

Onderafdeling der Wiskunde

**Afd. Algemene Wetenschappen**

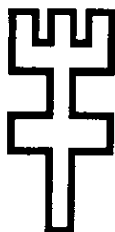
**MECHANICA II**

SYLLABUS VAN HET COLLEGE

VAN

PROF. DR. J.B. ALBLAS

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. A.N. BOSWINKEL



TECHNISCHE HOGESCHOOL  
EINDHOVEN

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

## **MECHANICA II**

Syllabus naar de Colleges van

**Prof. Dr. J.B. Alblas**

## Inhoudsbeschrijving *Mechanica II*:

pericoop	titel	blz
E.	INTEGRAALPRINCIPES	
E.I.	VARIATIEREKENING	
1.	Inleiding	E.I.1
2.	De vergelijking van Euler	E.I.2
3.	Meerdere afhankelijke variabelen	E.I.7
4.	Meerdere onafhankelijke variabelen	E.I.8
E.II.	HET PRINCIPE VAN HAMILTON	
1.	De vergelijkingen van Lagrange	E.II.1
2.	Directe afleiding uit d'Alembert	E.II.1
F.	ALGEMENE THEORIE VAN HET ELASTISCH CONTINUUM	
F.I.	MEETKUNDE DER DEFORMATIES	
1.	De verplaatsingen	F.I.1
2.	De deformaties	F.I.2
3.	De Compatibiliteitsvergelijkingen	F.I.6
4.	De hoofdrichtingen en invarianten	F.I.7
F.II.	SPANNINGSLEER	
1.	De begrippen	F.II.1
2.	Transformaties en hoofdrichtingen	F.II.3
3.	Spanningstoestanden en cirkels van Mohr	F.II.4
F.III.	DYNAMICA VAN HET ELASTISCHE LICHAAM	
1.	De impulsstelling	F.III.1
2.	De momentenstelling	F.III.1
3.	Het blokje	F.III.3
F.IV.	HET VERBAND TUSSEN SPANNINGEN EN DEFORMATIES	
1.	De wet van Hooke	F.IV.1
2.	De elasticiteitsconstanten	F.IV.2
3.	De vergelijkingen van Beltrami	F.IV.2
4.	De randcondities	F.IV.3

<b>pericoop</b>	<b>titel</b>	<b>blz</b>
H.	ELASTO-DYNAMICA VAN ELEMENTAIRE SYSTEMEN	
H.I.	DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN	
1.	De snaar	H.I.1
2.	De balk	H.I.2
3.	De plaat	H.I.3
4.	Afleiding uit het principe van Hamilton	H.I.3
H.II.	TRILVORMEN	
1.	Algemeen	H.II.1
2.	De snaar	H.II.1
3.	De balk	H.II.2
4.	Rayleigh voor approximatieve berekening eigenfrequenties	H.II.4
H.III	PLOTSELING AANGRIJPENDE LASTEN	
1.	Het aanbrengen van een last	H.III.1
2.	Stoten	H.III.2

(8 Juni 2005, JdG)

AFDELING ALGEMENE WETENSCHAPPEN

ONDERAFDELING DER WISKUNDE

MECHANICA II

Syllabus van het college

van

Prof. dr. J.B. Alblas

---

T e c h n i s c h e   H o g e s c h o o l   E i n d h o v e n

## E. Integraalprincipes

### I. Variatierekening

#### 1. Inleiding

Het is een van de problemen van de differentiaalrekening, bij een gegeven functie  $f(x)$  de waarden  $x_1, x_2, \dots$  te zoeken, waarvoor de functie een maximum- of minimumwaarde aanneemt. Is de functie in een interval  $[a, b]$  differentieerbaar, dan is de noodzakelijke voorwaarde daartoe

$$f'(x_1) = 0, \text{ etc.} \quad (1)$$

Het is bekend, dat (1) wel noodzakelijk doch niet voldoende is. Is nl. de tweede afgeleide  $= 0$ , dan bestaat de mogelijkheid, dat in het geheel geen extreme waarde optreedt, doch een horizontaal buigpunt. In ieder geval is de functie  $f(x)$  in  $x_1$  stationnair.

In de variatierekening bestuderen we de eigenschappen van integralen van de vorm

$$\int_a^b f \{y(x), y'(x), x\} dx. \quad (2)$$

Hierin is  $f$  een gegeven functie van drie argumenten,  $y(x)$  een functie van  $x$  en  $y'(x)$  de afgeleide daarvan. Het grondprobleem van de variatierekening is uit een bepaalde klasse van functies, een functie  $y(x)$  te zoeken, zó, dat de integraal (2) stationnair wordt. We schrijven

$$\delta \int_a^b f \{y(x), y'(x), x\} dx = 0. \quad (3)$$

De onbekende van het probleem is dus een functie  $y(x)$ . We zullen in het volgende onderstellen, dat de functie  $f$  voldoende differentieerbaar en ontwikkelbaar is om de toe te passen operaties mogelijk te maken. Verder zullen we niet onderzoeken of een werkelijk extremum optreedt of niet en van welke aard het eventuele extremum is.

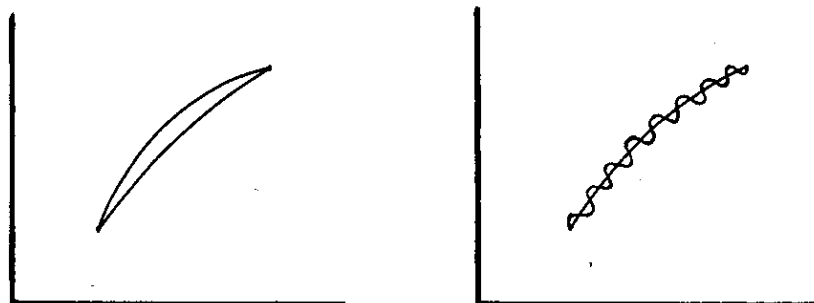
We zeggen dat twee functies  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$  naburig zijn van de orde nul, indien

$$|y_1(x) - y_2(x)| < \epsilon_1, \quad (4)$$

voor iedere waarde van  $x$  in het beschouwde interval. Geldt (4) en tevens

$$|y'_1(x) - y'_2(x)| < \epsilon_2, \quad (5)$$

dan spreken we van naburigheid van de orde een, etc.



Indien het grondprobleem (3) van de variatierekening door een functie  $s(x)$  wordt opgelost, voor de klasse van alle functies welke alleen voldoen aan

$$|s(x) - y(x)| < \varepsilon_1, \quad (6)$$

spreken we van een sterk extremum. Laten we alleen vergelijkingsfuncties  $y(x)$  toe, welke naast (6) nog aan

$$|s'(x) - y'(x)| < \varepsilon_2, \quad (7)$$

voldoen, dan hebben we een zwak extremum. We beperken ons tot de formulering van zwak stationnair karakter, dus we eisen voor de vergelijkingsfuncties (6) en (7).

## 2. De vergelijking van Euler

We kunnen schrijven voor een willekeurige functie

$$y(x) = s(x) + \varepsilon t(x), \quad (8)$$

waarin  $\varepsilon$  een willekeurig getal is en  $t(x)$  een willekeurige functie. Daar

$$y'(x) = s'(x) + \varepsilon t'(x), \quad (9)$$

moet op grond van (7),  $\varepsilon t'(x) \rightarrow 0$  voor  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We eisen dat

$$t(a) = t(b) = 0. \quad (10)$$

$$\text{Indien } I_s = \int_a^b f(s, s', x) dx, \quad (11)$$

$$\text{wordt } I = \int_a^b f(y, y', x) dx =$$

$$\int_a^b f(s + \varepsilon t, s' + \varepsilon t', x) dx. \quad (12)$$

Op grond van de onderstellingen geldt

$$f(s + \epsilon t, s' + \epsilon t', x) = f(s, s', x) + \epsilon \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) + \frac{\epsilon^2}{2!} \left( t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2tt' \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s'} + t'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s'^2} \right) + \dots, \quad (13)$$

waarin

$$\frac{\partial f}{\partial s} \text{ betekent } \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=s} \text{ etc.}$$

Indien we (13) invullen in (12) ontstaat

$$I = I_s + \epsilon \int_a^b \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) dx + \frac{\epsilon^2}{2!} \int_a^b \left( t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2tt' \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s'} + t'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s'^2} \right) dx + \dots \quad (14)$$

We definiëren

$$\delta I = I - I_s, \quad (15)$$

de verandering welke de funktionaal (11) aanneemt, indien  $s$  door een "naburige" kromme wordt vervangen. Het is de variatie van de integraal. Omdat  $\epsilon$  in (8) zowel positief als negatief kan zijn, (in tegenstelling tot  $\epsilon_1$  en  $\epsilon_2$  in (4) en (5)), is het noodzakelijk voor het optreden van een extremum, dat

$$\int_a^b \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) dx = 0, \quad (16)$$

waardoor

$$\delta I = \frac{\epsilon^2}{2} \int_a^b (\dots) dx + \dots \quad (17)$$

De oplossing van het probleem is in ieder geval een oplossing van (16), welke kan worden geschreven

$$\int_a^b \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) dx = \int_a^b t \frac{\partial f}{\partial s} dx + t \frac{\partial f}{\partial s'} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial s'} \right) \cdot t dx = 0. \quad (18)$$



Op grond van (10) kan hiervoor worden geschreven

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial s'} \right) \right\} t(x) dx = 0, \quad (19)$$

een noodzakelijke voorwaarde, opdat  $s(x)$  aan de integraal (11) een extreme waarde geeft. Ook indien dit niet het geval is, wordt (11) door de  $s(x)$  welke voldoet aan (19) stationnair.

We merken op, dat (19) moet gelden voor een willekeurige functie  $t(x)$ , alleen beperkt door de eisen van differentieerbaarheid. Dan moet dus

$$\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial s'} = 0. \quad (20)$$

De functie  $s(x)$  is de oplossing van

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

indien  $f(y, y', x)$  gegeven is. De vergelijking (21) heet de vergelijking van Euler.

Uitgeschreven is vergelijking (21) van de vorm

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (22)$$

### Voorbeeld

Gevraagd wordt de kromme te bepalen, welke de kortste afstand tussen twee punten in het Euclidische vlak geeft. Het probleem is

$$\delta I = \delta \int_1^2 ds = 0 \quad (23)$$

$$\text{Nu is } ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (24)$$

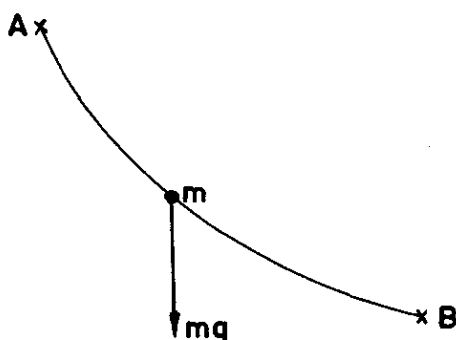
$$\text{dus } \delta \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2} dx = 0. \quad (25)$$

Daar  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , is de vergelijking van Euler

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0, \quad (26)$$

waaruit  $y'$  is constant.  
Het is dus een rechte lijn.

Voorbeeld



Tussen twee punten A en B wordt een kromme aangebracht, waarover een massapunt  $m$ , onder invloed van de zwaartekracht, kan glijden zonder wrijving. Gevraagd wordt de vorm van de kromme, opdat de tijd om van A naar B te komen een minimum wordt.

(Brachistochrone probleem van Johann Bernoulli, 1696).

Het probleem is

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{v} = 0. \quad (27)$$

$$\text{Met } ds^2 = dx^2 + dy^2 \text{ en } v = \sqrt{2gy}, \quad (28)$$

wordt (27)

$$\delta \int_A^B \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx = 0. \quad (29)$$

Hier wordt  $f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ , een functie, welke  $x$  niet expliciet bevat. Dan kan de vergelijking van Euler worden geïntegreerd tot

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c, \quad (30)$$

daar

$$\frac{d}{dx} (f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}) = \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx} (\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0$$

$$\text{leidt tot } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} (\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0.$$

De vergelijking (30) is

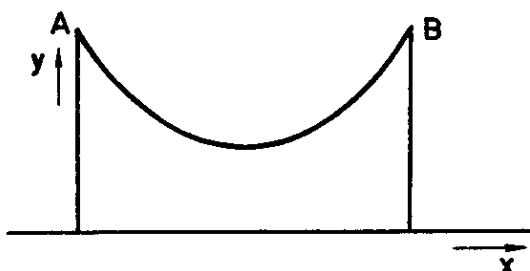
$$y(1 + y'^2) = 2c, \quad (31)$$

waaruit met  $y = \operatorname{tg} \varphi$  volgt

$$\left. \begin{aligned} y &= c_1 (1 + \cos 2\varphi), \\ x &= c_2 - c_1 (2\varphi + \sin 2\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

de parametervorm van de cycloïde. De waarden van  $c_1$  en  $c_2$  kunnen zo worden bepaald, dat de cycloïde door A en B gaat.

### Voorbeeld



Een ketting hangt tussen twee punten A en B onder invloed van de zwaartekracht. Wat is de vorm van de ketting?

Indien  $\rho$  de massa per lengte-eenheid is, is de potentiële energie van een element  $ds$

$$\rho g ds \cdot y. \quad (33)$$

De totale potentiële energie  $U$  wordt

$$U = \int_A^B \rho g y ds. \quad (34)$$

Met  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , is het probleem

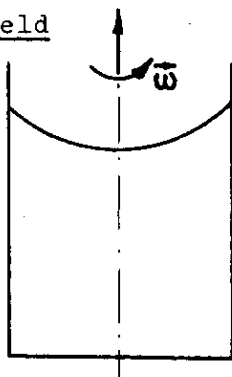
$$\delta \int_A^B y \sqrt{1 + y'^2} dx = 0, \quad (35)$$

waarvan de oplossing is

$$y = c \cosh \frac{x+b}{c}. \quad (36)$$

De constanten  $b$  en  $c$  worden bepaald door de positie van A en B. De lijn is een "kettinglijn"!

### Voorbeeld



Een cylinder, gevuld met een ideale vloeistof, roteert met een constante hoeksnelheid  $\omega$  om zijn as. Gevraagd wordt het vrije oppervlak van de vloeistof te bepalen.

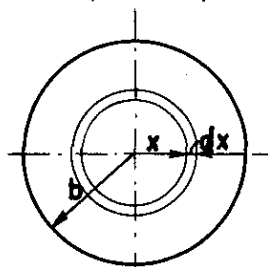
Indien de dichtheid  $\rho$  is werken op een volume-element  $dV$  de krachten  $\rho g dV$  naar beneden en  $\rho r \omega^2 dV$  naar buiten, indien  $r$  de afstand is van het element tot de as. De potentiële energie van het stilgezette probleem is dus

$$U = \int_V \rho dV \left\{ gz - \frac{1}{2} r^2 \omega + a \right\}, \quad (37)$$

waarin  $z$  de coördinaat is langs de as, gemeten vanaf de bodem en  $a$  een constante is. We stellen

$\rho dV = \rho \cdot 2\pi x dx \cdot dz$  en voeren de integratie naar  $z$  uit.

De waarde van  $z$  aan het oppervlak noemen we  $y$ . Dan is



$$U = \int_0^b \rho \cdot 2\pi x dx \int_0^y \left( gz - \frac{1}{2} r^2 \omega + a \right) dz,$$

waaruit het variatieprobleem

$$\delta \int_0^b \left( xy^2 g - x^3 y \omega + 2xy a \right) dx = 0 \quad (38)$$

volgt. De Eulerse vergelijking is hier  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , waaruit

$$gy - \frac{1}{2} \omega x^2 + a = 0. \quad (39)$$

Het oppervlak is een parabool.

### 3. Meerdere afhankelijke variabelen

We nemen twee onbekende functies  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$ . Het variatieprobleem is

$$\delta \int_a^b f(y_1, y_2; y_1', y_2'; x) dx = 0. \quad (40)$$

We nemen aan, dat  $y_1$  en  $y_2$  de oplossingen zijn van (40) en dat  $\delta y_1$  en  $\delta y_2$  kleine variaties zijn van deze functies. Ze voldoen aan

$$\delta y_1(a) = \delta y_1(b) = \delta y_2(a) = \delta y_2(b) = 0. \quad (41)$$

We vinden uit (40)

$$\begin{aligned}
\delta \int_a^b f dx &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \delta y_1' + \frac{\partial f}{\partial y_2'} \delta y_2' \right) dx \\
&= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \delta y_1' \right) dx + \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2'} \delta y_2' \right) dx \\
&= \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) \right\} \delta y_1 dx \\
&\quad + \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_2'} \right) \right\} \delta y_2 dx = 0. \tag{42}
\end{aligned}$$

Daar (42) geldt voor iedere toelaatbare willekeurige  $\delta y_1$  en  $\delta y_2$  moet

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_2'} \right) &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{43}$$

zijn. Dit zijn twee vergelijkingen van het karakter van de Eulerse vergelijking.

#### 4. Meerdere onafhankelijke variabelen

We beschouwen nu het probleem

$$\delta \iint f(x,y; z; p,q) dx dy = 0, \tag{44}$$

waarbij gezocht wordt  $z = z(x,y)$  en  $p$  en  $q$  gegeven zijn door

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{45}$$

We onderstellen, dat (44) wordt opgelost door

$$\begin{aligned}
z(x,y) &= s(x,y) \quad \text{en we stellen} \\
z(x,y) &= s(x,y) + \epsilon \zeta(x,y). \tag{46}
\end{aligned}$$

Dan ontstaat

$$\delta I = \iint f(x,y; s + \epsilon \zeta; p + \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x}, q + \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y}) dx dy -$$

$$\begin{aligned}
 & - \iint f(x, y; s; p, q) \, dx dy = \\
 & = \varepsilon \iint \left\{ \zeta \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right\} dx dy + o(\varepsilon^2). \quad (47)
 \end{aligned}$$

Voor een stationnaire waarde moet dus

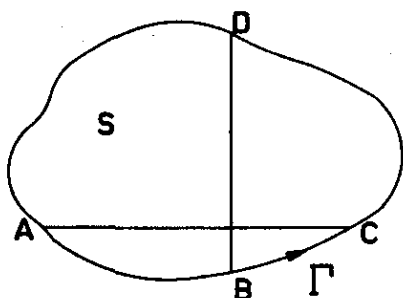
$$\iint \left( \zeta \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) dx dy = 0. \quad (48)$$

We gebruiken de hulpstelling: indien  $\varphi$  en  $\psi$  twee funkties van  $x$  en  $y$  zijn, waarvan de eerste partiële afgeleiden continu zijn, geldt

$$\iint_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} \varphi dy - \psi dx, \quad (49)$$

indien het oppervlak  $S$  begrensd wordt door de kromme  $\Gamma$  en de integratierichting lang  $\Gamma$  het oppervlak aan de linkerzijde laat.

Het bewijs van (49) is in wezen een zaak van partieel integreren.



We hebben

$$\begin{aligned}
 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy &= \iint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) dy \\
 &= \int \varphi_C dy_C - \varphi_A dy_A. \quad (50)
 \end{aligned}$$

Nu is  $dy_C = dy$ ,  $dy_A = -dy$ ,

dus (50) wordt

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} \varphi dy. \quad (51)$$

Evenzo is

$$\iint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = \iint \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) dx = \int \psi_D dx_D - \psi_B dx_B. \quad (52)$$

Doch nu is  $dx_D = -dx$ ;  $dx_B = dx$ , dus

$$\iint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = - \int \psi dx. \quad (53)$$

Daarmee is (49) bewezen voor een enkelvoudig samenhangend gebied.

We stellen nu

$$\varphi = \zeta \frac{\partial f}{\partial p} \quad \text{en} \quad \psi = \zeta \frac{\partial f}{\partial q}, \quad (54)$$

waarmee (49) overgaat in

$$\begin{aligned} & \iint_S \left\{ \zeta \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right\} dx dy \\ &= \int_{\Gamma} \zeta \left( \frac{\partial f}{\partial p} dy - \frac{\partial f}{\partial q} dx \right). \end{aligned} \quad (55)$$

We eisen dat de variatie  $\zeta(x,y)$  langs de rand overal nul wordt

$$\zeta(x,y) = 0 \quad \text{langs} \quad \Gamma. \quad (56)$$

Daarmee wordt (55)

$$\iint \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) dx dy = - \iint \zeta \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) dx dy. \quad (57)$$

Indien we dit invullen in (48) ontstaat

$$\iint \zeta \left\{ \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right\} dx dy = 0, \quad (58)$$

waaruit volgt, op grond van de willekeurige vorm van  $\zeta$ , dat  $s$  moet voldoen aan

$$\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \quad (59)$$

Indien we  $f(x,y; z; p,q)$  geven is  $s$  de oplossing van

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \quad (60)$$

### Voorbeeld

De functie  $z$ , welke

$$\iint \left\{ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad \text{stationnair maakt}$$

$$\text{is} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (61)$$

de vergelijking van Laplace.

## II. Het principe van Hamilton

### 1. De vergelijkingen van Lagrange

Het is uit het voorafgaande duidelijk, dat voor een holonoom-conservatief systeem, de vergelijkingen van Lagrange kunnen worden beschouwd als de Eulerse vergelijkingen, behorende bij het variatieprincipe

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (1)$$

Hierin is  $L = T - U$ , de Lagrangefunctie, een functie van de generaliseerde coördinaten  $q_k$  en hun afgeleiden  $\dot{q}_k$ :

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (2)$$

Het principe, uitgedrukt door (1), is het principe van Hamilton. Het toont, dat de in de natuur gerealiseerde, werkelijk optredende

funkties  $q_k(t)$  een extreme waarde geven aan  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  ten opzichte van "naburige" (gevarieerde) funkties. Daarbij is principieel noodzakelijk dat aan de grenzen  $t_1$  en  $t_2$  de variaties verdwijnen:

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0. \quad (3)$$

### 2. Directe afleiding uit het principe van d'Alembert

We kunnen Hamilton's principe ook direct afleiden uit het principe van d'Alembert. Allereerst merken we op dat voor de gebruikte variaties geldt

$$\frac{d}{dt} \delta y(t) = \delta \frac{dy(t)}{dt}. \quad (4)$$

Dit volgt direct uit de vorm van de variaties

$$y(t) = y_0(t) + \epsilon s(t), \quad (5)$$

waarin  $s(t)$  een differentieerbare, willekeurige functie is. Ook geldt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} f(y, y', t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta f(y, y', t) dt, \quad (6)$$



op grond van een eenvoudige stelling uit de integraalrekening.

Het principe van d'Alembert luidt

$$\delta A = \int_V dV \left\{ \vec{k}^{(b)} - \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right\} \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (7)$$

Voor een conservatief stelsel geldt

$$\vec{k}^{(b)} = - \text{grad } u \quad (8)$$

en het eerste gedeelte kan worden geschreven als

$$\begin{aligned} \int_V dV \left\{ \vec{k}^{(b)} \right\} \cdot \delta \vec{r} &= - \int_V dV \cdot (\text{grad } u) \cdot \delta \vec{r} = \\ &= - \int_V dV \cdot \delta u = - \delta \int_V u dV = - \delta U. \end{aligned} \quad (9)$$

Het tweede gedeelte is

$$\begin{aligned} - \int_V dV \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \cdot \delta \vec{r} &= - \int_V dV \frac{d}{dt} (\rho \vec{v} \cdot \delta \vec{r}) + \int_V dV \rho \vec{v} \frac{d}{dt} \delta \vec{r} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_V dV (\rho \vec{v} \cdot \delta \vec{r}) + \frac{1}{2} \int_V dV (\delta \rho v^2). \end{aligned} \quad (10)$$

We integreren nu d'Alembert's principe. Er ontstaat

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt - \int_V dV (\rho \vec{v} \cdot \delta \vec{r}) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt. \quad (11)$$

Aangezien  $\delta \vec{r}$  voor  $t_1$  en  $t_2 = 0$  wordt gesteld, wordt

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0 &= \int_{t_1}^{t_2} - \delta U dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Dit is weer het principe van Hamilton.

## F. Algemene theorie van het elastisch Continuum

### I. Meetkunde der Deformaties

#### 1. De verplaatsingen

Een lichaam is deformeerbaar, indien het onder invloed van uitwendige krachten van vorm kan veranderen. Onder de deformeerbare lichamen nemen de elastische een bijzondere plaats in en daarom wordt allereerst aandacht aan deze geschonken.

We noemen een lichaam elastisch, indien het bij opheffing van de werking der uitwendige krachten naar zijn oorspronkelijke, onvervormde toestand terugkeert. Bij de vervorming zal ieder punt van het lichaam een verplaatsing ondergaan, welke een vector is met drie componenten  $u, v, w$ . In het algemeen zijn  $u, v$  en  $w$  van plaats tot plaats veranderlijk. We zullen in deze syllabus de vector der verplaatsingen aangeven door  $u_i$ . Dus

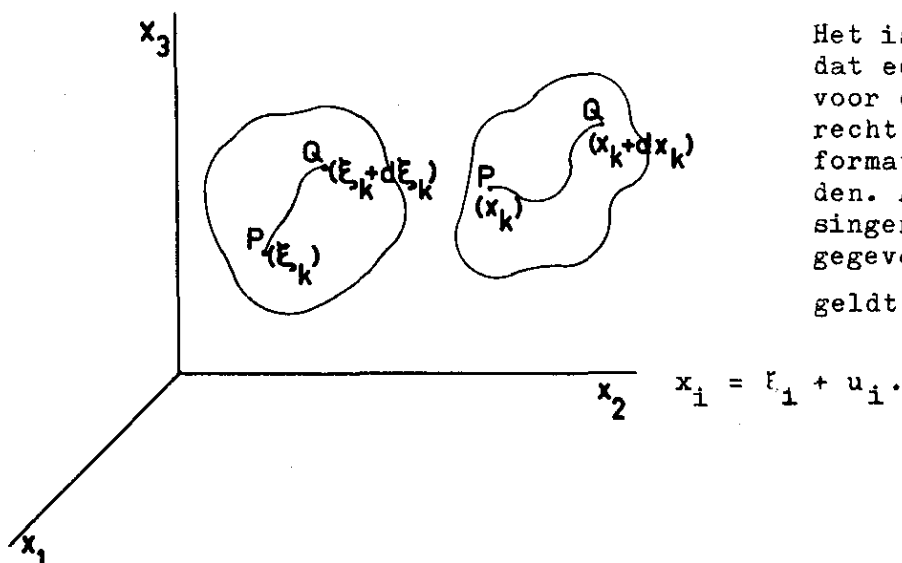
$$u_1 \equiv u; u_2 \equiv v, u_3 \equiv w. \quad (1)$$

Soms zullen we ook de  $u, v, w$ -notatie gebruiken. We hebben dus

$$u_i = u_i(x_k). \quad (2)$$

De formule (2) drukt uit, dat er een verplaatsingsveld is. De verplaatsing bestaat in het algemeen uit een translatie en een rotatie als star lichaam en een locale verplaatsing.

We bekijken een lichaam op verschillende ogenblikken tijdens de deformatie. Speciaal bekijken we een lijntje  $PQ$ , dat twee punten  $P$  met de coördinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  en  $Q$  met de coördinaten  $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ , na de deformatie, verbindt. Voor de deformatie zijn de coördinaten van  $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  en van  $Q(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ .



Het is duidelijk, dat een lijntje, dat voor de deformatie recht is, door de deformatie krom kan worden. Als de verplaatsingen van het punt  $P$  gegeven worden door  $u_i$ , geldt natuurlijk

$$x_i = \xi_i + u_i. \quad (3)$$

We hebben PQ infinitesimaal genomen. Het boogelement PQ voor de deformatie wordt gegeven door

$$d\ell_0^2 = d\xi_i d\xi_i, \quad (4)$$

terwijl het na de deformatie en verplaatsing wordt gegeven door

$$d\ell^2 = dx_i dx_i. \quad (5)$$

We onderstellen dat het verplaatsingsveld  $u_i$  differentieerbaar is. Dan is

$$d\xi_i = dx_i - du_i = dx_i - u_{i,j} dx_j. \quad (6)$$

## 2. De deformaties

De deformaties worden gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (d\ell^2 - d\ell_0^2) &= \frac{1}{2} (dx_i dx_i - d\xi_i d\xi_i) = \\ e_{ij} dx_i dx_j, \end{aligned} \quad (7)$$

waarin

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j}, \quad (8)$$

zoals volgt uit (7) door invullen van (6). We zullen ons in dit college steeds beperken tot (wiskundig infinitesimale), zeer kleine deformaties. Dan is het mogelijk in (8) de tweede graads termen te verwaarlozen en we hebben

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (9)$$

In de techniek worden gebruikt de notaties

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Door vergelijking blijkt

$$\epsilon_x = e_{11}; \quad \gamma_{xy} = 2e_{12} \text{ etc.} \quad (11)$$

te zijn. We zullen de notaties (9) en (10) naast en door elkaar gebruiken.

We merken op, dat een translatie van het vaste lichaam geen bijdrage levert tot (9), evenmin als een infinitesimale rotatie om een as.

Zoals uit (7) blijkt, is  $e_{ij}$  een tensor van de tweede orde. Want  $\frac{1}{2} (d\ell^2 - d\ell_0^2)$  is invariant tegenover coördinaten-transformaties

$$\bar{x}_i = l_{ij} x_j, \quad \left. \begin{array}{l} \text{orthogonale transformaties dus!} \\ ? \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\text{waarin } \left. \begin{array}{l} l_{ij} l_{ik} = \delta_{jk}, \\ l_{ki} l_{ji} = \delta_{jk}. \end{array} \right\} \quad (13)$$

De  $e_{ij}$  transformeren volgens

$$\bar{e}_{ij} = l_{ik} l_{jl} e_{kl}. \quad (14)$$

Verder is  $e_{ij}$  symmetrisch

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad (15)$$

zoals uit (8) of (9) volgt.

We voeren naast de  $e_{ij}$  de rotaties  $\omega_{ij}$  in volgens

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (16)$$

Uit (9) en (11) volgt

$$e_{ij} + \omega_{ij} = u_{i,j}. \quad (17)$$

We hebben de deformaties  $e_{ij}$  en de rotaties  $\omega_{ij}$  volledig wiskundig formeel ingevoerd. We gaan nu de physische betekenis ervan onderzoeken.

Indien we de twee punten P en Q zodanig plaatsen, dat ze na de deformatie langs de  $x_1$  - as liggen met de afstand  $dx_1$ , wordt  $dx_2 = dx_3 = 0$ . Dan gaat (7) over in

$$\frac{1}{2} (d\ell^2 - d\ell_0^2) = e_{11} dx_1^2. \quad (18)$$

Nu is ook  $d\ell = dx_1$ , zodat

$$e_{11} = \frac{d\ell^2 - d\ell_0^2}{2 d\ell^2} = \frac{d\ell - d\ell_0}{d\ell} \cdot \frac{d\ell + d\ell_0}{2 d\ell}. \quad (19)$$

Bij infinitesimale uitgangspositieverschillen  $d\ell$  en  $d\ell_0$  slechts een oneindig kleine waarde. Dus mag gesteld worden

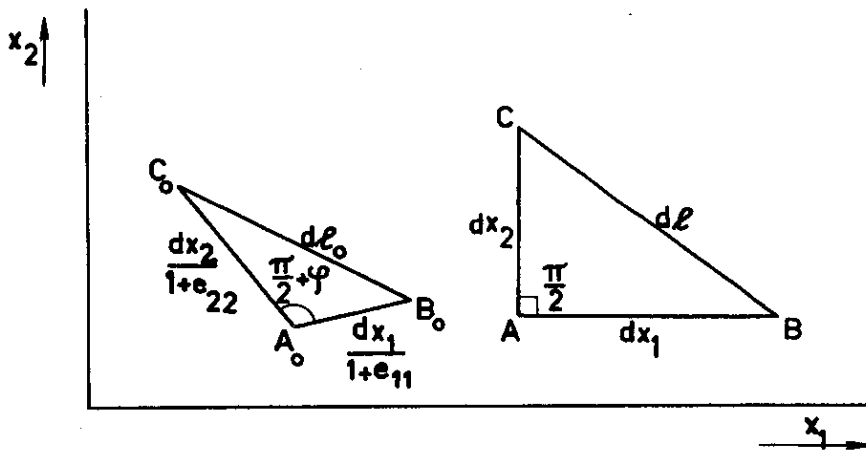
$$\frac{d\ell + d\ell_0}{2} \approx d\ell \approx d\ell_0. \quad (20)$$

Daarmee wordt (19)

$$e_{11} = \frac{d\ell - d\ell_0}{d\ell_0}. \quad (21)$$

$e_{11}$  meet dus de relatieve verlenging van een element van de lengte  $d\ell_0$ , in de  $x_1$ -richting. Het is de rek in de  $x$ -richting. Op gelijke wijze blijken  $e_{22}$  en  $e_{33}$  de rekken te zijn in de  $x_2$ - resp. de  $x_3$ -richting.

We onderzoeken nu de betekenis van  $e_{12}$ .



We bekijken een driehoek ABC die na de deformatie  $AB = dx_1$  evenwijdig de  $x_1$ -as heeft en  $AC = dx_2$  evenwijdig de  $x_2$ -as. Natuurlijk is de hoek CAB gelijk aan  $\pi/2$ .

Voor de deformatie was deze driehoek  $A_0B_0C_0$  met  $A_0B_0 = \frac{dx_1}{1+e_{11}}$  en  $A_0C_0 = \frac{dx_2}{1+e_{22}}$ , zoals uit de voorafgaande beschouwingen blijkt. We hebben

$$d\ell^2 = dx_1^2 + dx_2^2,$$

$$d\ell_0^2 = \left(\frac{dx_1}{1+e_{11}}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{1+e_{22}}\right)^2 + 2 \frac{dx_1 dx_2}{(1+e_{11})(1+e_{22})} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \quad (22)$$

waarbij  $(\pi/2 + \varphi)$  de hoek is tussen  $A_0B_0$  en  $A_0C_0$ .

In de infinitesimale theorie mogen we voor  $\left(\frac{dx_1}{1+e_{11}}\right)^2$  schrijven  $dx_1^2$  etc. Dan wordt

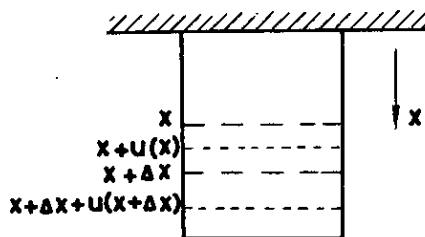
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (d\ell^2 - d\ell_0^2) &= - dx_1 dx_2 \cos(\pi/2 + \varphi) = \\ &= dx_1 dx_2 \sin \varphi = e_{12} dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (23)$$

waaruit

$$e_{12} = \sin \varphi \approx \varphi. \quad (24)$$

$e_{12}$  is dus de hoekverandering van een rechte hoek tussen de  $x_1$  en  $x_2$  richtingen. Het is de afschuiving. Soortgelijke beschouwingen gelden voor  $e_{23}$  en  $e_{31}$ .

Aansluiting met de elementaire theorie verkrijgen we indien we een eenvoudig blokje bekijken.

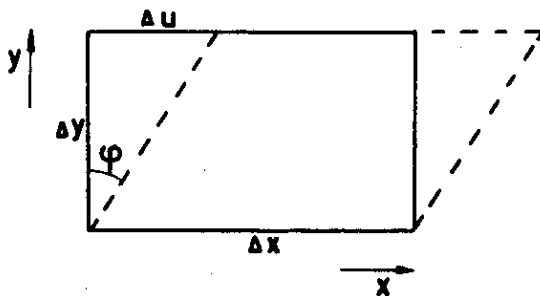


De verplaatsing in  $x$  is  $u(x)$ , die in  $x + \Delta x$  is  $u(x + \Delta x)$ . De lengte van het elementje  $\Delta x$  wordt dus

$$\begin{aligned} [x + \Delta x + u(x + \Delta x)] - [x + u(x)] &= \\ \Delta x + u(x + \Delta x) - u(x). \end{aligned} \quad (25)$$

De relatieve lengteverandering wordt dus

$$\epsilon_x = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (26)$$



Bij de afschuiving hebben we

$$\tan \varphi \approx \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (27)$$

en algemener

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (28)$$

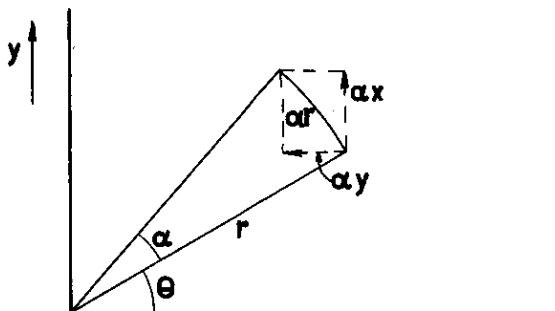
Dit is  $\gamma_{xy}$ . Dus

$$e_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}. \quad (29)$$

De fysische betekenis van de rotaties  $\omega_{ij}$  is te zien uit de formule

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (30)$$

Dit is de infinitesimale draaiingshoek van het element om de z-as.



Bij een draaiing van het element getypeerd door  $(r, \theta)$  over de boog  $r \alpha$ , is

$$\left. \begin{aligned} u &= -\alpha y, \\ v &= +\alpha x, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

waaruit

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} (-\alpha - \alpha) = -\alpha. \quad (32)$$

We kunnen resumeren dat de totale plaatsverandering aanleiding geeft tot

- (a) een translatie als geheel,
- (b) een rotatie als geheel,
- (c) een locale plaatsverandering, welke bestaat uit
  - (c1) een drietal rekken,
  - (c2) een drietal afschuivingen en
  - (c3) een drietal locale rotaties, waarbij het element niet wordt vervormd.

### 3. De Compatibiliteitsvergelijkingen

Indien de deformaties van een verplaatsingsveld worden afgeleid, dat voldoende differentieerbaar is, volgt direct dat een aantal betrekkingen tussen deze moet bestaan. Er geldt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \text{ cycl.}, \\ 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}, \text{ cycl.}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

zoals direct na invullen blijkt. Deze zes betrekkingen zijn tevens de noodzakelijke en voldoende voorwaarden, dat een zestal gegeven deformaties  $e_{ij}$  af te leiden is door differentiatie uit een verplaatsingsveld  $u_i$ . De betrekkingen heten de compatibiliteitsvoorwaarden of de aansluitingsvoorwaarden.

#### 4. De hoofdrichtingen en invarianten

In ieder punt van het elastische lichaam bestaan er drie richtingen, de hoofdrichtingen van de deformatie, waarin de afschuiving verdwijnt, m.a.w. de deformatie uitsluitende een rek is. Om dit in te zien definiëren we in het  $x_1, x_2, x_3$ -stelsel een willekeurige eenheidsvector  $n_j$  en met behulp daarvan de deformatievector  $e_{ij}n_j$ . Om de fysische betekenis van deze vector te begrijpen leggen we  $\vec{n}$  langs de  $x_1$ -as  $\rightarrow (1,0,0)$ .

In dit geval wordt deformatievector  $(e_{11}, e_{21}, e_{31})$  en deze heeft de grootte van de rek  $e_{11}$  in de richting van  $\vec{n}$ , terwijl de componenten loodrecht op  $\vec{n}$  gelijk zijn aan de afschuivingen  $e_{21}$  en  $e_{31}$ . De hoofdrichtingen worden dus bepaald door die waarden van  $n_j$ , welke voldoen aan

$$e_{ij}n_j = \lambda n_i, \quad (34)$$

een drietal homogene vergelijkingen voor  $n_j$ . Ze hebben alleen een oplossing, indien de determinant

$$|e_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (35)$$

De vergelijking (35) is een derdegraads vergelijking voor  $\lambda$ . Hij heeft drie oplossingen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Deze  $\lambda$ 's zijn reëel, want stel dat er twee toegevoegd complexe bij zijn, bijv.  $\lambda_2 = \lambda_3^*$ , dan is

$$\left. \begin{aligned} e_{ij}n_j^{(2)} &= \lambda_2 n_i^{(2)}, \\ e_{ij}n_j^{(2)*} &= \lambda_2^* n_i^{(2)*}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Vermenigvuldig met  $n_i^{(2)*}$  resp. met  $n_i^{(2)}$  en trek af:

$$e_{ij}(n_j^{(2)}n_i^{(2)*} - n_j^{(2)*}n_i^{(2)}) = (\lambda_2 - \lambda_2^*)n_i^{(2)}n_i^{(2)*}. \quad (37)$$

Nu is  $e_{ij} = e_{ji}$  dus het linker lid van (37) is nul. Daar  $n_i^{(2)} \cdot n_i^{(2)*} \neq 0$ , moet

$$\lambda_2 = \lambda_2^*, \quad (38)$$

wat onmogelijk is voor een complex getal. Dus  $\lambda_2$  is reëel.



Als de drie  $\lambda_k$ 's ongelijk zijn, staan de  $n_j^{(k)}$ 's loodrecht op elkaar. Stel  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . We hebben

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} n_j^{(1)} &= \lambda_1 n_i^{(1)}, \\ e_{ij} n_j^{(2)} &= \lambda_2 n_i^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

waaruit

$$\begin{aligned} e_{ij} (n_j^{(1)} n_i^{(2)} - n_j^{(2)} n_i^{(1)}) &= 0 = \lambda_1 n_i^{(1)} n_i^{(2)} - \lambda_2 n_i^{(1)} n_i^{(2)} = \\ &(\lambda_1 - \lambda_2) n_i^{(1)} n_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\text{Daar } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ is } n_i^{(1)} n_i^{(2)} = 0, \quad (41)$$

waaruit de loodrechte stand volgt.

Als twee of drie  $\lambda_k$ 's gelijk zijn, kunnen we uit (40) niet zonder meer tot de loodrechte stand concluderen. Aan de vergelijkingen (39) voldoet nu iedere lineaire combinatie van  $n_i^{(1)}$  en  $n_i^{(2)}$ :

$$n_i = n_i^{(1)} + \alpha n_i^{(2)}, \quad (42)$$

met  $\alpha$  reëel, willekeurig, maar zo dat

$$n_i n_i = 1. \quad (43)$$

We kunnen nu  $\alpha$  zo kiezen dat

$$n_i n_i^{(1)} = 0. \quad (44)$$

De determinant (35) heeft de vorm

$$\lambda^3 - \theta_1 \lambda^2 + \theta_2 \lambda - \theta_3 = 0, \quad (45)$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= e_{kk}, \\ \theta_2 &= \frac{1}{2!} e_{ijk} e_{ist} e_{js} e_{kt}, \\ \theta_3 &= \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{rst} e_{ir} e_{js} e_{kt}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

In de hoofdrekken is dit

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \theta_2 &= \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2, \\ \theta_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Aangezien de hoofdrekken onafhankelijk zijn van de keuze van het assenstelsel, verandert (45) niet bij rotatie van dit stelsel! Daaruit volgt dat  $\theta_1, \theta_2$  en  $\theta_3$  onafhankelijk zijn van de keuze der assen, dus invarianten.

Dit is ook direct te bewijzen door invullen.

De fysische betekenis van  $\theta_1$  is eenvoudig te zien. Neem een parallelepipedum met de zijden  $l_1, l_2$  en  $l_3$  evenwijdig de hoofdassen. Na de deformatie worden de lengtes  $l_1(1 + \lambda_1), l_2(1 + \lambda_2), l_3(1 + \lambda_3)$ , dus de volumeverandering is

$$\begin{aligned} \Delta V &= l_1 l_2 l_3 (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - l_1 l_2 l_3 \\ &\approx l_1 l_2 l_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3). \end{aligned} \quad (48)$$

Hieruit volgt

$$\theta_1 = \frac{\Delta V}{V}, \quad (49)$$

de relatieve volumeverandering.

## II. Spanningsleer

### 1. De begrippen

We beschouwen in de elasticiteitstheorie uitsluitend lichamen, die continu of deelsgewijze continu zijn, dat wil zeggen, we verwaarlozen de moleculaire structuur van het lichaam. Uit fysische overwegingen blijkt, dat deze beschouwingswijze aanvaardbaar is, zolang de veranderingen van de mechanische grootheden over een atoomdimensie zeer klein zijn, dus merkbare veranderingen optreden over afstanden, welke grote veelvoudigen zijn van de atomaire afstanden.

Op een lichaam werken volumekrachten en oppervlaktekrachten. De volumekrachten grijpen aan in ieder volume-element van het continuum, de oppervlaktekrachten in de oppervlakte-elementen. Indien de krachtdichtheid  $\vec{k}$  van de volumekrachten gegeven is, is de totale volumekracht

$$\vec{K} = \int_V \vec{k} dV, \quad (1)$$

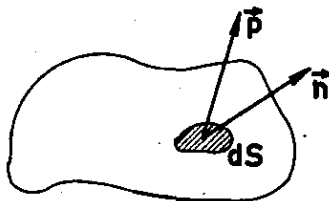
terwijl het moment  $\vec{M}$  bepaald wordt door

$$\vec{M} = \int_V (\vec{r} \times \vec{k}) dV = \int_V \vec{m} dV. \quad (2)$$

Om de totale oppervlaktekracht te bepalen, verdelen we het oppervlak van het lichaam in elementen. We definiëren nu de kracht per oppervlakte-element als de spanningsvector  $\vec{p}$ . De totale oppervlaktekracht wordt dan

$$\vec{P} = \int_S \vec{p} dS. \quad (3)$$

Het spreekt vanzelf dat in het algemeen de spanningsvector  $\vec{p}$  en de eenheidsnormaalvector  $\vec{n}$  van het oppervlakte-element  $dS$ , welke loodrecht op  $dS$  staat en naar buiten gericht is, niet dezelfde richting hebben.



Indien de componenten van  $\vec{p}$  zijn  $p_i$  en die van  $\vec{n}$  :  $n_j$ , voeren we de spanningstensor  $\tau_{ij}$  in door

$$p_i = \tau_{ij} n_j \quad (4)$$

Deze spanningstensor heeft negen componenten  $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33}$ .

De op deze wijze ingevoerde spanningstensor heeft uitsluitend betrekking op het buitenoppervlak van een lichaam. We breiden onze beschouwingen nu uit. Wordt een lichaam door uitwendige krachten belast en snijdt men het lichaam denkbeeldig door, dan oefenen de twee gedeelten gelijke en tegengestelde krachten op elkaar uit. Dit geldt niet alleen voor de resulterende krachten doch ook voor de, in het snedevlak werkende spanningen, de krachten per eenheid van oppervlak, gedefinieerd door (4). Dus de spanningstensor kan in ieder punt van het lichaam worden gedefinieerd.

We bewijzen allereerst, dat de ingevoerde spanningsgrootte inderdaad een tensor is. Want

$$p_{i n_i} = \tau_{ij} n_i n_j \quad (5)$$

is een invariant tegenover draaiingen van het assenstelsel en dit kan alleen als  $\tau_{ij}$  transformeert als

$$\bar{\tau}_{ij} = \ell_{ij} \ell_{jk} \tau_k \ell \quad (6)$$

Vervolgens gaan we de fysische betekenis na van de in (4) wiskundig formeel ingevoerde spanningstensor. Daartoe leggen we  $\vec{n}$  in de richting van de positieve x-as. Formule (4) wordt dan

$$p_x = \tau_{yx}; p_y = \tau_{yz}; p_z = \tau_{zx} \quad (7)$$

In de positieve y-richting zijn de spanningsvector componenten

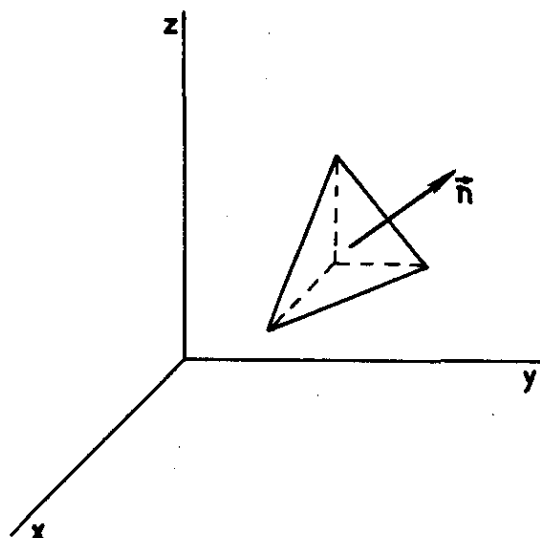
$$p_x = \tau_{xy}; p_y = \tau_{yy}; p_z = \tau_{zy} \quad (8)$$

en in de positieve z-richting

$$p_x = \tau_{xz}; p_y = \tau_{yz}; p_z = \tau_{zz} \quad (9)$$

De betekenis van  $\tau_{ij}$  is uit (7), (8) en (9) duidelijk. In de technische literatuur heten  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  en  $\tau_{zz}$  resp.  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en  $\sigma_z$ . Het zijn de normaalspanningen. De andere componenten worden ook met  $\tau_{xy}$  etc. aangegeven en heten schuifspanningen. Let op, dat bij een eenheidsvector met negatieve componenten, de richtingen van de componenten van de spanningsvector omkeren.

We bewijzen tenslotte, dat de definitie (4) consistent is met onze mechanische opvattingen van kracht en versnelling. Daartoe bekijken we een infinitesimale tetraeder, waarvan drie vlakken evenwijdig de coördinaatvlakken zijn en het vierde vlak een willekeurige stand, gegeven door  $\vec{n}$ , heeft. Op het lichaampje werken volumekrachten, oppervlaktekrachten en voorts kan het een versnelling hebben.



Indien de ribben oneindig klein van de eerste orde worden, worden de oppervlakten oneindig klein van de tweede orde en het volume oneindig klein van de derde orde. Dit betekent dat bij eindige krachtdichtheid de invloed van de volumekrachten moet worden verwaarloosd ten opzichte van de oppervlaktekrachten. Doch bij eindige dichtheid en eindige versnelling moeten ook de traagheidskrachten worden verwaarloosd. Van dit tetraedertje moeten de oppervlaktekrachten elkaar dus

in evenwicht houden. Bij het oppervlak  $S_0$  van het grondvlak, de oppervlakten  $S_1$ ,  $S_2$  en  $S_3$  resp. van het vlak  $\perp$  de  $x$ , de  $y$  en de  $z$ -richting geldt

$$S_i = S_0 n_i. \quad (10)$$

Het evenwicht vereist

$$p_x S_0 = S_1 \cdot \sigma_x + S_2 \cdot \tau_{xy} + S_3 \cdot \tau_{xz}, \text{ etc.} \quad (11)$$

Na invullen van (10) ontstaat

$$p_i = \tau_{ij} n_j, \quad (12)$$

conform (4).

## 2. Transformaties en hoofdrichtingen

De spanningstensor behoeft niet symmetrisch te zijn, doch is dit meestal wel. We beschouwen in deze paragraaf alleen symmetrische spanningstensenoren:  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Zoals reeds in (6) is tot uitdrukking gekomen transformeren de  $\tau_{ij}$ 's zich als

$$\bar{\tau}_{ij} = l_{ik} l_{je} \tau_{ke}. \quad (13)$$

We zoeken de hoofdspanningen, dat zijn de spanningen behorende bij de hoofdrichtingen, waarbij de spanningsvector loodrecht staat

op het vlakje, waarop hij werkt. We hebben dan

$$\tau_{ij} n_j = \lambda n_i. \quad (14)$$

Uit (14) volgt, dat er drie reële hoofdrichtingen zijn, welke loodrecht op elkaar staan. De hoofdspansingen zijn de oplossingen van de vergelijking

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0, \quad (15)$$

waarvan de oplossingen alle reëel zijn. De J's zijn de spanningsinvarianten

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \tau_{kk} , \\ J_2 &= e_{ijk} e_{ist} \tau_{js} \tau_{kt} , \\ J_3 &= e_{ijk} e_{rst} \tau_{ir} \tau_{js} \tau_{kt} . \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

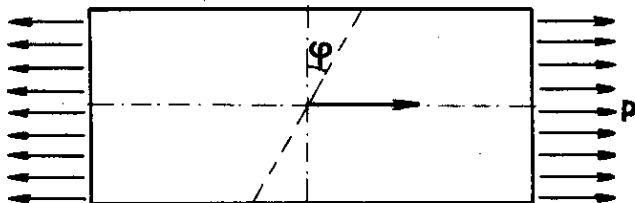
We hebben natuurlijk ook

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 , \\ J_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 , \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 , \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

indien  $\sigma_k$  de k-de hoofdspansing is.

### 3. Spanningstoestanden en cirkels van Mohr

In een lijnsparingstoestand zijn alle spanningen evenwijdig aan een lijn, de as van de spanningstoestand. Een willekeurig vlak door de as is spanningsvrij, dus twee hoofdspansingen zijn gelijk nul.



In een vlak loodrecht de as bestaat alleen de normaalspanning  $p (= \sigma_1)$ .

We vragen naar de spanningen, welke bestaan in een vlak, dat een hoek  $\varphi$  maakt met het hoofdvlak. We berekenen dit met de tensorformule. De transformatie is

	x	y	z
$\bar{x}$	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
$\bar{y}$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
$\bar{z}$	0	0	1

We hebben in dit bijzondere geval

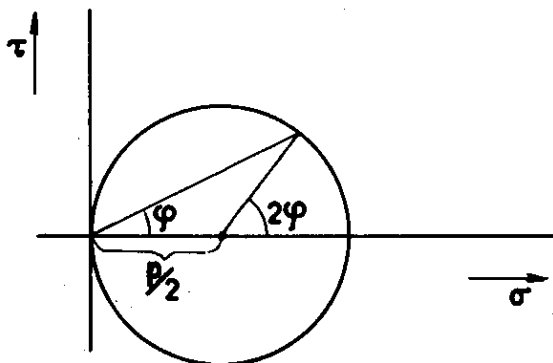
$$\bar{\tau}_{ij} = l_{ik} l_{jl} \tau_{kl} = l_{i1} l_{j1} p. \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Daaruit } \bar{\tau}_{xx} &= p \cos^2 \varphi, \\ \bar{\tau}_{yy} &= p \sin^2 \varphi, \\ \bar{\tau}_{xy} &= p \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Nu is  $\bar{\tau}_{xx} = \sigma$ ;  $\bar{\tau}_{xy} = \tau$ , resp. de normaalspanning en de schuifspanning op het vlak. De waarden van  $\sigma$  en  $\tau$  liggen op een cirkel

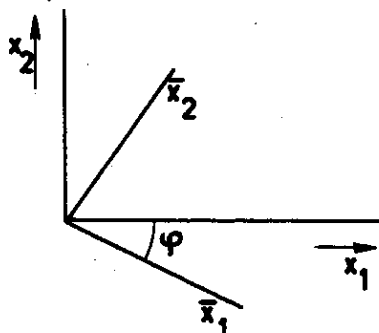
$$(\sigma - \frac{1}{2}p)^2 + \tau^2 = (\frac{1}{2}p)^2, \quad (20)$$

de cirkel van Mohr voor de lijnspanningstoestand.



De maximale  $|\tau|$  is  $p/2$ .

In een vlakspanningstoestand zijn alle spanningen evenwijdig aan een vlak, het spanningsloze vlak. Hier is één normaalspanning gelijk aan nul. Indien we de normaal op het spanningsloze vlak als  $x_3 \equiv z$ -as kiezen en alleen transformeren door draaiingen om deze as, hebben we weer het schema:



	x	y	z
$\bar{x}$	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
$\bar{y}$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
$\bar{z}$	0	0	1

Door direct invullen in de tensorformule wordt

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{x x} &= \tau_{x x} \cos^2 \varphi + \tau_{x x} \sin^2 \varphi - 2\tau_{x x} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \bar{\tau}_{x x} &= \tau_{x x} \sin^2 \varphi + \tau_{x x} \cos^2 \varphi + 2\tau_{x x} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \bar{\tau}_{x x} &= \tau_{x x} \cos \varphi \sin \varphi - \tau_{x x} \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \tau_{x x} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \right\} (21)$$

Nemen we het vlakje door de z-as en de  $\bar{x}_1$ -as. Dan is  $\bar{\tau}_{x x} = \sigma$  de normaalspanning en  $\bar{\tau}_{x x}$  de schuifspanning. Met  $\tau_{x x} = \sigma_x$  etc. wordt

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} (22)$$

Indien we  $\varphi$  uit (22) elimineren ontstaat

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2, \quad (23)$$

weer een cirkel van Mohr.

De situatie wordt wat meer ingewikkeld, indien we bij de transformatie ook de z-richting veranderen. De toepassing van de algemene transformatieformules geven ook dan direct de normaal en schuifspanningen.

In de ruimtespanningstoestand wordt geen hoofdspanning in een gebied gelijk aan nul. We zoeken weer het verband tussen een normaalspanning op een vlak en de schuifspanning. De hoofdspanningen zijn  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$ . Met de algemene tensorformule vinden we voor de normaalspanning op een vlak, waarvan de normaal de hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  met de x-, y- resp. z-as maakt

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma. \quad (24)$$

$$\text{Uit } p_i = \tau_{ij} n_j \quad (25)$$

$$\text{volgt } p_x = \sigma_1 \cos \alpha, \quad p_y = \sigma_2 \cos \beta, \quad p_z = \sigma_3 \cos \gamma, \quad (26)$$



waaruit

$$p^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma. \quad (27)$$

Nu geldt  $p^2 = \sigma^2 + \tau^2$ ,

dus  $\tau^2$  is te berekenen. We lossen met behulp van

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (29)$$

bij een gegeven  $\sigma$  en  $\tau$  de bijbehorende waarden van  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  en  $\cos \gamma$  op uit (24), (27), (28) en (29). We vinden

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3)}, \\ \cos^2 \beta &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}, \\ \cos^2 \gamma &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Uit deze formules zijn belangrijke conclusies te trekken. Daar de cosinussen in het kwadraat positief moeten zijn, mogen tellers en noemers niet van teken verschillen. Stel

$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1, \quad (31)$$

dan moet

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0, \quad (32)$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) \leq 0, \quad (33)$$

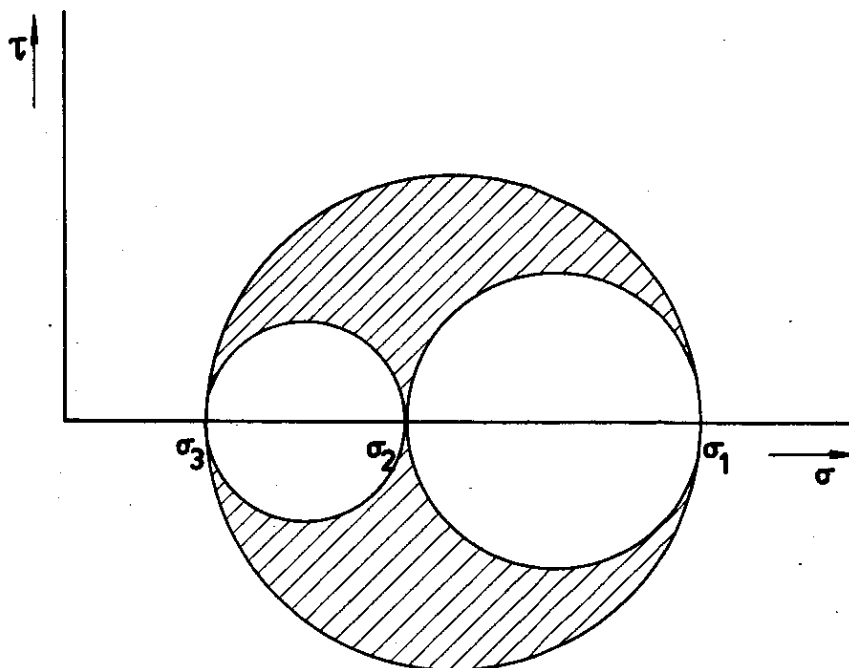
$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geq 0 \quad (34)$$

zijn. Dit zijn drie cirkels, resp. door  $(\sigma_2, 0)$  en  $(\sigma_3, 0)$ ;  $(\sigma_3, 0)$  en  $(\sigma_1, 0)$ ;  $(\sigma_1, 0)$  en  $(\sigma_2, 0)$ .

Het spanningspunt ligt steeds in het gearceerde gebied.

De maximumwaarde van  $\tau$  wordt gegeven door

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (35)$$



Het is mogelijk aan ieder punt in het gearceerde gebied het vlak toe te voegen, waarbij het spanningspunt behoort. We gaan daar niet op in.

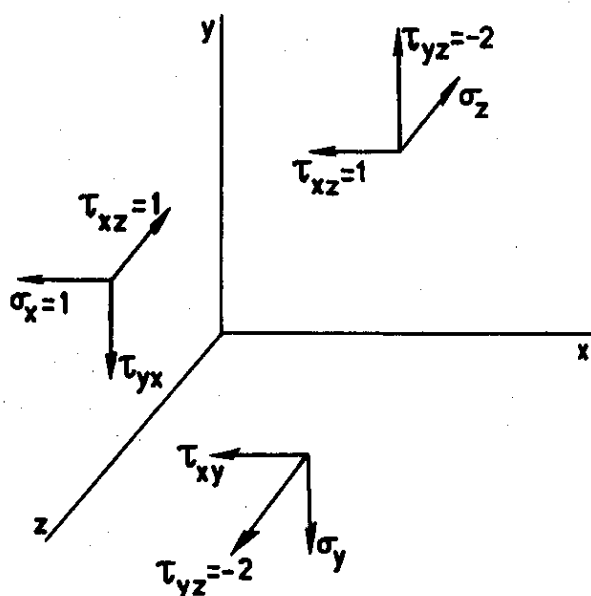
#### Voorbeeld

Gegeven is een lijnsparingstoestand met

$$\sigma_x = 1 \text{ kg/mm}^2, \tau_{yz} = -2 \text{ kg/mm}^2, \tau_{xz} = 1 \text{ kg/mm}^2.$$

Gevraagd wordt de maximale schuifspanning.

De op de drie coördinatenvlakken werkende spanningen moeten evenwijdig lopen.



Uit de figuur volgt direct

$$\sigma_x : \tau_{yx} = \tau_{xz} : \tau_{yz} \text{ of}$$

$$1 : \tau_{xy} = 1 : 2,$$

waaruit

$$\tau_{xy} = -2.$$

Overeenkomstig volgt uit de figuur

$$\sigma_y = 4, \sigma_z = 1.$$

Daaruit volgt dat  $\sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 6$  en daaruit concluderen we dat  $\tau_{\max} = 3$ .

Voorbeeld

Gegeven is de spanningstoestand

$$\sigma_x = -3, \sigma_y = -1, \sigma_z = 4,$$

$$\tau_{yz} = 4, \tau_{zx} = -\sqrt{10}, \tau_{xy} = 0.$$

We berekenen allereerst  $\sigma$  en  $\tau$  voor een vlakke-element, waarvan de normaal  $\vec{n}$  een hoek  $\alpha = 45^\circ$  met de x-as maakt, een hoek  $\beta = 60^\circ$  met de y-as en een scherpe hoek  $\gamma$  met de z-as.

Daar  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\cos \beta = \frac{1}{2}$  is

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \pm \frac{1}{2}. \text{ Dus } \gamma = 60^\circ.$$

We hebben  $\vec{n} = (n_j) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Met  $p_i = \tau_{ij} n_j$  wordt

$$p_x = -3,7; p_y = 1,5; p_z = 1,76.$$

De normaalspanning is

$$\sigma = p_x \cos \alpha + p_y \cos \beta + p_z \cos \gamma = -0,99.$$

Het kwadraat van de spanning is

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 19,1, \text{ waaruit}$$

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2} = 4,25.$$

Vervolgens berekenen we de hoofdspanningen. Uit

$$\begin{vmatrix} -3-\sigma & 0 & -\sqrt{10} \\ 0 & -1-\sigma & 4 \\ -\sqrt{10} & 4 & 4-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

volgt  $\sigma^3 - 39\sigma - 70 = 0$ , waarvan de oplossingen zijn

$$\sigma_1 = 7, \sigma_2 = -2, \sigma_3 = -5.$$

We zoeken nu de richtingscosinussen van de hoofdvlakken. Daartoe lossen we de vergelijkingen

$$\tau_{ij} n_j = \sigma n_j$$

op met  $\sigma = 7; -2; -5$ .

We vinden

$$l_{11} = n_1^{(1)} = -1/9\sqrt{6},$$

$$l_{12} = n_2^{(1)} = \frac{1}{9}\sqrt{15},$$

$$l_{13} = n_3^{(1)} = 2/9\sqrt{15},$$

$$l_{21} = -1/9\sqrt{30}, \quad l_{22} = -4/9\sqrt{3}, \quad l_{23} = 1/9\sqrt{3},$$

$$l_{31} = 1/6\sqrt{20}, \quad l_{32} = -1/3\sqrt{3}, \quad l_{33} = 1/3\sqrt{2}.$$

We willen nu ook de richtingscosinussen van het oorspronkelijke vlakelementje  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  in het assenstelsel van de hoofdassen.

We weten dat

$$\bar{n}_j = l_{jk} n_k, \text{ waaruit bijv.}$$

$$\cos \bar{\alpha} = \cos \alpha \cdot l_{11} + \cos \beta \cdot l_{12} + \cos \gamma \cdot l_{13} \text{ etc.}$$

We vinden

$$\bar{n}_j = (0,45, -0,719, 0,527).$$

### III. Dynamica van het elastische lichaam

#### 1. De impulsstelling

De spanningen in een lichaam zijn niet onafhankelijk, er zijn betrekkingen tussen. Indien de hoeveelheid van beweging van een volume  $V$  is

$$p_i = \int_V \rho v_i dV, \quad (1)$$

en de krachten welke op het volume werken worden geschreven als

$$R_i = \int_V k_i dV + \int_S p_i dS, \quad (2)$$

waarin  $R_i$  de  $i$ -de component van de resultante is,  $k_i$  die van de volumekracht-dichtheid, terwijl aan het oppervlak van het volume  $S$  de oppervlaktespanning  $p_i$  heerst, geldt

$$R_i = \dot{p}_i, \quad (3)$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \int_V \rho \dot{v}_i dV &= \int_V k_i dV + \int_S p_i dS = \int_V k_i dV \\ &+ \int_S \tau_{ij} n_j dS = \int_V k_i dV + \int_V \tau_{ij,j} dV, \end{aligned} \quad (4)$$

waarbij gebruik is gemaakt van de stelling van Gauss.

Daar (4) geldt voor ieder willekeurig volumegeedeelte, moet dus

$$\tau_{ij,j} + k_i = \rho \dot{v}_i. \quad (5)$$

In het geval van evenwicht is  $\dot{v}_i = 0$ . Dan volgen uit (4)

$$\tau_{ij,j} + k_i = 0, \quad (6)$$

de basisvergelijkingen van de elastostatica.

#### 2. De momentenstelling

Terwijl (3) betrekking heeft op de translatie van het zwaartepunt, zijn er natuurlijk ook drie vergelijkingen, welke betrekking heb-

ben op de rotatie. We gaan nu uit van de stelling

$$M_i = \dot{D}_i, \quad (7)$$

waarin  $M_i$  de  $i$ -de component is van het moment, dat werkt op een volumegedeelte en  $D_i$  de  $i$ -de component van het impulsmoment van datzelfde volumedeel. We hebben

$$D_i = \int_V e_{ijk} x_j v_k \rho dV, \quad (8)$$

waaruit volgt

$$\dot{D}_i = \int_V e_{ijk} x_j \dot{v}_k \rho dV. \quad (9)$$

Het totale moment, dat werkt is

$$\begin{aligned} M_i &= \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_S e_{ijk} x_j p_k dS = \\ &= \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_S e_{ijk} x_j \tau_{kl} n_l dS. \end{aligned} \quad (10)$$

Na toepassing van de formule van Gauss wordt dit

$$\begin{aligned} M_i &= \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_V (e_{ijk} x_j \tau_{kl})_{,l} dV = \\ &= \int_V e_{ijk} x_j (k_k + \tau_{kl,l}) dV \\ &+ \int_V e_{ijk} \delta_{jl} \tau_{kl} dV = \int_V e_{ijk} x_j \rho \dot{v}_k dV + \\ &+ \int_V e_{ijk} \tau_{kj} dV, \end{aligned} \quad (11)$$

waarbij gebruik is gemaakt van (6). Dus geldt

$$M_i = \dot{D}_i + \int_V e_{ijk} \tau_{kj} dV, \quad (12)$$

waaruit door (7) volgt

$$\int_V e_{ijk} \tau_{kj} dV = 0. \quad (13)$$

Daar (13) geldt voor ieder volumedeel, is

$$\tau_{kj} = \tau_{jk}. \quad (14)$$

De spanningstensor is dus symmetrisch. Let op, dat we hebben ondersteld dat (7) ook geldt in het elastische geval en dat we in (10) zg. volumemomentdichtheden  $m_k$  hebben verwaarloosd. Treden deze wel op, dan wordt

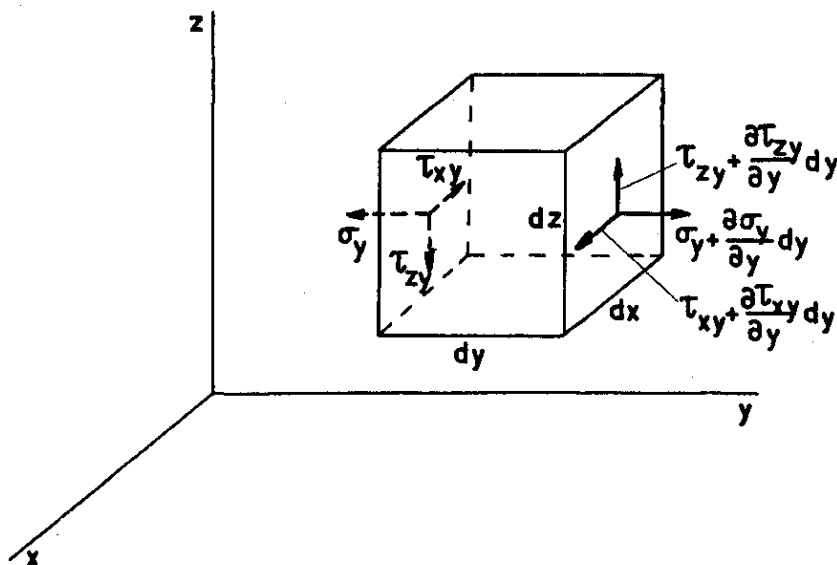
$$e_{ijk} \tau_{kj} + m_i = 0. \quad (15)$$

We zullen ons beperken tot het geval  $m_i = 0$ .

De vergelijkingen (5) en (14) zijn zes vergelijkingen, welke bestaan tussen de negen grootheden  $\tau_{ij}$ . Ze zijn onvoldoende om de  $\tau_{ij}$  in het algemeen te bepalen.

### 3. Het blokje

De voorafgaande berekeningen zijn zeer algemeen en buitengewoon elegant. In de meer elementaire behandeling van de mechanica worden (6) en (14) op een meer aanschouwelijke wijze afgeleid door het evenwicht te beschouwen van een elementair infinitesimaal blokje, waarvan de zijden evenwijdig de coördinatenvlakken liggen.



We bekijken twee vlakken loodrecht op de y-as. Het rechtervlak

heeft een pos. normaal en de positieve oriëntering der spanningen is dus die der assen. Het linker vlak heeft een neg. normaal en de oriëntering is omgekeerd.

In de y-richting werkt op het blokje, als gevolg van deze spanningen de resulterende kracht

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy\right) dx dz - \sigma_y dx dz = \frac{\partial \sigma}{\partial y} dx dy dz. \quad (16)$$

De twee voorvlakken geven als gevolg van de schuifspanningsverschillen een netto kracht in de positieve y-richting

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} dx dy dz \quad (17)$$

en de twee horizontale vlakken leveren op

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} dx dy dz. \quad (18)$$

Daar de volumekracht  $k_y dx dy dz$  is, is het evenwicht in de y-richting bepaald door

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{yx}{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{yz}{z} + k_y = 0. \quad (19)$$

Het evenwicht in de x- resp. z-richting geeft

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{xy}{y} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{xz}{z} + k_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{zx}{x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{zy}{y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} + k_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Het momentenevenwicht om een as door het zwaartepunt evenwijdig de z-richting geeft

$$\begin{aligned} &\tau_{xy} dx dz \cdot \frac{1}{2} dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{xy}{y} dy\right) dx dz \cdot \frac{1}{2} dy \\ &- \tau_{yx} dx dz \cdot \frac{1}{2} dy - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{yx}{y} dy\right) dx dz \cdot \frac{1}{2} dy = \\ &(\tau_{xy} - \tau_{yx}) dx dy dz + O(dx^4) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

waaruit

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (22)$$



De andere symmetriebetrekkingen vinden we uit het momentenevenwicht om  $x$ - en  $y$ -as.

De vergelijkingen (19) en (20) zijn identiek met (6), de vergelijking (22) is een van (14).

#### IV. Het verband tussen spanningen en deformaties

##### 1. De wet van Hooke

Zoals we reeds hebben gezien, zijn de evenwichts- of bewegingsvergelijkingen niet voldoende in aantal om de totale spannings-tensor te bepalen. Daarom moeten we relaties zoeken tussen spanningen en deformaties, welke de aanvullende vergelijkingen opleveren. Er zijn afhankelijk van het materiaal tal van type spanning-deformatie relaties. We zullen ons tot de eenvoudigste en tevens belangrijkste beperken: de algemene wet van Hooke.

Volgens de algemene wet van Hooke is het verband tussen  $\tau_{ij}$  en  $e_{ij}$  lineair. Algemeen dus

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad (1)$$

Het is duidelijk dat

$$c_{ijkl} = c_{jikl}; c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (2)$$

Het aantal componenten  $c_{ijkl}$  is  $3^4 = 81$ , terwijl het aantal door de beperkingen (2) wordt gereduceerd tot  $6 \times 6 = 36$ . Het is duidelijk dat door bepaalde symmetrie-voorwaarden het aantal  $c_{ijkl}$  nog meer kan worden gereduceerd.

We beperken ons tot isotrope media. Dan heeft geen richting voorkeur en permutatie van de assen en rotatie over  $90^\circ$  om de assen moet weer dezelfde tensor  $c_{ijkl}$  opleveren. We noemen de tensor  $c_{ijkl}$  isotroop, hij verandert niet van gedaante bij toelaatbare assentransformaties. Het is duidelijk dat de tensoren

$$(\delta_{ij} \delta_{kl}) \quad \text{en} \quad (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \quad (3)$$

ook isotroop zijn en voldoen aan (2). Het kan worden bewezen dat iedere isotrope tensor  $c_{ijkl}$  een lineaire combinatie is van (3). Op dit bewijs gaan we hier niet in. Dan wordt

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}), \quad (4)$$

waarmee (1) overgaat in

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (5)$$

De constanten  $\lambda$  en  $\mu$  zijn materiaalconstanten, ze heten de constanten van Lamé.

## 2. De elasticiteitsconstanten

Naast  $\lambda$  en  $\mu$ , gedefinieerd door (5) bestaan in de elasticiteitstheorie nog andere constanten, zoals de elasticiteitsmodulus  $E$ , de constante van Poisson  $\nu$  en de afschuivingsmodulus  $G$ . Het spreekt vanzelf dat deze constanten niet onafhankelijk zijn en alle in elkaar kunnen worden uitgedrukt. We keren eerst de vgl. (5) om. We hebben

$$2\mu e_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu + 3\lambda} \tau_{kk}. \quad (6)$$

Bij een zuivere eenassige rek is  $\tau_{11} = T$  en  $\tau_{ij} = 0$  voor de andere spanningen. De elasticiteitsmodulus  $E$  is nu gedefinieerd als

$$E = \frac{\tau_{11}}{e_{11}} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}. \quad (7)$$

Bij deze eenassige rek is er dwaarscontractie. De dwaarscontractiecoëfficiënt of constante van Poisson  $\nu$  is gedefinieerd door

$$\nu = -\frac{e_{22}}{e_{11}} = -\frac{e_{33}}{e_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (8)$$

Bij zuivere afschuiving is alleen  $\tau_{ab}$  met  $a \neq b$  ongelijk aan nul. Stel  $\tau_{12} \neq 0$ . Dan heet de verhouding  $\tau_{12}/2e_{12}$  de afschuivingsmodulus  $G$ , dus

$$G = \frac{\tau_{12}}{2e_{12}} = \mu. \quad (9)$$

Uit (7), (8) en (9) volgt de belangrijke betrekking

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (10)$$

De wet van Hooke heeft bij toepassing van  $E$ ,  $G$  en  $\nu$  de vorm

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \text{cycl.} , \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} + \text{cycl.} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

## 5. De vergelijkingen van Beltrami

We bekijken alleen het geval van evenwicht, waarbij we de volumekrachten bovendien verwaarlozen. De elasticiteitsvergelijkingen

zijn dan

a) de evenwichtsvergelijkingen

$$\tau_{ij,j} = 0, \quad (12)$$

b) de wet van Hooke

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}, \quad (13)$$

c) het verband tussen spanning en deformatie

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (14)$$

De vergelijkingen (12), (13) en (14) zijn in totaal 15 vergelijkingen voor 15 onbekenden:  $u_i$ ,  $e_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$ . In principe kunnen we dus oplossen. Elimineren we  $e_{ij}$  met behulp van (14) dan wordt (13)

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (15)$$

Op grond van (12) wordt de eliminatie van  $\tau_{ij}$  doorgevoerd. We hebben

$$\lambda u_{k,ki} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ji}) = 0, \quad (16)$$

waarvoor kan worden geschreven

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = 0. \quad (17)$$

Dit zijn de vergelijkingen van Beltrami: drie vergelijkingen van de tweede orde van  $u_1$ ,  $u_2$  en  $u_3$ .

In principe is ieder probleem uit de lineaire elasticiteitstheorie, een opgave om oplossingen van (17) te bepalen.

#### 4. De randcondities

Zoals bekend is een probleem, dat getypeerd wordt door differentiaalvergelijkingen eerst dan oplosbaar, indien aanvangs- en/of randvoorwaarden op de juiste wijze worden gespecificeerd. De vergelijkingen van Beltrami hebben dus nog een aanvulling nodig om ze te kunnen oplossen. Er zijn verschillende typen randvoorwaardeproblemen.

We onderscheiden:

- a. het randvoorwaardeprobleem van de eerste soort, waarbij over het gehele oppervlak van het lichaam de spanning is gegeven,

- b. het randvoorwaardeprobleem van de tweede soort, waarbij de verplaatsingen van het oppervlak worden gegeven,
- c. het gemengde randvoorwaardeprobleem, waarbij over een deel van het oppervlak  $S_p$ , de spanningen en over een deel van het oppervlak  $S_u$  de verplaatsingen zijn gegeven.
- d. de gemengd-gemengde randvoorwaardeproblemen, waarbij tegelijkertijd spannings- en verplaatsingscomponenten worden voorgescreven.

Het spreekt vanzelf, dat moet worden onderzocht of een gesteld probleem met randcondities oplosbaar is, m.a.w. of de oplossing existeert en zo ja, of deze eenduidig is. We gaan op deze problemen hier niet verder in.

## V. Energiebeschouwingen

### 1. De elastische energie

Zoals uit (IV,5) volgt hebben de spanningstensor en de deformatietensor dezelfde hoofdrichtingen in een punt. We bekijken een volume-element  $dV$ , waarin de hoofdspanningen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  zijn, de hoofddeformaties  $e_1, e_2, e_3$ . De energie in dit element is

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3) dV, \quad (1)$$

zoals kan worden ingezien door de arbeid der spanningskrachten bij de optredende deformaties te beschouwen. De factor  $\frac{1}{2}$  ontstaat door de opbouw van spanningsvrij tot gespannen in een lineair gebied. Voor (1) is in willekeurige coördinaten te schrijven

$$\frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} dV, \quad (2)$$

waaruit volgt dat de totale elastische energie van het lichaam is

$$W = \int_V W_S dV, \quad (3)$$

met  $W_S$  de specifieke elastische energie

$$W_S = \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij}. \quad (4)$$

Met behulp van (IV,5) kunnen we  $W$  in de deformaties uitdrukken. We vinden

$$W = W_e = G \int_V \left\{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk})^2 \right\} dV, \quad (5)$$

terwijl met behulp van (IV,6) ook  $W = W_\tau$  in de spanningen is uit te drukken.

$$W_\tau = \frac{1}{2E} \int_V \left\{ (1 + \nu) \tau_{ij} \tau_{ij} - \nu (\tau_{kk})^2 \right\} dV. \quad (6)$$

We vinden voor  $W$  voorts

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} e_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} u_{i,j} dV = \\ &\frac{1}{2} \int_V (\tau_{ij} u_i)_{,j} dV - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij,j} u_i dV = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_S p_i u_i dS + \frac{1}{2} \int_V k_i u_i dV, \quad (7)$$

een formule, welke uitdrukt dat de elastische energie gelijk is aan de arbeid door de volumekrachten en de oppervlaktekrachten verricht. Dit is fysisch vanzelfsprekend, daar er geen dissipatie is.

## 2. Het principe van de virtuele arbeid

We beschouwen de evenwichtsstand en laten kleine variaties  $\delta u_i$  toe, virtuele verplaatsingen, welke consistent zijn met de meetkundige voorwaarden. Dus waar  $u_i$  aan het oppervlak is voorgescreven, is  $\delta u_i = 0$ . We bekijken nu de arbeid door de krachten verricht bij deze virtuele verplaatsingen. We hebben

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \frac{E}{1+\nu} \int_V \{e_{ij} \delta e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{kk} \delta e_{jj}\} dV = \\ &= \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V \tau_{ij} \delta u_{i,j} dV = \\ &= \int_V \{(\tau_{ij} \delta u_i)_{,j} - \tau_{ij,j} \delta u_i\} dV = \\ &= \int_S p_i \delta u_i dS + \int_V k_i \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (8)$$

De arbeid verricht door  $p_i$  en  $k_i$  is  $\delta A_u^{(b)}$ . We hebben dus

$$\delta W_e = \delta A_u^{(b)}, \quad (9)$$

afgeleid op de basis van de evenwichtsvergelijkingen. Omgekeerd kunnen we ook uit (9) als basisprincipe de evenwichtsvergelijkingen afleiden. We hebben:

$$\begin{aligned} \delta A_u^{(b)} &= \delta W_e = \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV = \\ &= \int_V \tau_{ij} \delta u_{i,j} dV = \\ &= \int_S p_i \delta u_i dS - \int_V \tau_{ij,j} \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (10)$$

Daar per definitie

$$\delta A_u^{(b)} = \int_S p_i \delta u_i dS + \int_V k_i \delta u_i dV, \quad (11)$$

moet dus

$$\int_V (\tau_{ij,j} + k_i) \delta u_i dV = 0 \quad (12)$$

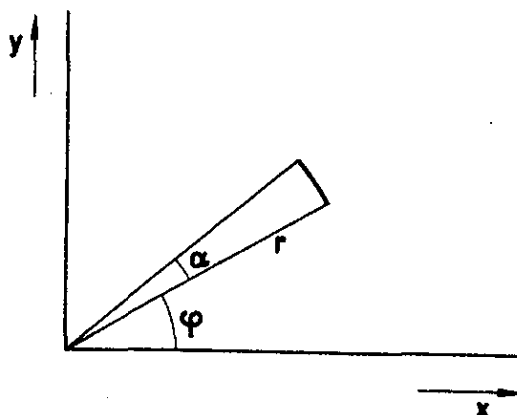
zijn. Dit geldt voor willekeurige variaties  $\delta u_i$ . Dan moet dus

$$\tau_{ij,j} + k_i = 0 \quad (13)$$

zijn.

Nemen we een rotatie om een vaste as, dan is  $\delta A_u^{(b)} = 0$ , dus dan levert het principe van de virtuele arbeid voor deze verplaatsingen

$$\int_V \tau_{ij} \delta u_{i,j} dV = 0. \quad (14)$$



De hoek  $\alpha$  is infinitesimaal. De boog is  $r\alpha$ . De verplaatsingen zijn

$$u = -\alpha y, \quad v = \alpha x, \quad w = 0. \quad (15)$$

Dan wordt

$$\tau_{ij} \delta u_{i,j} =$$

$$\tau_{12} \delta u_{1,2} + \tau_{21} \delta u_{2,1} = -\alpha \tau_{12} + \alpha \tau_{21} = 0, \text{ waaruit}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21}. \quad (16)$$

### 3. Het principe van de minimum potentiële energie

Volgens (10) geldt voor een virtuele verplaatsing

$$\begin{aligned} \delta(W_e - A_u^{(b)}) = 0 &= \delta \left[ \int_V w_S dV - \int_S p_i u_i dS \right. \\ &\left. - \int_V k_i u_i dV \right] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$



De vorm tussen haken is de potentiële energie  $U$ . Dus

$$\delta U = 0, \quad (18)$$

de totale potentiële energie van elastische vervorming en uitwendige krachten is stationnair voor het evenwicht.

Het blijkt dat  $U$  een werkelijk minimum is. We hebben: van alle verplaatsingen, welke aan de randvoorwaarden van de verplaatsingen voldoen, maken die, welke tevens aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen de potentiële energie een minimum. Ook omgekeerd: van alle verplaatsingen, die aan de randvoorwaarden voor de verplaatsingen voldoen, voldoen die, welke de potentiële energie tot een minimum maken, tevens aan de evenwichtsvoorwaarden.

We bewijzen deze stellingen niet.

#### 4. Principe van de minimum complementaire energie

We beschouwen nu de elastische energie  $W$  als functie van de spanningen:  $W = W_{\tau}$ . We variëren de spanningen,  $\delta\tau_{ij} = \delta\tau_{ji}$ , en krijgen

$$\delta W_{\tau} = \int_V e_{ij} \delta\tau_{ij} dV. \quad (19)$$

We beperken de virtuele spanningsvariëaties allereerst door te eisen, dat

$$(\delta\tau_{ij})_{,j} = 0. \quad (20)$$

In dit geval wordt (19)

$$\begin{aligned} \delta W_{\tau} &= \int_V e_{ij} \delta\tau_{ij} dV = \int_V u_{i,j} \delta\tau_{ij} dV = \\ &= \int_V (u_i \delta\tau_{ij})_{,j} dV - \int_V u_i (\delta\tau_{ij})_{,j} dV = \int_V (u_i \delta\tau_{ij})_{,j} dV = \\ &= \int_S u_i \delta\tau_{ij} n_j dS = \int_S u_i \delta p_i dS, \end{aligned} \quad (21)$$

indien aan het oppervlak

$$\delta p_i = \delta\tau_{ij} n_j \quad (22)$$

is.

Formule (21) zelf heeft een belangrijke toepassing. Indien we nu

de  $\delta\tau_{ij}$  verder beperken, nl. zo dat

$$\delta\tau_{ij} n_j = 0, \text{ op } S_p, \quad (23)$$

wordt (21)

$$\delta W_\tau - \int_{S_u} u_i \delta p_i dS = 0. \quad (24)$$

Daar op  $S_u$  de  $u_i$  zijn voorgeschreven is (24)

$$\delta U^* = 0, \quad (25)$$

met

$$U^* = [W_\tau - \int_{S_u} u_i p_i dS], \quad (26)$$

de complementaire energie. We hebben de stelling:

De complementaire energie is een minimum voor de spanningen, welke aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen. Ook omgekeerd:

Spanningen, welke aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen, maken  $U^*$  een minimum.

Als voor het oppervlak van het gehele lichaam de spanning is voorgeschreven, is  $S_u = 0$ , dus

$$U^* = W_\tau. \quad (27)$$

In dit geval is de elastische energie een minimum bij de toegelaten spanningsvariatiës. Deze stelling heeft ook een belangrijke toepassing.

##### 5. Reciprociteitstheorema

Indien we twee toestanden van een elastisch lichaam hebben, getypeerd door  $\tau_{ij}^{(1)}$ ,  $e_{ij}^{(1)}$ ; resp. door  $\tau_{ij}^{(2)}$ ,  $e_{ij}^{(2)}$ , geldt

$$\int_V \tau_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} dV = \int_V \tau_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)} dV, \quad (28)$$

zoals blijkt door directe invulling van (IV,5). We noemen het theorema, dat door (28) wordt uitgedrukt het reciprociteitstheorema. Daar

$$\int_V \tau_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} dV = \int_V \tau_{ij}^{(1)} u_{i,j}^{(2)} dV =$$

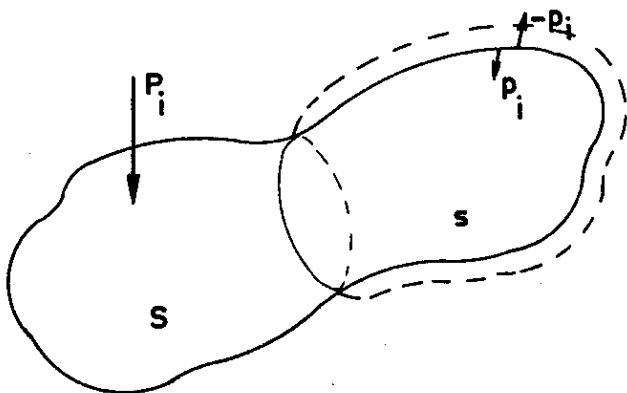
$$\int_S p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS + \int_V k_i^{(1)} u_i^{(2)} dV, \quad (29)$$

kan (28) ook geschreven worden als

$$\int_S p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS + \int_V k_i^{(1)} u_i^{(2)} dV =$$

$$\int_S p_i^{(2)} u_i^{(1)} dS + \int_V k_i^{(2)} u_i^{(1)} dV. \quad (30)$$

### Voorbeeld



Indien op een lichaam geen volumekracht werkt, wordt het lichaam "stijver" door de toevoeging van nieuw materiaal.

Opmerking: het begrip "stijf" moet strikt genomen worden gedefinieerd. Uit de verdere discussie zal blijken, wat er mee bedoeld is in dit probleem.

Het totale oppervlak van het lichaam is  $S + s$ . Aan het oppervlak  $s$  wordt materiaal toegevoegd. Op  $S$  werkt de spanning  $P_i$ , welke voor de toevoeging de verplaatsing  $u_i^{(1)}$  geeft over het lichaam. Na de toevoeging is de verplaatsing  $u_i^{(2)}$ . Er is door de toevoeging een spanning  $p_i$  ontstaan tussen het oude en het nieuwe materiaal. Als  $P_i = 0$  wordt gemaakt en het nieuwe materiaal vervangen door zijn druk  $p_i$ , is de daarbij ontstane verplaatsing  $u_i^{(2)} - u_i^{(1)}$ . Dus geldt volgens de reciprociteitsstelling

$$\int_{S+s} p_i u_i^{(1)} dS = \int_{S+s} p_i (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) dS. \quad (31)$$

Nu is de arbeid door  $p_i$  alleen positief, dus

$$\int_{S+s} p_i (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) dS > 0. \quad (32)$$

Doch ook de arbeid door  $-p_i$  verricht op het nieuwe materiaal is positief

$$\int_S -p_i u_i^{(2)} dS > 0. \quad (33)$$

Daar  $p_i = 0$  voor  $S$  is (33) gelijk aan

$$\int_{S+s} (-p_i) u_i^{(2)} dS > 0. \quad (34)$$

Uit (31), (32) en (34) volgt

$$\int_{S+s} p_i u_i^{(2)} dS < \int_{S+s} p_i u_i^{(1)} dS \quad (35)$$

en hierdoor wordt de toeneming in stijfheid uitgedrukt.

#### 6. Het theorema van Castigliano

We geven twee afleidingen van de stelling van Castigliano. Volgens (21) is

$$\delta W_T = \int_S u_i \delta p_i dS, \quad (36)$$

waarbij de symmetrische spanningsvariatiën  $\delta \tau_{ij}$  alleen aan (20) voldoen.

We passen (36) toe op het geval van een lichaam, dat belast wordt door puntlasten en puntmomenten. Dan is

$$\int_S p_i dS = P_i \quad (37)$$

de waarde van de kracht. Met (37) wordt (36)

$$\delta W_T = u_i \delta P_i. \quad (38)$$

Is  $u$  de verplaatsing in de richting van  $P$ , dan is (38) te schrijven als

$$u = \frac{\partial W}{\partial P}. \quad (39)$$

Zijn er meerdere puntlasten  $P^{(k)}$ , dan geldt voor de verplaatsing in de richting van  $P^{(k)}$

$$u^{(k)} = \frac{\partial W}{\partial P^{(k)}} . \quad (40)$$

De hoekverdraaiing  $\varphi$  behorende bij het moment  $M$  is bepaald door

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial M} . \quad (41)$$

In (39), (40) en (41) is  $W$  ( $\equiv W_r$ ) op te vatten als een functie van de uitwendige krachten en momenten.

De formules (39) en (41) zijn de formules van Castigliano.

Is ter plaatse  $u$  of  $\varphi$  gelijk aan nul, zoals vaak bij reactiekrachten en momenten het geval is, dan worden (39) en (40)

$$\frac{\partial W}{\partial P} = 0 ; \quad \frac{\partial W}{\partial M} = 0 . \quad (42)$$

De formules (42) drukken uit, dat de functie  $W$  als functie van  $P$  en  $M$  een extreme waarde heeft bij de werkelijk optredende  $P$  en  $M$ . Dit is direct in te zien uit het principe van de minimum elastische energie.

De formules (42) hebben niet alleen betekenis voor de bepaling van reactiegrootheden, doch ook voor de bepaling van z.g. inwendig statisch onbepaalde grootheden.

We geven nu nog een andere afleiding van de formule van Castigliano, gebaseerd op de reciprociteitsstelling.

We beschouwen twee toestanden van het systeem, de eerste toestand, getypeerd door  $p_i$ ,  $k_i$  en  $u_i$  en de tweede, waarvoor geldt

$$\begin{aligned} \bar{k}_i &= k_i , \\ \bar{p}_i &= p_i , \text{ op } S - s , \\ \bar{p}_i &= p_i + \delta p_i , \text{ op } s \end{aligned} \quad (43)$$

en  $\bar{u}_i$ .

Hierbij is  $s$  het oppervlakelementje, waarop een puntlast werkt, welke we variëren. De reciprociteitsstelling is

$$\begin{aligned} \int_V k_i \bar{u}_i dV + \int_S p_i \bar{u}_i dS = \\ = \int_V k_i u_i dV + \int_S p_i u_i dS + \int_S \delta p_i u_i dS . \end{aligned} \quad (44)$$

Nu is

$$2W = \int_V k_i u_i dV + \int_S p_i u_i dS, \quad (45)$$

terwijl voor de gevarieerde toestand is

$$\bar{2W} = \int_V k_i \bar{u}_i dV + \int_S p_i \bar{u}_i dS + \int_S \delta p_i \bar{u}_i dS. \quad (46)$$

Op grond van (44) is dit

$$\begin{aligned} \bar{2W} &= \int_V k_i u_i dV + \int_S p_i u_i dS + \int_S \delta p_i u_i dS \\ &+ \int_S \delta p_i \bar{u}_i dS. \end{aligned} \quad (47)$$

Het verschil van (45) en (47) geeft

$$2(\bar{W} - W) = \int_S \delta p_i (u_i + \bar{u}_i) dS. \quad (48)$$

Met een puntlast is

$$\int_S p_i dS = P_i, \quad (49)$$

$$\text{dus: } 2\delta W = \delta P_i (u_i + \bar{u}_i). \quad (50)$$

In de limiet wordt  $u_i = \bar{u}_i$ , dus

$$u = \frac{\partial W}{\partial P}, \quad (u \text{ in de richting van } P), \quad (51)$$

de formule van Castigliano.

## 7. Toelaatbare stelsels

Een statisch toelaatbaar spanningsstelsel  $\tau_{ij}$  is een voldoende regulier stelsel functies, welke voldoet aan

- a.  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ,
- b.  $\tau_{ij,j} + k_i = 0$ ,
- c. de randvoorwaarden op  $S_p$ .

Een meetkundig toelaatbaar verplaatsingsstelsel  $u_i$  is een voldoende regulier stelsel functies, welke voldoet aan de randvoorwaarden op  $S_u$ . Uit dit stelsel worden de meetkundig toelaatbare deformaties  $e_{ij}$  gevonden door

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \text{ waardoor}$$

- a.  $e_{ij} = e_{ji}$ ,
- b. de  $e_{ij}$  voldoen aan de compatibiliteitsvergelijkingen.

Met deze terminologie luidt het principe van de minimum potentiële energie:

van alle meetkundig toelaatbare verplaatsingsstelsels, maakt de werkelijke oplossing van het probleem de potentiële energie minimaal.

Het principe van de minimum complementaire energie is:

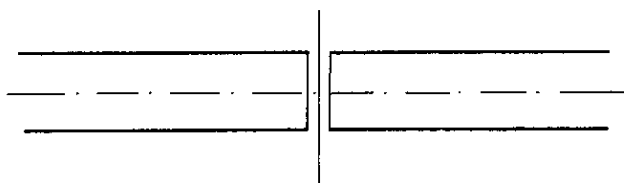
van alle statisch toelaatbare spanningstelsels maakt de oplossing de complementaire energie minimaal.

De ingevoerde begrippen zijn van grote betekenis voor de benaderingstheorieën van de mechanica.

G. Elasto-Statica van elementaire systemenI. Balkentheorie1. Basisgrootheden

Het is moeilijk oplossingen te vinden voor de algemene vergelijkingen van de elasticiteitstheorie. Daarom worden stelsels onderzocht, welke vereenvoudigingen in het formalisme toelaten. In de theorie noemt men een balk een lichaam, waarvan één der dimensies aanzienlijk groter is dan de andere. Zoals zal blijken is het mogelijk een rekenschema op te bouwen voor de balk, dat meer eenvoudig is dan dat van de algemene theorie.

Om dit te bereiken worden een aantal nieuwe begrippen ingevoerd. De centrale lijn is de meetkundige plaats van de zwaartepunten van de dwarsdoorsneden van de balk. In plaats van de gehele deformatietoestand van de balk te onderzoeken, zullen we ons beperken tot lengteveranderingen en vormveranderingen van de centrale lijn en draaiingen van de vlakken om deze lijn. In zekere zin wordt de probleemstelling van het driedimensionale vraagstuk teruggebracht tot die van een vraagstuk in één dimensie.



Indien de balk op een willekeurige plaats denkbeeldig wordt doorgesneden, zullen de delen links en rechts van het scheidingsvlak krachten en momenten

op elkaar uitoefenen. In het scheidingsvlak treden drie spanningen op: de normaalspanning en de twee schuifspanningen. Uit deze drie spanningen zijn zes resultanten te berekenen: de drie momenten en de drie krachten.

Nemen we de z-as loodrecht op het doorsnijdingsvlak en de x- en y-as in dit vlak, dan is de normaalspanning  $\sigma_z$ , terwijl de schuifspanningen  $\tau_{zx}$  en  $\tau_{zy}$  zijn. We definiëren:

de normaalkracht

$$N = \int_S \sigma_z \, dS, \quad (1)$$

de twee dwarskrachten

$$Q_x = \int_S \tau_{zx} \, dS, \quad Q_y = \int_S \tau_{zy} \, dS, \quad (2)$$



de twee buigende momenten

$$M_x = \int_S y \sigma_z \, dS; \quad M_y = - \int_S x \sigma_z \, dS, \quad (3)$$

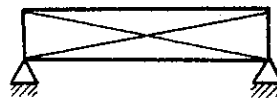
en het torsiemoment

$$M_z = \int_S (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) \, dS. \quad (4)$$

De spanningsresultanten moeten in elke doorsnede evenwicht maken met de uitwendige krachten en momenten. Is het mogelijk op iedere plaats de resultanten te berekenen door middel van de statica, dan is de constructie statisch bepaald, is dit niet mogelijk, dan spreekt men van statisch onbepaalde constructies. De laatste kunnen we onderverdelen in uitwendig statisch onbepaalde constructies, waarbij de onbepaaldheid ontstaat door de oplegging en inwendig statisch onbepaalde constructies, welke onbepaald zijn door hun structuur.



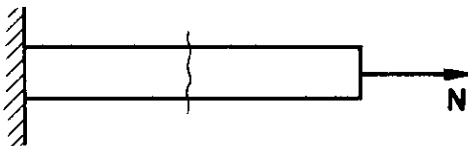
uitw. statisch onbep.



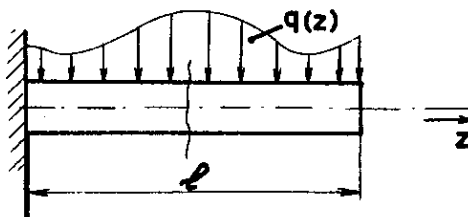
inw. stat. onb.

Als gevolg van het lineaire karakter van de theorie, kunnen we de werking van iedere uitwendige kracht en ieder uitwendig moment bij elkaar optellen om de werking der totale belasting te verkrijgen.

## 2. Evenwichtsvergelijkingen



Wordt een rechte staaf door uitwendige normaalkrachten belast, dan werkt in iedere loodrecht doorsnede de resultante van de uitwendige normaalkrachten.



Wordt een rechte staaf door een dwarsbelasting belast, dan werkt in iedere doorsnede de dwarskracht

$$Q(z) = - \int_z^l q(\zeta) \, d\zeta. \quad (5)$$

De dwarsbelasting geeft aanleiding tot een moment  $M$

$$M(z) = \int_z^{\ell} (z - \zeta) q(\zeta) d\zeta. \quad (6)$$

Uit (5) volgt de belangrijke betrekking

$$\frac{dQ}{dz} = + q(z), \quad (7)$$

terwijl uit (6) volgt

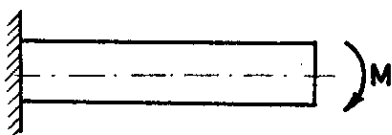
$$\frac{dM}{dz} = Q(z). \quad (8)$$

Combinatie van (7) en (8) geeft

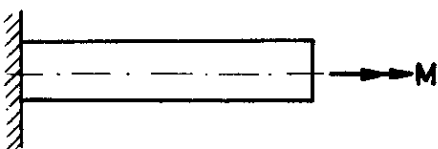
$$\frac{d^2 M}{dz^2} = + q(z). \quad (9)$$

#### Opmerking

Het teken van (6) en daarmee van (8) en (9) is willekeurig gekozen. We komen daarop nog terug.



Wordt een rechte staaf door een uitwendig moment  $M$  belast, dan is het moment overal gelijk aan  $M$ .



Een wringend moment heeft ook een constante waarde in iedere doorsnede bij een rechte staaf.

#### Generalisatie tot kromme staven

Indien de staaf gekromd is, moeten de uitwendige krachten en momenten in iedere doorsnede worden ontbonden in de normale componenten (normaalkracht, resp. wringend moment) en de dwarscomponenten (dwarskracht, resp. buigend moment). De beschouwingen zijn verder analoog aan de voorafgaande.

De vergelijkingen (7) en (8) zijn de evenwichtsvergelijkingen van de balkentheorie. Zij zijn direct te verkrijgen door directe integratie van de algemene evenwichtsvergelijkingen. Zij zijn globaal,

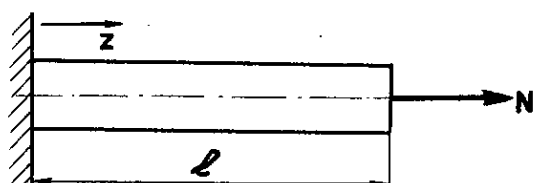
terwijl de andere locaal karakter dragen.

### 3. Resultanten en deformaties

Om de theorie verder te kunnen ontwikkelen hebben we nu nodig het verband tussen resultanten enerzijds en krommingen van de centrale lijn anderzijds. Dit is de overdraging van de wet van Hooke op de balkentheorie.

We bekijken eerst bijzondere gevallen.

#### a. Rek van een rechte staaf



Een rechte staaf gelijkmatig belast aan het uiteinde door een kracht  $N$ , geeft aanleiding tot de spanningen

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \text{alle andere spanningen} = 0, \quad (10)$$

als  $A$  het oppervlak is van de doorsnede.  
De verplaatsingen zijn

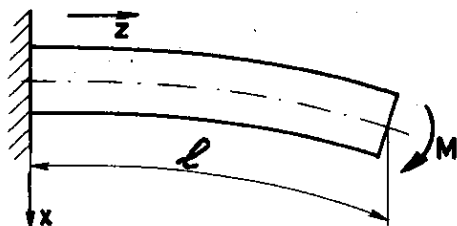
$$u = -\frac{\nu N}{EA} x, \quad v = -\frac{\nu N}{EA} y, \quad w = \frac{N}{EA} z, \quad (11)$$

waaruit

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{N}{EA}. \quad (12)$$

De rek is dus evenredig met  $N$ , de stijfheid tegen rekkraft is  $AE$ .

#### b.



Buiging door een moment  $M$ ,  
gericht langs een hoofd-  
traagheidsas.

De berekeningen leveren hier

$$\sigma_z = -\frac{M}{I} x, \text{ alle andere spanningen} = 0, \quad (13)$$

met de verplaatsingen

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{2EI} (z^2 + \nu x^2 - \nu y^2), \\ v &= \frac{M}{EI} \nu xy, \\ w &= -\frac{M}{EI} xz. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Uit (14) volgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{M}{EI}. \quad (15)$$

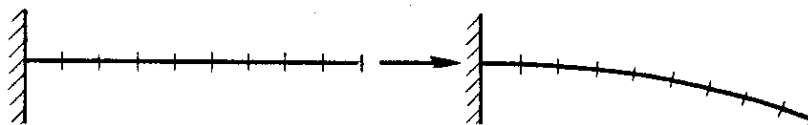
Bij benadering is  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{R}$ , de kromming van de centrale lijn.

Dus geldt

$$M = \frac{EI}{R}, \quad (16)$$

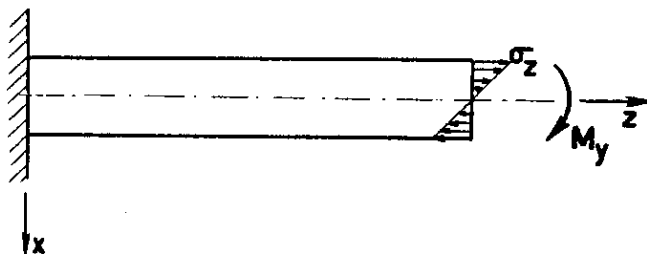
de formule van Bernouilli.

Volgens het theorema van Bernouilli blijven normaalvlakken van de centrale lijn, normaal ook na de buiging.



Het is duidelijk dat in het vlak  $x = 0$  de rekken gelijk aan nul zijn. (Volgt ook direct uit 13.) Dit vlak heet daarom het neutrale vlak en de doorsnede ervan met het  $x$ - $z$ -vlak de neutrale lijn.

Opmerking over het teken van (16).



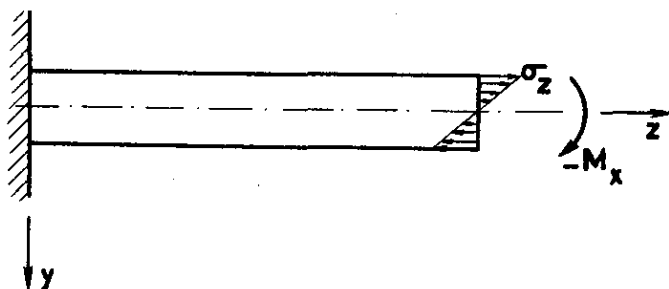
We beschouwen als vlak van de buiging  $x - z$ . Dan is

$$\sigma_z = - \frac{M_y}{I_y} x, \quad \text{omdat}$$

$$M_y = - \int_S x \sigma_z dS = M_y \frac{1}{I_y} \int_S x^2 dS = M_y. \quad (17)$$

De  $y$ -as is naar achter en  $M_y$  is positief. Nu geldt dus volgens het voorafgaande

$$M_y = EI_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (18)$$



Nu beschouwen we het  $y - z$ -vlak als het vlak van de buiging.

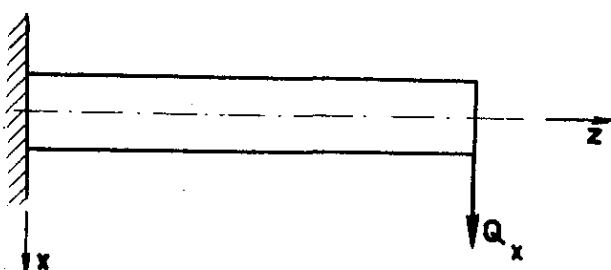
Hier is  $\sigma_z = + \frac{M_x}{I_x} y$ , omdat nu

$$M_x = + \int_S y \sigma_z dS = \frac{M_x}{I_x} \int_S y^2 dS = M_x. \quad (19)$$

$M_x$  is negatief, daar de positieve  $x$ -as naar voren komt. Daar  $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$  weer positief is, geldt hier

$$M_x = - EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (20)$$

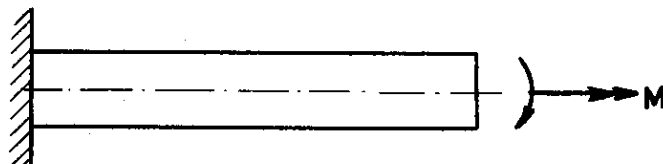
c.



Buiging van een rechte staaf door een dwarskracht aan het uiteinde in de richting van een hoofdtraagheidsas.

De analyse van dit probleem is bijzonder gecompliceerd. Ook hier levert het resultaat een bevestiging van de formule van Bernouilli:

d.



Wringing door een moment langs de centrale lijn.

We beperken ons tot een cirkelvormige doorsnede. Nu is het spanningsstelsel

$$\tau_{zy} = G \alpha y; \quad \tau_{zx} = -G \alpha y, \text{ alle andere spanningen} = 0, \quad (21)$$

waarin  $\alpha$  de draaiingshoek per lengte-eenheid van de staaf is. We vinden uit (21)

$$M_z = G \alpha I_o = G \alpha \cdot \frac{\pi a^4}{2}, \quad (22)$$

met  $a$  de straal van de doorsnede.

#### e. Generalisatie

Indien we een rechte balk belasten door krachten of momenten welke niet in de hoofdtraagheidsrichtingen liggen, kunnen we ze steeds ontbinden in deze richtingen en de formules blijven geldig voor de juiste componenten. Het blijkt dat bij belasting in het vlak van de constructie, waarbij de hoofdtraagheidsrichtingen niet in of loodrecht op het belastingvlak liggen, deformatie uit het vlak van de belasting kan optreden.

#### f. Algemener belasting bij de rechte staaf

Indien de staaf willekeurig wordt belast, gelden de afgeleide formules in het algemeen niet meer. In het bijzonder de formule van Bernouilli, waarop de technische mechanica berust is in het algemeen niet exact. Meestal zijn de afwijkingen echter zo gering, dat we met vertrouwen deze formule kunnen toepassen. We zullen de resultante - deformatie - relaties als volgt samenvatten

$$\left. \begin{aligned} N &= AE \epsilon, \\ M_z &= C \alpha, \\ M &= EI \kappa, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

waarin  $\epsilon$  de rek van de centrale lijn is,  $C$  de torsiestijfheid, en  $\kappa$  de kromming van de neutrale lijn.

### g. De gekromde balk

Ook hier zullen we (23) in de aangepaste vorm toepassen.

De rechtvaardiging van het gebruik van (23) ligt in de asymptotische geldigheid van deze formules. Door meetkundig toelaatbare deformatievelden en statisch toelaatbare spanningsvelden te construeren is het mogelijk aan te tonen, dat bij de limiet  $h \rightarrow 0$ , waarin  $h$  een dwarsdimensie van de balk is, (23) opgaan. We gaan op deze analyse niet in.

### 4. Het principe van de Saint-Venant

We hebben gezien bij de bespreking van 3a en 3b, dat in eenvoudige gevallen exacte oplossingen bekend zijn, bijv. (11), (12), (13), (14) en (15). Het bestaan van deze oplossingen hangt echter af van de wijze, waarop de eindbelasting is aangebracht. De formule (10) eist dat voor  $z = \ell$ ,  $\sigma_z = \frac{N}{A}$  is constant over de gehele doorsnede, terwijl (13) een lineaire verdeling van de  $\sigma_z$  eist voor  $z = \ell$ . In praktische gevallen zal hieraan wel nooit voldaan zijn. Het verschil tussen de geïdealiseerde eindbelasting en de werkelijke belasting is een spanningsbelasting met resultante nul. Zg. statisch equivalente belasting.

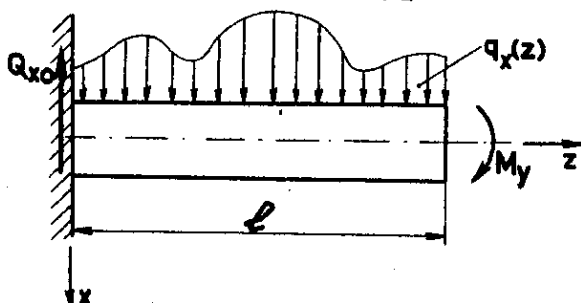
Het principe van de Saint-Venant leert nu dat een dergelijke statisch equivalente belasting alleen een locaal effect heeft en geen globaal, d.w.z. dat de invloed op spanningen en deformaties ervan uitsterven over een lengte, welke zeer klein is tegenover de lengtedimensie.

Het principe van de Saint-Venant is fundamenteel voor de toepasbaarheid van geïdealiseerde verdelingen in praktische problemen. Het is nooit door de Saint-Venant bewezen, doch intuïtief geponeerd. In bepaalde concrete gevallen is het te controleren en enkele algemene beschouwingen zijn erover gepubliceerd.

### 5. De differentiaalvergelijking der deformatie

We bekijken een rechte balk. Volgens (18) is

$$M_y = EI_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (24)$$



Bij de belasting  $q_x(z)$  is de reactiekracht

$$Q_{x0} = - \int_0^{\ell} q_x(\zeta) d\zeta. \quad (25)$$

De dwarskracht is dus ter plaatse  $z$

$$Q_x(z) = Q_{x0} + \int_0^z q_x(\zeta) d\zeta = - \int_z^l q_x(\zeta) d\zeta. \quad (26)$$

Nu is

$$M_y(z) = Q_{x0} \cdot z + \int_0^z (z - \zeta) q_x(\zeta) d\zeta, \quad (27)$$

waaruit

$$\frac{dM_y}{dz} = Q_x. \quad (29)$$

Daaruit volgt

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x(z). \quad (30)$$

De combinatie van (24) en (30) geeft

$$\frac{d^2}{dz^2} [EI_y \frac{d^2 u}{dz^2}] = q_x(z). \quad (31)$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor de centrale lijn van een balk, gebogen onder de belasting  $q_x(z)$ .

## 6. De elastische energie voor de balk

### a. Trek of druk

In de onderstelling dat alleen  $\sigma_z \neq 0$  is, wordt

$$W_S = \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z = \frac{\sigma_z^2}{2E}. \quad (32)$$

Is het oppervlak  $A(z)$  van een doorsnede, dan wordt

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^l \sigma_z^2(z) A(z) dz. \quad (33)$$

We onderstellen nu dat bij benadering geldt

$$\sigma_z = \frac{N}{A(z)}, \quad (34)$$



waarin  $N$  de normaalkracht is en nu gaat (33) over in

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} \frac{N^2}{A(z)} dz, \quad (35)$$

waarvoor bij  $N$  constant kan worden geschreven

$$W = \frac{N^2}{2E} \int_0^{\ell} \frac{dz}{A(z)}. \quad (36)$$

Is ook  $A$  constant, dan wordt (36)

$$W = \frac{N^2 \ell}{2AE}. \quad (37)$$

De benadering (34) geldt slechts bij weinig veranderlijke  $A(z)$ .

#### b. Momentenbuiging

We gaan uit van (13)

$$\sigma_z = - \frac{M_y}{I_y} x, \quad (38)$$

welke formule we approximatief generaliseren door

$$\sigma_z = - \frac{M_y(z)}{I_y(z)} \cdot x. \quad (39)$$

De specifieke energie  $W_S$  is hier

$$W_S = \frac{1}{2E} \frac{M_y^2(z)}{I_y^2(z)} \cdot x^2, \quad (40)$$

waaruit de totale energie wordt gevonden door integratie over oppervlak en lengte:

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} dz \cdot \frac{M_y^2(z)}{I_y^2(z)} \int_S x^2 dS =$$

$$\frac{1}{2E} \int_0^{\ell} \frac{M_y^2(z)}{I_y^2(z)} dz. \quad (41)$$

Bij  $M_y$  en  $I_y$  constant wordt (44)

$$W = \frac{M^2 \ell}{2EI} . \quad (42)$$

Valt het moment niet langs een hoofdtraagheidsas, dan ontbinden we het in de twee componenten  $M_x$  en  $M_y$  langs deze assen.

Nu wordt

$$\sigma_z = - \frac{M_y(z)}{I_y(z)} x + \frac{M_x(z)}{I_x(z)} y , \quad (43)$$

waaruit voor W wordt gevonden

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} dz \left\{ \frac{M_y^2(z)}{I_y(z)} + \frac{M_x^2(z)}{I_x(z)} \right\} . \quad (44)$$

### c. Gecombineerde rek met momentenbuiging

Nu is

$$\sigma_z = - \frac{M_y(z)}{I_y(z)} x + \frac{M_x(z)}{I_x(z)} y + \frac{N(z)}{A(z)} , \quad (45)$$

waaruit direct gevonden wordt

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} dz \left\{ \frac{M_y^2(z)}{I_y(z)} + \frac{M_x^2(z)}{I_x(z)} + \frac{N^2(z)}{A(z)} \right\} . \quad (46)$$

Let op dat de verschillende bijdragen eenvoudig in de energie worden opgeteld.

### d. Wringing

We beperken ons allereerst tot rotatie symmetrische balken. Dan is de doorsnede dus steeds een cirkel, hoewel de diameter niet steeds constant hoeft te zijn.

Er geldt

$$W_S = \frac{1}{2G} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \frac{\tau^2}{2G} . \quad (47)$$

Voor een cirkelvormige staaf geldt

$$\tau = \frac{M}{I_0} \cdot r , \quad (48)$$

waarin r de radiusvector is en  $I_0$  het polaire traagheidsmoment. De energie is

$$W = \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} dz \int_S \frac{M_z^2}{I_0^2} r^2 dS = \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} dz \cdot \frac{M_z^2}{I_0} \quad (49)$$

Als  $M_z$  constant is en tevens  $I_0$  wordt

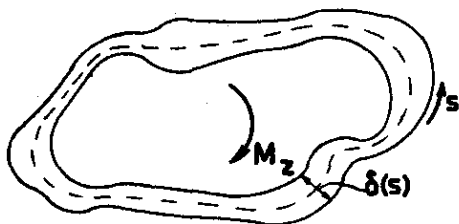
$$W = \frac{M_z^2 \ell}{2G I_0} \quad (50)$$

terwijl bij veranderlijke grootheden (approximatief) geldt

$$W = \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \frac{M_z^2(z)}{I_0(z)} dz \quad (51)$$

We kunnen nu ook de formules uitbreiden tot dunwandige constructies. Nu is

$$\tau = \frac{M_z}{2A \delta(s)} \quad (52)$$



waarin  $A$  het oppervlak is van de doorsnede binnen de stippellijn en  $\delta(s)$  de plaatselijke dikte.

Voor de energie vinden we uit (47) en (52)

$$W = \frac{M_z^2 \ell}{8G \cdot A} \oint \frac{ds}{\delta(s)} \quad (53)$$

**e. Combinatie van wringing met rek en/of momentenbuiging**

We hebben nu een combinatie van de normaalspanning  $\sigma_z$  volgens (45) en de schuifspanning  $\tau$  volgens (47). Daarvoor geldt

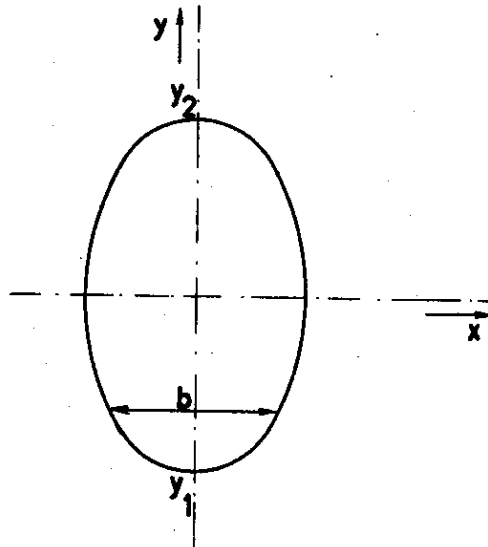
$$W_s = \frac{1}{2E} \sigma_z^2 + \frac{1}{2G} \tau^2 \quad (54)$$

waaruit volgt dat de energiën eenvoudig kunnen worden opgeteld.

**f. Buiging door een dwarskracht**

Een dwarskracht geeft aanleiding tot schuifspanningen, welke

bijdragen tot de energie. Om de preciese bijdrage te kunnen berekenen moet de verdeling van de dwarskracht over de doorsnede bekend zijn. We zullen een approximatieve verdeling onderstellen en ons beperken tot een symmetrische doorsnede.



We hebben

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{M}{I_x} y, \\ \tau_{zy} &= \frac{Q_y S}{b I_x}, \\ \tau_{zx} &= \frac{2Q_y S}{b^2 I_x} x \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

waarin  $Q_y$  de dwarskracht is langs de y-as, b de breedte van de doorsnede ter plaatse y,

$$S = \int_{y_1}^y y b(y) dy, \quad (56)$$

en  $\varphi$  de hoek is tussen de raaklijnen en de verticaal.



Uit (55) volgt

$$W_S = \frac{1}{2E} \frac{M^2}{I_x^2} y^2 + \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{Q_y S}{I_x b} \right)^2 + \left( \frac{2Q_y S x \operatorname{tg} \varphi}{b^2 I_x} \right)^2 \right] \quad (57)$$

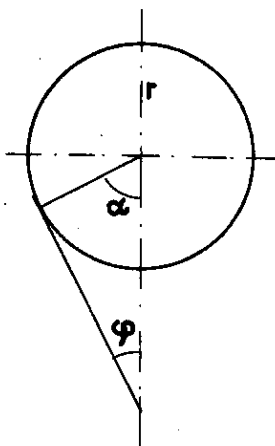
Deze arbeid bestaat uit twee gedeelten: de buigingsarbeid en de arbeid ten gevolge van de afschuiving. We berekenen alleen de laatste. Daartoe integreren we het tweede stuk van (57) over het totale volume. De integratie over x levert

$$\left( \frac{Q_y S}{I_x b} \right)^2 \cdot \frac{1}{b} \left\{ 1 + \frac{\tan^2 \varphi}{3} \right\}, \quad (58)$$

daar het gebied loopt van  $-b/2$  tot  $b/2$ . Vervolgens integreren we (58) over  $y$  en daarna over  $z$ . We vinden

$$W = \frac{Qy^2}{2G} \int_0^l \frac{dz}{I_x^2(z)} \int_{y_1}^{y_2} \frac{S^2(y)(1 + \frac{\tan^2 \varphi}{3})}{b(y)} dy. \quad (59)$$

### Voorbeeld



Voor een cirkel met straal  $r$  is

$$b = 2r \sin \alpha = 2r \cos \varphi. \quad (60)$$

Voor de arbeid wordt gevonden

$$W = \frac{16}{27\pi} \frac{Q^2 l}{Gr^2}. \quad (61)$$

### g. Combinaties met dwarskrachtbuiging

De dwarskracht levert schuifspanningen, evenals het wringend moment. De totale schuifspanning is dus een som van de beide bijdragen en het is te verwachten dat de energie niet uitsluitend uit een som van de twee elementaire energiën kan worden geschreven, doch nog een wisselwerkingsterm zal optreden. Het is echter mogelijk een punt te bepalen in de doorsnede met de eigenschap, dat, indien krachten en momenten op dit punt worden herleid, deze wisselwerkingsterm verdwijnt. Dit punt is het dwarskrachtenmiddelpunt volgens Trefftz.

De dwarskracht kan elementair worden gecombineerd met de rek en de buigende momenten.

### 7. De stellingen van Maxwell en Castigliano

We beschouwen een balk, die belast wordt door een aantal puntlasten  $P_1, P_2 \dots P_n$ . De verplaatsing onder  $P_k$ , in de richting van  $P_k$ , is  $u_k$ . Deze verplaatsing kan worden geschreven als

$$u_k = \sum_{\ell=1}^n \alpha_{k\ell} P_\ell, \quad (62)$$

waarin  $\alpha_{k\ell}$  de invloedscoëfficiënten volgens Maxwell zijn. De vorm van (62) is de logische consequentie van de lineaire theorie, welke leidt tot het superpositiebeginsel. Nu geldt

$$\alpha_{k\ell} = \alpha_{\ell k}, \quad (63)$$

d.w.z. de bijdrage tot de  $k$ -de verplaatsing van de eenheidskracht in  $\ell$  is gelijk aan de bijdrage tot de  $\ell$ -de verplaatsing van de eenheidskracht in  $k$ . De formule (63) is een uitdrukking van het reciprociteitstheorema in de balkentheorie. Want beschouw twee toestanden  $u_k^{(1)}, P_k^{(1)}$  en  $u_k^{(2)}, P_k^{(2)}$ . Dan is

$$\sum_{k=1}^n P_k^{(2)} u_k^{(1)} = \sum_{k=1}^n P_k^{(1)} u_k^{(2)}, \quad (64)$$

waaruit na invullen van (62), (63) volgt.

De energie  $W$  is te schrijven als een funktie van de belastende krachten

$$W = W(P_1, P_2, \dots, P_n). \quad (65)$$

In de lineaire theorie is  $W$  een kwadratische funktie. Op grond van de vorm (62) is  $W$  te schrijven als

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^n \alpha_{k\ell} P_k P_\ell, \quad (66)$$

waaruit volgt

$$u_k = \sum_{\ell=1}^n \alpha_{k\ell} P_\ell \quad (67)$$

en 
$$\alpha_{k\ell} = \frac{\partial^2 W}{\partial P_k \partial P_\ell}. \quad (68)$$

De formule (67) is niets anders dan de uitdrukking voor de stelling van Castigliano

$$u_k = \frac{\partial W}{\partial P_k}. \quad (69)$$

Indien in de uitwendige belasting momenten optreden:  $M_1, M_2, \dots, M_m$ , wordt de funktie  $W$

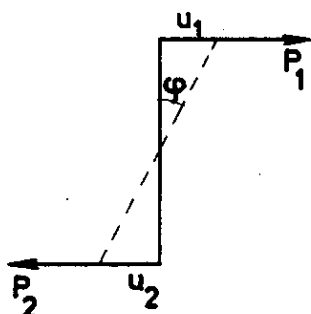
$$W = W(P_1, \dots, P_n, M_1, \dots, M_m) \quad (70)$$

en volgens Castigliano is nu ook

$$\varphi_k = \frac{\partial W}{\partial M_k}. \quad (71)$$

De formule (71) kan worden afgeleid door het moment te beschouwen

als twee naburige gelijke en tegengestelde krachten.



We hebben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell} \frac{\partial W}{\partial P} &= \frac{1}{\ell} \frac{\partial W}{\partial P_1} \frac{\partial P_1}{\partial P} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial W}{\partial P_2} \frac{\partial P_2}{\partial P} = \\ &= \frac{u_1 + u_2}{\ell} = \varphi \end{aligned} \quad (73)$$

In de formules (65) en (70) is ondersteld dat de energie uitsluitend een functie van de uitwendige krachten en momenten is. Essentieel is hierbij, dat de optredende reactiekrachten geen arbeid kunnen verrichten. Doen ze dit wel dan moeten ze in de vorm van  $W$  worden opgenomen.

Is het probleem statisch bepaald, dan kunnen de reactiekrachten worden uitgedrukt in de  $P_k$ 's en  $M_k$ 's door middel van de statica alleen. Is het probleem niet statisch bepaald, dan kunnen de "overtollige" reactiekrachten en momenten  $R_1 \dots R_p$  worden opgenomen in de uitdrukking  $W$  (dus als uitwendige krachten worden beschouwd) en worden bepaald door

$$\frac{\partial W}{\partial R_k} = 0. \quad (k = 1, 2 \dots p). \quad (74)$$

(Hier staat  $R_k$  voor een reactiekracht of een reactiemoment). De rechtvaardiging van (74) wordt gevonden door de reactiegrootheid te vervangen door een belastende grootheid en daarna de daarbij behorende verplaatsing gelijk nul te stellen. Doch ook door te bedenken dat de uitdrukking van  $W$  als  $W(P_k, M_k, R_k)$  een extreme waarde heeft bij vaste  $P_k$  en  $M_k$ . Dit is de minimum eigenschap van de elastische energie, beschouwd als complementaire energie. Uit de  $p$  vergelijkingen (74) worden de  $R_k$  als functie van  $P_k$  en  $M_k$  opgelost:

$$R_k = f_k(P_i, M_i), \quad k = 1, 2 \dots p. \quad (75)$$

We mogen deze  $R_k$ 's in de energie invullen als functie van  $P_k, M_k$  of niet, daar

$$u_k = \frac{\partial W}{\partial P_k} = \left( \frac{\partial W}{\partial P_k} \right)_{R_k} + \sum_{\ell=1}^p \frac{\partial W}{\partial R_\ell} \frac{\partial R_\ell}{\partial P_k} =$$

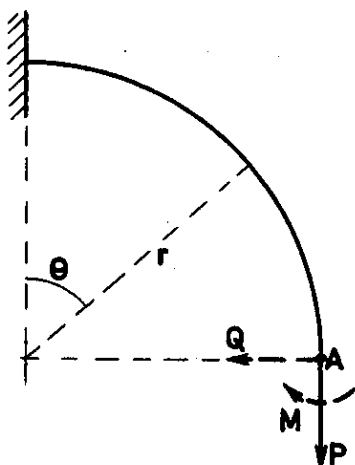
$$= \left( \frac{\partial W}{\partial P_k} \right) R_k, \quad (76)$$

op grond van (74).

Het is een nadeel van de stelling van Castigliano, dat alleen een verplaatsing op de plaats van een puntlast of moment direct is te berekenen. Indien we een verplaatsing elders zoeken, voeren we daar een puntlast  $Q$  in en laten deze achteraf naar nul gaan. Dus wordt in dit geval

$$u = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\partial W}{\partial Q}. \quad (77)$$

### Voorbeeld



We beschouwen allereerst een statisch bepaald probleem, met een belasting in het vlak van de constructie. Dit is een ingeklemde kwart cirkel, belast door een kracht  $P$ . We onderstellen dat de meetkundige configuratie zo is, dat alleen vervorming optreedt in het vlak van de kwart cirkel. Gevraagd wordt de horizontale, verticale verplaatsing van en de hoekverdraaiing in het punt  $A$ .

We voeren de hulpkracht  $Q$  en het hulpmoment  $M$  in. Het oppervlak van de doorsnede is  $A$ . Een coëfficiënt typerend voor de doorsnede is  $k$ . De arbeid is

$$W = \frac{1}{2EI} \int \mathcal{M}^2 ds + \frac{1}{2EA} \int N^2 ds + \frac{k}{2GA} \int D^2 ds. \quad (78)$$

Bij de belasting  $(P, Q, M)$  is

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M} &= Pr(1 - \sin \theta) + Qr \cos \theta + M, \\ N &= P \sin \theta - Q \cos \theta, \\ D &= P \cos \theta + Q \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

waarin  $D$  de dwarskracht is (ingevoerd om verwarring met  $Q$  te vermijden).

We vullen (79) in (78) in en verkrijgen



$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi/2} (Pr(1 - \sin \theta) + Qr \cos \theta + M)^2 r d\theta + \frac{1}{2EA} \int_0^{\pi/2} (P \sin \theta - \varphi \cos \theta)^2 r d\theta + \frac{k}{2GA} \int_0^{\pi/2} (P \cos \theta + \varphi \sin \theta)^2 r d\theta . \quad (80)$$

De verticale verplaatsing  $v$  is

$$v = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=M=0} = \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right) \frac{Pr^3}{EI} + \frac{\pi}{4} \frac{Pr}{EA} + k \frac{\pi}{4} \frac{Pr}{GA} . \quad (81)$$

De horizontale verplaatsing  $h$  is

$$h = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=M=0} = \frac{Pr^3}{2EI} - \frac{Pr}{2EA} + \frac{kPr}{2GA} , \quad (82)$$

en de hoekverdraaiing is

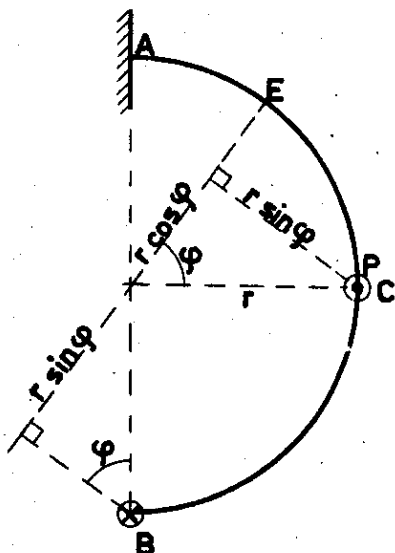
$$\varphi = \left( \frac{\partial W}{\partial M} \right)_{Q=M=0} = \frac{Pr^2}{EI} (\pi/2 - 1) . \quad (83)$$

Het is duidelijk dat de eerste bijdrage in (81), (82) en (83) van de buiging komt, de tweede van de normaalkracht en de derde van de dwarskracht. Voor het traagheidsmoment  $I$  kunnen we schrijven

$$I = p \cdot A \cdot d^2 , \quad (84)$$

waarin  $d$  een karakteristieke lengteparameter is van de doorsnede,  $A$  het oppervlak en  $k$  een constante van de orde 1. Met (84) zijn de drie bijdragen te vergelijken. Het blijkt dat de buigingsterm  $(r/d)^2$  groter is dan de andere. Daarom wordt vaak normaalenergie en dwarskrachtenergie verwaarloosd tegenover buigingsenergie.

#### Voorbeeld



We bestuderen nu een statisch bepaalde constructie, welke loodrecht op het vlak wordt belast.

Een halve cirkel met straal  $r$  is ingeklemd bij  $A$  en wordt bij  $C$  door een puntlast  $P$  loodrecht op het vlak belast.

Gevraagd wordt de loodrechte verplaatsing van  $B$ .

In B brengen we de hulpkracht aan  $Q$ . We hebben nu

$$W = \frac{1}{2EI} \int M_b^2 ds + \frac{1}{2S_W} \int M_W^2 ds, \quad (85)$$

indien  $M_b$  resp.  $M_W$  het buigend en wringend moment zijn en  $S_W$  de stijfheid tegen wringing.

We superponeren

$$M_b = M_b^{(1)} + M_b^{(2)}, \quad (86)$$

de bijdragen resp. van  $P$  en  $Q$  en

$$M_W = M_W^{(1)} + M_W^{(2)}. \quad (87)$$

Dan wordt

$$W = \frac{1}{2EI} \int (M_b^{(1)} + M_b^{(2)})^2 ds + \frac{1}{2S_W} \int (M_W^{(1)} + M_W^{(2)})^2 ds. \quad (88)$$

De gevraagde verplaatsing is

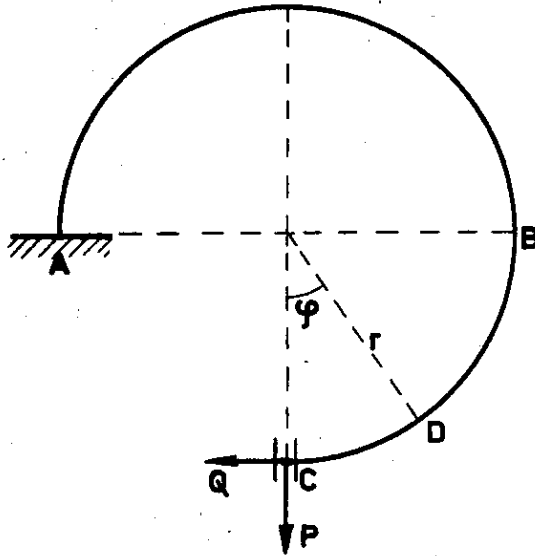
$$u_B = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \frac{1}{EI} \int M_b^{(1)} \frac{\partial M_b^{(2)}}{\partial Q} ds + \frac{1}{S_W} \int M_W^{(1)} \frac{\partial M_W^{(2)}}{\partial Q} ds. \quad (89)$$

Nu is

$$\left. \begin{aligned} M_b^{(1)} &= Pr \sin \varphi, \\ M_W^{(1)} &= Pr(1 - \cos \varphi), \\ M_b^{(2)} &= Qr \cos \varphi, \\ M_W^{(2)} &= Qr(1 + \sin \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

waaruit volgt

$$u_B = \frac{Pr^3}{2} \left[ \frac{1}{EI} + \frac{\pi-1}{S_W} \right]. \quad (91)$$

Voorbeeld

Nu volgt een statisch onbepaald probleem van een in het vlak belaste constructie. Een ingeklemde ring ABC, met de straal  $r$  en de buigstijfheid  $QI$  wordt in C door een kracht  $P$  belast. Het punt C glijdt in een bus en kan alleen verticaal bewegen. Gevraagd wordt de zakking van C.

De reactiekracht door de bus uitgeoefend is  $Q$ . In de doorsnede D is het buigend moment

$$\mathcal{M} = Pr \sin \varphi - Qr(1 - \cos \varphi). \quad (92)$$

De energie  $W$  is

$$W = \frac{1}{2EI} \int \mathcal{M}^2 ds, \quad (93)$$

waaruit volgt

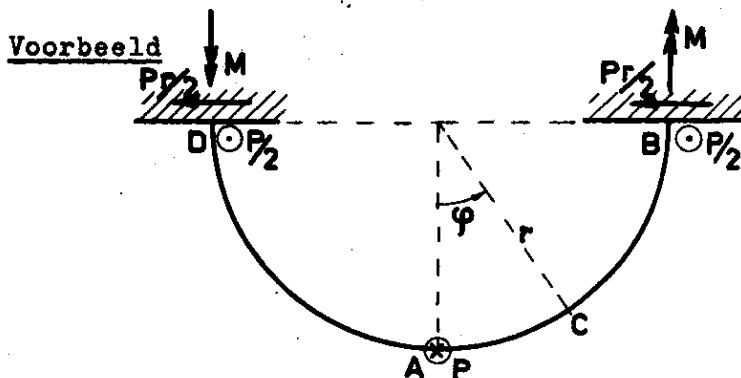
$$u_Q = 0 = \frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int \mathcal{M} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Q} ds. \quad (94)$$

Na invullen volgt uit (94)

$$Q = \frac{2P}{9\pi + 8}. \quad (95)$$

De verplaatsing  $u_P$  is nu

$$u_P = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pr^3}{EI} \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{9\pi + 8} \right). \quad (96)$$



We geven nu een voorbeeld van een statisch onbepaald probleem, waarbij de constructie loodrecht op het vlak wordt belast.

Een halve ring DACB is bij D en B ingeklemd. De straal is  $r$ , de belasting  $P$  in A staat loodrecht op het vlak. Gevraagd wordt de zakking in A.

Op grond van de symmetrie zien we dat de reactiekrachten in B en D gelijk  $P/2$  zijn. Evenwicht en symmetrie vereisen voorts dat, zowel in B, als in D een moment evenwijdig BD werkt, dat gelijk is aan  $\frac{Pr}{2}$ . De statisch onbepaalde is het moment  $M$ , dat gelijk is en tegengesteld gericht in B en D.

Het buigend moment is in C

$$M_b = \frac{Pr}{2} \sin \varphi + (M - \frac{Pr}{2}) \cos \varphi, \quad (97)$$

terwijl het wringend moment in C is

$$M_w = \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) + (M - \frac{Pr}{2}) \sin \varphi. \quad (98)$$

De energie wordt

$$W = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{Pr}{2} \sin \varphi + \bar{M} \cos \varphi \right)^2 r d\varphi + \frac{1}{GI_0} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) + \bar{M} \sin \varphi \right)^2 r d\varphi, \quad (99)$$

$$\text{als } \bar{M} = M - \frac{Pr}{2} \quad (100)$$

en we ons beperken tot een cirkelvormige doorsnede.  $\bar{M}$  is bepaald door

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{M}} = 0, \text{ waaruit volgt}$$

$$\bar{M} = - \frac{Pr}{\pi}. \quad (101)$$

De zakking in A is

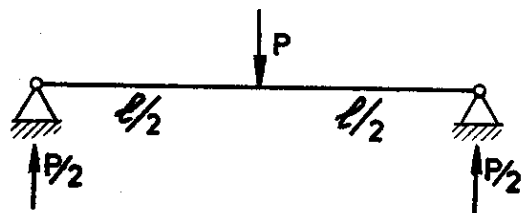
$$u_P = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pr^3}{EI} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\pi} \right) + \frac{Pr^3}{GI_0} \left( \frac{3\pi}{8} - 1 - \frac{1}{2\pi} \right). \quad (102)$$

Is  $a$  de straal van de doorsnede, dan wordt (102)

$$u_P = \frac{Pr^3}{2\pi^2 a^4} \left[ \frac{\pi^2 - 4}{E} + \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{2G} \right]. \quad (103)$$

## 8. Symmetrie en Keersymmetrie

Vele problemen in de mechanica hebben betrekking op symmetrische constructies, belast door een symmetrische krachtverdeling. Op grond van de aanwezige symmetrie kan dan het formele probleem worden vereenvoudigd.



De kracht  $P$  geeft aanleiding tot twee gelijke reacties, die dus  $P/2$  zijn. Deze conclusie wordt op grond van de aanwezige symmetrie getrokken.

Werkt op een symmetrische constructie een willekeurige krachtverdeling  $P(x)$ , dan kan deze steeds in een symmetrische en een keersymmetrische worden gesplitst

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x), \quad (104)$$

met

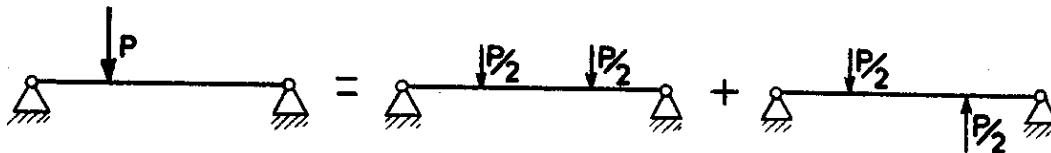
$P_1(x)$  heeft dezelfde symmetrie als de constructie,  
 $P_2(x)$  heeft overeenkomstige keersymmetrie.

Geldt bijv. symmetrie t.o.v. tekenomkeer van  $x$ , dan is

$$\left. \begin{aligned} P_1(x) &= P_1(-x), \\ P_2(x) &= -P_2(-x). \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

We behoeven dus bij een symmetrische constructie alleen de invloed van symmetrische en keersymmetrische belastingen te onderzoeken.

### Voorbeeld

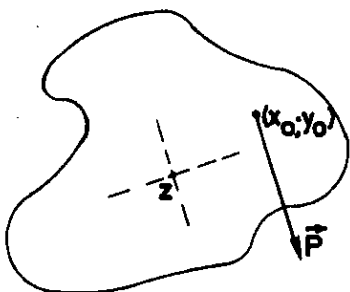


Zoals direct uit de differentiaalvergelijkingen volgt hebben we de volgende eigenschappen voor een symmetrische constructie:

- de verplaatsing in de richting van de belasting heeft dezelfde symmetrie als deze,
- de dwarskracht heeft tegengestelde symmetrie,

- c. het buigend moment heeft gelijke symmetrie,
- d. het wringend moment heeft tegengestelde symmetrie.

9. Het dwarskrachtenmiddelpunt



Indien een balk door een dwarskracht  $\vec{P}$  wordt belast, welke aangrijpt in een willekeurig punt  $(x_0, y_0)$  van de einddoorsnede, zal door  $\vec{P}$  zowel buiging als wringing ontstaan. Het is uit de statica bekend, dat we  $\vec{P}$  willekeurig in zijn vlak evenwijdig mogen verschuiven, mits we een bijbehorend koppel toevoegen. Dit koppel is een wringend moment voor de balk. Daardoor ontstaat de vraag: is er een punt in de doorsnede, zodanig dat  $\vec{P}$

alleen buiging geeft. Bestaat dit punt, dan kunnen we  $\vec{P}$  er naar verschuiven onder toevoeging van het wringend moment en het buigingsprobleem is gesplitst in twee problemen:

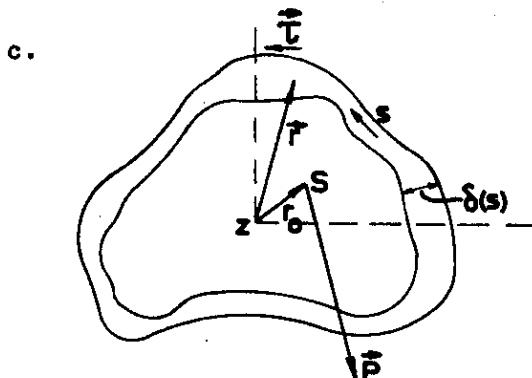
- a. het bepalen van de "zuivere" buiging door een dwarskracht,
- b. het bepalen van de torsie door een wringend moment.

Dit punt bestaat inderdaad en we zullen het het dwarskrachtenmiddelpunt noemen. Omdat het begrip "torsievrije buiging" niet eenduidig te definiëren is, bestaan er verschillende dwarskrachtenmiddelpunten. We bespreken er enkele.

- a. Trefftz, verstaat onder een torsievrije buiging een buiging, welke ontstaat door splitsing van de totale deformatie, zodanig dat de buigings- en wringingsenergie kunnen worden gesuperponeerd.

- b. Ieder element van de doorsnede ondergaat een rotatie  $\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ . De locale rotatie is gedefinieerd door  $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ .

Het dwarskrachtenmiddelpunt kan nu ook worden gedefinieerd als het punt waarvoor de gemiddelde locale rotatie gelijk is aan nul.



Bij een dunwandige constructie wordt het dwarskrachtenmiddelpunt gedefinieerd door

$$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{P} =$$

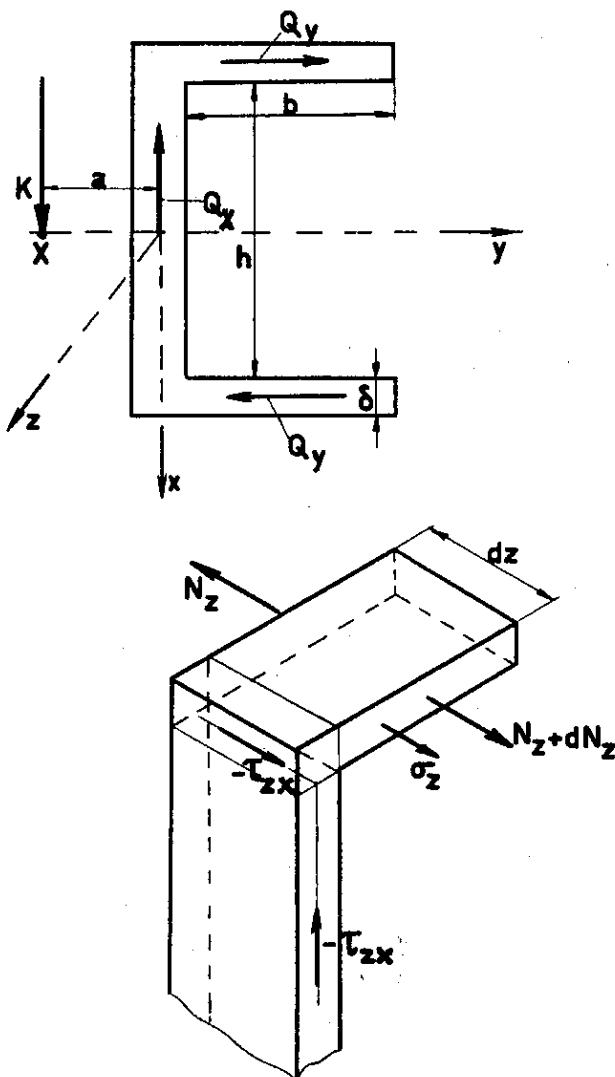
$$\int_{S_0}^S \vec{r} \times \vec{\tau} \cdot \tau(s) \delta(s) ds, \quad (106)$$

waarin  $\vec{r}_0$  de positie van het dwarskrachtenmiddelpunt S geeft,  $\vec{\tau}$  een eenheidsvector langs de omtrek is,  $\tau(s)$  de schuifspanning en  $\delta(s)$  de lokale dikte. Formule (106) heeft betrekking op een open constructie van  $s_0$  tot  $s$ . Voor een gesloten constructie moet de integraal (106) door een kringintegraal  $\oint$  worden vervangen.

Indien er een lijn van symmetrie is, ligt het dwarskrachtenmiddelpunt daarop. Het valt samen met een punt van symmetrie, evenals het zwaartepunt.

### Voorbeeld

We bekijken een [-balk, onder de belasting van een kracht K. De dikte van de balk is gelijkmatig en gelijk aan  $\delta$ . De afstand tussen de dwarsflensen is h, de breedte ervan b.



Gevraagd wordt het dwarskrachtenmiddelpunt X te bepalen.

Het is duidelijk, dat X op de as van symmetrie ligt. Uit het evenwicht volgt

$$\left. \begin{aligned} K + Q_x &= 0, \\ Ka &= Q_y h, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

waaruit

$$a = - \frac{Q_y}{Q_x} h. \quad (108)$$

Door de dwarskracht ontstaat een normaalkracht  $N_z$  in de dwarsflens. De schuifspanning aan het centrale stuk -  $\tau_{zx}$  geeft een kracht die in evenwicht is met deze  $N_z$ . We hebben dus

$$\left. \begin{aligned} -\tau_{zx} \cdot \delta \cdot dz &= dN_z, \\ \text{of} & \\ \frac{dN_z}{dz} &= -\delta \cdot \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Voor de normaalkracht  $N_z$  geldt

$$N_z = b \cdot \delta \cdot \sigma_z, \quad (110)$$

en daar

$$\sigma_z = \frac{hM}{2I_y}, \quad (111)$$

wordt 
$$N_z = \frac{b\delta h}{2I_y} M_y, \quad (112)$$

waaruit 
$$\frac{dN_z}{dz} = -\delta \tau_{zx} = \frac{b\delta h}{2I_y} \frac{dM_y}{dz} = \frac{b\delta h}{2I_y} Q_x, \quad (113)$$

waaruit 
$$\tau_{zx} = -\frac{bh}{2I_y} Q_x. \quad (114)$$

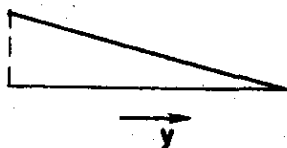
Bij dunwandige constructies is de schuifstroom T constant als er geen normaalspanning is en anders continu

$$T = \tau\delta = \text{continu}, \quad (115)$$

waaruit volgt dat in de bovendwarsflens bij  $y = 0$  een schuifspanning bestaat  $\tau_{zy} = -\tau_{zx}$ .

Deze geeft aanleiding tot de resulterende kracht  $Q_y$ .

$$Q_y = \int_0^b \tau_{zy} \delta dy = \frac{1}{2} \delta b \tau_{zy}, \quad (116)$$



indien  $\tau_{zy}$  lineair verloopt langs  $y$  van de beginwaarde  $\tau_{zy} = -\tau_{zx}$  tot 0.

Dus

$$Q_y = -\frac{1}{2} \delta b \tau_{zx}. \quad (117)$$

Uit (114) en (117) volgt

$$a = \frac{b^2 h^2 \delta}{4I} = \frac{b^2}{h/3+2b}, \quad (118)$$

waarbij 
$$I = h^2 \delta \left( \frac{h}{12} + \frac{b}{2} \right) \quad (119)$$

is ingevuld.

Let op dat  $a$  een positieve waarde heeft, terwijl  $X$  op de negatieve  $y$ -as ligt. We hadden het goede teken gekregen door de tweede vergelijking (107) te vervangen door

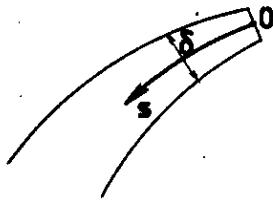


$$M_z = -Ka - Q_y h = 0, \quad (120)$$

$$\text{waaruit } a = \frac{Q_y}{K} h. \quad (121)$$

### Opmerking

De continuïteit van  $T$  volgt direct uit het evenwicht. Voor een element geldt



$$\int_0^s \sigma_z \delta(s) ds - \int_0^s \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) \delta(s) ds + \tau(z, s) \delta(s) dz = 0, \quad (121)$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \tau(z, s) \delta(s) &= T = \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} \delta(s) ds \\ &= \int_0^s \frac{dM}{dz} \cdot \frac{x}{I_y} \cdot \delta(s) ds, \end{aligned} \quad (122)$$

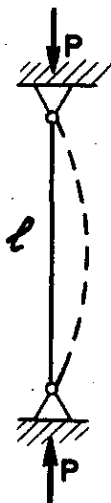
of

$$T = \frac{Q(z)}{I_y(z)} \cdot \int_0^s x \delta(s) ds. \quad (123)$$

## 10. De stabiliteit van het evenwicht

### a. Eenduidigheidsstelling

De lineaire theorie leert, dat bij een gegeven belasting één en slechts één deformatie bestaat. Het is echter uit de ervaring bekend, dat bij vergroting van de belasting er meerdere deformatietypen kunnen ontstaan. Dit is het verschijnsel van knik. Indien een rechte balk van de lengte  $l$ , die aan de uiteinden scharnierend is bevestigd door een kracht  $P$  in de lengterichting wordt belast, zal hij bij een bepaalde kracht  $P_k$ , de knikkraft, kunnen gaan uitbuigen.



Allereerst merken we op, dat dit geenszins in strijd is met de theorie. Deze geldt immers bij oneindig kleine deformatie, dus ook

krachten. Bij zeer kleine kracht  $P$  bestaat slechts één deformatie: de samendrukking. Vergroot men  $P$  dan ontstaan afwijkingen van de lineaire theorie en vanaf een eindige waarde van  $P : P_k$  zijn er twee deformaties: de samendrukking en de doorbuiging. Bij vergroting kunnen meerdere deformatievormen ontstaan.

b. Er zijn nu twee problemen:

- a) wat is de kritische belasting  $P_k$ ,
- b) welk van de deformatievormen zijn stabiel, welke instabiel.

We zullen een uitvoerige discussie geven van het probleem a), doch ten aanzien van b) alleen opmerken, dat voorbij de kritische belasting de oorspronkelijke deformatie instabiel wordt. Het bewijs hiervan geven we niet.

Op grond van (F,V,7) geldt

$$W = A_u^{(b)}, \quad (124)$$

waarin

$$A_u^{(b)} = \frac{1}{2} \int_S p_i u_i dS, \quad (125)$$

bij afwezigheid van volumekrachten.

Dus: de opgehoopte elastische energie is gelijk aan de arbeid door de uitwendige krachten verricht. Verder geldt

$$\delta W = \delta A_u^{(b)}, \quad (126)$$

volgens (F,V,9), welke vergelijking tot uitdrukking brengt, dat de (stabiele of instabiele) evenwichtstoestand wordt getypeerd door een stationnaire waarde van de totale potentiële energie.

Ondergaat een balk knik onder invloed van de uitwendige krachten en momenten, dan kan voor  $W$  wel uitsluitend de buigingsenergie worden geschreven

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz. \quad (127)$$

Is de uitgebogen lijn  $y = y(z)$ , dan geldt volgens Bernoulli

$$M = -EIy'', \quad (128)$$

waarmee (127) overgaat in

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(y'')^2 dz. \quad (129)$$

De potentiële energie van de uitwendige krachten hangt natuurlijk af van de aard van deze. Indien de belasting een drukkracht is  $P$ , welke constante richting heeft, is de potentiële energie

$$\begin{aligned} A_u^{(b)} &= P \int_0^{\ell} (ds - dz) = P \int_0^{\ell} \left( \frac{ds}{dz} - 1 \right) dz = \\ &P \int_0^{\ell} (\sqrt{1 + y'^2} - 1) dz = \frac{1}{2} P \int_0^{\ell} ((y')^2 + \dots) dz, \quad (130) \end{aligned}$$

daar de zakking van  $P$  is  $\int_0^{\ell} (ds - dz)$ , in de onderstelling dat de werkelijke lengte  $\ell$  van de boog constant is gebleven. Strikt logisch

$$\int_0^{\ell} ds - dz = \int_0^{\ell} \left( 1 - \frac{dz}{ds} \right) ds, \text{ met}$$

$$\int_0^{\ell} ds = \ell,$$

waarbij  $1 - \frac{dz}{ds}$  de relatieve verkorting is.

We verwaarlozen de hogere termen  $y'^4$  etc. in (130) en dan wordt (124)

$$\int_0^{\ell} EI(y'')^2 dz = P \int_0^{\ell} (y')^2 dz, \quad (131)$$

waaruit

$$P = \frac{\int_0^{\ell} EI(y'')^2 dz}{\int_0^{\ell} (y')^2 dz}. \quad (132)$$

Allereerst leiden we uit (126)

$$\delta \int_0^{\ell} \{EI(y'')^2 - P(y')^2\} dz = 0 \quad (133)$$

de differentiaalvergelijking af. De vergelijking van Euler, behorend bij (133) is

$$\frac{d^2}{dz^2} \{EI(y'')^2 + Py\} = 0, \quad (134)$$

met de nevencondities (randvoorwaarden)

$$EI \cdot y'' \delta y' \Big|_0^{\ell} = \frac{d}{dz} \{EIy'' + Py\} \Big|_0^{\ell} = 0, \quad (135)$$

waarmee wordt uitgedrukt, dat aan de randen geen arbeid wordt verricht door moment of dwarskracht. We integreren (134) tot

$$EIy'' + Py = Az + B, \quad (136)$$

waarin A en B integratieconstanten zijn.

Terwijl we tot nu steeds bij een gegeven belasting de deformatie hebben gezocht, is hier een ander type probleem. We zoeken hier bij welke belasting (136) een niet-triviale oplossing bezit. Dit is een z.g. eigenwaarde probleem.

#### Voorbeeld



Staf van de lengte  $\ell$  wordt belast door een axiale kracht  $P$ . De staf is opgelegd.

We integreren (136) met de randcond.:

$$\left. \begin{aligned} z = 0; y = y'' = 0, \\ z = \ell; y = y'' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Uit (137) volgt direct  $A = B = 0$ .  
De oplossing van (136) is dan

$$y = M \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} z + N \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} z. \quad (138)$$

De randcondities geven  $M = 0$  en

$$N \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = 0. \quad (139)$$

De vergelijking (139) heeft de oplossingen

$N = 0$  of

$$N \neq 0, \quad \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = k\pi. \quad (140)$$

De oplossing  $N = 0$  is de samendrukking. Deze bestaat zolang  $P$  voldoende klein is. Zodra  $P$  groter wordt, wordt hij instabiel. Dit is als

$$P > P_1 = \frac{EI}{\ell^2} \pi^2, \quad (141)$$

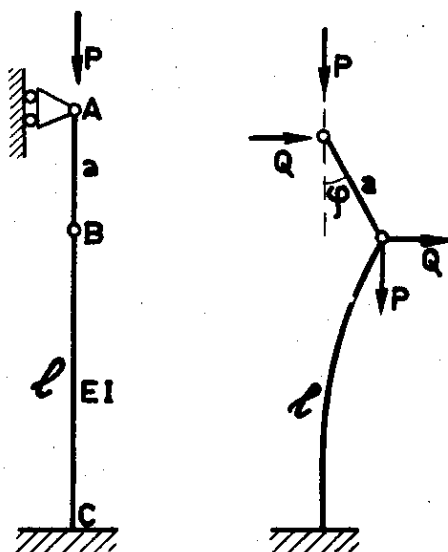
de knikkraft.

De vergelijking (140) heeft ook de oplossingen

$$P_k = \frac{EI}{\ell^2} k^2 \pi^2, \quad (142)$$

maar deze zijn technisch van minder belang.

#### Voorbeeld



Een staaf BC, ingeklemd bij C, van de lengte  $\ell$  is in B scharnierend verbonden met een onvervormbare staaf AB van de lengte  $a$ . A, B en C liggen verticaal. Op A werkt een verticale kracht  $P$ . Bepaal de knikwaarde.

Op de staaf werkt de kracht  $P$  naar beneden en een dwarskracht  $Q$  naar rechts. De resultante van  $P$  en  $Q$  ligt langs AB, dus

$$Q = P \operatorname{tg} \varphi = P\varphi, \quad (143)$$

op grond van het feit dat bij het begin van de knik  $\varphi$  zeer klein is.

Het moment ter plaatse  $z$  is

$$M = Qz + Py, \quad (144)$$

indien de oorsprong in B is genomen. Dan geldt dus

$$M = Qz + Py = -EIy'', \quad (145)$$

waaruit

$$EIy'' + Py = -P\varphi z. \quad (146)$$

De oplossing van (146) is

$$y = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} z + c_2 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} z - \varphi z. \quad (147)$$

De randvoorwaarden zijn

$$\left. \begin{aligned} z = 0 : y = y'' = 0, \\ z = \ell : y = a\varphi, y' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

waaruit volgt  $c_1 = 0$ , terwijl voor  $c_2$  en  $\varphi$  simultaan moet worden voldaan aan

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{P}{EI}} c_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell - \varphi = 0, \\ c_2 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell - \varphi \ell = a\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

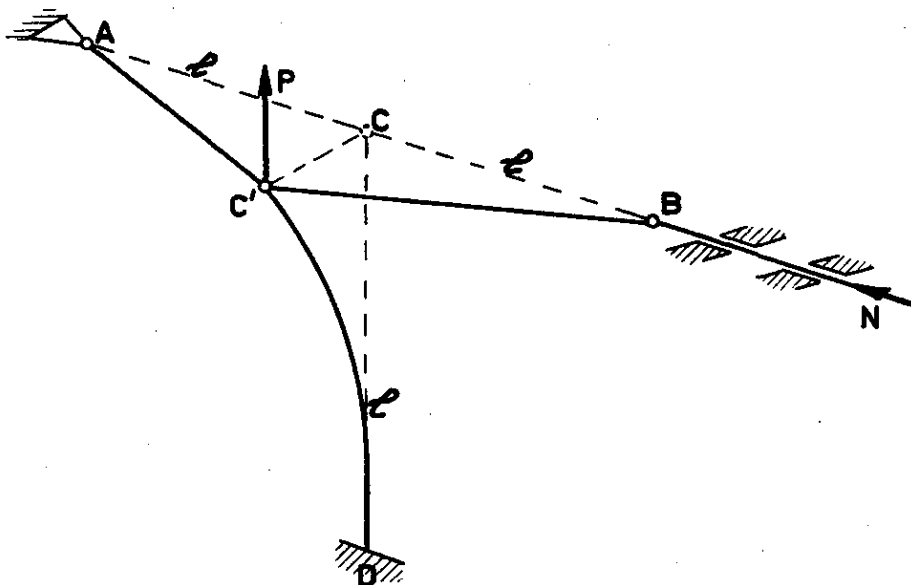
welk stelsel alleen een oplossing heeft als

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = \sqrt{\frac{P}{EI}} (a + \ell). \quad (150)$$

Voor  $a = \ell$ , is de kleinste, niet triviale oplossing

$$P = \frac{EI}{\ell^2} \cdot (1,1656)^2. \quad (151)$$

### Voorbeeld

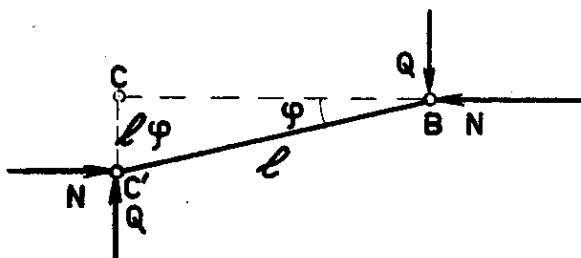


Een constructie bestaat uit drie staven AC, BC en CD. De drie staven zijn scharnierend verbonden in C, terwijl AC scharnieren kan in A en BC in B. De staaf CD is ingeklemd in D.

De staven AC en BC zijn niet-vervormbaar, doch CD is dat wel.

De staven hebben gelijke lengte  $\ell$ .

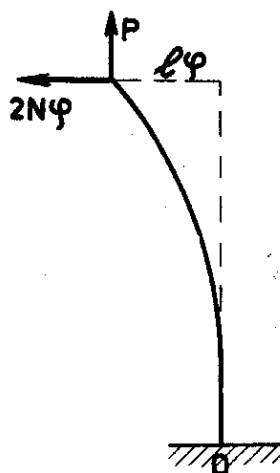
In C werkt een kracht  $P$ , vertikaal naar boven, terwijl in B een drukkracht  $N$  wordt uitgeoefend. De kracht  $P$  heeft de grootte  $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ , waarbij  $EI$  de buigstijfheid is van  $CD$ . Gevraagd wordt de waarde van  $N$  te bepalen, waarvoor knik optreedt.



Uit het evenwicht van  $BC'$  volgt voor de dwarskracht  $Q$ :

$$Q = N\varphi. \quad (152)$$

De vergelijking voor de elastische lijn wordt dan



$$EIy'' = -P(l\varphi - y) + 2N\varphi(l - z), \quad (153)$$

waarbij de oorsprong in D is genomen. Of

$$y'' - \alpha^2 y = 2\alpha^2 \frac{N}{P} (l\varphi - z) - \alpha^2 l\varphi, \quad (154)$$

$$\text{waarin } \alpha^2 = \frac{P}{EI}. \quad (155)$$

De oplossing van (154) is

$$y = c_1 e^{\alpha x} - c_2 e^{-\alpha x} + l\varphi - 2 \frac{N}{P} (l\varphi - z). \quad (156)$$

De randvoorwaarden zijn

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \quad y = 0, \quad y' = 0, \\ z = l \quad y = l\varphi, \end{array} \right\} \quad (157)$$

waaruit drie homogene vergelijkingen volgen voor  $c_1$ ,  $c_2$  en  $\varphi$ . De determinant gelijk nul stellen, levert de knikvoorwaarde

$$2 \frac{N}{P} \left\{ e^{\alpha l} + e^{-\alpha l} - \frac{1}{\alpha l} (e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}) \right\} - (e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}) = 0. \quad (158)$$

Op grond van het gegevene is  $\alpha l = \pm \pi$ . Bij verwaarlozing van  $e^{-\pi}$  wordt (158)

$$2 \frac{N}{P} \left( 1 - \frac{1}{\alpha l} \right) - 1 = 0, \quad (159)$$

waaruit

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{\pi^3}{2(\pi-1)} \cdot \frac{EI}{l^2}, \\ N/P &= \frac{\pi}{2(\pi-1)} = 0,735. \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

c. De methode van Rayleigh

In vele praktische voorkomende gevallen is het niet mogelijk of gemakkelijk de vergelijking (136) op te lossen. In het bijzonder indien  $EI$  van  $z$  afhankelijk is. Dan heeft het zin een methode te ontwikkelen, waarmee op eenvoudige wijze benaderde oplossingen van (136) kunnen worden verkregen. We gaan uit van (132)

$$P' = \frac{\int_0^l EI(y'')^2 dz}{\int_0^l (y')^2 dz}. \quad (161)$$

Deze formule is exact en geeft ons bij iedere exacte oplossing van (136) de bijbehorende waarde van  $P$ . Indien we de preciese waarde van  $y_0(z)$  niet kennen, doch een benaderde:

$y = y_0(z) + \delta y(z)$ , wordt met (161)

$$\delta P = \frac{\int_0^l EI(y'' + \delta y'')^2 dz}{\int_0^l (y' + \delta y')^2 dz} \quad (162)$$

en dit is in eerste benadering gelijk aan nul. We bewijzen dit als volgt. Uit (161) volgt

$$\begin{aligned} \delta P &= \frac{\int_0^l EI(y'')^2 dz \cdot \int_0^l (y')^2 dz - \int_0^l EI(y'')^2 dz \cdot \delta \int_0^l (y')^2 dz}{\left( \int_0^l (y')^2 dz \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\int_0^l (y')^2 dz} \left\{ \delta \int_0^l EI(y'')^2 dz - P \delta \int_0^l (y')^2 dz \right\} = \end{aligned}$$



$$= \frac{2}{\int_0^l (y')^2 dz} \{ \delta(W - A_u^{(b)}) \} = 0, \quad (163)$$

op grond van (126), waarbij tevens gebruik is gemaakt van (161). Dit is het principe van Rayleigh.

De betekenis van (163) is duidelijk. Een functie die "weinig" afwijkt van de exacte levert een "aanvaardbare" waarde voor P. Alleen de begrippen "weinig" en "aanvaardbaar" zijn subjectief en hangen af van de gestelde eisen. Merk op dat (161) geldt voor iedere knikwaarde. In de praktijk zoeken we het minimum van het quotient (161) en vinden zo de laagste knikwaarde.

Omdat het principe van Rayleigh in wezen identiek is met het principe van de minimum potentiële energie  $\delta U = 0$ , waarbij aan de virtuele variaties de nevencondities werden opgelegd om te voldoen aan de randvoorwaarden (verenigbaarheid met de meetkundige configuratie!), is het gewenst bij Rayleigh ook probeerfuncties te kiezen, welke aan de randvoorwaarden voldoen. Het is niet noodzakelijk, doch leidt tot veel meer preciese resultaten.

We behandelen nu de voorafgaande voorbeelden met de methode van Rayleigh en vergelijken de resultaten.

#### Voorbeeld

De opgeléde balk:  $P = \frac{EI}{l^2} \pi^2 = \frac{EI}{l^2} \cdot 9,869604$ .

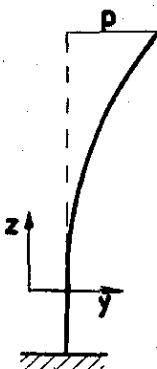
We zetten in (161)

$$y = c(l^3 z - 2lz^3 + z^4), \quad (164)$$

welke functie aan de randcondities voldoet. We vinden uit (161)

$$P = \frac{168}{17} \frac{EI}{l^2} = \frac{EI}{l^2} \cdot 9,8823.$$

#### Voorbeeld



We behandelen het tweede voorbeeld.

Met  $a = l$ , werd

$$P = \frac{EI}{l^2} \cdot (1,1656)^2.$$

We proberen eerst  $y = p\left(\frac{x}{l}\right)^2$ , (165)

een functie welke niet aan alle randvoorwaarden voldoet. We vinden

$W = \frac{2p^2 EI}{\ell^3}$ , terwijl  $A_u^{(b)}$  uit twee stukken bestaat:

$$A_{u1}^{(b)} = \frac{1}{2} P \int_0^{\ell} (y')^2 dz = \frac{2}{3} P \frac{p^2}{\ell}$$

en  $A_{u2}^{(b)} = P (a - \sqrt{a^2 - p^2}) \approx \frac{1}{2} P \frac{p^2}{a}$ ,

een deel dat komt als gevolg van de zakking door de uitbuiging van AB. We vinden nu

$$\frac{P}{EI} = \frac{2}{(2/3 + \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{a}) \ell^2}, \text{ waaruit voor } a = \ell$$

$$\frac{P \ell^2}{EI} = \sqrt{1,72}.$$

De fout is aanzienlijk.

We proberen nu

$$y = p(1 - \cos \frac{\pi}{2\ell} z), \quad (166)$$

een functie, die aan alle randvoorwaarden voldoet. We vinden

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{EI}{2} p^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^4 \frac{\ell}{2}, \\ \Delta \ell &= \frac{1}{2} p^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 \frac{\ell}{2}, \\ \Delta a &= \frac{1}{2} \frac{p^2}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

waaruit

$$P = \frac{EI \frac{\pi^4}{64\ell^3}}{\frac{\pi^2}{16\ell} + \frac{1}{2a}}.$$

Met  $a = \ell$ , wordt nu

$$P = \frac{EI}{\ell^2} (1,17)^2, \text{ een fout van } 0,4\%.$$

Voorbeeld

Bij het derde voorbeeld beginnen we met

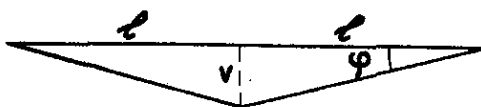
$$y = cz^2. \quad (168)$$

We vinden

$$w = 2c^2 EI l,$$

$$\Delta l = 2/3 c^2 l^3,$$

terwijl ook N potentiële energie heeft.



$$\Delta u = 2(1 - \cos \varphi) l = \varphi^2 l = \frac{v^2}{l},$$

$$\text{waaruit } \Delta u = c^2 l^3.$$

Dus we vinden

$$N l^3 - 2/3 \pi^2 EI l = 2EI l,$$

waaruit

$$\frac{N}{P} = 0,869, \text{ een fout van } 18\%.$$

We nemen nu:  $y = c(z^2 + az^3)$ .  
Dan wordt

$$W = c^2 \cdot \frac{EI}{2} (4l + 12al^2 + 12a^2 l^3),$$

$$\Delta l = c^2 \cdot \frac{1}{2} (4/3 l^3 + 3a l^4 + 9/5 a^2 l^5),$$

$$\Delta u = c^2 \cdot l^3 (1 + al)^2,$$

waaruit we vinden

$$N = \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{26 + 63al + 45(a l)^2}{3(1 + al)^2}. \quad (169)$$

De "beste" waarde krijgen we door te differentiëren naar a en gelijk nul te stellen. Dan wordt voor  $al = -11/27$ , N een minimum

$$N = \frac{EI}{l^2} \cdot 7,43,$$

waaruit

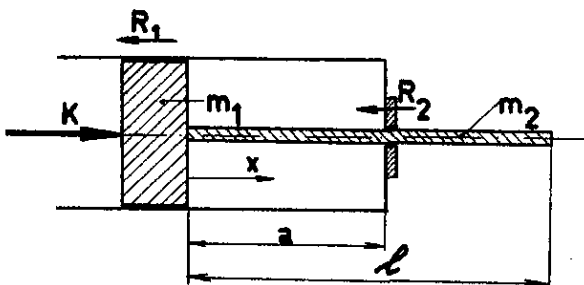
$$\frac{N}{P} = \frac{7,43}{\pi^2},$$

met een fout van 1%.

## 11. Kineto-Statica

Onder kineto-statica verstaan we de leer van de vervorming van en spanningen in lichamen, welke het gevolg zijn van de bewegingen van het lichaam. Indien een willekeurig lichaam een versnelde beweging uitvoert, werkt op ieder element  $dV$  van het lichaam een traagheidskracht  $-\rho a dV$ , waarin  $a$  de versnelling ter plaatse  $dV$  is. Deze traagheidskracht wordt berekend door het lichaam eerst als onvervormbaar te beschouwen. Vervolgens wordt de vervorming en spanning als gevolg van de traagheidskracht van het lichaam berekend.

### Voorbeeld



Een zuiger, met de massa  $m_1$ , beweegt zich onder invloed van een kracht  $K$  in een cilinder. De zuiger is verbonden aan een stang met massa  $m_2$ . Zowel de zuiger als de stang ondervinden een wrijvingsweerstand resp.  $R_1$  en  $R_2$ .

Gevraagd wordt te berekenen de spanning in de stang.

In de getekende situatie is de traagheidskracht  $T$  bij  $x$

$$T = - \left( m_1 + \frac{m_2 x}{l} \right) \cdot \frac{K - (R_1 + R_2)}{m_1 + m_2}. \quad (170)$$

In het gebied  $0 < x < a$  is volgens d'Alembert

$$K - R_1 + T + S = 0, \quad (171)$$

waaruit

$$S = - \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ m_2 (K - R_1) + m_1 R_2 \right\} + \frac{x}{l} \frac{m_2}{m_1 + m_2} (K - R_1 - R_2), \quad (172)$$

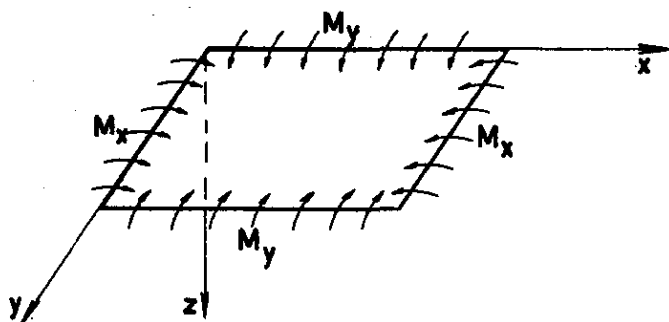
terwijl in  $a < x < \ell$  geldt

$$S = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) (K - R_1 - R_2). \quad (173)$$

## II. Theorie der platen

### 1. Basisvergelijkingen

We bekijken alleen van een vlakke, dunne plaat de buiging onder uitwendige belasting.



De dikte  $h$  van de plaat is zeer klein t.o.v. de overige afmetingen.

We onderstellen, dat de normalen op het middenvlak normaal blijven. Verder nemen we aan, dat de spanning loodrecht op het vlak  $\sigma_z = 0$  overall.

Dan mogen we schrijven

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{z}{r_x}, \quad \epsilon_y = \frac{z}{r_y}, \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu} z \left( \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

terwijl volgens de meetkunde geldt

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2)$$

waarin  $r_x$  en  $r_y$  de kromtestralen zijn in het x-z- resp. y-z-vlak en  $w$  de doorbuiging is van het middenvlak in de positieve z-richting. Het is duidelijk uit (1) dat

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\text{dus} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

Als we de termen met  $\gamma_{zx}$  en  $\gamma_{zy}$  verwaarlozen, kunnen we de span-

ningsenergie direct opschrijven door integratie van (F.V.4) over de dikte (z loopt van  $-h/2$  tot  $+h/2$ )

$$W = \frac{1}{2} D \int_S \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dS, \quad (5)$$

terwijl de potentiële energie der belasting  $q(x,y)$  is

$$A_u^{(b)} = - \int_S q(x,y) w \, dS. \quad (6)$$

In (5) is de parameter  $D$  bepaald door

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (7)$$

Met behulp van de variatiemethode vinden we uit

$$\delta(W + A_u^{(b)}) = 0 \quad (8)$$

de plaatvergelijking

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}. \quad (9)$$

In de plaattheorie is het gebruikelijk de momenten als volgt te definiëren

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz, \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz, \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Opmerking

De momenten (10) zijn momenten per lengte-eenheid. Ze hebben de

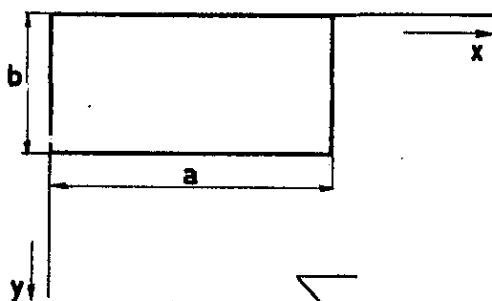
dimensie van een kracht. Bovendien komt hun definitie niet overeen met de in het overige deel van het dictaat gebruikte. Feitelijk moet bijv.  $M_x$ ,  $M_y$  heten etc. De gegeven definities hebben echter ingang gevonden in de literatuur.

Door uit (1) en (3) de spanningen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en  $\tau_{xy}$  te berekenen en in (10) in te vullen ontstaat

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

## 2. Eenvoudige oplossingen

### a. Rechthoekige plaat, enkelvoudig ondersteund



We ontwikkelen de belasting  $q$  in een dubbele Fourierreeks.

$$q(x,y) = \sum_{k,\ell} a_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b}. \quad (12)$$

We beperken de discussie tot de invloed van een term in (12):

$$q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

De randcondities zijn

$$x = 0 \text{ en } x = a : w = M_x = 0 \quad (13)$$

$$y = 0 \text{ en } y = b : w = M_y = 0. \quad (14)$$

De oplossing is klaarblijkelijk van de vorm

$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (15)$$

waarin



$$C = \frac{q_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} . \quad (16)$$

b. Cirkelvormige plaat, gelijkmatig belast

We transformeren nu de vergelijking (9) op poolcoördinaten en maken gebruik van de symmetrie dat  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ . Er komt

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D} , \quad (17)$$

waarvan de oplossing is

$$w = \frac{qr^4}{64D} + \frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \log \frac{r}{a} + c_3 , \quad (18)$$

waarin  $a$  de straal van de cirkel is en  $c_1$ ,  $c_2$  en  $c_3$  integratieconstanten.

Is de plaat ingeklemd, dan is

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 , \quad \text{voor } r = a \text{ en } r = 0 , \quad (19)$$

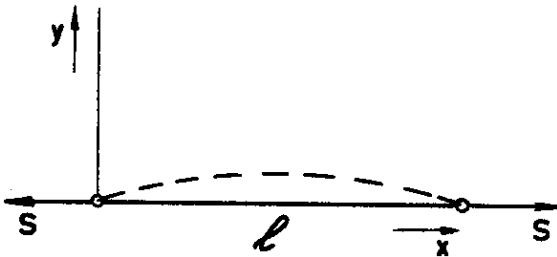
terwijl ook  $w = 0$  voor  $r = a$ . (20)

De oplossing (18) wordt

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2 . \quad (21)$$

De maximale doorbuiging

$$w_M = \frac{qa^4}{64D} . \quad (22)$$

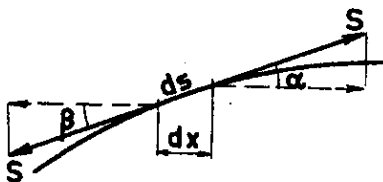
H. Elasto-dynamica van elementaire systemenI. De bewegingsvergelijkingen1. De snaar

Een snaar is een elastische draad, zonder buigstijfheid. Onder invloed van een "spanning" waaronder hij gerekt wordt, voert hij bewegingen uit om een evenwichtsstand.

We beperken ons tot kleine amplituden. De uitbuiging wordt gegeven door de functie  $y(x,t)$ . In de evenwichtsstand ligt de snaar langs de x-as van 0 tot  $l$ .

Opmerking

De "spanning"  $S$  van de snaar is geen werkelijke spanning doch een rekkracht.



We bekijken de beweging van een element  $ds$ , geprojecteerd op de x-as als  $dx$ .

Ter plaatse  $(x + dx)$  werkt de vertikale kracht  $S \sin \alpha \approx S \alpha$  en de horizontale kracht  $S \cos \alpha \approx S$ . Ter plaatse  $x$  werken resp.  $-S \sin \beta \approx -S \beta$  en  $S \cos \beta \approx S$ .

Bij kleine uitbuigingen is  $S$  constant langs de snaar en werkt er dus (in deze benadering!) geen horizontale kracht op  $ds$ . De vertikale kracht naar boven is

$$(S\alpha)_{x+dx} - (S\alpha)_x, \quad (1)$$

waarvoor we kunnen schrijven daar

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2)$$

$$\left(S \frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(S \frac{\partial y}{\partial x}\right)_x = S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (3)$$

Indien de massa van de snaar per lengte-eenheid  $\rho$  is, is massa maal versnelling voor dit element =

$$(\rho \cdot dx) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4)$$

eveneens naar boven gericht. Uit (3) en (4) vinden we volgens Newton

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

waarvoor we ook schrijven

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

met  $c = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$ . (7)

## 2. De balk

We gaan uit van de formule (G.I.31) voor de statische uitbuiging van de balk, welke in de hier gebruikte notatie wordt

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 y}{dx^2}) = q(x). \quad (8)$$

Indien de oppervlakte van de doorsnede ter plaatse  $x$ ,  $A(x)$  bedraagt en de dichtheid van de balk  $\rho$  is, kunnen we de traagheidskracht

$$- \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (9)$$

voor  $q dx$  invoeren, volgens d'Alembert. Dan wordt (8)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Dit is de bewegingsvergelijking voor de balk. Indien er nog krachten  $q(x,t)$  per lengte-eenheid op de balk werken, wordt (10) gegeneraliseerd tot

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t). \quad (11)$$

### 3. De plaat

Voor de bewegingsvergelijking van de plaat gaan we uit van (G.II.9), waarin we  $q(x,y) dx dy$  vervangen of supplementeren door de traagheidskracht

$$- \rho h dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (12)$$

vervangen. We vinden

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

In (12) en (13) is  $\rho$  de oppervlakedichtheid.

### 4. Afleidingen uit het principe van Hamilton

De vergelijkingen (6), (10) en (13) kunnen ook worden verkregen door uit te gaan van het principe van Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (14)$$

We geven alleen de afleiding voor het geval van de balk. Dan is

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (15)$$

terwijl

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (16)$$

Het principe van Hamilton wordt hier dus

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left\{ \rho A \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right\} = 0. \quad (17)$$

We kunnen, aangezien

$$\left. \begin{aligned} \delta \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \delta y, \\ \delta \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \delta y, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(17) nog in de vorm schrijven

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \left\{ \rho A \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta y - EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta y \right\} = 0. \quad (19)$$

We vormen nu (19) als volgt om:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \rho A \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta y &= \int_0^{\ell} dx \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial y}{\partial t} d \delta y = \\ &= \int_0^{\ell} dx \rho A \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_0^{\ell} dx \int_{t_1}^{t_2} \delta y \cdot \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Volgens het principe van Hamilton moet steeds

$$\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = 0, \quad (21)$$

waarmee (20) overgaat in

$$= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \delta y dx. \quad (22)$$

De tweede integraal in (19) wordt

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d \frac{\partial}{\partial x} \delta y &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right\} \Big|_0^{\ell} \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x} \delta y dx = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta y \right\} \Big|_0^{\ell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} d\delta y = \\
& - \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \delta y \right\} \Big|_0^{\ell} + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} \delta y \Big|_0^{\ell} \\
& - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} \delta y dx . \quad (23)
\end{aligned}$$

In (23) zijn

$$EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_0^{\ell} \text{ en } \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} \delta y \Big|_0^{\ell} ,$$

resp. de arbeid verricht door het moment aan de randen op de virtuele hoekverdraaiingen en die verricht door de dwarskracht op de virtuele verplaatsingen.

We eisen dat aan de randen geen energie wordt toegevoerd. Dan is

$$EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} \delta y \Big|_0^{\ell} = 0 , \quad (24)$$

terwijl uit (22) en (23) volgt, dat Hamilton's principe overgaat in

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \left\{ \rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} \right\} \delta y = 0 . \quad (25)$$

Daar (25) moet gelden voor willekeurige infinitesimale  $\delta y$  moet dus

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} + \rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

zijn. De vergelijking (26) is weer de vergelijking van de balk (10).

Op overeenkomstige wijze kunnen de andere bewegingsvergelijkingen worden afgeleid.

## II. Trilvormen

### 1. Algemeen

We bekijken van de snaar, balk en plaat harmonische trillingen, dat zijn trillingen van de vorm

$$y(x,t) = W(x) \cos \omega t, \quad (1)$$

$$\text{resp. } w(x,y,t) = W(x,y) \cos \omega t, \quad (2)$$

waarin  $\omega$  de hoekfrequentie is. Vullen we (1) in, in (6) en (10) en (2) in (13) dan ontstaan

$$\text{snaar: } \frac{d^2 W}{dx^2} + k^2 W = 0, \quad (3)$$

$$\text{balk: } \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - A \omega^2 W = 0, \quad (4)$$

$$\text{plaat: } \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{\rho k \omega^2}{D} W = 0. \quad (5)$$

In (3) is de grootte  $k$  ingevoerd door

$$k = \omega/c. \quad (6)$$

De problemen (3), (4) en (5) kunnen alleen worden opgelost, indien de randvoorwaarden gegeven zijn. Deze zijn homogeen. Daarom worden deze vraagstukken eigenwaardeproblemen. Een triviale oplossing is  $W = 0$ .

### 2. De snaar

De snaar is ingeklemd bij  $x = 0$  en  $x = \ell$ . Dus worden de randvoorwaarden voor (3)

$$x = 0; \quad x = \ell: W = 0. \quad (7)$$

De oplossing van (3) is

$$W = A \cos kx + B \sin kx. \quad (8)$$

Uit (7) volgt

$$A = 0$$

$$\text{en } B \sin k\ell = 0, \quad (9)$$

waaraan voldaan wordt door

$$B = 0; B \neq 0, k = \frac{n\pi}{\ell}, n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

De waarden (10) van  $k$  zijn de eigenwaarden. De eigenfuncties zijn

$$W = B \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (11)$$

waarin  $B$  onbepaald is.

### 3. De balk

We behandelen alleen de balk met  $EI = \text{constant}$ . Dan wordt (4)

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = 0, \quad (12)$$

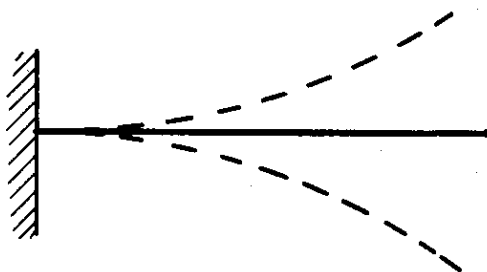
$$\text{met } k^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2. \quad (13)$$

Om (12) op te lossen moeten aan iedere rand twee randvoorwaarden worden gegeven, bv.

$$\left. \begin{array}{l} \text{opgelegd: } W = \frac{d^2 W}{dx^2} = 0, \\ \text{ingeklemd: } W = \frac{dW}{dx} = 0, \\ \text{vrij: } \frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{d^3 W}{dx^3} = 0. \end{array} \right\} \quad (14)$$

Natuurlijk zijn er tal van combinaties van (14) te maken.

#### Voorbeeld



We behandelen het probleem: ingeklemd, vrij.

De algemene oplossing van (12) is



$$W = A \sin kx + B \cos kx + C \sinh kx + D \cosh kx. \quad (15)$$

Uit de randvoorwaarden

$$x = 0 : W = \frac{dW}{dx} = 0, \quad (16)$$

$$x = \ell : \frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{d^3 W}{dx^3} = 0,$$

volgt dat  $W$  te schrijven is als

$$W = A [\sin kx - \sinh kx] + B [\cos kx - \cosh kx], \quad (17)$$

waarbij voor  $A$  en  $B$  de homogene vergelijkingen gelden

$$A(\sin k\ell + \sinh k\ell) + B(\cos k\ell + \cosh k\ell) = 0, \quad (18)$$

$$A(\cos k\ell + \cosh k\ell) + B(-\sin k\ell + \sinh k\ell) = 0.$$

Deze vergelijkingen hebben alleen niet-triviale oplossing, indien

$$\begin{vmatrix} \sin k\ell + \sinh k\ell & \cos k\ell + \cosh k\ell \\ \cos k\ell + \cosh k\ell & -\sin k\ell + \sinh k\ell \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

wat kan worden vereenvoudigd tot

$$\cos k\ell \cosh k\ell = -1, \quad (20)$$

een transcendente vergelijking met de oplossingen

$$k_1 \ell = 1,8751 \dots; k_2 \ell = 4,6941 \dots; k_3 \ell = 7,8548 \dots \quad (21)$$

De eigenfrequenties zijn

$$f_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \cdot \frac{k_n^2 \ell^2}{2\pi \ell^2}. \quad (22)$$

We bekijken ook golven langs een oneindige staaf.

Een lopende golf heeft de gedaante

$$W = e^{ikx} e^{-i\omega t} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)}, \quad (23)$$

dus de fasesnelheid is

$$c = \omega/k. \quad (24)$$

Met (13) wordt dat hier

$$c = \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}} \cdot \sqrt{\omega}, \quad (25)$$

dus: de fasesnelheid is evenredig met de wortel uit de frequentie. Golven met verschillende frequenties hebben dus ongelijke snelheid. We spreken van dispersie.

#### 4. De methode van Rayleigh voor de approximatieve berekening der eigenfrequenties

We bestuderen alleen de balkvergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \rho A \omega^2 W = 0. \quad (26)$$

Vermenigvuldigen we (26) met  $W$  en integreren we over  $x$  van 0 tot  $l$ , dan ontstaat

$$\int_0^l W \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx - \omega^2 \int_0^l \rho A W^2 dx = 0. \quad (27)$$

We vormen de eerste integraal in (27) door partiële integratie om

$$\begin{aligned} & \int_0^l W \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx = \\ & W \cdot \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^l - \frac{dW}{dx} \cdot \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^l \\ & + \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Bij natuurlijke randvoorwaarden zijn de eerste twee termen gelijk aan nul. Met (28) wordt (27)

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho A W^2 dx}. \quad (29)$$

We onderzoeken eerst de betekenis van (29). Met

$$y = W \cos \omega t \quad (30)$$

wordt de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (31)$$

gelijk

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^l \rho A W^2 dx, \quad (32)$$

terwijl de potentiële energie U wordt

$$U = \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (33)$$

De formule (29) drukt dus uit dat

$$\bar{T} = \bar{U}, \quad (34)$$

waarin  $\bar{T}$  de middelwaarde van T is over een periode, evenals  $\bar{U}$  die van U, op grond van

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Rayleigh's principe leert nu dat

$$\delta \omega^2 = 0. \quad (36)$$

We bewijzen dit met behulp van het principe van Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (37)$$

dat hier wordt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^l \rho A W^2 dx - \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \right\} = 0. \quad (38)$$

De variaties moeten steeds voldoen aan

$$\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = 0 \quad (39)$$

voor alle  $x$ . Dit wordt hier

$$\delta W(x) \cos \omega t_1 = \delta W(x) \cos \omega t_2 = 0. \quad (40)$$

We moeten dus  $t_1$  en  $t_2$  zo kiezen dat

$$\cos \omega t_1 = \cos \omega t_2 = 0. \quad (41)$$

We nemen bijv.

$$t_1 = \pi/2 \frac{1}{\omega}, \quad t_2 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\omega}. \quad (42)$$

We vullen (42) in (38) in en integreren over de tijd. Dan ontstaat de vergelijking

$$\delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \delta \int_0^l \rho A W^2 dx = 0. \quad (43)$$

Uit (29) volgt

$$\begin{aligned} \delta \omega^2 &= \frac{1}{\left[ \int_0^l \rho A W^2 dx \right]^2} \left\{ \int_0^l \rho A W^2 dx \cdot \delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \delta \int_0^l \rho A W^2 dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\int_0^l \rho A W^2 dx} \left\{ \delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \delta \int_0^l \rho A W^2 dx \right\} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

op grond van (43).

De waarde van  $\omega^2$ , zoals die bepaald wordt door (29) is dus stationnair tegenover kleine veranderingen in de waarden van  $W$ .

De laagste waarde van het quotient (29) geeft de grondfrequentie.

#### Voorbeeld

We zoeken opnieuw de grondfrequentie van een staaf, welke vrij-inge-

kleemd is. Een funktie, die aan de randvoorwaarden (16) voldoet is

$$W = c x^2 (6l^2 - 4lx + x^2) . \quad (45)$$

We vinden voor de approximatieve waarde van de grondfrequentie

$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{1}{l^4} \cdot 12,46 , \quad (46)$$

waaruit volgt

$$f = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{12,46} . \quad (47)$$

De exacte coëfficiënt is  $\sqrt{12,3623}$ .

We verbeteren nu de benadering als volgt. Indien de balk belast wordt door een geconcentreerde kracht op  $x = a$  is de doorbuiging

$$\left. \begin{aligned} W &= c(3ax^2 - x^3) , \quad 0 < x < a , \\ W &= ca^2(3x - a) , \quad a < x < l . \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Bij deze doorbuiging vinden we met "Rayleigh"

$$\omega^2 = \frac{12 EI}{\rho A l^4} \frac{1}{3\rho - 3\rho^2 + \rho^3 - \frac{2}{35} \rho^4} , \quad (49)$$

waarin

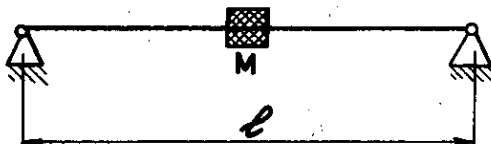
$$\rho = a/l . \quad (50)$$

We kiezen nu  $\rho$  zodanig dat  $\omega^2$  minimaal wordt. Het maximum van  $3\rho - 3\rho^2 + \rho^3 - \frac{2}{35} \rho^4$  ligt nabij  $\rho = 0,75$  en is ongeveer  $31/32$ .

Met deze waarde wordt (49)

$$\omega^2 = \frac{32}{31} \cdot 12 \frac{EI}{\rho A l^4} = \frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{1}{l^4} \cdot 12,39 . \quad (51)$$

### Voorbeeld



Gezocht wordt de eigenfrequentie van een opgelegde staaf van de lengte  $l$ , dichtheid  $\rho$ , oppervlak  $A$ , die in het midden een massa  $M$  draagt.

We proberen

$$W = cx(3\ell^3 - 4x^2), \quad 0 < x < \ell/2, \quad (52)$$

welke ingevoerd in de formule van Rayleigh

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{\ell} EI(W''')^2 dx}{\int_0^{\ell} \rho A W^2 dx + M W_c^2}, \quad (53)$$

waarbij  $W_c$  de doorbuiging in het midden is.

Invullen van (52) in (53) levert met  $m = \rho \ell A$

$$\omega^2 = \frac{EI}{\ell^3} \frac{48}{M + \frac{34}{70} m}. \quad (54)$$

De funktie (52) is de statische doorbuiging. We proberen ook de vrije trilvorm met  $M = 0$

$$W = \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (55)$$

welke oplevert

$$\omega^2 = \frac{EI}{\ell^3} \cdot \frac{\pi^4/2}{M + \frac{1}{2}m}. \quad (56)$$

De formules (54) en (56) zijn in redelijke overeenstemming.

### III. Plotseling aangrijpende lasten

#### 1. Het aanbrengen van een last

In de elasto-statica wordt stilzwijgend ondersteld, dat de optredende krachten langzaam worden aangebracht. We spreken van een quasi-statisch proces.

We bekijken het geval dat een puntlast  $P$  langzaam wordt aangebracht op een plaats waar de verplaatsing onder  $P$ , in de richting van  $P$ ,  $u$  bedraagt.  $P$  groeit aan tot  $P_0$ ,  $u$  tot  $u_0$ . We weten dat de arbeid, die  $P$  verricht is

$$A = \frac{1}{2} P_0 u_0 . \quad (1)$$

Wordt nu de belasting  $P_0$  plotseling aangebracht, dan is de arbeid, die  $P_0$  verricht tot aan de toestand  $u_0$ :

$$A = P_0 u_0 , \quad (2)$$

omdat  $P_0$  nu constant is geweest. In de toestand  $u_0$  heeft het lichaam de potentiële energie (1) :

$$U = \frac{1}{2} P_0 u_0 , \quad (3)$$

en tevens de kinetische energie  $T$ , welke het verschil van (2) en (1):

$$T = \frac{1}{2} P_0 u_0 . \quad (4)$$

Door de snelheid, die het lichaam heeft zal de deformatie nog groter worden. De verplaatsing  $u$  groeit verder van  $u_0$  tot  $u_1$ . Als gevolg van de opgewekte reactiespanningen komt het lichaam tot rust in  $u_1$ . Dan is  $T = 0$ . De kinetische energie (4) is dan ook omgezet in potentiële energie. We zien dus dat

$$u_1 = 2 u_0 , \quad (5)$$

een conclusie die we ook kunnen trekken uit het feit dat

$$A = P_0 u_0 = \frac{1}{2} P_0 u_1 . \quad (6)$$

Belangrijk is dat de deformatie veel groter kan worden dan statisch was voorzien. De bovengrens van de verhouding is 2. Door traagheid, demping en eindige krachtoverdracht kan de factor kleiner worden.

Het lichaam voert trillingen uit om de statische evenwichtstand en

komt tot rust nadat de beweging door dissipatie van energie is gedempt.

## 2. Stoten

We beperken ons tot stoten op elastische balken met de massa  $m$  en de lengte  $\ell$ . Indien een lichaam  $M$  met de snelheid  $v$  valt op een elastische balk, ontstaat een stoot. Gedurende de stoottijd, die zeer kort is, worden de lichamen elastisch vervormd en daarna zijn allerlei bewegingen mogelijk. Het kan voorkomen, dat het vallende lichaam terugveert, het kan ook dat het op de balk blijft liggen en samen met de balk verder beweegt. We zullen onderstellen dat het laatste het geval is, de botsing is onelastisch geweest. In ieder geval geldt de wet van het behoud van impuls

$$Mv = Mu_0 + \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} u(x, t_0) dx, \quad (7)$$

waarin  $u_0$  de snelheid is van het gemeenschappelijke raakpunt na de stoot,  $u(x, t_0)$  de snelheid van een willekeurig element direct na de stoot. We voeren de afkorting in

$$\bar{m} u_0 = \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} u(x, t_0) dx, \quad (8)$$

waarmee (7) overgaat in

$$Mv = (M + \bar{m}) u_0, \quad (9)$$

met de oplossing

$$u_0 = \frac{Mv}{M + \bar{m}}. \quad (10)$$

Om  $\bar{m}$  te bepalen, moeten we een onderstelling maken over de verdeling van de snelheden direct na de stoot over de balk. We nemen aan dat de snelheidsverdeling geheel conform de statische doorbuiging is, in een overeenkomstig statisch belastingsgeval. Dat wil zeggen we stellen

$$u(x, t_0) = u_0 \cdot f(x), \quad (11)$$

waarin  $f(x)$  de buiging is bij een eenheidsverplaatsing op de plaats van de stoot. Dan wordt dus

$$\bar{m} = \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx = m\eta', \quad (12)$$



Uit (12) en (10) volgt

$$u_0 = \frac{Mv}{M+m\kappa'} \quad (13)$$

met behulp waarvan uit (11) de gehele snelheidsverdeling, direct na de stoot volgt.

We berekenen nu ook de maximale doorbuiging. Direct na de stoot blijft de totale energie constant. Dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M u_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} u^2(x, t_0) dx + Mg w_{0 \max} \\ + \frac{mg}{\ell} \int_0^{\ell} w_{\max}(x) dx = \frac{c}{2} w_{0 \max}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

waarin  $w_{0 \max}$  de maximale doorbuiging is onder het stootpunt,  $w_{\max}(x)$  de maximale doorbuiging in een willekeurig punt en  $c$  een constante zo dat de potentiële energie  $U$  van de uiterste stand kan worden geschreven als

$$U = \frac{1}{2} c w_{0 \max}^2 \quad (15)$$

We hebben

$$w_{\max}(x) = w_{0 \max} \cdot f(x) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} u^2(x, t_0) dx &= \frac{u_0^2}{2} \cdot \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} f^2(x) dx = \\ &= \frac{mu_0^2}{2} \kappa'' \end{aligned} \quad (17)$$

Met (16) en (17) wordt (14)

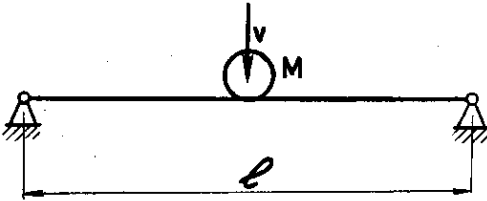
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_0^2 (M + m\kappa'') + (M + \kappa'm) g w_{0 \max} \\ = c/2 w_{0 \max}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

We voeren in de statische doorbuiging  $w_{0 \text{ st}}$ , volgens

$$w_{0 \text{ st}} = \frac{M+m\kappa'}{c} g \quad (19)$$

waarmee de oplossing van (18) wordt

$$w_{o \max} = w_{o \text{ st}} + \sqrt{w_{o \text{ st}}^2 + \frac{M^2 v^2}{c} \frac{M + m \kappa''}{(M + m \kappa')^2}} \quad (20)$$

Voorbeeld

Massa  $M$  valt met snelheid  $v$  op een balk van de lengte  $l$ , welke opgelegd is.  $M$  treft de balk in het midden.

De statische doorbuiging onder  $P$  is

$$w(x) = \frac{Px}{48EI} (4x^2 - 3l^2), \quad 0 \leq x \leq l/2 \quad (21)$$

waaruit volgt dat

$$\frac{w(x)}{w(l/2)} = f(x) = 3\left(\frac{x}{l}\right) - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \quad (22)$$

Hieruit volgt

$$\left. \begin{aligned} \kappa' &= \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx = 5/8, \\ \kappa'' &= \frac{1}{l} \int_0^l f^2(x) dx = 17/35. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

De grootste uitwijking wordt

$$w_{o \max} = w_{o \text{ st}} + \sqrt{w_{o \text{ st}}^2 + \frac{M^2 v^2}{c} \frac{M + 17/35 m}{(M + 5/8 m)^2}} \quad (24)$$

met  $c = \frac{48EI}{l^3} \left( = \frac{P}{w(l/2)} \right).$