaan is aan de acht axioma's voor een vectorruimte, zoals behandeld in het 1e jaar. Om de soort van de gebruikte scalairen te benadrukken, gebruiken we soms de notatie $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ in plaats van $\mathbf{E}$.

0.1.2 Voorbeelden ($\mathbb{K}^N$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$)

Standaardvoorbeelden van vectorruimten zijn

• $\mathbb{K}^N = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_N] \,\big|\, x_j \in \mathbb{K},\ 1 \le j \le N\}$, voor $N \in \mathbb{N}$,

• $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_j, \cdots] \,\big|\, x_j \in \mathbb{K},\ 1 \le j < \infty\}$.

De optelling en scalaire vermenigvuldiging gaan componentsgewijs.

0.1.3 Voorbeelden (Functieruimten)

Standaardvoorbeelden van functieruimten zijn

• $\mathcal{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{K} \,\big|\, f \text{ is continu}\}$. Hier is $[a,b]$ een interval.

• $\text{Pol}_1(N) = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K} \,\big|\, p \text{ is polynoom met coëf in } \mathbb{K} \text{ van hoogstens graad } N\}$.

De optelling en de scalaire vermenigvuldiging gaan puntsgewijs.
Dus $\alpha f + \beta g$ wordt gedefinieerd door $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, voor alle $x \in [a,b]$.

0.1.4 Definitie (Onafhankelijk stelsel)

Gegeven: Een *stelsel* van p stuks vectoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$.
Dit stelsel heet een *onafhankelijk stelsel* als

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K} : \Big[\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}\Big] \Rightarrow \ \big[\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0\big].$$

0.1.5 Definitie (Opspansel)

Gegeven: Een stelsel van p stuks vectoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$.
Het *opspansel* van dit stelsel is de verzameling

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \rangle \ = \ \{\sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbf{x}_j \big| \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}\}.$$

0.1.6 Definitie (Basis)

Gegeven: Een stelsel van n stuks vectoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.

Dit stelsel heet een *basis* voor $\mathbf{E}$ als het een onafhankelijk stelsel is én bovendien $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle = \mathbf{E}$.

0.1.7 Definitie (Dimensie)
Gegeven: Een vectorruimte $\mathbf{E}$.
Als $\mathbf{E} = \{\mathbf{0}\}$ dan $\dim \mathbf{E} = 0$. Als $\mathbf{E}$ een basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ heeft, dan $\dim \mathbf{E} = n$. Als $\mathbf{E} \neq \{\mathbf{0}\}$ en $\mathbf{E}$ heeft geen eindige basis dan $\dim \mathbf{E} = \infty$.

0.1.8 Voorbeelden
$\dim \mathbb{K}^N = N$, $\dim \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \infty$.

0.1.9 Definitie (Lineaire deelruimte)
Gegeven: Een deelverzameling $\mathbf{U} \subset \mathbf{E}$. Dan heet $\mathbf{U}$ een *lineaire deelruimte* van $\mathbf{E}$ als $(\mathbf{U}, \mathbb{K}, +,)$ een vectorruimte is.

0.1.10 Stelling
Gegeven: Een deelverzameling $\mathbf{U} \subset \mathbf{E}$.
Er geldt: $\mathbf{U}$ *is dan en slechts dan een lineaire deelruimte van* $\mathbf{E}$ *als* $\mathbf{U} \neq \emptyset$ *én* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U} \left[\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathbf{U}\right]$. *Dan is ook* $\langle \mathbf{U} \rangle = \mathbf{U}$.

0.1.11 Voorbeelden
Belangrijke standaard lineaire deelruimten van $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ zijn:

- $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \exists M\ \ \forall j \in \mathbb{N} \left[|x_j| < M\right] \}$.
- $c_0 = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{j\to\infty} x_j = 0\}$.
- $\ell_2(\mathbb{N}) = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \}$.
- $\ell_c(\mathbb{N}) = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ x_j \neq 0 \text{ voor slechts eindig veel } j \in \mathbb{N} \}$.

0.2 Lineaire afbeeldingen

0.2.1 Definitie (Lineaire afbeelding)
Gegeven: Twee vectorruimten $\mathbf{E}$ en $\mathbf{F}$. Een afbeelding $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$. Dan heet $\mathcal{A}$ een *lineaire afbeelding* als
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E} \left[\, \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} + \beta\mathcal{A}\mathbf{y} \,\right]$.

0.2.2 Definitie (Nulruimte, beeldruimte)
Gegeven: Lineaire afbeelding $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$.
De *nulruimte* of *kern* van $\mathcal{A}$ is de verzameling
$\mathbf{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\leftarrow}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E} \mid \mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}\} \subset \mathbf{E}$
De *beeldruimte* of het *bereik* van $\mathcal{A}$ is de verzameling
$\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(\mathbf{E}) = \{\mathcal{A}\mathbf{v} \in \mathbf{F} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{E}\} \subset \mathbf{F}$.

0.2.3 Stelling (Dimensiestelling)
Gegeven: Lineaire afbeelding $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$, $\dim \mathbf{E} < \infty$.
Dan geldt: $\dim \mathbf{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathbf{R}(\mathcal{A}) = \dim \mathbf{E}$.

0.2.4 Definitie (Eigenwaarden/Eigenvectoren)
Gegeven: Lineaire afbeelding $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Een getal $\lambda \in \mathbb{K}$.
Dan heet $\lambda \in \mathbb{K}$ een *eigenwaarde* van $\mathcal{A}$, als voor de *eigenruimte* $\mathbf{E}_\lambda(\mathcal{A}) = \mathbf{N}([\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}])$ geldt dat $\mathbf{E}_\lambda(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$. Als $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_\lambda(\mathcal{A})$ dan heet $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq 0$, een *eigenvector* van $\mathcal{A}$ en er geldt $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

0.3 Inwendig product

0.3.1 Definitie (inwendig product)
Een *inwendig product* of *inproduct* op een vectorruimte $\mathbf{E}$ voegt aan elk tweetal vectoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$ een getal $(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) \in \mathbb{K}$ zodanig dat de volgende drie regels gelden:
$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E}\; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}:$ (1) $\big[(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}) > 0\big] \;\Leftrightarrow\; \big[\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\big]$,
(2) $(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}\,,\,\mathbf{x})}$, (3) $(\mathbf{z}\,,\,\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{z}\,,\,\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{z}\,,\,\mathbf{y})$.
De *lengte* of *norm* $\|\mathbf{x}\|$ van $\mathbf{x}$ is het getal $\sqrt{(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x})}$.
Als een vectorruimte $\mathbf{E}$ uitgerust is met een inproduct, dan heet $\mathbf{E}$ een *inproductruimte* of *IP-ruimte*.

0.3.2 Voorbeelden
Het *standaard inproduct* op $\mathbb{K}^N$ is $(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{N} \overline{x_j} y_j$. In het geval $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ doet de complexe conjugatiestreep niks!

0.3.3 Stelling (Cauchy-Schwarz)
Gegeven: Een IP-ruimte $\mathbf{E}$. *Twee vectoren* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$.
Dan geldt: $|(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$. *Het =teken geldt precies dan als* $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ *een afhankelijk stelsel is.*

0.3.4 Definitie (Orthoplement)
Gegeven: Een IP-ruimte $\mathbf{E}$. Een vector $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$, een deelverzameling $\mathbf{W} \subset \mathbf{E}$.
We definieren: Het *orthoplement* $\mathbf{a}^\perp$ van $\mathbf{a}$, respectievelijk $\mathbf{W}^\perp$ van $\mathbf{W}$ door
$\mathbf{a}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\big|\, (\mathbf{a}\,,\,\mathbf{x}) = 0\,\}$ en $\mathbf{W}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{W} \,\big|\, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{W}\; (\mathbf{a}\,,\,\mathbf{x}) = 0\,\}$.

0.3.5 Stelling
Gegeven: Zie voorafgaande definitie.
Er geldt: • $\mathbf{W}^\perp$ *is een lineaire deelruimte.*
• $\dim \mathbf{E} < \infty \;\Rightarrow\; (\mathbf{W}^\perp)^\perp = \langle \mathbf{W} \rangle$ *(=*$\mathbf{W}$ *als* $\mathbf{W}$ *een lineaire deelruimte is).*
• $\dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\perp = \dim \mathbf{E}$.

0.3.6 Stelling
Gegeven: Een IP-ruimte $\mathbf{E}$. *Een lineaire deelruimte* $\mathbf{U} \subset \mathbf{E}$, *met* $\dim \mathbf{U} < \infty$. *Een vector* $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
Er geldt: • $\exists!\, \mathbf{u} \in \mathbf{U}\, \exists!\, \mathbf{v} \in \mathbf{U}^\perp \big[\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\big]$.
• *De toevoeging* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}$ *is een lineaire afbeelding (de* projectie *op* $\mathbf{U}$*).*
• *Notatie* $\mathbf{u} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}$.

0.4 Complexificatie

0.4.1 Gezien als een $\mathbb{C}$-vectorruimte is $\dim \mathbb{C} = 1$. De deelverzameling $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ is, complex gesproken, geen *lineaire* deelruimte. Echter, $\mathbb{C}$ kan ook als een $\mathbb{R}$-vectorruimte worden opgevat. Dan is $\dim \mathbb{C} = 2$ en is, reëel gesproken, $\mathbb{R}$ wél een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}$. Net zo kan $\mathbb{C}^N$ als een $2N$-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte worden opgevat. Hierin is dan $\mathbb{R}^N$ een N-dimensionale lineaire deelruimte. Complex gesproken is $\mathbb{R}^N$ wél een deelverzameling van, maar géén lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^N$. De complexe vectorruimte $\mathbb{C}^N$ heet wel de *complexificatie* van $\mathbb{R}^N$.

0.4.2 Uitgaande van een gegeven $\mathbb{R}$-vectorruimrte $\mathbf{F}$ zullen we nu, door 'verdubbeling', een complexe vectorruimte bouwen: de *complexificatie* $\mathbf{F}_\mathbb{C}$. Beschouw de verzameling $\mathbf{F}_\mathbb{C} = \{\mathbf{z} \,|\, \mathbf{z} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}],\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}\} = \mathbf{F}^2$ van geordende paren van vectoren in $\mathbf{F}$. In $\mathbf{F}_\mathbb{C}$ definieren we de optelling door $[\mathbf{x}; \mathbf{y}] + [\mathbf{a}; \mathbf{b}] = [\mathbf{x} + \mathbf{a}; \mathbf{y} + \mathbf{b}]$. Als $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, dan definieren we $\gamma\mathbf{z} = [\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}; \beta\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}]$. De aldus ingevoerde optelling en scalaire vermenigvuldiging maken $\mathbf{F}_\mathbb{C}$ tot een complexe vectorruimte omdat aan de acht axiomas uit het 1e jaar voldaan is. De oorspronkelijke $\mathbf{F}$ identificeren we met dubbelvectoren van de vorm $[\mathbf{x}; \mathbf{0}]$. Merk weer op dat $\mathbf{F}$ aldus als een deelverzameling van $\mathbf{F}_\mathbb{C}$ opgevat kan worden, maar geen $\mathbb{C}$-lineaire deelruimte ervan is. Vectoren van de vorm $[\mathbf{0}; \mathbf{y}]$ noteren we met $i\mathbf{y}$ zodat $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ geschreven kan worden en alle vertrouwde 'complexe rekenregels' doorgang vinden.

0.4.3 Stelling
Gegeven: Een stelsel *van p stuks vectoren* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\} \subset \mathbf{F}$.
Er geldt: Genoemd stelsel is $\mathbb{R}$*-onafhankelijk in* $\mathbf{F}$ *dan en slechts dan als het* $\mathbb{C}$*-onafhankelijk is in* $\mathbf{F}_\mathbb{C}$.

0.4.4 Gevolg
Een basis voor $\mathbf{F}$ *is ook een basis voor* $\mathbf{F}_\mathbb{C}$. *Omgekeerd natuurlijk niet omdat vectoren in* $\mathbf{F}_\mathbb{C}$ *meestal buiten* $\mathbf{F}$ *liggen. De (reële) dimensie van* $\mathbf{F}$ *is gelijk aan de (complexe) dimensie van* $\mathbf{F}_\mathbb{C}$.

0.4.5 Definitie
Gegeven: Twee $\mathbb{R}$-vectorruimten $\mathbf{E}$ en $\mathbf{F}$. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$. We definieren de *complexificatie* $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\colon \mathbf{E}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ van $\mathcal{A}$ door $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \mathcal{A}\mathbf{x} + i\mathcal{A}\mathbf{y}$.
Aldus is $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ een $\mathbb{C}-$lineaire afbeelding.

0.4.6 Voorbeeld
De matrix B van een lineaire afbeelding $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, definieert ook een lineaire afbeelding van $\mathbb{C}^N$ naar $\mathbb{C}^N$.

0.5 Integratie

0.5.1 De bouwstenen van een *integratietheorie voor functies van één reële variabele* zijn

- Een open interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ met $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
- Een (complexe) vectorruimte, notatie $\mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b))$, van (complexwaardige) functies op (a, b). De toevoeging 'spec' wil zeggen dat de functies in $\mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b))$ aan zekere specificaties moeten voldoen. Voorbeelden van zulke specificaties zijn '(stuksgewijs) continu', 'stuksgewijs constant',ćontinu differentieerbaar', 'polynomiaal',... .
- Een lineaire afbeelding $\mathcal{I}\colon \mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b)) \to \mathbb{C}$

0.5.2 Definitie (Integratietheorie)
Gegeven: Bovenstaande bouwstenen. Voorts, willekeurige $f,\ g,\ h \in \mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b))$, willekeurige $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$, willekeurige $c,\ d \in (a, b)$.
De toevoeging: $\mathcal{I}\colon \mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b)) \to \mathbb{C}$, notatie $\mathcal{I}f = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, heet een *integraal* als ze de volgende eigenschappen heeft:

a) Als $(c, d) \subset (a, b)$ en $f \in \mathcal{I}\colon \mathcal{L}_{\text{spec}}((a, b))$, dan geldt voor de beperking $\chi_{(c,d)}f$ van f tot het interval (c, d), dat $\chi_{(c,d)}f \in \mathcal{L}_{\text{spec}}((c, d))$.

b) $\int\limits_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$
(Dus $\mathcal{I}$ is een lineaire afbeelding)

c) $\int\limits_a^b h(x)\,dx = \int\limits_a^c h(x)\,dx + \int\limits_c^b h(x)\,dx.$

d) $\left|\int\limits_a^b h(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |h(x)|\,dx$.

e) Als $\forall x \in (a,b) : \int\limits_a^x h(t)\,dt = 0$, dan geldt $\int\limits_a^b |h(x)|\,dt = 0$. Een functie met laatstgenoemde eigenschap noemen wij een *niksfunctie*.

0.5.3 Opmerkingen

i) Een *integratietheorie* gaat NIET over het 'exact' berekenen van integralen, dat lukt sowieso tamelijk zelden, maar over het construeren van een toevoeging $\mathcal{I}$ voor vectorruimten $\mathcal{L}$ die naast 'nette' functies ook super discontinue viezeriken bevatten. Zo kan de *Lebesgue-integraal* functies aan als $x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. U weet wel, dat is die functie die gelijk 1 is als $x \in \mathbb{Q}$ en gelijk 0 is als $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Uit het 1e jaar is U min of meer bekend hoe $\mathcal{I}$ geconstrueerd wordt voor (stuksgewijs) continue functies, de *Riemann-integraal*. Alle eigenschappen in de definitie zijn U zeer vertrouwd!

ii) Als $\mathcal{L}$ uitsluitend continue functies bevat dan is er maar één niksfunctie, namelijk de functie die overal 0 is. Binnen de Riemann-integratietheorie is een functie die slechts in een eindig aantal punten van 0 verschilt een niksfunctie. Daar zijn er heel veel van. Binnen de Lebesgue-integratietheorie is zelfs $\chi_{\mathbb{Q}}$ een niksfunctie. Voor $\chi_{\mathbb{Q}}$ werkt overigens de Riemann-constructie niet: $\chi_{\mathbb{Q}}$ is niet 'Riemann-integreerbaar'.

Hoofdstuk 1 Vectorruimten van polynomen

Er zijn twee belangrijke bestaansredenen voor dit hoofdstuk. Op de eerste plaats wordt er op een niet-triviale manier gebruik gemaakt van de wiskunde zoals die ontwikkeld is in LALA 1 en 2 en wordt de leerling van het idee afgeholpen dat lineaire algebra uitsluitend gegoochel met matrices is. Op de tweede plaats spelen de hier geconstrueerde polynomen een cruciale rol bij het vervaardigen van oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen.

De volgende notaties worden gebruikt:

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- span $\mathfrak{A} \; = \{\sum\limits_{k=0}^{N} \lambda_k a_k \;\Big|\; N \in \mathbb{N}_0, \lambda_k \in \mathbb{C}, a_k \in \mathfrak{A}\;\}$

1.1 Vectorruimten van polynomen in een reële variabele

We beschouwen polynomen $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ in een reële variabele x met complexe coëfficiënten a_i, $0 \leq i \leq N$ met $N \in \mathbb{N}_0$. Deze polynomen worden complexe polynomen genoemd.

Als $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ met $a_N \neq 0$ dan is de graad van het polynoom, gr$(p(x))$, gelijk aan N. Het nulpolynoom $p(x) = 0$ heeft, bij ons, per definitie graad 0.

We merken op dat de graad van $p(x)$ het kleinste getal N uit $\mathbb{N}_0$ is met de eigenschap dat $p(x)$ te schrijven is als $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$.

Het nulpolynoom wordt ook met 0 zelf aangegeven.

Een polynoom $p(x)$ kunnen we ook als een functie $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zien. Een getal $\alpha \in \mathbb{R}$ is een nulpunt van $p(x)$ als $p(\alpha) = 0$. De volgende stelling is fundamenteel voor de theorievorming.

1.1.1 Stelling

Laat $p(x)$ een complex polynoom van de graad $N > 0$ zijn.
Dan heeft $p(x)$ hooguit N verschillende reële nulpunten .
Bewijs: Laat $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ N verschillende reële nulpunten van $p(x)$ zijn.

Dan is $p(x) = c(x - \alpha_1)\dots(x - \alpha_N)$ met $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$.
Laat $\xi \in \mathbb{R}$ van alle α_i's verschillen. Dan is $p(\xi) = c(\xi - \alpha_1)\dots(\xi - \alpha_n) \neq 0$.
Het getal ξ is geen nulpunt. □

Het nulpolynoom is het enige polynoom dat als functie gelijk is aan de nulfunctie.

1.1.2 Definitie
De verzameling van complexe polynomen geven we aan met Pol_1, dus

$$\mathrm{Pol}_1 = \left\{ \sum_{i=0}^{N} a_i x^i \;\middle|\; N \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C} \right\} .$$

Met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging maken we Pol_1 tot een complexe vectorruimte. □

De vectorruimte Pol_1heeft het nulpolynoom als nulelement.
We merken op dat

> "De lineaire combinatie $a_1 p_1(x) + \dots + a_M p_M(x)$ is gelijk aan het nulpolynoom."

impliceert dat

$$a_1 p_1(\xi) + \dots + a_M p_M(\xi) = 0 \text{ voor alle } \xi \in \mathbb{R} .$$

1.1.3 Stelling
De verzameling monomen $\mathrm{Mon} = \left\{ x^n \;\middle|\; n = 0, 1, \dots \right\}$ is een basis in Pol_1.
Bewijs: We laten zien dat Mon een onafhankelijk stelsel is en Pol_1 opspant, d.w.z.

$$\operatorname{span} \mathrm{Mon} = \mathrm{Pol}_1 .$$

Laat $p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ een eindige lineaire combinatie van monomen zijn. Dan is $p(\xi) = 0$ voor iedere $\xi \in \mathbb{R}$. Dus de graad van het polynoom $p(x)$ kan niet groter dan 0 zijn en het polynoom $p(x)$ is gelijk aan de constante 0. De coëfficiënten a_0, a_1, $\dots, a_N$ zijn gelijk aan 0. Dus Mon is een onafhankelijk stelsel. Aangezien ieder polynoom een eindige lineaire combinatie van monomen is, geldt $\operatorname{span}\mathrm{Mon} = \mathrm{Pol}_1$. □

Gevolg: $p(\xi) = 0$ voor alle $\xi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p(x)$ is het nulpolynoom.

Omdat Mon een basis met oneindig veel elementen is, geldt dat

$$\dim \mathrm{Pol}_1 = \infty .$$

1.1.4 Definitie
$\mathrm{Pol}_1(n)$ is de lineaire deelruimte van Pol_1 bestaande uit alle polynomen van hoogstens graad n. $\square$

We merken op dat $\{1, x, \ldots, x^n\}$ een basis is voor $\mathrm{Pol}_1(n)$ en vinden

$$\dim \mathrm{Pol}_1(n) = n + 1 \ .$$

1.2 Vectorruimten van polynomen in twee reële variabelen

We beschouwen de complexe polynomen $p(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_{i,j}x^iy^j$ in twee reële variabelen x en y met $N, M \in \mathbb{N}_0$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$. Zo'n polynoom is een eindige lineaire combinatie van monomen x^iy^j.
De graad van een polynoom $p(x,y)$ geven we met $\mathrm{gr}(p)$ of $\mathrm{gr}(p(x,y))$ aan en, per definitie,

$$\mathrm{gr}(p(x,y)) = \max(\left\{ i + j \;\middle|\; a_{i,j} \neq 0 \text{ of } (i,j) = (0,0) \right\}) \ .$$

De graad van het nulpolynoom $p(x,y) = 0$ is gelijk aan 0.
Polynomen $p(x,y)$ zijn te beschouwen als functies $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$.

1.2.1 Definitie
De verzameling van complexe polynomen in twee reële variabelen x en y geven we aan met Pol_2, dus

$$\mathrm{Pol}_2 = \left\{ \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_{i,j}x^iy^j \;\middle|\; N, M \in \mathbb{N}_0, a_{i,j} \in \mathbb{C} \right\} \ .$$

Met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging maken we Pol_2 tot een complexe vectorruimte. $\square$

Het nulelement van Pol_2 is het nulpolynoom $p(x,y) = 0$ met $\mathrm{gr}(p(x,y)) = 0$.
De vectorruimte Pol_1 is een lineaire deelruimte van Pol_2 zodat we kunnen concluderen

$$\dim \mathrm{Pol}_2 = \infty \ .$$

Een polynoom $p(x,y)$ kan ook geschreven worden als

$$p(x,y) = \sum_{\ell=0}^{M} p_\ell(x)y^\ell$$

met $p_\ell(x)$ een polynoom van hoogstens graad N. Er geldt dat

$$p_\ell(x) = \sum_{k=0}^{N} a_{k,\ell} x^k$$

1.2.2 Stelling

De verzameling monomen $\text{Mon} = \left\{ x^n y^m \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}_0 \right\}$ is een basis in Pol_2.

Bewijs: We laten zien dat Mon onafhankelijk is en dat $\text{spanMon} = \text{Pol}_2$.

Laat $p(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} a_{i,j} x^i y^j$, een eindige lineaire combinatie van monomen, gelijk zijn aan het nulpolynoom.

Er zijn polynomen $p_\ell(x) \in \text{Pol}_1$ zodanig dat $p(x,y) = \sum_{\ell=0}^{M} p_\ell(x) y^\ell$.

Voor alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ geldt nu $p(\xi,\eta) = \sum_{\ell=0}^{M} p_\ell(\xi)\eta^\ell = 0$.

Het complexe polynoom $p(\xi, y) = \sum_{\ell=0}^{M} p_\ell(\xi) y^\ell$ in de reële variabele y met complexe coëfficiënten $p_\ell(\xi)$ is gelijk aan 0.

Op grond van stelling 1.1.3 geldt voor de coëfficiënten:

$$p_0(\xi) = p_1(\xi) = \cdots = p_M(\xi) = 0 \ .$$

Omdat ξ een willekeurig element uit $\mathbb{R}$ is, geldt voor de polynomen $p_\ell(x)$:

$$p_0(x) = p_1(x) = \cdots = p_M(x) = 0 \ .$$

Stelling 1.1.3 garandeert dat alle coëfficiënten $a_{i,j}$, $0 \le i \le N$ en $0 \le j \le M$ gelijk aan 0 zijn. De verzameling Mon is een onafhankelijk stelsel.

Het is eenvoudig in te zien dat $\text{spanMon} = \text{Pol}_2$. $\square$

Gevolg : $p(\xi,\eta) = 0$ voor alle $\xi, \eta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p(x,y) = 0$.

1.2.3 Definitie

$\text{Pol}_2(n)$ is de lineaire deelruimte van Pol_2 bestaande uit alle polynomen van hoogstens graad n. $\square$

Het stelsel $\left\{ x^k y^\ell \;\middle|\; k, \ell \in \mathbb{N}, 0 \le k + \ell \le n \right\}$ is een basis in $\text{Pol}_2(n)$. Deze basis bevat $1 + 2 + \cdots + (n+1) = \binom{n+2}{2}$ elementen.

1.2.4 Definitie
Laat $m \in \mathbb{N}_0$.
Een m - homogeen polynoom $p(x, y)$ is een polynoom waarvoor geldt dat

$$p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m p(x, y) \ .$$

$\square$

Het nulpolynoom $p(x, y) = 0$ is m - homogeen voor iedere $m \in \mathbb{N}_0$.

1.2.5 Stelling
Voor een m - homogeen polynoom $p(x, y)$ geldt dat

$$p(x, y) = \sum_{i+j=m} a_{i,j} x^i y^j \ .$$

Bewijs: Laat $p(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} a_{i,j} x^i y^j$.

Dan geldt voor willekeurige λ dat $p(\lambda x, \lambda y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} a_{i,j} \lambda^{i+j} x^i y^j$.
Het samennemen van gelijke machten van λ geeft

$$p(\lambda x, \lambda y) = \sum_{\ell=0}^{L} \left(\lambda^\ell \sum_{i+j=\ell} a_{i,j} x^i y^j \right)$$

waarbij $L = \mathrm{gr}(p(x, y))$ en $a_{i,j} = 0$ voor $i > N$ of $j > M$. De homogeniteit van $p(x, y)$ geeft de betrekking

$$\lambda^m \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{i=0}^{\ell} a_{i,\ell-i} x^i y^{\ell-i} = \sum_{\ell=0}^{L} \left(\lambda^\ell \sum_{i+j=\ell} a_{i,j} x^i y^j \right) \ .$$

Voor willekeurige ξ en $\eta \in \mathbb{R}$, ingevuld voor x en y, vinden we de volgende gelijkheid voor twee polynomen in λ:

$$\lambda^m \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{i+j=\ell} a_{i,j} \xi^i \eta^j = \sum_{\ell=0}^{L} \left(\lambda^\ell \sum_{i+j=\ell} a_{i,j} \xi^i \eta^j \right) \ .$$

Aangezien $\{1, \lambda, \ldots, \lambda^L\}$ een onafhankelijk stelsel is, vinden we dat voor de coëfficiënten van λ^ℓ, $\ell \neq m$ geldt:

$$\sum_{i+j=\ell} a_{i,j} \xi^i \eta^j = 0 \ .$$

Omdat ξ en η ieder willekeurig getal in $\mathbb{R}$ kunnen zijn, vinden we dat voor $\ell \neq m$

$$\sum_{i+j=\ell} a_{i,j} x^i y^j = 0 \ .$$

Op grond van stelling 1.2.2 kunnen we concluderen dat

$$a_{i,j} = 0 \text{ voor alle } i \text{ en } j, i+j \neq m$$

en dat $p(x,y) = \sum_{i+j=m} a_{i,j} x^i y^j$. □

Gevolg: Als een m - homogeen polynoom $p(x,y)$ ongelijk 0 is, dan is $\mathrm{gr}(p(x,y))$ gelijk aan m.

1.2.6 Definitie

$\mathrm{HomPol}_2(n)$ is de lineaire deelruimte van Pol_2 bestaande uit alle n - homogene polynomen. □

Uit stelling 1.2.5 volgt onmiddelijk dat $\mathrm{HomPol}_2(m), 0 \leq m \leq n$, lineaire deelruimten van $\mathrm{Pol}_2(n)$ zijn.
Omdat het stelsel $\{x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}$ een basis in $\mathrm{HomPol}_2(n)$ is, is $\dim \mathrm{HomPol}_2(n) = n+1$.
Ieder polynoom $p(x,y) \in \mathrm{Pol}_2(n)$ is ééntduidig te schrijven als een som van m - homogene polynomen, $0 \leq m \leq n$:

$$p(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\Big(\sum_{\ell=0}^{k} a_{\ell,k-\ell,} x^\ell y^{k-\ell} \Big)}_{k\text{ - homogeen}} \ .$$

De ruimte $\mathrm{Pol}_2(n)$ is de directe som van de lineaire deelruimten $\mathrm{HomPol}_2(k), 0 \leq k \leq n$:

$$\mathrm{Pol}_2(n) = \mathrm{HomPol}_2(0) \oplus \mathrm{HomPol}_2(1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{HomPol}_2(n-1) \oplus \mathrm{HomPol}_2(n) \ .$$

Hieronder staan enkele veel voorkomende lineaire afbeeldingen op Pol_2. Deze afbeeldingen hebben de eigenschap dat ze de lineaire deelruimten $\mathrm{Pol}_2(n)$ in $\mathrm{Pol}_2(n)$ zelf afbeelden. Soms beschouwen we hen ook als afbeeldingen in $\mathrm{Pol}_2(n)$.

- De Euleroperator $\mathcal{E} = (\underline{x}, \nabla) = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$
  Alle $k \in \mathbb{N}_0$ zijn eigenwaarden van $\mathcal{E}$. Bij eigenwaarde k hoort $\mathrm{HomPol}_2(k)$ als eigenruimte.

- De operator $\mathcal{L} = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$
  $\mathcal{L}$ beeldt $\mathrm{HomPol}_2(k)$ in $\mathrm{HomPol}_2(k)$ af.

- De Laplace-operator $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$
  Δ kan ook opgevat worden als
  - operator $\Delta : \mathrm{Pol}_2(n) \to \mathrm{Pol}_2(n-2) \quad , n \geq 2$
  - operator $\Delta : \mathrm{HomPol}_2(n) \to \mathrm{HomPol}_2(n-2) \quad , n \geq 2$

De monomen $x^k y^\ell$ zijn eigenvectoren van $\mathcal{E}$. Om de andere twee operatoren te bestuderen introduceren we een nieuw onafhankelijk stelsel van polynomen.

1.2.7 Stelling
Het stelsel

$$\{(x+iy)^n, (x+iy)^{n-1}(x-iy), \ldots, (x+iy)(x-iy)^{n-1}, (x-iy)^n\}$$

is een basis in $\mathrm{HomPol}_2(n)$.
Bewijs: Omdat het aantal elementen van het stelsel $(n+1)$ is en omdat $\dim \mathrm{HomPol}_2(n) = (n+1)$ is, is het voldoende om te laten zien dat het stelsel onafhankelijk is.

Veronderstel dat $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x+iy)^{n-k}(x-iy)^k = 0$.

Substitutie van $x = r\cos(\varphi)$ en $y = r\sin(\varphi)$ levert $r^n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k e^{i(n-2k)\varphi} = 0$.
Vermenigvuldigen van de laatste gelijkheid met $e^{i(2\ell-n)}$ met $0 \leq \ell \leq n$ geeft $r^n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k e^{i(2\ell-2k)\varphi} = 0$ en integreren levert

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(r^n \sum_{k=0}^{n} a_k e^{i(2\ell-2k)\varphi} \right) \mathrm{d}\varphi = r^n \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2\ell-2k)\varphi} \mathrm{d}\varphi \right) = r^n a_\ell 2\pi \; .$$

Omdat $a_\ell = 0$ voor $0 \leq \ell \leq n$ vinden we dat het stelsel onafhankelijk is. □

1.2.8 Stelling
De verzameling $\left\{ (x+iy)^n (x-iy)^m \;\middle|\; n, m = 0, 1, \ldots \right\}$ is een basis van Pol_2.
□

De volgende resultaten zijn eenvoudig na te rekenen.

1.2.9 Stelling
Voor $k, \ell = 0, 1, \ldots$ geldt:

- $\mathcal{E}(x+iy)^k(x-iy)^\ell = (k+\ell)(x+iy)^k(x-iy)^\ell$
- $\mathcal{L}(x+iy)^k(x-iy)^\ell = i(k-\ell)(x+iy)^k(x-iy)^\ell$
- $\Delta(x+iy)^k(x-iy)^\ell = 4k\ell(x+iy)^{k-1}(x-iy)^{\ell-1}$

De operatoren $\mathcal{E}$ en $\mathcal{L}$ commuteren op Pol_2, d.w.z. dat $\mathcal{E}\mathcal{L}p = \mathcal{L}\mathcal{E}p$ voor alle $p \in \mathrm{Pol}_2$. De polynomen $(x+iy)^k(x-iy)^\ell$ vormen in Pol_2 een basis van gemeenschappelijke eigenvectoren van beide operatoren.

Aan $\Delta u = (x+iy)^k(x-iy)^\ell, k, \ell = 0, 1, \ldots$ voldoet het polynoom

$$u_{\text{part}} = \frac{1}{4(k+1)(\ell+1)}(x+iy)^{k+1}(x-iy)^{\ell+1} .$$

De afbeelding $(x^2+y^2)\Delta$ is een lineaire afbeelding van $\mathrm{HomPol}_2(n)$ naar $\mathrm{HomPol}_2(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ vast gekozen. Eigenvectoren van deze afbeelding zijn $(x+iy)^k(x-iy)^\ell$ bij eigenwaarden $4k\ell$ met $k+\ell = n$.

1.2.10 Definitie
Lineaire deelruimten van harmonische polynomen:

$$\mathrm{HarmPol}_2 = \mathcal{N}(\Delta)$$

$$\mathrm{HarmPol}_2(n) = \mathcal{N}(\Delta) \cap \mathrm{Pol}_2(n)$$

$$\mathrm{HarmHomPol}_2(n) = \mathcal{N}(\Delta) \cap \mathrm{HomPol}_2(n)$$

□

Aangezien de polynomen $1, (x+iy), (x+iy)^2, \ldots$ een onafhankelijk stelsel vormen en aangezien $\Delta(x+iy)^k = 0$, geldt dat $\dim \mathrm{HarmPol}_2 = \infty$.

Beschouw Δ nu als een lineaire afbeelding $\Delta : \mathrm{HomPol}_2(n) \to \mathrm{HomPol}_2(n-2)$ met $n > 0$. Op grond van stelling 1.2.9 is de afbeelding Δ surjectief, d.w.z. $\mathcal{R}(\Delta) = \mathrm{HomPol}_2(n-2)$. De lineaire deelruimte $\mathrm{HarmHomPol}_2(n)$ is de nulruimte van de afbeelding Δ. Op grond van de dimensiestelling weten we dat $\dim \mathrm{HomPol}_2(n) = \dim \mathcal{N}(\Delta) + \dim \mathcal{R}(\Delta)$ en dit impliceert dat $\dim \mathrm{HarmHomPol}_2(n) = 2$. Een basis voor $\mathrm{HarmHomPol}_2(n)$ is $\{(x+iy)^n, (x-iy)^n\}$. De resultaten aangaande de eindige dimensies zetten we bij elkaar:

1.2.11 Stelling

- dim $\text{Pol}_2(n) = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$
- dim $\text{HarmPol}_2(n) = 2n+1$
- dim $\text{HomPol}_2(n) = n+1$
- dim $\text{HarmHomPol}_2(n) = \begin{cases} 2 & , n > 0 \\ 1 & , n = 0. \end{cases}$

1.3 Vectorruimten van polynomen in drie reële variabelen

We beschouwen complexe polynomen $p(x,y,z) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L} a_{i,j,k}x^i y^j z^k$ in drie reële variabelen x, y en z met $N, M, L \in \mathbb{N}_0$, $a_{i,j,k} \in \mathbb{C}$. Zo'n polynoom is een eindige lineaire combinatie van monomen $x^i y^j z^k$.
De graad van een polynoom $p(x,y,z)$ geven we weer met $\text{gr}(p)$ of $\text{gr}(p(x,y,z))$ aan en, per definitie,

$$\text{gr}(p(x,y,z)) = \max(\left\{ i+j+k \;\middle|\; a_{i,j,k} \neq 0 \text{ of } (i,j,k) = (0,0,0) \right\}) .$$

De graad van het nulpolynoom $p(x,y,z) = 0$ is weer gelijk aan 0.
Polynomen $p(x,y,z)$ zijn te beschouwen als functies $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$.

1.3.1 Definitie
De verzameling van complexe polynomen in drie reële variabelen x, y en z geven we aan met Pol_3, dus

$$\text{Pol}_3 = \left\{ \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L} a_{i,j,k}x^i y^j z^k \;\middle|\; N, M, L \in \mathbb{N}_0, a_{i,j,k} \in \mathbb{C} \right\} .$$

Met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging maken we Pol_3 tot een complexe vectorruimte. □

Het nulelement van Pol_3 is het nulpolynoom $p(x,y,z) = 0$.
De vectorruimte Pol_2 is een lineaire deelruimte van Pol_3 zodat we kunnen concluderen

$$\dim\ \text{Pol}_3 = \infty .$$

Een polynoom $p(x, y, z)$ kan geschreven worden als

$$p(x, y, z) = \sum_{k=0}^{L} p_k(x, y) z^k$$

met $p_k(x, y)$ een polynoom van hoogstens graad $N + M$. Er geldt dat

$$p_k(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} a_{i,j,k} x^i y^j$$

1.3.2 Stelling

De verzameling monomen Mon $= \left\{ x^i y^j z^k \;\middle|\; i, j, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ is een basis in Pol$_3$.

Bewijs: Zie het bewijs van stelling 1.2.2. $\square$

Gevolg : $p(\xi, \eta, \zeta) = 0$ voor alle $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p(x, y, z) = 0$.

1.3.3 Definitie

Pol$_3(n)$ is de lineaire deelruimte van Pol$_3$ bestaande uit alle polynomen van hoogstens graad n. $\square$

1.3.4 Definitie

Laat $m \in \mathbb{N}_0$.
Een m - homogeen polynoom $p(x, y, z)$ is een polynoom waarvoor geldt dat

$$p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m p(x, y, z) \ .$$

$\square$

1.3.5 Stelling

Voor een m - homogeen polynoom $p(x, y, z)$ geldt dat

$$p(x, y, z) = \sum_{i+j+k=m} a_{i,j,k} x^i y^j z^k \ .$$

Bewijs: Zie het bewijs van stelling 1.2.5. $\square$

1.3.6 Definitie

HomPol$_3(n)$ is de lineaire deelruimte van Pol$_3$ bestaande uit alle n - homogene polynomen. $\square$

Uit stelling 1.3.5 volgt onmiddelijk dat $\mathrm{HomPol}_3(m), 0 \leq m \leq n$, lineaire deelruimten van $\mathrm{Pol}_3(n)$ zijn. Ieder polynoom $p(x,y,z) \in \mathrm{Pol}_3(n)$ kan éénduidig geschreven worden als een som van m - homogene polynomen, $0 \leq m \leq n$:

$$p(x,y,z) = \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\Big(\sum_{i+j+k=m} a_{i,j,k} x^i y^j z^k \Big)}_{m\text{ - homogeen}} .$$

De ruimte $\mathrm{Pol}_3(n)$ is de directe som van de lineaire deelruimten $\mathrm{HomPol}_3(m), 0 \leq m \leq n$:

$$\mathrm{Pol}_3(n) = \mathrm{HomPol}_3(0) \oplus \mathrm{HomPol}_3(1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{HomPol}_3(n-1) \oplus \mathrm{HomPol}_3(n) .$$

Opmerking:

- $\mathrm{HomPol}_3(n) = \Big\{ p_0(x,y)z^n + p_1(x,y)z^{n-1} + \cdots + p_n(x,y) \;\Big|\; p_\ell(x,y) \in \mathrm{HomPol}_2(\ell) \Big\}$
- $\mathrm{HomPol}_3(n) = \left\{ \sum_{i+j+k=m} a_{i,j,k} x^i y^j z^k \;\middle|\; a_{i,j,k} \in \mathbb{C} \right\}$

1.3.7 Stelling
Voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt:

(1) $\dim \mathrm{HomPol}_3(n) = 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \binom{n+2}{2}$

(2) $\dim \mathrm{Pol}_3(n) = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{3}$

Bewijs: (1) De dimensie van $\mathrm{HomPol}_3(n)$ is gelijk aan de dimensie van $\mathrm{Pol}_2(n)$.
(2) De dimensie van $\mathrm{Pol}_3(n)$ is de som van de dimensies van de deelruimten van m - homogene polynomen, dus $\dim \mathrm{Pol}_3(n) = \sum_{m=0}^{n} (\dim \mathrm{HomPol}_3(m))$.
Met behulp van de driehoek van Pascal is deze som te bepalen. □

Veel voorkomende lineaire afbeeldingen op Pol_3 die ook als lineaire afbeeldingen op $\mathrm{Pol}_3(n)$ beschouwd kunnen worden:

- De Euleroperator $\mathcal{E} = (\underline{x}, \nabla) = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$
  Alle $k \in \mathbb{N}_0$ zijn eigenwaarden van $\mathcal{E}$. Bij eigenwaarde k hoort $\mathrm{HomPol}_3(k)$ als eigenruimte.

- De operatoren $\mathcal{L}_z = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\mathcal{L}_x = y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}$ en $\mathcal{L}_y = z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z}$
  Deze operatoren beelden $\mathrm{HomPol}_3(k)$ in $\mathrm{HomPol}_3(k)$ af.
- De Laplace-operator $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

De monomen $x^i y^j z^k$ zijn eigenvectoren van $\mathcal{E}$. Om de andere operatoren te bestuderen voeren we een nieuwe basis van polynomen in.

1.3.8 Stelling
Het stelsel

$$\left\{ (x+iy)^j (x-iy)^k z^l \;\middle|\; j,k,l \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

is een basis in Pol_3.
Bewijs: We merken op dat

$$\left\{ (x+iy)^j (x-iy)^k z^\ell \;\middle|\; j+k+\ell = n \right\}$$

een basis is in $\mathrm{HomPol}_3(n)$. □

1.3.9 Stelling
Voor $k, \ell, m = 0, 1, \ldots$ geldt:

- $\mathcal{E}(x+iy)^k (x-iy)^\ell z^m = (k+\ell+m)(x+iy)^k (x-iy)^\ell$
- $\mathcal{L}_z (x+iy)^k (x-iy)^\ell z^m = i(k-\ell)(x+iy)^k (x-iy)^\ell z^m$
- $\Delta(x+iy)^k (x-iy)^\ell z^m = 4k\ell(x+iy)^{k-1}(x-iy)^{\ell-1} z^m + m(m-1)(x+iy)^k (x-iy)^\ell z^{m-2}$

1.3.10 Stelling

- *Alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *zijn eigenwaarde van* $\mathcal{E}$ *met eigenruimte* $\mathrm{HomPol}_3(n)$.
- Δ *is een lineaire afbeelding van* $\mathrm{HomPol}_3(n)$ *op* $\mathrm{HomPol}_3(n-2)$, $n > 2$.
- $||\underline{x}||^2 \Delta$ *is een lineaire afbeelding op* $\mathrm{HomPol}_3(n)$.
- $\mathcal{L}_z$ *is een lineaire afbeelding op* $\mathrm{HomPol}_3(n)$. □

1.3.11 Definitie
Lineaire deelruimten van harmonische polynomen:

$\mathrm{HarmPol}_3 = \mathcal{N}(\Delta)$

$\mathrm{HarmPol}_3(n) = \mathcal{N}(\Delta) \cap \mathrm{Pol}_3(n)$

$\mathrm{HarmHomPol}_3(n) = \mathcal{N}(\Delta) \cap \mathrm{HomPol}_3(n)$ □

1.3.12 Stelling

Een polynoom $p(x, y, z) \in \mathrm{HarmHomPol}_3(n)$ met

$$p_n(x, y) + p_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \cdots + p_0(x, y)z^n$$

wordt volledig bepaald door

$$p_n(x, y) \in \mathrm{HomPol}_2(n) \text{ en } p_{n-1}(x, y) \in \mathrm{HomPol}_2(n-1) \ .$$

Bewijs: Uit $0 = \Delta(\sum_{\ell=0}^{n} p_\ell(x, y)z^{n-\ell})$ volgt

$$0 = \sum_{\ell=2}^{n} \Delta(p_\ell(x, y))z^{n-\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-2}(n-\ell)(n-\ell-1)p_\ell(x, y)z^{n-\ell-2}$$

en door gelijke machten van z bij elkaar te nemen vinden we

$$p_{\ell-2}(x, y) = \frac{-1}{(n-\ell+2)(n-\ell+1)}\Delta(p_\ell(x, y)), \quad 2 \leq \ell \leq n \ .$$

□

Gevolgen:

- Een polynoom $p(x, y, z) \in \mathrm{HarmHomPol}_3(n)$ wordt volledig bepaald door de polynomen $p(x, y, 0)$ en $p_{,z}(x, y, 0)$.

- Laat $p_n(x, y) \in \mathrm{HomPol}_2(n)$. Dan geldt

$$p_n(x, y) - \frac{z^2}{2!}\Delta p_n(x, y) + \frac{z^4}{4!}\Delta^2 p_n(x, y) - \cdots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\Delta^k p_n(x, y) =$$

$$= \cos(z\sqrt{\Delta})p_n(x, y) \in \mathrm{HarmHomPol}_3(n)$$

met $n - 1 \leq 2k \leq n$. Merk op dat $\Delta^k p_n(x, y) = 0$ als $k > n/2$.

- Laat $p_{n-1}(x,y) \in \mathrm{HomPol}_2(n-1)$. Dan geldt

$$\begin{aligned} & zp_{n-1}(x,y) - \frac{z^3}{3!}\Delta p_{n-1}(x,y) + \frac{z^5}{5!}\Delta^2 p_{n-1}(x,y) - \cdots + \\ & +(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k p_{n-1}(x,y) = \\ & = \frac{\sin(z\sqrt{\Delta})}{\sqrt{\Delta}} p_n(x,y) \in \mathrm{HarmHomPol}_3(n) \end{aligned}$$

  met $n-2 \le 2k \le n-1$. Merk op dat $\Delta^k p_n(x,y) = 0$ als $k > (n-1)/2$.

1.3.13 Stelling

- $\dim \mathrm{HarmHomPol}_3(n) = 2n+1$
- $\dim \mathrm{HarmPol}_3(n) = (n+1)^2$
- *De lineaire afbeelding* Δ *beeldt* $\mathrm{HomPol}_3(n)$ *surjectief af op* $\mathrm{HomPol}_3(n-2)$*,* $n \ge 2$*.*

Bewijs: *Op grond van stelling 1.3.12 geldt dat*

$$\dim \mathrm{HarmHomPol}_3(n) = \dim \mathrm{HomPol}_2(n) + \dim \mathrm{HomPol}_2(n-1) = 2n+1\ .$$

De dimensie van $\mathrm{HarmPol}_3(n)$ *is de som van de dimensies van* $\mathrm{HarmHomPol}_3(m)$*,* $1 \le m \le n$*. Nu is* $\sum_{m=0}^{n}(2m+1) = (n+1)^2$*.*
Beschouw Δ *als een lineaire afbeelding van* $\mathrm{HomPol}_3(n)$ *op* $\mathrm{HomPol}_3(n-2)$*.*
De dimensiestelling luidt:

$$\dim \mathrm{HomPol}_3(n) = \dim \mathcal{N}(\Delta) + \dim \mathcal{R}(\Delta)\ .$$

Gevolg: $\dim \mathcal{R}(\Delta) = \binom{n+2}{2} - (2n+1) = \binom{n}{2} = \dim \mathrm{HomPol}_3(n-2)$.
Omdat $\mathcal{R}(\Delta) \subset \mathrm{HomPol}_3(n-2)$ *vinden we dat* $\mathcal{R}(\Delta) = \mathrm{HomPol}_3(n-2)$. □

Gevolg: De vergelijking $\Delta u = f$ met $f \in \mathrm{HomPol}_3(n-2)$ heeft een oplossing $u \in \mathrm{HomPol}_3(n)$.

We introduceren polynomen $Q_{\ell,m}$, $-\ell \le m \le \ell$ met $m \in \mathbb{Z}$ en $\ell \in \mathbb{N}_0$. Hierbij wordt stevig gebruik gemaakt van het feit dat

$$\Delta[\varphi(z)\psi(x,y)] = \varphi''(z)\psi(x,y) + \varphi(z)\Delta(\psi(x,y))\ .$$

We kiezen een $\ell \in \mathbb{N}_0$. Bij deze ℓ worden nu $2\ell+1$ polynomen $Q_{\ell,m}(x,y,z)$ gemaakt. Deze polynomen zijn in twee klassen in te delen en wel de polynomen met even respectievelijk oneven machten van z. Anders gezegd: polynomen die even respectievelijk oneven t.o.v. het (x,y)-vlak zijn. Laat $\ell = 0, 1, \ldots$. Bij iedere ℓ horen $(\ell+1)$ polynomen met even machten van z.

$$
\begin{aligned}
Q_{\ell,\ell} &= (x+iy)^{\ell} \\
Q_{\ell,\ell-2} &= (x+iy)^{\ell-1}(x-iy) - \frac{1}{2!}\,4\,(\ell-1)\,1\,z^2(x+iy)^{\ell-2} \\
Q_{\ell,\ell-4} &= (x+iy)^{\ell-2}(x-iy)^2 - \frac{1}{2!}\,4\,(\ell-2)\,2\,z^2(x+iy)^{\ell-3}(x-iy) + \\
&\qquad + \frac{1}{4!}\,4^2(\ell-2)(\ell-3)\,2\cdot 1\,z^4(x+iy)^{\ell-4} \\
&\ \vdots \\
Q_{\ell,-(\ell-2)} &= (x+iy)(x-iy)^{\ell-1} - \frac{1}{2!}\,4\cdot 1(\ell-1)z^2(x-iy)^{\ell-2} \\
Q_{\ell,-\ell} &= (x-iy)^{\ell}
\end{aligned}
$$

Merk op dat de koptermen van deze polynomen gelijk zijn aan $(x+iy)^{\frac{1}{2}(\ell+m)}(x-iy)^{\frac{1}{2}(\ell-m)}$ met $m = -\ell, -\ell+2, \ldots, \ell$.
Bij iedere ℓ horen ℓ polynomen met oneven machten van z.

$$
\begin{aligned}
Q_{\ell,\ell-1} &= z(x+iy)^{\ell-1} \\
Q_{\ell,\ell-3} &= z(x+iy)^{\ell-2}(x-iy) - \frac{1}{3!}\,4\,(\ell-2)\,1\,z^3(x+iy)^{\ell-3} \\
Q_{\ell,\ell-5} &= z(x+iy)^{\ell-3}(x-iy)^2 - \frac{1}{3!}\,4\,(\ell-3)\,2\,z^3(x+iy)^{\ell-4}(x-iy) + \\
&\qquad + \frac{1}{5!}\,4^2(\ell-3)(\ell-4)\,2\cdot 1\,z^5(x+iy)^{\ell-5} \\
&\ \vdots \\
Q_{\ell,-(\ell-3)} &= z(x+iy)(x-iy)^{\ell-2} - \frac{1}{3!}\,4\cdot 1(\ell-2)z^3(x-iy)^{\ell-3} \\
Q_{\ell,-(\ell-1)} &= z(x-iy)^{\ell-1}
\end{aligned}
$$

Merk op dat hier de koptermen gelijk zijn aan $z(x+iy)^{\frac{1}{2}(\ell-1+m)}(x-iy)^{\frac{1}{2}(\ell-1-m)}$ met $m = -\ell+1, -\ell+3, \ldots, \ell-1$ zijn.

1.3.14 Stelling

De polynomen $Q_{\ell,m}$, $-\ell \leq m \leq \ell$, vormen een basis in $\mathrm{HarmHomPol}_3(n)$.
Bewijs: Het aantal polynomen is gelijk aan de dimensie van $\mathrm{HarmHomPol}_3(\ell)$.

Het volstaat dus de onafhankelijkheid te bewijzen.
Veronderstel dat er getallen $\lambda_{\ell,m} \in \mathbb{C}$ zijn, zodat

$$\lambda_{\ell,\ell}Q_{\ell,\ell} + \lambda_{\ell,\ell-2}Q_{\ell,\ell-2} + \cdots + \lambda_{\ell,-\ell}Q_{\ell,-\ell} +$$
$$\lambda_{\ell,\ell-1}Q_{\ell,\ell-1} + \lambda_{\ell,\ell-3}Q_{\ell,\ell-3} + \cdots + \lambda_{\ell,-(\ell-1)}Q_{\ell,-(\ell-1)} = 0\ .$$

Neem $z = 0$, dan volgt $\lambda_{\ell,\ell} = \lambda_{\ell,\ell-2} = \cdots = \lambda_{\ell,-\ell} = 0$ wegens de onafhankelijkheid van $(x+iy)^k(x-iy)^\ell$. We vinden dus

$$\lambda_{\ell,\ell-1}Q_{\ell,\ell-1} + \lambda_{\ell,\ell-3}Q_{\ell,\ell-3} + \cdots + \lambda_{\ell,-(\ell-1)}Q_{\ell,-(\ell-1)} = 0\ .$$

Deel door z en laat $z \to 0$. Dan, simili modo, $\lambda_{\ell,\ell-1} = \cdots = \lambda_{\ell,-(\ell-1)} = 0$. $\square$

Opmerking:

- $\mathcal{E}Q_{\ell,m} = \ell Q_{\ell,m}$
- $\mathcal{L}_z Q_{\ell,m} = imQ_{\ell,m}$

De polynomen $Q_{\ell,m}$ zijn, op een normeringsconstante na, bepaald door de "quantumgetallen" ℓ en m.
Opmerking: In cylindercoördinaten $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ en $z = z$ vinden we

$$\begin{aligned} Q_{\ell,\ell} &= r^\ell e^{i\ell\varphi} \\ Q_{\ell,\ell-1} &= zr^{\ell-1}e^{i(\ell-1)\varphi} \\ Q_{\ell,\ell-2} &= \left[r^\ell - 4\frac{(\ell-1)\cdot 1}{2!}z^2r^{\ell-2}\right]e^{i(\ell-2)\varphi} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Opmerking: In bolcoördinaten $x = \rho\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = \rho\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$ en $z = \rho\cos(\vartheta)$ vinden we

$$Q_{\ell,m} = c_{\ell,m}\rho^\ell P_{\ell,m}(\vartheta)e^{im\varphi}, -\ell \leq m \leq \ell\ .$$

Hierin is $P_{\ell,m}(\vartheta)$ een polynoom van de graad ℓ in $\sin(\vartheta)$ en $\cos(\vartheta)$. Voorts is $c_{\ell,m}$ een later geschikt te kiezen normeringsconstante.
Tenslotte: De functies $Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) = P_{\ell,m}(\vartheta)e^{im\varphi}$ worden in de literatuur wel " Spherische Harmonischen" of "Surface Harmonics" genoemd.

Hoofdstuk 2 Genormeerde Vectorruimten

2.1 Inproductruimten

Ons uitgangspunt is een (complexe) vectorruimte $\mathbf{E}$ die voorzien is van een (complex) inproduct. Uitgaande van dit inproduct voeren we op $\mathbf{E}$ een afstandsbegrip in. Tenslotte kijken we nog naar vectorruimten die voorzien zijn van een afstandsbegrip dat niet van een inproduct afkomstig is.

2.1.1 Definitie

Gegeven: Een complexe vectorruimte $\mathbf{E}$.
We noemen de afbeelding

$$(\cdot, \cdot) \,:\, \mathbf{E} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{C},$$

een inwendig product op $\mathbf{E}$, als $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ geldt:

a) $(\mathbf{x}\,, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}\,, \mathbf{x})}$,

b) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\,, \mathbf{z}) = \overline{\alpha}(\mathbf{x}\,, \mathbf{z}) + \overline{\beta}(\mathbf{y}\,, \mathbf{z})$,

c) $(\mathbf{x}\,, \mathbf{x}) \geq 0$ en $\Big[(\mathbf{x}\,, \mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = 0\Big]$.

Een (complexe) vectorruimte $\mathbf{E}$ die voorzien is van een inwendig product $(\cdot, \cdot)$ heet wel *inproductruimte* , *IP-ruimte*, *pre-Hilbertruimte* en ook wel eens *unitaire ruimte*.

2.1.2 Voorbeelden (Inproductruimten)

a) De verzameling $\mathbb{C}$ kan als een $1-$dimensionale complexe vectorruimte worden opgevat. Een inproduct op $\mathbb{C}$ wordt gegeven door $(x\,, y) = \overline{x}y$.

b) Een inproduct op

$$\mathbb{C}^N = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_N] \,\Big|\, x_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq N\},$$

wordt gegeven door $(\underline{x}\,, \underline{y}) = \sum_{j=1}^{N} \overline{x_j} y_j = \overline{\underline{x}}^T \underline{y}$.

c) Een inproduct op

$$\ell_2(\mathbb{N}) = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_j, \cdots] \;\Big|\; x_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\},$$

wordt gegeven door $(\underline{x}\,, \underline{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_j} y_j$. In dit geval is het inproduct dus de som van een reeks. Deze reeks is convergent omdat ze gemajoreerd wordt door $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}\{|x_j|^2 + |y_j|^2\}$.

d) Het voorafgaande voorbeeld is een zgn *rijtjesruimte* waarin als *index* de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ gebruikt zijn. Vaak is het, op boekhoudkundige gronden handig om in plaats van $\mathbb{N}$ een andere *indexverzameling*, zeg $\mathbb{I}$, te nemen. Van $\mathbb{I}$ wordt dan wel geeist dat het een aftelbare verzameling is, dat wil zeggen in 'een-op-een'- correspondentie met $\mathbb{N}$ staat. Simpel gezegd betekent dit dat de 'namen' in $\mathbb{I}$ in een 'rij met een begin', onder de natuurlijke getallen, gezet kunnen worden. Voor ons belangrijke voorbeelden van indexverzamelingen zijn $\mathbb{N}$, de gehele getallen $\mathbb{Z}$, paren van natuurlijke getallen $\mathbb{N}^2$, paren van gehele getallen $\mathbb{Z}^2$ en oneindige deelverzamelingen hiervan. Een voorbeeld van de laatstgenoemde is $\mathbb{A} = \{(k, m) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}, -k \leq m \leq k\}$. 'Verzamelingen van *quantumgetallen'*. Een inproduct op

$$\ell_2(\mathbb{I}) = \{\underline{x} = [\cdots, x_\alpha, \cdots], x_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{I} \;\Big|\; \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} |x_\alpha|^2 < \infty\}.$$

wordt gegeven door $(\underline{x}\,, \underline{y}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} \overline{x_\alpha} y_\alpha$. In dit geval is het inproduct weer de som van een reeks. Net als in het $\ell_2(\mathbb{N})$ geval volgt de convergentie door majoreren. Omdat de reeks ook hier absoluut convergent is, doet de sommatievolgorde over $\mathbb{I}$ er niet toe. Elke gekozen sommatievolgorde leidt tot eenzelfde antwoord. In theoretisch opzicht is er geen verschil tussen $\ell_2(\mathbb{N})$ en $\ell_2(\mathbb{I})$.

e) Een belangrijke lineaire deelruimte van $\ell_2(\mathbb{N})$ wordt gegeven door

$$\ell_c(\mathbb{N}) = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_j, \cdots] \;\Big|\; \text{slechts eindig veel der } x_j \text{ zijn} \neq 0\}.$$

Als inproduct voor $\ell_c(\mathbb{N})$ nemen we dat van $\ell_2(\mathbb{N})$. Volkomen analoog hieraan kan ook $\ell_c(\mathbb{I})$ ingevoerd worden. Merk op dat, op hun beurt, alle ruimten $\mathbb{C}^N$ als deelruimten van $\ell_c(\mathbb{N})$ opgevat kunnen worden door aan de kolomvectoren in $\mathbb{C}^N$ een oneindige staart van nullen te hangen.

f) Bovenstaande rijtjesruimten kunnen opgevat worden als *functieruimten* , ze bevatten functies over een discrete verzameling $\mathbb{I}$. We willen nu functieruimten gaan invoeren over intervallen (a, b) met $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ en ook over meerdimensionale gebieden.

Een inproduct op een ruimte van *stuksgewijs continue functies*

$$\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is stuksgewijs continu op } (a,b), \int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty\}$$

wordt gegeven door

$$(f\,, g) = \int_a^b \overline{f(x)}\,g(x)\,dx.$$

De integraal in het inproduct is convergent want de integrand wordt absoluut gemajoreerd door $\frac{1}{2}\{|f(x)|^2 + |g(x)|^2\}$. We gaan na of ons inwendig product eigenschap 2.1.1c heeft: $(f,\, f) = 0$ betekent $\int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0$. Dus f is een niksfunctie, maar hoeft geen nulfunctie te zijn! Gelukkig kan alleen $f(x) \neq 0$ als x een punt is waar f niet continu is. En zulke punten zijn er 'niet zo veel' als f stuksgewijs continu is. We stellen ons nu op het practische standpunt dat we twee functies als 'dezelfde' beschouwen als ze slechts in wat 'losse' punten van elkaar verschillen. Conclusie: Er is niet in stricte zin voldaan aan 2.1.1c, maar daar hebben we verder geen last van.

g) Enkele belangrijke lineaire deelruimten van $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$ zijn:

$$\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is continu}, \int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty\}.$$

Merk op dat in deze ruimte wél in stricte zin aan 2.1.1c is voldaan.
Onder een *trapfunctie* op (a, b), verstaan we een functie die op een eindig aantal begrensde deelintervallen van (a, b) een constante waarde aanneemt, en daarbuiten gelijk is aan 0. We definieren:

$$\mathbb{L}_{2,\text{trap}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is een trapfunctie}, \int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty\},$$

Tenslotte, laat $-\infty \le a \le c < d \le b \le \infty$. De functieruimten $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((c,d))$ kunnen als lineaire deelruimten van $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$ opgevat worden als je hun functies buiten het interval (c,d) met 0 voortzet.

h) In de beschouwingen onder f) en g) kunnen we het interval (a,b) vervangen door $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ of ook door deelgebieden in $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Voor wiskundig gevorderden: Onder een *stuksgewijs continue functie* van een of meerdere variabelen verstaan we een functie die continu is in alle punten van een open en dichte deelverzameling van haar definitiegebied.

2.1.3 Definitie

Gegeven: Een (complexe)vectorruimte $\mathbf{E}$.

De afbeelding

$$\|\cdot\| \,:\, \mathbf{E} \longrightarrow [0,\infty),$$

heet een *norm* op $\mathbf{E}$, als $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{E} \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}$ geldt:

a) $\|\mathbf{x}\| = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{x} = 0,$

b) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|,$

c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (*De Driehoeksongelijkheid*).

Het getal $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ heet de *afstand* tussen $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$.
Een (complexe) vectorruimte $\mathbf{E}$ die voorzien is van een norm $\|\cdot\|$ heet *Genormeerde Vectorruimte*. Merk op dat $\|\mathbf{x}\| > 0$ als $\mathbf{x} \ne 0$.

De volgende stellingen geven enkele verbanden tussen inproducten, normen en afstanden in een inproductruimte.

2.1.4 Stelling

Gegeven: Een inproductruimte $\mathbf{E}$.
Notatie: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ *betekent:* $(\mathbf{x}\,,\mathbf{y}) = 0$.
Dan geldt $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{E}$:

i. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$
$\Rightarrow (\mathbf{x}+\mathbf{y}\,,\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\,,\mathbf{x}) + (\mathbf{y}\,,\mathbf{y})$ *(Pythagoras)*

ii. $|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 \le (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})$. *(Cauchy-Schwarz)*

Bewijs. i. Schrijf het linkerlid uit en maak gebruik van $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$.

ii. Voor $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ is de bewering blijkbaar correct. Veronderstel $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ geldt $0 \leq (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}\,, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \mathrm{Re}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}\,, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\lambda\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Als functie van λ is deze kwadratische uitdrukking ≥ 0. Dit heeft als gevolg dat de discriminant ≤ 0 moet zijn. In formule: $|\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Merk op dat het complexe getal $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ geschreven kan worden als $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|e^{i\theta}$ met $\theta \in \mathbb{R}$. Doe bovenstaande beschouwing nu over met $\mathbf{y}$ vervangen door $\mathbf{z} = e^{-i\theta}\mathbf{y}$. Onder toepassing daarvan komt er $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 = |\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{z})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.

□

2.1.5 Stelling

Gegeven: Een inproductruimte $\mathbf{E}$.
Dan geldt: De toevoeging $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ *is een norm. Voorts geldt* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E}$ *:*

i) $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ *(Pythagoras)*

ii) $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$. *(Cauchy-Schwarz)*

iii) De driehoeksongelijkheid:

$$\Big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\Big| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

iv) Geformuleerd met afstanden luidt de driehoeksongelijkheid:

$$\Big|d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{z}, \mathbf{y})\Big| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

v) De Parallellogramwet geldt:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\Big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\Big)$$

Bewijs. i.) Zie i) in vorige stelling.

ii.) Zie ii) in vorige stelling.

iii.) Omdat $|\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, geldt
$\|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq$
$\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$.
Worteltrekken levert de te bewijzen bewering.

iv.) Vervang in iii) $\mathbf{x}$ door $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ en $\mathbf{y}$ door $\mathbf{y} - \mathbf{z}$.

v.) Schrijf uit. De 'gemengde' inproducten blijken weg te vallen.

$\square$

2.1.6 Opmerking In reële inproductruimten wordt *de hoek θ tussen twee vectoren* $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ gedefinieerd door $\theta = \arccos\{\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\}$. Voor complexe inproducten wordt dit niet gedaan. Het begrip *orthogonaal* (=*loodrecht*) blijft echter gehandhaafd.

2.2 Convergentie in genormeerde ruimten

Analoog aan de gang van zaken in $\mathbb{R}$ en in eindig dimensionale ruimten definieren we gesloten deelverzamelingen en limieten van rijen.

2.2.1 Definitie
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$, een punt $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$, een getal $r > 0$.
Dan heten de verzamelingen

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\Big|\, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\},$$

$$\overline{B(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\Big|\, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\},$$

$$S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\Big|\, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\},$$

respectievelijk *open bal*, *gesloten bal*, *sfeer*, met middelpunt $\mathbf{a}$ en straal r.

2.2.2 Definitie
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $W \subset \mathbf{E}$.
We noemen W een *begrensde deelverzameling* als geldt

$$\exists\, R > 0\, [\, W \subset B(\mathbf{0}, R)\,].$$

2.2.3 Definitie
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$.
Een rij punten $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{E}$. Een punt $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$.
We zeggen: $\{\mathbf{x}_n\}$ convergeert naar $\mathbf{a}$, of ook $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{a}$, als geldt
$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| \rightarrow 0$, als $n \rightarrow \infty$. Equivalent hiermee is de uitspraak

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \left[\, \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < \varepsilon \,\right].$$

We zeggen: $\{\mathbf{x}_n\}$ is een *convergente rij*, als er een punt $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ is, zodat $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{a}$. Het punt $\mathbf{a}$ heet de *limiet* van de rij $\{\mathbf{x}_n\}$.

2.2.4 Stelling
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$.
Twee convergente rijen in $\mathbf{E}$: $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ *en* $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$.
Twee convergente rijen in $\mathbb{C}$: $\lambda_n \to \lambda$ *en* $\mu_n \to \mu$.
Dan geldt: $\{\mathbf{x}_n\}$ *is een begrensde verzameling,* $\lambda_n\mathbf{x}_n \to \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n+\mathbf{y}_n \to \mathbf{x}+\mathbf{y}$, $(\lambda_n\mathbf{x}_n,\ \mu_n\mathbf{y}_n) \to (\lambda\mathbf{x},\ \mu\mathbf{y})$, $\|\lambda_n\mathbf{x}_n\| \to \|\lambda\mathbf{x}\|$.

Bewijs. We bewijzen hier alleen de tweede bewering. Doe de overige zelf. We schatten: $\|\lambda_n\mathbf{x}_n - \lambda\mathbf{x}\| = \|(\lambda_n-\lambda)\mathbf{x}_n + \lambda(\mathbf{x}_n-\mathbf{x})\| \leq |\lambda_n-\lambda|\|\mathbf{x}_n\| + {}$ $+ |\lambda|\|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}\|$. Omdat $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, geldt voor n voldoende groot dat $\|\mathbf{x}_n\| \leq \|\mathbf{x}\|+1$. Beide termen naderen dus naar 0 als $\lambda_n \to \lambda$ en $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. $\square$

2.2.5 Definitie
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $W \subset \mathbf{E}$.
We noemen W een *gesloten deelverzameling* van $\mathbf{E}$ als uit $\{\mathbf{x}_n\} \subset W$ en $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ altijd volgt dat ook $\mathbf{x} \in W$.

Een deelverzameling van $\mathbf{E}$ die niet gesloten is, kunnen we afsluiten, dat wil zeggen 'alle limietpunten toevoegen'. Preciezer:

2.2.6 Definitie (Afsluiting)
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $U \subset \mathbf{E}$.
We definieren de *afsluiting* $\overline{U}$ van U door

$$\overline{U} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \,\big|\, \exists\{\mathbf{x}_n\} \subset U \text{ met } \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}\}.$$

Een verzameling U is dus gesloten als $U = \overline{U}$. De eerder ingevoerde 'gesloten bal' heet terecht zo!

2.2.7 Stelling
De afsluiting van een lineaire deelruimte is weer een lineaire deelruimte.

Bewijs. Laat U een lineaire deelruimte in $\mathbf{E}$ zijn. Neem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{U}$. Laat $\{\mathbf{x}_n\} \subset U$ en $\{\mathbf{y}_n\} \subset U$ convergente rijen zijn met $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ en $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$. Omdat U een lineaire deelruimte is, is voor willekeurige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ de rij $\{\alpha\mathbf{x}_n + \beta\mathbf{y}_n\} \subset U$. Tenslotte geldt op grond van Stelling 2.2.4 $\alpha\mathbf{x}_n + \beta\mathbf{y}_n \to \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$. Dus $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \overline{U}$. $\square$

2.2.8 Definitie (Dichte deelverzamelingen)
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $W \subset \mathbf{E}$.
We zeggen: W is *dicht in* $\mathbf{E}$ als voor de afsluiting $\overline{W}$ van W geldt $\overline{W} = \mathbf{E}$.
Een equivalente formulering is:

$$\forall\mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \forall\varepsilon > 0\ \big[\, B(\mathbf{x},\varepsilon) \cap W \neq \emptyset \,\big].$$

2.2.9 Voorbeelden

a) $\ell_{2,c}(\mathbb{N})$ is dicht in $\ell_2(\mathbb{N})$.

b) $\mathbb{L}_{2,\text{trap}}((a,b))$ is dicht in $\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((a,b))$ en ook in $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$.

c) $\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((a,b))$ is dicht in $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$.

2.2.10 Definitie (Compacte deelverzamelingen)

Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $W \subset \mathbf{E}$. We zeggen W is *compact* als iedere rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset W$ een convergente deelrij bevat, met limiet in W.

2.2.11 Stelling

Compacte verzamelingen zijn gesloten en begrensd.

Bewijs. i) Laat $W \subset \mathbf{E}$ een compacte deelverzameling zijn. Laat $\{\mathbf{x}_n\} \subset W$ een rij zijn met limiet $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Elke deelrij van $\{\mathbf{x}_n\}$ is dan eveneens convergent met limiet $\mathbf{x}$. Op grond van de compactheid is dan $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Blijkbaar is W gesloten.
ii) Veronderstel eens dat $W \subset \mathbf{E}$ onbegrensd is. Dan bevat W een rij $\{\mathbf{y}_n\}$ met $\|\mathbf{y}_n\| > n$. Elke deelrij van deze rij is dan eveneens onbegrensd en kan dus niet convergent zijn. Bijgevolg kan een onbegrensde verzameling nooit compact zijn. □

2.2.12 Voorbeelden

a) In $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{C}^N$ zijn verzamelingen die zowel gesloten als begrensd zijn ook altijd compact. In dit geval geldt dus de omkering van voorafgaande stelling.

b) De gesloten bal $\overline{B(\mathbf{0},1)} \subset \ell_2(\mathbb{N})$ is zowel gesloten als begrensd. Echter de rij $\{\underline{e}_n\}$, met $\underline{e}_n$ de kolom die op de n-de positie een 1 heeft en verder overal nullen, bevat geen convergente deelrij. Conclusie: In ∞-dimensionale genormeerde ruimten geldt de omkering van laatstgenoemde stelling in het algemeen NIET.

2.3 Orthogonale en orthonormale stelsels in IP-ruimten

Het begrip *orthonormale basis* uit de theorie van eindig dimensionale vectorruimten wordt hier uitgebreid naar ∞-dimensionale inproductruimten. Omdat hier oneindige sommen een rol spelen zal het convergentie-begrip, en dus ook het afstandsbegrip, in de betreffende IP-ruimte een wezenlijke rol spelen.

2.3.1 Definitie (Orthonormale stelsels)

Gegeven: Een IP-ruimte $\mathbf{E}$, een stelsel $S \subset \mathbf{E}$ zodat $\mathbf{0} \notin S$.
Het stelsel S heet een *orthogonaal stelsel* als $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Big[\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Big]$.
Het stelsel S heet een *orthonormaal stelsel* als bovendien $\forall \mathbf{x}, \in S \; \big[\, \|\mathbf{x}\| = 1 \, \big]$.
We spreken van een *orthonormale rij* als $S = \{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{I}}$, meestal is $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ of $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$. Dan geldt dus

$$(\mathbf{e}_n \,, \mathbf{e}_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1 & , \quad m = n. \end{cases}$$

Merk op dat van een orthogonaal stelsel S een orthonormaal stelsel S_1 gemaakt kan worden door te stellen $S_1 = \{ \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \Big| \mathbf{x} \in S \}$.

2.3.2 Stelling

Orthogonale stelsels zijn lineair onafhankelijke stelsels.

Bewijs. Een (oneindig) stelsel vectoren heet (algebraisch) onafhankelijk als ELK eindig deelstelsel dat is. Veronderstel dat $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ en dat alle $\mathbf{x}_j$ ongelijk $\mathbf{0}$ zijn en onderling loodrecht. Dan volgt uit het nemen van inproducten met respectievelijk $\mathbf{x}_k$, $1 \leq k \leq N$, dat alle coëfficienten α_j gelijk 0 moeten zijn. $\square$

2.3.3 Voorbeelden (Orthonormale Stelsels)

a) In $\ell_2(\mathbb{N})$ is

$$\{ \underline{e}_n = \text{kolom}[0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots] \Big| \, n \in \mathbb{N}, 1 \text{ op } n\text{-e positie en verder 0-en} \}$$

een orthonormaal stelsel.

b) Zowel in $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((-\pi, \pi))$ als in $\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((-\pi, \pi))$ vormen de functies $\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \Big| \, n \in \mathbb{Z} \}$ een orthonormaal stelsel.

c) De rij functies

$$\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots \}$$

is een orthonormale rij, zowel in $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((-\pi, \pi))$ als in $\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((-\pi, \pi))$.

d) De rijen functies

$$\{\sqrt{\frac{1}{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 3x,\ \cdots\},$$

$$\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x,\ \cdots\},$$

zijn beide orthonormale rijen, zowel in $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((0,\pi))$ als in $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}((0,\pi))$.

e) De *Legendre polynomen* P_n, $n = 0,\ 1,\ 2 \cdots$, worden gedefinieerd door $P_0(x) = 1$, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Zowel in $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((-1,1))$ als in $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}((-1,1))$ vormen de functies $\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n(x)\Big|\ n = 0,\ 1,\ 2, \cdots ,\}$ een orthonormaal stelsel.

f) De *Hermite polynomen* H_n, $n = 0,\ 1,\ 2 \cdots$, worden gedefinieerd door $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$. Het stelsel functies $\{\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\Big|\ n = 0,\ 1,\ 2 \cdots\}$ vormt een orthonormaal stelsel in zowel $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}(\mathbb{R})$ als in $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}(\mathbb{R})$.

g) De Spherische Harmonischen...

2.3.4 Stelling (Pythagoras)
Gegeven:Een orthogonaal stelsel $S = \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in een IP-ruimte $\mathbf{E}$.
Dan geldt

$$\|\sum_{k=1}^{N}\mathbf{x}_k\|^2 = \sum_{k=1}^{N}\|\mathbf{x}_k\|^2.$$

Bewijs. Schrijf het inproduct $(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_N\ ,\ \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_N)$ uit. Vanwege de orthogonaliteit zijn alle 'gemengde' inproducten 0. □

2.3.5 Stelling (Ongelijkheid van Bessel)
Gegeven:Een orthonormale rij $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in een IP-ruimte $\mathbf{E}$.
Dan geldt $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \forall N \in \mathbb{N}$

a)

$$\|\mathbf{x} - \sum_{k=1}^{N}(\mathbf{e}_k,\ \mathbf{x})\mathbf{e}_k\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{N}|(\mathbf{e}_k,\ \mathbf{x})|^2.$$

b)

$$\sum_{k=1}^{N} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

Dus het rijtje complexe getallen $\{(\mathbf{e}_n, \mathbf{x})\}_{n\in N} \in \ell_2(\mathbb{N})$.

In plaats van $\mathbb{N}$ *kan natuurlijk een willekeurige aftelbare indexverzameling* $\mathbb{I}$ *genomen worden.*

Bewijs. a) Voor willekeurige complexe getallen α_k geldt
$\|\mathbf{x} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{e}_k\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})|^2 + \sum_{k=1}^{N} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x}) - \alpha_k|^2$.
Neem nu $\alpha_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})$.
b) Volgt uit a) door op te merken dat het linkerlid, dus ook het rechterlid, ≥ 0 is.
c) Neem in b) de limiet voor $N \to \infty$. Deze limiet bestaat omdat de rij van partiële sommen monotoon niet-dalend is en van boven begrensd wordt door $\|\mathbf{x}\|^2$.

$\square$

2.3.6 Definitie (Gegeneraliseerde Fourierreeks)
Gegeven: Een orthonormale rij $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in een IP-ruimte $\mathbf{E}$. Een vector $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
Dan heet de reeks $\mathbf{x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\mathbf{e}_k$ *de (gegeneraliseerde) Fourierreeks* voor $\mathbf{x}$.

De interessante vraag is natuurlijk: Onder welke omstandigheden wordt $\mathbf{x}$ door genoemde reeks voorgesteld?

2.3.7 Definitie (Orthonormale Basis)
Gegeven: Een orthonormale rij $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in een IP-ruimte $\mathbf{E}$.
We zeggen: $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een *orthonormale basis* in $\mathbf{E}$, als

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} \qquad \left[\, \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{e}_n, \mathbf{x})\mathbf{e}_n \,\right],$$

met andere woorden

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} \qquad \Big[\lim_{N\to\infty} \|\mathbf{x} - \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{x})\mathbf{e}_n\| = 0 \Big].$$

2.3.8 Opmerking Als $\{\Psi_n\}$ een orthonormale basis is in $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((a,b))$ en f is een functie in dezelfde ruimte, dan betekent $f = \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_n,\, f)\Psi_n$, dat

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \Big| f(x) - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n(x) \Big|^2 \, dx = 0,$$

hierin is

$$\alpha_k = \int_a^b \overline{\Psi_k(t)} f(t)\, dt.$$

2.3.9 Stelling (Parseval)
Gegeven: Een orthonormale rij $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in een IP-ruimte $\mathbf{E}$.
Dan geldt:

a) $\Big[\ \{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is een orthonormale basis* $\Big] \implies$

$$\Big[\Big[\forall n \in \mathbb{N}\, (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{x}) = 0 \Big] \Rightarrow \Big[\mathbf{x} = 0 \Big] \Big].$$

b) $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is een orthonormale basis in* $\mathbf{E}$*, dan en slechts dan als geldt:*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |(\mathbf{e}_k,\, \mathbf{x})|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \right].$$

c) $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is an orthonormal base in* $\mathbf{E}$*, dan en slechts dan als geldt*

opspansel$\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is dichte deelverzameling in* $\mathbf{E}$.

Bewijs. a) Als $\mathbf{x}$ kan worden voorgesteld door $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{x})\mathbf{e}_n$ en als $\forall n \in \mathbb{N}\, (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{x}) = 0$, dan moet wel gelden $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
b$\Rightarrow$) Als in de uitdrukking a) van Stelling 2.3.5 het linkerlid $\to 0$ als $N \to \infty$, dan moet ook het rechterlid $\to 0$ als $N \to \infty$. Deze laatste limiet is precies

de Parsevalidentiteit.
b$\Leftarrow$) Als in de uitdrukking a) van Stelling 2.3.5 het rechterlid $\to 0$ als $N \to \infty$, dan moet ook het linkerlid $\to 0$ als $N \to \infty$. Dit laatste zegt precies dat $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een orthonormale basis in $\mathbf{E}$ is.
c$\Rightarrow$) Als $\{\mathbf{e}_n\}$ een orthonormale basis, dan is blijkend Definitie 2.3.7 iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ willekeurig dicht te benaderen door een eindige lineaire combinatie der $\mathbf{e}_n$'s.
c$\Leftarrow$) Als $\{\mathbf{e}_n\}$ geen basis is dan is blijkens de ongelijkheid van Bessel en deel b) van deze stelling $\|\mathbf{x}\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})|^2 = \delta^2 > 0$, voor zekere $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
Met de eerste formule uit het bewijs van Stelling 2.3.5.a vinden we dat voor willekeurige complexe getallen α_k geldt
$\|\mathbf{x} - \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{e}_k\|^2 = \delta^2 + \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})|^2 + \sum\limits_{k=1}^{N} |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x}) - \alpha_k|^2 > \delta^2.$
Dit zegt dat we met eindige lineaire combinaties van $\mathbf{e}_n$'s altijd tenminste op afstand δ van $\mathbf{x}$ blijven. Dit is in strijd met de v eronderstelling dat het opspansel der $\mathbf{e}_n$'s dicht zou liggen. $\square$

2.3.10 Opmerkingen

a) Deel a) van de stelling zegt: Als een vector $\mathbf{x}$ loodrecht staat op alle vectoren van een orthonormale basis (en dus op het opspansel van die basisvectoren) dan kan $\mathbf{x}$ alleen de nulvector zijn.

b) We zullen later nog zien dat, onder een extra voorwaarde op $\mathbf{E}$, ook de omkering van deel a) van de stelling geldt.

c) De Parsevalidentiteit (deel b van de stelling) kan worden gezien als de $\infty-$dimensionale versie van de stelling van Pythagoras.

2.3.11 Stelling

Alle in Voorbeelden (2.3.3) genoemde orthonormale rijen/stelsels zijn ook orthonormale bases.

2.4 Genormeerde vectorruimten die geen IP-ruimten zijn

In sectie 1.1 hebben we van IP-ruimten genormeerde vectorruimten gemaakt door een norm in te voeren volgens $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Onze beschouwingen over begrensdheid, ballen, convergentie in sectie 2.2 maakten alleen gebruik van het normbegrip in Definitie 2.1.3 en niet van het achterliggende inproduct.

Met de volgende stelling kun je zien of een blote norm al dan niet van een 'verborgen' inproduct afkomstig is.

2.4.1 Stelling
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$ *met norm* $\| \cdot \|$.

a) *De norm* $\| \cdot \|$ *is afkomstig van een inproduct als aan de parallelogram wet*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\Big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\Big)$$

voldaan is.

b) *Het inproduct kan 'gereconstrueerd' worden met behulp van de 'polarisatieformule'*

$$(\mathbf{x}\,,\mathbf{y}) = \tfrac{1}{4}\{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + i\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2\}.$$

Bewijs. Als de norm $\| \cdot \|$ afkomstig is van een inproduct, dan gelden de uitdrukkingen onder a) en b). Dit volgt door uitschrijven van $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = = (\mathbf{x}+\mathbf{y}\,,\mathbf{x}+\mathbf{y})$, etc.. Het bewijs dat de aldus gevonden noodzakelijke voorwaarden ook voldoende zijn leveren we hier niet. $\square$

2.4.2 Voorbeelden (Genormeerde ruimten die geen IP-ruimten zijn)

a) Een tweetal normen op

$$\mathbb{C}^N = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_N] \;\Big|\; x_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq N\},$$

wordt gegeven door $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |x_j|$ en $\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq N} |x_j|$.

b) Een norm op

$$\ell_1(\mathbb{N}) = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_j, \cdots] \;\Big|\; x_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\},$$

wordt gegeven door $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$.

c) Een norm op

$$\ell_\infty(\mathbb{N}) = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_j, \cdots] \;\Big|\; x_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j < \infty, \sup_{1\leq j<\infty} |x_j| < \infty\},$$

wordt gegeven door $\|\underline{x}\|_\infty = \sup_{1\leq j<\infty} |x_j|$

d) Op de voor de hand liggende wijze kan op

$$\ell_1(\mathbb{I}) = \{\underline{x} = [\cdots, x_\alpha, \cdots], x_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{I} \;\Big|\; \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} |x_\alpha| < \infty\}.$$

de norm $\|\underline{x}\|_1 = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{I}} |x_\alpha|$ worden ingevoerd. En op

$$\ell_\infty(\mathbb{I}) = \{\underline{x} = [\cdots, x_\alpha, \cdots], x_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{I} \;\Big|\; \sup_{\alpha \in \mathbb{I}} |x_\alpha| < \infty\}.$$

de norm $\|\underline{x}\|_1 = \sup\limits_{\alpha \in \mathbb{I}} |x_\alpha|$.

In theoretisch opzicht is er geen verschil tussen $\ell_1(\mathbb{N})$ en $\ell_1(\mathbb{I})$, en ook niet tussen $\ell_\infty(\mathbb{N})$ en $\ell_\infty(\mathbb{I})$.

e) Een belangrijke lineaire deelruimte van zowel $\ell_1(\mathbb{N})$ als $\ell_\infty(\mathbb{N})$ wordt gegeven door

$$\ell_c(\mathbb{N}) = \{\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_j, \cdots] \;\Big|\; \text{slechts eindig veel der } x_j \text{ zijn} \neq 0\ \}.$$

Deze ruimte $\ell_c(\mathbb{N})$ van 'afbrekende rijtjes' kan zowel van de norm $\|\cdot\|_1$ als van de norm $\|\cdot\|_\infty$ voorzien worden. Als voor een rij $\{\underline{x}_k\} \subset \ell_c(\mathbb{N})$ geldt dat $\|\underline{x}_k\|_1 \to \underline{0}$, dan zal ook $\|\underline{x}_k\|_\infty \to \underline{0}$. Het omgekeerde geldt niet. De norm $\|\cdot\|_1$ is 'sterker dan' de norm $\|\cdot\|_\infty$. Hiermee bedoelen we dat er een $c > 0$ is zodat $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \|\mathbf{x}\|_\infty \leq c\|\mathbf{x}\|_1$. In het onderhavige geval is dit geldig met $c = 1$.

Merk tenslotte op dat alle ruimten $\mathbb{C}^N$ als deelruimten van $\ell_c(\mathbb{N})$ opgevat kunnen worden door aan de kolomvectoren in $\mathbb{C}^N$ een oneindige staart van nullen te hangen.

f) Een norm op de ruimte

$$\mathbb{L}_{1,\text{stc}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is stuksgewijs continu op } (a,b), \int_a^b |f(x)|\, dx < \infty\}$$

wordt gegeven door

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Uit $\|f\|_1 = 0$ volgt dat f een niksfunctie is. Dit houdt niet noodzakelijk in dat f de nulfunctie is. Gelukkig scheelt 't niet zo veel zodat we er geen last van hebben. De beschouwingen hierover onder Voorbeeld 2.1.2f zijn ook hier van toepassing.

g) Enkele belangrijke lineaire deelruimten van $\mathbb{L}_{1,\text{stc}}((a,b))$ zijn:

$$\mathbb{L}_{1,\text{cont}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is continu, } \int_a^b |f(x)|\,dx < \infty\},$$

en ook

$$\mathbb{L}_{1,\text{trap}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is een trapfunctie}\}.$$

Tenslotte, laat $-\infty \leq a \leq c < d \leq b \leq \infty$. De functieruimten $\mathbb{L}_{1,\text{stc}}((c,d))$ kunnen als lineaire deelruimten van $\mathbb{L}_{1,\text{stc}}((a,b))$ opgevat worden als je hun functies buiten het interval (c,d) met 0 voortzet.

h) Een norm op de ruimte

$$\mathbb{L}_{\infty,\text{stc}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is stuksgewijs continu op } (a,b), \sup_{a<x<b} |f(x)| < \infty\}$$

wordt gegeven door

$$\|f\|_\infty = \sup_{a<x<b} |f(x)|.$$

i) Enkele belangrijke lineaire deelruimten van $\mathbb{L}_{\infty,\text{stc}}((a,b))$ zijn:

$$\mathbb{L}_{\infty,\text{cont}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is continu, } \sup_{a<x<b} |f(x)| < \infty\},$$

en ook

$$\mathbb{L}_{1,\text{trap}}((a,b)) = \{f \;\Big|\; f \text{ is een trapfunctie}\},$$

Tenslotte, laat $-\infty \leq a \leq c < d \leq b \leq \infty$. De functieruimten $\mathbb{L}_{\infty,\text{stc}}((c,d))$ kunnen als lineaire deelruimten van $\mathbb{L}_{\infty,\text{stc}}((a,b))$ opgevat worden als je hun functies buiten het interval (c,d) met 0 voortzet

j) Geef de norm in $\mathbb{L}_{2,\text{trap}}((a,b))$ uit Voorbeelden 2.1.2.f aan met $\|\cdot\|_2$. Als $b - a < \infty$ dan geldt

$$\mathbb{L}_{\infty,\text{stc}}((a,b)) \subset \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b)) \subset \mathbb{L}_{1,\text{stc}}((a,b)),$$

als lineaire deelruimten. De normen kunnen als volgt met elkaar worden vergeleken

$$\forall f \in \mathbb{L}_{\infty,\mathrm{stc}}((a,b)) \;\; \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

k) In de beschouwingen onder f) t/m j) kunnen we het interval (a,b) vervangen door $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ of ook door deelgebieden in $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. de integralen over (a,b) worden dan vervangen door integralen over het gekozen gebied.

l) Laat $[a,b]$ een begrensd interval zijn. Een norm op

$$\mathcal{C}([a,b]) = \{f \mid f \text{is continu op} [a,b]\}$$

wordt gegeven door $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Convergentie in deze functieruimte is hetzelfde als uniforme convergentie. Merk op dat $\mathcal{C}([a,b])$ een echte lineaire deelruimte is van $\mathbb{L}_{\infty,\mathrm{cont}}((a,b))$.

2.4.3 Stelling (Approximatiestelling van Weierstrass)
De ruimte Pol$[a,b]$ van polynomen op $[a,b]$ ligt dicht in $\mathcal{C}([a,b])$.

Het bewijs wordt hier achterwege gelaten.

2.4.4 Stelling
Gegeven: $\mathbf{E}$ *is een eindig dimensionale vectorruimte zijn die voorzien is van twee normen:* $\|\cdot\|_1$ *en* $\|\cdot\|_2$.
Dan geldt:

$$\exists K > 0 \, \exists L > 0 \, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} \left[K\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq L\|\mathbf{x}\|_1 \right].$$

(Alle normen op een eindig dimensionale ruimte zijn dus equivalent. Convergentie in één norm betekent dus convergentie in alle normen.)

Bewijs. We zullen een derde norm $\|\cdot\|_3$ van eigen keuze invoeren en laten zien dat elke andere norm daarmee equivalent is. Laat $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\} \subset \mathbf{E}$ een (vast gekozen) basis zijn. Als $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N x_j \mathbf{e}_j$, dan definieren we onze norm door $\|\mathbf{x}\|_3 = \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j|^2}$. Laat nu $\|\cdot\|$ een willekeurige norm zijn op $\mathbf{E}$, bijvoorbeeld $\|\cdot\|_1$ of $\|\cdot\|_2$. We definiëren het getal $M > 0$ door $M = \sqrt{\sum_{j=1}^N \|\mathbf{e}_j\|^2}$. Het getal $m > 0$ wordt gedefinieerd door $m = \min\{\|\mathbf{z}\| \mid \mathbf{z} = \sum_{j=1}^N z_j \mathbf{e}_j, \text{met} \sum_{j=1}^N |z_j|^2 =$

$1\}$. Dit minimum wordt aangenomen omdat $\|\mathbf{x}\|$ gezien kan worden als een continue functie op de eenheidsbol in $\mathbb{C}^N$. (Weer een andere stelling van Weierstrass).

a) Enerzijds schatten we $\|\mathbf{x}\| = \|\sum_{j=1}^{N} x_j \mathbf{e}_j\| \leq \sum_{j=1}^{N} |x_j| \|\mathbf{e}_j\|$
$\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \|\mathbf{e}_j\|^2} = M\|\mathbf{x}\|_3$.

b) Anderzijds $\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_3}\| \geq m$, voor alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

c) Conclusie: $m\|\mathbf{x}\|_3 \leq \|\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|_3$. □

2.4.5 Opmerking

In ∞-dimensionale ruimten *kunnen* twee normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ *equivalent* zijn in bovenstaande betekenis. Maar dit is niet 'automatisch' het geval, zoals bij eindig dimensionale ruimten.

Hoofdstuk 3 Lineaire Operatoren tussen genormeerde vectorruimten

3.1 Lineaire afbeeldingen

Ons uitgangspunt is een stel genormeerde (complexe) vectorruimten $\mathbf{E}_1$ en $\mathbf{E}_2$. De respectievelijke normen geven we aan met $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$. Merk op dat in de eerstvolgende definities van deze norm geen gebruik gemaakt wordt.

3.1.1 Definitie (Lineaire Operator, Lineaire Functionaal)
Gegeven: Twee (complexe) vectorruimten $\mathbf{E}_1$ en $\mathbf{E}_2$. Een lineaire deelruimte $\mathbf{U} \subset \mathbf{E}_1$.
De afbeelding

$$\mathcal{L} \colon \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{E}_2,$$

heet *lineaire afbeelding* of ook wel *lineaire operator* of, kortweg, *operator* als

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \mathcal{L}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{L}\mathbf{x} + \beta\mathcal{L}\mathbf{y}.$$

In het belangrijke bijzondere geval dat $\mathbf{U} = \mathbf{D}(\mathcal{L}) = \mathbf{E}_1$ en $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}$ genomen wordt, spreekt men van *lineaire functie* of ook wel *lineaire functionaal* of, kortweg, *functionaal*.

3.1.2 Definitie
Gegeven: Net als in voorgaande definitie: $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{U} \subset \mathbf{E}_1$, $\mathcal{L} \colon \mathbf{U} \to \mathbf{E}_2$.
Behorende bij de operator $\mathcal{L}$ voeren we een aantal lineaire (deel)ruimten in en ook het begrip inverse operator.

i) $\mathbf{D}(\mathcal{L}) = \mathbf{U} \subset \mathbf{E}_1$ heet het *definitiegebied* van de operator $\mathcal{L}$.

ii) $\mathbf{R}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{E}_2 \,|\, \exists \mathbf{x} \in \mathbf{D}(\mathcal{L}),\ \mathbf{y} = \mathcal{L}\mathbf{x}\}$ heet het *bereik* van de operator $\mathcal{L}$. Als de dimensie van het bereik eindig is, dus $\dim \mathbf{R}(\mathcal{L}) < \infty$, dan heet $\mathcal{L}$ een operator van *eindige rang*.

iii) $\mathbf{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}(\mathcal{L}) \,|\, \mathcal{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ heet de *nulruimte* van de operator $\mathcal{L}$.

iv) Als $\mathcal{L}$ injectief is, dat wil zeggen als $\mathbf{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}\}$, dan definieren we de *inverse operator* $\mathcal{L}^{-1} \colon \mathbf{V} \to \mathbf{E}_1$, met $\mathbf{V} = \mathbf{R}(\mathcal{L})$, door $\mathbf{z} \mapsto \mathcal{L}^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{u}$. Hierbij voldoet $\mathbf{u}$ (als enige) aan $\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{z}$. Blijkbaar is $\mathbf{R}(\mathcal{L}^{-1}) = \mathbf{D}(\mathcal{L})$.

v) $\mathbf{G}(\mathcal{L}) = \{(\mathbf{x}\,;\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} \in \mathbf{D}(\mathcal{L}),\ \mathbf{y} = \mathcal{L}\mathbf{x}\} \subset \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ heet de *grafiek* van de operator $\mathcal{L}$.

3.1.3 Voorbeelden

a) Laat $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, d.w.z. $\mathcal{A}$ is een complexe $N \times N$-matrix. Laat $\underline{z} \in \mathbb{C}$. De toevoeging $\underline{z} \mapsto \mathcal{A}\underline{z}$ is een lineaire afbeelding $\mathcal{A} \colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. Hier geldt: $\mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^N$.

b) Laat $\underline{a} \in \mathbb{C}^N$. De toevoeging $\underline{z} \mapsto f(\underline{z}) = (\underline{a}\,,\underline{z})$ is een lineaire functie $f \colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$.

c) Laat $\mathbf{E}$ een inproductruimte zijn. Kies $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ 'vast'. De toevoeging $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\,,\mathbf{x})$ is een lineaire functionaal op $\mathbf{E}$.

d) Door de toevoeging
$\underline{x} = \text{kolom}[x_1, \cdots, x_n, \cdots] \longmapsto \mathcal{N}\underline{x} = \text{kolom}[1x_1\,, 2x_2, \cdots, n\,x_n, \cdots]$,
wordt een lineaire operator $\mathcal{N} \colon \ell_{2,c}(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ gedefinieerd. Hier zijn twee interpretaties mogelijk:
- $\mathcal{N} \colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$ met $\mathbf{E}_1 = \ell_{2,c}(\mathbb{N})$ en $\mathbf{E}_2 = \ell_2(\mathbb{N})$.
- $\mathcal{N} \colon \mathbf{D}(\mathcal{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ met $\mathbf{D}(\mathcal{N}) = \ell_{2,c}$,

de laatste ruimte opgevat als lineaire deelruimte van ℓ_2.
In beide gevallen geldt $\mathbf{R}(\mathcal{N}) = \ell_{2,c}$. Dus $\mathcal{N}$ is niet surjectief.

e) Kies een 'vaste' $\underline{a} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. Laat $\underline{x} \in \ell_1(\mathbb{N})$. De toevoeging
$\underline{x} \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x_k \in \mathbb{C}$ is een lineaire functionaal op $\ell_1(\mathbb{N})$.

f) Laat f een functie op een begrensd interval (a, b) zijn. De toevoeging $f \mapsto \mathcal{M}f$ met $\mathcal{M}f(x) = xf(x)$ levert een lineaire operator $\mathcal{M} \colon \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b)) \to \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$. Hier is $\mathbf{D}(\mathcal{M}) = \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$, $\mathbf{R}(\mathcal{M}) \subset \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$. De operator $\mathcal{M}$ is niet surjectief. $\mathcal{M}$ heet *Vermenigvuldigingsoperator*.

g) Kies een 'vaste' functie $g \in \mathbb{L}_{1,\text{stc}}((a,b))$. De toevoeging $\phi \mapsto \tilde{g}(\phi) = \int\limits_a^b g(x)\phi(x)\,dx$ levert een lineaire functionaal $\tilde{g} \colon \mathbb{L}_{\infty,\text{stc}}((a,b)) \to \mathbb{C}$.

h) Laat $k(x,y)$ een continue functie zijn op de begrensde gesloten rechthoek $[c,d] \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2$. Laat u een functie zijn op (a,b). De toevoeging $u \mapsto \mathcal{K}u$ met $\mathcal{K}u(x) = \int\limits_a^b k(x,y)u(y)\,dy$, levert een lineaire afbeelding $\mathcal{K} \colon \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b)) \to \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((c,d))$. We hebben hier
$\mathbf{D}(\mathcal{K}) = \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$, $\mathbf{R}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{L}_{2,\text{cont}}((c,d)) \subset \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((c,d))$.
$\mathcal{K}$ is dus niet surjectief. $\mathcal{K}$ heet *Integraaloperator*. De functie k heet de *kern* van de integraaloperator $\mathcal{K}$.

i) Laat $\mathbf{U} \subset \mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}(\mathbb{R})$ gedefinieerd zijn door
$\mathbf{U} = \{f \,\big|\, f \in \mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}(\mathbb{R}),\ f' \text{ bestaat, ook} f' \in \mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}(\mathbb{R})\} \ \subset\ \mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}(\mathbb{R})$.
De toevoeging $f \mapsto \mathcal{D}f$ met $(\mathcal{D}f)(x) = \frac{df(x)}{dx}$ definieert een lineaire afbeelding $\mathcal{D}\colon \mathbf{U} = \mathbf{D}(\mathcal{D}) \to \mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}(\mathbb{R})$. Noch het definitiegebied $\mathbf{D}(\mathcal{D})$, noch het bereik $\mathbf{R}(\mathcal{D})$ van de operator $\mathcal{D}$ zijn gelijk aan de hele ruimte $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{D}$ heet *Differentiaaloperator*.

j) Noteer weer $\underline{x} = \mathrm{kolom}[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots] \in \ell_2(\mathbb{N})$. De *Schuifoperator* $\mathcal{S}\colon \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ wordt gedefinieerd door $\mathcal{S}\underline{x} = \mathrm{kolom}[0\,, x_1, \cdots, x_{n-1}, \cdots]$.
De *Terugschuifoperator* $\mathcal{S}^*\colon \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ wordt gedefinieerd door $\mathcal{S}^*\underline{x} = \mathrm{kolom}[x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}, \cdots]$.
Merk op dat $\mathbf{R}(\mathcal{S})$ een echte deelverzameling van $\ell_2(\mathbb{N})$ is, de vector $\underline{e}_1 = \mathrm{kolom}[1, 0, 0, \cdots]$ komt niet voor als beeld. $\mathcal{S}$ is dus niet surjectief, hij is wel injectief. $\mathcal{S}^*$ is daarentegen wel surjectief, maar niet injectief. De nulruimte van $\mathcal{S}^*$ wordt gegeven door
$\mathbf{N}(\mathcal{S}^*) = \{\underline{x} \,|\, \underline{x} = \mathrm{kolom}[x_1, 0, 0, \cdots],\ x_1 \in \mathbb{C},\ x_1 \text{ willekeurig}\}$.

k) De toevoeging $f \mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ is een lineaire functionaal op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{trap}}(\mathbb{R})$.

l) Laat $c \in [a, b]$, vastgekozen. Laat f een continue functie zijn op $[a, b]$. De toevoeging $f \mapsto \delta_c(f) = f(c)$, 'puntevaluatie', is een lineaire functionaal op $\mathcal{C}([a, b])$. In physicaboeken zie je vaak de notatie
$\delta_c(f) = \int\limits_a^b \delta(x - c) f(x)\,dx$.

m) Laat $c \in (a, b)$. De toevoeging $f \mapsto \delta_c(f) = f(c)$, wederom puntevaluatie, is een lineaire functionaal op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}((a, b))$.

3.1.4 Definitie (Continue/Begrensde operatoren)
Uitgangspunt: Twee genormeerde vectorruimten $\mathbf{E}_1$ en $\mathbf{E}_2$ en een lineaire afbeelding $\mathcal{L}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$.

i) $\mathcal{L}$ heet *continu in het punt* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{E}_1$ als voor alle rijtjes $\{\mathbf{x}_j\} \subset \mathbf{E}_1$ geldt:

$$\big[\, \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0\|_1 \to 0,\ j \to \infty \,\big] \Rightarrow \big[\, \|\mathcal{L}(\mathbf{x}_j) - \mathcal{L}(\mathbf{x}_0)\|_2 \to 0,\ j \to \infty \,\big].$$

ii) $\mathcal{L}$ heet *continu* (zonder meer) als $\mathcal{L}$ continu is in alle punten $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_1$.

iii) $\mathcal{L}$ heet *begrensd* als

$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}_1\ \big[\, \|\mathcal{L}\mathbf{x}\|_2 \le K\|\mathbf{x}\|_1 \,\big].$$

3.1.5 Stelling

a) De eigenschappen (i), (ii), (iii), genoemd in de voorgaande definitie zijn equivalent.

b) Als $\dim \mathbf{E}_1 = N < \infty$, *dan is* iedere *lineaire afbeelding* $\mathcal{L}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$ *begrensd.*

Bewijs. a) i)⇒ii) We moeten laten zien dat continuiteit van $\mathcal{L}$ in één punt (het punt $\mathbf{0}$ bijvoorbeeld) als gevolg heeft, dat $\mathcal{L}$ continu is in alle punten. Het lineair zijn van $\mathcal{L}$ blijkt hierbij een belangrijke rol te spelen. Kies willekeurig $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_1$ en kies een rij $\mathbf{y}_k \to \mathbf{y}$ in $\mathbf{E}_1$. Constateer $\mathbf{y}_k - \mathbf{y} + \mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_0$ in $\mathbf{E}_1$. Met gebruikmaking van de continuiteit van $\mathcal{L}$ in $\mathbf{x}_0$ vinden we $\|\mathcal{L}\mathbf{y}_k - \mathcal{L}\mathbf{y}\|_2 = \|\mathcal{L}(\mathbf{y}_k - \mathbf{y} + \mathbf{x}_0) - \mathcal{L}\mathbf{x}_0\|_2 \to 0$ als $k \to \infty$.
ii)⇒i) Triviaal.
i)⇒iii) Stel dat $\mathcal{L}$ onbegrensd was, dan $\forall n \in \mathbb{N} \exists \mathbf{x}_n \in \mathbf{E}_1 \big[\|\mathcal{L}\mathbf{x}_n\|_2 > n\|\mathbf{x}_n\|_1\big]$. Definieer nu $\mathbf{y}_n = \frac{\mathbf{x}_n}{n\|\mathbf{x}_n\|_1}$. Dan $\mathbf{y}_n \to 0$. Echter $\|\mathcal{L}\mathbf{y}_n\|_2 = \frac{1}{n\|\mathbf{x}_n\|_1}\|\mathcal{L}\mathbf{x}_n\|_2 > 1 \not\to 0$. $\mathcal{L}$ zou dus niet continu in 0 zijn, in tegenstelling tot wat we verondersteld hebben.
iii)⇒i) Als $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$, dan $\|\mathcal{L}\mathbf{x}_n\|_2 \le K\|\mathbf{x}_n\|_1 \to 0$. Dus $\mathcal{L}$ is continu in $\mathbf{0}$.

b) We maken eerst even de extra veronderstelling dat de norm op $\mathbf{E}_1$ van een inproduct afkomstig is. Noem deze norm $\|\cdot\|_{IP}$. Kies een orthonormale basis $\{\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_N\} \subset \mathbf{E}_1$. Dan $\|\mathcal{L}\mathbf{x}\|_2 = \|\sum_{j=1}^{N}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})\mathcal{L}\mathbf{e}_j\|_2 \le \sum_{j=1}^{N}|(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})|\|\mathcal{L}\mathbf{e}_j\|_2 \le \sqrt{\sum_{j=1}^{N}|(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\|\mathcal{L}\mathbf{e}_j\|_2^2} = M\|\mathbf{x}\|_{IP}$. Here the constant M is fixed by the choice of the base and the operator $\mathcal{L}$ only. Tenslotte: $\mathbf{E}_1$ is eindigdimensionaal. Stelling 2.2.4 leert dan dat er een constante $L > 0$ is zodat $\|\mathbf{x}\|_{IP} \le Ł|\mathbf{x}\|_1$. Blijkbaar geldt dus $\|\mathcal{L}\| \le LM$.
□

3.1.6 Stelling

Gegeven: Een begrensde operator $\mathcal{L}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$.

i) De nulruimte $\mathbf{N}(\mathcal{L})$ *is een* gesloten *lineaire deelruimte.*

ii) Laat $\mathbf{V} \subset \mathbf{E}_2$ *een gesloten lineaire deelruimte zijn. Dan is het inverse beeld* $\mathcal{L}^{\leftarrow}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_1 \mid \mathcal{L}\mathbf{x} \in \mathbf{V}\}$ *een gesloten lineaire deelruimte in* $\mathbf{E}_1$.

Bewijs. i) Beschouw een rij $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbf{N}(\mathcal{L})$ met $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x} \in \mathbf{E}_1$. We moeten laten zien dat dan ook $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(\mathcal{L})$. Omdat $\mathcal{L}$ begrensd is geldt $\mathcal{L}\mathbf{x}_k \to \mathcal{L}\mathbf{x}$. Alle $\mathcal{L}\mathbf{x}_k$ zijn $\mathbf{0}$, dan moet ook $\mathcal{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dus, inderdaad $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(\mathcal{L})$.
ii) Beschouw een rij $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathcal{L}^{\leftarrow}(\mathbf{V})$ met $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x} \in \mathbf{E}_1$. We moeten laten zien dat dan ook $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\leftarrow}(\mathbf{V})$. Omdat $\mathcal{L}$ begrensd is geldt $\mathcal{L}\mathbf{x}_k \to \mathcal{L}\mathbf{x}$. Alle $\mathcal{L}\mathbf{x}_k$ zitten in $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}$ is gesloten, dan moet ook $\mathcal{L}\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Dus, inderdaad $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^{\leftarrow}(\mathbf{V})$.

□

3.1.7 Definitie (Operatornorm)
Gegeven: Een begrensde operator $\mathcal{L}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$.
De *norm* van $\mathcal{L}$ is het getal $\|\mathcal{L}\| = \sup\{\|\mathcal{L}\mathbf{x}\|_2 \big| \mathbf{x} \in \mathbf{E}_1 , \|\mathbf{x}\|_1 \le 1\}$.

Merk op dat $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}_1 \big[\|\mathcal{L}\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathcal{L}\|\|\mathbf{x}\|_1\big]$. De operatornorm is dus het zuinigste getal waarmee de lengteverhouding tussen beeld en origineel kan worden afgeschat. We gaan nu na welke operatoren en functionalen uit Voorbeelden 3.1.3 continu (=begrensd) zijn.

3.1.8 Voorbeelden (Normen van operatoren)

a) Schrijf de matrix $\mathcal{A} = [A_{ij}]$. De *Hilbert-Schmidt norm* van $\mathcal{A}$ is het getal $|||\mathcal{A}||| = (\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |A_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$. Het blijkt dat de Hilbert-Schmidt norm een bovengrens is voor de operatornorm :$\|\mathcal{A}\| \le |||\mathcal{A}|||$. Als we $\mathcal{A} = \mathcal{I}$, de eenheidsmatrix, nemen vinden we $1 = \|\mathcal{I}\| \le |||\mathcal{I}||| = \sqrt{N}$. Een niet super zuinige afschatting dus. Het blijkt dat de operatornorm $\|\mathcal{A}\|$ gelijk is aan de wortel uit de, absoluut gesproken, grootste eigenwaarde van de matrix $\mathcal{A}^{\dagger}\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}^T\mathcal{A}$.

b) Met de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz en de keuze $\underline{z} = \underline{a}$, vinden we $\|f\| = \|\underline{a}\|$. De laatste norm is de 'gewone' Euclidische norm op $\mathbb{C}^N$.

c) Met de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz en de keuze $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, vinden we $\|\tilde{\mathbf{a}}\| = \|\mathbf{a}\|$. De laatste norm is de norm op $\mathbf{E}$ die met behulp van het inproduct gedefinieerd is.

d) Uit $\|\mathcal{N}\mathbf{e}_n\| = n$ concluderen we dat $\mathcal{N}$ een onbegrensde, dus niet-continue operator is.

e) De norm van deze lineaire functionaal is gelijk aan $\|\underline{a}\|_\infty$.

f) $\|\mathcal{M}\| = \max\{|a|, |b|\}$.

g) $\|\tilde{g}\| = \|g\|_1$.

h) De precieze waarde van de norm $\|\mathcal{K}\|$ is moeilijk te berekenen. Een bovengrens wordt weer geleverd door de Hilbert-Schmidt norm: $\|\mathcal{K}\| \leq |||\mathcal{K}||| = (\int_a^b \int_c^d |k(x,y)|^2\, dxdy)^{\frac{1}{2}}$.

i) Beschouw de functies $h_n(x) = (2\pi n)^{-\frac{1}{2}} e^{-nx^2}$,$n \in \mathbb{N}$. Dan $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|h_n\| = 1$. Echter $\|\mathcal{D}h_n\| \to \infty$, als $n \to \infty$. De conclusie is dat $\mathcal{D}$ een onbegrensde, dus niet-continue operator is.

j) Hier $\|\mathcal{S}\| = \|\mathcal{S}^*\| = 1$.

k) De toevoeging $f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ is een onbegrensde lineaire functionaal op $\mathbb{L}_{2,\text{trap}}(\mathbb{R})$.

l) Laat $c \in [a,b]$, vastgekozen. Laat f een continue functie zijn op $[a,b]$. De toevoeging $f \mapsto \delta_c(f) = f(c)$ is een continue functionaal op $\mathcal{C}([a,b])$. Voor de norm geldt $\|\delta_c\| = 1$. In physicaboeken zie je vaak de notatie $\delta_c(f) = \int_a^b \delta(x-c) f(x)\, dx$.

m) Laat $c \in (a,b)$. De toevoeging $f \mapsto \delta_c(f) = f(c)$ is een onbegrensde lineaire functionaal op $\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((a,b))$. 'Puntevaluatie' is hier een niet-continue operatie.

3.1.9 Definitie (Inverteerbare operator)
Gegeven: Een begrensde operator $\mathcal{A}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$.
De operator $\mathcal{A}$ heet *begrensd inverteerbaar* als er een begrensde operator $\mathcal{B}\colon \mathbf{E}_2 \to \mathbf{E}_1$ bestaat zodat $\mathcal{AB} = \mathcal{I}_2$ en $\mathcal{BA} = \mathcal{I}_1$. Hier zijn $\mathcal{I}_1$ en $\mathcal{I}_2$ de identieke afbeeldingen op $\mathbf{E}_1$, resp. $\mathbf{E}_2$.
$\mathcal{B}$ is uniek als ie bestaat. We noemen $\mathcal{B}$ de *inverse* van $\mathcal{A}$ en schrijven $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

3.1.10 Opmerking
Als $\mathcal{A}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ met $\dim \mathbf{E} = n < \infty$, dan zijn de volgende vijf eigenschappen equivalent: (i) $\mathcal{A}$ is inverteerbaar. (ii) $\mathcal{A}$ is injectief. (iii) $\mathcal{A}$ is surjectief. (iv) $\exists\, \mathcal{B}\big[\mathcal{AB} = \mathcal{I}\big]$. (v) $\exists\, \mathcal{B}\big[\mathcal{BA} = \mathcal{I}\big]$. (Dimensiestelling!)
Als $\dim \mathbf{E} = \infty$ dan zijn deze beweringen, algemeen gesproken, inequivalent. Zie hiertoe de Voorbeelden bij 3.1.3.

3.1.11 Definitie (Compacte operator)
Gegeven: Genormeerde vectorruimten $\mathbf{E}_1$ en $\mathbf{E}_2$. Een operator $\mathcal{K}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$.

$\mathcal{K}$ heet een *compacte operator* als de afsluiting van het beeld van de gesloten eenheidsbal $\{\mathbf{y} \,|\, \mathbf{y} = \mathcal{K}\mathbf{x}\,, \mathbf{x} \in \mathbf{E}_1\,, \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\}$ een compacte verzameling in $\mathbf{E}_2$ is.
(Equivalent geformuleerd: $\mathcal{K}$ heet compact als voor iedere begrensde rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{E}_1$ de rij van de beelden $\{\mathcal{K}\mathbf{x}_n\}$ een convergente deelrij bevat).

3.1.12 Stelling
Notaties als in voorgaande definitie.

i) Compacte operatoren zijn begrensde operatoren.

ii) Als $\dim \mathbf{E}_1 < \infty$ *dan is* $\mathcal{K}$ *een compacte operator.*

iii) Als $\mathcal{K}$ *begrensd is en eindige rang heeft, dan is* $\mathcal{K}$ *een compacte operator.*

Bewijs. i) Veronderstel dat $\mathcal{K}$ onbegrensd is, dan is er een rij $\{\mathbf{x}_j\} \subset \mathbf{E}_1$, met $\|\mathbf{x}_j\|_1 \leq 1$ en $\|\mathcal{K}\mathbf{x}_j\| \geq j$. De rij $\mathcal{K}\mathbf{x}_j$ bevat geen enkele begrensde deelrij, dus bevat zeker geen enkele convergente deelrij. Derhalve kan $\mathcal{K}$ niet compact zijn, in strijd met de aanname.
ii) Op grond van stelling 3.1.5.(ii) moet $\mathcal{K}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$ een begrensde operator zijn. Laat nu $\{\mathbf{x}_j\} \subset \mathbf{E}_1$ een begrensde rij zijn, dan is $\{\mathcal{K}\mathbf{x}_j\} \subset \mathbf{E}_2$ eveneens een begrensde rij. Deze is echter bevat in $\mathbf{R}(\mathcal{K})$, een eindig dimensionale deelruimte. Omdat *iedere* begrensde rij in een eindigdimensionale ruimte een convergente deelrij bevat, bevat $\{\mathcal{K}\mathbf{x}_j\}$ een convergente deelrij. Bijgevolg is de operator $\mathcal{K}$ compact.
iii) Eindige rang betekent dat de beeldruimte $\mathbf{R}(\mathcal{K}) \subset \mathbf{E}_2$ eindig dimensionaal is. Omdat $\mathcal{K}$ begrensd verondersteld is, worden begrensde rijen in begrensde rijen afgebeeld. Deze beeldrijen bevinden zich in de eindigdimensionale $\mathbf{R}(\mathcal{K})$ en bevatten dus een convergente deelrij. □

3.1.13 Opmerkingen
Bij (ii) Werd NIET vooropgesteld dat $\mathcal{K}$ begrensd is en bij (iii) WEL. De constatering is dat bij een operator $\mathcal{K}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$ met $\dim \mathbf{E}_1 < \infty$ 'automatisch' compactheid (en dus begrensdheid) van $\mathcal{K}$ volgt, terwijl als $\dim \mathbf{E}_2 < \infty$ de operator $\mathcal{K}$ niet persé begrensd hoeft te zijn. Zelfs niet als $\dim \mathbf{E}_2 = 1$. Zie Voorbeelden 3.1.8.k,m.
Tot hier zijn we compacte operatoren alleen tegengekomen in een eindig dimensionale context. De belangrijkste toepassingen betreffen echter compacte operatoren op een ∞-dimensionale ruimte die niet van eindige rang zijn. Zie de volgende hoofdstukken.

3.2 Vectorruimten van lineaire afbeeldingen

De set van alle lineaire operatoren tussen twee vast gekozen vectorruimten kan, met de voor de hand liggende definitie van 'optelling' en 'scalaire vermenigvuldiging', weer als een vectorruimte worden opgevat. Als de twee vast gekozen ruimten bovendien genormeerd zijn, dan vormen de sets van alle begrensde lineaire operatoren, resp. alle compacte lineaire operatoren, belangrijke genormeerde vectorruimten. De 'afstand' tussen een operator $\mathcal{A}$ en een operator $\mathcal{B}$ in zo'n ruimte wordt 'gemeten' door de operatornorm $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$.

3.2.1 Definitie (Bewerkingen met Operatoren)
Gegeven: De vectorruimten $\mathbf{E}_1$ en $\mathbf{E}_2$.

a) Notatie: $\mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) = \{\mathcal{A} \,\big|\, \mathcal{A}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2\,, \mathcal{A} \text{ is lineair}\}$.

b) Laat $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ en laat $\lambda \in \mathbb{C}$, dan definieren we $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ door $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}+\mathcal{B}\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}_1$ en $\lambda\mathcal{A}$ door $(\lambda\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}_1$.

c) Veronderstel vanaf hier dat $\mathbf{E}_1$ en $\mathbf{E}_2$ genormeerd zijn.
Notatie: $\mathbf{B}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) = \{\mathcal{A} \,\big|\, \mathcal{A}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2\,, \mathcal{A} \text{ is lineair en begrensd}\}$.
Notatie: $\mathbf{C}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) = \{\mathcal{A} \,\big|\, \mathcal{A}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2\,, \mathcal{A} \text{ is lineair en compact}\}$.

d) Als $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$, dan voeren we de notaties: $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ in plaats van $\mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{E})$, $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ in plaats van $\mathbf{B}(\mathbf{E}; \mathbf{E})$ en $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ in plaats van $\mathbf{C}(\mathbf{E}; \mathbf{E})$.

e) Als $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$ en $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}$, dan voeren we de notatie $\mathbf{E}^\star$ in plaats van $\mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$. De ruimte $\mathbf{E}^\star$ heet de *duale ruimte* van $\mathbf{E}$, en ook wel de *ruimte van begrensde lineaire functionalen* op $\mathbf{E}$.

3.2.2 Stelling (Operatorruimten)

i) Uitgerust met de bovengedefinieerde optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn $\mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$, $\mathbf{B}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ *en* $\mathbf{C}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ *complexe vectorruimten.*

ii) De inclusies $\mathbf{C}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) \subset \mathbf{B}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) \subset \mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ *gelden als lineaire deelruimten.*

iii) Voorzien van de operatornorm zijn $\mathbf{B}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ *en* $\mathbf{C}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ *genormeerde vectorruimten. In het bijzonder geldt dus:* $\|\lambda\mathcal{A}\| = |\lambda|\, \|\mathcal{A}\|$ *en* $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|$.

iv) Laat $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ *en* $\mathcal{B} \in \mathbf{B}(\mathbf{E}_2; \mathbf{E}_3)$, *dan is* $\mathcal{B}\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_3)$ *met* $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{A}\|\, \|\mathcal{B}\|$.

v) Als een der operatoren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in (iv) compact is, dan is $\mathcal{BA}$ eveneens compact.

Bewijs. i) *en* ii) Verifiëer dat aan de acht axioma's om 'vectorruimte' te mogen heten is voldaan.
iii) We bewijzen alleen de driehoeksongelijkheid voor operatoren. Met de driehoeksongelijkheid voor $\mathbf{E}_2$ volgt $\|(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\|_2 + \|\mathcal{B}\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|\|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathcal{B}\|\|\mathbf{x}\|_1 = (\|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|)\|\mathbf{x}\|_1$. Door aan beide kanten van deze ongelijkheid het sup te nemen over alle vectoren $\mathbf{x}$ met $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$, volgt de gewenste ongelijkheid.
iv) Voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_1$ geldt $\|\mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x})\|_3 \leq \|\mathcal{B}\|\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathcal{B}\|\|\mathcal{A}\|\|\mathbf{x}\|_1$. Door aan beide kanten van deze ongelijkheid het sup te nemen over alle vectoren $\mathbf{x}$ met $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$, volgt de gewenste ongelijkheid.
v) Ga uit van een begrensde rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{E}_1$. Veronderstel eerst dat $\mathcal{A}$ compact is, dan bevat $\{\mathcal{A}\mathbf{x}_n\}$ een convergente deelrij $\{\mathcal{A}\mathbf{x}_{n_k}\}$, zeg. De rij $\{\mathcal{BA}\mathbf{x}_{n_k}\}$ is dan, vanwege de begrensdheid van $\mathcal{B}$, eveneens convergent. De rij $\{\mathcal{BA}\mathbf{x}_n\}$ bevat blijkbaar steeds een convergente deelrij. Dit zegt dat $\mathcal{BA}$ een compacte operator is.
Als in plaats van compactheid van $\mathcal{A}$ compactheid van $\mathcal{B}$ verondersteld wordt constateren we dat de rij $\{\mathcal{BA}\mathbf{x}_n\}$, die is ontstaan door $\mathcal{B}$ toe te passen op de begrensde rij $\{\mathcal{A}\mathbf{x}_n\}$, een convergente deelrij moet bevatten. Dit vanwege de compactheid van $\mathcal{B}$. Blijkbaar is ook in dit tweede geval $\mathcal{BA}$ een compacte operator. □

3.2.3 Opmerkingen

Als we in bovenstaande stelling $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$ nemen is de constatering dat operatoren in $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ blijkbaar met elkaar kunnen worden vermenigvuldigd. Er komt dan weer een operator in $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ uit. In het algemeen is dit operatorproduct *niet commutatief*, dat wil zeggen dat $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$, in het algemeen. We zeggen dat twee operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ *commuteren* als geldt $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$. Het operatorproduct is *associatief*, dat wil zeggen dat altijd $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$. Ook geldt nog$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$, $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$, $\mathcal{AI} = \mathcal{IA} = \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}\,0 = 0\,\mathcal{A} = 0$, de *nuloperator*. Dit alles wordt uitgedrukt door te zeggen dat $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ een *Algebra* is. Met (v) van de voorafgaande stelling zien we dat $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ eveneens een algebra is.
Met $\mathcal{A}^2$ bedoelen we $\mathcal{A}^2\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Met $\mathcal{A}^n$ bedoelen we $\mathcal{A}^n\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}$ en n achtereenvolgens $2,\ 3,\ \cdots$.
Als $\mathcal{K} \in \mathbf{C}(\mathbf{E})$ en $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$ dan geldt op grond van (v) van de voorafgaande stelling steeds $\mathcal{KA} \in \mathbf{C}(\mathbf{E})$en ook $\mathcal{AK} \in \mathbf{C}(\mathbf{E})$. Deze eigenschap wordt vaak te kennen gegeven door te zeggen dat $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ een *links/rechts ideaal* is in $\mathbf{B}(\mathbf{E})$.

3.2.4 Voorbeelden

a) Neem $\mathbf{E}_1 = \ell_c(\mathbb{N})$ en $\mathbf{E}_2 = \ell_2(\mathbb{N})$, dan

$$\mathbf{C}(\ell_c, \ell_2) \subset \mathbf{B}(\ell_c, \ell_2) \subset \mathbf{L}(\ell_c, \ell_2).$$

Beide inclusies zijn 'echt', geen =tekens dus.

b) Neem $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} = \mathbb{C}^N$. Dan is $\mathbf{L}(\mathbf{E}) = \mathbf{B}(\mathbf{E}) = \mathbf{C}(\mathbf{E}) = \mathbb{C}^{N\times N}$, de complexe vectorruimte van alle complexe $N \times N$-matrices. Er zijn twee natuurlijke keuzen voor een norm op $\mathbb{C}^{N\times N}$: (i) De operatornorm $\|\cdot\|$, zie Def 3.1.7, en (ii) De Hilbert-Schmidt norm $|||\cdot|||$. Als je $\mathbb{C}^{N\times N}$ opvat als een copie van $\mathbb{C}^{N^2}$ met 'een andere boekhouding', dan komt de Hilbert-Schmidt norm op $\mathbb{C}^{N\times N}$ overeen met de gewone Euclidische norm op $\mathbb{C}^{N^2}$.
Beschouw nu een $\mathcal{A} = [A_{ij}] \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Voor ieder matrixelement geldt $|A_{ij}| \le \|\mathcal{A}\|$. Het ij-de matrixelement van $\mathcal{A}^k$ kunnen we schrijven als $(\mathcal{A}^k)_{ij} = (\underline{e}_i, \mathcal{A}^k\underline{e}_j)$. Blijkbaar $|(\mathcal{A})_{ij}| \le \|\mathcal{A}^k\| \le \|\mathcal{A}\|^k$. We willen nu een matrix $e^{\mathcal{A}}$ definieren door $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^k}{k!}$. Dan zou moeten gelden $(e^{\mathcal{A}})_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{A}^k)_{ij}}{k!}$. Deze reeks is echter convergent omdat ie gemajoreerd wordt door $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{A}\|^k}{k!} = e^{\|\mathcal{A}\|}$. Blijkbaar is in $\mathbb{C}^{N\times N}$ een limietpunt 'beschikbaar', waar de reeks $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^k}{k!}$ naartoe kan convergeren. Om zo'n beschikbaarheid ook te kunnen realiseren voor $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$ met $\mathbf{E}$ een ∞-dimensionale ruimte moeten speciale voorzorgen genomen worden. Daar beginnen we het volgende hoofdstuk mee.

Hoofdstuk 4 Banachruimten, Hilbertruimten

4.1 Volledigheid en Separabiliteit

In Hoofdstuk 2 hebben we gezien wat het wil zeggen dat een rij punten $\{\mathbf{x}_n\}$ in een genormeerde vectoruimte $\mathbf{E}$ *convergeert* naar een punt $\mathbf{a}$ in $\mathbf{E}$. In Def 2.2.3 hebben we vooropgesteld dat zo'n *limietpunt* $\mathbf{a}$ voorhanden is. Stel eens dat een rij 'alles in zich heeft' om te convergeren, ze 'verdient' zogezegd een limietpunt. Als zo'n limietpunt dan altijd beschikbaar is, dan noemen we de ruimte waarin zich dit allemaal afspeelt een *Volledige Ruimte.* Het 'alles in zich hebben' zullen we verderop precies maken met het begrip *Cauchy-rij*. Beschouw eens binnen de rationale getallen $\mathbb{Q}$ de rij

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \cdots,\frac{m}{n},\ \frac{1}{2}(\frac{m^2+2n^2}{mn}),\ \cdots$$

Ver weg in de rij zie je dat de getallen (de 'punten') steeds meer op een kluitje gaan zitten. Onze rij verdient een limietpunt! Binnen de rationale getallen is in dit geval geen limietpunt beschikbaar, $\mathbb{Q}$ zit vol 'gaten', is niet *volledig*. Als we onze voorbeeldrij echter opvatten als een rij binnen de reële getallen $\mathbb{R}$, dan blijkt ze naar $\sqrt{2}$ te convergeren. Inderdaad is $\sqrt{2}$ niet te schrijven als een breuk. Op de 'plek van $\sqrt{2}$' zit er een 'gaatje' in $\mathbb{Q}$. De 'ruimten' $\mathbb{R}$ en ook $\mathbb{C}$ zijn wél volledig! Nu de formele definities:

4.1.1 Definitie (Cauchy-rij)
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$ met norm $\|\cdot\|$ en een rij vectoren $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{E}$.
We noemen de rij $\{\mathbf{x}_n\}$ een *Cauchy-rij* als

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m > N\ \forall n > N\big[\ \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\|\ <\ \varepsilon\big].$$

4.1.2 Opmerking
Merk op dat er in de definitie van Cauchy-rij nergens sprake is van een limietpunt. *Als* een rij een convergente rij is, dus als er een $\mathbf{a}$ bestaat zodat $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, als $n \to \infty$, *dan* is het ook een Cauchy-rij. Immers, bij gegeven $\varepsilon > 0$ is er $N \in \mathbb{N}$, voldoende groot, zodat $\forall n > N$ en $\forall m > N$ geldt $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{a}\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Met de driehoeksongelijkheid volgt dan $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$. Het bestaan van Cauchy-rijen zonder limietpunt beschouwen we als een ongewenste situatie. Vandaar:

4.1.3 Definitie (Banach/Hilbert-ruimten)
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$.

a) We noemen $\mathbf{E}$ een *volledige* of ook wel *complete* genormeerde vectorruimte als *iedere* Cauchy-rij in $\mathbf{E}$ convergent is, dat wil zeggen, convergeert naar een punt in $\mathbf{E}$. Dus

$$\Big[\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{E} \text{ is Cauchy-rij}\Big] \Rightarrow \Big[\exists \mathbf{x} \in \mathbf{E} \left[\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}\right]\Big].$$

b) Een genormeerde volledige vectorruimte heet *Banachruimte* . Als $\mathbf{E}$ een reële vectorruimte is dan spreken we van een *reële Banachruimte*. Als $\mathbf{E}$ een complexe vectorruimte is dan spreken we van een *complexe Banachruimte*.

c) Als de norm van een Banachruimte van een inproduct afkomstig is, dan spreken we van een *Hilbertruimte*. Het betreft hier dan een *volledige inproductruimte*. We spreken van een *reële Hilbertruimte* of *complexe Hilbertruimte* als de achterliggende vectorruimte een reële vectorruimte, dan wel een complexe vectorruimte is.

4.1.4 Stelling
Een gesloten lineaire deelruimte van een Banachruimte is eveneens een Banachruimte.

Bewijs. Laat $\mathbf{U}$ een gesloten lineaire deelruimrte zijn in een Banachruimte $\mathbf{E}$. Beschouw een rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{U}$. Als deze rij Cauchy is dan is er, wegens de volledigheid van $\mathbf{E}$ een punt $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ zodat $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. Omdat $\mathbf{U}$ gesloten is moet het limietpunt $\mathbf{x}$ van de rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{U}$ ook tot $\mathbf{U}$ behoren. Blijkbaar is $\mathbf{U}$ volledig, dus een Banachruimte. □

4.1.5 Voorbeelden
a) $\ell_2(\mathbb{N})$ is een Hilbertruimte.
Deze ruimte is ingevoerd in Voorbeeld 2.1.2.c. We hoeven 'alleen maar' te bewijzen dat deze ruimte volledig is. Ons uitgangspunt is een Cauchyrij $\{\underline{x}_n\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$ met $\underline{x}_n = \text{kolom}[x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots, x_{n,j} \cdots]$. Bij de 1e stap maken we een kolom $\underline{a} = \text{kolom}[a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots]$, die kandidaat is om limietpunt van onze Cauchyrij te zijn. Bij de 2e stap laten we zien dat de vector $\underline{a}$ tot $\ell_2(\mathbb{N})$ behoort. Bij de 3e stap bewijzen we dat $\underline{x}_n \to \underline{a}$ in $\ell_2(\mathbb{N})$.
Stap 1: $\{\underline{x}_n\}$ is Cauchy wil zeggen $\forall \varepsilon > 0\, \exists M > 0\, \forall m, n > M \left[\|\underline{x}_n - \underline{x}_m\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_{n,j} - x_{m,j}|^2 < \varepsilon^2\right]$. Dan moet $\forall j\, |x_{n,j} - x_{m,j}|^2 < \varepsilon^2$. Bijgevolg is voor

elke vaste j de rij $\{x_{n,j}\}$ een Cauchyrij in $\mathbb{C}$. De set van complexe getallen $\mathbb{C}$ is volledig. Dus er is een $a_j \in \mathbb{C}$ voorhanden zodat $x_{n,j} \to a_j$ als $n \to \infty$. De aldus verkregen a_j verzamelen we in een kolom $\underline{a} = \text{kolom}[a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots]$.
Stap 2: We laten zien dat $\underline{a} \in \ell_2(\mathbb{N})$. Voor elke vastgekozen $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sum\limits_{j=1}^{N} |x_{n,j} - x_{m,j}|^2 < \varepsilon^2$. Neem hierin de limiet voor $n \to \infty$, dan

$(\star)$ $\forall m > M \ \sum\limits_{j=1}^{N} |a_j - x_{m,j}|^2 < \varepsilon^2$. Voorts $\sum\limits_{j=1}^{N} |a_j|^2 \leq 2\sum\limits_{j=1}^{N} |a_j - x_{m,j}|^2 + 2\sum\limits_{j=1}^{N} |x_{m,j}|^2 < 2\varepsilon^2 + 2\|\underline{x}_m\|^2$. Neem nu in het linkerlid van deze uitdrukking de limiet $N \to \infty$. Deze limiet bestaat omdat het uiterste rechterlid niet van N afhangt en het linkerlid uitsluitend positieve bijdragen bevat. Aldus vinden we $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$. Dus $\underline{a} \in \ell_2(\mathbb{N})$.

Stap 3: Neem in $(\star)$ de limiet voor $N \to \infty$. Dan $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j - x_{m,j}|^2 = \|\underline{a} - \underline{x}_m\|^2 \leq \varepsilon^2$ als $m > M$. Klaarblijkelijk $\underline{x}_m \to \underline{a}$ als $m \to \infty$.

b) $\mathcal{C}([a,b])$ is een Banachruimte.
Deze ruimte is ingevoerd in Voorbeeld 2.4.2.l. we laten ook hier alleen de volledigheid zien. Ons uitgangspunt is een Cauchyrij $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([a,b])$.
Stap 1: $\forall \varepsilon > 0\, \exists M > 0\, \forall m,n > M \left[\|f_n - f_m\|_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\right]$.
Voor elke $x \in [a,b]$ is blijkbaar $\{f_n(x)\}$ een Cauchyrij in $\mathbb{C}$. Er is dus een complex getal $\xi \in \mathbb{C}$ voorhanden zodat $f_n(x) \to \xi$ als $n \to \infty$. Met een vooruitziende blik schrijven we $\xi = f(x)$. Omdat we dit voor alle $x \in [a,b]$ kunnen doen ontstaat aldus de functie $f(x)$, onze kandidaatlimiet.
Stap 2: We laten zien dat f een continue functie is op $[a,b]$. In Stap 1 staat $\forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Neem hierin de limiet $n \to \infty$. Dan komt er $\forall \varepsilon > 0\, \exists M > 0\, \forall m > M \left[\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon\right]$. Hier staat dat, op $[a,b]$ de rij functies $\{f_n\}$ uniform naar f convergeert. Omdat alle f_n continu zijn, is de limietfunctie f dat ook.
Stap 3: Bij stap 2 valt te lezen $\forall \varepsilon > 0\, \exists M > 0\, \forall m > M \left[\|f - f_m\|_\infty < \varepsilon\right]$. Dus inderdaad $f_n \to f$ in $\mathcal{C}([a,b])$.

c) $\ell_1(\mathbb{N})$ en $\ell_\infty(\mathbb{N})$ zijn Banachruimten.
Deze ruimten zijn ingevoerd in Voorbeelden 2.4.2.b/c. De volledigheidsbewijzen voor deze ruimten vertonen sterke analogie met, respectievelijk, a) en b).

4.1.6 Definitie ((Absoluut) Convergente Reeksen)
Gegeven: Een genormeerde vectorruimte $\mathbf{E}$. Een rij $\mathbf{x}_{n n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$.

a) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n$ heet *convergent* in $\mathbf{E}$ als

$$\exists\, \mathbf{a} \in \mathbf{E} \left[\| \sum_{j=1}^{N} \mathbf{x}_j - \mathbf{a}\| \rightarrow\ 0 \text{ als } N \rightarrow \infty\right]$$

b) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n$ heet *absoluut convergent* in $\mathbf{E}$ als $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$, dus convergent is als een 'getallenreeks'.

4.1.7 Stelling
Gegeven: $\mathbf{E}$ *is een genormeerde ruimte.*
Er geldt

$$\left[\mathbf{E} \textit{ is een Banachruimte}\right] \Leftrightarrow \left[\textit{ Iedere absoluut convergente reeks is convergent }\right]$$

Bewijs.
$\Rightarrow$) Ga uit van een rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{E}$ met de eigenschap $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\| < \infty$. De bewering is dat dan de rij van partiële sommen $\{\mathbf{s}_n\}$, met $\mathbf{s}_n = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n$, een Cauchyrij is. Inderdaad: Neem $\epsilon > 0$, kies N met $\sum_{k=N}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\| < \epsilon$. Dan geldt $\forall m > n > N$ $\|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\| = \|\mathbf{x}_{n=1} + \cdots + \mathbf{x}_m\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\| < \epsilon$. Blijkbaar is de rij van partiële sommen $\{\mathbf{s}_n\}$ een Cauchyrij en dus convergent. Dit zegt niets meer of minder dan dat $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ convergent is.
$\Leftarrow$) Laat $\{\mathbf{x}_n\}$ een Cauchyrij zijn. We moeten laten dat die Cauchyrij convergeert (naar een punt $\mathbf{x}$, zeg). Omdat de rij Cauchy is, geldt
$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists p_k \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq p_k \left[\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \frac{1}{2^k}\right]$. Kies de rij $\{p_k\} \subset \mathbb{N}$ strict stijgend. Dan is de reeks $\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbf{x}_{p_{k+1}} + \mathbf{x}_{p_k})$ absoluut convergent, dus, conform onze aanname, convergent. De rij van partiële sommen $\{\mathbf{x}_{p_N}\}$, gedefinieerd door $\mathbf{x}_{p_N} = \mathbf{x}_{p_1} + (\mathbf{x}_{p_2} - \mathbf{x}_{p_1}) + \cdots + (\mathbf{x}_{p_N} - \mathbf{x}_{p_{N-1}})$ is dus convergent. $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{p_N} = \mathbf{x}$, zeg. Als $N > p_N$, dan $\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{p_N}\| + \|\mathbf{x}_{p_N} - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$, als $N \rightarrow \infty$. □

4.1.8 Stelling
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *en* $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$. *Een orthonogonale rij*

$\{\mathbf{x}_1\,,\,\mathbf{x}_2\,,\,\cdots\,,\mathbf{x}_n\,,\cdots\}\subset\mathbf{H}$. *Een orthonormale rij* $\{\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{e}_2\,,\,\cdots\,,\mathbf{e}_n\,,\cdots\}\subset\mathbf{H}$. *Een rij* $\{\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\cdots\,,\alpha_n\,,\cdots\}\subset\mathbb{C}$. *Er geldt*

i)

$$\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{x}_n \text{ is convergent in } \mathbf{H}\Big] \Leftrightarrow \Big[\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathbf{x}_n\|^2<\infty\Big]$$

ii)

$$\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mathbf{e}_n \text{ is convergent in } \mathbf{H}\Big] \Leftrightarrow \big[\{\alpha_n\}\in\ell_2(\mathbb{N})\big]$$

iii)

$$\big[\{\mathbf{e}_n\} \text{ is an orthonormal base in } \mathbf{H}\big] \Leftrightarrow \big[\forall n\in\mathbb{N}\ (\mathbf{e}_n\,,\mathbf{y})=0\ \Rightarrow \big[\mathbf{y}=0\big]\big]$$

iv)

$$\big[\{\mathbf{e}_n\} \text{ is an orthonormal base in } \mathbf{H}\big] \Leftrightarrow \big[\text{opspansel}\{\mathbf{e}_n\}\ \text{ is dichte deelverzameling in } \mathbf{H}\big]$$

Bewijs.

i) Voor $M>N$ passen we de Stelling van Pythagoras (2.3.4) toe: $\|\sum\limits_{k=M}^{N}\mathbf{x}_k\|^2=\sum\limits_{k=M}^{N}\|\mathbf{x}_k\|^2$.

$\Rightarrow$) Als links $\lim\limits_{N\to\infty}$ bestaat in $\mathbf{H}$, dan is blijkbaar de 'getallenreeks' ter rechterzijde eveneens convergent.

$\Leftarrow$) Bij gegeven $\epsilon>0$ kan M zo groot gekozen worden dat het rechterlid $<\epsilon^2$ is. Blijkbaar is de rij van partiële sommen een Cauchyrij in $\mathbf{H}$. Omdat $\mathbf{H}$ een Hilbertruimte is, is deze som dus convergent in $\mathbf{H}$.

ii) De rij $\{\alpha_n\mathbf{e}_n\}$ is een orthogonale rij. Pas i) toe.

iii$\Rightarrow$) Al bewezen in Stelling 2.3.9.a (Parseval).

iii$\Leftarrow$) Kies $\mathbf{x}\in\mathbf{H}$ willekeurig. Uit de ongelijkheid van Bessel (2.3.5.c) volgt dat $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(\mathbf{e}_n,\mathbf{x})|^2<\infty$. De reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathbf{e}_n,\mathbf{x})\mathbf{e}_n$ is dan convergent (deel ii) van deze stelling), met som $\mathbf{y}$, zeg. Door uitschrijven vinden we dat $\forall n\ (\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{e}_n)=0$. Op grond van onze aanname moet dan $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ zijn.

iv) Staat in Stelling 2.3.9.c. $\square$

4.1.9 Voorbeeld (De Hilbertruimte $\mathbb{L}_2((a,b))$**)**
In toepassingen zijn *functieruimten* die Hilbertruimten zijn, heel belangrijk. We gaan er een aantal construeren.
Een functie f heet *locaal integreerbaar*, notatie: $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}((a,b))$, als voor alle *begrensde* deelintervallen $(c,d) \subset (a,b)$ geldt dat $\int_c^d f(x)\,dx$ bestaat. Beschouw nu op het interval (a,b) de klasse van functies

$$\mathcal{L}_2((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{C} \,\big|\, f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}((a,b)),\ \int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty\}.$$

Beide functieklassen vormen op voor de hand liggende manier een vectorruimte.
1.) De toevoeging $f \mapsto \|f\| = \{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\}^{\frac{1}{2}}$ is *geen* norm op $\mathcal{L}_2((a,b))$, want $\|f\| = 0$ betekent niet dat $f = 0$. Denk maar aan de functie $\chi_c(x)$ die 1 is als $x = c$ en verder overal 0. Dit euvel zou je wat kunnen verzachten door van f extra te eisen dat ze stuksgewijs continu is. Zie Voorbeeldn 2.1.2f. Je krijgt dan de inproduct-ruimte $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$.
2.) Helaas is $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$ niet volledig! Om dit in te zien voeren we eerst op $\mathbb{R}$ de functie w in gedefinieerd door $w(x) = \frac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{4}}$ als $0 < |x| < 1$, en 0 elders. Merk op dat $\|w\| = 1$. Laat voorts $\{r_n\}$ een *aftelling* zijn van $\mathbb{Q} \cap (a,b)$. Dit wil zeggen dat in $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ alle rationale getallen, die binnen (a,b) voorkomen, op een rij staan. Nu construeren we de gruwelijke functie $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} w(x - r_n)$. Deze reeks is absoluut convergent in $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((a,b))$ want de norm van de algemene term wordt begrensd door $\frac{1}{n^2}$. De reeks kan echter onmogelijk convergeren naar een stuksgewijs continue functie omdat er geen enkel open interval binnen (a,b) te vinden is waarop de somfunctie Ψ continu, of zelfs maar begrensd, is.
Ook deze kwaal valt te verhelpen, namelijk door de *Lebesgue integratietheorie* in te zetten. Dan kunnen 'extreem smerige functies' inprincipe geïntegreerd worden, $\mathcal{L}_2((a,b))$ wordt er 'groter' van. De theorie en eigenschappen van de Lebesgue-integraal bespreken we hier niet. Vanaf hier gebruiken we in de definitie van $\mathcal{L}_2((a,b))$ het 'forsere' Lebesgue-integraalbegrip.
3.) Helaas blijft bezwaar 1.) van kracht. Het wordt zelfs nog erger doordat voor functies als $\chi_{\mathbb{Q}}$ met $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ als $x \in \mathbb{Q}$, en 0 elders, blijkt te gelden: $\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0$.
4.) We zoeken een andere uitweg. Definieer binnen $\mathcal{L}_2((a,b))$ een lineaire

deelruimte $\mathcal{N}$ van 'niks-functies' door

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}_2((a,b)) \big| \int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0\}$$

De genoemde χ_c en $\chi_{\mathbb{Q}}$ zijn voorbeelden van niks-functies. Dus niks-functies hoeven niet identiek 0 te zijn.
5.) Formeel definieren we nu de *quotientruimte*

$$\mathbb{L}_2((a,b)) \;=\; \mathcal{L}_2((a,b))/\mathcal{N}.$$

De vectoren in $\mathbb{L}_2$ zijn nu 'bundeltjes' van functies waarvan de verschillen norm 0 hebben. Anders gezegd f_1 en f_2 uit $\mathcal{L}_2((a,b))$ stellen dezelfde vector in $\mathbb{L}_2((a,b))$ voor als $f_1 - f_2 \in \mathcal{N}$. Merk op dat binnen een zo'n 'bundeltje' ten hoogste èèn functie continu kan zijn. De **0**-vector is precies $\mathcal{N}$.
6.) Vanwege de boven gepleegde ingrepen is $\mathbb{L}_2((a,b))$ een Hilbertruimte. De vectoren in deze ruimte zullen we vaak 'functies' noemen hoewel dat, strict gesproken, onjuist is. Met een 'echte functie' associeren we het bundeltje waar deze functie in zit. Je moet erop bedacht zijn dat operaties als het evalueren van $f \in \mathbb{L}_2((a,b))$ in een punt $c \in (a,b)$, dus $f(c)$ opschrijven, in het algemeen niet zinvol is, omdat f en, bijvoorbeeld $f + \chi_c$, dezelfde vector voorstellen. Als je echter weet dat een zekere $f \in \mathbb{L}_2((a,b))$ door een continue functie gerepresenteerd wordt, dan kun je er voor kiezen om die *unieke representant te evalueren* in c.
7.) Uit de theorie van Lebesgue integratie volgt nog dat $\mathbb{L}_{2,\mathrm{trap}}((a,b))$, $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}((a,b))$ en $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((a,b))$ dichte lineaire deelruimten zijn van $\mathbb{L}_2((a,b))$.
8.) In bovenstaande beschouwingen kan het interval (a,b) vervangen worden door $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ of ook door deelgebieden in $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Zo heb je, bijvoorbeeld, in de Hilberruimte $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^3)$ het inproduct
$(f\,,\,g) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(x,y,z)}g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$

4.1.10 Stelling

i) De stelsels

$$\{\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \Big| \; n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots\},$$

zijn beide orthonormale bases in $\mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$.

ii) *De stelsels*

$$\{\sqrt{\frac{1}{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 3x,\ \cdots\},$$

$$\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x,\ \cdots\},$$

zijn beide orthonormale bases in $\mathbb{L}_2((0,\pi))$.

iii) *De* Legendre polynomen P_n, $n = 0, 1, 2 \cdots$, *worden gedefinieerd door* $P_0(x) = 1$, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. *Het stelsel*

$$\{\sqrt{n+\tfrac{1}{2}}P_n(x)\Big|\ n = 0, 1, 2, \cdots,\}$$

is een orthonormale basis in $\mathbb{L}_2((-1,1))$.

iv) *De* Chebyshev polynomen T_n, $n = 0, 1, 2 \cdots$, *worden op* $(-1,1)$ *gedefinieerd door* $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. *Het stelsel*

$$\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\tfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}T_n\Big|\ n = 0, 1, 2, \cdots,\}$$

is een orthonormale basis in $\mathbb{L}_2((-1,1))$.

v) *De* Hermite polynomen H_n, $n = 0, 1, 2 \cdots$, *worden gedefinieerd door* $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$. *Het stelsel*

$$\{\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\Big|\ n = 0, 1, 2 \cdots,\}$$

is een orthonormale basis in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

vi) *De spherische harmonischen* $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ *vormen een orthonormale basis in* $\mathbb{L}_2(S^2)$, *dit is de Hilbertruimte van kwadratisch integreerbare functies op het eenheidsboloppervlak* S^2 *in* $\mathbb{R}^3$.

Bewijs.
i) Om te bewijzen dat het orthonormale stelsel $\{\phi_n\}$ een orthonormale basis is, maken we gebruik van Conditie (iii) in Stelling 4.1.8. Neem aan dat er een $f \in \mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$ is met de eigenschap $\forall n \in \mathbb{Z}\ f \perp \phi_n$. Hieruit direct bewijzen dat $f = 0$, valt niet mee. Daarom poetsen we zo'n f wat op. Definieer $\mathcal{G}f \in \mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$ door $\mathcal{G}f(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\,f(t)\,dt$. De verkregen functie $\mathcal{G}f$ heeft de volgende eigenschappen

a) $\mathcal{G}f$ is continu op $[-\pi,\pi]$. Immers $|\mathcal{G}f(x+h)-\mathcal{G}f(x)| = \big|\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt\big| \leq \|f\|\cdot\|\chi_{(x,x+h)}\| = \|f\|\sqrt{h} \to 0$ als $h \to 0$.

b) $\mathcal{G}f(\pi) = \mathcal{G}f(-\pi)$. Immers $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \sqrt{2\pi}(\phi_0, f) = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \big[(\phi_n, \mathcal{G}f) = 0\big]$. Uitschrijven van het inproduct en berekening van de integralen $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\int\limits_{-\pi}^{x} f(t)\,dt\big)e^{-inx}\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\big(\int\limits_{t}^{\pi} e^{-inx}\,dx\big)\,dt$, leidt direct naar dit resultaat.

We hebben nu een continue functie $\mathcal{G}f$ gevonden die $\perp$ alle ϕ_n staat. Op $\mathcal{G}f$ passen we opnieuw de operator $\mathcal{G}$ toe. Dan vinden we een continu differentiëerbare functie $\mathcal{G}\mathcal{G}f$ die $\perp$ alle ϕ_n staat en die bovendien de bovenstaande eigenschappen a), b) en c) heeft. Uit Analyse 4 is bekend dat de 2π-periodieke continu differenteerbare functie $\mathcal{G}\mathcal{G}f$ als een uniform convergente Fourierreeks te schrijven is. Vanwege $\mathcal{G}\mathcal{G}f \perp \phi_n$ moet gelden $\mathcal{G}\mathcal{G}f = 0$. De afgeleide hiervan, $\mathcal{G}f$, is dan ook 0. Dus, $\forall x \in [-\pi,\pi]\ \Big[\int\limits_{-\pi}^{x} f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\,f(t)\,dt = 0\Big]$. Door $x = -\pi$ te nemen zie je dat de 2e term 0 moet zijn. Resteert de vraag of uit $\forall x \in [-\pi,\pi]\ \Big[\int\limits_{-\pi}^{x} f(t)\,dt = 0\Big]$, volgt dat f een niksfunctie is. Blijkbaar heeft f de eigenschap $\int\limits_a^b f(t)\,dt = 0$ voor alle $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Dus $f \perp \chi_{[a,b]}$. Dus $f \perp$ alle trapfuncties. De trapfuncties vormen echter een dichte deelverzameling: Er is een rij trapfuncties $\{t_n\} \subset \mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$ met $t_n \to f$. Dus $(f,f) = \lim\limits_{n\to\infty}(f,t_n) = 0$. Blijkbaar is f een niksfunctie, het nulelement in $\mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$.
Het opspansel van het stelsel met sinussen en cosinussen heeft hetzelfde opspansel als het stelsel van ϕ_n's. Met Stelling 4.1.8.iii volgt dan weer dat het tweede stelsel ook een basis vormt.

ii) Een $\mathbb{L}_2$-functie f op het interval $[0,\pi]$ kan tot een even (resp. oneven) $\mathbb{L}_2$-functie op het interval $[-\pi,\pi]$ worden voortgezet. Deze kan dan, op grond van i), in een Fourier-cosinusreeks (resp. Fourier-sinusreeks) worden ontwikkeld met convergentie in $\mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$. Als je je beperkt tot het interval $(0,\pi)$ convergeert dezelfde reeks ook in $\mathbb{L}_2((0,\pi))$.

iii) Stap 1: Als voor $g \in \mathbb{L}_2((-1,1))$ en voor $n = 0,\ 1\ 2,\cdots$ geldt $\int\limits_{-1}^{1} g(x)x^n\,dx = 0$, dan is g een niksfunctie, het nulelement dus. Om dit in te zien beschouwen

we $\int\limits_{-1}^{1} e^{-inx} g(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \{\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-inx)^m}{m!}\} g(x)\, dx$. Omdat de reeks uniform convergeert op het interval $[-1,1]$, dus zeker in $\mathbb{L}_2((-1,1))$, mag de sommatie buiten het inproduct gehaald worden. Dat levert 0 op omdat alle afzonderlijke termen 0 zijn. Als we g buiten $[-1,1]$ gelijk stellen aan 0 en desondanks toch g blijven noemen,dan is onze conclusie dat, in $\mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$, geldt $g \perp \phi_n$, voor alle n. Volgens deel i) moet dan gelden $g = 0$.
Stap 2: De Legendre polynomen vormen een orthonormaal stelsel in $\mathbb{L}_2((-1,1))$. Dit is bij Analyse 4 bewezen. Met partiële integratie.
Stap 3: Het lineair opspansel van $\{P_n\}$ is gelijk aan het opspansel van $\{x^n\}$. Dus $\forall n\; P_n \perp g$ betekent blijkbaar $g = 0$.
Stap 4: Met Stelling 4.1.8.iii concluderen we dat $\{P_n\}$ een orthonormale basis is.

iv) Ga in de integraal

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos ny \cos my\, dy = 1,$$

over op de nieuwe integratievariabele $y = \arccos x$. Met onderdeel ii) van deze stelling kan het bewijs worden afgemaakt.

v) Zie Sectie 6.3. Helemaal achteraan.

vi) □

4.1.11 Voorbeeld (Sobolevruimten)
We zeggen dat $f \in \mathbb{L}_2((a,b))$ een *gegeneraliseerde afgeleide* in $\mathbb{L}_2((a,b))$ heeft als f continu is én te schrijven is als $f(x) = f(c) + \int\limits_c^x g(t)\, dt$ met $g \in \mathbb{L}_2((a,b))$ en geschikte $c \in [a,b]$. We schrijven dan $g = \mathcal{D}f$.

a) We definieren nu de *1-e Sobolevruimte* als

$$\mathbb{H}^1((a,b)) = \{f \mid f \in \mathbb{L}_2((a,b)),\ \mathcal{D}f \text{bestaat en } \mathcal{D}f \in \mathbb{L}_2((a,b))\},$$

met inproduct

$$(f\,, g\,)_{\mathbb{H}^1} = \int\limits_a^b \{\overline{f(x)} g(x) + \overline{\mathcal{D}f(x)} \mathcal{D}g(x)\}\, dx.$$

b) We definieren de *m-e Sobolevruimte*, $m = 2,\ 3,\ \cdots$, als

$$\mathbb{H}^m((a,b)) = \{f \mid f \in \mathbb{L}_2((a,b)),\ \forall k,\ 1 \le k \le m,\ \mathcal{D}^k f \in \mathbb{L}_2((a,b))\},$$

met inproduct

$$(f\,,g\,)_{\mathbb{H}^m} = \int_a^b \{\sum_{k=0}^{k=m} \overline{\mathcal{D}^k f(x)} \mathcal{D}^k g(x)\}\, dx.$$

Alle Sobolevruimten $\mathbb{H}^m$,$m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, zijn Hilbertruimten. De orthonormale bases (i) en (ii), als genoemd in Stelling 4.1.10, zijn orthogonale rijen in al deze Sobolevruimten.

4.1.12 Definitie (Separabele Hilbertruimte)
Een Hilbertruimte **H** heet *separabel* als ze een orthonormale rij bevat die tevens een orthonormale basis is.

4.1.13 Voorbeelden

a) $\mathbb{C}^N$, $\ell_2(\mathbb{N})$, $\mathbb{L}_2((a,b))$, $\mathbb{H}^m((a,b))$ zijn separabele Hilbertruimten.

b) Een voorbeeld van een *niet-separabele* Hilbertruimte wordt geleverd door de vectorruimte van alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met de eigenschappen:
(1) f neemt een van 0 verschillende waarde aan in ten hoogste een aftelbaar aantal punten van $\mathbb{R}$.
(2) $\sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|^2 < \infty$.
Het inproduct wordt gegeven door $(f,\, g) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x)$. Merk op dat in deze som 'over alle reële getallen' hoogstens een aftelbaar aantal termen effectief zijn.

4.1.14 Stelling
Gegeven: Een separabele Hilbertruimte **H**.
Er geldt:

i) Er bestaat een dichte deelverzameling in **H** *die aftelbaar is.*

ii) Ieder orthogonaal stelsel in **H** *is eindig of aftelbaar.*

Bewijs.
i) Laat $\{\mathbf{e}_k\}$ een orthonormale basis in **H** zijn. Definieer het 'rationale opspansel' W van deze orthonormale basis door $W = \{(\alpha_1 + i\beta_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha_n + i\beta_n)\mathbf{e}_n \,\big|\, \alpha_1, \cdots \alpha_n,\ \beta_1, \cdots \beta_n\ \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$. Omdat voor iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ geldt $\| \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\mathbf{e}_k \| \to 0$ als $N \to \infty$, en de coëfficienten $(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})$ willekeurig goed

benaderd kunnen worden met rationale complexe getallen, is W dicht in $\mathbf{H}$.
ii) Laat S een orthogonaal stelsel zijn. Als we iedere $\mathbf{x} \in S$ vervangen door $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, dan wordt S een orthonormaal stelsel. De afstand tussen twee willekeurige elementen $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ van S is gelijk aan $\sqrt{2}$ omdat $(\mathbf{x} - by, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2$. Beschouw nu $\{B(\mathbf{x}, \frac{1}{2}\sqrt{2})\}$, dat is de set van open ballen met straal $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ rond alle $\mathbf{x} \in S$. Deze ballen hebben, vanwege de onderlinge afstand $\sqrt{2}$ der $\mathbf{x}$'en, geen enkele gemeenschappelijk punt. Als er nu in $\mathbf{H}$ een aftelbare dichte deelverzameling W is, dan moet zich in elk van deze ballen minstens 1 punt van W bevinden. Dit impliceert dat het stelsel S ten hoogste aftelbaar kan zijn.

□

4.1.15 Definitie (Hilbertruimte isomorphisme)
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}_1$ met inproduct $(\cdot, \cdot)_1$. Een Hilbertruimte $\mathbf{H}_2$ met inproduct $(\cdot, \cdot)_2$.
We noemen $\mathbf{H}_1$ *isomorf* met $\mathbf{H}_2$ als er een lineaire bijectie $\mathcal{T}\colon \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ is, zodat $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}_1 \left[(\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathcal{T}\mathbf{y})_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_1 \right]$. (Merk op dat $\|\mathcal{T}\| = 1$.)

4.1.16 Stelling
Gegeven: Een separabele Hilberruimte $\mathbf{H}$.

i) Als $\mathbf{H}$ *∞-dimensionaal is, dan is* $\mathbf{H}$ *isomorf met* $\ell_2(\mathbb{N})$.

ii) Als $\mathbf{H}$ *N-dimensionaal is, dan is* $\mathbf{H}$ *isomorf met* $\mathbb{C}^N$.

Bewijs.
i) Op grond van de voorafgaande stelling kan een orthonormale basis ten hoogste een aftelbaar aantal elementen bevatten. Nummer deze bijvoorbeeld met de natuurlijke getallen. Noteer de basis dan met $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Met Stelling 4.1.8.ii zien we dan dat er bij iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ een kolom $\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N})$ hoort en omgekeerd. Als op deze manier $\underline{x} = \mathcal{T}\mathbf{x}$ en $\underline{y} = \mathcal{T}\mathbf{y}$, dan volgt door uitschrijven $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\underline{x}, \underline{y})$.
ii) Als $\dim \mathbf{H} = N$ gaat de beschouwing onder i) door met $\ell_2(\mathbf{N})$ vervangen door $\mathbb{C}^N$. □

Deze paragraaf wordt besloten met een volledigheidsresultaat voor de operatorruimten, ingevoerd in subsectie 3.2.

4.1.17 Stelling
Gegeven: Een genormeerde ruimte $\mathbf{E}_1$ *en een Banachruimte* $\mathbf{E}_2$.
Er geldt:

i) De ruimte van begrensde lineaire operatoren $\mathbf{B}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$ *is een Banachruimte.*

ii) De ruimte van compacte lineaire operatoren $\mathbf{C}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$ *is een gesloten lineaire deelruimte in* $\mathbf{B}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$*, dus zelf een Banachruimte.*

iii) Als $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$ *dan zijn* $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ *en* $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ *Banachruimten.*

iv) De duale ruimte $\mathbf{E}^\star$ *is een Banachruimte. (Ook in het geval dat* $\mathbf{E}$ *niet volledig is.)*

Bewijs.
i) $\mathbf{B}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$ is ingevoerd in Definitie 3.2.1. In Stelling 3.2.2 zijn een aantal eigenschappen opgesomd. Wij kunnen hier volstaan met de volledigheid te bewijzen.
Stap 1: Beschouw een Cauchyrij $\{\mathcal{L}_n\} \subset \mathbf{B}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$. Kies $\mathbf{x}_\in\mathbf{E}_1$ willekeurig doch vast. De rij $\{\mathcal{L}_n\mathbf{x}\}$ is dan een Cauchyrij in $\mathbf{E}_2$. Immers $\|\mathcal{L}_m\mathbf{x}-\mathcal{L}_n\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{L}_m - \mathcal{L}_n\|\|\mathbf{x}\| \to 0$ als $m, n \to \infty$. Omdat $\mathbf{E}_2$ volledig is, is er een $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_2$ met $\mathcal{L}_n\mathbf{x} \to \mathbf{y}$. Aldus definiëren we de afbeelding $\mathcal{L}\colon \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$ door $\mathcal{L}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Deze afbeelding is lineair.
Stap 2: Omdat $\{\mathcal{L}_n\}$ een Cauchyrij is in $\mathbf{B}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$ is het een begrensde rij. We definieren $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\mathcal{L}_n\|$. De bij stap 1 gedefinieerde lineaire afbeelding $\mathcal{L}$ is begrensd want $\|\mathcal{L}\mathbf{x}\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}_n\mathbf{x}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{L}_n\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$. Dus $\mathcal{L} \in \mathbf{B}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$.
Stap 3: Nog aan te tonen $\|\mathcal{L}_n - \mathcal{L}\| \to 0$. Neem daartoe $\mathbf{x}$ met $\|\mathbf{x}\| = 1$ en neem $\varepsilon > 0$. Dan geldt $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N\ \ \|\mathcal{L}_m - \mathcal{L}_n\| > \varepsilon$. Dan ook $\forall\ m, n \geq N\ \ \|\mathcal{L}_m\mathbf{x} - \mathcal{L}_n\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{L}_m - \mathcal{L}_n\|\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$. Houd m vast en neem de limiet voor $n \to \infty$, dan volgt $\forall m > N\ \forall \mathbf{x}$, $\|\mathbf{x}\| = 1\ \ \|\mathcal{L}_m\mathbf{x} - \mathcal{L}\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$. Blijkbaar $\forall m > N\ \ \|\mathcal{L}_m - \mathcal{L}\| \leq \varepsilon$.
ii) Beschouw een rij compacte operatoren $\{\mathcal{T}_n\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$ en een operator $\mathcal{T} \in \mathbf{B}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$, zodat $\|\mathcal{T}_n - \mathcal{T}\| \to 0$. We moeten laten zien dat voor elke begrensde rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{E}_1$, de rij $\{\mathcal{T}\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{E}_2$ een convergente deelrij bevat.
Stap 1: Noteer $\sup\|\mathbf{x}_n\| = M$. Omdat $\mathcal{T}_1$ compact is, is er een deelrij $\{\mathbf{x}_n^{(1)}\} \subset \{\mathbf{x}_n\}$ zodat $\{\mathcal{T}_1\mathbf{x}_n^{(1)}\}$ een convergente rij is in $\mathbf{E}_2$. De operator $\mathcal{T}_2$ is compact. Er is dan een deelrij $\{\mathbf{x}_n^{(2)}\} \subset \{\mathbf{x}_n^{(1)}\}$ zodat $\{\mathcal{T}_2\mathbf{x}_n^{(2)}\}$ een convergente rij is in $\mathbf{E}_2$. We zetten dit inductief voort: De operator $\mathcal{T}_k$ is compact. Er is dan een deelrij $\{\mathbf{x}_n^{(k)}\} \subset \{\mathbf{x}_n^{(k-1)}\}$ zodat $\{\mathcal{T}_k\mathbf{x}_n^{(k)}\}$ een convergente rij is in $\mathbf{E}_2$. We beschouwen nu de diagonaalrij $\{\mathbf{x}_n^{(n)}\}$. Dan is $\forall k \in \mathbb{N}$ de rij $\{\mathcal{T}_k\mathbf{x}_n^{(n)}\}$ convergent, op den duur is deze immers een deelrij van $\{\mathcal{T}_k\mathbf{x}_n^{(k)}\}$.
Stap 2: Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ met $\|\mathcal{T}_N - \mathcal{T}\| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n, m > N_1\ \ \|\mathcal{T}_N\mathbf{x}_n^{(n)} - \mathcal{T}_N\mathbf{x}_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dan geldt $\forall n, m > \max\{N, N_1\}$ dat

$\|\mathcal{T}\mathbf{x}_n^{(n)} - \mathcal{T}\mathbf{x}_m^{(m)}\| \leq \|\mathcal{T}\mathbf{x}_n^{(n)} - \mathcal{T}_N\mathbf{x}_n^{(n)}\| + \|\mathcal{T}_N\mathbf{x}_n^{(n)} - \mathcal{T}_N\mathbf{x}_m^{(m)}\| + \|\mathcal{T}_N\mathbf{x}_m^{(m)} - \mathcal{T}\mathbf{x}_m^{(m)}\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Onze conclusie is dat $\{\mathcal{T}\mathbf{x}_n^{(n)}\} \subset \{\mathcal{T}\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{E}_2$ een Cauchyrij is. Omdat $\mathbf{E}_2$ volledig is, is deze Cauchyrij convergent. Merk op dat van $\mathbf{E}_1$ geen volledigheid verondersteld is. In bovenstaande bewijzen hebben we dat ook niet nodig.
iii) Bijzonder geval van i) en ii).
iv) Bijzonder geval van i). We nemen $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$ en $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}$. Merk op dat $\mathbb{C}$ volledig is. □

4.1.18 Stelling (De Neumann Reeks)
Gegeven: Een Banachruimte $\mathbf{E}$. *Een begrensde operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$ *met* $\|\mathcal{A}\| < 1$.
Dan geldt: De operator $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ *heeft een begrensde inverse. Deze inverse wordt voorgesteld door* $(\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k$.

Bewijs. De reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k$ is absoluut convergent want $\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{A}\|^k = \frac{1}{1-\|\mathcal{A}\|} < \infty$. Omdat $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ volledig is volgens Stelling 4.1.17 de reeks dan convergent. Als we vervolgens de reeks ter rechterzijde of ter linkerzijde met $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ vermenigvuldigen komt er $\sum_{k=0}^{\infty}\{\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^{k+1}\} = \mathcal{I}$. □

Analoog aan het eindig dimensionale geval kun je proberen een begrensde lineaire operator door een $\infty\times\infty$-matrix voor te stellen. Dit lukt gedeeltelijk.

4.1.19 Stelling ($\infty \times \infty$-matrices)
Gegeven: Een separabele Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$. *Een orthonormale basis* $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$.
Definieer de matrix $[A_{ij}]$ *door* $A_{ij} = (\mathbf{e}_i\,, \mathcal{A}\mathbf{e}_j)$. *Schrijf* $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\mathbf{e}_j$ *met* $x_j = (\mathbf{e}_j\,, \mathbf{x})$.
Dan geldt:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}\, x_j\,\}\mathbf{e}_i.$$

Bewijs. Voor $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ kunnen we schrijven $\mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty}(\mathbf{e}_i, \mathcal{A}\mathbf{x})\mathbf{e}_i$. Voor de coëfficiënten in deze reeks kunnen we schrijven $(\mathbf{e}_i, \mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_i, \mathcal{A}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})\mathbf{e}_j) =$

$(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})\mathcal{A}\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})(\mathbf{e}_i, \mathcal{A}\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}\, x_j$. Bij deze afleiding is druk gebruik gemaakt van de lineariteit en de continuiteit van $\mathcal{A}$.

$\square$

Dit resultaat lijkt mooier dan het is. De vraag die zich aandient is: Hoe kun je aan een $\infty \times \infty$-matrix $[A_{ij}]$ zien of het een begrensde lineaire afbeelding is van $\ell_2(\mathbb{N})$ naar zichzelf?
Noodzakelijk is natuurlijk dat het een begrensde matrix is, en ook dat al zijn kolommen in $\ell_2(\mathbb{N})$ zitten. Deze voorwaarden zijn echter niet voldoende. Voldoende voorwaarden dat $[A_{ij}]$ een begrensde operator is, zijn de Hilbert-Schmidt conditie $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |A_{ij}|^2 < \infty$, of dat $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup_{|i-j|=k} |A_{ij}| < \infty$. Deze voorwaarden zijn echter geen van beide noodzakelijk. Voorwaarden die zowel noodzakelijk als voldoende zijn voor begrensdheid zijn tot op heden niet gevonden.

4.2 Convexiteit en projecties

Veel meetkundige ideeën uit de gewone drie dimensionale meetkunde, denk aan zaken als projecties en afstandsbepalingen tussen verzamelingen , blijken ook betekenis te hebben in (∞-dimensionale) Hilbertruimten. We kunnen dus ook in zulke 'grote' ruimten meetkundige intuities opbouwen.

4.2.1 Definitie (Convexe Verzamelingen)

Beschouw: Een reële of complexe vectorruimte $\mathbf{E}$. Een deelverzameling $\mathbf{V} \subset \mathbf{E}$.
De verzameling $\mathbf{V}$ heet *convex* als

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}\, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}\, \forall \alpha \in [0,1] \big[\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in \mathbf{U}\big].$$

In woorden: De verbindingsrechte tussen twee punten in $\mathbf{V}$ zit, in zijn geheel, in $\mathbf{V}$.

4.2.2 Opmerking

Belangrijke voorbeelden van convexe verzamelingen zijn: Lineaire Deelruimten, Hypervlakken, Bollen, Kubussen...

4.2.3 Stelling (Closest point property)

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een gesloten en convexe deelverzameling* $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$. *Een punt* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.

i) Dan is er precies één punt $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *zodat* $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{V}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. *In woorden: Er is precies één punt in* $\mathbf{V}$ *waar de kortste afstand tot* $\mathbf{x}$ *wordt aangenomen.*

ii) In het geval dat $\mathbf{H}$ *een reële Hilbertruimte is, wordt het meest nabijgelegen punt* $\mathbf{v}$ *gekarakeriseerd door* $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{V} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{z} - \mathbf{v}) \leq 0 \right]$.

Bewijs.
i) We bewijzen eerst het bestaan van een meest nabij gelegen punt. Schrijf $d = \inf_{\mathbf{z} \in \mathbf{V}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$. Kies een rij $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathbf{V}$ zodat $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_n\| = d$. Omdat $\forall m, n \in \mathbb{N}\ \frac{1}{2}(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_n) \in \mathbf{V}$, geldt $\|\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_n)\| \geq d$. Schrijf $\|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n\|^2 = \|(\mathbf{x} - \mathbf{v}_m) - (\mathbf{x} - \mathbf{v}_n)\|^2 + \|(\mathbf{x} - \mathbf{v}_m) + (\mathbf{x} - \mathbf{v}_n)\|^2 - 4\|\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_n)\|^2 = 2\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_m\|^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_n\|^2 - 4\|\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_n)\|^2$. Het laatste =teken volgt door toepassen van de parallelogramwet. De eerste twee termen naderen elk naar $2d^2$ als $m, n \to \infty$. De derde term is $\leq -4d^2$. Blijkbaar $\|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n\|^2 \to 0$ als $m, n \to \infty$ en is $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathbf{V}$ dus een Cauchyrij. Omdat $\mathbf{H}$ volledig is, is er een $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ voorhanden zodat $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}$. Omdat $\mathbf{V}$ gesloten is geldt bovendien $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Tenslotte $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{x} - \lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_n\| = d$. Hiermee is de existentie van het meest nabije punt aangetoond. Nu nog de uniciteit ervan: Stel dat ook in $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ de kortste afstand d tot $\mathbf{x}$ wordt aangenomen. Dan is ook $\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in \mathbf{V}$ en $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|^2 - 4\|\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$. Blijkbaar geldt $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
ii) Stel dat de ongelijkheid geldt. Dan $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{V}\ \ \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 = 2(\mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{z} - \mathbf{v}) - \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|^2 \leq 0$. Dus $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{V}\ \ \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$.
Nu bewijzen we de omkering, dus dat voor het meest nabij gelegen punt $\mathbf{v}$ de ongelijkheid geldt. Laat $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$. Omdat $\mathbf{V}$ convex is, geldt $\forall \lambda \in (0, 1)\ \ \lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. We hebben $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{v}) - \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{v})\|$. Dit kwadrateren we. Omdat $\mathbf{H}$ reëel is wordt dit $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|^2 - 2\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{z} - \mathbf{v}) + \lambda^2\|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|^2$. Dus $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{V}\ \ (\mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{z} - \mathbf{v}) \leq \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|^2$. Neem nu $\lim_{\lambda\to 0}$, dan volgt de gewenste ongelijkheid.
De meetkundige betekenis is dat je door $\mathbf{v}$ een hypervlak kunt aanbrengen zodat $\mathbf{x}$ aan een kant van dit vlak zit en $\mathbf{V}$ aan de andere kant. De hoek tusschen de vectoren $\mathbf{x} - \mathbf{v}$ en $\mathbf{z} - \mathbf{v}$ is stomp. Tenslotte, als het 'scheidend hypervlak' uniek is dan staat $\mathbf{x} - bv$ loodrecht op dit hypervlak. □

4.2.4 Definitie

Gegeven: Als in voorgaande stelling.
De toevoeging $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$ heet *projectieafbeelding* of kortweg *projectie* op $\mathbf{V}$.
Merk op dat geldt: $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})) = \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$. In woorden: $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}$ is *idempotent*.

4.2.5 Definitie (Orthogonale complement)
Uitgangspunt: Inproductruimte $\mathbf{H}$. Deelverzamelingen $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$ en $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$.

a) $\mathbf{a} \in \mathbf{H}$ heet *orthogonaal*, of ook wel *loodrecht*, op $\mathbf{U}$, notatie: $\mathbf{a} \perp \mathbf{U}$, als $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{U}$ geldt $(\mathbf{a}\,, \mathbf{x}) = 0$.

b) $\mathbf{U} \perp \mathbf{V}$ betekent $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{U}\ \forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ geldt dat $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

c) De verzameling $\mathbf{U}^{\perp} = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in \mathbf{H}, \mathbf{x} \perp \mathbf{U}\}$ heet het *orthogonaal complement*, of ook *orthoplement* van $\mathbf{U}$.

4.2.6 Opmerkingen

a) $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$.

b) $\mathbf{U} \perp \mathbf{V} \;\Rightarrow\; \big[\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}\big]$ of $\big[\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \emptyset\big]$.

c) $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = \mathbf{H}, \qquad \mathbf{H}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

d) $\mathbf{U}^{\perp}$ is altijd een lineaire deelruimte. Dus ook als $\mathbf{U}$ dat niet is.

4.2.7 Stelling
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een deelverzameling* $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$.
Dan geldt: $\mathbf{U}^{\perp}$ *is een gesloten lineaire deelruimte in* $\mathbf{H}$.

Bewijs.
$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}^{\perp}$ wil zeggen $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\ \ (\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$ en $(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = 0$. Dan ook $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\ \ (\mathbf{u}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = 0$. Dus $\mathbf{U}^{\perp}$ is een lineaire deelruimte. Om de geslotenheid te bewijzen beschouwen we een rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{U}^{\perp}$ met $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x} \in \mathbf{H}$. Dan ligt ook $\mathbf{x} \in \mathbf{U}^{\perp}$. Immers $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\ \ (\mathbf{u}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n) = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{u}, \mathbf{x}_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. $\square$

4.2.8 Stelling
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een gesloten lineaire deelruimte* $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$.
Dan geldt:

i) $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^{\perp} \;\Leftrightarrow\; \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\Big[\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{w}\|\Big]$.

ii) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\ \exists \mathbf{u} \in \mathbf{U}\ \exists \mathbf{w} \in \mathbf{U}^{\perp}\Big[\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}\Big]$

iii) $\mathbf{U}^{\perp\perp} = \mathbf{U}$

iv) $\mathbf{H} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$. *Dit betekent dat iedere* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ *op precies één manier geschreven kan worden als* $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ *met* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *en* $\mathbf{y} \in \mathbf{U}^\perp$. *In notatie met projectieafbeeldingen:* $\mathbf{y} = \mathcal{P}_\mathbf{U}\mathbf{x}$ *en* $\mathbf{z} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}^\perp}\mathbf{x}$.

Bewijs.
i$\Rightarrow$) Met Pythagoras $\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \geq \|\mathbf{w}\|^2$.
ii$\Leftarrow$) Stel dat de ongelijkheid geldt $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Dan ook $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\|\mathbf{w} - \lambda\mathbf{u}\|^2 \geq \|\mathbf{w}\|^2$. Schrijf dit uit als inproducten. Er komt $-2\,\mathrm{Re}[\lambda(\mathbf{w},\mathbf{u})] + |\lambda|^2\|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$. Kies $\lambda = tz$ met $t > 0$ en $z \in \mathbb{C}$ zodanig dat $z(\mathbf{w},\mathbf{u}) = |(\mathbf{w},\mathbf{u})|$. Dan staat er $-2t|(\mathbf{w},\mathbf{u})| + t^2\|\mathbf{u}\|^2$. Deel door t en neem de limiet voor $t \to 0$. Dan volgt $(\mathbf{w},\mathbf{u}) = 0$.
ii) Laat $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. Omdat $\mathbf{U}$ (ook) een gesloten convexe deelverzameling is, is er een meest nabij $\mathbf{x}$ gelegen $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Schrijf $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$. Voor alle $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$ is ook $\mathbf{u} + \mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$. Omdat $\mathbf{u}$ het dichtst bij $\mathbf{x}$ ligt geldt $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x} - (\mathbf{u} + \mathbf{u}_1)\|$. Dus $\forall \mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$ $\|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_1\|$. Volgens i) van deze stelling is dan $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^\perp$.
iii) Enerzijds: Als $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ dan $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}^\perp$ $(\mathbf{u},\mathbf{w}) = 0$. Dus $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\perp\perp}$. Dus $\mathbf{U} \subset \mathbf{U}^{\perp\perp}$.
Anderzijds: Stel $\mathbf{x} \in \mathbf{U}^{\perp\perp}$. Schrijf $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ met $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ en $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^\perp$. Omdat $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{U}^{\perp\perp}$, is ook $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\perp\perp}$. Blijkbaar $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^\perp \cap \mathbf{U}^{\perp\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Dus $\mathbf{x} = \mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Dus $\mathbf{U}^{\perp\perp} \subset \mathbf{U}$. Samengevat: $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\perp\perp}$.
iv) Volgt uit ii) en iii). □

4.3 De representatiestelling van Riesz

In hoofdstuk 3 hebben we (begrensde) lineaire functionalen beschouwd op genormeerde vectorruimten en in het bijzonder op inproductruimten. Uit het 1e jaar is bekend dat een lineaire functie $f(\underline{x})$ op een eindig-dimensionale vectorruimte altijd kan worden voorgesteld door een inproduct met een vaste vector $\underline{a}$, zeg. Dus $f(\underline{x}) = (\underline{a}\,,\,\underline{x})$. Dit nu blijkt ook in ∞-dimensionale Hilbertruimten te kunnen. Althans voor BEGRENSDE lineaire functionalen!

4.3.1 Stelling (Riesz)

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een begrensde lineaire functionaal* $f\colon \mathbf{H} \to \mathbb{C}$.
Dan geldt:

$$\exists! \mathbf{a} \in \mathbf{H}\, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\, \big[f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\,,\,\mathbf{x})\big].$$

Voor de norm geldt $\|f\| = \|\mathbf{a}\|$.

Bewijs.
Eerst bewijzen we dat er zo'n $\mathbf{a}$ bestaat. Beschouw daartoe de nulruimte $\mathbf{N}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H} \,|\, f(\mathbf{x}) = 0\}$. Als $\mathbf{N}(f) = \mathbf{H}$, dan hebben we blijkbaar de 0-functionaal te pakken en voldoet $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Veronderstel dus $\exists \mathbf{z}\; f(\mathbf{z}) \neq 0$. Omdat $\mathbf{N}(f)$ een gesloten lineaire deelruimte is (Stelling 3.1.6) kunnen we $\mathbf{z}$ opsplitsen: $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_1$, met $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{N}(f)$ en $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{N}(f)^\perp$. Neem nu een willekeurige $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. Splits die ook op: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$, met $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{z}_1)}\mathbf{z}_1$ en $\mathbf{x}_1 = \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{z}_1)}\mathbf{z}_1$. Narekenen leert dat inderdaad $f(\mathbf{x}_0) = 0$ en $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{N}(f)^\perp$. Uit $\mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{z}_1)}\mathbf{z}_1 \perp \mathbf{z}_1$ volgt $(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\frac{(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_1)}{f(\mathbf{z}_1)}$. Neem nu $\mathbf{a} = \frac{\overline{f(\mathbf{z}_1)}}{\|\mathbf{z}_1\|^2}\mathbf{z}_1$. Dan geldt $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\; f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$.
Nu de uniciteit van $\mathbf{a}$. Veronderstel $\exists \mathbf{b} \in \mathbf{H}\, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\; f(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}, \mathbf{x})$. Dan moet $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\; (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$. Op grond van de derde eigenschap van het inproduct moet dan $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
Tenslotte: Met Cauchy-Schwarz zien we $|f(\mathbf{x})| = |(\mathbf{a}, \mathbf{x})| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{x}\|$. Dus moet $\|f\| \leq \|\mathbf{a}\|$. Omdat $f(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^2$ zie je dat niet kan gelden $\|f\| < \|\mathbf{a}\|$. Dan moet wel $\|f\| = \|\mathbf{a}\|$. □

4.3.2 Opmerkingen i) In het bewijs zie je dat $\mathbf{N}(f)^\perp$ wordt opgespannen door $\mathbf{z}_1$ in z'n eentje. Dus $\dim \mathbf{N}(f)^\perp = 1$. Dus buiten $\mathbf{N}(f)$ is er nog maar één dimensie over. Dit wordt wel verwoord door te zeggen:
$\mathbf{N}(f)$ heeft *co-dimensie 1* .
ii) De duale ruimte $\mathbf{H}^\star$ van $\mathbf{H}$ is, zoals we zagen een Banachruimte, Stelling 4.1.17.(iv). De toevoeging $f \mapsto \mathbf{a}$ is anti-linieair. Dat wil zeggen $(\alpha f + \beta g) \mapsto (\overline{\alpha}\mathbf{a} + \overline{\beta}\mathbf{b})$. Blijkbaar staan $\mathbf{H}$ en $\mathbf{H}^\star$ in 1-1-correspondentie via deze toevoeging. Sommigen zeggen zelfs dat $\mathbf{H}$ *gelijk* is aan haar duale $\mathbf{H}^\star$. Deze 'identificatie' is niet altijd verstandig en ligt ook niet altijd voor de hand zoals het volgende voorbeeld laat zien.

4.3.3 Voorbeeld Beschouw de Sobolevruimte $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ zoals ingevoerd in 4.1.11. In plaats van $\mathcal{D}u$ voor de gegeneraliseerde afgeleide van u gebruiken we hier de klassieke $'$-notatie, dus $\mathcal{D}u = u'$. De inproductdefinitie luidt dan $(u, v)_{\mathbb{H}^1} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\overline{u(x)}v(x) + \overline{u'(x)}v(x)\}\, dx$. Alle functies in $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ zijn continu, dus bij vast gekozen $c \in \mathbb{R}$ is de puntevaluatie $u \mapsto \delta_c(u) = u(c)$ goedgedefinieerd. Dat δ_c een begrensde lineaire functionaal is op $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ bewijst de volgende schatting: $|u(c)|^2 = \int_{c-1}^{c} \{(x - (c-1))\overline{u(x)}u(x)\}'\, dx =$

$$= \int_{c-1}^{c} \{|u(x)|^2 + (x - (c-1))[\overline{u'(x)}u(x) + \overline{u(x)}u'(x)]\}\, dx \leq$$

$$\leq \int_{c-1}^{c} \{|u(x)|^2 + [|\overline{u'(x)}||u(x)| + |\overline{u(x)}||u'(x)|]\}\, dx \leq \int_{c-1}^{c} \{2|u(x)|^2 + |u'(x)|^2\}\, dx \leq$$

$$\leq 2 \int_{c-1}^{c} \{|u(x)|^2 + |u'(x)|^2\}\, dx \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \{|u(x)|^2 + |u'(x)|^2\}\, dx = 2\|u\|_{\mathbb{H}^1}^2.$$

Blijkbaar geldt $\|\delta_c\| \leq \sqrt{2}$.

Volgens de representatiestelling van Riesz moet er een functie $G_c(x) \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ bestaan zodat $\forall u \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ geldt $\delta_c(u) = (G_c, u)_{\mathbb{H}^1}$. Er blijkt te gelden $G_c(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-c|}$. Bij het controleren hiervan is het verstandig het integratieinterval $(-\infty, \infty)$ op te splitsen in de intervallen $(-\infty, c)$ en (c, ∞) en partiële integratie toe te passen. Ten slotte volgt met de voorafgaande stelling nog $\|\delta_c\| = \|G_c\|_{\mathbb{H}^1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opmerking: De puntevaluatie δ_c is ook begrensd op Sobolevruimten $\mathbb{H}^1((a, b))$ met (a, b) een begrensd interval en $c \in (a, b)$. In plaats van het integratieinterval $(c-1, c)$ in bovenstaand bewijs moet dan een integratieinterval $(c-\alpha, c)$ genomen worden met $0 < \alpha < \frac{1}{2}(b - a)$. Anders kun je niet 'overal komen'.

Hoofdstuk 5 Operatoren in Hilbertruimten

5.1 Sesquilineaire Functionalen

Uit het 1e jaar is de theorie van kwadratische oppervlakken en de relatie hiervan tot lineaire afbeeldingen bekend. We willen dit moois ook tot onze beschikking krijgen in Hilbertruimten.

5.1.1 Definitie (Sesquilineaire functionalen)
Gegeven: Een complexe vectorruimte $\mathbf{E}$.
We noemen een functie $\phi\colon\ \mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbb{C}$ een *sesquilineaire functionaal op* $\mathbf{E}$ als $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ \ \forall\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{E}$ geldt

$$\phi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\,,\,\mathbf{z})=\overline{\alpha}\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{z})+\overline{\beta}\phi(\mathbf{y}\,,\,\mathbf{z}),$$

$$\phi(\mathbf{x}\,,\,\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z})=\alpha\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})+\beta\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{z}).$$

5.1.2 Opmerkingen Men spreekt van een *bilineaire functionaal* als in bovenstaande definitie de complexe conjugatiestreep ontbreekt. Als de vectorruimte $\mathbf{E}$ reëel genomen wordt, dan is de benaming bilineair natuurlijk steeds van toepassing.
Een functie ϕ als boven wordt ook wel een *2-tensor* genoemd.
Merk tenslotte op dat de sesquilineaire functionalen op $\mathbf{E}$ met zijn allen, op voor de hand liggende wijze, een vectorruimte vormen.

5.1.3 Voorbeelden

a) Als $\mathbf{E}$ een inproductruimte is, dan is dat inproduct zelf een sesquilineaire functionaal.

b) Stel dat $\mathbf{E}$ een inproductruimte is met inproduct $(\cdot,\cdot)$. Stel dat $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ lineaire afbeeldingen van $\mathbf{E}$ naar $\mathbf{E}$ zijn. Dan zijn $\phi_1(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})=(\mathcal{A}\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})$, $\phi_2(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})=(\mathbf{x}\,,\,\mathcal{B}\mathbf{y})$ en $\phi_3(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})=(\mathcal{A}\mathbf{x}\,,\,\mathcal{B}\mathbf{y})$ alledrie sesquilineaire functionalen.

c) Stel dat $F\colon\mathbf{E}\to\mathbb{C}$ en $G\colon\mathbf{E}\to\mathbb{C}$ lineaire functionalen zijn. Dan is $\overline{F}\otimes G$, gedefinieerd door $(\overline{F}\otimes G)(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})=\overline{F(\mathbf{x})}G(\mathbf{y})$, een sesquilineaire functionaal.

5.1.4 Definitie
Gegeven: Een sesquilineaire functionaal ϕ op een complexe vectorruimte $\mathbf{E}$.

a) ϕ heet *symmetrisch* als $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}\ \big[\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) = \overline{\phi(\mathbf{y}\,,\,\mathbf{x})}\big]$.

b) ϕ heet *positief* als $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \big[\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}) \geq 0\big]$.

c) ϕ heet *strict positief* als $\forall \mathbf{x} \neq 0 \big[\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}) > 0\big]$.

d) Als $\mathbf{E}$ bovendien genormeerd verondersteld wordt, dan heet ϕ *begrensd* als

$$\exists K > 0\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}\ \big[\, |\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})| \leq K \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \big].$$

De kleinste constante K waarvoor dit lukt heet de *norm* $\|\phi\|$ van ϕ. Dan is dus $K = \|\phi\| = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|=1} |\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y})|$.

5.1.5 Voorbeelden
Als in het vorige voorbeeld de operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ en de functionalen F en G begrensd gekozen worden, dan zijn alle daar genoemde sesquilineaire functionalen begrensd.
$\overline{F} \otimes F$ en het inproduct $(\cdot\,,\,\cdot)$ zijn symmetrisch.
$\overline{F} \otimes F$ is positief. Het inproduct is strict positief.

5.1.6 Definitie (Kwadratische vormen)
Gegeven: Een complexe vectorruimte $\mathbf{E}$. Een functie $\Phi\colon \mathbf{E} \to \mathbb{C}$.

a) Φ heet een *kwadratische vorm* als

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \big[\, \Phi(\alpha \mathbf{x}) = |\alpha|^2 \Phi(\mathbf{x})\, \big].$$

b) Als $\mathbf{E}$ bovendien genormeerd verondersteld wordt, dan heet Φ *begrensd* als

$$\exists L > 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \big[\, |\Phi(\mathbf{x})| \leq L \|\mathbf{x}\|^2\, \big].$$

De kleinste constante L waarvoor dit lukt heet de *norm* $\|\Phi\|$ van Φ. Dan is dus $L = \|\Phi\| = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} |\Phi(\mathbf{x})|$.

Bij iedere sesquilineaire functionaal ϕ kan de *geasocieerde kwadratische vorm* Φ gedefinieerd worden door $\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x})$. De volgende stelling begint met een verband tussen sesquilineaire functionalen en de ermee geassocieerde kwadratische vorm.

5.1.7 Stelling (Polarisatie-identiteit)
Gegeven: Een sesquilineaire functionaal ϕ op een complexe (!) vectorruimte $\mathbf{E}$*. De ermee geassocieerde quadratische vorm* Φ*.*

a) Het verband tussen ϕ en Φ wordt gegeven door

$$4\phi(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\Phi(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) + i\Phi(\mathbf{x}-i\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{E}.$$

b) Laat ϕ_1 en ϕ_2 sesquilineaire functionalen op $\mathbf{E}$ *zijn. Dan*

$$\big[\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} :\ \phi_1(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x},\mathbf{x})\big] \Leftrightarrow \big[\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{E} :\ \phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y})\big].$$

c) $\big[\phi$ *is symmetrisch*$\big] \Leftrightarrow \big[\Phi$*is reëelwaardig*$\big]$.

d) Veronderstel dat $\mathbf{E}$ *een complexe(!) inproductruimte is. Laat $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ lineaire afbeeldingen in* $\mathbf{E}$ *zijn. Dan*

$$\big[\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} :\ (\mathcal{A}\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}) = (\mathcal{B}\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x})\big] \Leftrightarrow \big[\,\mathcal{A} = \mathcal{B}\,\big].$$

Bewijs.
a) Het bewijs vertoont sterke gelijkenis met dat van Stelling 2.4.1.a.

b) Blijkbaar zijn de geasocieerde quadratische vormen gelijk: $\Phi_1 = \Phi_2$, zeg. Volgens onderdeel a) van de stelling moet dan ook $\phi_1 = \phi_2$.

c$\Rightarrow$) Als $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\phi(\mathbf{y},\mathbf{x})}$, dan $\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \overline{\phi(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \overline{\Phi(\mathbf{x})}$. Dus $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

c$\Leftarrow$) Laat $\Phi(\mathbf{x}) = \overline{\Phi(\mathbf{x})}$. Definieer de sesquilineaire vorm ψ door $\psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\phi(\mathbf{y},\mathbf{x})}$. Dan geldt voor de geasocieerde quadratische vorm $\Psi(\mathbf{x}) = \overline{\phi(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \overline{\Phi(\mathbf{x})} = \Phi(\mathbf{x})$. Dus moet volgens b) $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\phi(\mathbf{y},\mathbf{x})}$.

d$\Leftarrow$) Triviaal.

d$\Rightarrow$) Met de polarisatie-identiteit volgt $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}\ \forall \mathbf{y} \in \mathbf{E} :\ (\mathcal{A}\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathcal{B}\mathbf{x},\mathbf{y})$. De eigenschappen van het inproduct leren ons dan dat $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} :\ \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{B}\mathbf{x}$. Dus $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. □

5.1.8 Stelling
Gegeven: Een inproductruimte $\mathbf{E}$*. Een sesquilineaire functionaal ϕ op* $\mathbf{E}$*. De bij ϕ behorende kwadratische vorm* Φ*.*

a) $\big[\,\phi$ *is begrensd*$\,\big] \quad\Leftrightarrow\quad \big[\Phi$ *is begrensd*$\big]$.
In geval van begrensdheid geldt:

$$\|\Phi\| \le \|\phi\| \le 2\|\Phi\|.$$

b) Als ϕ bovendien symmetrisch is dan $\|\phi\| = \|\Phi\|$.

c) Als ϕ gegeven is door $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y})$, met $\mathcal{A}$ een begrensde operator op $\mathbf{E}$, dan is ϕ begrensd en $\|\phi\| = \|\mathcal{A}\|$.

Bewijs.
a$\Rightarrow$) $\|\Phi\| = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} |\Phi(\mathbf{x})| = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} |\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})| \leq \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|=1} |\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \|\phi\|$
Dus $\|\phi\| < \infty \Rightarrow \|\Phi\| < \infty$.

a$\Leftarrow$) $|\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \frac{1}{4}|\Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\Phi(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - i\Phi(\mathbf{x}-i\mathbf{y})| \leq$
$\leq \frac{1}{4}\|\Phi\|\{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2\} = \|\Phi\|\{\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2\}$ (Parm wet). Dan volgt $\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|=1} |\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|=1} \|\Phi\|\{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\} = 2\|\Phi\|$.
Dit is de tweede ongelijkheid.

b) We hebben al $\|\Phi\| \leq \|\phi\|$. Nu nog met $\geq$. Omdat Φ reëel is (St 5.1.7.c) geldt $\operatorname{Re}\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\{\Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}$. Dus $|\operatorname{Re}\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{1}{4}\|\Phi\|\{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\} = \frac{1}{2}\|\Phi\|\{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\}$. Neem nu $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$ en $\theta \in \mathbb{C}$ zodat $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = |\theta| = 1$ en $|\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \theta\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Dan $|\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \theta\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}, \theta\mathbf{y}) = |\operatorname{Re}\phi(\mathbf{x}.\theta\mathbf{y})| \leq \frac{1}{2}\|\Phi\|\{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\theta\mathbf{y}\|^2\} = \|\Phi\|$. Aldus $\|\phi\| = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|=1} |\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\Phi\|$.

c) Enerzijds: $|\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |(\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathcal{A}\mathbf{y}\| \leq \|\mathcal{A}\|\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$.
Dus $\|\phi\| \leq \|\mathcal{A}\|$.
Anderzijds: $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|^2 = |(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{x})| = \phi(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \|\phi\|\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\|$. Als $\mathcal{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ volgt hieruit $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \leq \|\phi\|\|\mathbf{x}\|$. Deze ongelijkheid geldt natuurlijk ook als $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Conclusie: $\|\mathcal{A}\| \leq \|\phi\|$. □

Tot hieraantoe hebben we niet hoeven veronderstellen dat $\mathbf{E}$ een Hilbertruimte is. Als we die veronderstelling wel maken, dan zien we dat er geen andere sesquilineaire functionalen zijn dan de, in voorafgaande stelling, onder d) genoemde:

5.1.9 Stelling
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde sesquilineaire functionaal ϕ op $\mathbf{H}$.
Dan is er precies één begrensde lineaire operator $\mathcal{A} \colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, zodat $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}\ \big[\, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,\big]$ *en* $\|\mathcal{A}\| = \|\phi\|$.

Bewijs.
Voor vaste $\mathbf{x}$ is de toevoeging $\mathbf{y} \mapsto \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ een begrensde lineaire functionaal. Volgens de stelling van Riesz is er dan precies één $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{H}$ voorhanden zodat $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{H} :\ \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y})$. Deze uniek bepaalde toevoeging $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_1$ noteren

we met $\mathbf{x}_1 = \mathcal{A}(\mathbf{x})$. Resteert nu aan te tonen dat $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x})$ een begrensde lineaire afbeelding is.
De lineariteit van $\mathcal{A}$: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{H}$ en $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ geldt $(\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}), \mathbf{z}) = \phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \overline{\alpha}\phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \overline{\beta}\phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \overline{\alpha}(\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathbf{z}) + \overline{\beta}(\mathcal{A}(\mathbf{y}), \mathbf{z}) = (\alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{A}(\mathbf{y}), \mathbf{z})$. Omdat dit voor alle $\mathbf{z}$ geldt, volgt met de inproducteigenschappen $\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{A}(\mathbf{y})$, de lineariteit van $\mathcal{A}$ dus.
De begrensdheid van $\mathcal{A}$: ϕ is begrensd, dus $|(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \|\phi\|\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. Neem $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$,dan volgt $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \le \|\phi\|\|\mathbf{x}\|$. Deze ongelijkheid geldt ook als $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. We vinden zo $\|\mathcal{A}\| \le \|\phi\|$.
De gelijkheid van de normen volgt uit 5.1.8.c. □

5.1.10 Definitie (Coërcieve Functionalen)
Gegeven: Een sesquilineaire functionaal ϕ op een genormeerde ruimte $\mathbf{E}$.
ϕ heet *coërcief* als

$$\exists K > 0 \, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} \left[|\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})| \ge K\|\mathbf{x}\|^2 \right].$$

5.1.11 Voorbeelden

a) Beschouw een continue functie $w\colon [0,1] \to [0, \infty)$ met de eigenschap $\min_{0 \le t \le 1} w(t) = K > 0$. Dan is $\phi\colon \mathbb{L}_2((0,1)) \times \mathbb{L}_2((0,1)) \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$\phi(f\,,\,g) = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) w(t)\, dt,$$

een coërcieve, begrensde sesquilineaire functionaal op $\mathbb{L}_2((0,1))$.

b) Beschouw $\psi\colon \mathbb{H}^1((-1,1)) \times \mathbb{H}^1((-1,1)) \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$\psi(u, v) = \int_{-1}^1 \{a(x)\overline{Du(x)}Dv(x) \;+\; c(x)\overline{u(x)}v(x)\}\, dx.$$

Hierin zijn de (vaste) coefficienten a en c continue functies op $[-1,1]$. Als er een getal $\gamma > 0$ bestaat zodat $\forall x \in [-1,1]$ geldt $a(x) > \gamma$ en $c(x) > \gamma$, dan is ψ een coërcieve begrensde sesquilineaire functionaal op $\mathbb{H}^1((-1,1))$.

5.1.12 Stelling (Lax-Milgram, 1954)
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een coërcieve begrensde sesquilineaire functionaal* ϕ *op* $\mathbf{H}$. *Een continue lineaire functionaal* F *op* $\mathbf{H}$.
Dan geldt:

$$\exists!\, \mathbf{u} \in \mathbf{H} \, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H} \left[\phi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \right]$$

Bewijs.
Volgens Stelling 5.1.9 is er precies een begrensde lineaire operator $\mathcal{A}\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, zodat $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{x})$. Verder is er volgens de Stelling van Riesz precies een $\mathbf{w} \in \mathbf{H}$ zodat $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}, \mathbf{x})$. Als we dus bij $\mathbf{w} \in \mathbf{H}$ precies een $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ kunnen vinden zodat $\mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{w}$ dan is ons probleem opgelost. In een aantal stappen zullen we gaan bewijzen dat $\mathcal{A}$ een begrensde inverse $\mathcal{A}^{-1}\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ heeft, zodat $\mathbf{u} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{w}$.
• $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}: \ K\|\mathbf{x}\|^2 \le \|\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})| = |(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})| \le \|\mathcal{A}\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\|$. Dus $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \ge K\|\mathbf{x}\|$. Hieruit volgt dat $\mathcal{A}$ injectief is. Immers, als $\mathcal{A}\mathbf{x}_1 = \mathcal{A}\mathbf{x}_2$, dan $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \le K\|\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\| = 0$ en dus $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.
• Het bereik $\mathbf{R}(\mathcal{A})$ is gesloten. Beschouw, om dit in te zien, $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{H}$ en $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$ met $\mathcal{A}\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$. Dan $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \le \frac{1}{K}\|\mathcal{A}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)\| \to 0$, als $n, m \to \infty$. Bijgevolg is $\{\mathbf{x}_n\}$ een Cauchyrij en $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, zeg. Dan ook $\mathcal{A}\mathbf{x}_n \to \mathcal{A}\mathbf{x}$ want $\mathcal{A}$ is continu. Dus $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Dus $\mathbf{y} \in \mathbf{R}(\mathcal{A})$.
• $\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathbf{H}$. Want stel eens dat $\mathbf{z} \perp \mathbf{R}(\mathcal{A}), \mathbf{z} \ne \mathbf{0}$. Dan $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{H}: \ (\mathcal{A}\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$. Neem $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Dan $0 = |(\mathcal{A}\mathbf{z}, \mathbf{z})| = |\phi(\mathbf{z}, \mathbf{z})| \ge K\|\mathbf{z}\|^2$. Dientengevolge $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.
• De inverse $\mathcal{A}^{-1}$ bestaat dus. Vervang in de ongelijkheid $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \ge K\|\mathbf{x}\|$ de vector $\mathbf{x}$ door $\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}$. Dan komt er $\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\| \le \frac{1}{K}\|\mathbf{y}\|$. Dit betekent dat $\mathcal{A}^{-1}$ begrensd is en dat $\|\mathcal{A}^{-1}\| \le \frac{1}{K}$. □

5.1.13 Stelling (Oplosbaarheid van Operatorvergelijkingen)
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een begrensde operator* $\mathcal{A}\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$. *Een vector* $\mathbf{b} \in \mathbf{H}$.
Beschouw de sesquilineaire vorm ϕ *op* $\mathbf{H}$ *met* $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})$. *Er geldt: Als de sesquilineaire functionaal* ϕ *coërcief is. Dus als*

$$\exists \gamma > 0 \, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H} \left[|(\mathcal{A}\mathbf{x}\,,\ \mathbf{x})| \ge \gamma\|\mathbf{x}\|^2 \right].$$

Dan heeft de operatorvergelijking

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

voor alle rechterleden $\mathbf{b} \in \mathbf{H}$ *een unieke oplossing* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$. *De operator* $\mathcal{A}$ *heeft een begrensde inverse* $\mathcal{A}^{-1}$ *en de oplossing* $\mathbf{u}$ *kan geschreven worden als* $\mathbf{u} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Bewijs.
De operator $\mathcal{A}$ die we in het bewijs van de voorafgaande stelling zelf moesten invoeren is ons nu op voorhand gegeven. Het bewijs van de onderhavige stelling is dus te vinden onder de •'s van het voorafgaande bewijs. □

5.1.14 Voorbeeld

De Lax-Milgram stelling vindt toepassing bij het (numeriek) oplossen van randwaarde-problemen voor (partiele) differentiaalvergelijkingen. Een eenvoudige illustratie daarvan is de volgende. Beschouw op het interval $[-1,1]$ de differentiaalvergelijking $(-a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = f(x)$, met voorgeschreven rechterlid $f(x)$ en voorgeschreven randvoorwaarden $u'(-1) = \alpha$ en $u'(1) = \beta$. De coefficienten a en c hebben de in het vorige voorbeeld genoemde eigenschappen. Vermenigvuldig de complex toegevoegde van de differentiaalvergelijking met een gladde functie $\theta(x)$. Integreer het resultaat over $[-1,1]$. Na partiële integratie komt er

$$\begin{aligned}\psi(u,\theta) &= \int_{-1}^{1} \{a(x)\overline{Du(x)}D\theta(x) + c(x)\overline{u(x)}\theta(x)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\theta(x)\,dx + \overline{a(1)\beta}\theta(1) - \overline{a(-1)\alpha}\theta(-1).\end{aligned}$$

Het linkerlid van deze vergelijking is een coërcieve begrensde sesquilineaire functionaal op de Hilbertruimte $\mathbb{H}^1([-1,1])$. Het rechterlid is een begrensde lineaire functionaal (in θ) op dezelfde Hilbertruimte. De stelling van Lax-Milgram garandeert dan existentie en eenduidigheid van een oplossing u.
In de numerieke wiskunde worden 'benaderende' oplossingen gevonden door de vergelijking $\psi(u,\theta) = F(\theta)$ tot zekere eindig dimensionale deelruimten (bijvoorbeeld 'eindige elementen') te beperken.

5.1.15 Definitie (Resolvente en Spectrum)

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde operator $\mathcal{A}\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$. Een vector $\mathbf{b} \in \mathbf{H}$. Een getal $\lambda \in \mathbb{C}$.
Beschouw: De operatorvergelijking $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\mathbf{u} = \mathbf{b}$.
We zeggen: $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, de *resolvente verzameling* van $\mathcal{A}$, als de vergelijking voor elke $\mathbf{b} \in \mathbf{H}$ precies één oplossing $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ heeft met $\mathbf{u} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1}\mathbf{b}$ en $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1}$ een begrensde operator.
We zeggen: $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, het *spectrum* van $\mathcal{A}$, als $\lambda \notin \rho(\mathcal{A})$. Dus $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$.

5.1.16 Voorbeelden

a) Als $\mathbf{H} = \mathbb{C}^N$ en $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ een lineaire afbeelding, dan bestaat het spectrum $\sigma(\mathcal{A})$ precies uit de eigenwaarden van $\mathcal{A}$.

b) Als $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$, dan behoren alle λ met $|\lambda| > \|\mathcal{A}\|$ tot de resolvente verzameling $\rho(\mathcal{A})$ van $\mathcal{A}$.

c) Als $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ en $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ en $\mu \in \mathbb{C}$ met $|\mu| < \|(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1}\|$, dan ook $\lambda + \mu \in \rho(\mathcal{A})$. Ga maar na: $\mathcal{A} - (\lambda + \mu)\mathcal{I} = [\mathcal{I} - \mu(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1}][\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}]$. De eerste operator in dit product is te inverteren met de Neumannreeks. De tweede is inverteerbaar omdat $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Blijkbaar is $\rho(\mathcal{A})$ een open verzameling en $\sigma(\mathcal{A})$ een gesloten verzameling.

5.2 (Zelf-)geadjungeerde Operatoren

Van een matrix kan de (hermitisch) getransponeerde genomen worden. Zoiets willen we, heel algemeen, ook voor operatoren hebben.

5.2.1 Definitie (Geadjungeerde Operator)

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde operator $\mathcal{A}\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$.
Beschouw bij vaste $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ de begrensde lineaire functionaal $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}\,, \mathcal{A}\mathbf{x})$. Volgens Riesz is er dan een $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ voorhanden, zodat $G(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}\,, \mathbf{x})$.
De afbeelding $\mathcal{A}^\star : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, gedefinieerd door de toevoeging $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} = \mathcal{A}^\star(\mathbf{u})$ heet de *geadjungeerde* van $\mathcal{A}$.

5.2.2 Eigenschappen

$\mathcal{A}^\star$ is lineair. Voorts: $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\star = \mathcal{A}^\star + \mathcal{B}^\star$, $(\alpha\mathcal{A})^\star = \overline{\alpha}\mathcal{A}^\star$, $(\mathcal{A}^\star)^\star = \mathcal{A}$, $\mathcal{I}^\star = \mathcal{I}$, $(\mathcal{A}\mathcal{B})^\star = \mathcal{B}^\star\mathcal{A}^\star$. Tenslotte: $(\mathcal{A}^{-1})^\star = (\mathcal{A}^\star)^{-1}$ als $\mathcal{A}$ begrensd inverteerbaar is.

5.2.3 Stelling

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een begrensde operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$.
Er geldt: $\mathcal{A}^\star$ *is een begrensde operator. Voorts,* $\|\mathcal{A}^\star\| = \|\mathcal{A}\|$ *en* $\|\mathcal{A}^\star\mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}\|^2$.

Bewijs.
Met Schwarz $|(\mathcal{A}^\star\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |(\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\|\mathcal{A}\|$. Kies $\mathbf{y} = \mathcal{A}^\star\mathbf{x}$, dan $\|\mathcal{A}^\star\mathbf{x}\|^2 = (\mathcal{A}^\star\mathbf{x}, \mathcal{A}^\star\mathbf{x}) \le \|\mathcal{A}\|\|\mathbf{x}\|\|\mathcal{A}^\star\mathbf{x}\|$. Dus $\forall\mathbf{x} \in \mathbf{H}$: $\|\mathcal{A}^\star\mathbf{x}\| \le \|\mathcal{A}\mathbf{x}\|$. Dus $\|\mathcal{A}^\star\| \le \|\mathcal{A}\|$. Als we dit overdoen met $\mathcal{A}$ vervangen door $\mathcal{A}^\star$, dan komt er $\|\mathcal{A}\| = \|(\mathcal{A}^\star)^\star\| \le \|\mathcal{A}^\star\|$. Samengenomen $\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}^\star\|$.
Nu de tweede normgelijkheid. Enerzijds $\|\mathcal{A}^\star\mathcal{A}\| \le \|\mathcal{A}^\star\|\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}\|^2$. Anderzijds $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|^2 = (\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathcal{A}^\star\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \le \|\mathcal{A}^\star\mathcal{A}\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\| \le \|\mathcal{A}^\star\mathcal{A}\|\|\mathbf{x}\|^2$. Dus $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \le \|\mathcal{A}^\star\mathcal{A}\|^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{x}\|$. Dus $\|\mathcal{A}\|^2 \le \|\mathcal{A}^\star\mathcal{A}\|^2$. Blijkbaar kan ook hier alleen het =teken gelden. $\square$

5.2.4 Voorbeelden

a) $\mathbf{H} = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}^\star = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dus, in het algemeen geldt $\mathcal{A}^\star \neq \mathcal{A}$.

b) Laat $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{\infty}$ een orthonormale basis zijn in Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Laat $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$. Laat $A_{ij} = (\mathbf{e}_i \,, \mathcal{A}\mathbf{e}_j)$, de componenten van de matrix bij $\mathcal{A}$. De matrix $[A^\dagger_{ij}]$ van $\mathcal{A}^\star$ wordt dan gegeven door $A^\dagger_{kl} = \overline{A_{lk}}$.

c) Laat de *Fredholmoperator* $\mathcal{K}\colon \mathbb{L}_2((a,b)) \to \mathbb{L}_2((a,b))$ gegeven zijn door $\mathcal{K}u(x) = \int\limits_a^b k(x,y)u(y)\,dy$. Zie Voorbeeld 3.1.3.h. De geadjungeerde $\mathcal{K}^\star$ van $\mathcal{K}$ is dan weer een integraaloperator. De kern $k^\dagger$ van $\mathcal{K}^\star$ wordt gegeven door $k^\dagger(x,y) = \overline{k(y,x)}$. Het bewijs van deze bewering berust op verwisselen van integratievolgorde.

d) Laat $m(x)$ een begrensde (complexwaardige) continue functie zijn op het interval (a,b). We definieren de vermenigvuldigingsoperator $\mathcal{M}\colon \mathbb{L}_2((a,b)) \to \mathbb{L}_2((a,b))$ door $\mathcal{M}u(x) = m(x)u(x)$. De geadjungeerde $\mathcal{M}^\star$ van $\mathcal{M}$ is weer een vermenigvuldigingsoperator, $\mathcal{M}^\star u(x) = \overline{m(x)}u(x)$.

e) Als $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ en $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, dan geldt: $(\alpha_n \mathcal{A}^n + \alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_0 \mathcal{I})^\star = \overline{\alpha_n}(\mathcal{A}^\star)^n + \overline{\alpha_{n-1}}(\mathcal{A}^\star)^{n-1} + \cdots + \overline{\alpha_1}\mathcal{A}^\star + \overline{\alpha_0}\mathcal{I}$.

f) Strict genomen hebben we het begrip 'geadjungeerde operator' niet voor onbegrensde operatoren ingevoerd. Beschouw desondanks de dichtgedefinieerde operator $\mathcal{D}\colon \mathbf{U} \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ met als definitiegebied $\mathbf{U} = \mathbf{D}(\mathcal{D}) = \mathbb{H}^1(\mathbb{R})$, opgevat als lineaire deelruimte in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. De actie van $\mathcal{D}$ wordt gegeven door $\mathcal{D}u(x) = u'(x)$. De geadjungeerde $\mathcal{D}^\star$ van $\mathcal{D}$ is gelijk aan $-\mathcal{D}$. Het definitiegebied is hetzelfde.

5.2.5 Definitie

Gegeven: Gegeven een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde operator $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$. De operator $\mathcal{A}$ heet *zelfgedjungeerd* of *Hermitisch* als $\mathcal{A}^\star = \mathcal{A}$. Equivalent geformuleerd: $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\ \forall \mathbf{y} \in \mathbf{H} \left[\, (\mathcal{A}\mathbf{x} \,, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \,, \mathcal{A}\mathbf{y}) \,\right]$.

5.2.6 Opmerking

Onbegrensde operatoren heten Hermitisch als laatstgenoemde eigenschap geldt voor alle $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in het definitiegebied van $\mathcal{A}$. Dit is doorgaans een eenvoudig te verifieren eigenschap. In functieruimten gaat zo'n verificatie vaak via partiele integratie. Als in natuurkundeboeken 'Hermitisch' staat, dan bedoelen ze meestal 'zelfgeadjungeerd', een eigenschap met veel meer gewicht. Voor begrensde, op de hele ruimte gedefinieerde operatoren is er geen verschil. Voor onbegrensde operatoren is 'zelfgeadjungeerdheid' een moeilijk te verifieren eigenschap, waar je wel veel voor terugkrijgt. We gaan hier niet verder op in.

5.2.7 Voorbeelden

De nummering correspondeert met de vorige set voorbeelden.

a) In $\mathbf{H} = \mathbb{C}^2$ is $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix}$, met a, $c \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{C}$, een Hermitische operator.

b) Als $A_{kl} = \overline{A_{lk}}$, dan is $\mathcal{A}$ een zelfgeadjungeerde operator.

c) Als $k^\dagger(x, y) = \overline{k(y, x)} = k(x, y)$, dan is $\mathcal{K}$ een zelfgeadjungeerde operator.

d) Als $m(x)$ bovendien waarden aanneemt in $\mathbb{R}$, dan is $\mathcal{M}$ een zelfgeadjungeerde operator.

e) Als $\mathcal{A}$ zelfgeadjungeerd is en $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \quad \in \mathbb{R}$, dan is $(\alpha_n \mathcal{A}^n + \alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_0 \mathcal{I})$ eveneens zelfgeadjungeerd.

f) De onbegrensde operator $i\mathcal{D}$ is op het aangegeven gebied zelfgeadjungeerd. Als je het aangegeven definitiegebied zou verkleinen tot $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$, dan is deze 'beperkte' operator alleen maar Hermitisch.

g) Een begrensde sesquilineaire functionaal ϕ is precies dan symmetrisch als hij van de gedaante $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{A}\mathbf{x}\,, \mathbf{y})$, met $\mathcal{A}$ een zelfgeadjungeerde operator, is.

5.2.8 Stelling

Gegeven: Een begrensde operator $\mathcal{A}$ op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$.
Dan geldt: De operatoren $\mathcal{A}^\star\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}^\star + \mathcal{A}$ zijn zelfgeadjungeerd.

Bewijs.
Volgt gemakkelijk met de rekenregels 5.2.2. □

5.2.9 Stelling

Gegeven: Een begrensd inverteerbare, zelfgeadjungeerde operator $\mathcal{A}$ op een Hilbertruimte$\mathbf{H}$.
Dan geldt: De inverse $\mathcal{A}^{-1}$ is eveneens zelfgeadjungeerd.

Bewijs.
Volgt gemakkelijk met de rekenregels 5.2.2. □

5.2.10 Stelling
Gegeven: Twee zelfgeadjungeerde operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$.
Dan geldt: $\left[\,(\mathcal{A}\mathcal{B})^\star = \mathcal{A}\mathcal{B}\,\right] \;\Leftrightarrow\; \left[\,\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}\,\right]$.
In woorden: Het product van twee Hermitische operatoren is precies dan Hermitisch als ze commuteren.

Bewijs.
$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}:\ (\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{B}\mathbf{x}, \mathcal{A}^\star\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{B}^\star\mathcal{A}^\star\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{B}\mathcal{A})$. Hieruit volgt dat voor zelfgeadjungeerde $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ altijd geldt $(\mathcal{A}\mathcal{B})^\star = (\mathcal{B}\mathcal{A})$. Beide richtingen in de bewering volgen hieruit. □

5.2.11 Gevolg
Gegeven: Een begrensde operator $\mathcal{T}$ op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$.
Dan kunnen $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}^\star$ geschreven worden als $\mathcal{T} = \mathcal{A} + i\mathcal{B}$, respectievelijk $\mathcal{T}^\star = \mathcal{A} - i\mathcal{B}$, met $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zelfgeadjungeerd.

Bewijs.
Schrijf $\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}+\mathcal{T}^\star}{2} + i\frac{\mathcal{T}-\mathcal{T}^\star}{2i}$. □

De volgende belangrijke stelling is geinspireerd door het bijzondere geval van een diagonaalmatrix die als operator op $\mathbb{C}^N$ werkt.

5.2.12 Stelling
Gegeven: $\mathcal{T} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ *met* $\mathcal{T}^\star = \mathcal{T}$.
Dan geldt: $\|\mathcal{T}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{T}\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x})|$.

Bewijs.
• Stel $\sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathbf{x})| = M$. Voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, met $\|\mathbf{x}\| = 1$, geldt $|(\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathbf{x})| \leq \|\mathcal{T}\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{T}\|$. Daarom $M \leq \|\mathcal{T}\|$. (Dit geldt overigens voor alle begrensde operatoren).
• Beschouw eerst $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, met $\mathcal{T}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Definieer $\alpha = \sqrt{\frac{\|\mathcal{T}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}}$ en $\mathbf{z} = \frac{1}{\alpha}\mathcal{T}\mathbf{x}$. Dan $\|\mathcal{T}\mathbf{x}\|^2 = (\mathcal{T}(\alpha\mathbf{x}), \mathbf{z}) = \frac{1}{4}\{(\mathcal{T}(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{z}), \alpha\mathbf{x}+\mathbf{z}) - (\mathcal{T}(\alpha\mathbf{x}-\mathbf{z}), \alpha\mathbf{x}-\mathbf{z})\} \leq \frac{1}{4}M\{\|\alpha\mathbf{x}+\mathbf{z}\|^2 + \|\alpha\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2\} = \frac{1}{2}M\{\|\alpha\mathbf{x}\|^2 + \|bz\|^2\} = \frac{1}{2}M\{\alpha^2\|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{\alpha^2}\|\mathcal{T}\mathbf{x}\|^2\} = M\|\mathbf{x}\|\|\mathcal{T}\mathbf{x}\|$. Blijkbaar geldt $\|\mathcal{T}\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$. Merk op dat dit ook geldt als $\mathcal{T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gevolg: $\|\mathcal{T}\| \leq M$. □

5.2.13 Definitie
Een operator $\mathcal{A}$ op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ heet *anti-Hermitisch* of *scheef-Hermitisch* als $\mathcal{A}^\star = -\mathcal{A}$.

5.3 Normale Operatoren

We introduceren de klasse van operatoren die commuteren met hun geadjungeerde. (Scheef-)Hermitische operatoren behoren tot die klasse.

5.3.1 Definitie
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde operator $\mathcal{T}: \mathbf{H} \to \mathbf{H}$.
We noemen $\mathcal{T}$ *normaal* als $\mathcal{T}^\star\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{T}^\star$.

5.3.2 Stelling
Gegeven: Zie voorgaande definitie.

a) $\mathcal{T}$ *is normaal* $\quad\Leftrightarrow\quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\, \big[\|\mathcal{T}\mathbf{x}\| = \|\mathcal{T}^\star\mathbf{x}\|\,\big]$.

b) $\mathcal{T}$ *is normaal* $\quad\Leftrightarrow\quad \forall \alpha \in \mathbb{C}\, \big[(\alpha\mathcal{I} - \mathcal{T})$ *is normaal*$\big]$.

c) Laat $\mathcal{T} = \mathcal{A} + i\mathcal{B}$, *met* $\mathcal{A}$ *en* $\mathcal{B}$ *zelfgeadjungeerd. Dan:*
$\mathcal{T}$ *is normaal* $\quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Bewijs.
a$\Rightarrow$) $\|\mathcal{T}\mathbf{x}\|^2 = (\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathcal{T}\mathbf{x}) = (\mathcal{T}^\star\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathcal{T}\mathcal{T}^\star\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathcal{T}^\star\mathbf{x}, \mathcal{T}^\star\mathbf{x}) = \|\mathcal{T}^\star\mathbf{x}\|^2$
a$\Leftarrow$) Als $\forall \mathbf{x}: \ \|\mathcal{T}\mathbf{x}\|^2 = \|\mathcal{T}^\star\mathbf{x}\|^2$, dan ook $\forall \mathbf{x}: \ (\mathcal{T}^\star\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathcal{T}\mathcal{T}^\star\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Met 5.1.7.d volgt dan $\mathcal{T}^\star\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{T}^\star$.
b) Flauw.
c) Uitschrijven: $\mathcal{T}^\star\mathcal{T} - \mathcal{T}\mathcal{T}^\star = 2i(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A})$. Het linkerlid is 0 dan en slechts dan als het rechterlid 0 is. □

5.3.3 Opmerking
$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\, \big[\|\mathcal{T}\mathbf{x}\| = \|\mathcal{T}^\star\mathbf{x}\|\,\big]$ is een strengere voorwaarde dan $\|\mathcal{T}\| = \|\mathcal{T}^\star\|$.

De volgende klasse van operatoren waar we naar kijken is die waarbij de beelden altijd even lang zijn als het origineel.

5.3.4 Definitie
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde operator $\mathcal{T}: \mathbf{H} \to \mathbf{H}$.
We noemen $\mathcal{T}$ *isometrisch* als $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\, \big[\, \|\mathcal{T}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|\,\big]$.

5.3.5 Voorbeeld (Eenzijdige Schuifoperator)
Beschouw een separabele Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Laat $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ een orthonormale basis zijn. Definieer de operator $\mathcal{S}$ door $\mathcal{S}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n+1}$. $\mathcal{S}$ is een isometrie want met $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{e}_n$ volgt $\|\mathcal{S}\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n \mathbf{e}_{n+1}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$.

5.3.6 Stelling
Gegeven: Als in voorgaande definitie.
Er geldt: $\mathcal{T}$ *is isometrisch* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}^{\star}\mathcal{T} = \mathcal{I}$

Bewijs.
$\Rightarrow$) Uit $\|\mathcal{T}\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ volgt $(\mathcal{T}^{\star}\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathcal{T}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Met 5.1.7.d volgt dan $\mathcal{T}^{\star}\mathcal{T} = \mathcal{I}$.
$\Leftarrow$) $\|\mathcal{T}\mathbf{x}\| = (\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathcal{T}\mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = (\mathcal{T}^{\star}\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{x}\|$. □

We combineren nu de begrippen 'normaal' en 'isometrisch'.

5.3.7 Definitie
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde operator $\mathcal{T} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$.
We noemen $\mathcal{T}$ *unitair* als $\mathcal{T}^{\star}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{T}^{\star} = \mathcal{I}$.

5.3.8 Stelling
Gegeven: Als in voorgaande definitie.
Er geldt: $\mathcal{T}$ *is unitair* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}^{\star} = \mathcal{T}^{-1}$.

Bewijs.
In voorgaande definitie staat te lezen dat $\mathcal{T}^{\star}$ zowel linker- als rechterinverse is van $\mathcal{T}$. □

5.3.9 Voorbeelden

a) In $\ell_2(\mathbb{Z})$ zijn de vectoren tweezijdig oneindige kolommen $\underline{x} = \text{kolom}[\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots]$. We definieren de schuifoperator $\mathcal{S}$ door $\mathcal{S}\underline{x} = \underline{x} = \text{kolom}[\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, \ldots]$. Er geldt: $(\mathcal{S}\underline{x}\,,\,\underline{y}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \overline{x_{n-1}} y_n = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \overline{x_n} y_{n+1} = (\underline{x}\,,\,\mathcal{S}^{-1}\underline{y})$. Dus $\mathcal{S}^{\star} = \mathcal{S}^{-1}$.

b) In $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2((0,1))$ is de operator $\mathcal{B}$, gedefinieerd door $\mathcal{B}f(x) = f(1-x)$, zelfgeadjungeerd en unitair.

5.4 Projectie Operatoren

De volgende stelling is een uitbreiding van Stelling 4.2.9.. In plaats van de benaming 'projectieafbeeldingen' zullen we de benaming 'projectieoperatoren' bezigen omdat ze lineair blijken te zijn.

5.4.1 Stelling

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een gesloten lineaire deelruimte* $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$. *Dan geldt:*

i) $\mathbf{U}^{\perp\perp} = \mathbf{U}$

ii) $\mathbf{H} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^{\perp}$. *Dit betekent dat iedere* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ *op precies één manier geschreven kan worden als* $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ *met* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *en* $\mathbf{y} \in \mathbf{U}^{\perp}$. *In notatie met projectieoperatoren:* $\mathbf{y} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}$ *en* $\mathbf{z} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}\mathbf{x}$.

iii) $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}$ *en* $\mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}$ *zijn beide lineair.*

iv) $\|\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\| = \|\mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}\| = 1$.

v) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{U}\big[\,\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \mathbf{x}\,\big],\ \forall \mathbf{y} \in \mathbf{U}^{\perp}\big[\,\mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}\mathbf{y} = \mathbf{y}\,\big]$.

vi) $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}^2 = \mathcal{P}_{\mathbf{U}},\ \mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}^2 = \mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}},\ \mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}} = \mathcal{I} - \mathcal{P}_{\mathbf{U}}$.

vii) $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}$ *en* $\mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}$ *zijn zelfgeadjungeerd.*

Bewijs.
i) en ii) Zie 4.2.8.iii en iv.

iii) Als $\mathbf{x} = \mathbf{y}+\mathbf{z}$, met $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{U}^{\perp}$ en ook $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1+\mathbf{z}_1$, met $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{U}$, $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{U}^{\perp}$, dan geldt $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}_1 = (\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{y}_1)+(\alpha\mathbf{z}+\beta\mathbf{z}_1)$. Omdat $\mathbf{U}$ en $\mathbf{U}^{\perp}$ lineaire deelruimten zijn is $(\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}_1) \in \mathbf{U}$ en $(\alpha\mathbf{z} + \beta\mathbf{z}_1) \in \mathbf{U}^{\perp}$. De opsplitsing is uniek, dus er moet wel gelden $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}_1) = \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}_1 = \alpha\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x} + \beta\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}_1$. Blijkbaar is in dit geval de projectieafbeelding $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}$ lineair. Voor $\mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}$ gaat de bewijsvoering eender.

iv) Omdat in bovenstaande orthogonale opsplitsing $\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|$, moet $\|\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\| \leq 1$. Echter als $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ dan $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Het gelijkteken kan optreden dus geldt $\|\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\| = 1$. Net zo voor $\mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}$.

v) Zie ii).

vi) Omdat $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, brengt andermaal toepassen van $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}$ geen verandering meer. Idem dito voor $\mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}$.

vii) Met de notatie van iii): $(\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}_1) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) = (\mathbf{x}, \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}_1)$. Bij deze afleiding is druk gebruik gemaakt van de orthogonaliteit van de opsplitsing. Conclusie: $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}^{\star} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}$. Herhaling van het argument met $\mathbf{U}$ vervangen door $\mathbf{U}^{\perp}$, levert $\mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}^{\star} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}^{\perp}}$. □

5.4.2 Voorbeelden

a) Laat in de voorafgaande stelling $\{\mathbf{c}_n\}_{n=1}^{N}$, met $N \in \mathbb{N}$ dan wel $N = \infty$, een orthonormale basis zijn in de deelruimte $\mathbf{U}$. Dan
$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\big[\, \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{c}_n \,,\, \mathbf{x})\mathbf{c}_n) \,\big]$.

b) Beschouw $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2((-\pi, \pi))$. Laat $\mathbf{U}$ de lineaire deelruimte van even functies zijn. Dan is $\mathbf{U}^{\perp}$ de lineaire deelruimte van oneven functies. Een orthonormale basis voor $\mathbf{U}$ wordt gevormd door $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, met $c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en $c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$ als $n = 1, 2, 3, \ldots$. Een orthonormale basis voor $\mathbf{U}^{\perp}$ wordt gevormd door$\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, met $s_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx$ voor $m \in \mathbb{N}$. We hebben $\forall f \in \mathbb{L}_2((-\pi, \pi))\big[\, \mathcal{P}_{\mathbf{U}} f = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \,,\, f)c_n) \,\big]$.

c) Beschouw $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2((-1, 1))$. Neem voor $\mathbf{U}$ de lineaire deelruimte van functies die 0 zijn op $(-1, 0)$. Dan is $\mathbf{U}^{\perp}$ de lineaire deelruimte van functies die 0 zijn op $(0, 1)$. Je kunt $\mathbf{U}$ gelijk stellen aan $\mathbb{L}_2((0, 1))$, opgevat als deelruimte van $\mathbb{L}_2((-1, 1))$ door uit te breiden met 0. De actie van $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}$ wordt beschreven door $\mathcal{P}_{\mathbf{U}} f(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

We willen nu over projectieoperatoren spreken zonder daar meteen al 'deelruimten' bij te betrekken.

5.4.3 Stelling (Karakterisering Projectieoperatoren)

Gegeven: Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Begrensde operator* $\mathcal{P} \colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, *met* $\mathcal{P}^{\star} = \mathcal{P}$ *en* $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.
Dan geldt: $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ *is een gesloten lineaire deelruimte en* $\mathcal{P}$ *is de projectie op deze gesloten deelruimte.*

Bewijs.
Laat $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H} \,\big|\, \mathcal{P}\mathbf{v} = \mathbf{v}\}$. Dit is een gesloten lineaire deelruimte want $\mathbf{V} = \mathbf{N}(\mathcal{P} - \mathcal{I})$. Laat nu $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ en $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Dan $(\mathbf{x} - \mathcal{P}\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathcal{P}\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{x}, \mathcal{P}\mathbf{v}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$. Dit geldt voor alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, dus $\mathbf{x} - \mathcal{P}\mathbf{x} \perp \mathbf{V}$. Uit de idempotentie van $\mathcal{P}$ volgt $\mathcal{P}(\mathcal{P}\mathbf{x}) = \mathcal{P}\mathbf{x}$. Dus $\mathcal{P}\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Splits nu: $\mathbf{x} = \mathcal{P}\mathbf{x} + (\mathbf{x} - \mathcal{P}\mathbf{x})$. We vonden $\mathcal{P}\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ en $(\mathbf{x} - \mathcal{P}\mathbf{x}) \in \mathbf{V}^{\perp}$. Blijkbaar is $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathbf{V}}$.

□

5.4.4 Opmerkingen

-De projectie op $\mathbf{N}(\mathcal{P})$ wordt gegeven door $\mathcal{I} - \mathcal{P}$.
-De eigenschap $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ heet *idempotent*.
-$(\mathcal{P}\mathbf{x} \,,\, \mathbf{x}) = (\mathcal{P}\mathbf{x} \,,\, \mathcal{P}\mathbf{x})$.

5.4.5 Definities

Gegeven: Twee projectieoperatoren $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$.
We noemen $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ *orthogonaal* als $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$.
(Omdat $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{P}^\star\mathcal{Q}^\star = (\mathcal{Q}\mathcal{P})^\star$, geldt ook $\mathcal{Q}\mathcal{P} = 0$.)

Gegeven: Twee gesloten lineaire deelruimten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$.
Notaties: $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V} = \{\mathbf{w} \,\big|\, \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \text{ met } \mathbf{u} \in \mathbf{U},\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$,
$\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{z} \,\big|\, \mathbf{z} \in \mathbf{U} \text{ en } \mathbf{z} \in \mathbf{V}\}$.
Beide zijn gesloten lineaire deelruimten.

5.4.6 Stelling

Gegeven: Twee gesloten lineaire deelruimten $\mathbf{U}$ *en* $\mathbf{V}$ *in een Hilbertruimte* $\mathbf{H}$ *en de bijbehorende projectieoperatoren* $\mathcal{P}_\mathbf{U}$ *en* $\mathcal{P}_\mathbf{V}$.
Dan geldt:

i) $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{U} \perp \mathbf{V}$.

ii) $\mathcal{P}_\mathbf{U} + \mathcal{P}_\mathbf{V}$ *is projectie* $\quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V} = 0$.
Dan is $\mathcal{P}_\mathbf{U} + \mathcal{P}_\mathbf{V} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}\oplus\mathbf{V}}$.

iii) $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}$ *is projectie* $\quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U} = \mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}$.
Dan is $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{V}}$.

Bewijs.
i⇒) Laat $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ en $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Dan $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathbf{u}, \mathcal{P}_\mathbf{V}\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}\mathbf{v}) = 0$. Dus $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

i⇐) Laat $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ willekeurig. Er geldt $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Dus $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathbf{x} \perp \mathbf{V}$. Maar dan $\mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gevolg $\mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U} = 0$.

ii⇒) Uit $(\mathcal{P}_\mathbf{U}+\mathcal{P}_\mathbf{V})^2 = \mathcal{P}_\mathbf{U}+\mathcal{P}_\mathbf{V}$ volgt $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}+\mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U} = 0$. Aan beide kanten vermenigvuldigen met $\mathcal{P}_\mathbf{U}$ levert $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U} = 0$. Dan ook $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U} = \mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}(\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V})^\star = 0$. Hieruit volgt $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V} = 0$.

ii⇐) Uitschrijven leert $(\mathcal{P}_\mathbf{U}+\mathcal{P}_\mathbf{V})^2 = \mathcal{P}_\mathbf{U}+\mathcal{P}_\mathbf{V}$, omdat de kruistermen geacht worden 0 te zijn. Blijkbaar is $\mathcal{P}_\mathbf{U}+\mathcal{P}_\mathbf{V}$ idempotent en zelfgeadjungeerd. Dus projectie.
In deze situatie $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H} : \ (\mathcal{P}_\mathbf{U} + \mathcal{P}_\mathbf{V})\mathbf{x} \in \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$. Als voorts $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, met $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{U}$ en $\mathbf{y}_2 \in \mathbf{V}$, dan is $(\mathcal{P}_\mathbf{U} + \mathcal{P}_\mathbf{V})\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$. Dus binnen $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ gedraagt $\mathcal{P}_\mathbf{U} + \mathcal{P}_\mathbf{V}$ zich als de identieke afbeelding. Het is dus een projectie op $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$. De notatie voor deze projectie is $\mathcal{P}_{\mathbf{U}\oplus\mathbf{V}}$.

iii⇒) $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V} = (\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V})^\star = \mathcal{P}_\mathbf{V}^\star\mathcal{P}_\mathbf{U}^\star = \mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U}$

iii⇐) $(\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V})^\star = \mathcal{P}_\mathbf{V}^\star\mathcal{P}_\mathbf{U}^\star = \mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U} = \mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}$. Dus $\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}$ is zelfgeadjungeerd. Hij is ook idempotent, want $(\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V})^2 = \mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}\mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V} = \mathcal{P}_\mathbf{U}^2\mathcal{P}_\mathbf{V}^2 = \mathcal{P}_\mathbf{U}\mathcal{P}_\mathbf{V}$.

In deze situatie $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}: \ \mathcal{P}_{\mathbf{U}}(\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{x}) = \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x})$ Dus $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{x} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Als voorts $\mathbf{y} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, dan $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}(\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{y}) = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Dus binnen $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ gedraagt $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathcal{P}_{\mathbf{V}}$ zich als de identieke afbeelding. Het is dus een projectie op $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. De notatie voor die projectie is $\mathcal{P}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{V}}$. □

5.4.7 Stelling
Gegeven: Zie voorgaande stelling.
De volgende vier beweringen zijn gelijkwaardig:
(a) $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ *(b)* $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathcal{P}_{\mathbf{U}} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}$ *(c)* $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathcal{P}_{\mathbf{V}} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}$ *(d)* $\|\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\| \leq \|\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\|$.

Bewijs.
(a)⇒(b) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}: \ \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Dus $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}$.
(b)⇒(c) $\mathcal{P}_{\mathbf{U}} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}^{\star} = (\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathcal{P}_{\mathbf{U}})^{\star} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}^{\star}\mathcal{P}_{\mathbf{V}}^{\star} = \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathcal{P}_{\mathbf{V}}$.
(c)⇒(d) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}: \ \|\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{x}\| = \|\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\|\|\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{x}\|$.
(d)⇒(a) Veronderstel $\neg$(a). Dan $\exists \mathbf{u} \in \mathbf{U}: \ \mathbf{u} \notin \mathbf{V}$. Stel $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, met $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ en $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^{\perp}$. Dan $\|\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{u}\|^2$. Dit strijdt met (d). □

5.5 Compacte Operatoren

In Hoofdstuk 3 hebben we kort gesproken over compacte operatoren in genormeerde vectorruimten. Veel konden we er daar niet mee omdat we het begrip 'volledigheid' nog niet tot onze beschikking hadden. Onze voorbeelden aldaar hadden allemaal 'iets eindigdimensionaals' over zich. Daar willen we nu vanaf. Bij het verder uitbouwen van de theorie zal de volledigheid (van Hilbertruimten) een wezenlijke rol spelen. Ter herinnering: Een operator is compact als het beeld van elke begrensde rij een convergente deelrij bevat. Compacte operatoren zijn altijd begrensd.

5.5.1 Definitie
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ en een lineaire afbeelding $\mathcal{T}: \mathbf{H} \to \mathbf{H}$. De operator $\mathcal{T}$ heet *van eindige rang* als $\dim \mathbf{R}(\mathcal{T}) < \infty$.

5.5.2 Stelling
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *en een begrensde operator* $\mathcal{T}: \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ *van eindige rang.*
Dan is $\mathcal{T}$ *een compacte operator.*

Bewijs. Zie 3.1.12.iii. □

5.5.3 Stelling

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$*. Een rij compacte operatoren* $\{\mathcal{T}_n\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{H})$*. Een begrensde operator* $\mathcal{K} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$*. Tenslotte* $\mathcal{T}_n \to \mathcal{K}$ *in* $\mathbf{B}(\mathbf{H})$*, als* $n \to \infty$*. Dat wil zeggen* $\|\mathcal{T}_n - \mathcal{K}\| \to 0$*, als* $n \to \infty$*.*
Dan geldt: De limietoperator $\mathcal{K}$ *is ook compact.*

Bewijs. Zie 4.1.17.ii. □

5.5.4 Gevolgen

-De lineaire deelruimte van compacte operatoren $\mathbf{C}(\mathbf{H})$ *is een gesloten lineaire deelruimte binnen de ruimte van begrensde operatoren* $\mathbf{B}(\mathbf{H})$*.* $\mathbf{C}(\mathbf{H})$ *is dus zelf een Banachruimte.*
-De (operator-)limiet van een rij begrensde eindig-dimensionale operatoren is compact.

5.5.5 Definitie

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ en een begrensde operator $\mathcal{T}\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$.
We zeggen: $\mathcal{T}$ is een *Hilbert-Schmidt operator* als er een orthonormale basis $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ is zodat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{T}\mathbf{e}_n\|^2 < \infty$.

Intuitief betekent deze definitie dat de operator in hoge dimensies weinig doet.

5.5.6 Stelling

Hilbert-Schmidt-operatoren zijn compacte operatoren.

Bewijs.
Gebruik de notatie van de voorafgaande definitie. Definieer $\mathcal{T}_N\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ door $\mathcal{T}_N\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{N} (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\mathcal{T}\mathbf{e}_k$. Merk op dat alle $\mathcal{T}_N$ operatoren van eindige rang zijn. We schatten nu $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}:$ $\|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_N)\mathbf{x}\| = \|\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\mathcal{T}\mathbf{e}_k\| \leq \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \|\mathcal{T}\mathbf{e}_k\||(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})| \leq \|\mathbf{x}\|\big(\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \|\mathcal{T}\mathbf{e}_k\|^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Dus $\|\mathcal{T} - \mathcal{T}_N\| \leq \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \|\mathcal{T}\mathbf{e}_k\|^2\big)^{\frac{1}{2}} \to 0$, als $N \to \infty$. De rij $\mathcal{T}_N$ is een rij van compacte operatoren, want van ze zijn allemaal van eindige rang. In $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ convergeert dez rij naar $\mathcal{T}$. De limietoperator $\mathcal{T}$ is dan ook compact. Zie Stelling 5.5.3. □

5.5.7 Voorbeelden

a) De *integratie-operator* $\mathcal{V}\colon \mathbb{L}_2((0,1)) \to \mathbb{L}_2((0,1))$, gedefinieerd door $\mathcal{V}f(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ heeft de Hilbert-Schmidt eigenschap en is dus compact. Neem maar $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$. Dan $\mathcal{V}e_k(x) = \frac{1}{2\pi i k}(e^{2\pi i k x} - 1)$, als $k \neq 0$. En dan is $\sum\limits_{k=-\infty}^{k=\infty} \|\mathcal{V}e_k\|^2 \leq 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi^2 k^2} < \infty$.

b) Beschouw in $\mathbb{L}_2((a,b))$ een integraaloperator $\mathcal{K}$ met continue kern $k(\cdot,\cdot)$. Dus $\mathcal{K}u(x) = \int\limits_a^b k(x,y)u(y)\,dy$. Veronderstel dat $\int\limits_a^b\int\limits_a^b |k(x,y)|^2\,dx\,dy < \infty$.
Dan is $\mathcal{K}$ een Hilbert-Schmidt-operator en dus compact.
Om dit in te zien, neem een orthonormale basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, en schat:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{K}e_n\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b |\mathcal{K}e_n(x)|^2\,dx = \int\limits_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(\overline{k(x,\cdot)}\,,\, e_n)|^2\,dx =$
$= \int\limits_a^b\int\limits_a^b |k(x,y)|^2\,dx\,dy < \infty$.

5.5.8 Definitie

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde rij $\{\mathbf{a}_n\} \subset \mathbf{H}$. Een vector $\mathbf{a} \in \mathbf{H}$.
We zeggen: $\{\mathbf{a}_n\}$ *convergeert zwak* naar $\mathbf{a}$, notatie $\mathbf{a}_n \rightharpoonup \mathbf{a}$, als $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}\left[\lim\limits_{n\to\infty}(\mathbf{a}_n\,,\,\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\,,\,\mathbf{x})\right]$.

5.5.9 Voorbeelden

- Als $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$ dan ook $\mathbf{a}_n \rightharpoonup \mathbf{a}$. Maar niet omgekeerd:
- Als $\{\mathbf{c}_n\}$ een orthogonale rij is, dan $\mathbf{c} \rightharpoonup 0$.

5.5.10 Stelling

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een compacte operator* $\mathcal{T} \in \mathbf{C}(\mathbf{H})$. *Een begrensde rij* $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{H}$. *Een vector* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.
Er geldt:

i) $\mathcal{T}^\star$ *is compact.*

ii) Als $\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$ *dan* $\mathcal{T}\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$.

Bewijs.
i) Ga uit van een begrensde rij $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbf{H}$. Dus $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \|\mathbf{x}_n\| \leq M$. Laat $\{\mathbf{y}_n\} = \{\mathcal{T}^\star \mathbf{x}_n\}$. Licht hier een deelrij $\{\mathbf{y}_{n(k)}\}$ uit zodanig dat de rij $\{\mathcal{T}\mathbf{y}_{n(k)}\}$ convergent is. Wegens de begrensdheid van de rij $\{\mathbf{y}_n\}$ en de

compactheid van $\mathcal{T}$ is zo'n deelrij voorhanden. We willen laten zien dat ook de rij $\{\mathbf{y}_{n(k)}\}$ convergent is. Wegens de volledigheid van $\mathbf{H}$ is het voldoende te laten zien dat $\{\mathbf{y}_{n(k)}\}$ Cauchy is. We schatten: $\|\mathbf{y}_{n(k)} - \mathbf{y}_{n(\ell)}\|^2 =$
$= \|\mathcal{T}^\star \mathbf{x}_{n(k)} - \mathcal{T}^\star \mathbf{x}_{n(\ell)}\|^2 = (\mathcal{T}^\star(\mathbf{x}_{n(k)} - \mathbf{x}_{n(\ell)}), \mathcal{T}^\star(\mathbf{x}_{n(k)} - \mathbf{x}_{n(\ell)})) =$
$= (\mathcal{T}\mathcal{T}^\star(\mathbf{x}_{n(k)} - \mathbf{x}_{n(\ell)}), \mathbf{x}_{n(k)} - \mathbf{x}_{n(\ell)}) \leq \|\mathbf{x}_{n(k)} - \mathbf{x}_{n(\ell)}\| \|\mathcal{T}\mathcal{T}^\star(\mathbf{x}_{n(k)} - \mathbf{x}_{n(\ell)})\| \leq$
$2M\|\mathcal{T}(\mathbf{y}_{n(k)} - \mathbf{y}_{n(\ell)})\| \to 0$, als k, $\ell \to \infty$.

ii) Er geldt $\mathcal{T}\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathcal{T}\mathbf{x}$, want $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{H}:\ (\mathcal{T}\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_n, \mathcal{T}^\star \mathbf{y}) \to (\mathbf{x}, \mathcal{T}^\star \mathbf{y}) = (\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
Neem een willekeurige deelrij $\{\mathbf{x}_{n(k)}\} \subset \{\mathbf{x}_n\}$. Wegens de compactheid van $\mathcal{T}$ is er dan een deeldeelrij $\{\mathbf{x}_{n(k(\ell))}\}$ met $\mathcal{T}\mathbf{x}_{n(k(\ell))} \to \mathbf{z}$, zeg, als $\ell \to \infty$. Er moet wel gelden $\mathbf{z} = \mathcal{T}\mathbf{x}$ omdat $\mathbf{x}_{n(k(\ell))} \rightharpoonup \mathbf{x}$ als $\ell \to \infty$.
Blijkbaar bevat *elke* deelrij van $\{\mathcal{T}\mathbf{x}_n\}$ een convergente deeldeelrij die naar $\mathcal{T}\mathbf{x}$ convergeert. Dan moet wel $\mathcal{T}\mathbf{x}_n \to \mathcal{T}\mathbf{x}$, als $n \to \infty$. □

5.5.11 Voorbeeld

Als $\mathcal{K}$ compact is en $\{\mathbf{e}_n\}$ is een orthonormale basis, dan $\|\mathcal{K}\mathbf{e}_n\| \to 0$.

Hoofdstuk 6 Spectrale Ontbinding van Operatoren

6.1 Eigenwaarden en eigenvectoren

Als in $\mathbb{C}^N$ de matrixvergelijking $[\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}]\underline{x} = \underline{b}$ voor alle $\underline{b} \in \mathbb{C}^N$ een eenduidige oplossing $\underline{x}$ heeft, dan behoort λ tot de 'resolvente verzameling' van de matrix $\mathcal{A}$. De matrix $[\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}]$ heeft dan een inverse $[\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}]^{-1}$. De eigenwaarden van $\mathcal{A}$ zijn de enige complexe getallen die niet tot de resolvente verzameling horen. In ∞-dimensionale Hilbertruimten ligt de situatie veel ingewikkelder.

6.1.1 Definitie (Resolvente en Spectrum)
Gegeven: Een Banachruimte $\mathbf{H}$. Een begrensde operator $\mathcal{A}\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$. Een getal $\lambda \in \mathbb{C}$.
We zeggen: λ behoort tot de *resolvente verzameling* $\rho(\mathcal{A})$ van $\mathcal{A}$ als de operator $[\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}]$ een begrensde inverse $[\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}]^{-1}\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ heeft. De resterende punten in $\mathbb{C}$ noemen we het *spectrum* $\sigma(\mathcal{A})$. Dus $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$.

6.1.2 Definities (Onderverdeling van Spectrum)
Gegeven: Als in vorige definitie.
We zeggen: λ is een *eigenwaarde* van $\mathcal{A}$ als er een vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ is, zodat $\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. De verzameling van alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ noemen we het *puntspectrum* van $\mathcal{A}$.
We zeggen: λ behoort tot het *continue spectrum* van $\mathcal{A}$, als $[\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}]$ weliswaar injectief is, maar een onbegrensde inverse heeft, die slechts een dicht definitiegebied $\mathbf{D}([\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}]^{-1}) = \mathbf{R}([\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}])$ heeft.
We zeggen: λ behoort tot het *residuale spectrum* van $\mathcal{A}$, als λ wel tot het spectrum behoort, maar tot geen van beide bovenstaande categorieën.
Een of meer van deze drie categorieën kunnen leeg zijn.

6.1.3 Voorbeelden

a) Laat $m(x)$ een begrensde (complexwaardige) continue functie zijn op het interval $[a, b]$. We definieren de vermenigvuldigingsoperator $\mathcal{M}\colon \mathbb{L}_2((a, b)) \to \mathbb{L}_2((a, b))$ door $\mathcal{M}u(x) = m(x)u(x)$. Het spectrum $\sigma(\mathcal{M})$ van $\mathcal{M}$ is gelijk aan $m([a, b])$. Als $\lambda \in \rho(\mathcal{M})$ dan $[\mathcal{M}-\lambda\mathcal{I}]^{-1}f(x) = \frac{f(x)}{m(x)-\lambda}$. In het bijzondere geval dat de 'vermenigvuldiger' m constant is ($= C$, zeg) op een deelinterval $(c, d) \subset (a, b)$, dan zijn alle functies in $\mathbb{L}_2((a, b))$ die 0 zijn buiten (c, d) eigenfuncties met eigen waarden C. Als de vermenigvuldiger m op een omgeving van $\alpha \in (a, b)$ niet-constant is, dan behoort $m(\alpha)$ tot het continue spectrum van $\mathcal{M}$.

b) Als we in het vorige voorbeeld $\mathbb{L}_2((a,b))$ vervangen door $\mathcal{C}([a,b])$, dan gaan alle beweringen door met dien verstande dat we 'continue spectrum' moeten vervangen door 'residuale spectrum'.

c) Laat de *Fredholmoperator* $\mathcal{K}\colon \mathbb{L}_2((0,1)) \to \mathbb{L}_2((0,1))$ gegeven zijn door $\mathcal{K}u(x) = \int_0^1 k(x,y)u(y)\,dy$, met $k(x,y) = \begin{cases} (1-x)y, & \text{als } 0 \le y \le x \\ (1-y)x, & \text{als } x \le y \le 1 \end{cases}$,
Dus $\mathcal{K}u(x) = (1-x)\int_0^x u(y)\,dy + x\int_x^1 (1-y)u(y)\,dy$. Een eenvoudige rekenpartij leert dat de functies $u_n(x) = \sin n\pi x$, met $n \in \mathbb{N}$, eigenfuncties zijn met eigenwaarde $\lambda_n = \frac{1}{n^2\pi^2}$. Het continue spectrum bestaat uit één punt: 0. Merk op dat $\mathcal{K}u(0) = \mathcal{K}u(1) = 0$, $-\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{K}u(x) = u(x)$, $\mathcal{K}(-\frac{d^2}{dx^2}) = u(x)$. De laatste gelijkheid alleen als $u(0) = u(1)$! Blijkbaar is $\mathcal{K}^{-1} = -\frac{d^2}{dx^2}$ op functies met $u(0) = u(1)$. In overeenstemming hiermee geldt $-\frac{d^2}{dx^2}u_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}u_n(x)$.

6.1.4 Definitie (Eigenruimte)

Gegeven: Een begrensde lineaire operator $\mathcal{A}$ op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. Veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde is van $\mathcal{A}$.
Dan heet $\mathbf{E}_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H} \,|\, \mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} = \mathbf{N}([\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}])$ de *eigenruimte bij eigenwaarde* λ.
De dimensie van $\mathbf{E}_\lambda$ wordt vaak de *multipliciteit van de eigenwaarde* λ genoemd. De multipliciteit kan 1, 2, 3, ... of ∞ zijn.

6.1.5 Stelling

Gegeven: Als in voorafgaande definitie.

i) Eigenruimten zijn gesloten lineaire deelruimten.

ii) Als $\mathcal{T}$ een begrensd inverteerbare operator in $\mathbf{H}$ is, dan hebben $\mathcal{A}$ en $\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$ hetzelfde spectrum en ook dezelfde eigenwaarden.

Bewijs.
i) Eigenruimten zijn nulruimten van begrensde operatoren en dus gesloten.
ii) $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ heeft precies dan een begrensde inverse als $\mathcal{T}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A})\mathcal{T}^{-1}$ dat heeft. □

6.1.6 Voorbeeld

Laat de operator $\mathcal{B}$ in $\mathbb{L}_2((0,2\pi))$ gedefinieerd zijn door
$\mathcal{B}u(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y)u(y)\,dy$. Probeer, om eigenfuncties te vinden, de Ansatz: $u(x) = a\cos x + b\sin x$. Blijkbaar is $\lambda = \pi$ een eigenwaarde met

multipliciteit 2. Voorts is $\lambda = 0$ een eigenwaarde van ∞-e multipliciteit. $\mathbf{E}_\pi = \text{span}\{\cos x, \sin x\}$, $\mathbf{E}_0 = \{\cos x, x, \sin x\}^\perp$.

6.1.7 Stelling

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$*. Een operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$*. Een eigenwaarde* λ *van* $\mathcal{A}$.

i) Voor alle eigenwaarden λ *geldt* $|\lambda| \leq \|\mathcal{A}\|$*. Dit geldt ook voor alle andere punten van het spectrum* $\sigma(\mathcal{A})$ *van* $\mathcal{A}$.

ii) Als $\mathcal{A}$ *zelfgeadjungeerd is, dan zijn alle eigenwaarden* $\lambda \in \mathbb{R}$ *en voldoen aan* $|\lambda| \leq \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{A}\mathbf{x}\,, \mathbf{x})|$.

iii) Als $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\ \big[(\mathcal{A}\mathbf{x}\,, \mathbf{x}) > 0\big]$*, dan zijn alle eigenwaarden* $\lambda > 0$.

iv) Als $\mathcal{A}$ *unitair is, dan geldt voor alle eigenwaarden* $|\lambda| = 1$.

Bewijs.

i) $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ is precies dan begrensd inverteerbaar als $\mathcal{I} - \frac{1}{\lambda}\mathcal{A}$ dat is. Laatstgenoemde is inverteerbaar met de Neumannreeks, cf.4.1.18, als $\|\frac{1}{\lambda}\mathcal{A}\| < 1$. Dus als $|\lambda| > \|\mathcal{A}\|$. Het hele spectrum moet zich dus bevinden binnen een schijf om 0 met straal $\|\mathcal{A}\|$. Zie ook Voorbeeld 5.1.16.

ii) Stel dat λ een eigenwaarde met eigenvector $\mathbf{u}$ is van $\mathcal{A}$. Dan $\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{u}) = (\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\lambda\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \overline{\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Voorts geldt, met i) en Stelling 5.2.12, $|\lambda| \leq \|\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{A}\mathbf{x}\,, \mathbf{x})|$.

iii) Met de notatie van ii): $\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{u}) > 0$. Dus $\lambda > 0$.

iv) Met de notatie van ii): $|\lambda|^2\|\mathbf{u}\|^2 = (\lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = (\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A}^\star\mathcal{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$. Dus $|\lambda| = 1$. $\square$

We vermelden nu, zonder bewijs, een stelling die de plek in het complexe vlak waar het spectrum van een zelfgeadjungeerde operator zich kan bevinden, nog verder inperkt.

6.1.8 Stelling

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *en een zelfgeadjungeerde operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$*. Dan geldt:* $\sigma(\mathcal{A}) \subset [m, M]$*, met* $m = \inf\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathcal{A}\mathbf{x}\,, \mathbf{x})$ *en* $M = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathcal{A}\mathbf{x}\,, \mathbf{x})$.

De volgende stelling is, in het bijzonder, van toepassing op zelfgeadjungeerde en unitaire operatoren.

6.1.9 Stelling
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *en een normale operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$. *Twee eigenvectoren* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$ *met* $\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ *en* $\mathcal{A}\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$. *Veronderstel tenslotte dat* $\lambda \neq \mu$.
Dan geldt: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. *Anders gezegd* $(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = 0$.

Bewijs.
• Als $\mathcal{A}$ normaal is, dan is $\mathcal{A} - \alpha\mathcal{I}$ ook normaal en $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}: \; \|(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{I})\mathbf{x}\| = \|(\mathcal{A}^{\star} - \overline{\alpha}\mathcal{I})\mathbf{x}\|$. Zie Stelling 5.3.2. Dus $\mathcal{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} \;\Rightarrow\; \mathcal{A}^{\star}\mathbf{x} = \overline{\alpha}\mathbf{x}$.
• $\mu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mu\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathcal{A}^{\star}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\overline{\lambda}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Dus $(\mu - \lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Dus $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. □

6.1.10 Stelling
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *en een compacte zelfgeadjungeerde operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$. *Veronderstel* $\mathcal{A} \neq 0$.
Er geldt:

i) $\mathcal{A}$ *heeft een eigenwaarde* λ *met* $|\lambda| = \|\mathcal{A}\|$. *Dus* $\lambda = +\|\mathcal{A}\|$ *of* $\lambda = -\|\mathcal{A}\|$.

ii) $\exists \mathbf{w} \in \mathbf{H},\; \mathbf{w} \neq \mathbf{0}\big[\,|(\mathcal{A}\mathbf{w}\,,\,\mathbf{w})| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{A}\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x})|\,\big]$.

Bewijs.
i) Omdat bij definitie $\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{u}\|$, is er een rij $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathbf{H}$, met $\|\mathbf{u}_n\| = 1$ en $\|\mathcal{A}\mathbf{u}_n\| \to \|\mathcal{A}\|$, als $n \to \infty$. Een eenvoudige rekenpartij leert $\|\mathcal{A}^2\mathbf{u}_n - \|\mathcal{A}\mathbf{u}_n\|^2\mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathcal{A}\mathbf{u}_n\|^2\{\|\mathcal{A}\|^2 - \|\mathcal{A}\mathbf{u}_n\|^2\}$. Dus $\|\mathcal{A}^2\mathbf{u}_n - \|\mathcal{A}\mathbf{u}_n\|^2\mathbf{u}_n\| \to 0$ als $n \to \infty$. Omdat $\mathcal{A}^2$ compact is, bevat $\{\mathcal{A}^2\mathbf{u}_n\}$ een convergente deelrij die we noteren met $\{\mathcal{A}^2\mathbf{u}_{n(k)}\}$. Schrijf $\mathcal{A}^2\mathbf{u}_{n(k)} \to \|\mathcal{A}\|^2\mathbf{v}$ als $k \to \infty$. Dit kan zo geschreven worden omdat $\|\mathcal{A}\| > 0$. Schat nu $\|\|\mathcal{A}\|^2\mathbf{v} - \|\mathcal{A}\|^2\mathbf{u}_{n(k)}\| \leq$
$\|\|\mathcal{A}\|^2\mathbf{v} - \mathcal{A}^2\mathbf{u}_{n(k)}\| \;+\; \|\mathcal{A}^2\mathbf{u}_{n(k)} - \|\mathcal{A}\mathbf{u}_{n(k)}\|^2\mathbf{u}_{n(k)}\| \;+$
$+\; \|\|\mathcal{A}\mathbf{u}_{n(k)}\|^2\mathbf{u}_{n(k)} - \|\mathcal{A}\|^2\mathbf{u}_{n(k)}\| \;\to\; 0$, als $k \to \infty$. Blijkbaar
$\|\|\mathcal{A}\|^2\mathbf{v} - \|\mathcal{A}\|^2\mathbf{u}_{n(k)}\| = \|\mathcal{A}\|^2\|\mathbf{v} - \mathbf{u}_{n(k)}\| \to 0$, als $k \to \infty$. Dus $\mathbf{u}_{n(k)} \to \mathbf{v}$. Omdat $\forall k \in \mathbb{N}: \; \|\mathbf{u}_{n(k)}\| = 1$, is ook $\|\mathbf{v}\| = 1$. Aldus vinden we dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van $\mathcal{A}^2$ met eigenwaarde $\|\mathcal{A}\|^2$. Uitgeschreven $\mathcal{A}^2\mathbf{v} = \|\mathcal{A}\|^2\mathbf{v}$, of ook, $\big(\mathcal{A} - \|\mathcal{A}\|\big)\big(\mathcal{A} + \|\mathcal{A}\|\big)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Noem nu $\big(\mathcal{A} + \|\mathcal{A}\|\big)\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Als $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ dan is het een eigenvector met eigenwaarde $\|\mathcal{A}\|$. Als $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ dan is $\mathbf{v}$ een eigenvector met eigenwaarde $-\|\mathcal{A}\|$.
ii) Laat $\mathbf{w}$, $\|\mathbf{w}\| = 1$ een eigenvector zijn met eigenwaarde $\pm\|\mathcal{A}\|$. Dan $|(\mathcal{A}\mathbf{w}, \mathbf{w})| = |(\lambda\mathbf{w}, \mathbf{w})| = |\lambda|\|\mathbf{w}\|^2 = |\lambda| = \|\mathcal{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{A}\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x})|$. □

6.1.11 Stelling

Gegeven: Een separabele Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *en een compacte zelfgeadjungeerde operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$.
Er geldt:

i) De verzameling eigenwaarden van $\mathcal{A}$ *bevat een hoogstens aftelbaar oneindig aantal reële getallen. Notatie voor deze verzameling:* $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, *met* $N \in \mathbb{N}$ *of* $N = \infty$.

ii) Als $N = \infty$, *dan geldt:* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Bewijs.
i) Bij elke eigenwaarde hoort minstens een eigenvector. Deze eigenvectoren vormen een orthogonaal stelsel. Omdat $\mathbf{H}$ separabel verondersteld is, kan dit orthogonale stelsel hoogstens een aftelbaar aantal vectoren bevatten. Het aantal *verschillende* eigenwaarden kan dus hoogstens aftelbaar zijn.

ii) Beschouw het geval dat er ∞ veel eigenwaarden λ_n met respectievelijke eigenvectoren $\mathbf{u}_n$, $\|\mathbf{u}_n\| = 1$ zijn. Dan is $\{\mathbf{u}_n\}$ een orthonormaal stelsel. Met Stelling 5.5.10.ii volgt dan $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{A}\mathbf{u}_n\|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n|^2 \|\mathbf{u}_n\|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n|^2$.
□

6.1.12 Voorbeeld

Beschouw $\mathbb{L}_2((0, 2\pi))$ met operator $\mathcal{B}$, gedefinieerd door
$\mathcal{B}u(x) = \int\limits_0^{2\pi} k(x-y)u(y)\,dy$. We veronderstellen dat k een 2π-periodieke continue functie op $\mathbb{R}$ is. $\mathcal{B}$ is een Hilbert-schmidt-operator, dus compact. De functies $u_n(x) = e^{inx}$ zijn eigenfuncties van $\mathcal{B}$ met eigenwaarde $\lambda_n = \int\limits_0^{2\pi} k(s)e^{ins}\,ds$. Deze eigenwaarden zijn reëel als k een even functie is, dus als $k(s) = k(-s)$. Dit is precies het geval als $\mathcal{B}$ zelfgeadjungeerd is. We constateren dat $\lambda_n \to 0$ omdat het Fouriercoëfficiënten zijn. Dit komt dus overeen met wat voorgaande stelling op algemene gronden beweert.

6.2 Spectrale resolutie van compacte zelfgeadjungeerde operatoren

Eerst construeren we 'kunstmatig' een grote klasse van zelfgeadjungeerde operatoren. Daarna laten we zien dat iedere concrete compacte zelfgeadjungeerde operator een heel speciaal exemplaar uit deze klasse is.

6.2.1 Stelling

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Een rij van, onderling orthogonale, projectieoperatoren* $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{B}(\mathbf{H})$. *Een rij* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, *met* $\lambda_n \to 0$, *als* $n \to \infty$.
Dan geldt:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{P}_n$ *is convergent in* $\mathbf{B}(\mathbf{H})$.

ii) *Laat* $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{P}_n$. *Elk der* λ_n *is een eigenwaarde van* $\mathcal{A}$. *De enig mogelijke overige eigenwaarde is* 0.

iii) $\mathcal{A}$ *is een normale operator.*

iv) $\left[\forall n \in \mathbb{N} : \quad \lambda_n \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow \mathcal{A}^{\star} = \mathcal{A}$.

v) $\left[\forall n \in \mathbb{N} : \quad \dim \mathcal{P}_n(\mathbf{H}) < \infty\right] \Rightarrow \mathcal{A}$ *is compact.*

Bewijs.
i) Merk op dat $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}$ de vectoren $\mathcal{P}_n\mathbf{x}$ alle onderling orthogonaal zijn. Neem $\varepsilon > 0$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zo groot dat $\forall n \geq N : \ |\lambda_n| \leq \varepsilon$. Neem $k > m > N$, dan $\| \sum_{n=m}^{n=k} \lambda_n \mathcal{P}_n \mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=m}^{n=k} \|\lambda_n \mathcal{P}_n \mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=m}^{n=k} |\lambda_n|^2 \|\mathcal{P}_n \mathbf{x}\|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{n=m}^{n=k} \|\mathcal{P}_n \mathbf{x}\|^2 = \varepsilon^2 \| \sum_{n=m}^{n=k} \mathcal{P}_n \mathbf{x}\|^2 \leq \varepsilon^2 \| \sum_{n=m}^{n=k} \mathcal{P}_n\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 \leq \varepsilon^2 \|\mathbf{x}\|^2$. Dus $\| \sum_{n=m}^{n=k} \lambda_n \mathcal{P}_n\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \{\| \sum_{n=m}^{n=k} \lambda_n \mathcal{P}_n \mathbf{x}\|\} \leq \varepsilon^2$. Blijkbaar is $\{\mathcal{A}_N\}$ met $\mathcal{A}_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \mathcal{P}_n$ een Cauchyrij in $\mathbf{B}(\mathbf{H})$. Deze convergeert naar een begrensde operator $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$, zeg.

ii) Als $\mathbf{u}_m \in \mathbf{R}(\mathcal{P}_m) = \mathcal{P}_m(\mathbf{H})$, dan geldt $\mathcal{A}\mathbf{u}_m = \lambda_m \mathbf{u}_m$. Dus λ_m is alvast een eigenwaarde van $\mathcal{A}$. Nu de zoektocht naar mogelijke andere eigenwaarden. Veronderstel $\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Noteer met $\mathcal{Q}$ de projectie op $\mathbf{R}(\mathcal{A})^{\perp}$. Schrijf $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}_n + \mathbf{w}$, met $\mathbf{v}_n = \mathcal{P}_n \mathbf{u}$ en $\mathbf{w} = \mathcal{Q}\mathbf{u}$. Dan geldt $\mathcal{A}\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbf{v}_n = \lambda\big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\big)$ oftewel $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)\mathbf{v}_n + \lambda \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Alle termen in deze uitdrukking staan onderling $\perp$, dus zijn ze allemaal $\mathbf{0}$. Gevolg $\lambda = 0$ of $\lambda = \lambda_k$ voor zekere $k \in \mathbb{N}$.

iii) Uitschrijven van $(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}^{\star}\mathbf{y})$ leert dat $\mathcal{A}^{\star} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \mathcal{P}_n$. Omdat $\forall m, n \in \mathbb{N} : \ \mathcal{P}_m \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n \mathcal{P}_m = \delta_{mn} \mathcal{P}_m$, laat zich narekenen dat $\mathcal{A}\mathcal{A}^{\star} = \mathcal{A}^{\star}\mathcal{A}$.

iv) Bijzonder geval van iii)

v) Volgens i) is $\mathcal{A}$ de limiet in $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ van de operatoren $\mathcal{A}_N$. Uit de hier gemaakte aanname volgt dat alle $\mathcal{A}_N$ eindige rang hebben, dus zeker compact zijn. Volgens Stelling 4.1.17.ii is de limietoperator dan ook compact. □

6.2.2 Stelling

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *met* $\dim \mathbf{H} = \infty$. *Een zelfgeadjungeerde compacte operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$.
Dan is er: Een orthonormaal stelsel $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ *met* $\mathcal{A}\mathbf{u}_n = \lambda_n \mathbf{u}_n,\ \lambda_n \neq 0$, *zodanig dat iedere* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ *uniek te schrijven is als* $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n$. *Hierin* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *en* $\mathcal{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Bewijs.
• Volgens Stelling 6.1.10 is er een eigenwaarde λ_1 met $|\lambda_1| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})|$. Laat $\mathbf{u}_1$, $\|\mathbf{u}_1\| = 1$ een bijbehorende eigenvector zijn, dus $\mathcal{A}\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$. Beschouw nu de gesloten lineaire deelruimte $\mathbf{W}_1 = \{\mathbf{u}_1\}^{\perp}$. We beweren dat $\mathbf{W}_1$ een invariante deelruimte is, dat wil zeggen $\mathcal{A}(\mathbf{W}_1) \subseteq \mathbf{W}_1$. Dit zien we als volgt in: $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{W}_1 :\ (\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{u}_1) = \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = 0$.
De deelruimte $\mathbf{W}_1$ is zelf een Hilbertruimte. We passen wederom Stelling 6.1.10 toe. Er is een eigenwaarde λ_2 met $|\lambda_2| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{W}_1,\ \|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})|$. Laat $\mathbf{u}_2$, $\|\mathbf{u}_2\| = 1$ een bijbehorende eigenvector zijn, dus $\mathcal{A}\mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2$. Beschouw nu de gesloten lineaire deelruimte $\mathbf{W}_2 = \{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}^{\perp}$. Net als boven kun je laten zien dat ook $\mathcal{A}(\mathbf{W}_2) \subseteq \mathbf{W}_2$. Inductief kun je dit proces willekeurig ver voortzetten. Veronderstel dat je eigenwaarden $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ met eigenvectoren $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ gevonden hebt. Dan blijkt dat $\mathbf{W}_n = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n\}^{\perp}$ wederom een invariante deelruimte is. De eigenwaarde λ_{n+1} wordt dan gevonden door, $|\lambda_{n+1}| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{W}_n,\ \|\mathbf{x}\|=1} |(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})|$. We vinden zo dat $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq \|\lambda_{n+1}|$.
• Het boven geschetst proces kan na een eindig aantal stappen, zeg N, uitkomen op $\lambda_{N+1} = 0$. Dan kan $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ geschreven worden als $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n + \mathbf{w}$ met $\alpha_j = (\mathbf{u}_j, \mathbf{x})$ en $\mathcal{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$.
• Het bovengeschetste proces kan alsmaar voortduren. Stelling 6.1.11 zegt dan $|\lambda_n| = \|\mathcal{A}\mathbf{u}_n\| \to 0$, als $n \to \infty$. Definieer de gesloten lineaire deelruimte $\mathbf{W}$ door $\mathbf{W} = \overline{\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n, \cdots \rangle}$. Schrijf nu $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n + \mathbf{v}$ met $\alpha_n = (\mathbf{u}_n, \mathbf{x})$ en $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{\perp}$. Definieer $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. Hiermee $\forall n \in \mathbb{N}$: $|(\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})| = \|\mathbf{v}\|^2 |(\mathcal{A}\mathbf{w}, \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{v}\|^2 \sup_{\|\mathbf{u}\|\leq 1} \{|(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})| \,\big|\, \mathbf{u} \in \mathbf{W}_n\} = \|\mathbf{v}\|^2 |\lambda_n|$.
Omdat $|\lambda_n| \to 0$ als $n \to \infty$, moet $(\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. Dus $\mathcal{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

Nu is alles in gereedheid gebracht voor het hoofdresultaat van deze sectie.

6.2.3 Stelling (Spectraalstelling voor compacte zelfgeadjungeerde operatoren. 1e versi

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *met* $\dim \mathbf{H} = \infty$. *Een zelfgeadjungeerde compacte operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$.
Dan is er: Een orthonormale basis $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathbf{H}$, *bestaande uit eigenvectoren van* $\mathcal{A}$, *zodat*

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathbf{v}_n\,,\,\mathbf{x})\mathbf{v}_n.$$

Hier geldt $\mathcal{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n$, *de eigenwaarden* λ_n *zijn reëel. De* λ_n *zijn niet persé verschillend van elkaar maar een reëel getal* $\neq 0$ *kan hoogstens een eindig aantal keren als eigenwaarde optreden. Tenslotte geldt nog dat* $\lambda_n \to 0$ *als* $n \to \infty$.

Bewijs.
Als in het bewijs van vorige stelling $\mathbf{W}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, dan is blijkbaar het orthonormale stelsel $\{\mathbf{u}_n\}$ uit de vorige stelling een orthonormale basis. Kies dan $\forall n \in \mathbb{N}: \ \mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n$.
Als $\mathbf{W}^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}$, kies dan een orthonormale basis $\{\mathbf{w}_m\} \subset \mathbf{W}^{\perp}$. Natuurlijk $\forall m \in \mathbb{N}: \ \mathcal{A}\mathbf{w}_m = \mathbf{0}$. Kies nu de basis $\{\mathbf{v}_k\} \subset \mathbf{H}$ op de volgende manier: $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_n$ als $k = 2n - 1$ en $\mathbf{v}_k = \mathbf{w}_m$ als $k = 2m$. Je zet beide bases dus om-en-om in een rij achter elkaar. Deze basis vervult al onze verlangens. $\square$

6.2.4 Stelling (Spectraalstelling voor compacte zelfgeadjungeerde operatoren. 2e versi

Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ *met* $\dim \mathbf{H} = \infty$. *Een zelfgeadjungeerde compacte operator* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$.
Dan kan $\mathcal{A}$ *geschreven worden in de vorm*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \mathcal{P}_n.$$

Met:
- $N \in \mathbb{N}$ *of* $N = \infty$.
- *Alle* μ_n *zijn onderling verschillend en zijn eigenwaarden van* $\mathcal{A}$.
- *De operatoren* $\mathcal{P}_n$ *zijn projecties op de eigenruimten* $\mathbf{E}_{\mu_n}$ *en* $\mathcal{P}_n\mathcal{P}_m = \delta_{mn}\mathcal{P}_n$.
- *Als* $\mu_n \neq 0$ *dan* $\dim \mathbf{E}_{\mu_n} < \infty$. *Dus* $\mathcal{P}_n$ *heeft dan eindige rang.*
- *Als* $N \in \mathbb{N}$ *dan is er een eigenwaarde* 0 *en* $\dim \mathbf{E}_0 = \infty$.
- *Als* $N = \infty$ *dan* kan *een der* μ_n *gelijk* 0 *zijn. Altijd geldt* $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

Bewijs.
Na alles wat we meegemaakt hebben is dit slechts een boekhoudkundige kwestie. Zet in $\{\mu_n\}$ alle getallen die als eigenwaarde van $\mathcal{A}$ optreden op een rij. Anders dan in de rij $\{\lambda_j\}$ kan in de rij $\{\mu_n\}$ elk getal slechts één maal optreden. Neem nu voor $\mathcal{P}_n$ de projectie op de eigenruimte $\mathbf{N}(\mathcal{A}-\mu_n\mathcal{I})$. Met eventuele uitzondering van de $\mathbf{0}$-ruimte zijn al deze eigenruimten eindigdimensionaal. Herschrijf nu de ontbindingen in voorgaande twee stellingen onder gebruikmaking der $\mathcal{P}_n$'s. Een handige formule is $\mathcal{P}_n\mathbf{x} = \sum_{\{j \,|\, \lambda_j=\mu_n\}} (\mathbf{v}_j, \mathbf{x})\mathbf{v}_j$. $\square$

6.2.5 Opmerkingen

a) Als alle eigenwaarden λ_n (strict) positief zijn, dan is $\mathcal{A}$ (strict) positief.

b) Functies van zelfgeadjungeerde compacte operatoren kunnen gedefinieerd worden door $f(\mathcal{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\mathcal{P}_n$. Hierbij valt te denken aan $e^{\mathcal{A}}$ en $\mathcal{A}^{\alpha}$, voor $\alpha > 0$ (en alle $\lambda_n > 0$).

c) De uitdrukking $\mathcal{B}\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\mathcal{P}_n\mathbf{x}$ is zinvol voor iedere begrensde rij $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, en definieert een begrensde operator $\mathcal{B}$.

6.2.6 Stelling
Gegeven: Een Hilbertruimte $\mathbf{H}$. *Twee compacte zelfgeadjungeerde operatoren* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ *met* $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.
Er bestaat: Een orthonormale basis van $\mathbf{H}$ *die helemaal uit gemeenschappelijke eigenvectoren van* $\mathcal{A}$ *en* $\mathcal{B}$ *bestaat.*

Bewijs.
Laat μ_n een eigenwaarde van $\mathcal{A}$ zijn met eigenruimte $\mathbf{U}_n = \mathcal{P}_n(bH)$. Deze eigenruimte is een invariante deelruimte voor $\mathcal{B}$. Immers, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{U}_n :\ \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{x}) = \mathcal{B}\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{B}(\mu_n\mathbf{x}) = \mu_n\mathcal{B}\mathbf{x}$. Dus $\mathcal{B}\colon \mathbf{U}_n \to \mathbf{U}_n$. Omdat $\mathbf{U}_n$ een Hilbertruimte is, kan met toepassing van de voorafgaande stellingen in $\mathbf{U}_n$ een basis van eigenvectoren van $\mathcal{B}$ gekozen worden. Deze laatste zijn al eigenvectoren met eigenwaarde μ_n van $\mathcal{A}$.
Herhaling van deze procedure voor alle eigenruimten $\mathbf{U}_n$ van $\mathcal{A}$ levert dan de gezochte basis van gemeenschappelijke eigenvectoren. $\square$

6.2.7 Opmerking Bovenstaande stelling kan ook bewezen worden voor grotere aantallen (meer dan 2) commuterende operatoren. Als de gemeenschappelijke eigenruimten allemaal 1-dimensionaal zijn noemt men zo'n set operatoren in de quantummechancia een *volledig stel observabelen* . De bijbehorende set eigenwaarden, die dan de 1-dimensionale eigenruimten uniek vast leggen heten dan *goede quantumgetallen*. Tot overmaat van ramp voor arme onwetende wiskundigen wordt die benaming ook wel eens gegeven aan de set van observabelen zelf.

6.2.8 Voorbeeld (Een Sturm-Liouville probleem)
Op het interval $[-1,1]$ beschouwen we het eigenwaardeprobleem

$$\big[-\frac{d}{d\,x}a(x)\frac{d}{d\,x}+b(x)\big]u(x)=\lambda u(x), \qquad u'(-1)=u'(1)=0.$$

Hierin zijn de coëfficientfuncties $a(x)$ en $b(x)$ continu en naar beneden begrensd, dat wil zeggen
$\exists\gamma>0\,\forall x\in[-1,1]:\ a(x)\geq\gamma>0,\ b(x)\geq\gamma>0.$
We gaan bewijzen dat de oplossing van dit probleem bestaat uit een stel eigenfuncties $\{\Theta_n\}_{n=0}^{\infty}$ die een orthonormale basis in $\mathbb{L}_2((-1,1))$ vormen en dat de bijbehorende eigenwaarden $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ naar ∞ gaan als $n\to\infty$.

• Eerst beschouwen we het randwaarde probleem

$$\big[-\frac{d}{d\,x}a(x)\frac{d}{d\,x}+b(x)\big]u(x)=f(x), \qquad u'(-1)=u'(1)=0,$$

met f een willekeurig gegeven functie in $\mathbb{L}_2((-1,1))$.
Dit hebben we in Voorbeeld 5.1.14 omgezet naar het 'variatieprobleem':
Zoek $u\in\mathbb{H}^1([-1,1])$ zodat voor alle $\theta\in\mathbb{H}^1([-1,1])$ voldaan is aan

$$\begin{aligned}\psi(u,\theta)&=\int_{-1}^{1}\{a(x)\overline{Du(x)}D\theta(x)+c(x)\overline{u(x)}\theta(x)\}\,dx\\&=\int_{-1}^{1}\overline{f(x)}\theta(x)\,dx.\end{aligned}$$

We hebben gezien dat de stelling van Lax-Milgram het bestaan van precies één zo'n u garandeert. Onze bedoeling is nu de oplossing u met behulp van een 'Greense functie' uit te drukken in f. Dat wil zeggen, te schrijven met een integraaloperator die op f werkt: $u(x)=\int_{-1}^{1}G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$.

• Teneinde de functie G te verkrijgen beschouwen we het probleem:
Zoek $w\in\mathbb{H}^1([-1,1])$ zodat voor alle $\theta\in\mathbb{H}^1([-1,1])$ voldaan is aan

$$\psi(w,\theta)=\delta_\xi(\theta)=\theta(\xi).$$

Omdat puntevaluatie in een vast gekozen punt $\xi \in [-1,1]$ een continue lineaire functionaal is op $\mathbb{H}^1([-1,1])$ (Voorbeeld 4.3.3), zegt Lax-Milgram (Stelling 5.1.12) dat er in $\mathbb{H}^1([-1,1])$ precies één w is die voldoet. Omdat we ξ door het hele interval $[-1,1]$ willen laten lopen geven we de oplossing w de naam G_ξ. Merk op dat $\forall \xi \in [-1,1]: \; G_\xi \in \mathbb{H}^1([-1,1])$, dus continu is, en voldoet aan

$$\forall \theta \in \mathbb{H}^1([-1,1]): \quad \psi(G_\xi, \theta) = \theta(\xi). \qquad (*)$$

Als we de speciale keuze $\theta = G_\eta$, $\eta \in [-1,1]$ doen, dan volgt

$$\psi(G_\xi, G_\eta) = G_\eta(\xi).$$

Neem hiervan de complex geconjugeerde en gebruik de symmetrie van ψ. Er komt $\overline{G_\eta(\xi)} = G_\xi(\eta)$. In plaats van $G_\xi(\eta)$ bezigen we vanaf nu de meer symmetrische schrijfwijze $G(\eta,\xi)$. De functie G is continu op $[-1,1] \times [-1,1]$ en kan dienst doen als de kern van een zelfgeadjungeerde integraaloperator.

• Vermenigvuldig nu $(*)$ met $\overline{f(\xi)}$. Dit kan geschreven worden als $\psi(f(\xi)G_\xi, \theta) = \overline{f(\xi)}\theta(\xi)$.Integreer dit over $-1 \le \xi \le 1$. Voluit uitgeschreven staat er dan

$$\int_{-1}^{1} d\xi \int_{-1}^{1} \{a(x)\overline{\tfrac{\partial}{\partial x} G(x,\xi) f(\xi)}\tfrac{d}{dx}\theta(x) + c(x)\overline{G(x,\xi)f(\xi)}\theta(x)\}\, dx = \int_{-1}^{1} \overline{f(\xi)}\theta(\xi)\, d\xi.$$

Verwissel nu eerst de integratievolgorde en verwissel daarna $\frac{\partial}{\partial x}$ en de integratie over ξ. Dat geeft

$$\int_{-1}^{1} \{a(x)\overline{[\tfrac{d}{dx}\int_{-1}^{1} G(x,\xi)f(\xi)\, d\xi]}\tfrac{d}{dx}\theta(x) + c(x)\overline{[\int_{-1}^{1} G(x,\xi)f(\xi)\, d\xi]}\theta(x)\}\, dx = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\theta(x)\, dx.$$

Blijkbaar voldoet $u(x) = \int_{-1}^{1} G(x,\xi)f(\xi)\, d\xi$ aan de vergelijking

$\forall\, \theta \in \mathbb{H}^1([-1,1]): \; \psi(u,\theta) = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\theta(x)\, dx.$

• In bovenvermeld variatieprobleem nemen we $\theta = u$. Dan $\forall f \in \mathbb{L}_2((-1,1))$

$$0 < \psi(u,u) = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)}u(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\Big[\int_{-1}^{1} G(x,\xi)f(\xi)\, d\xi\Big]\, dx$$

Hier staat dat onze integraaloperator strict positief is.

• Als u een eigenfunctie met eigenwaarde λ is van het oorspronkelijk gestelde eigenwaardeprobleem, dan moet u voldoen aan (stel $f = \lambda u$)

$$\int_{-1}^{1} G(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = \tfrac{1}{\lambda}u(x).$$

Omdat onze integraaloperator een strict positieve, zelfgeadjungeerde en compacte (want Hilbert-Schmidt) operator is heeft hij een naar 0 dalende rij strict positieve eigenwaarden $\mu_n \downarrow 0$ en een daarbij behorende orthonormale basis van eigenvectoren $\{\Theta_n(x)\}$ voor $\mathbb{L}_2((-1,1))$. Stelling 6.2.3/4. De eigenwaarden van het oorspronkelijk probleem zijn $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$, dus $\lambda_n \uparrow \infty$. Tot slot vermelden we nog de relaties

$$\psi(\Theta_m,\Theta_n) = \lambda_n\delta_{mn} \qquad \text{en} \qquad \psi(\frac{\Theta_m}{\sqrt{\lambda_m}},\frac{\Theta_n}{\sqrt{\lambda_n}}) = \delta_{mn}.$$

• In het super speciale geval dat $a(x) = b(x) = 1$ zijn de eigenfuncties 1, $\sin\frac{\pi}{2}x$, $\cos\pi x$, $\sin\frac{3\pi}{2}x$, $\cos 2\pi x$, $\sin\frac{5\pi}{2}x, \ldots$. De bijbehorende eigenwaarden zijn $1 + \frac{(k\pi)^2}{4}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. Ook de kern $G(x,\xi)$ kan expliciet berekend worden.

6.3 De Fouriertransformatie als unitaire operator in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

6.3.1 Definitie (Fourierintegraal)

Gegeven: $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. Dan heet $\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)\,dx$, de *Fouriergetransformeerde* van f.

6.3.2 Voorbeelden

-$\mathcal{F}\{e^{-\alpha|x|}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$, $\mathcal{F}\{e^{-\beta x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-\frac{k^2}{4\beta}}$, $\mathcal{F}\{f(\beta x)\} = \frac{1}{\beta}\hat{f}(\frac{k}{\beta})$.
-$\mathcal{F}\{\overline{f(x)}\} = \overline{\mathcal{F}\{f(-x)\}}$, $\mathcal{F}\{f(x-y)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}e^{-iky}$.
-$\mathcal{F}\{f'(x)\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}$, als f, $f' \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ en $f(x) \to 0$ als $|x| \to \infty$. -Herhaald toepassen levert: $\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (ik)^n\hat{f}(k)$.
-Laat
$$\Psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},\ n = 0,\ 1,\ 2\ \cdots.$$
Er geldt: $(x + \frac{d}{dx})\Psi_n(x) = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}(x)$ en $\mathcal{F}\{\Psi_n(x)\} = i^n\Psi_n(k)$.

Omdat $\{\Psi\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ een orthonormale basis is, lijkt $\mathcal{F}$ een basis van eigenvectoren te hebben met eigenwaarden i^n. We vermoeden dan ook dat

$\mathcal{F}$ wel een unitaire operator op $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ zal zijn. Een complicatie is echter dat bovenstaande Fourierintegraal voor $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ in het algemeen divergent is. Via de navolgende beschouwingen komen we over deze moeilijkheid heen.

6.3.3 Stelling (Riemann-Lebesgue)

Gegeven: Een functie $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. Een rij van functies $\{f_n\} \subset \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.
Dan geldt:
i) $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ en $\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$.
ii) Als $f_n \to f$ in $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, dan $\sup_{k\in\mathbb{R}} |\hat{f}_n(k) - \hat{f}(k)| \to 0$, als $n \to \infty$.
iii) $\mathcal{F}\colon \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_o(\mathbb{R})$ is een continue lineaire afbeelding.

Bewijs.

i-) $|\hat{f}(k) - \hat{f}(\ell)| = |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{-ikx} - e^{-i\ell x}\} f(x)\, dx| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i(k-\ell)x} - 1||f(x)|\, dx$. Merk op dat de integrand $\leq 2|f(x)|$. Kies een $\varepsilon > 0$. Kies eerst $M > 0$ zo groot dat $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>M} 2|f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Als $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} |f(x)|\, dx$ toevallig gelijk is aan 0, dan zijn we klaar. Zoniet kies dan vervolgens ℓ zo dicht bij k dat $\forall x \in [-M, M]$: $|e^{-i(k-\ell)x} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}\big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} |f(x)|\, dx\big)^{-1}$. Aldus vinden we voor ℓ voldoende dicht bij k dat $|\hat{f}(k) - \hat{f}(\ell)| < \varepsilon$. Blijkbaar is $\hat{f}$ een continue functie.

i–) Omdat $e^{-ikx} = -e^{-ikx-i\pi}$ geldt $\hat{f}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-\frac{\pi}{k})} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\{f(x) - f(x - \frac{\pi}{k})\}\, dx$. De laatste uitdrukking $\to 0$ als $k \to \infty$.

ii) $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{R}} |\hat{f}_n(k) - \hat{f}(k)| = \sup_{k\in\mathbb{R}} |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\{f_n(x) - f(x)\}\, dx| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f_n - f\|_{\mathbb{L}_1}$. Hieruit volgt de bewering.

iii) Staat in ii) als je daar $f_n = 0$ neemt. □

6.3.4 Definitie (Convolutie)

Gegeven: f, $g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$
De *convolutie* $f \star g$ van f en g wordt gedefinieerd door
$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u)g(u)\, du$.

6.3.5 Stelling (Convolutiestelling)

Gegeven: Zie voorgaande definitie.
Er geldt: $f \star g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ *en* $\mathcal{F}\{(f \star g)(x)\} = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$.

Bewijs.
Kwestie van definities uitschrijven en integratievolgorde verwisselen. □

We gaan nu de actie van $\mathcal{F}$ op $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ aanpakken.

6.3.6 Stelling
Gegeven: $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ *met de eigenschap* $\exists M > 0$ *zodat* $f(x) = 0$ *buiten het interval* $[-M, M]$.
Dan geldt: $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ *en* $\|\hat{f}\| = \|f\|$. *($\mathbb{L}_2$-normen!)*

Bewijs.
• We bewijzen de normgelijkheid eerst in het bijzondere geval dat $f = 0$ buiten $[-\pi, \pi]$. Omdat in $\mathbb{L}_2((-\pi, \pi))$ het stelsel $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ een orthonormale basis is, geldt wegens Parseval, $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-inx} f(x)\, dx|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$. Vervang hierin $f(x)$ door $e^{-i\xi x} f(x)$. Dan volgt $\|f\|^2 =$
$= \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n+\xi)|^2$. Dan $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^1 |\hat{f}(n+\xi)|^2\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \|\hat{f}\|^2$
• Als $M > \pi$ kies dan $\lambda > 0$ zodat $g(x) = f(\lambda x) = 0$ buiten $[-\pi, \pi]$. Er geldt $\hat{g}(k) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}(\frac{k}{\lambda})$. Hiermee $\|f\|^2 = \lambda\|g\|^2 = \lambda\|\hat{g}\|^2 = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{\lambda}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})|^2\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \|\hat{f}\|^2$. □

6.3.7 Stelling
Gegeven: $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.
Dan geldt: De rij functies $\{\hat{f}_N(k) = \int\limits_{-N}^{N} f(x) e^{-ikx}\, dx\}_{N=1}^{\infty}$ *is een Cauchy-rij in* $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. *De limiet in* $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$*-zin* $\mathcal{F}f = \hat{f}$ *van deze rij, is goed gedefinieerd en er geldt:*

$$\|\mathcal{F}f\| = \|f\|, \qquad \textit{(Parseval-identiteit)}$$

Bewijs.
Laat $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Noteer met f_N de functie die op $[-N, N]$ gelijk is aan f en daarbuiten 0. Dan geldt $f_N \to f$ in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Toepassing van vorige stelling leert $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\| = \|f_n - f_m\|$. De rij $\{\hat{f}_N\}$ is blijkbaar Cauchy. Tenslotte $\|\mathcal{F}f\| = \|\hat{f}\| = \|\lim\limits_{N\to\infty} \hat{f}_N\| = \lim\limits_{N\to\infty} \|\hat{f}_N\| = \lim\limits_{N\to\infty} \|f_N\| = \|f\|$. □

6.3.8 Stelling
Gegeven: $f,\ g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.
Dan geldt: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)\,dx$.
In inproductnotatie: $(\overline{f}, \hat{g}) = (\overline{\hat{f}}, g)$.
Als voorts $g = \overline{\hat{f}}$ *dan kan* f *teruggevonden worden door* $f = \overline{\hat{g}}$.

Bewijs.
• Voor buiten $[-N, N]$ 'afgekapte' functies f_N en g_N volgt met verwisseling van integratievolgorde en rolverwisseling van x en y dat
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} f(x) \int\limits_{-N}^{N} g(y)e^{-ixy}\,dy\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} g(x) \int\limits_{-N}^{N} f(y)e^{-ixy}\,dy\,dx$. Wegens de continuiteit van het inproduct mag de limiet voor $N \to \infty$ genomen worden en volgt de gewenste identiteit.
• Als $g = \overline{\hat{f}}$ dan $(\overline{f}, \hat{g}) = (\overline{\hat{f}}, g) = (\overline{\hat{f}}, \overline{\hat{f}}) = \|\overline{\hat{f}}\|^2 = \|f\|^2 = \overline{\|f\|^2} = (\hat{g}, \overline{f}) = (\overline{\hat{g}}, f)$. Met Parseval $\|\hat{g}\|^2 = \|g\|^2 = \|\overline{\hat{f}}\|^2 = \|f\|^2$. Met uitschrijven volgt nu $(f - \overline{\hat{g}}, f - \overline{\hat{g}}) = 0$. Dus $f = \overline{\hat{g}}$. □

6.3.9 Stelling (Fourier-inversie op $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$)
Gegeven: $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

Er geldt: $f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikx}\,dk$, *in* $\mathbb{L}_2$*-zin.*

Als bovendien $\hat{f} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, *dan is* $f(x)$ *continu en* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\,dk$.

Bewijs.
Volgens de voorafgaande stelling is $f = \overline{\hat{\overline{\hat{f}}}}$. Dus $f(x) = \overline{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} e^{-ikx}\overline{\hat{f}(k)}\,dk} =$

$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} e^{ikx}\hat{f}(k)\,dk$. Allemaal opgevat als limieten in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. De continuiteit van f volgt net als in 6.3.3. □

6.3.10 Stelling (Parseval algemeen)
Gegeven: $f,\ g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.
Dan geldt: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k)\,dk$.

Bewijs.
Met polarisatie (2.4.1) en (6.3.7) volgt

$(f,g) = \frac{1}{4}\big(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|\hat{f}+\hat{g}\|^2 - \|\hat{f}-\hat{g}\|^2 + i\|\hat{f}+i\hat{g}\|^2 - i\|\hat{f}-i\hat{g}\|^2\big) = (\hat{f},\hat{g})$. □

Het belangrijkste van het voorafgaande wordt samengevat in de volgende stelling.

6.3.11 Stelling (Plancherel)
In $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ is er een operator $\mathcal{F}\colon f \mapsto \hat{f}$, de Fourieroperator*, met de volgende eigenschappen:*

i) $\big[\, f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \,\big] \;\Rightarrow\; \big[\, \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx \,\big]$,

ii) $\| \, \hat{f} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} f(x) e^{-ikx}\, dx \, \| \to 0$ *als* $N \to \infty$.

iii) $\| \, f - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx}\, dk \, \| \to 0$ *als* $N \to \infty$.

iv) $\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$.

v) $\mathcal{F}$ *is unitair. Dat wil zeggen* $\forall f,\, g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})\ \big[\, (f\,,\, g) = (\mathcal{F}f\,,\, \mathcal{F}g) \,\big]$. *Dus* $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}^{(-1)}$.

vi) De Hermite-basis $\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *is een orthonormale basis van eigenvectoren van* $\mathcal{F}$ *en* $\mathcal{F}\Psi_n = i^n \Psi$, *voor* $n = 0,\, 1,\, 2, \ldots$.

Bewijs.
Het enige dat nog niet bewezen is, is dat de 'Hermite-basis' inderdaad een orthonormale basis in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ is. Gelukkig hebben we deze eigenschap ook nergens gebruikt.

• Ter voorbereiding schatten we $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}\big)^2\, dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx =$
$= 2\big[\int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty\big] x^{2n} e^{-x^2}\, dx \le 2\big[1 + \int\limits_1^\infty x^{2n+1} e^{-x^2}\, dx\big] < 2\big[1 + \int\limits_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2}\, dx\big] = 2 + n!$. Dus $\|x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}\| < \sqrt{2+n!}$. Op grond van deze schatting convergeert de reeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^n}{n!} x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (absoluut) in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ naar $e^{-i\alpha x} e^{-\frac{1}{2}x^2} \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

• We gebruiken Stelling 4.1.8.iii. Veronderstel $\exists h \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}_0 :\ h \perp \Psi_n$. Dan ook $\forall n \in \mathbb{N}_0 :\ h \perp x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Gevolg $\forall \alpha \in \mathbb{R} :\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} (h, \frac{(-i\alpha)^n}{n!} x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}) = 0 = (h, e^{-i\alpha x} e^{-\frac{1}{2}x^2})$. Hier staat dat de Fouriergetransformeerde van $\overline{h} e^{-\frac{1}{2}x^2} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ gelijk is aan 0. Dit kan alleen maar als $h = 0$. □

Hoofdstuk 7 Opgaven

0 Voorkennis

0.1 Vectorruimten

0.1.1 Ga na of de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{C}^3$ lineaire deelruimten van $\mathbb{C}^3$ zijn.

(a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = 0\}$

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | x_1 + ix_2 + (1+i)\overline{x_3} = 0\}$

(c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | \operatorname{Re}(x_1) + \operatorname{Im}(x_2) = 0\}$

(d) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | \overline{x_1} + i\ \overline{x_2} = 0\}$

0.1.2 In $\mathbb{C}^3$ zijn de vlakken $x_1 + ix_2 - 2x_3 = 2i + 1$ en $x_2 + x_3 = 2$ gegeven. Geef een parametervoorstelling van de snijlijn van deze vlakken.

0.1.3 Laat ω een positieve reële constante zijn. Laat zien dat de functies f van de vorm $f(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}, t \in \mathbb{R}$ met $A, \varphi \in \mathbb{R}$ een complexe vectorruimte vormen en bepaal een basis van deze vectorruimte.

0.1.4 Beschouw in $C(\mathbb{R})$, de vectorruimte van continue functies op $\mathbb{R}$, het vlak V met parametervoorstelling $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ waarbij $f_1(x) = \sin(x)$ en $f_2(x) = \cos(x)$.
Onderzoek of de functies g_1, g_2 en g_3 met

$$g_1(x) = e^{ix},\ g_2(x) = e^{2ix} \text{ en } g_3(x) = e^{i(x+p)}, p \in \mathbb{C}$$

tot het vlak V behoren.

0.1.5 Laat p en q reële getallen zijn. In $C(\mathbb{R})$ zijn de functies f_1, f_2, g_1, g_2 gedefinieerd door

$$f_1(x) = e^{(p+iq)x}, f_2(x) = e^{(p-iq)x}, g_1(x) = e^{px}\cos(qx), g_2(x) = e^{px}\sin(qx)\ .$$

Laat $W_1 = \langle f_1, f_2 \rangle$ en$W_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$.
Toon aan dat geldt $W_1 = W_2$.

0.1.6 In $\ell_\infty(\mathbb{N})$ zijn gegeven de vectoren

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (1,0,0,0,0,\ldots) \\ \underline{v}_2 &= (0,1,0,0,0,\ldots) \\ &\vdots \\ \underline{v}_n &= (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{plaats n}},0,\ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(a) Bewijs dat voor iedere $N \in \mathbb{N}$ het stelsel $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_N\}$ onafhankelijk is.

(b) Laat zien dat $\{\underline{v}_n\}$ een onafhankelijk stelsel is.

0.1.7 Laat zien dat de functies $f_n(x) = x^n, n = 0, 1, \ldots$ een onafhankelijk stelsel vormen in $C(\mathbb{R})$.

0.1.8 Gegeven zijn de functies $f_n(t) = e^{nt}, n = 0, 1, \ldots$ in de ruimte $C(\mathbb{R})$.
Laat zien dat $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ een onafhankelijk stelsel is.

0.1.9 Wat is de dimensie van het opspansel $\langle \cos(t), \sin(t), \cos(t + \frac{\pi}{4}) \rangle$ in de ruimte $C(\mathbb{R})$?

0.1.10 Beschouw de ruimte $C([0,1])$.
Is het stelsel $\{e^x, 1, x, x^2, \ldots\}$ onafhankelijk?

0.1.11 Beschouw de reële vectorruimte $\mathbb{R}^3$.

(a) Wat is het opspansel van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 1$?

(b) Wat is het opspansel van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 0$?

0.1.12 Beschouw de reële vectorruimte $\mathbb{R}^3$.

(a) Is de eenheidsbol $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ een lineaire deelruimte?

(b) Is de volle kegel $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$ een lineaire deelruimte?

0.2 Lineaire afbeeldingen

0.2.1 Beschouw de loodrechte projectie $\mathcal{P}$ op het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bepaal de matrix van $\mathcal{P}$ ten op zichte van de standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

(b) Bepaal de nulruimte $\mathbf{N}(\mathcal{P})$.

(c) Bepaal de beeldruimte $\mathbf{R}(\mathcal{P})$.

(d) Is de afbeelding orthogonaal, symmetrisch?

(e) Geef een basis van eigenvectoren in $\mathbb{R}^3$.

0.2.2 De vectoren $\underline{v}_i, 1 \le i \le 4$, zijn eigenvectoren met eigenwaarde $\lambda_i = i$ van de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
Laat zien dat $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ een basis in $\mathbb{R}^4$ is.

0.3 Inwendig product

De vectorruimten $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ worden als inproductruimten met het standaardinproduct beschouwd.

0.3.1 In $\mathbb{C}^3$ zijn gegeven $\underline{u} = (1, i, 1+i)$ en $\underline{v} = (-i, 1-i, 1)$.
Bereken $\dfrac{(\underline{u}, \underline{v})}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}$.

0.3.2 Laat $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{C}$.
Bewijs dat $|x_1| + \cdots + |x_N| \le \sqrt{N}\sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_N|^2}$.

0.3.3 Het stelsel vectoren $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_N\}$ in $\mathbb{C}^N$ heeft de eigenschap dat voor alle $\underline{x} \in \mathbb{C}^N$ geldt

$$(0.3.1)\quad \|\underline{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(\underline{v}_k, \underline{x})|^2$$

waarbij $(\cdot, \cdot)$ het gewone inproduct in $\mathbb{C}^N$ is.

(a) Laat zien door invullen van $\underline{x} = \underline{v}_1$ in gelijkheid (0.3.1) volgt dat $\|\underline{v}_1\| \le 1$.

(b) Laat zien door invullen van een vector $\underline{x} \perp \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_N$, $\underline{x} \ne \underline{0}$, in gelijkheid (0.3.1) volgt dat $\|\underline{v}_1\| \ge 1$.

(c) Laat zien dat het stelsel vectoren een orthonormale basis in $\mathbb{C}^N$ is.

0.3.4 De deelruimte $\mathbf{W}$ bestaat uit alle vectoren in $\mathbb{C}^4$ die voldoen aan $x_1 + ix_2 - ix_4 = 0$.
Bepaal het orthoplement $\mathbf{W}^\perp$.

0.3.5 Beschouw de inproductruimte $\mathbb{R}^3$.
Bepaal de loodrechte projectie van de vector $\underline{v} = (2, 1, 3)$ op de lijn met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda(1, 1, 1)$.

0.3.6 Beschouw de inproductruimte $\mathbb{C}^2$.
Bepaal de loodrechte projectie van de vector $\underline{v} = (1, i)$ op de lijn met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda(1, 1)$.

0.4 Complexificatie

0.4.1 Laat $\mathbf{V}$ een reële vectorruimte zijn. Op $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ definiëren we een optelling en een scalaire vermenigvuldiging door

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2),$$

$$(\alpha + i\beta) \cdot (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\alpha\mathbf{a}_1 - \beta\mathbf{a}_2, \alpha\mathbf{a}_2 + \beta\mathbf{a}_1),$$

waarbij $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbf{V}$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Laat zien dat $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ met deze bewerkingen een vectorruimte over $\mathbb{C}$ is. Deze vectorruimte geven we aan met $\mathbf{V}_\mathbb{C}$.

(b) Laat zien dat de volgende stappen terecht zijn:
(1) Identificatie van $(\mathbf{a}, 0) \in \mathbf{V}_\mathbb{C}$ met $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$.
(2) De schrijfwijze $\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2$ voor $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

0.4.2 Het stelsel $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ is een basis in de reële vectorruimte $\mathbf{V}$.
Laat zien dat het stelsel ook een basis in de complexe uitbreiding $\mathbf{V}_\mathbb{C}$ is.

0.4.3 Toon aan dat $(\mathbb{R}^N)_\mathbb{C} = \mathbb{C}^N$.

0.4.4 Een polynoom heet reëel/complex als zijn coëfficiënten reëel/complex zijn.
Laat $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ de vectorruimten van reële polynomen respectievelijk complexe polynomen zijn.
Laat zien dat $\mathbf{V}_\mathbb{C} = \mathbf{W}$.

0.4.5 We beschouwen de vectorruimte $\mathbb{C}^3$ als een reële vectorruimte, die we met $\mathbf{V}$ aangeven. Op $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ definiëren we $(\underline{z}_1, \underline{z}_2)_\mathbb{R} = \mathrm{Re}((\underline{z}_1, \underline{z}_2))$ met $\underline{z}_1, \underline{z}_2$ in $\mathbf{V}$ waarbij $(\cdot, \cdot)$ het complexe inproduct in $\mathbb{C}^3$ is.

(a) Laat zien dat $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}}$ een inproduct is.

(b) Laat zien dat de vectoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ samen met $(i,0,0)$, $(0,i,0)$ en $(0,0,i)$ een orthonormale basis in $\mathbf{V}$ vormen.

0.4.6 Het inproduct in de reële inproductruimte $\mathbf{E}$ wordt aangegeven met $(\cdot,\cdot)$. Laat zien dat door

$$(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)_{\mathbb{C}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) - i(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + i(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)$$

een inproduct op $\mathbf{E}_{\mathbb{C}}$ wordt gedefinieerd.

0.4.7 De afbeelding $\mathcal{A}$ is een orthogonale afbeelding op $\mathbb{R}^N$.
Laat zien dat de complexificatie $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ een orthogonale afbeelding op $\mathbb{C}^N$ is.

1 Vectorruimten van polynomen

1.1 Vectorruimten van polynomen in een reële variabele

1.1.1 Vormen de polynomen van precies graad n een lineaire deelruimte in Pol_1?

1.1.2 Laat zien dat de polynomen $p_k(x) = (x-1)^k, k = 0, 1, \ldots$ een basis vormen in Pol_1.

1.1.3 Elementen in Pol_1 zijn van de vorm $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k, n \in \mathbb{N}_0$.
Beschouw de volgende uitdrukkingen met $f, g \in \mathrm{Pol}_1$:

$$\overline{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} x^k \ \ , f(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^k \ , \ \ (f,g) = \overline{f}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) g(x)\Big|_{x=0} \ .$$

Bewijs dat $(\cdot,\cdot)$ een inproduct is op Pol_1.
Laat zien dat de polynomen $p_k(x) = x^k, k = 0, 1, \ldots$ een orthogonaal stelsel vormen in Pol_1.

1.1.4 De operator $\mathcal{A} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ is een lineaire afbeelding op Pol_1.
Bepaal de nulruimte, $\mathbf{N}(\mathcal{A})$, en de beeldruimte, $\mathbf{R}(\mathcal{A})$, van $\mathcal{A}$.
Bestaat er een lineaire afbeelding $\mathcal{B}$ met $\mathcal{BA} = \mathcal{I}$?
Bestaat er een lineaire afbeelding $\mathcal{B}$ met $\mathcal{AB} = \mathcal{I}$?
De identieke afbeelding duiden we met $\mathcal{I}$ aan.

1.1.5 De operator $\mathcal{E} = x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ is een lineaire afbeelding op Pol_1.
Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{E}$.
Bestaat er een lineaire afbeelding $\mathcal{B}$ met $\mathcal{B}\mathcal{E} = \mathcal{I}$?
Bestaat er een lineaire afbeelding $\mathcal{B}$ met $\mathcal{E}\mathcal{B} = \mathcal{I}$?

1.2 Vectorruimten van polynomen in twee reële variabelen

Voor $f, g \in \mathrm{Pol}_2$ definiëren we de afbeelding $(\cdot,\cdot))_{S_2} : \mathrm{Pol}_2^2 \to \mathbb{C}$ door

$$(f,g)_{S_2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x^2+y^2=1} \overline{f(\underline{x})} g(\underline{x}) \mathrm{d}s \; .$$

Deze afbeelding wordt in verschillende opgaven gebruikt.

1.2.1 Laat zien dat $\mathrm{HomPol}_2(n)$ een lineaire deelruimte van $\mathrm{Pol}_2(n)$ is.
Laat zien dat $\mathrm{HarmHomPol}_2(n)$ een lineaire deelruimte van $\mathrm{HomPol}_2(n)$ is.

1.2.2 Bewijs stelling 1.2.8:
Het stelsel $\left\{ (x+iy)^n (x-iy)^m \;\middle|\; n, m = 0, 1, \ldots \right\}$ is een basis is van Pol_2.

1.2.3 Beschouw de afbeeldingen $\mathcal{A} = x\frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathcal{B} = y\frac{\partial}{\partial y}$ op Pol_2.
Bepaal de nulruimte $\mathbf{N}(\mathcal{A})$ en de beeldruimte $\mathbf{R}(\mathcal{A})$.
Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.
Geef een basis van gemeenschappelijke eigenvectoren van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

1.2.4 Geef de algemene oplossing binnen $\mathrm{HomPol}_2(5)$ van de vergelijking $\Delta u = x^2 y$.

1.2.5 (a) Laat door uitschrijven van

$$\Delta(a_4 x^4 + a_3 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a_1 x y^3 + a_0 y^4) = 0$$

direct zien dat $\dim \mathrm{HarmHomPol}_2(4) = 2$.

(b) Pas dezelfde bewijstechniek toe om te laten zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$\dim \mathrm{HarmHomPol}_2(n) = 2 \; .$$

Aanwijzing: Gebruik de basis $\{(x+iy)^n, (x+iy)^{n-1}(x-iy), \ldots, (x-iy)^n\}$.

1.2.6 Laat zien dat $(\cdot,\cdot)_{S_2}$ geen inproduct op Pol_2 is.

1.2.7 Beschouw de vectorruimte $\mathrm{HarmPol}_2$ van harmonische polynomen in twee variabelen.

(a) Laat zien dat $\{1, (x+iy), (x-iy), (x+iy)^2, (x-iy)^2, \ldots\}$ een basis is in $\mathrm{HarmPol}_2$.

(b) Laat met behulp van de basis uit onderdeel (a) zien dat $(\cdot,\cdot)_{S_2}$ een inproduct in $\mathrm{HarmPol}_2$ is.

(c) Laat zien dat de basis uit onderdeel (a) een orthonormale basis is met betrekking tot $(\cdot,\cdot)_{S_2}$ en dat voor $n \neq m$ geldt dat $\mathrm{HarmHomPol}_2(n) \perp \mathrm{HarmHomPol}_2(m)$.

1.2.8 Laat zien dat ieder polynoom $f \in \mathrm{HomPol}_2(n)$ volledig bepaald wordt door zijn functiewaarden op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$.

1.2.9 Beschouw de vectorruimte $\mathrm{HomPol}_2(n)$.

(a) Laat zien dat $(\cdot,\cdot)_{S_2}$ een inproduct op deze ruimte is.

Beschouw $\mathrm{HomPol}_2(n)$ als een IP-ruimte met het inproduct $(\cdot,\cdot)_{S_2}$.

(b) Onderzoek of het stelsel $\{x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n\}$ een orthogonaal stelsel is.

(c) Bewijs dat $\{(x+iy)^n, (x+iy)^{n-1}(x-iy), \ldots, (x-iy)^n\}$ een orthonormale basis in $\mathrm{HomPol}_2(n)$ is.

1.2.10 Beschouw de vectorruimte Pol_1 van polynomen in één reële variabele. Hoe zou u in deze vectorruimte de lineaire deelruimten $\mathrm{HomPol}_1(n)$, $\mathrm{HarmHomPol}_1(n)$ en $\mathrm{HarmPol}_1$ definiëren, geïnspireerd door de lineaire deelruimten in Pol_2?

1.3 Vectorruimten van polynomen in drie reële variabelen

Voor $f, g \in \mathrm{Pol}_2$ definiëren we de afbeelding $(\cdot,\cdot)_{S_3} : \mathrm{Pol}_3^2 \to \mathbb{C}$ door

$$(f,g)_{S_3} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} \overline{f(\underline{x})} g(\underline{x}) \mathrm{d}\sigma \ .$$

Deze afbeelding wordt in verschillende opgaven gebruikt.

1.3.1 Schrijf de polynomen $Q_{\ell,m}(x,y,z)$ volledig uit voor $-\ell \leq m \leq \ell$, $\ell = 1, 2$ en 3.

1.3.2 Laat zien dat $(\cdot,\cdot)_{S_3}$ een inproduct is op $\mathrm{HomPol}_3(n)$.

1.3.3 Laat zien dat $(\cdot,\cdot)_{S_3}$ een inproduct is op $\mathrm{HarmPol}_3$.
Aanwijzing: Gebruik de eerste identiteit van Green of de stelling:

> Als een harmonische functie nul is op de rand van een gebied, dan is hij nul binnen dat gebied.

Zie Analyse 5.

1.3.4 Beschouw de inproductruimte $\mathrm{HarmPol}_3$ met het inproduct $(\cdot,\cdot)_{S_3}$.
Bereken $\|Q_{\ell,m}\|$ voor $-\ell \leq m \leq \ell$, $\ell = 1, 2$ en 3.

1.3.5 Beschouw de inproductruimte $\mathrm{HarmPol}_3$ met het inproduct $(\cdot,\cdot)_{S_3}$.
Laat zien dat de polynomen $Q_{\ell,m}, -\ell \leq m \leq \ell$, een orthogonaal stelsel vormen. Gebruik cylinder- of bolcoördinaten en integreer eerst over φ.

1.3.6 Laat $\underline{a} \in \mathbb{C}^3$ en $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Laat zien dat $(\underline{a}^{\mathrm{T}}\underline{x})^n \in \mathrm{HomPol}_3(n)$.

(b) Voor welke $\underline{a} \in \mathbb{C}^3$ is $(\underline{a}^{\mathrm{T}}\underline{x})^n$ een element van $\mathrm{HarmHomPol}_3(n)$?

1.3.7 Bereken $\mathcal{L}_z Q_{\ell,m}$ met Cartesische coördinaten.

1.3.8 Beschouw de inproductruimte $\mathrm{HarmPol}_3$ met het inproduct $(\cdot,\cdot)_{S_3}$.
Laat $f \in \mathrm{HarmHomPol}_3(n)$, $g \in \mathrm{HarmHomPol}_3(m)$ met $n \neq m$.
Bewijs dat $f \perp g$.
Aanwijzing: Gebruik de tweede identiteit van Green.

1.3.9 Beschouw de inproductruimte $\mathrm{HomPol}_3(n)$ met het inproduct $(\cdot,\cdot)_{S_3}$.
Laat $f \in \mathrm{HarmHomPol}_3(n)$ en $g \in \mathrm{HarmHomPol}_3(n-2k)$ met $n, k \in \mathbb{N}, n \geq 2k$.
Laat zien dat $f(\underline{x}) \perp \|\underline{x}\|^{2k} g(\underline{x})$.

1.3.10 Laat $f \in \mathrm{HomPol}_3(3)$.
Bewijs dat f te schrijven is als $f(\underline{x}) = g_3(\underline{x}) + \|\underline{x}\|^2 g_1(\underline{x})$ met $g_i(\underline{x}) \in \mathrm{HarmHomPol}_3(i)$, $i = 1, 3$.

1.3.11 Beschouw voor even n de inproductruimte $\mathrm{HomPol}_3(n)$ met het inproduct $(\cdot,\cdot)_{S_3}$.
Laat $f \in \mathrm{HomPol}_3(n)$.
Bewijs dat f orthogonaal opgesplitst kan worden als

$$f(\underline{x}) = g_n(\underline{x}) + \|\underline{x}\|^2 g_{n-2}(\underline{x}) + \|\underline{x}\|^4 g_{n-4}(\underline{x}) + \cdots + \|\underline{x}\|^n g_0(\underline{x})$$

met $g_j \in \mathrm{HarmHomPol}_3(j)$.
Aanwijzing: Tel dimensies.

1.3.12 Beschouw voor oneven n de inproductruimte $\mathrm{HomPol}_3(n)$ met het inproduct $(\cdot,\cdot)_{S_3}$.
Laat $f \in \mathrm{HomPol}_3(n)$.
Hoe luidt de orthogonale opsplitsing van f analoog aan die in de vorige opgave?

1.3.13 Beschouw de inproductruimte $\mathrm{HomPol}_3(n)$ met het inproduct $(\cdot,\cdot)_{S_3}$.
Laat $p \in \mathrm{HarmHomPol}_3(n)$ en $q \in \mathrm{HomPol}_3(n-2)$.
Bewijs dat $p(\underline{x}) \perp \|\underline{x}\|^2 q(\underline{x})$.

2 Genormeerde vectorruimten

2.1 Inproductruimten

2.1.1 In de inproductruimte $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}((0,\pi))$ zijn de functies f_1 en f_2 gegeven door $f_1(t) = t + i$ en $f_2(t) = \sin(t)$.
Bereken (f_1, f_2), $\|f_1\|$ en $\|f_2\|$.

2.1.2 Met $\mathrm{Pol}_1(2)$ wordt de vectorruimte van polynomen van de graad ten hoogste 2 in één variabele weergegeven.
Laat $(p,q) = \overline{p(-1)}q(-1) + \overline{p(0)}q(0) + \overline{p(1)}q(1),\ p,q \in \mathrm{Pol}_1(2)$.

(a) Is $(\cdot,\cdot)$ een inproduct op $\mathrm{Pol}_1(2)$?

(b) Bepaal $q \in \mathrm{Pol}_1(2)$ zodanig dat voor alle $p \in \mathrm{Pol}_1(2)$ geldt dat $p(0) = (q,p)$.

2.1.3 Beschouw Pol_1 de vectorruimte van alle complexe polynomen in één variabele.
Ga na of in ieder van de volgende onderdelen een inproduct op Pol_1 is gedefinieerd.

(a) $(p,q)_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{p^{(n)}(0)}\, q^{(n)}(0)$

(b) $(p,q)_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{p(\frac{1}{2^n})}\, q(\frac{1}{2^n})$

(c) $(p,q)_3 = \int\limits_0^{2\pi} \overline{p(e^{it})}\, q(e^{it})\mathrm{d}t$

(d) $(p,q)_4 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, \overline{p(\frac{1}{n})}\, q(\frac{1}{n})$

2.1.4 In $\mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd $(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ voor vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

(a) Bewijs dat $(\cdot,\cdot)$ een inproduct op $\mathbb{R}^2$ is.

(b) Bereken $\|\underline{e}_1\|$, $\|\underline{e}_2\|$ en de hoek tussen $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ waarbij $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ de standaardbasisvectoren zijn.

(c) Schets de verzameling $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 | (\underline{x},\underline{x}) = 1\}$.

2.1.5 Voor alle f en g in $C([-1,1])$ definieert men

$$(f,g)_1 = \int\limits_{-1}^{1} t^2\overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t \text{ en } (f,g)_2 = \int\limits_{0}^{1} t^2\overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t\ .$$

(a) Onderzoek of dit inproducten op $C([-1,1])$ zijn.

(b) Onderzoek of dit inproducten op Pol_1 zijn.

2.1.6 Zij f een op het interval $[0,1]$ continu differentieerbare functie met $f(0) + f(1) = 0$.

(a) Bewijs met partiële integratie dat $\int\limits_0^1 (\frac{1}{2} - t)f'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

(b) Bewijs dat $\left|\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leq \frac{1}{12}\int\limits_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

2.1.7 Laat zien dat op de vectorruimte $C^1([0,1])$, de ruimte van continu differentieerbare functies op $[0,1]$, door

$$(f,g)_1 = \int_0^1 \left(\overline{f(x)}g(x) + \overline{f'(x)}g'(x)\right) \mathrm{d}x, \;\; f,g \in C^1([0,1])$$

een inproduct gedefinieerd is.

2.1.8 Bepaal een inproduct op de ruimte $C^1([0,2])$ zodanig dat de corresponderende norm wordt gegeven door

$$\|f\| = \left(\int_0^2 \left(e^x |f(x)|^2 + |f'(x)|^2\right) \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

2.1.9 Laat zien dat voor alle continu differentieerbare functies f geldt

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x)f(x) - \sin(x)f'(x))\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

2.1.10 Voor welke $s \in \mathbb{R}$ zit $\{\frac{1}{n^s}\}$ in $\ell_2(\mathbb{N})$?

2.1.11 Beschouw de inproductruimte $\mathbf{E}$.

(a) Voor welke $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in $\mathbf{E}$ geldt $|(\mathbf{x},\mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$?

(b) Voor welke $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in $\mathbf{E}$ geldt $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$?

2.1.12 Beschouw de reële inproductruimte $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}((-3,3))$ bestaande uit reëelwaardige functies.

(a) Laat f en g een even respectievelijk oneven functie rond 0 zijn uit de inproductruimte.
Laat zien dat $f \perp g$.

(b) Laat $f(t) = t+1$ en $g(t) = t^2$.
Bereken de hoek tussen f en g.

2.2 Convergentie in inproductruimten

2.2.1 Beschouw in $\ell_2(\mathbb{N})$ de rijen

$$\underline{b}_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots), n = 1, 2, \ldots$$

$$\underline{b} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$$

Laat zien dat de rij $\{\underline{b}_n\}$ naar $\underline{b}$ convergeert.

2.2.2 Beschouw de inproductruimte $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}((0,1))$.

De functies f_n zijn gedefinieerd door $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{t}{2})^k, t \in [0,1]$.

(a) Bepaal de puntsgewijze limiet f van de rij $\{f_n\}$.

(b) Laat zien dat de rij $\{f_n\}$ naar de functie f uit (a) convergeert.

2.2.3 Beschouw de IP-ruimte $\mathbb{R}^3$.

(a) Wat is de afsluiting van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 2$?

(b) Wat is de afsluiting van de eenheidssfeer $S(\underline{0}, 1)$?

2.2.4 Is een éénpuntsverzameling in een IP-ruimte gesloten?

2.2.5 Geef een verzameling in $\mathbb{R}^2$ die niet open en niet gesloten is.

2.2.6 Laat $\mathbf{x}_0$ een element in de IP-ruimte $\mathbf{E}$ zijn.

(a) Bepaal de afsluiting van $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \big| |(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})| < 1\}$.

(b) Toon aan dat het hypervlak $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \big| (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 1\}$ gesloten is.

Hint: Neem als voorbeeld $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2$ en $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$.

2.2.7 Beschouw in de IP-ruimte $\ell_2(\mathbb{N})$ de verzamelingen

$$U = \{\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N}) \big| x_1 = x_2 = x_3\},$$
$$V = \{\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N}) \big| |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\},$$
$$W = \{\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N}) \big| |x_1| \leq 1, |x_2| < 1\}.$$

Ga na welke van deze deelverzamelingen lineaire deelruimten zijn en welke gesloten zijn.

2.2.8 Beschouw de IP-ruimte $\mathbf{E} = \mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}(-1,1)$.
Laat zien dat $W = \{f \in \mathbf{E} \big| f(0) = 0\}$ niet gesloten is.

2.2.9 Beschouw de IP-ruimte $\mathbf{E} = \mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}(-1,1)$.
Voor $n = 0, 1, \ldots$ definiëren we de functies $p_n(x) = x^n$.

(a) Laat zien dat $\langle p_0, p_1, \ldots \rangle = \mathrm{Pol}_1$.

(b) Laat zien dat Pol_1 niet gesloten is.

2.2.10 Beschouw in $\mathbf{E} = \ell_2(\mathbb{N})$ de vectoren

$$\begin{aligned} \underline{a}_n &= (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ stuks}}, 0, 0, \ldots), n = 1, 2, \ldots, \\ \underline{e}_n &= (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{plaats n}}, 0, \ldots). \end{aligned}$$

(a) Laat zien dat $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots \rangle = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots \rangle = \ell_{2,\mathrm{c}}(\mathbb{N})$.
Hint: Laat zien dat $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_N \rangle = \langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_N \rangle$ voor iedere $N \in \mathbb{N}$.

(b) Laat zien dat $\langle \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots \rangle$ niet dicht ligt in $\mathbf{E}$.

2.2.11 Beschouw de IP-ruimte $\mathbb{R}^N$.
Laat zien dat de enige lineaire deelruimte, die dicht ligt in $\mathbb{R}^N$, gelijk is aan $\mathbb{R}^N$.

2.2.12 (a) Laat zien dat een begrensde rij getallen in $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft.

(b) Laat zien dat een begrensde rij in $\mathbb{R}^N$ een convergente deelrij heeft.

2.2.13 Beschouw de inproductruimte $\ell_2(\mathbb{N})$. Is de verzameling $\{\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N}) \big| x_1 = 1\}$ compact?

2.3 Orthogonale en orthonormale stelsels in IP-ruimten

2.3.1 In de IP-ruimte $\mathbb{C}^4$ zijn gegeven de vectoren $\underline{a}_1 = (1, 0, 0, i)$, $\underline{a}_2 = (1, 1, i, i)$ en $\underline{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$.

(a) Bepaal met Gram-Schmidt een orthonormale basis in $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \rangle$.

(b) Vul de gevonden basis in (a) aan tot een orthonormale basis in $\mathbb{C}^4$.

2.3.2 De functies f_1, f_2, f_3 in $\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((-\pi,\pi))$ zijn gedefinieerd door $f_1(t) = \cos(2t)$, $f_2(t) = e^{it}$ en $f_3(t) = e^{2it}$.
Bepaal een orthonormale basis in $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$.

2.3.3 Beschouw de IP-ruimte $\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((0,\pi))$ met de functies $f_n(x) = \sin((m + 1/2)x), n = 0, 1, \ldots$

(a) Laat zien dat het stelsel $\{f_n\}$ een orthogonaal stelsel is.

(b) Maak van $\{f_n\}$ een orthonormaal stelsel.

2.3.4 Laat $\{\mathbf{e}_n\}$ een orthonormale rij in de IP-ruimte $\mathbf{E}$ zijn en laat $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathbf{e}_n, \mathbf{x})$.

2.3.5 Beschouw $\mathbb{L}_{2,\text{cont}}((-1,1))$, de polynomen $g_n(x) = x^n$ en de Legendrepolynomen P_n voor $n = 0, 1, \ldots$.

(a) Pas het Gram-Schmidtprocédé toe op $\{g_0, g_1, g_2\}$ en laat zien dit het orthonormale stelsel $\{\sqrt{1/2}\, P_0, \sqrt{3/2}\, P_1, \sqrt{5/2}\, P_2\}$ oplevert.

(b) Laat zien dat $\langle g_0, \ldots, g_N \rangle = \langle P_0, \ldots, P_N \rangle$ voor alle $N \geq 0$.

(c) Laat zien dat toepassen van het Gram-Schmidtprocédé op de rij $\{g_0, g_1, \ldots\}$ het orthonormale stelsel $\{c_0 P_0, c_1 P_1, \ldots\}$ met $c_n > 0$ voor alle n oplevert.

2.3.6 Beschouw de IP-ruimte $\mathbf{E} = \mathbb{L}_{2,\text{cont}}((-\pi,\pi))$.

(a) Toon aan dat voor alle $f \in \mathbf{E}$ geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) \mathrm{d}t \right|^2 \leq \pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t\ .$$

(b) Controleer de ongelijkheid uit (a) voor de functies $f(t) = e^{it}$ en $f(t) = \sin(3t)$.

(c) Toon aan dat er geen complexe getallen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bestaan zodanig dat geldt

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{it} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \sin(kt) \right|^2 \mathrm{d}t = 0\ .$$

2.3.7 Beschouw $\mathbf{E} = C^1([-\pi, \pi])$ met het inproduct

$$(f,g)_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t)\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f'(t)} g'(t)\mathrm{d}t \; .$$

De functies $h_n, n \in \mathbb{Z}$ en f worden op het interval $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd door $h_n(x) = e^{inx}$ en $f(x) = x$.

(a) Laat zien dat het stelsel $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ orthogonaal is en maak dit stelsel tot een orthonormaal stelsel $\{\hat{h}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

(b) Bepaal $\|f\|_1^2$ en $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|(\hat{h}_n, f)_1\right|^2$.

(c) Is het stelsel $\{\hat{h}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ een orthonormale basis?

2.3.8 De functie $f(x) = \sin(3x)\sin(5x)$ heeft periode 2π.
Bepaal de complexe Fourierreeks van f.

2.3.9 Bepaal de complexe Fourierreeks van de functie $f(x) = x$ op het interval $[-\pi, \pi]$ en leid af dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.3.10 Bepaal de complexe Fourierreeks van de functie $f(x) = x^2$ op het interval $[-\pi, \pi]$ en leid af dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

2.3.11 Beschouw in de IP-ruimte $\ell_2(\mathbb{N})$ de vector $\underline{a} = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$, de standaardbasisvectoren $\underline{e}_n$, $n \geq 2$, en het opspansel $W = \langle \underline{a}, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \ldots \rangle$.

(a) Laat zien dat als voor een $\underline{y} \in W$ geldt dat $\underline{y} \perp \underline{e}_n$, $n \geq 2$, dat dan $\underline{y} = \underline{0}$.

(b) Laat zien dat $\{\underline{e}_n\}_{n\geq 2}$ geen orthonormale basis in W is.

2.3.12 De functie $f \in C^1([-\pi, \pi])$ heeft de eigenschap dat $f(-\pi) = f(\pi)$.
De Fouriercoëfficiënten van f worden gegeven door

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, \mathrm{d}t, n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Druk de Fouriercoëfficiënten van f' uit in die van f.

(b) Druk $\|f\|^2$ en $\|f'\|^2$ uit in $\gamma_n, n \in \mathbb{Z}$.

2.3.13 De continue, 2π-periodieke functie f heeft de Fourierreeks $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} e^{inx}$.
Laat zien dat de functie f continu differentieerbaar is.

2.3.14 Een functie $f \in C([-\pi,\pi])$ heeft de Fourierreeks $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i+n^3} e^{inx}$.
Is de functie f reëelwaardig?

2.4 Genormeerde ruimten die geen IP-ruimten zijn

2.4.1 Laat zien dat $\|\cdot\|_\infty$ een norm in $\ell_\infty(\mathbb{N})$ is.

2.4.2 Laat zien dat $\|\cdot\|_1$ een norm in $\ell_1(\mathbb{N})$ is.

2.4.3 Beschouw in $\mathbb{C}^2$ de norm $\|\underline{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$.
Laat zien dat deze norm niet van een inproduct afkomstig is.

2.4.4 Beschouw $\mathbb{R}^2$ met de norm $\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

(a) Laat zien dat de minimumafstand van de oorsprong $\underline{0}$ tot de lijn $x_1+x_2 = 1$ gelijk aan 1 is.

(b) Bepaal alle punten op de lijn $x_1 + x_2 = 1$ met afstand 1 tot de oorsprong $\underline{0}$.

(c) Laat zien dat de norm niet afkomstig is van een inproduct.

2.4.5 Beschouw $\mathbb{L}_{\infty,\mathrm{cont}}(0,1)$.
Laat zien dat de norm $\|\cdot\|_\infty$ niet afkomstig is van een inproduct.

3 Lineaire operatoren tussen genormeerde vectorruimten

3.1 Lineaire afbeeldingen

3.1.1 De operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((-\pi, \pi))$ wordt gedefinieerd door

$$[\mathcal{A}(f)](t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s) f(s) ds, \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

voor alle $f \in \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((-\pi, \pi))$.

(a) Bepaal de nulruimte $\mathbf{N}(\mathcal{A})$.

(b) Bepaal de beeldruimte $\mathbf{R}(\mathcal{A})$.

3.1.2 Beschouw de operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((-1, 1))$ gedefinieerd door

$$[\mathcal{A}(f)](t) = f(-t), \quad \forall t \in (-1, 1)$$

voor alle $f \in \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((-1, 1))$.

(a) Bepaal de nulruimte $\mathbf{N}(\mathcal{A})$.

(b) Bepaal de beeldruimte $\mathbf{R}(\mathcal{A})$.

(c) Geef de inverse van $\mathcal{A}$.

3.1.3 Voor iedere $f \in \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((0, 1))$ wordt de functie $\mathcal{V}(f)$ gedefinieerd door

$$[\mathcal{V}(f)](t) = \int_{0}^{t} f(s) ds, \forall t \in (0, 1).$$

(a) Laat zien dat $\mathcal{V}(f)$ voor alle $f \in \mathbb{L}_{2,\text{stc}}((0, 1))$ een continue functie is.

(b) Laat zien dat door deze definitie een lineaire afbeelding $\mathcal{V}$ op $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((0, 1))$ wordt gedefinieerd. (U moet ook laten zien dat $\mathcal{V}(f)$ in $\mathbb{L}_{2,\text{stc}}((0, 1))$ zit.)

(c) Geef een continue functie die niet in de beeldruimte $\mathbf{R}(\mathcal{V})$ zit.

3.1.4 Bewijs dat iedere lineaire functionaal op een eindig dimensionale IP-ruimte continu is. (Riesz)

3.1.5 Beschouw de inproductruimte $\mathbf{E} = \mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}([0,1])$. Op $\mathbf{E}$ zijn de lineaire functionalen ℓ en m gedefinieerd door

$$\ell(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \text{ en } m(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt[3]{t}} \mathrm{d}t \ , f \in \mathbf{E}.$$

(a) Laat zien dat $\ell(f)$ en $m(f)$ voor alle $f \in \mathbf{E}$ gedefinieerd zijn.

(b) Is ℓ continu? Zo ja, bepaal $\|\ell\|$.

(c) Is m continu? Zo ja, bepaal $\|m\|$.

3.1.6 Beschouw de Volterraoperator $\mathcal{V}$ op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((0,1))$, gegeven door de definitie

$$[\mathcal{V}(f)](t) = \int_0^t f(s) \mathrm{d}s.$$

Laat zien dat de operator $\mathcal{V}$ begrensd is. U hoeft de norm van deze operator niet te bepalen.

3.1.7 Beschouw de operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((-\pi,\pi))$ met

$$[\mathcal{A}(f)](t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)\, f(s)\, \mathrm{d}s \ .$$

Bereken de norm $\|\mathcal{A}\|$.

3.1.8 Beschouw de operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((0,1))$ met

$$[\mathcal{A}(f)](t) = \sqrt{t}\, f(t^2).$$

Bereken de norm $\|\mathcal{A}\|$.

3.1.9 De operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_N, N \geq 1$, op $\ell_2(\mathbb{N})$ zijn gedefinieerd door

$$\mathcal{A}\,\underline{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\underline{e}_n, \underline{x})\, \underline{e}_{n+1} \text{ en } \mathcal{A}_k\,\underline{x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} (\underline{e}_n, \underline{x})\, \underline{e}_{n+1} \ .$$

(a) Toon aan dat de operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_N$ begrensd zijn.

(b) Laat zien dat $\lim\limits_{N\to\infty} \|\mathcal{A} - \mathcal{A}_N\| = 0$.

3.1.10 Beschouw de lineaire functionaal $\ell(f) = \int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((0,3))$.

(a) Beschrijf de nulruimte $\mathbf{N}(\ell)$ en de beeldruimte $\mathbf{R}(\ell)$.

(b) Laat zien dat ℓ compact is.

3.1.11 Beschouw de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ met de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Wat is het beeld van de gesloten eenheidsbal onder de afbeelding $\mathcal{A}$?

(b) Is de afbeelding $\mathcal{A}$ compact?

3.1.12 Beschouw het natuurlijke getal N en de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ gegeven door

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots)\ .$$

Is $\mathcal{A}$ compact?

3.2 Vectorruimten van lineaire afbeeldingen

3.2.1 Geef een basis in de vectorruimte $\mathbf{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

3.2.2 Beschouw de vectorruimte $\mathbf{E} = \mathbf{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$. Ieder element uit deze vectorruimte is voor te stellen als een $N \times N$-matrix.
Laat zien dat door

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathrm{spoor}(\mathcal{A}^\dagger \mathcal{B})$$

een inproduct in $\mathbf{E}$ gedefinieerd wordt.
Wellicht ten overvloede vermelden we dat spoor$(\mathcal{V})$ de som van de diagonaalelementen van de vierkante matrix $\mathcal{V}$ is.

3.2.3 Beschouw de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal de lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}^N$ voor alle $N \in \mathbb{N}$.

(b) Bepaal de lineaire afbeelding $e^{\mathcal{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathcal{A}^n$.

(c) Geef de inverse van $e^{\mathcal{A}}$.

3.2.4 Beschouw de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met matrix $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal een diagonaalmatrix Λ en een orthogonale matrix $\mathcal{S}$ met $\mathcal{A} = \mathcal{S}\Lambda\mathcal{S}^T$.

(b) Bepaal de lineaire afbeelding $e^{\mathcal{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathcal{A}^n$.

3.2.5 Beschouw de IP-ruimte $\mathbf{E} = \mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((-\pi,\pi))$. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ is gegeven door $[\mathcal{A}(f)](t) = e^{it}f(t)$.

(a) Bepaal de norm $\|\mathcal{A}\|$.

(b) Heeft $\mathcal{A}$ een begrensde inverse?

(c) Is $\mathcal{A}$ compact?

4 Banachruimten. Hilbertruimten

4.1 Volledigheid en Seperabiliteit

4.1.1 Laat $\mathbf{E}$ een genormeerde lineaire ruimte zijn en $\{\mathbf{a}_n\}$ een convergente rij in $\mathbf{E}$ met limiet $\mathbf{a}$.
Toon aan dat $\{\mathbf{a}_n\}$ een Cauchyrij is.

4.1.2 Beschouw in de IP-ruimte $C([0,1])$ met het inproduct $(f,g) = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$ de rij functies $\{f_n\}$ gedefinieerd door

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \,, \\ 1 - n(t - \frac{1}{2}) & , \quad \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \,, \\ 0 & , \quad t \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \,. \end{cases}$$

(a) Schets de grafiek van f_n.

(b) Toon aan dat de rij $\{f_n\}$ puntsgewijs naar een functie convergeert, die niet in $C([0,1])$ zit.

(c) Toon aan dat de rij $\{f_n\}$ geen convergente rij is.

4.1.3 Beschouw in de IP-ruimte $C([0,1])$ met het inproduct $(f,g) = \int\limits_0^1 \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$ de rij functies $\{f_n\}$ gedefinieerd door

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2n} \,, \\ -2n(t - \frac{1}{n}) & , \quad \frac{1}{2n} \le t \le \frac{1}{n} \,, \\ 0 & , \quad \frac{1}{n} \ge t \ge 1 \,. \end{cases}$$

(a) Schets de grafiek van f_n.

(b) Toon aan dat de rij $\{f_n\}$ puntsgewijs naar een functie convergeert, die niet in $C([0,1])$ zit.

(c) Toon aan dat de rij $\{f_n\}$ geen convergente rij is.

4.1.4 Beschouw de vectorruimte $C([0,1])$ met de normen

$$\|f\|_\infty = \max(\{|f(t)| \big| t \in [0,1]\}) \text{ en } \|f\|_2 = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} .$$

Toon aan dat de lineaire deelruimte M van $C([0,1])$ bestaande uit alle polynomen niet gesloten is in $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ en niet gesloten is in $C([0,1], \|\cdot\|_2)$.

4.1.5 Laat $\mathbf{E}$ een Banachruimte zijn met norm $\|\cdot\|$ en laat $\{\mathbf{a}_n\}$ een rij in $\mathbf{E}$ zijn met $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\| < \infty$.

Laat zien dat de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n$ convergeert.

4.1.6 Beschouw de vectorruimte $C([0,1])$ met de norm

$$\|f\|_\infty = \max(\{\, |f(t)| \,\big|\, t \in [0,1] \,\}).$$

(a) Toon aan dat $C([0,1])$ met deze norm een Banachruimte is.

(b) Toon aan dat dit resultaat in overeenstemming is met de bekende stelling uit Analyse 4 dat een uniform convergente rij van continue functies een continue functie als limiet heeft.

(c) Bewijs dat deze norm niet correspondeert met een inwendig product.

4.1.7 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H}$ en een rij $\{\mathbf{a}_n\}$ in $\mathbf{H}$ met de eigenschappen

(1) $\|\mathbf{a}_n\| = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{a}_n, \mathbf{x})|^2$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.

(a) Laat zien dat $\{\mathbf{a}_n\}$ een orthonormaal stelsel is.

(b) Laat zien dat $\{\mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis van $\mathbf{H}$ is.

4.1.8 Laat zien dat in de Hilbertruimte $\mathbb{L}_2((0,\pi))$ de lineaire deelruimte van polynomen dicht ligt.

4.1.9 Laat zien dat in de Hilbertruimte $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ de lineaire deelruimte van continue functies dicht ligt.

4.1.10 Beschouw in de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \mathbb{H}^1((-\pi,\pi))$ de functies

$$h(x) = \frac{\sinh(x)}{\sinh(2\pi)},$$

$$g_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi(1+n^2)}}, n \in \mathbb{Z},$$

$$e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z}.$$

In de deelvragen wordt steeds naar het inproduct $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}^1}$ gerefereerd. Dus $f \perp h$ betekent dat $(f,h)_{\mathbb{H}^1} = 0$ etc.
Naast dit inproduct beschouwen we ook het inproduct

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x.$$

(a) Laat zien dat voor alle $f, g \in \mathbf{H}$ geldt $(f, g)_{\mathbb{H}^1} = (f, g) + (f', g')$.

(b) Laat zien dat $f \perp h$ d.e.s.d. als $f(-\pi) = f(\pi)$.

(c) Laat zien dat $f - (h, f)_{\mathbb{H}^1} h$ in de randpunten $-\pi$ en π dezelfde functiewaarden heeft.

(d) Laat $f \in \mathbf{H}$ met $f(-\pi) = f(\pi)$.
Toon aan dat $(e_n, f)_{\mathbb{H}^1} = (1 + n^2)(e_n, f)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

(e) Bewijs dat de functies h en $g_n, n \in \mathbb{Z}$, een orthonormale basis in $\mathbf{H}$ vormen.

4.2 Convexiteit en projecties

4.2.1 Beschouw in $\mathbb{R}^2$ de punten $(2, 1)$, $(0, 1)$ en $(1, 1)$.
Beschrijf de kleinste convexe verzameling die deze drie punten omvat.

4.2.2 In de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2((0, 1))$ zijn de functies f_1, f_2, f_3 gegeven door $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t + i$ en $f_3(t) = t^2$.

(a) Bereken de afstand van f_3 tot het hypervlak $\{f \in \mathbf{H} \,|\, (f_1, f) = 1\}$.

(b) Bereken de afstand van f_2 tot het hypervlak $\{f \in \mathbf{H} \,|\, (f_3, f) = i\}$.

4.2.3 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbb{R}^3$.
Welk punt van het vlak $x + y + z = 1$ ligt het dichtst bij $(2, 0, 0)$?

4.2.4 Laat B de gesloten eenheidsbal in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn, d.w.z. $B = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H} \,|\, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$.

(a) Laat zien dat B convex is.

(b) Laat $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ met $\|\mathbf{u}\| > 1$.
Bepaal het punt $\mathbf{y} \in B$ dat het dichtst bij $\mathbf{u}$ ligt.

4.2.5 Laat B de gesloten eenheidsbal in $\ell_\infty(\mathbb{N})$ zijn en $\underline{u} = (2, 0, 0, \dots)$.

(a) Toon aan dat B convex is.

(b) Bepaal $\inf\limits_{\underline{b} \in B} \|\underline{u} - \underline{b}\|_\infty$.

(c) Bepaal een punt $\underline{a} \in B$ met minimale afstand tot $\underline{u}$.

(d) Is $\ell_\infty(\mathbb{N})$ een Hilbertruimte?

4.2.6 Bepaal $\min_{a,b,c\in\mathbb{C}} \int\limits_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 \mathrm{d}x$.

4.2.7 Beschouw in de IP-ruimte $\mathbb{L}_{2,\mathrm{cont}}([-\pi,\pi])$ de functies $f_n(x) = \sin(nx), n \in \mathbb{N}$, en de functie $f(x) = e^{-ix}$. Laat W het lineaire opspansel $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ zijn.

(a) Toon aan dat de projectie $\mathcal{P}_W(f)$ van f op W bestaat en bereken deze.

(b) Toon aan dat voor alle $N \in \mathbb{N}$ en alle complexe getallen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ geldt

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |e^{-ix} - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin(nx)|^2 \, \mathrm{d}x \geq \pi \, .$$

(c) Voor welke $N, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ geldt in deze ongelijkheid het gelijkteken?

4.2.8 Beschouw het vlak $M = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^3 | z_1 + iz_2 - iz_3 = 0\}$.
Bepaal het orthoplement $M^\perp$.

4.2.9 Beschouw in de Hilbertruimte $\ell_2(\mathbb{N})$ de gesloten lineaire deelruimte M bestaande uit alle rijen $\underline{x}$ met $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$, $\dots$, dus met $x_{2n-1} = x_{2n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Geef een orthonormale basis van M.

(b) Bepaal het orthoplement $M^\perp$ en geef een orthonormale basis van $M^\perp$.

(c) Bepaal de projectie van de vector $\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots)$ op M.

4.2.10 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2((-\pi, \pi))$.
Laat $\mathbf{E}$ de verzameling van de even functies $f \in \mathbf{H}$ rond 0 zijn, d.w.z. $f(-t) = f(t)$ voor alle $t \in (-\pi, \pi)$.
Laat $\mathbf{O}$ de verzameling van de oneven functies $f \in \mathbf{H}$ rond 0 zijn, d.w.z. $f(-t) = -f(t)$ voor alle $t \in (-\pi, \pi)$.

(a) Laat zien dat $\mathbf{E} \perp \mathbf{O}$.

(b) Laat zien dat er bij iedere functie $f \in \mathbf{H}$ twee eenduidig bepaalde functies $f_e \in \mathbf{E}$ en $f_o \in \mathbf{O}$ bestaan met $f = f_e + f_o$.

(c) Laat zien dat $\mathbf{E}^\perp = \mathbf{O}$ en $\mathbf{O}^\perp = \mathbf{E}$.

(d) Laat zien dat $\mathbf{E}$ en $\mathbf{O}$ gesloten lineaire deelruimten zijn.

(e) Geef twee orthonormale bases, een van $\mathbf{E}$ en een van $\mathbf{O}$.

4.2.11 Beschouw in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ een gesloten lineaire deelruimte M. Laat $\{\mathbf{v}_n\}$ een orthonormale basis in M zijn. De projectieafbeelding op M wordt aangegeven met $\mathcal{P}_M(\mathbf{x})$.

(a) Laat zien dat voor iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ geldt $\mathcal{P}_M(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{v}_n, \mathbf{x})\, \mathbf{v}_n$.

(b) Bepaal de norm $\|\mathcal{P}_M\|$.

4.2.12 Laat $\mathcal{P}_M$ de projectie op een gesloten lineaire deelruimte M in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn met $\mathbf{0} \neq M \neq \mathbf{H}$.

(a) Bepaal de norm $\|\mathcal{P}_M\|$.

(b) Bepaal de norm $\|\mathcal{I} - \mathcal{P}_M\|$.

(c) Laat zien dat $(\mathcal{I} - \mathcal{P}_M)$ de projectie op $M^{\perp}$ is.

4.3 De representatiestelling van Riesz

4.3.1 De lineaire functionaal ℓ op de Hilbertruimte $\mathbb{L}_2((0,1))$ is gedefinieerd door

$$\ell(f) = \int_0^{1/2} i\, f(x)\, \mathrm{d}\, x.$$

(a) Bepaal een $g \in \mathbb{L}_2((0,1))$ zodanig dat $\ell(f) = (g, f)$ voor alle $f \in \mathbb{L}_2((0,1))$.

(b) Bepaal de norm ℓ.

4.3.2 Laat ℓ een continue lineaire functionaal op de Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn met $\forall_{\mathbf{x} \in \mathbf{H}} \, [\, \ell(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})\,]$.
Laat zien dat $\mathbf{H}$ de directe som is van $\langle\, \mathbf{y}\, \rangle$ en de nulruimte $\mathbf{N}(\ell)$, in formule $\mathbf{H} = \langle\, \mathbf{y}\, \rangle \oplus \mathbf{N}(\ell)$.

4.3.3 Zij ℓ de lineaire functionaal op $\mathbb{L}_2((-\pi, \pi))$ met $\ell(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, (e_n, f)$ waarbij $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$.
Laat zien dat ℓ begrensd is en bepaal de norm $\|\ell\|$.

4.3.4 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \ell_2(\mathbb{N})$. Van de begrensde lineaire functionaal m op $\mathbf{H}$ is het volgende gegeven:

(1) Het orthoplement van de nulruimte $\mathbf{N}(\ell)$ wordt opgespannen door de vector $(1, 0, 0, i, 0, \ldots)$.

(2) $m(\,(1, 1, 1, 1, 0, \ldots)\,) = 2$.

(a) Bereken de projectie van $(1, 1, 1, 1, 0, \ldots)$ op $\langle\,(1, 0, 0, i, 0 \ldots)\,\rangle$.

(b) Bepaal $\underline{y} \in \ell_2(\mathbb{N})$ zodanig dat $m(\underline{x}) = (\underline{y}, \underline{x})$ voor alle $\underline{x} \in \ell_2(\mathbb{N})$.

4.3.5 Laat $\mathbf{y}$ een element van een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ ongelijk aan $\mathbf{0}$ zijn. De lineaire functionaal ℓ voldoet aan $\ell(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.
Laat $M = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H} \,|\, \ell(\mathbf{x}) = 1\}$.

(a) Toon aan dat M niet leeg, convex en gesloten is.

Laat $\mathbf{x}_0$ het punt van M zijn dat het dichtst bij de oorsprong $\mathbf{0}$ (de nulvector van $\mathbf{H}$) ligt.

(b) Bewijs dat $\mathbf{x}_0 = \dfrac{1}{\|\mathbf{y}\|^2}\,\mathbf{y}$.

5 Operatoren in Hilbertruimten

5.1 Sesquilineaire Functionalen

5.1.1 Beschouw een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ op een IP-ruimte $\mathbf{E}$.
Laat zien dat de functie ψ met $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}\,\mathbf{y})$ een sesquilineaire functionaal op $\mathbf{E}$ is.

5.1.2 Beschouw de sesquilineaire functionaal ϕ op $\mathbb{L}_2((0, 1))$, gegeven door

$$\psi(f, g) = \int_0^1 \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(y)\mathrm{d}y \,.$$

(a) Bepaal $\|\psi\|$.

(b) Is ψ coërcief?

5.1.3 In $\mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$ vormen de functies $g_n, n \in \mathbb{Z}$, met $g_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ een orthonormale basis. De begrensde sesquilineaire functionaal ϕ voldoet aan de eigenschap dat

$$\psi(g_n, g_m) = \begin{cases} 1 & , \quad n = m-1 \\ 0 & , \quad n \neq m-1 \end{cases}$$

Bepaal de afbeelding $\mathcal{A}$ zodanig dat $\psi(f,g) = (\mathcal{A}f, g)$ voor alle f en g in $\mathbb{L}_2((-\pi,\pi))$.

5.1.4 Beschouw een orthogonale projectie $\mathcal{P}$ op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ met de eigenschap dat $\mathcal{O} \neq \mathcal{P} \neq \mathcal{I}$.

(a) Voor welke $\lambda \in \mathbb{C}$ heeft de vergelijking

$$(\mathcal{P} - \lambda \mathcal{I})\, \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

voor ieder rechterlid $\mathbf{b}$ precies één oplossing $\mathbf{u}$?
Hint: Maak gebruik van de eigenschap dat $\mathcal{P}\,(\mathcal{I} - \mathcal{P}) = \mathcal{O}$.

(b) Bepaal het spectrum $\sigma(\mathcal{P})$.

5.1.5 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H}$, de elementen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{H}$ en de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ op $\mathbf{H}$ met $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{b}$.

(a) Laat zien dat $\mathcal{A}^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathcal{A}$.

(b) Voor welke $\lambda \in \mathbb{C}$ heeft de vergelijking

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})\, \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

voor ieder rechterlid $\mathbf{b}$ precies één oplossing $\mathbf{u}$?
Hint: Probeer het inproduct $(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ uit te drukken in $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ en λ.

(c) Voor welke $\lambda \in \mathbb{C}$ heeft de afbeelding $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ een begrensde inverse?

(d) Bepaal het spectrum $\sigma(\mathcal{A})$.

5.2 (Zelf-)geadjungeerde Operatoren

5.2.1 De operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((-\pi,\pi))$ wordt gedefinieerd door

$$[\mathcal{A}(f)](t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s) f(s)\, ds, \quad \forall t \in (-\pi,\pi)$$

voor alle $f \in \mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((-\pi,\pi))$.
Bepaal de geadjungeerde $\mathcal{A}^*$ en zijn norm $\|\mathcal{A}^*\|$.

5.2.2 Beschouw de operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((-1,1))$ gedefinieerd door

$$[\mathcal{A}(f)](t) = f(-t), \quad \forall t \in (-1,1)$$

voor alle $f \in \mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((-1,1))$.
Bepaal de geadjungeerde $\mathcal{A}^*$ en zijn norm $\|\mathcal{A}^*\|$.

5.2.3 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H}$, de elementen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{H}$ en de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ op $\mathbf{H}$ met $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{b}$.

(a) Bepaal de geadjungeerde $\mathcal{A}^*$.

(b) Voor welke elementen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ is $\mathcal{A}$ zelfgeadjungeerd?

5.2.4 Op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((0,1))$ wordt de Volterraoperator $\mathcal{V}$ gedefinieerd door

$$[\mathcal{V}(f)](t) = \int_0^t f(s)ds, \forall t \in (0,1).$$

(a) Bepaal de geadjungeerde $\mathcal{V}^*$.

(b) Bepaal $\mathcal{V}^* + \mathcal{V}$.

5.2.5 Beschouw de operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_{2,\mathrm{stc}}((0,1))$ met

$$[\mathcal{A}(f)](t) = \sqrt{t}\, f(t^2).$$

(a) Bepaal de geadjungeerde $\mathcal{A}^*$.

(b) Bepaal $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

5.2.6 De operator $\mathcal{A}$ op $\ell_2(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{A}\,\underline{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,(\underline{e}_n, \underline{x})\,\underline{e}_{n+1} \ .$$

(a) Bepaal de geadjungeerde $\mathcal{A}^*$ en de afbeeldingen $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

(b) Bepaal van $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten.

5.3 Normale Operatoren

5.3.1 Beschouw een normale lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ op $\mathbb{R}^2$.
Laat zien dat $\mathcal{A}$ een symmetrische of een antisymmetrische afbeelding is of een veelvoud van een orthogonale afbeelding.

5.3.2 Laat $\mathcal{T}$ een begrensde lineaire operator op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn.

(a) Laat zien dat er twee éénduidig bepaalde zelfgeadjungeerde operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn zodanig dat $\mathcal{T} = \mathcal{A} + i\mathcal{B}$.

(b) Laat zien dat $\mathcal{T}$ normaal is dan en slechts dan als de zelfgeadjungeerde afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ uit onderdeel (a) commuteren.
Twee afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ commuteren als $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

5.3.3 Laat $\mathcal{A}$ een normale operator op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn.
Bewijs de volgende drie beweringen.

(a) $\mathbf{N}(\mathcal{A}) = \mathbf{N}(\mathcal{A}^*)$.

(b) $\mathbf{N}(\mathcal{A}) = \mathbf{R}^{\perp}(\mathcal{A}^*)$.

(c) $\overline{\mathbf{R}(\mathcal{A})} = \overline{\mathbf{R}(\mathcal{A}^*)}$.

5.3.4 Laat $\mathcal{T}$ een isometrische afbeelding op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn.
Dan is $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ de projectie op $\mathbf{R}(\mathcal{T})$ ofwel $\mathcal{P}_{\mathbf{R}(\mathcal{T})} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$.

5.4 Projectie Operatoren

5.4.1 Beschouw een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ met een orthonormale basis $\{\mathbf{a}_n\}$.

(a) Druk voor alle $N \in \mathbb{N}$ de projectieoperator $\mathcal{P}_N$ op het lineaire opspansel $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_N \rangle$ uit in de gegeven orthonormale basis.

(b) Laat zien dat voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ geldt dat $\lim_{N\to\infty} (\mathcal{I} - \mathcal{P}_N)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(c) Laat zien dat $\|\mathcal{I} - \mathcal{P}_N\| = 1$ voor alle $N \in \mathbb{N}$.

5.4.2 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2((-\pi, \pi))$ met de orthonormale basis $\{g_n\}$ met $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$.

(a) Laat zien dat $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{inu} = \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})u\right)}{\sin(\frac{1}{2}u)}$.

Laat $k(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\big((N+\frac{1}{2})(y-x)\big)}{\sin\big(\frac{1}{2}(y-x)\big)}$.
Laat $\mathcal{P}_N$ de projectieoperator op $\langle g_{-N}, g_{-N+1}, \ldots, g_N\rangle$ zijn.

(b) Laat zien dat voor alle $f \in \mathbf{H}$ geldt $[\mathcal{P}_N f](y) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} k(x,y)f(x)\,dx$.

(c) Bepaal $\int\limits_{-\pi}^{\pi} k(x,y)\,dx$.

(d) Bepaal $\int\limits_{-\pi}^{\pi} k^2(x,y)\,dx$.

5.4.3 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbb{R}^2$ en de projectieoperatoren $\mathcal{P}_\ell$ en $\mathcal{P}_m$ met ℓ de lijn $y = x$ en m de lijn $y = 0$.
Teken de punten $\mathcal{P}_\ell(1,1)$, $\mathcal{P}_m\mathcal{P}_\ell(1,1)$, $\mathcal{P}_\ell\mathcal{P}_m\mathcal{P}_\ell(1,1)$, etc.
Waar convergeert de rij getekende punten naartoe?

5.4.4 Beschouw de Hilbertruimte $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2((0,1))$. Voor $A \subset (0,1)$ wordt de karakteristieke functie χ_A gedefinieerd door

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A, \\ 0 & , \quad x \notin A. \end{cases}$$

en de projectieoperatoren $\mathcal{P}_\alpha, \alpha \in [0,1]$, worden gedefinieerd door

$$[\mathcal{P}_\alpha f](x) = \chi_{(0,\alpha]}(x) f(x)$$

(a) Bepaal $\mathcal{P}_\alpha\mathcal{P}_\beta$.

(b) Laat $0 \le \alpha < \beta \le 1$.
Bepaal een projectieoperator $\mathcal{Q}$ zodanig dat $\mathcal{P}_\beta = \mathcal{P}_\alpha + \mathcal{Q}$.

5.4.5 Laat $\mathcal{P}_i, i = 1,2,3$ projectieoperatoren in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn zodanig dat

- $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0$ voor $i \neq j$,
- $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 = \mathcal{I}$.

Laat $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$.

(a) Bepaal $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ zodanig dat $2\mathcal{P}_1\mathbf{x} + 3\mathcal{P}_2\mathbf{x} + 5\mathcal{P}_3\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(b) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van de operator $\mathcal{A}\mathbf{x} = 2\mathcal{P}_1\mathbf{x} + 3\mathcal{P}_2\mathbf{x} + 5\mathcal{P}_3\mathbf{x}$.

(c) Onder welke voorwaarden is de operator $\mathcal{A}$ uit onderdeel (b) compact?

5.5 Compacte Operatoren

5.5.1 Laat $\mathcal{T}$ een begrensde operator van eindige rang op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn. Laat $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ een basis in de beeldruimte $\mathbf{R}(\mathcal{T})$ zijn en $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N\}$ zodanig dat $\mathcal{T}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$ voor $k = 1, \ldots, N$.

(a) Laat zien dat $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N\}$ een onafhankelijk stelsel is.

(b) Laat zien dat bij iedere $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ getallen $\lambda_k(\mathbf{x}), k = 1, \ldots, N$, bestaan zodanig dat

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\mathbf{y}_1 + \cdots + \lambda_N(\mathbf{x})\mathbf{y}_N.$$

(c) Laat zien dat er $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N$ bestaan zodanig dat

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{x})\mathbf{y}_1 + \cdots + (\mathbf{u}_N, \mathbf{x})\mathbf{y}_N.$$

5.5.2 Beschouw de de operator $\mathcal{A}$ op de Hilbertruimte $\ell_2(\mathbb{N})$ gegeven door

$$\mathcal{A}(\underline{x}) = (x_2, \frac{1}{\sqrt{2}}x_3, \frac{1}{\sqrt{3}}x_4, \ldots)$$

(a) Laat zien dat $\mathcal{A}$ compact is.
Hint: Laat zien dat er een rij operatoren $\{\mathcal{A}_n\}$ van eindige rang is met $\lim_{N\to\infty} \|\mathcal{A} - \mathcal{A}_N\| = 0$.

(b) Is de geadjungeerde $\mathcal{A}^*$ compact?

5.5.3 Onder welke voorwaarde is een projectieoperator op een Hilbertruimte compact?

5.5.4 Beschouw een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ met twee orthonormale bases $\{\mathbf{a}_n\}$ en $\{\mathbf{b}_n\}$. Laat zien dat voor iedere operator $\mathcal{A}$ op $\mathbf{H}$ geldt

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}(\mathbf{a}_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}^*(\mathbf{a}_n)\|^2.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}(\mathbf{a}_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}(\mathbf{b}_n)\|^2.$$

(c) Laat $\mathcal{A}$ een projectieoperator op een eindig dimensionale lineaire deelruimte $\mathbf{V}$ zijn.
Bepaal $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}(\mathbf{a}_n)\|^2$.

5.5.5 Laat zien dat een oneindige orthonormale rij in een Hilbertruimte zwak naar $\mathbf{0}$ convergeert.

5.5.6 Beschouw de operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_2((-\pi, \pi))$ met

$$[\mathcal{A}f](t) = e^{it} f(t), \quad -\pi < t < \pi.$$

Is $\mathcal{A}$ compact?

5.5.7 Beschouw de operator $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_2((-\pi, \pi))$ met

$$[\mathcal{A}f](t) = \frac{1}{1+t^2} f(t), \quad -\pi < t < \pi.$$

Is $\mathcal{A}$ compact?

5.5.8 Beschouw de operator $[\mathcal{A}f](y) = \int_0^1 \frac{1}{1+x+y} f(x)\, dx$ op $\mathbb{L}_2((0,1))$.

(a) Is $\mathcal{A}$ zelfgeadjungeerd?

(b) Is $\mathcal{A}$ compact?

(c) Is $\mathcal{A}$ een Hilbert-Schmidtoperator?

6 Spectrale Ontbinding van Operatoren

6.1 Eigenwaarden en eigenvectoren

6.1.1 Beschouw de Volterraoperator $\mathcal{V}$ op $\mathbf{E} = \mathbb{L}_2((0,1))$ met

$$[\mathcal{V}(f)](t) = \int_0^t f(s)ds, \forall t \in (0,1).$$

(a) Laat zien dat als f voldoet aan de eigenwaardevergelijking

$$\lambda f(t) = \int_0^t f(s)ds$$

dat dan f voldoet aan het eerste-ordebeginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \lambda f'(t) &= f(t)\ , \\ f(0) &= 0\ . \end{cases}$$

Geldt het omgekeerde ook?

(b) Laat zien dat $\mathcal{V}$ geen eigenvectoren heeft.

6.1.2 Laat $\{\mathbf{e}_n\}$ een orthonormale basis in een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn met $\dim(\mathbf{H}) = \infty$ en $\{\lambda_n\}$ een rij begrensde complexe getallen.
Beschouw de lineaire operator $\mathcal{D}$ met $\mathcal{D}\mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n$ voor alle n.
De operator $\mathcal{D}$ heet een diagonaaloperator.

(a) Bepaal de norm $\|\mathcal{D}\|$.

(b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{D}$.

(c) Voor welke $\lambda \in \mathbb{C}$ heeft $(\mathcal{D} - \lambda\mathcal{I})$ een begrensde inverse?

(d) Geef het spectrum $\sigma(\mathcal{D})$.

6.1.3 Laat $\mathcal{A}$ een begrensde lineaire afbeelding op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn.
Laat zien dat $\sigma(\mathcal{A}) = \overline{\sigma(\mathcal{A}^*)}$.
Hint: Als $\mathcal{B}$ een begrensde operator is, dan is $\mathcal{B}^*$ ook een begrensde operator.

6.1.4 Beschouw de eenzijdige schuifoperator $\mathcal{S}$ op $\ell_2(\mathbb{N})$ met $\mathcal{S}\,(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$.

(a) Heeft $\mathcal{S}$ eigenwaarden?

(b) Bepaal de geadjungeerde $\mathcal{S}^*$.

(c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de geadjungeerde $\mathcal{S}^*$.
Hint: Bedenk wel dat $\|\mathcal{S}^*\| = 1$.

(d) Bepaal het spectrum $\sigma(\mathcal{S}^*)$.

(e) Bepaal het spectrum $\sigma(\mathcal{S})$.
Hint: Gebruik opgave 3 uit deze paragraaf.

6.2 Spectrale resolutie van compacte zelfgeadjungeerde operatoren

6.2.1 De functies e_n met $e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z}$, vormen een orthonormale basis in $\mathbb{L}_2([-\pi, \pi])$ en zijn eigenfuncties van de differentiaaloperator $\mathcal{D} = 1 - \frac{d^2}{dx^2}$ met eigenwaarden $n^2 + 1$. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_2((-\pi, \pi))$ wordt gegeven door

$$\mathcal{A} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}(e_n, f)e_n.$$

(a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een compacte operator is.

(b) Toon aan dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}(e_n, f)e_n(x)$ uniform convergeert op het interval $[-\pi, \pi]$.

(c) Laat zien dat de functies in de beeldruimte van $\mathcal{A}$ continu differentieerbaar zijn op het interval $[-\pi, \pi]$.

(d) Neem aan dat de functie f tweemaal continu differentieerbaar is en periode 2π heeft.
Toon aan dat $\mathcal{A}\mathcal{D} f = f$.

6.2.2 De genormeerde Legendrepolynomen $p_n, n \geq 0$, vormen een orthonormale basis in $\mathbb{L}_2([-1, 1])$ en zijn eigenfuncties van de differentiaaloperator $\mathcal{D} = (1 - x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - 2x\dfrac{d}{dx} + \dfrac{1}{4}$ met eigenwaarde $(n + \frac{1}{2})^2$.
Definieer de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ op $\mathbb{L}_2([-1, 1])$ door

$$\mathcal{A} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2} (p_n, f)\, p_n.$$

(a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een compacte operator is.

(b) Toon aan dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}\,(p_n, f)\,p_n(x)$ uniform convergeert op het interval $[-\pi, \pi]$.

(c) Laat zien dat de functies in de beeldruimte van $\mathcal{A}$ continu zijn op het interval $[-1, 1]$.

(d) Neem aan dat $f \in C^2([-1, 1])$.
Laat zien dat $\mathcal{A}\,\mathcal{D}\,f = f$.

6.2.3 Laat $\mathcal{A}$ een begrensde lineaire operator op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn met $\dim(\mathbf{R}(\mathcal{A})) = N > 0$.

(a) Toon aan dat $\mathbf{N}(\mathcal{A}^*\,\mathcal{A}) = \mathbf{N}(\mathcal{A})$.

(b) Laat zien dat er een orthonormaal stelsel $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N\}$ van eigenvectoren van $\mathcal{A}^*\,\mathcal{A}$ met eigenwaarden $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N > 0$ zodanig dat

$$\mathcal{A}^*\,\mathcal{A}\,f = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\,(\psi_n, f)\,\psi_n, \quad f \in \mathbf{H}\,.$$

(c) Laat zien dat $(\mathbf{N}(\mathcal{A}))^\perp = \langle \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N \rangle$.

(d) Laat zien dat

$$\mathcal{A}\,f = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\,(\psi_n, f)\,\mathcal{A}\,\psi_n, \quad f \in \mathbf{H}\,.$$

(e) Laat zien dat er een orthonormaal stelsel $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$ in $\mathbf{H}$ bestaat met

$$\mathcal{A}\,f = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}\,(\psi_n, f)\,\varphi_n, \quad f \in \mathbf{H}\,.$$

(f) Druk $\mathcal{A}^*$ en $\mathcal{A}\,\mathcal{A}^*$ uit in bovenstaande orthonormale stelsels en de getallen λ_n.

(g) Pas het voorafgaande toe op de afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ met matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.2.4 Laat $\mathcal{A}$ een begrensde operator op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zijn zodanig dat $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ compact is.

(a) Laat zien dat als voor een begrensde rij $\{\mathbf{x}_n\}$ de rij $\{\mathcal{A}^* \mathcal{A} \mathbf{x}_n\}$ convergent is, dat dan ook de rij $\{\mathcal{A} \mathbf{x}_n\}$ ook convergent is.
Beschouw hiertoe het inproduct $(\mathcal{A}^* \mathcal{A} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m), \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)$.

(b) Bewijs dat $\mathcal{A}$ compact is.

6.2.5 Laat $\mathbf{H}$ een Hilbertruimte zijn.
Bestaat er een begrensde lineaire operator $\mathcal{A}$ op $\mathbf{H}$ zodanig dat maar één van beide operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}^*$ compact is?

6.2.6 Bestaan er twee begrensde niet-compacte operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ op een Hilbertruimte $\mathbf{H}$ zodanig dat het product $\mathcal{A}\mathcal{B}$ wel compact is?

6.2.7 Beschouw in de Hilbertruimte $\mathbf{H}$ twee orthonormale stelsels $\{\mathbf{a}_n\}$ en $\{\mathbf{b}_n\}$ en een rij positieve getallen $\{\lambda_n\}$ met $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.
De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ wordt gedefinieerd door

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\mathbf{a}_n, \mathbf{x}) \mathbf{b}_n.$$

(a) Laat zien dat de operator $\mathcal{A}$ compact is.

(b) Druk $\mathcal{A}^*$ en $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ uit in de gegeven bases en de getallen λ_n.

6.3 De Fouriertransformatie als unitaire operator in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$

6.3.1 Beschouw de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}$ op $\mathbf{H} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.
Laat zien dat er vier orthogonale projecties $\mathcal{P}_i$ bestaan met de eigenschappen

- $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4$,
- $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ voor $i \neq j$,
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - i\mathcal{P}_4$.

Beschrijf deze projectoren met behulp van de eigenvectoren van $\mathcal{F}$.
Laat zien dat $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$.

6.3.2 Laat f loodrecht op alle polynomen in $\mathbb{L}_2([0,1])$ staan.

(a) Laat zien dat voor alle $k \in \mathbb{R}$ geldt dat $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^1 e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(b) Leid met behulp van de Fouriergetransformeerde af dat $f = 0$.

6.3.3 Laat $\chi_{[-1,1]}$ de karakteristieke functie van het interval $[-1, 1]$ zijn.

(a) Bepaal de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})(\mathrm{k})$.

(b) Bepaal de integraal $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{k^2}\,\mathrm{d}k.$

(c) Bepaal de integraal $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4(k)}{k^4}\,\mathrm{d}k.$