

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# MECHANICA II<sub>o</sub>

Syllabus naar de Colleges van

Prof. Dr. J.B. Alblas

Handwritten text, possibly a signature or date, located at the top left of the page.

**Afd. Algemene Wetenschappen**

Handwritten number '110' with a horizontal line above and below it, located on the right side of the page.

**MECHANICA II**

SYLLABUS NAAR DE COLLEGES

VAN

**PROF. DR. J. B. ALBLAS**

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. M. H. E. WEYERS

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

## ENKELE (BIBLIOGRAFISCHE) NOTITIES

bij

### Mechanica IIo

Dit dictaat draagt de originele naam 'Mechanica II'. Inhoudelijk kan het gezien worden als een vervolg op 'Mechanica I'. Het vertoont grote overeenkomst met 'Toegepaste Mechanica'. Echter, uitsluitend gelet op uiterlijkheden als indeling en nummering van de bladzijden, lijkt dit niet het geval te zijn geweest: In de bibliotheek van de TUE is geen dictaat te vinden waar dit geschrift, gelet op genoemde uiterlijkheden, een vervolg op kan zijn. Wellicht is dit dictaat vóór 1960 geïmporteerd/meegebracht uit Delft.

JdG, 7 Juni 2005.

## Inhoudsbeschrijving *Mechanica II*:

X.	HET PRINCIPE VAN HAMILTON	X,1.
1.	Het principe van d'Alembert	X,1.
2.	Beginselen van de variatierekening	X,4.
3.	Toepassing op het principe van Hamilton	X,12.
XI.	ALGEMENE STATICA	XI,1.
1.	Het principe van de virtuele arbeid	XI,1.
2.	Het onvervormbare lichaam	XI,1.
3.	Het elastische vakwerk	XI,2.
4.	Het elastische lichaam, algemeen	XI,4.
5.	De grondformules der elasticiteitstheorie	XI,4.
6.	De elastische energie	XI,19.
7.	Bijzondere belastingsgevallen van de balk	XI,22.
8.	De arbeidsprincipes	XI,27.
9.	Wetten van Castigliano in de balkentheorie	XI,32.
10.	Directe methoden in de variatierekening	XI,37.
11.	Aanvulling van de spanningsleer	XI,49.
XII.	ELASTO-KINETICA, EIGENWAARDEN, EIGENFUNCTIES	XII,1.
1.	Inleiding	XII,1.
2.	De bewegingsvergelijkingen	XII,1.
3.	De trillingsvormen	XII,9.

(7 Juni 2005, JdG)

MECHANICA IIHOOFDSTUK X. HET PRINCIPE VAN HAMILTON

1. Het principe van d'Alembert is een differentiaalprincipe. We leiden nu af een integraalprincipe : het principe van Hamilton. We gaan weer uit van d'Alembert.

$$\delta A = \sum_{j=1}^n \{ \vec{K}_j^{(b)} - \frac{d}{dt} (m_j \vec{v}_j) \} \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (1)$$

Deze differentiaal gaan we nu over de tijd integreren van  $t_1$  tot  $t_2$ . Zo ontstaat

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \{ \vec{K}_j^{(b)} - \frac{d}{dt} (m_j \vec{v}_j) \} \cdot \delta \vec{r}_j dt = 0. \quad (2)$$

In het geval van een conservatief stelsel is

$$\vec{K}^{(b)} = - \text{grad } U, \quad (3)$$

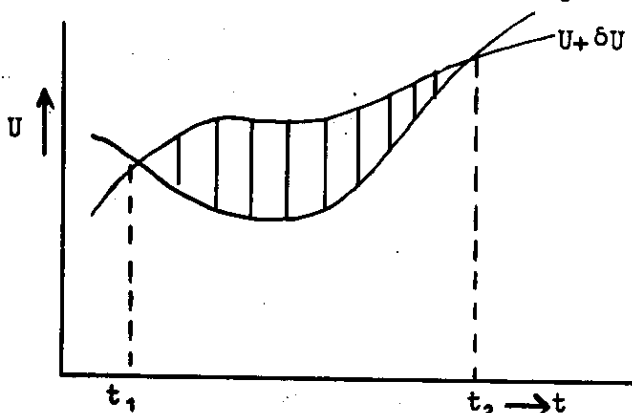
waardoor het eerste gedeelte wordt

$$\sum_{j=1}^n \vec{K}_j^{(b)} \cdot \delta \vec{r}_j = - \sum_{j=1}^n \text{grad}_j U \cdot \delta \vec{r}_j = - \delta U. \quad (4)$$

We hebben dus

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \vec{K}_j^{(b)} \cdot \delta \vec{r}_j = \int_{t_1}^{t_2} -\delta U dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} U dt, \quad (5)$$

waarbij gebruik is gemaakt van de mogelijkheid om te integraalteken en het variatieteken  $\delta$  te verwisselen. Dit zien we als volgt.



We tekenen  $U(t)$ , vervolgens  $U(t) + \delta U(t)$ .

$$\int_{t_1}^{t_2} U dt = \text{oppervlak onder } U.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (U + \delta U) dt = \text{oppervlak onder}$$

$$U + \delta U, \text{ dus } \int_{t_1}^{t_2} (\delta U) dt = \text{oppervlak tussen } U \text{ en } U + \delta U.$$

Doch de definitie is

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = \int_{t_1}^{t_2} (U + \delta U) dt - \int_{t_1}^{t_2} U dt, \quad (6)$$

dus beide grootheden zijn gelijk. We vormen nu het tweede stuk om

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (m_j \vec{v}_j) \cdot \delta \vec{r}_j dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (m_j \vec{v}_j \cdot \delta \vec{r}_j) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_j dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Het eerste stuk kan worden geïntegreerd. Er ontstaat

$$- \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j \cdot \delta \vec{r}_j \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (8)$$

Het tweede stuk wordt geïntegreerd onder gebruikmaking van

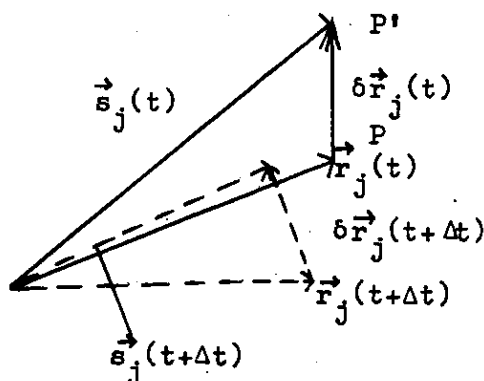
$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_j) = \delta \frac{d}{dt} \vec{r}_j = \delta \vec{v}_j. \quad (9)$$

De vergelijking (9) wordt als volgt bewezen :

P is op t gegeven door  $\vec{r}_j(t)$ .

De variatie brengt P → P' gegeven door  $\vec{s}_j(t)$

$$\vec{s}_j(t) = \vec{r}_j(t) + \delta \vec{r}_j(t). \quad (10)$$



In de loop van de tijd veranderen alle grootheden van waarde. We differentiëren (10)

$$\dot{\vec{s}}_j(t) = \dot{\vec{r}}_j(t) + \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_j) \quad (11)$$

of

$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_j) = \dot{\vec{s}}_j - \dot{\vec{r}}_j \quad (12)$$

$\dot{\vec{r}}_j$  is  $\equiv \vec{v}_j$ , terwijl  $\dot{\vec{s}}_j$  de snelheid is van het gevarieerde punt P'.  
Dat wil zeggen

$$\dot{\vec{s}}_j = \vec{v}_j + \delta \vec{v}_j \quad (13)$$

Doch dan is

$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_j) = \delta \vec{v}_j = \delta \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_j \right) \quad (14)$$

Het tweede stuk van (7) wordt nu

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_j \cdot dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j \cdot \delta \vec{v}_j \cdot dt = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{1}{2} m_j v_j^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt, \end{aligned} \quad (15)$$

waarin T de kinetische energie is van het stelsel.  
De gehele vergelijking (7) wordt dus

$$- \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m_j \vec{v}_j) \cdot \delta \vec{r}_j dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \sum_{j=1}^n (m_j \vec{v}_j) \cdot \delta \vec{r}_j \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (16)$$

terwijl het principe van d'Alembert tenslotte oplevert, vgl. (2), (4), (5), (16)

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = - \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \sum_{j=1}^n (m_j \vec{v}_j) \cdot \delta \vec{r}_j \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (17)$$

De variaties  $\delta \vec{r}_j$  zijn willekeurige infinitesimale functies van de tijd.  
We kunnen ze vrij kiezen. We beperken nu de keuze wat door te eisen, dat

$$\delta \vec{r}_j(t_1) = \delta \vec{r}_j(t_2) = 0, \quad (18)$$

voor alle  $j$ .  
Daardoor wordt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (19)$$

Dit is het principe van Hamilton. Het leert, dat indien de werkelijke baan wordt vergeleken met een naburige baan, voor de werkelijke baan de integraal

$\int_{t_1}^{t_2} L dt$  een stationnaire waarde heeft. Voorwaarde is, dat voor alle

variaties (18) geldt.

Dit principe is afgeleid voor conservatief-holonome systemen :

Conservatief : We hebben  $U$  ingevoerd.

Holonoom : bij niet-holonome systemen bestaan betrekkingen tussen de  $\delta r_j$ 's en bestaat  $U$  niet.

We schrijven nogmaals het variatieprincipe

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k; t) dt = 0. \quad (20)$$

## 2. Beginnelen van de variatierekening

We hebben vergelijkingen ontmoet van het type

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad \text{Wat betekent dit ?}$$

$L$  is een functie van  $q_1, q_2, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k; t$ . Indien de beweging bekend is, zijn deze grootheden bekende functies van de tijd, is  $L$  dus

een bekende functie van de tijd en is  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  een getal.

Stel nu dat we in plaats van de door de beweging werkelijk gerealiseerde grootheden  $q_i(t)$  nemen

$q_i(t) + \delta q_i(t)$ , waarin  $\delta q_i(t)$  een willekeurige (infinitesimale) functie van  $t$  is. De werkelijke baan wordt gerealiseerd door  $q_i(t)$ , naast deze baan leggen we als het ware een virtuële naburige baan, die niet gerealiseerd wordt (wiskundige abstractie).  
Hamilton's principe leert nu, dat voor al deze naburige banen, de werkelijke



baan gekarakteriseerd is door een stationnaire waarde van  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ ,

mits voor alle banen geldt  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . De berekening van de tweede variatie leert, dat  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  een minimum is. We gaan daar niet verder op in.

De maxima en minima van een functie  $f(x)$  worden bepaald uit

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = 0. \quad (21)$$

Deze vergelijking heeft getaloplossingen :  $x_1, x_2, \dots$ .

Problemen uit de variatierekening zijn van een geheel andere aard. We zoeken geen waarden, waarvoor de functie een extremum bezit, doch de vorm van de functie. Dus

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f \{y(x), y'(x), x\} dx = 0 \quad (22)$$

geeft ons het probleem de vorm van de functie  $y(x)$  te vinden, waarvoor de integraal stationnair wordt.

Stel dat deze opgave wordt opgelost door

$$y(x) = s(x). \quad (23)$$

We schrijven dan een willekeurige  $y(x)$  als

$$y(x) = s(x) + \epsilon t(x), \quad (24)$$

$$\text{met } t(x_1) = t(x_2) = 0. \quad (25)$$

$\epsilon$  is een willekeurige constante en  $t(x)$  is een willekeurige functie. We hebben

$$y'(x) = s'(x) + \epsilon t'(x) \quad (26)$$

en we beperken de keuze van de functies  $t(x)$  tot die klasse waarvoor  $\epsilon t'(x) \rightarrow 0$  als  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Dus niet bv.  $t(x) = \sin x/\epsilon^2$ .

Indien nu  $I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$ , wordt de grootheid  $I_s$  gegeven door

$$I_s = \int_{x_1}^{x_2} f(s, s', x) dx. \quad (27)$$

We variëren nu de functie  $s$  in (27), d.w.z. we nemen  $y = s + ct$ . Dan ontstaat

$$I_s + \delta I_s = \int_{x_1}^{x_2} f(s + ct, s' + ct', x) dx. \quad (28)$$

We nemen nu aan, dat de functie  $f$  continu-differentieerbaar is. Als  $c$  voldoende klein is (naurkromme) kunnen we ontwikkelen

$$\begin{aligned} f(s + ct, s' + ct', x) &= f(s, s', x) + c \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) + \\ &+ \frac{c^2}{2!} \left( t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2tt' \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s'} + t'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s'^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

$\frac{\partial f}{\partial s}$  betekent hier  $\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=s}$  etc.

Door (29) in (28) in te vullen en rekening te houden met (27) vinden we

$$\delta I_s = c \int_{x_1}^{x_2} \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) dx + \frac{c^2}{2!} (\dots) + \dots \quad (30)$$

Indien  $I_s$  een extremum moet zijn, moet voor kleine waarden van  $c$ ,  $\delta I_s$  definitief zijn, d.w.z.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) dx = 0. \quad (31)$$

De gezochte waarde van  $y(x)$ , nl.  $s(x)$  voldoet dus aan de vergelijking

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( t \frac{\partial f}{\partial y} + t' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0. \quad (32)$$

De voorwaarde (32) is noodzakelijk voor een stationnaire waarde. We vormen hem om door middel van

$$\int_{x_1}^{x_2} t' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = t \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} t \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx. \quad (33)$$

Op grond van (25), kan (32) dus geschreven worden als

$$\int_{x_1}^{x_2} t(x) \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} dx = 0. \quad (34)$$

Voor willekeurige  $t(x)$  wordt hieraan alleen voldaan indien

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad (35)$$

de vergelijking van Euler.

Dus :  $\int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$  is stationnair, indien  $y$  voldoet aan

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \text{ of uitgewerkt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (36)$$

Het karakter van het extremum wordt bepaald door hogere variaties te onderzoeken.

Voorbeelden :

1) Kortste afstand tussen twee punten van een vlak

lijnelement  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ .

$$I = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (37)$$

Nu is

$$f = \sqrt{1 + y'^2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (38)$$

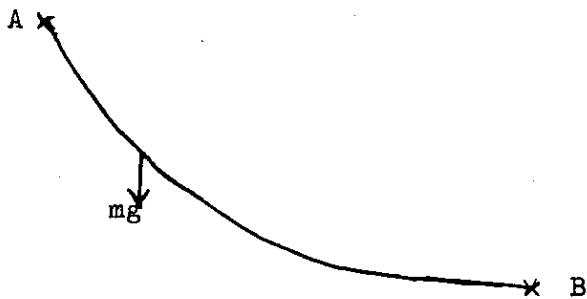
Dus

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \rightarrow y' = c_1 \quad y = c_1 x + d, \quad (39)$$

dus : de rechte lijn !

2) De brachistochrone : eerste probleem der variatierekening, opgelost in 1696 door Johann Bernouilli

probleem



punt glijdt langs de verticale kromme AB onder invloed van de zwaartekracht.

A en B zijn vast.

Gevraagd wordt : langs welke kromme is de tijd minimaal ?

Oplossing

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad \delta t = \delta \int_A^B \frac{ds}{v} = 0. \quad (40)$$

$$ds = dx \sqrt{1+y'^2} \quad ; \quad v = \sqrt{2g y}. \quad (41)$$

Daaruit

$$\delta \int_A^B \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx = 0. \quad (42)$$

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}. \quad (43)$$

Nu geldt

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c, \quad (44)$$

daar f de x niet bevat. Dus

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c \quad (45)$$

$$\text{of } y(1+y'^2) = 2c. \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \text{Als : } y' = \text{tg } \varphi \rightarrow y &= c_1(1 + \cos 2\varphi) \\ x &= a - c_1(2\varphi + \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (47)$$

Dit is de parameterform van de cycloïde !

Voortzetting. Meerdere onafhankelijke functies. We behandelen nu

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(y_1, y_2 ; y_1', y_2' ; x) dx = 0. \quad (48)$$

De oplossing is  $y_1 = s_1 ; y_2 = s_2$  . Indien

$$I_s = \int_{x_1}^{x_2} f(s_1, s_2 ; s_1', s_2' ; x) dx, \quad (49)$$

wordt

$$\begin{aligned} \delta I_s &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial s_1} \delta s_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2} \delta s_2 + \frac{\partial f}{\partial s_1'} \delta s_1' + \frac{\partial f}{\partial s_2'} \delta s_2' \right\} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \delta s_1 + \frac{\partial f}{\partial s'} d \delta s_1 \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial s} \delta s_2 + \frac{\partial f}{\partial s'} d \delta s_2 \right) = \quad (50) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial s_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial s_1'} \right) \delta s_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial s_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial s_2'} \right) \delta s_2 \right] dx, \end{aligned}$$

mits voldaan is aan

$$\delta s_1(x_1) = \delta s_2(x_1) = \delta s_1(x_2) = \delta s_2(x_2) = 0. \quad (51)$$

Overigens zijn de variaties onafhankelijk. Het is duidelijk dat  $\delta I_s = 0$ , alleen indien

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_1'} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_2'} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

De vergelijkingen (52) zijn weer de vergelijkingen van Euler voor het variatieprobleem.

### Meervoudige integralen

We beschouwen nu

$$\delta \iint f(x, y ; z ; p, q) \, dx dy = 0, \quad (53)$$

waarbij gezocht wordt  $z = z(x, y)$  en  $p$  en  $q$  zijn gegeven door

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} ; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (54)$$

Het extremum wordt bereikt voor

$$z = s(x, y). \quad (55)$$

We stellen

$$z = s(x, y) + \epsilon \zeta(x, y) \quad (56)$$

en ontwikkelen  $f(x, y ; z ; p, q)$ . Zo ontstaat

$$\begin{aligned} \delta I &= \iint f(x, y ; s + \epsilon \zeta ; p + \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x}, q + \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y}) \, dx dy - \\ &- \iint f(x, y ; s ; p, q) \, dx dy = \epsilon \iint \left( \zeta \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) dx dy + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (57)$$

Voor extreme waarden moet dus

$$\iint \left( \zeta \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) dx dy = 0, \quad (58)$$

zijn. We vormen (58) om.

We maken daartoe gebruik van het feit, dat voor dubbelintegralen geldt

$$\iint f(x,y) dx dy = \int dy \left\{ \int f(x,y) dx \right\}_{y=\text{const.}} = \quad (59)$$

$$\int dx \left\{ \int f(x,y) dy \right\}_{x=\text{const.}}$$

Voor de tweede term in (58) ontstaat zo

$$\iint \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} dx dy = \int dy \int \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} dx = \int dy \int \frac{\partial f}{\partial p} \cdot d\zeta =$$

$$\text{(partiële integratie)} = \int dy \left[ \frac{\partial f}{\partial p} \zeta \Big|_{\text{grenzen}} - \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} dx \right] \quad (60)$$

terwijl de derde term oplevert

$$\iint \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} dx dy = \int dx \int dy \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} = \int dx \int \frac{\partial f}{\partial q} d\zeta =$$

$$= \int dx \frac{\partial f}{\partial q} \zeta \Big|_{\text{grenzen}} - \int \zeta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} dy \quad (61)$$

We houden nu langs de integratierand

$$\zeta(x,y) = 0, \quad (62)$$

waardoor (58) onder gebruikmaking van (60) en (61) overgaat in

$$\iint \zeta \left[ \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right] dx dy = 0. \quad (63)$$

Aangezien  $\zeta$  een overigens willekeurige variatie is en (63) dus voor alle  $\zeta$  geldt, is

$$\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \quad (64)$$

We hebben dus de volgende stelling :  
De functie  $z(x,y)$ , die de dubbelintegraal

$\iint f(x,y ; z ; p,q) dx dy$ , stationnair maakt, is een oplossing van de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \quad (65)$$

De afgeleide resultaten kunnen op eenvoudige manier worden gegeneraliseerd tot : meerdere afhankelijke variabelen, meerdere onafhankelijke variabelen en hogere afgeleiden. We gaan daar niet verder op in.

Voorbeeld : De functie  $z$ , die

$$\iiint \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

minimaal maakt, voldoet aan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = 0, \quad (66)$$

de vergelijking van Laplace.

### 3. Toepassing op het principe van Hamilton

Hamilton's principe is

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n ; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n ; t) dt = 0. \quad (67)$$

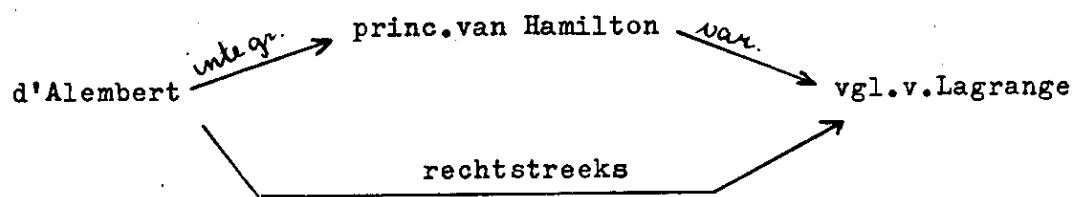


Volgens de vergelijkingen van Euler wordt dit probleem opgelost door

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1 \dots n), \quad (68)$$

de vergelijkingen van Lagrange ! Dit alles geldt voor een holonoom-conservatief stelsel.

We hebben dus



Ook omgekeerd geldt : Lagrange  $\rightarrow$  Hamilton.

HOOFDSTUK XI. ALGEMENE STATICA1. Het principe van de virtuële arbeid

Het principe van de virtuële arbeid geldt voor een evenwichtsstand. Het wordt hier wiskundig uitgedrukt door (vgl. VIII, 21)

$$\sum_{j=1}^n \vec{K}_j^{(b)} \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (1)$$

In dit hoofdstuk zullen we het principe van de virtuële arbeid toepassen zowel op onvervormbare als vervormbare systemen.

Indien het systeem vervormbaar is, treden zowel inwendige als uitwendige belastingskrachten op.

We hebben dus algemeen

$$\vec{K}_j^{(b)} = \vec{K}_j^u + \vec{K}_j^i \quad (2)$$

en kunnen dan voor (1) schrijven

$$\sum_{j=1}^n \vec{K}_j^u \cdot \delta \vec{r}_j + \sum_{j=1}^n \vec{K}_j^i \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \quad (3)$$

of afgekort

$$\delta A_u + \delta A_i = 0. \quad (4)$$

Hierin is  $\delta A_u$  de arbeid door de uitwendige krachten verricht bij een virtuële verplaatsing,  $\delta A_i$  de arbeid van de inwendige krachten.

De laatste arbeid is gelijk doch tegengesteld aan de in het lichaam opgehopte vervormingsarbeid

$$\delta A_i = - \delta W. \quad (5)$$

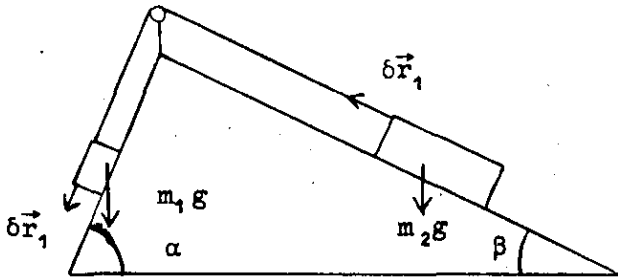
De vergelijking (4) wordt met (5)

$$\delta A_u = \delta W, \quad (6)$$

waarin wordt uitgedrukt dat de arbeid door de uitwendige krachten verricht, gelijk is aan de arbeid, die in het lichaam is opgehoopt.

2. Het onvervormbare lichaam

Hier is  $\delta A_i = 0$ . We geven een voorbeeld



Twee lichamen \$m\_1\$ en \$m\_2\$ bevinden zich ieder op een hellend vlak (hoeken \$\alpha\$, \$\beta\$). Ze zijn verbonden door een draad, welke over een wrijvingsloos katrol loopt. Gevraagd wordt : de evenwichtsvoorwaarde.

We verplaatsen \$m\_1\$ over \$\delta r\_1\$ naar beneden. Dan verplaatst \$m\_2\$ over \$\delta r\_1\$ naar boven.

We hebben dan

$$\delta r_1 \cdot m_1 g \sin \alpha - \delta r_1 \cdot m_2 g \sin \beta = 0, \tag{7}$$

welke voorwaarde geldt voor iedere toelaatbare waarde van \$\delta r\_1\$. Daaruit volgt dat

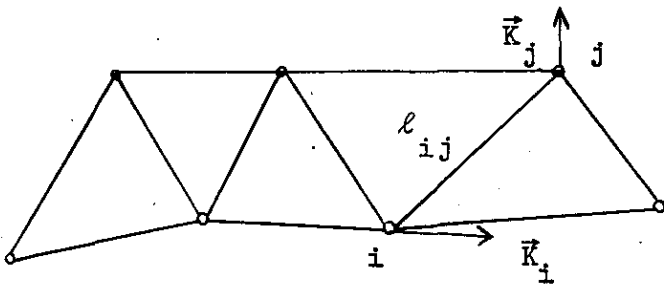
$$m_1 \sin \alpha = m_2 \sin \beta, \tag{8}$$

de voorwaarde voor evenwicht is.

### 3. Het elastische vakwerk

Van veel groter betekenis is de toepassing van het principe bij deformeerbare systemen. We beginnen met een eenvoudig geval : het elastische vakwerk. De knooppunten zijn \$i, j, \dots\$, de daartussen gelegen staven \$\ell\_{ij}, \dots\$.

In \$i\$ grijpt \$\vec{K}\_i\$ aan, in \$j\$ \$\vec{K}\_j\$, enz.



We geven de componenten van de krachten als volgt aan

$$\vec{K}_i (X_i, Y_i, Z_i),$$

terwijl de verplaatsingen in het \$i\$-de punt zijn

$$\vec{v}_i (u_i, v_i, w_i).$$

De uitwendige krachten hebben dus een potentiële energie

$$U_u = - \sum_{j=1}^n \vec{K}_j \cdot \vec{v}_j = - \sum_{j=1}^n (X_j u_j + Y_j v_j + Z_j w_j). \tag{9}$$

Onder invloed van de krachten worden de staven langer of korter :

$$l_{ij} \rightarrow l_{ij} + \Delta l_{ij} \quad (10)$$

De staafkrachten zijn nu volgens Hooke

$$S_{ij} = \frac{E_{ij} F_{ij}}{l_{ij}} \cdot \Delta l_{ij}, \quad (11)$$

waarin  $E_{ij}$  de elasticiteitsmodulus van de  $l_{ij}$ -staaf is en  $F_{ij}$  de doorsnede. Deze staafkrachten hebben ook een potentiële energie

$$U_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{E_{ij} F_{ij}}{l_{ij}} (\Delta l_{ij})^2. \quad (12)$$

Let goed op de tekens : de uitwendige krachten verrichten de arbeid, de inwendige energie neemt met de verlenging toe.

Volgens het principe van de virtuële arbeid is nu

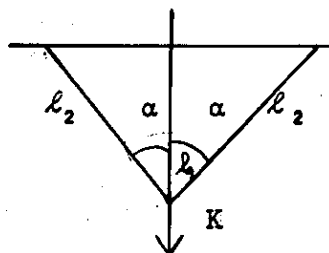
$$U = U_u + U_i = - \sum_{j=1}^n \vec{K}_j \cdot \vec{v}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{E_{ij} F_{ij}}{l_{ij}} (\Delta l_{ij})^2 \quad (13)$$

in evenwicht een minimum

$$\delta U = 0, \quad (14)$$

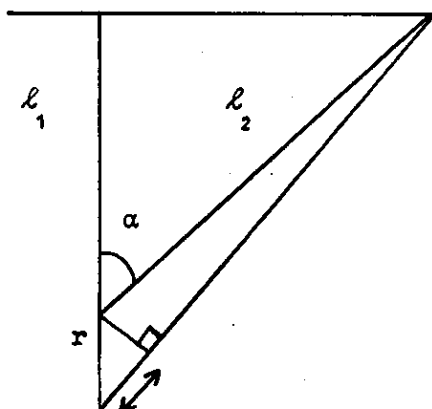
waarbij  $\vec{v}_j$  en  $\Delta l_{ij}$  niet onafhankelijk zijn.

Voorbeeld



Kracht aan drie staven,  
hoeken  $\alpha, \alpha$ , lengte  
 $l_1, l_2, l_2$ .

Indien de kracht  $\vec{K}$  een verplaatsing veroorzaakt ter grootte  $r$ , is  $\Delta l_1 = r$ .



Indien de verplaatsing klein is, is  $\Delta l_2 = r \cos \alpha$ .

Nemen we  $E$  en  $F$  constant voor de drie staven, dan geldt

$$U = - Kr + \frac{EF}{2} \sum_i \frac{(\Delta \ell_i)^2}{\ell_i^3}, \quad (15)$$

welke formule we gaan variëren

$$\delta U = - K \delta r + EF \sum_i \frac{(\Delta \ell_i)}{\ell_i^3} \cdot \delta (\Delta \ell_i). \quad (16)$$

Aangezien

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta \ell_1 &= r \\ \delta \Delta \ell_2 &= \cos \alpha \cdot \delta r, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

wordt (16)

$$\delta U = 0 = - K \delta r + EF \delta r \cdot \frac{r}{\ell_1} (1 + 2 \cos^3 \alpha). \quad (18)$$

Dit geldt voor alle toelaatbare  $\delta r$ , dus

$$r = \frac{K}{EF} \cdot \frac{\ell_1}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (19)$$

Voor de staafkrachten, bv.  $S$  vinden we

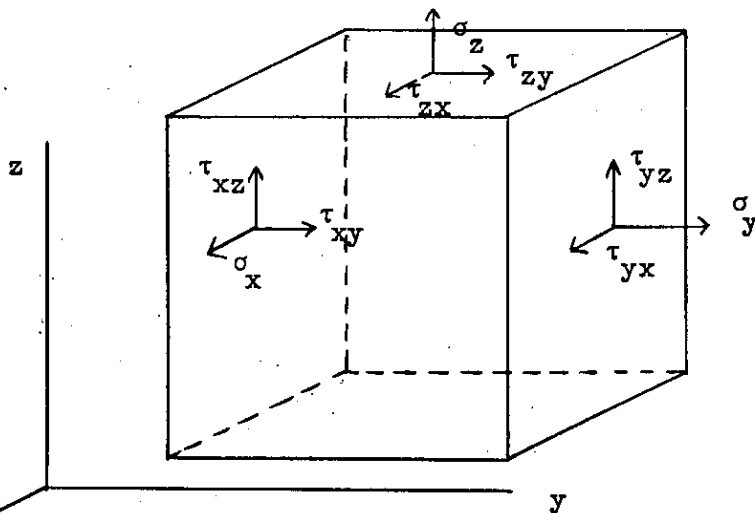
$$S_1 = \frac{EF}{\ell_1} r = \frac{K}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \text{ etc.} \quad (20)$$

#### 4. Het elastische lichaam, algemeen

Om de formule (6) toe te passen, moeten we uitdrukkingen vinden voor de elastische energie  $W$ . Om deze af te leiden, geven we eerst enige inleidende beschouwingen over spanningen en vervormingen.

#### 5. De grondformules der elasticiteitstheorie

a) Spanningen. Indien een lichaam door krachten wordt belast ontstaan spanningen in het inwendige van het lichaam. We denken het lichaam continu. Brengen we een denkbeeldig vlakje aan in het inwendige, dan oefenen de twee delen van het lichaam aan weerszijden van het vlakje krachten gelijk en tegengesteld op elkaar uit. De kracht op de eenheid van oppervlak uitgeoefend is de spanning.



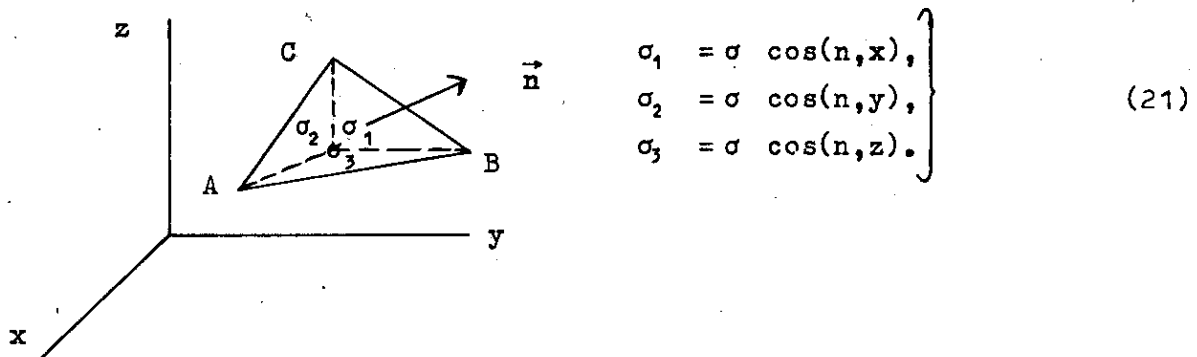
We kennen de spanningstoestand van het lichaam, indien we in ieder punt de drie krachten kennen, welke werken op drie loodrecht op elkaar staande vlakken.

We nemen een vast x-y-z-stelsel en kiezen drie vlakken  $\perp$  x-,  $\perp$  y-,  $\perp$  z-as. Op deze vlakken werken resp. de krachten  $\vec{K}_x, \vec{K}_y, \vec{K}_z$ . We delen deze krachten door het oppervlak waarop ze werken en ontbinden daarna ieder in de drie componenten langs de x-, y- en z-as. Zo ontstaan de spanningen

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}.$$

Er zijn dus  $3 \times 3 = 9$  spanningen, 3 ervan :  $\sigma_x, \sigma_y$  en  $\sigma_z$  werken loodrecht op het oppervlak en heten normaalspanningen, de 6 andere werken in de vlakken en heten schuifspanningen.

Indien deze grootheden de spanningstoestand volledig beschrijven moet het mogelijk zijn de spanningen te bepalen, welke werken op een willekeurig georiënteerd vlakje, gekarakteriseerd door de eenheidsnormaalvector  $n$ . Is het oppervlak van de driehoek ABC =  $\sigma$ , dan geldt



De spanning die op het vlakje werkt kan worden ontbonden in drie componenten  $P_x, P_y, P_z$ .

De krachten op het vlakje zijn dus  $P_x \sigma, P_y \sigma, P_z \sigma$ .

Het evenwicht in de x-richting geeft nu

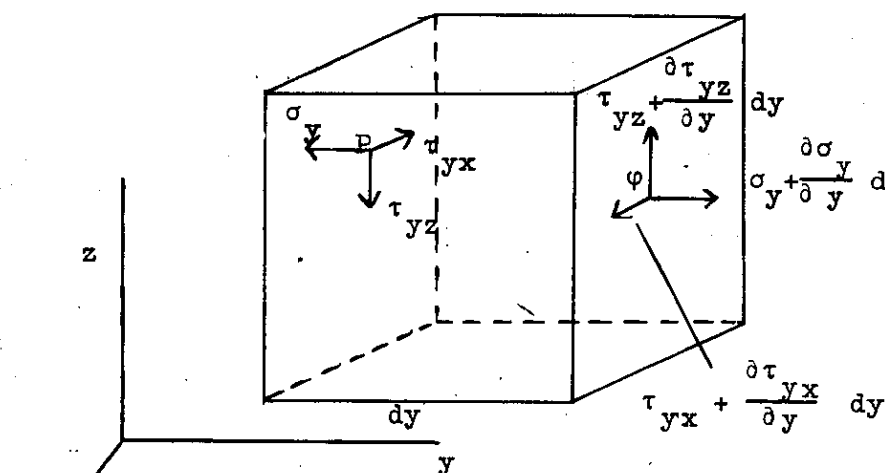
$$p_x \sigma - \sigma_x \sigma_1 - \tau_{yx} \sigma_2 - \tau_{zx} \sigma_3 = 0. \quad (22)$$

De vergelijking (22) is niet geheel exact. Hij geldt alleen voor een infinitesimale tetraeder. We vinden zo, met (21)

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx} \cos(n,y) + \tau_{zx} \cos(n,z), \\ p_y &= \tau_{xy} \cos(n,x) + \sigma_y \cos(n,y) + \tau_{zy} \cos(n,z), \\ p_z &= \tau_{xz} \cos(n,x) + \tau_{yz} \cos(n,y) + \sigma_z \cos(n,z). \end{aligned} \quad (23)$$

b) De evenwichtsvergelijkingen

In het algemeen zullen de spanningen van punt tot punt veranderen. We bekijken een infinitesimale kubus



De waarden in het punt  $P(x,y,z)$  zijn

$$\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}.$$

In  $Q(x,y + dy,z)$  zijn deze waarden

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy, \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy, \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy.$$

De kracht in de y-richting door deze vlakken is

$$\left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_y dx dz = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy dz. \quad (24)$$

De twee vlakken  $\perp$  de x-as geven samen een kracht

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dydz - \tau_{xy} dydz = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz, \quad (25)$$

terwijl de vlakken  $\perp$  z-as bijdragen

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy dz. \quad (26)$$

Is er nog een volumekracht Y per eenheid van volume, dus op het element Y dx dy dz, dan wordt de evenwichtsvergelijking

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0. \quad (27)$$

De drie evenwichtsvergelijkingen van de krachten in de x-, y- en z-richting leveren zo op

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

De vergelijkingen (28) geven het evenwicht voor de translatie. Doch ook de momenten moeten in evenwicht zijn : er is geen rotatie ook.

Het moment om een as door het midden van de kubus // de z-as is voor de getekende spanningen

$$\begin{aligned} \tau_{yx} \cdot dx dz \cdot \frac{1}{2} dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz \cdot \frac{1}{2} dy = \\ = \tau_{yx} dx dy dz + O(dx dy dz \cdot dy) \end{aligned} \quad (29)$$

De x-vlakken leveren ook een moment. Het is

$$- \tau_{xy} \cdot dx dy dz + O(\dots) . \quad (30)$$



Daaruit volgt dat  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  en algemeen

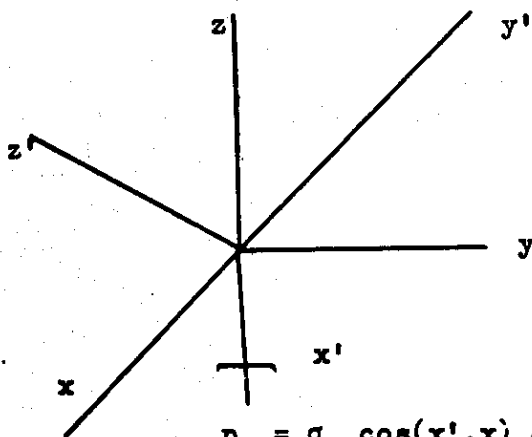
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (31)$$

Er zijn dus zes onafhankelijke spanningscomponenten ; de spanningstensor is symmetrisch.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{is symmetrisch.}$$

c) Het karakter van de spanningen

De spanningscomponenten vormen een tensor. Indien we de assen  $x, y, z$  draaien  $\rightarrow x', y', z'$ , transformeren de tensorcomponenten zich op de bekende wijze. Een dergelijke transformatie laat zich licht uitvoeren met behulp van (23).



We hebben  $x, y, z \rightarrow \sigma_x$  etc.  
 Transformeren  $x', y', z'$ .

Vlak  $\perp x'$  ! Dan is

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos(x', x) + \tau_{xy} \cos(x', y) + \tau_{xz} \cos(x', z) \\ p_y &= \tau_{yx} \cos(x', x) + \sigma_y \cos(x', y) + \tau_{yz} \cos(x', z) \\ p_z &= \tau_{zx} \cos(x', x) + \tau_{zy} \cos(x', y) + \sigma_z \cos(x', z) \end{aligned} \right\}$$

(32)  
*antwoorden!*

De spanningscomponenten in de accenten zijn dus

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= p_x \cos(x', x) + p_y \cos(x', y) + p_z \cos(x', z) = \\ &= \sigma_x \cos^2(x', x) + 2\tau_{xy} \cos(x', y) \cos(x', x) + 2\tau_{xz} \cos(x', z) \cos(x', x) + \\ &+ \sigma_y \cos^2(x', y) + 2\tau_{zy} \cos(x', z) \cos(x', y) + \sigma_z \cos^2(x', z). \text{ enz.} \end{aligned} \quad (33)$$

Op gelijke wijze vinden we de transformatieformules voor de andere componenten. Vergelijk de transformatie van de traagheidscomponenten.

We vragen nu of er vlakken zijn, waar de spanning alleen normaal is, zgn. hoofdvlakken.

Daar geldt, indien  $\sigma$  de normaalspanning is en  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de hoeken van het vlak

$$p_x = \sigma \cos \alpha ; p_y = \sigma \cos \beta ; p_z = \sigma \cos \gamma , \quad (34)$$

en dus

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma &= 0, \\ \tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma &= 0, \\ \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

welke vergelijkingen alleen dan oplossingen hebben, indien de determinant = 0 is, dus indien

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (36)$$

waaruit de waarden van de hoofdspanningen worden bepaald. De hoofdvlakken staan loodrecht op elkaar.

We kunnen de vergelijking (36) schrijven als

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0, \quad (37)$$

waarbij  $J_1$ ,  $J_2$  en  $J_3$  zijn gedefinieerd door

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (38)$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \quad (39)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} . \quad (40)$$

Aangezien bij een draaiing van het assenkruis  $\sigma$  dezelfde waarde behoudt, zijn  $J_1$ ,  $J_2$  en  $J_3$  invariant tegenover draaiingen.

d) De verplaatsingen

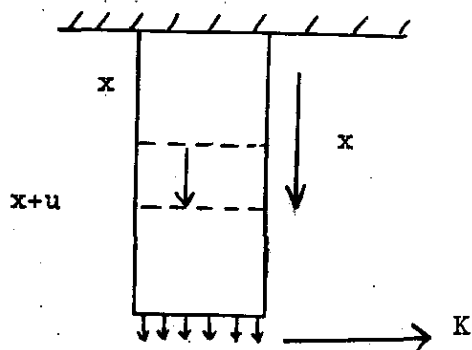
Indien een elastisch lichaam door krachten wordt belast zal een elementje  $dx dy dz$  ter plaatse  $(x, y, z)$  een verplaatsing ondergaan. We geven deze aan door de drie componenten  $u, v, w$ . Het is duidelijk, dat in het algemeen

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z) , \\ v &= v(x, y, z) , \\ w &= w(x, y, z) , \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

van plaats tot plaats veranderen. We hebben te doen met een verplaatsingsveld. Indien het verplaatsingsveld bekend is, kennen we de gehele vervormingstoestand van het lichaam.

e) De vervormingen

1. eendimensionaal



Stel we hebben  $u = u(x)$ ,  $v = w = 0$ , een eendimensionaal verplaatsingsveld. Dit wordt bij benadering verkregen, indien een staaf gelijkmatig wordt belast.

Ter plaatse  $x$  is  $u = u(x)$ , ter plaatse  $x + \Delta x$  is  $u = u(x + \Delta x)$ .

De lengte van het elementje  $\Delta x$  wordt dus

$$[x + \Delta x + u(x + \Delta x)] - [x + u(x)] = \Delta x + u(x + \Delta x) - u(x).$$

De verlenging is

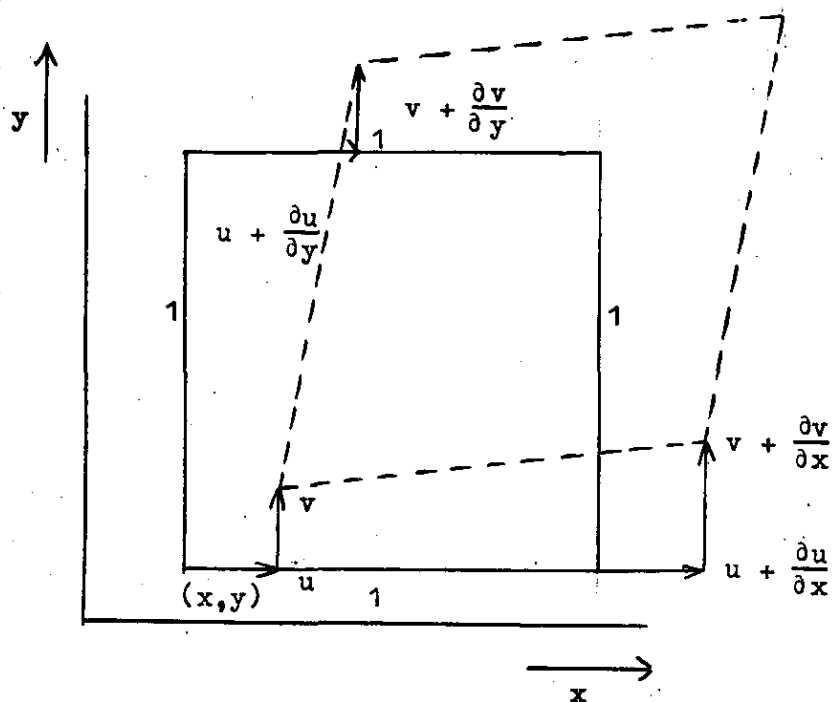
$$u(x + \Delta x) - u(x) = \frac{du}{dx} \Delta x + \dots \quad (42)$$

De specifieke verlenging  $(\frac{\Delta l}{l})$  wordt  $\epsilon_x = \frac{du}{dx} + \dots$ , wat voor  $\Delta x \rightarrow 0$  overgaat in

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (43)$$

Deze relatieve lengteverandering is een maat voor de vervorming of de rek.

2. Tweedimensionaal



We hebben nu

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) ; \\ v &= v(x,y) ; \\ w &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

We bekijken een element.  
In  $(x,y)$  zijn  $(u,v)$  gegeven.  
Dan is in  $(x + \Delta x, y)$

$$u \rightarrow u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$$

$$v \rightarrow v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

en in  $(x, y + \Delta y)$

$$u \rightarrow u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

$$v \rightarrow v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$$

Het vierkantje krijgt nu door de vervorming deze vorm

Daarbij geldt, dat

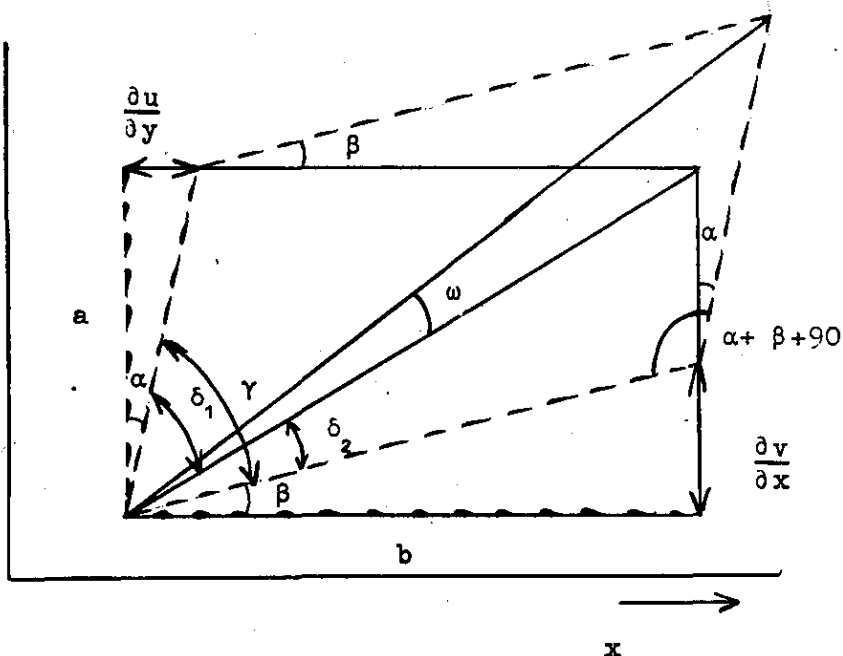
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial y} : a \quad (45)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial v}{\partial x} : b,$$

$$\text{met } a = 1 + \frac{\partial v}{\partial y} ;$$

$$b = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (46)$$

of voor het elementje  $(\Delta x, \Delta y)$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}{\Delta y \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)} ; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x}{\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)} . \quad (47)$$

Klaarblijkelijk is de rek in de x-richting :  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ , die in de y-richting

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} . \quad (48)$$

We nemen nu steeds aan, dat  $\epsilon_x$  en  $\epsilon_y \ll 1$  zijn. Dan worden

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial y} ; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial v}{\partial x} , \quad \text{of} \quad (49)$$

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y} ; \quad \beta = \frac{\partial v}{\partial x} . \quad (50)$$

Het vierkantje is niet alleen in de x- en y-richting gerekt, doch heeft ook een afschuiving ondergaan : de hoek 90° is nu geworden

$$\gamma = 90^\circ - (\alpha + \beta) .$$

Een maat voor de afschuiving is deze afwijking van 90° :

$$\gamma_{xy} = (\alpha + \beta) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} . \quad (51)$$

Doch het vervormde elementje is ook nog gedraaid over een hoek  $\omega$ . Het is de draaiingshoek van de diagonaal van het (oorspronkelijke) vierkantje.

Het is duidelijk dat

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 45^\circ - \alpha , \\ \delta_2 &= 45^\circ - \beta . \end{aligned} \quad (52)$$

Nu is dus

$$\begin{aligned} 2(\delta_2 + \omega) + \alpha + \beta + 90^\circ &= 180 . \\ 2\omega + 90^\circ - 2\beta + 90^\circ + \alpha + \beta &= 180 \\ \omega = \frac{\beta - \alpha}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) . \end{aligned} \quad (53)$$

Hiermede is de waarde van de hoek  $\omega$  berekend. We kennen er ook een teken aan toe

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (54)$$

in het getekende geval dus negatief ( $= -\omega$ ).

### 3. Driedimensionaal

In drie dimensies hebben drie normale verplaatsingen  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ , plaats, gegeven door

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (55)$$

drie afschuivingen

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (56)$$

en drie rotaties

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) ; \quad \omega_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) ; \quad \omega_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (57)$$

We hebben 9 afgeleiden van de verplaatsingen. We schrijven ze in een matrix. Deze matrix splitsen we in een symmetrisch en een anti-symmetrisch deel.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{xy} & -\omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & -\omega_{yz} & 0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

De vervormingstensor is dus een symmetrische tensor.

f) De compatibiliteitsvergelijkingen

We vinden door differentiatie

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} . \quad (59)$$

Op volkomen gelijke wijze zijn nog vijf andere betrekkingen af te leiden voor de vervormingen. We noemen deze betrekkingen de compatibiliteitsvergelijkingen. Zij vormen de voorwaarden waaraan moet worden voldaan, opdat de uit een stelsel spanningen afgeleide vervormingen inderdaad kunnen worden beschouwd als de afgeleiden van de verplaatsingen. Juist in de zogenaamde technische mechanica wordt niet steeds aan deze voorwaarden voldaan.

Het volledige stelsel compatibiliteitsvoorwaarden is

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} , \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} , \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} . \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) , \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) , \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) . \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

g) Het verband tussen spanningen en deformaties

We beschouwen alleen een homogeen isotroop lichaam, dat de wet van Hooke volgt.

Heel ruw beschouwd leert de wet van Hooke, dat de relatieve

lengteverandering  $\frac{\partial l}{l}$  van een staaf evenredig is met de rekkracht. Wij zeggen dat de wet van Hooke geldt, indien een lineair verband bestaat tussen spanningen en deformaties.

Een homogeen, isotroop lichaam heeft de volgende eigenschappen :  
 Een normale spanning kan geen afschuiving veroorzaken in hetzelfde coördinaten-systeem.

Een schuifspanning kan geen rek of druk veroorzaken in hetzelfde coördinaten-systeem.

Een schuifspanning geeft alleen maar afschuiving in zijn eigen vlak.

Dus

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= F_1(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) , \\ \epsilon_y &= F_2(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) , \\ \epsilon_z &= F_3(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) , \\ \gamma_{xy} &= F_4(\tau_{xy}) , \\ \gamma_{yz} &= F_5(\tau_{yz}) , \\ \gamma_{xz} &= F_6(\tau_{xz}) . \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

waarin de functies  $F_1, \dots, F_6$  lineair zijn, en waarvan de vorm moet worden bepaald.

We hebben  $\epsilon_x = a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z$ .

Het is duidelijk op grond van de isotropie, dat  $a_2 = a_3$ . Daarom schrijven we

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (63)$$

waarin  $E$  de modulus van Young is en  $\nu$  Poisson's constante (dwarscontractie). Op grond van de isotropie geldt nu tevens

$x \rightarrow y ; y \rightarrow z ; z \rightarrow x$  etc.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] , \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] . \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

De afschuiving wordt gegeven door



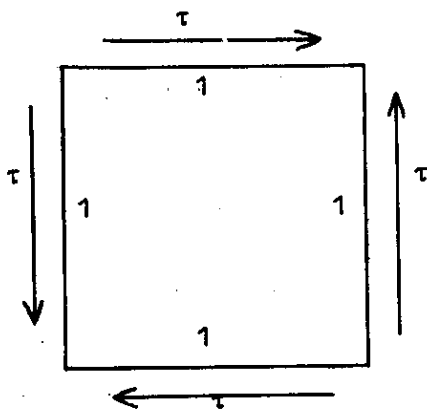
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad (65)$$

en weer door de isotropie

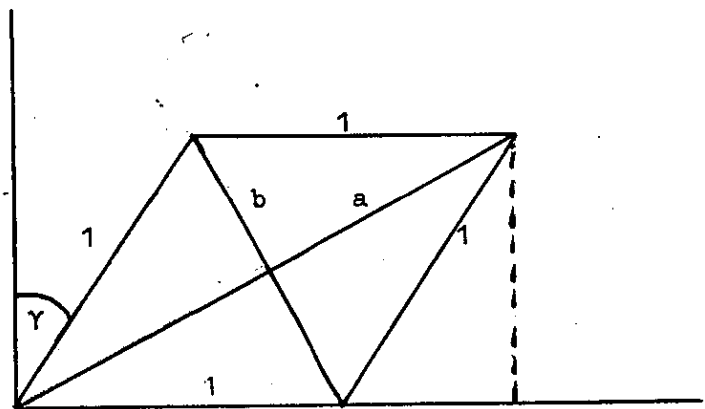
$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Hierin is  $G$  de afschuifmodulus.

Schijnbaar hebben we drie constanten  $E$ ,  $\nu$  en  $G$ . Er bestaat evenwel een verband tussen deze. Om dit af te leiden beschouwen we de afschuiving van een vierkantje.



Afschuifhoek  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ .



$$\sin \gamma \approx \gamma$$

Voorts is

$$\begin{aligned} a^2 &= (1 + \sin \gamma)^2 + 1 = (1 + \gamma)^2 + 1 \\ b^2 &= (1 - \sin \gamma)^2 + 1 = (1 - \gamma)^2 + 1 \end{aligned} \quad (67)$$

of

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} (1 + \gamma/2) \\ b &= \sqrt{2} (1 - \gamma/2). \end{aligned} \quad (68)$$

De diagonaal  $a$  is gerekt. De rek is

$$e_{x'} = \frac{\sqrt{2} (1 + \gamma/2) - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \gamma/2, \quad (69)$$

terwijl de compressie van  $b$  is

$$\epsilon_{y'} = -\gamma/2, \quad (70)$$

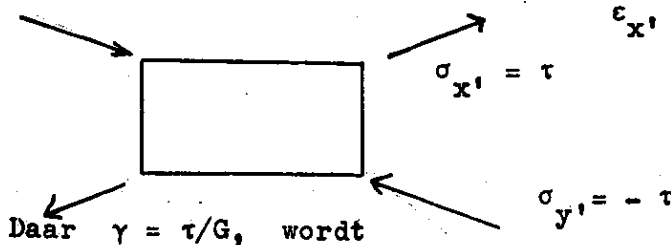
waarbij het  $x', y'$  stelsel 45 graden gedraaid is t.o.v. het  $x, y$ -stelsel. Met behulp van de transformatieformules voor de spanningen zijn nu uit  $\tau$  de  $\sigma_{x'}$  en  $\sigma_{y'}$  te berekenen. We vinden

$$\sigma_{x'} = \tau \quad ; \quad \sigma_{y'} = -\tau, \quad (71)$$

zodat zuivere afschuiving dus gelijk is aan trek en druk onder 45°.

Daaruit volgt echter dat

$$\epsilon_{x'} = \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{E} (\sigma_{x'} - \nu \sigma_{y'}) = \frac{\tau}{E} (1 + \nu). \quad (72)$$



$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

### h) De differentiaalvergelijkingen

De onbekenden : 6 spanningen, 6 deformaties en 3 verplaatsingen hangen als volgt samen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad (74)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad (75)$$

$$\left. \begin{aligned} E \epsilon_x &= \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) , \\ E \epsilon_y &= \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) , \\ E \epsilon_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) , \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

$$\left. \begin{aligned} G \gamma_{xy} &= \tau_{xy} , \\ G \gamma_{yz} &= \tau_{yz} , \\ G \gamma_{zx} &= \tau_{zx} , \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

in totaal 15 vergelijkingen voor de 15 onbekenden. We kunnen de 12  $\epsilon$ 's,  $\gamma$ 's,  $\sigma$ 's en  $\tau$ 's elimineren en krijgen dan de drie differentiaalvergelijkingen voor de verplaatsingen

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0 , \\ \Delta v + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0 , \\ \Delta w + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0 , \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

waarin  $\Delta$  de operator van Laplace is

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (79)$$

en  $e$  staat voor

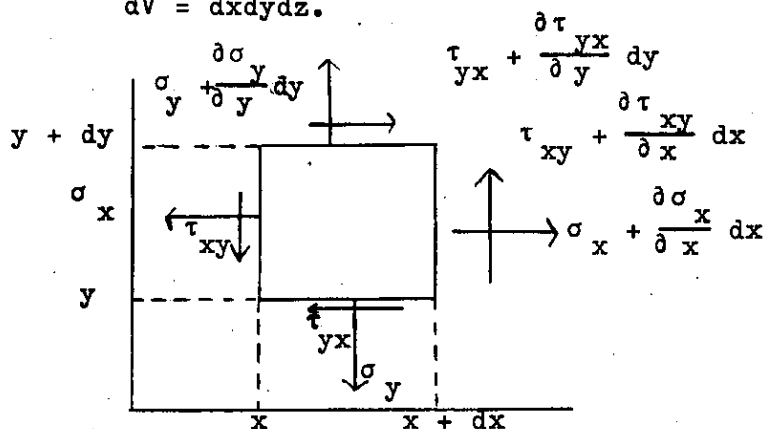
$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} . \quad (80)$$

De vergelijkingen (78) vormen drie simultane partiële differentiaalvergelijkingen voor de verplaatsingen ( $u, v, w$ ). De oplossing van deze vergelijkingen onder geschikte randvoorwaarden levert de oplossing van een elasticiteitsprobleem.

6. De elastische energie

a) Het principe van de virtuele arbeid.

We nemen aan, dat, onder invloed van uitwendige krachten het lichaam vervormt. We laten nu kleine virtuele verplaatsingen  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  op de bestaande verplaatsingen toe. Bij deze virtuele verplaatsingen verrichten de spanningen arbeid. Deze arbeid berekenen we voor een volumelementje  $dV = dx dy dz$ .



De door de inwendige krachten verrichte arbeid is  $-\delta A_i^{(b)} = +\delta A_u^{(b)}$ , de door de uitwendige krachten verrichte arbeid, op grond van het principe van de virtuele arbeid. We hebben dus voor het volumelement  $dV = dx dy dz$

$$\begin{aligned} \delta(dA_u^{(b)}) &= \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz \left[\delta u + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dx\right] - \sigma_x dy dz \cdot \delta u \\ &+ \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dz dx \left[\delta v + \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) dy\right] - \sigma_y dz dx \cdot \delta v \\ &+ \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dx dy \left[\delta w + \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) dz\right] - \sigma_z dx dy \cdot \delta w \\ &+ \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy dz \left(\delta v + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) dx\right) - \tau_{xy} dy dz \cdot \delta v \\ &+ \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dz dx \left(\delta w + \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) dy\right) - \tau_{yz} dz dx \cdot \delta w \\ &+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy \left(\delta u + \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) dz\right) - \tau_{zx} dx dy \cdot \delta u \\ &+ \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\right) dy dz \left(\delta w + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx\right) - \tau_{xz} dy dz \cdot \delta w \\ &+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dz dx \left(\delta u + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) dy\right) - \tau_{yx} dz dx \cdot \delta u \\ &+ \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dx dy \left(\delta v + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) dz\right) - \tau_{zy} dx dy \cdot \delta v = \end{aligned}$$

$$d(\delta A) =$$

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \delta v + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) + \right. \\ & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta w + \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v + \tau_{yx} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta u + \\ & \tau_{xz} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \delta w + \tau_{zx} \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta u + \\ & \left. \tau_{yz} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \delta w + \tau_{zy} \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \delta v \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (81)$$

Passen we (81) toe op een willekeurige translatie van het gedeformeerde lichaam als geheel, dan zijn  $\delta u$ ,  $\delta v$  en  $\delta w$  voor alle punten constant, dus  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  van deze grootheden zijn dan 0. Doch dan zijn ook

$$\delta A_i^{(b)} = \delta A_u^{(b)} = 0 \quad (82)$$

en we hebben

$$\begin{aligned} 0 = & \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \delta u + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \delta v + \\ & \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \delta w, \end{aligned} \quad (83)$$

waaruit de evenwichtsvergelijkingen (28) volgen. De vergelijkingen (31) volgen uit de virtuele verdraaiingen om x, y en z-as.

Met behulp van de betrekkingen (83) en (28) wordt de vergelijking (81) voor willekeurige virtuele verplaatsingen

$$\begin{aligned} d(\delta A_u^{(b)}) = & (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \\ & \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz, \end{aligned} \quad (84)$$

en de totale virtuele arbeid verricht door de uitwendige krachten wordt

$$\begin{aligned} \delta A_u^{(b)} = & \int_{vol} dV (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \\ & \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}). \end{aligned} \quad (85)$$

$$\text{We weten dat } \delta A_u^{(b)} = \delta W, \quad (86)$$

de potentiële elastische energie,

$$\delta W = \int_{vol} dV (\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}). \quad (87)$$

We voeren in de elastische energie per volumeenheid :

De specifieke elastische energie  $W_s$

$$\delta W_s = \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}. \quad (88)$$

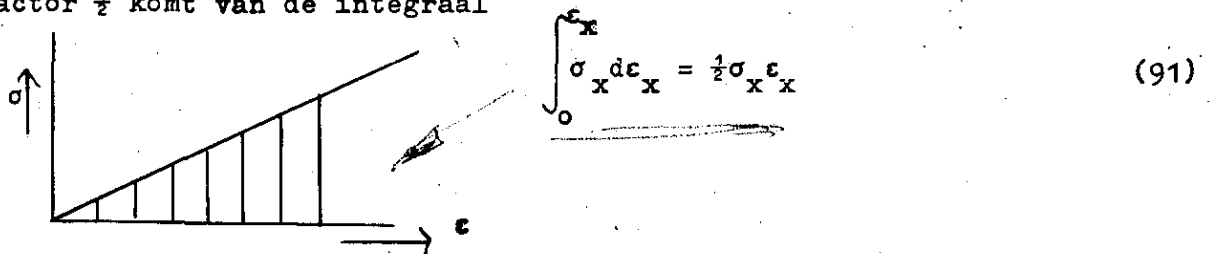
We nemen nu voor de virtuele deformaties de werkelijk optredende, indien de spanningen toenemen en beschouwen dan (88) als een vorm voor de differentiaal

$$dW_s = \sigma_x d\epsilon_x + \dots + \tau_{xz} d\gamma_{xz}. \quad (89)$$

Op grond van het lineaire verband dat bestaat tussen spanningen en deformaties, kan (89) worden geïntegreerd tot

$$W_s = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (90)$$

De factor  $\frac{1}{2}$  komt van de integraal



Formule (90) drukt uit dat de specifieke energie de superpositie is van de bij elke spanning behorende energieën. Dit is de wet van Clapeyron.

We hebben voorts, indien we  $\epsilon$  en  $\gamma$  uitdrukken in de spanningen volgens (63) en (66)

$$W_s = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)) + \frac{1}{2} G (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (92)$$

waaruit weer volgt dat

$$\epsilon_x = \frac{\partial W_s}{\partial \sigma_x} \dots \gamma_{xy} = \frac{\partial W_s}{\partial \tau_{xy}} \dots, \quad (93)$$

maar ook, dat, na invoering van de deformaties in (92)

$$\sigma_x = \frac{\partial W_s}{\partial \epsilon_x} \dots \tau_{xy} = \frac{\partial W_s}{\partial \gamma_{xy}} \dots \quad (94)$$

We geven nog even de  $W_s$  als functie van de deformaties

$$W_s = G \left( \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right) \quad (95)$$

b) Het principe van minimum energie

We hebben

$$W = \iiint_{vol} W_s(\epsilon, \gamma) dV \quad (96)$$

Het principe van de virtuele arbeid luidt

$$\delta A_u^{(b)} - \delta W = \delta (A_u^{(b)} - W) = 0, \quad (97)$$

waarbij  $A_u^{(b)}$  wordt gegeven door

$$A_u^{(b)} = \iiint (Xu + Yv + Zw) dx dy dz + \iint (p_x u + p_y v + p_z w) dO, \quad (98)$$

met  $(p_x, p_y, p_z)$  de componenten van de oppervlaktekrachten en de integraal in (98) over  $dO$  uitgestrekt over het oppervlak.

Het principe van de virtuele arbeid is nu tevens het principe van de minimum potentiële energie P

$$\delta P = 0, \quad (99)$$

indien onder P wordt verstaan

$$P = W - A_u^{(b)}. \quad (100)$$

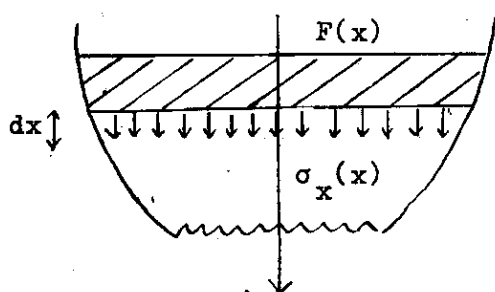
Het statisch evenwicht stelt zich onder  $X, Y, Z, p_x, p_y, p_z$  dus zo in, dat P een minimum wordt.

Deze stelling is zeer gewichtig, daar op de basis ervan benaderingsoplossingen kunnen worden gevonden voor de vervormingstoestand.

### 7. Bijzondere belastingsgevallen van de balk

De algemene theorie is, zoals we die hebben ontwikkeld in 5 en 6, voor veel praktische gevallen te ingewikkeld. Vaak hebben we te doen met lichamen waarvan één dimensie veel groter is dan de beide andere (balken, staven) of waarvan twee dimensies groter zijn dan de derde (platen, schalen). In deze gevallen kunnen de elasticiteitsvergelijkingen benaderend worden vereenvoudigd, natuurlijk het meest voor de balken en staven. We zullen nu voor het zgn. ééndimensionale geval de energievormen afleiden uit de algemene formuleringen.

#### a) trek of druk



Staf ligt langs de x-as,  $F(x)$  is de oppervlakte van de doorsnede. Lengte van de staf is 1. We nemen aan (niet exact!), dat alleen  $\sigma_x \neq 0$  is en dat  $\sigma_x$  alleen een functie van x is:  $\sigma_x(x)$ . Dan is dus

$$W_s = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x = \frac{\sigma_x^2}{2E}, \quad (101)$$

en

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^1 \sigma_x^2(x) F(x) dx. \quad (102)$$

Indien de belastende kracht N is, welke zelfstandig door het oppervlak F wordt overgebracht, is de spanning

$$\sigma_x = \frac{N}{F(x)}, \quad (103)$$

waardoor  $W_s$  overgaat in

$$W_s = \frac{N^2}{2EF(x)^2}, \quad (104)$$

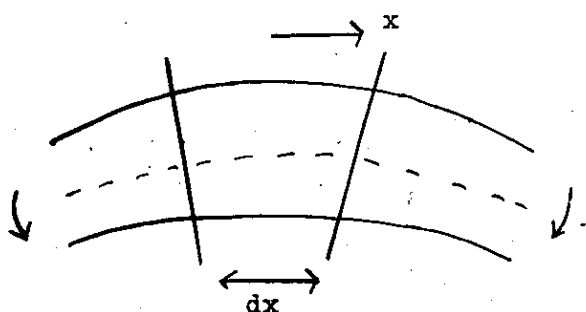
terwijl de totale arbeid wordt

$$W = \int_0^1 \frac{N^2}{2EF(x)} dx = \text{bij constante } N = \frac{N^2}{2E} \int_0^1 \frac{dx}{F(x)}. \quad (105)$$

Voorbeeld :  $F$  const. :  $W = \frac{N^2 l}{2Ef} \quad (106)$

$F = (ax + b(1-x))^2$  zelf uitrekenen.  $(107)$

b) Zuivere buiging : buiging door momenten.



Indien de krachtlijn van het koppel langs een hoofdas van de doorsnede valt, geldt

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I(x)} z, \quad (108)$$

waarbij  $I(x)$  door

$$I(x) = \int_{\text{opp}} z^2 dO \quad (109)$$

is gedefinieerd.  $z$  is de afstand

van de buigingsas.

De specifieke elastische energie  $W_s$  is

$$W_s = \frac{1}{2E} \frac{M^2(x)}{I^2(x)} z^2. \quad (110)$$

De energie tussen twee vlakken  $x$  en  $x + dx$  is

$$dx \int W_s dO = \frac{dx}{2E} \cdot \frac{M^2(x)}{I^2(x)} \int_{\text{opp}} z^2 dO = \frac{dx}{2E} \cdot \frac{M^2(x)}{I(x)}, \quad (111)$$

terwijl de totale energie wordt gegeven door

$$W = \int_0^1 W_s dO dx = \frac{1}{2E} \int_0^1 \frac{M^2(x)}{I(x)} dx. \quad (112)$$

Zijn  $M$  en  $I$  constant, dan wordt  $W$

$$W = \frac{M^2 l}{2EI}. \quad (113)$$

Indien de krachtlijn van het koppel niet langs een hoofdas valt, maar een hoek  $\phi$  maakt met de as  $Oy$ , geldt



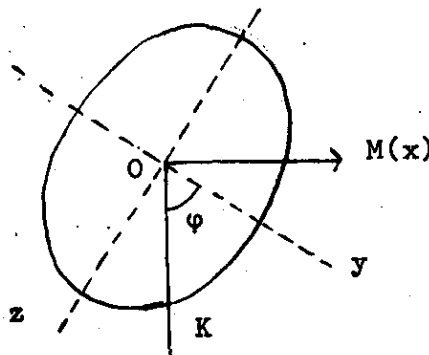
$$\sigma_x = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z + \frac{M_z(x)}{I_z(x)} y, \quad (114)$$

met  $I_y(x) = \int_{\text{opp}} z^2 dO$  ;  $I_z(x) = \int_{\text{opp}} y^2 dO$ . (115)

Daar  $M_y(x) = M(x) \sin \varphi$ , (116)  
 $M_z(x) = M(x) \cos \varphi$ ,

wordt (114)

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I_y(x)} \cdot \sin \varphi \cdot z + \frac{M(x)}{I_z(x)} \cdot \cos \varphi \cdot y. \quad (117)$$



Dus wordt

$$W_s = \frac{1}{2E} M^2(x) \left[ \frac{\sin^2 \varphi \cdot z}{I_y(x)} + \frac{\cos^2 \varphi \cdot y}{I_z(x)} \right]^2 \quad (118)$$

De energie tussen de vlakken x en x + dx is

$$dx \int_{\text{opp}} W_s dO = \frac{M^2(x) dx}{2E} \left( \frac{\sin^2 \varphi}{I_y} + \frac{\cos^2 \varphi}{I_z} \right) \quad (119)$$

daar  $\int_{\text{opp}} yz dO = 0$ .

De totale arbeid is dus

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^1 dx \cdot M^2(x) \left( \frac{\sin^2 \varphi}{I_y(x)} + \frac{\cos^2 \varphi}{I_z(x)} \right) \quad (120)$$

c) Uitrekking met buigingen

Krachtlijn langs een hoofdas. Dan is

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{F(x)} + \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z. \quad (121)$$

De energie tussen de vlakken x en x + dx bedraagt

$$dx \int_{\text{opp}} W_s dO = \frac{dx}{2E} \int_{\text{opp}} \left[ \frac{N(x)}{F(x)} + \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z \right]^2 dO = \quad (122)$$

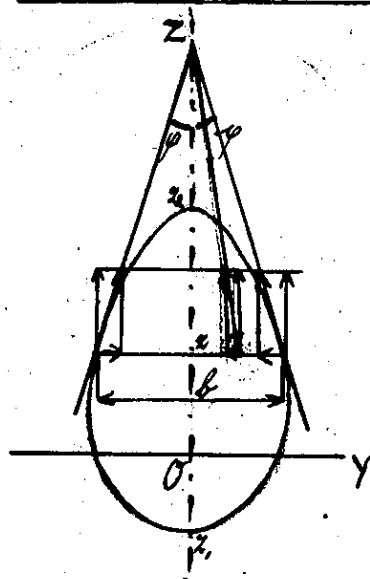
$$\frac{dx}{2E} \left[ \frac{N^2(x)}{F(x)} + \frac{M_y^2(x)}{I_y(x)} \right]$$

daar  $\int_{\text{opp}} z dO = 0.$  (123)

De totale energie is dus

$$W = \int_0^1 dx. \frac{1}{2E} \cdot \left( \frac{N^2(x)}{F(x)} + \frac{M_y^2(x)}{I_y(x)} \right). \quad (124)$$

d) Buiging met afschuiving



symmetrische doorsnede

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{I} z, \\ \tau_{xz} &= \frac{DS}{bI}, \\ \tau_{yx} &= \frac{2DS}{b^2 I} \cdot y \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \quad (125)$$

waarin D de dwarskracht is,  
b de breedte ter plaatse z

$$S = \int_{z_1}^z z b(z) dz \text{ enz.}$$

$\varphi$  de hoek tussen de raaklijn en de  
vertikaal.

Daaruit volgt, dat

$$W_s = \frac{1}{2E} \left( \frac{Mz}{I} \right)^2 + \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{DS}{bI} \right)^2 + \left( \frac{2DSy \operatorname{tg} \varphi}{b^2 I} \right)^2 \right] \quad (126)$$

De vormveranderingsarbeid bestaat uit twee stukken : de buigingsarbeid en de afschuivingsarbeid. We berekenen alleen de laatste, aangezien deze een nieuwe vorm oplevert.

We hebben  $W = \iiint W_s \, dx dy dz$  en integreren (126) eerst over y. Zo ontstaat

$$\begin{aligned} dx dz \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{DS}{bI} \right)^2 + \left( \frac{2DSy \operatorname{tg} \varphi}{b^2 I} \right)^2 \right] dy = \\ dx dz. \frac{1}{2G} \cdot \frac{D^2 S^2}{b I^2} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{3} \right). \end{aligned} \quad (127)$$

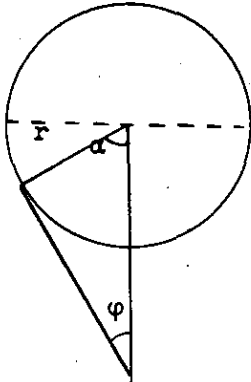
De arbeid tussen twee doorsneden x en x + dx wordt verkregen door (127) over z te integreren. Er ontstaat

$$dx. \frac{D^2}{2GI^2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{S^2(z) \left( 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{3} \right)}{b(z)} dz \quad (128)$$

De totale arbeid is

$$W = \frac{D^2}{2G} \int_0^1 \frac{dx}{I^2(x)} \int_{z_1}^{z_2} \frac{S^2(z) (1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi)}{b(z)} dz. \quad (129)$$

Voorbeeld : cirkel



$$\varphi = \pi/2 - \alpha ; b = 2r \sin \alpha ;$$

$$S = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \alpha ; I = \frac{1}{4} \pi r^4.$$

De integraal (128) wordt  $\frac{2}{27} \pi r^6$ .

De totale arbeid

$$W = \frac{32}{27} \cdot \frac{D^2 l}{2GF} = \frac{16}{27 \cdot \pi} \cdot \frac{D^2 l}{Gr^2}. \quad (130)$$

c) Wringing.

$$W_s = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2) = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (131)$$

We willen een uitdrukking vinden, waarin het torsiemoment voorkomt.  
Voor een cirkelcylindervormige staaf geldt

$$\tau = \frac{M t}{J_p} \cdot r, \quad (132)$$

waarin  $r$  de radiusvector is en  $J_p$  het polaire traagheidsmoment, gegeven door

$$J_p = \iint r^2 dO, \quad (133)$$

voor de cirkel gelijk aan  $\frac{\pi a^4}{2}$ .

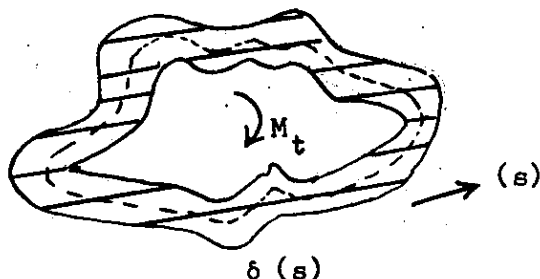
We vinden dus

$$W = \frac{1}{2G} \cdot \frac{M^2 t \cdot 4}{\pi^2 a^8} \int_0^1 dx \iint r^2 \cdot dO = \frac{1}{2G} \cdot \frac{M^2 t \cdot 1.2}{\pi a^4}. \quad (134)$$

Is de doorsnede niet constant, doch het lichaam rotatiesymmetrisch, dan wordt  $J_p = J_p(x)$  en de formule is

$$W = \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{J_p^2(x)} dx \iint r^2 dO = \frac{M_t^2}{2G} \int_0^{\ell} \frac{dx}{J_p(x)} \quad (135)$$

Bij een dunwandige constructie geldt



$$\tau = \frac{M_t}{2F \cdot \delta(s)} \quad (136)$$

waarbij F de oppervlakte is van de doorsnede binnen de stippellijn bv. genomen midden tussen de binnen- en buitenranden. Dan geldt dus bij een lengte  $\ell$

$$W = \frac{M_t^2 \cdot \ell}{8G F^2} \oint \frac{dx}{\delta(s)} \quad (137)$$

Opmerking : Deze formule geeft een benadering ; hij heeft alleen betekenis, indien  $\delta(s) \ll$  kleinste diameter. Daarom is de keuze van de begrenzing van F niet kritisch.

## 8. Arbeidsprincipes

### a) de reciprociteitsstelling

Stel twee evenwichtstoestanden voor van het lichaam :

toestand I : verplaatsingen  $u', v', w'$ ,  
 krachten  $X', Y', Z'$ ,  
 oppervl. span.  $p'_x, p'_y, p'_z$ .

toestand II : verplaatsingen  $u'', v'', w''$ ,  
 krachten  $X'', Y'', Z''$ ,  
 oppervl. span.  $p''_x, p''_y, p''_z$ .

Nu geldt de volgende reciprociteitsstelling : de arbeid, verricht door de eenmaal gestreepte krachten bij de tweemaal gestreepte verplaatsingen is gelijk aan de arbeid van de tweemaal gestreepte krachten bij de eenmaal gestreepte verplaatsingen.

Het bewijs kan worden geleverd, in de veronderstelling, dat het superpositie-principe geldt : dat de eindtoestand niet afhangt van de volgorde, waarin de belastingen worden aangebracht.

Stel de arbeid, verricht door de krachten in de toestand I gelijk aan  $A_{I,I}$ .

Superponeer nu de krachten van de toestand II. De arbeid is

- 1)  $A_{II,II}$
- 2)  $A_{I,II}$

de arbeid, verricht door krachten uit de toestand I bij de verplaatsingen II. Dus totaal

$$A = A_{I,I} + A_{II,II} + A_{I,II} \quad (138)$$

Herhaal nu hetzelfde belastingsproces in de omgekeerde volgorde. De arbeid wordt

$$A = A_{II,II} + A_{I,I} + A_{II,I} \quad (139)$$

Aangezien de arbeid onafhankelijk is van de volgorde, waarin de krachten worden toegepast, is

$$A_{I,II} = A_{II,I} \quad (140)$$

de reciprociteitswet.

Deze stelling heet de stelling van Betti.

We specialiseren deze algemene wet nu voor het geval van belasting door puntlasten.

Stel een lichaam, dat belast wordt door de krachten  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . De verplaatsing kan dan worden geschreven als

$$u_1 = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 + \dots + \alpha_{1n}P_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{1k}P_k \quad (141)$$

De coëfficiënten  $\alpha_{ij}$  zijn de invloedsfactoren of invloedscoëfficiënten.

In het punt i geldt dan natuurlijk

$$u_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}P_k \quad (142)$$

Nu twee toestanden I, II. Er geldt

$$u_i^I = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_j^I,$$

$$u_i^{II} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_j^{II}.$$

(143)

Volgens het reciprociteitstheorema is

$$\sum_{i=1}^n P_i^{II} u_i^I = \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} P_k^I P_i^{II} = \sum_{i=1}^n P_i^I u_i^{II} = \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} P_k^{II} P_i^I. \quad (144)$$

Dus moet  $\sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} (P_k^I P_i^{II} - P_k^{II} P_i^I) = 0$  voor alle keuzen van  $P_k^I$  en  $P_k^{II}$ .

Verwissel de nummering. Er ontstaat

$$\sum_{i,k=1}^n P_k^{II} (\alpha_{ik} - \alpha_{ki}) = 0, \text{ dus}$$

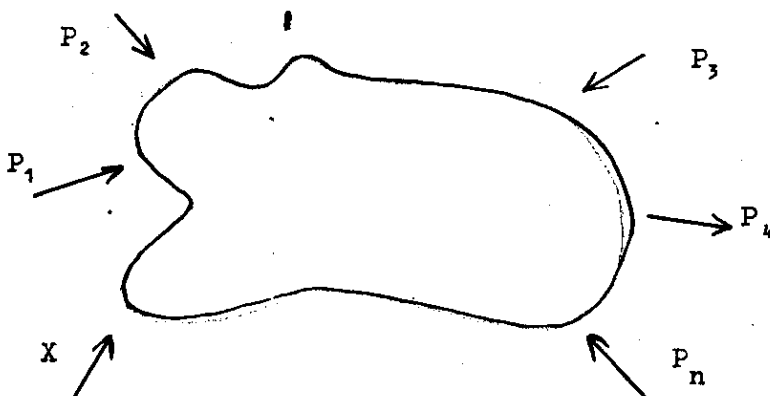
$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \quad (145)$$

de formule van Maxwell.

Opmerking : De reciprociteitsstellingen berusten op het lineaire karakter der vergelijkingen. De toestanden zijn superponeerbaar.

b) De stellingen van Castigliano

We beschouwen een lichaam, dat belast wordt door een aantal puntlasten, bv. een balk of een balkensysteem.



De puntlasten zijn

$P_1, P_2 \dots P_n$  en  $X$ .

Ieder van de puntlasten geeft aanleiding tot verplaatsingen. We bekijken de verplaatsingen in de richting van de krachten.

Onder invloed van de krachten bezit het lichaam een elastische energie  $W$ , die een functie is van de grootte en plaats der krachten

$$W = W(P_1, P_2 \dots P_n, X). \quad (146)$$

De vorm van deze functie kan worden gegeven door

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} P_i P_j + \sum_{j=1}^n \alpha_{xj} X P_j + \frac{1}{2} \alpha_{xx} X^2. \quad (147)$$

We maken nu de kracht  $X$  een infinitesimale hoeveelheid groter :  $X \rightarrow X + \Delta X$ , waardoor ook  $W$  verandert  $W \rightarrow W + \Delta W$ .  
Er geldt

$$\Delta W = \Delta X \sum_{j=1}^n \alpha_{xj} P_j + \Delta X \cdot \alpha_{xx} X + \frac{1}{2} \alpha_{xx} (\Delta X)^2. \quad (148)$$

Het is duidelijk dat in de limiet  $\Delta X \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta X} \equiv \frac{\partial W}{\partial X} = \sum_{j=1}^n \alpha_{xj} P_j + \alpha_{xx} X. \quad (149)$$

$$\text{Nu is echter } u_x = \sum_{j=1}^n \alpha_{jx} P_j + \alpha_{xx} X, \quad (150)$$

$$\text{dus } \frac{\partial W}{\partial X} = u_x. \quad (151)$$

Algemeen hebben we dus

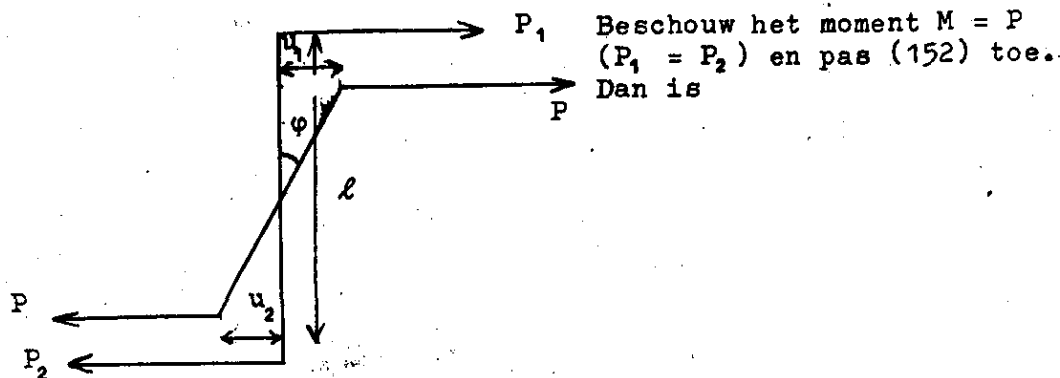
$$\frac{\partial W}{\partial P_k} = u_k. \quad (152)$$

Indien geconcentreerde momenten optreden :  $M_1, M_2 \dots M_n$ , hebben we  $W = W(M_1 \dots M_n)$  en

$$\frac{\partial W}{\partial M_k} = \varphi_k, \quad (153)$$

waarbij  $\varphi_k$  de hoekverdraaiing is.

De vergelijking (153) is direct uit (152) af te leiden.



$$\frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial P} \frac{\partial P_1}{\partial P_1} + \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial P} \frac{\partial P_2}{\partial P_2} = \frac{u_1 + u_2}{l} \quad (154)$$

of

$$\frac{\partial W}{\partial M} = \frac{u_1 + u_2}{l} = \varphi.$$

Andere formules van Castigliano zijn

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u_k} &= P_k, \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi_k} &= M_k. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

Deze worden bewezen door  $u_k$  te vermeerderen met  $\Delta u_k$ , terwijl alle andere verplaatsingen constant blijven, resp.  $\varphi_k \rightarrow \varphi_k + \Delta \varphi_k$ , overigens constant. Dan is

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta u_k \cdot P_k + \frac{1}{2} \Delta u_k \cdot \Delta P_k \\ \Delta W &= \Delta \varphi_k \cdot M_k + \frac{1}{2} \Delta \varphi_k \cdot \Delta M_k. \end{aligned} \quad (156)$$

In de limiet ontstaan de vergelijkingen (155).

We schrijven nog enige andere formules op. We hebben

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} P_i P_j, \quad (157)$$

waaruit volgt



$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial P_i \partial P_j}, \quad (158)$$

$$u_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_j, \quad \text{en} \quad (159)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i P_i. \quad (160)$$

Soortgelijke formules bestaan ook in het geval van een momenten belasting en een gemengde belasting.

### 9. Toepassing van de wetten van Castigliano in de balken theorie

Indien een balk belast is door een normaalkracht  $N(x)$ , twee dwarskrachten  $D_y$  en  $D_z$ , twee buigende momenten  $M_y$  en  $M_z$  en een wringend moment  $M_t$ , kan de totale arbeid worden geschreven als

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{N^2}{EF} dx + k_y \int \frac{D_y^2}{GF} dx + k_z \int \frac{D_z^2}{GF} dx + \int \frac{M_y^2}{EI_y} dx + \int \frac{M_z^2}{EI_z} dx + k_x \int \frac{M_t^2}{GJ_o} dx \right\} \quad (161)$$

waarin  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  constanten zijn.

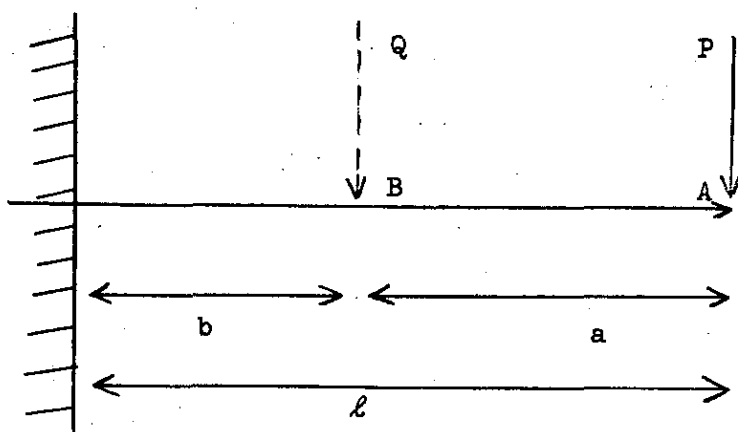
Het merkwaardige van formule (161) is, dat de verschillende bijdragen eenvoudig gesommeerd worden. Dit is echter alleen het geval, indien het stelsel op het zogenaamde dwarskrachtenmiddelpunt wordt herleid. Indien de doorsnede twee symmetrieassen heeft, valt het dwarskrachtenmiddelpunt samen met het zwaartepunt.

Nu de toepassingen.

a) een statisch bepaald systeem. Gevraagd de verplaatsing in een bepaald punt. Breng de kracht  $P$  in het punt aan, dan is de oplossing gegeven door

$$= \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\partial W}{\partial P}. \quad (162)$$

Voorbeeld :



Staat ingeklemd. Aan het uiteinde belast door P. Gevraagd wordt de doorbuiging in B.

Oplossing :

$$A = \int_0^a \frac{(Px)^2 dx}{2EI} + \int_0^b \frac{\{P(x+a) + Qx\}^2}{2EI} dx$$

$$\frac{\partial A}{\partial Q} = \int_0^b \frac{\{P(x+a) + Qx\} x}{EI} dx$$

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\partial A}{\partial Q} = u_B = \int_0^b \frac{Px(x+a)}{EI} dx = \frac{Pb^3}{3EI} + \frac{Pb^2 a}{2EI} \quad (163)$$

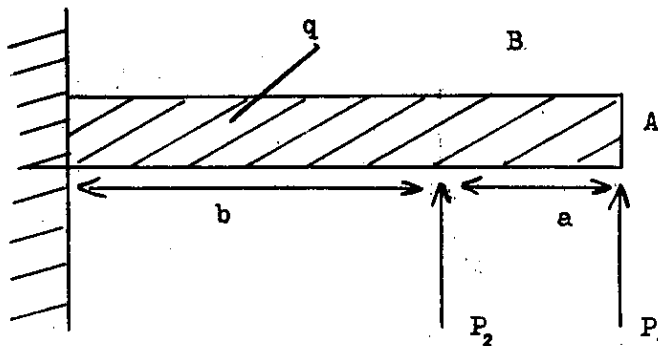
b) uitwendig statisch onbepaalde systemen. Een elastisch systeem heet uitwendig statisch onbepaald, indien er meer reactiekrachten en reactiemomenten zijn, dan elementair kan worden bepaald. We noemen de reactiegrootheden  $R_1 \dots R_n, M_1 \dots M_n$ .

Volgens Castigliano geldt

$$\frac{\partial W}{\partial R_k} = u_k \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial M_k} = \varphi_k \quad (164)$$

en  $u_k$  en  $\varphi_k$  zijn bekende grootheden. (In het algemeen = 0). Het stelsel (164) levert  $n + m$  vergelijkingen voor de  $n + m$  onbekende reacties.

Voorbeeld :



Staat ingeklemd. Over de gehele lengte gelijkmatig belast met \$q\$ per eenheid van lengte.

Tweevoudig statisch onbepaalde oplegging.

Kies de reactiekrachten bij A en B als statisch onbepaalden : \$P\_1\$ en \$P\_2\$.

De arbeid wordt

$$W = \int_0^a \frac{(P_1 x - \frac{1}{2} q x^2)^2 dx}{2EI} + \int_0^b \frac{[P_1 (a+x) + P_2 x - \frac{1}{2} q (a+x)^2]^2 dx}{2EI} \quad (165)$$

Nu is

$$\frac{\partial W}{\partial P_2} = 0 = \frac{P_1 a b^2}{2EI} + \frac{P_1 b^3}{3EI} + \frac{P_2 b^3}{3EI} - \frac{q}{2EI} \left( \frac{1}{2} a^2 b^2 + \frac{1}{3} a b^3 + \frac{1}{4} b^4 \right) \text{ of}$$

$$P_1 \left( \frac{a}{2} + \frac{b}{3} \right) + P_2 \frac{b}{3} = \frac{q}{2} \left( \frac{a^2}{2} + \frac{a b}{3} + \frac{b^2}{4} \right) \quad (166)$$

$$\frac{\partial W}{\partial P_1} = 0 = \frac{P_1 a^3}{3EI} - \frac{q a^4}{8EI} + \frac{P_1}{EI} \left( a^2 b + a b^2 + \frac{1}{3} b^3 \right) +$$

$$\frac{P_2}{EI} \left( \frac{1}{2} a b^2 + \frac{1}{3} b^3 \right) - \frac{q}{2EI} \left( a^3 b + \frac{3}{2} a^2 b^2 + a b^3 + \frac{1}{4} b^4 \right) \text{ of}$$

$$P_1 \left[ \frac{a^3}{3} + a^2 b + a b^2 + \frac{b^3}{3} \right] + P_2 \left( \frac{a b^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right) =$$

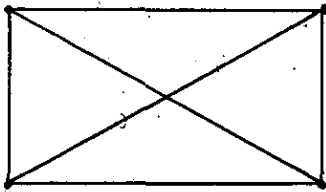
$$= \frac{q}{2} \left( \frac{a^4}{4} + a b + \frac{3}{2} a^2 b^2 + a b^3 + \frac{b^4}{4} \right). \quad (167)$$

Uit (166) en (167) zijn \$P\_1\$ en \$P\_2\$ op te lossen.

c) inwendig statisch onbepaalde systemen.

Een systeem is inwendig statisch onbepaald, indien meer staven tussen de knooppunten zijn aangebracht dan nodig is voor onbeweeglijkheid.

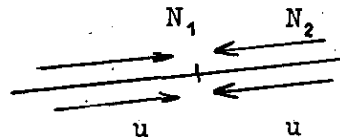
Bijvoorbeeld



Alle staven scharnierend.  
Een diagonaal "overbodig".

We snijden denkbeeldig zoveel staven door, dat het resulterende systeem statisch bepaald is. We brengen aan de doorsneden aan de krachten N resp. - N, D, resp. -D, M, resp. -M. Nu passen we de stelling van Castigliano toe. Bv.

$$\frac{\partial W}{\partial N} = \left( \frac{\partial W}{\partial N_1} \right) \frac{\partial N_1}{\partial N} + \frac{\partial W}{\partial N_2} \frac{\partial N_2}{\partial N} = \frac{\partial W}{\partial N_1} + \frac{\partial W}{\partial N_2} = u_1 + u_2, \quad (168)$$



aangezien  $\frac{\partial N_1}{\partial N} = \frac{\partial N_2}{\partial N} = 1$  (beide trekkrachten). De samenhang moet echter blijven bestaan, dus  $u_1 = -u_2$ .

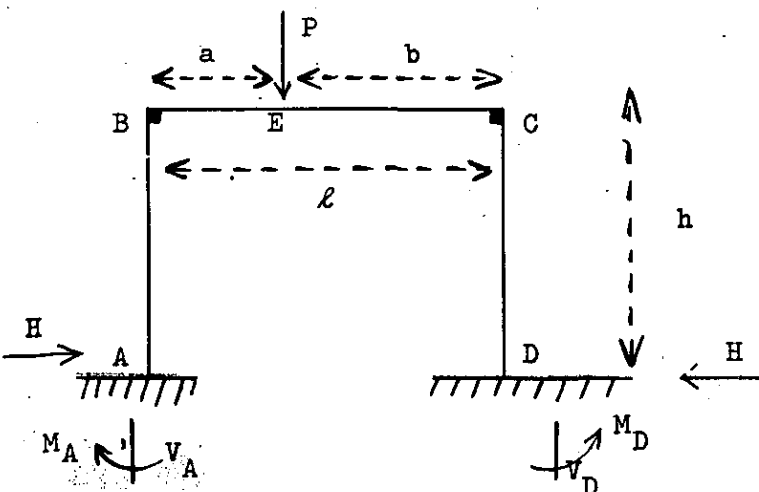
Algemeen geldt dus

$$\frac{\partial W}{\partial N} = 0 ; \quad \frac{\partial W}{\partial D} = 0 ; \quad \frac{\partial W}{\partial M} = 0. \quad (169)$$

De vergelijkingen (169) kunnen nog op andere wijze worden geïnterpreteerd. Ze drukken uit, dat bij de optredende snedegrootheden de functie W juist een extreme waarde aanneemt.

d) Is het systeem zowel inwendig als uitwendig statisch onbepaald, dan worden de methoden van c) en b) naast elkaar gebruikt, dus invoeren van onbekende reactiegrootheden en snedegrootheden.

e) een meer ingewikkeld voorbeeld : portaal, niet symmetrisch belast door kracht P.



EI is constant voor alle balken.  
We bekijken alleen de energie als gevolg van de buiging.

P is bekend, onbekenden zijn  $H, V_A, V_D, M_A$  en  $M_D$ .

Het systeem is dus drievoudig statisch onbepaald.

We nemen als onbekenden  $V_D, H$  en  $M_D$ .

De buigingsenergie is

$$W = \frac{1}{2EI} \int_A^D M^2 ds \quad (170)$$

en we moeten dus het buigend moment bepalen in de staven, uitgedrukt in  $H$ ,  $V_D$  en  $M_D$ .

We maken het volgende schema

staaf	moment	$\frac{\partial M}{\partial H}$	$\frac{\partial M}{\partial V_D}$	$\frac{\partial M}{\partial M_D}$	grenzen
DC	$M_D - Hx$	$-x$	$0$	$1$	$0 - h$
CE	$M_D - Hh + V_D x$	$-h$	$x$	$1$	$0 - b$
EB	$M_D - Hh + V_D x - P(x-b)$	$-h$	$x$	$1$	$b - l$
BA	$M_D - Hx + V_D l - P(a)$	$-x$	$l$	$1$	$0 \rightarrow h$

Nu geldt

$$\frac{\partial W}{\partial M_D} = \frac{\partial W}{\partial H} = \frac{\partial W}{\partial V_D} = 0, \quad \text{of} \quad (171)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_D^A M \frac{\partial M}{\partial M_D} ds &= 0, \\ \int_D^A M \frac{\partial M}{\partial H} ds &= 0, \\ \int_D^A M \frac{\partial M}{\partial V_D} ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Uitgewerkt wordt dit

$$\int_0^h (M_D - Hx) dx + \int_0^b (M_D - Hh + V_D x) dx + \int_0^l (M_D - Hh + V_D x - P(x - b)) dx + \int_0^h (M_D - Hx + V_D l - Pa) dx = 0, \quad (173)$$

$$\int_0^h (M_D - Hx) \cdot -x \, dx + \int_0^b (M_D - Hh + V_D x) \cdot -h \, dx + \int_b^l (M_D - Hh + V_D x - Px + Pb) \cdot -h \, dx + \int_0^h (M_D - Hx + V_D l - Pa) \cdot -x \, dx = 0, \quad (174)$$

$$\int_0^b (M_D - Hh + V_D x) \cdot x \, dx + \int_b^l (M_D - Hh + V_D x - Px + Pb) \cdot x \, dx + \int_0^h (M_D - Hx + V_D l - Pa) \cdot l \, dx = 0. \quad (175)$$

Dit zijn drie vergelijkingen voor  $H$ ,  $V_D$  en  $M_D$ , die nu kunnen worden bepaald.

10. Directe methoden der variatierekening

We hebben gezien dat voor een elastisch (driedimensionaal) lichaam geldt

$$\delta P = \delta(W - A_u^{(b)}) = 0, \quad (176)$$

waarin  $W$  de elastische energie is en  $A_u^{(b)}$  de potentiële energie der uitwendige belastingskrachten. De grootheid  $P$  is in het evenwicht een minimum. We schrijven de vergelijking (176) uit.

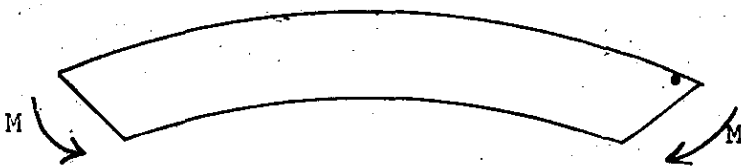
$$\delta \left[ \iiint_{\text{vol}} dV \left\{ G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + G \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right\} - \iiint_{\text{vol}} dV \{ Xu + Yv + Zw \} - \iint_{\text{opp}} dO \{ p_x u + p_y v + p_z w \} \right] = 0. \quad (177)$$

Vullen we voor  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  de afgeleiden in van  $(u, v, w)$  en variëren we  $(u, v, w) \rightarrow (u + \delta u), (v + \delta v), (w + \delta w)$ , dan ontstaan de evenwichtsvergelijkingen (28) en de randvoorwaarden aan het oppervlak (23). Leid dit zelf af !!

Het kiezen van de verplaatsingen, welke de integraal (177) tot een minimum maken is dus gelijkwaardig met het bepalen van de oplossing van het stelsel (78).

In het algemeen is het uiterst moeilijk exacte oplossingen te vinden van het stelsel (78). In praktische gevallen zal men zich moeten beperken tot benaderingsoplossingen. Deze kunnen worden bepaald op de basis van de "directe methoden" der variatierekening, waarbij men een aantal verplaatsingsfuncties, welke aan de randvoorwaarden voldoen, invult in (177) en diè kiest, welke de integraal het kleinst maken. In het bijzonder werkt dit goed bij twee- en ééndimensionale gevallen, waar men de afhankelijkheid van één resp. twee coördinaten redelijk kan voorstellen.

We illustreren dit aan het eenvoudigste geval : de balk, dat is het een-dimensionale systeem.



We nemen aan, dat voor de oplossing geldt

$$\sigma_x = \frac{My}{I}; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (178)$$

$$\text{Dan wordt } \epsilon_x = \frac{My}{EI}; \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{My}{EI}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (179)$$

De vervormingsenergie W wordt

$$\iiint_{\text{vol}} dV \cdot \frac{M^2 y^2}{2EI^2} = \int_0^l \frac{M^2}{2EI^2} dx \iint_{\text{opp}} y^2 d\sigma = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx. \quad (180)$$

Daar  $M \hat{=} -EI y''$ , is

$$W = \int_0^l \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx. \quad (181)$$

De potentiële energie komt bv. van de belasting  $q(x)$  per eenheid van lengte. We hebben dus

$$P = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} EI (y'')^2 - q(x)y \right\} dx \quad (182)$$

met  $\delta P = 0$ .

Toepassing van de vergelijking van Euler levert op

$$EI y^{(IV)} - q(x) = 0 \quad (183)$$

de exacte vorm van de differentiaalvergelijking, behorende bij het variatieprobleem (182), dat zelf een approximatie is van het variatieprobleem (177).

De directe methode der variatierekening bestaat nu echter niet uit het rechtstreeks zoeken van de oplossing van (183), doch richt zich op het probleem (182).

Indien de balk opgelegd is, gelden de randvoorwaarden

$$y = y'' = 0 \quad \text{voor } x = 0 \quad \text{en } x = l. \quad (184)$$

Een functie, die aan de randvoorwaarden (184) voldoet is

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (185)$$

We benaderen het probleem door te stellen

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l}. \quad (186)$$

We kiezen nu  $a_1, a_2, a_3$  zo gunstig mogelijk. Er geldt

$$y'' = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - a_2 \frac{4\pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - a_3 \frac{9\pi^2}{l^2} \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad (187)$$

waaruit

$$\begin{aligned} (y'')^2 = & a_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} + a_2^2 \frac{16\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} + a_3^2 \frac{81\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{3\pi x}{l} - \\ & - 2a_1 a_2 \frac{4\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \end{aligned} \quad (188)$$



We vinden door invullen en integreren

$$P = \frac{1}{2}EI \left[ a_1^2 \frac{\pi^4}{\ell^4} \frac{\ell}{2} + a_2^2 \frac{16\pi^4}{\ell^4} \frac{\ell}{2} + a_3^2 \frac{81\pi^4}{\ell^4} \frac{\ell}{2} \right] - a_1 q_1 - a_2 q_2 - a_3 q_3, \quad (189)$$

met 
$$q_k = \int_0^{\ell} \sin \frac{\pi x}{\ell} \cdot q(x) dx. \quad (190)$$

De minimumvoorwaarde levert ons

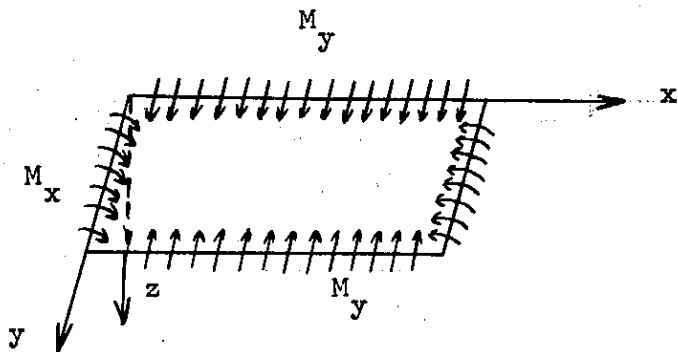
$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = \frac{EI\ell}{4} \frac{\pi^4}{\ell^4} \cdot 2a_1 - q_1 = 0, \quad \text{enz.} \quad (191)$$

waaruit 
$$a_1 = q_1 \cdot \frac{2\ell^3}{\pi^4 EI} \quad \text{enz.} \quad (192)$$

We vinden een betere benadering door meer termen te nemen, of een stel probeerfuncties, die de exacte meer nabij komen.

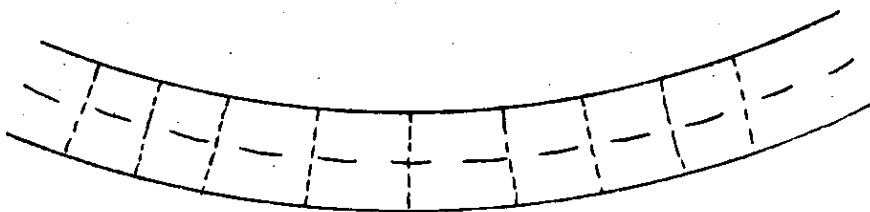
Langs deze weg vinden we een benaderingsoplossing voor de differentiaalvergelijking (183), welke vaak ook direct exact is op te lossen, doch in de meeste gevallen niet.

We leiden uit vergelijking (177) ook de vergelijking voor de buiging van een plaat (tweedimensionaal) af.



De plaat heeft een dikte  $h$ , welke zeer klein is t.o.v. de overige afmetingen.

Dan kunnen we schrijven (de normalen op het middenvlak blijven normaal en de spanning  $\sigma_z = 0$ )



$$\epsilon_x = \frac{z}{r_x} ; \quad \epsilon_y = \frac{z}{r_y} ; \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} z \left( \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) \quad (193)$$

terwijl volgens de meetkunde geldt

$$\frac{1}{r_x} = - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) ; \quad \frac{1}{r_y} = - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) . \quad (194)$$

Het is duidelijk, dat we hebben

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} ; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} , \quad (195)$$

dus

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} . \quad (196)$$

In de spanningsenergie verwaarlozen we de termen met  $\gamma_{zx}^2$  en  $\gamma_{zy}^2$ . Dan ontstaat na integratie over de dikte (z varieert van  $-h/2$  tot  $h/2$ )

$$P = \frac{1}{2} D \iint_{\text{opp}} dO \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} - \iint_{\text{opp}} dO (q(x,y)w) \quad (197)$$

waarbij D bepaald is uit

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (198)$$

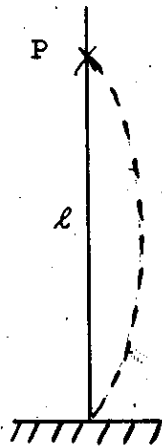
De variatiemethode  $\delta P = 0$  levert

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} . \quad (199)$$

Het spreekt vanzelf, dat de vergelijking (199) voor de buiging van een plaat ook rechtstreeks uit evenwichtsbeschouwingen van een plaalement is af te leiden.

Op de randvoorwaarden voor vergelijking (199) gaan we hier niet in. Benaderingsoplossingen voor (199) kunnen weer worden gevonden door probeerfuncties, welke aan de randvoorwaarden voldoen, in te vullen in (197) en de constanten zo te bepalen, dat (197) een minimum wordt.

De energiemethoden kunnen ook met vrucht worden toegepast bij stabiliteitsvraagstukken, zoals knik van staven. We geven een enkel voorbeeld.



We weten dat, indien P voldoende klein is, de staaf alleen wordt samengedrukt. Indien P echter groot genoeg is, knikt de staaf uit : er vindt een buiging plaats.

Indien  $y$  de uitbuiging is, is de buigingsenergie

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 dx. \quad (200)$$

Wat is  $A_u^{(b)}$ , de arbeid der uitwendige kracht P ?

De verplaatsing van het aangrijpingspunt is klaarblijkelijk

$$\int_0^l (ds - dx) = \int_0^l \left( \frac{ds}{dx} - 1 \right) dx = \int_0^l \left( \sqrt{1+y'^2} - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx + \dots \quad (201)$$

De potentiële energie van de kracht P is dus

$$A_u^{(b)} = P \cdot \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx + \dots \quad (202)$$

en het principe van de virtuele arbeid wordt

$$\delta \int_0^l \{ EI(y'')^2 - P(y')^2 \} dx = 0. \quad (203)$$

We leiden eerst de differentiaalvergelijking af. Stel

$$y \rightarrow y + \delta y, \quad (204)$$

dan gaat (203) over in

$$\int_0^{\ell} \{ EI(y'' + \delta y'')^2 - EIy''^2 - P(y' + \delta y')^2 + Py'^2 \} dx = 0, \quad (205)$$

waaruit volgt bij verwaarlozing van de 2e orde termen

$$\int_0^{\ell} \{ EIy'' \cdot \delta y'' - Py' \cdot \delta y' \} dx = 0. \quad (206)$$

Nu is

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} y' \delta y' dx &= \int_0^{\ell} y' \left( \frac{d}{dx} \delta y \right) dx = \int_0^{\ell} y' d \delta y = \\ &= y' \delta y \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} y'' \cdot \delta y dx, \end{aligned} \quad (207)$$

terwijl

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} EIy'' \delta y'' dx &= \int_0^{\ell} EIy'' d \delta y' = EIy'' \delta y' \Big|_0^{\ell} - \\ &- \int_0^{\ell} \delta y' \frac{d}{dx} (EIy'') dx = EIy'' \delta y' \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{d}{dx} (EIy'') d \delta y = \\ &= EIy'' \delta y' \Big|_0^{\ell} - \frac{d}{dx} (EIy'') \cdot \delta y \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} \delta y \frac{d^2}{dx^2} (EIy'') dx. \end{aligned} \quad (208)$$

Het principe van de virtuele arbeid

$$\delta(W - A_u^{(b)}) = 0$$

gaat hier dus over in

$$\int_0^l \left( \frac{d^2}{dx^2} (EIy'' + Py') \right) \delta y \, dx + EIy'' \delta y' \Big|_0^l - \left( \frac{d}{dx} (EIy'' + Py') \right) \delta y \Big|_0^l = 0, \quad (209)$$

onder de veronderstelling dat geen arbeid wordt verricht anders dan door de samendrukking.

Aangezien (209) geldt voor alle toelaatbare  $\delta y$  is de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2} (EIy'' + Py') = 0, \quad (210)$$

geïntegreerd tot

$$EIy'' + Py = Ax + B, \quad (211)$$

met de nog nader te bepalen A en B.

Opdat geen energie aan de randen wordt toegevoegd moet  $y' \delta y' \Big|_0^l = 0$  zijn.  
 (moment nul of hoekverdraaiing vast) en  $\left( \frac{d}{dx} (EIy'' + Py') \right) \delta y \Big|_0^l = 0,$

wat uitdrukt : verplaatsing vast voorgeschreven of de dwarskracht gelijk nul.

Er geldt nu echter niet alleen

$$\delta(W - A_u^{(b)}) = 0, \quad (212)$$

doch tevens

$$W = A_u^{(b)}. \quad (213)$$

Dit wordt als volgt bewezen :

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(y'')^2 dx = -\frac{1}{2}P \int_0^{\ell} y'' \cdot y dx + \frac{1}{2}A \int_0^{\ell} y''x dx + \\
 &+ \frac{1}{2}B \int_0^{\ell} y'' dx = \frac{1}{2}P \int_0^{\ell} (y')^2 dx - \frac{1}{2}Py y' \Big|_0^{\ell} + \\
 &+ \frac{1}{2}A xy' \Big|_0^{\ell} - \frac{1}{2}Ay \Big|_0^{\ell} + \frac{1}{2}By' \Big|_0^{\ell}.
 \end{aligned} \tag{214}$$

We hebben dus

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(y'')^2 dx &= \frac{1}{2}P \int_0^{\ell} (y')^2 dx - \\
 &- \frac{1}{2}Py_{\ell}y'_{\ell} + \frac{1}{2}Aly'_{\ell} - \frac{1}{2}Ay_{\ell} - \frac{1}{2}By'_{\ell} + \\
 &+ \frac{1}{2}Py_0y'_0 + \frac{1}{2}Ay_0 - \frac{1}{2}By'_0.
 \end{aligned} \tag{215}$$

Uit de vergelijking (211) vinden we

$$B = EIy''_0 + Py_0, \tag{216}$$

$$A\ell + B = EIy''_{\ell} + Py_{\ell}. \tag{217}$$

Met (216) en (217) wordt (215)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(y'')^2 dx &= \frac{1}{2}P \int_0^{\ell} (y')^2 dx - \\
 &- \frac{1}{2}EI(y'_0y''_0 - y'_{\ell}y''_{\ell}) + \frac{1}{2}A(y_0 - y_{\ell}).
 \end{aligned} \tag{218}$$

Nu is volgens de differentiaalvergelijking

$$A = \frac{d}{dx} (EIy'') + Py' \quad (219)$$

de dwarskracht.

De stoktermen in (218) zijn dus nul : als aan een eind het moment niet gelijk nul is, is de verdraaiing het en evenzo dwarskracht en verplaatsing. We hebben dus

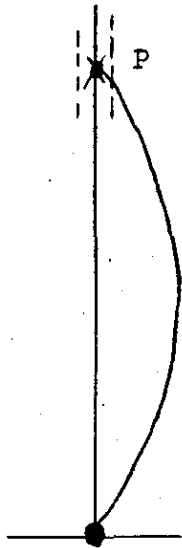
$$P = \frac{\int_0^l EI(y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx} \quad (220)$$

Dit is het quotiënt van Rayleigh. Het merkwaardige is, dat de werkelijke P een stationnaire waarde heeft. We hebben

$$\begin{aligned} \delta P &= \frac{\delta \int_0^l EI(y'')^2 dx \cdot \int_0^l (y')^2 dx - \int_0^l EI(y'')^2 dx \delta \int_0^l (y')^2 dx}{\left[ \int_0^l (y')^2 dx \right]^2} = \\ &= \frac{1}{\int_0^l (y')^2 dx} \left\{ \delta \int_0^l EI(y'')^2 dx - P \delta \int_0^l (y')^2 dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\int_0^l (y')^2 dx} \left\{ \delta (W - A_u^{(b)}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (221)$$

Indien we "probeerfuncties" invullen in (220) vinden we als kleinste waarde de laagste knikwaarde.

Rayleigh geldt ook, indien aan de rand energie wordt toegevoegd, mits deze in rekening wordt gebracht. In het geval van de figuur



zijn de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} x = 0 & : y_0 = 0 \\ x = l & : y_l = 0 \\ x = l & : EI y_l = 0 \\ x = 0 & : EI y_0'' - C y_0' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

waarbij C een veerconstante is.

We vinden nu

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y'')^2 dx \quad (223)$$

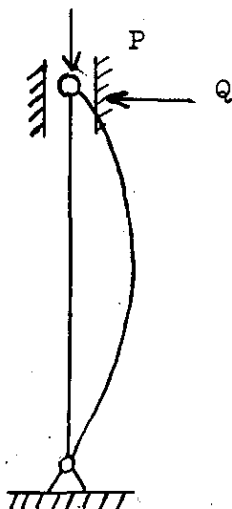
$$A_u^{(b)} = \frac{1}{2} \int_0^l P (y')^2 dx - \frac{1}{2} C (y_0')^2 \quad (224)$$

Het quotiënt van Rayleigh wordt nu

$$P = \frac{\int_0^l EI (y'')^2 dx + C (y_0')^2}{\int_0^l (y')^2 dx} \quad (225)$$

Voorbeelden :

1.



$$\text{Hier is } M_0 = M_l = y_0 = y_l = 0. \quad (226)$$

We stellen

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l} \quad (227)$$

en vinden



$$P = \frac{EI \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2} \quad (228)$$

9,869604

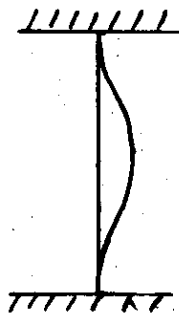
De vorm (227) is de oplossing van vergelijking (211) onder de voorwaarden (226). Nu benaderen we

$$y = c(l^3 x - 2l^2 x^3 + x^4) \quad (229)$$

voldoet aan  $y_0 = y''_0 = y_l = y''_l = 0$ .

We vinden  $P = \frac{168}{17} \frac{EI}{l^2} = 9,8823 \frac{EI}{l^2} \quad (230)$

2. Ingeklemd



Exact  $P = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$

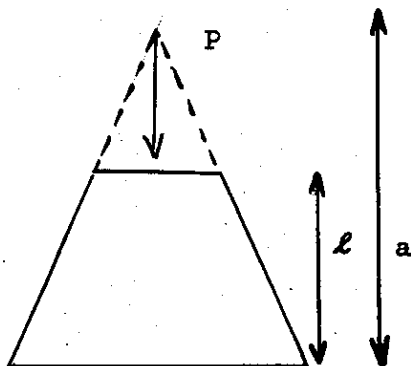
We nemen

$$y = cx^2(x - l)^2 \quad (231)$$

We vinden

$$P = \frac{0,8}{0,01903} \frac{EI}{l^2} = 42,03 \frac{EI}{l^2} \quad (232)$$

3. Konische staaf



We nemen aan dat het traagheidsmoment van  $x$  afhangt volgens

$$I = I_0 (1 - x/a)^n \quad (233)$$

en voeren de berekening uit voor  $n = 1$ .

Indien we kiezen voor de uitbuigingsvorm

$$y = y_0 \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad (234)$$

hebben we

$$P_1 = \frac{\int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^{\ell} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx} = \frac{\pi^2 EI_0}{2\ell^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\ell}{a} \left( \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4} \right) \right). \quad (235)$$

In de limiet  $a \rightarrow \infty$  (cylinder) wordt

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI_0}{4\ell^2} \quad (236)$$

de exacte waarde voor de ingeklemde cylinder. Indien echter  $\ell = a$  wordt

$$P_1 = 1,73 \frac{EI_0}{\ell^2}, \quad (237)$$

20% hoger dan de correcte waarde. Dit is het gevolg van de verkeerde benaderingsfunctie. Terwijl (234) de eigenfunctie is van de ingeklemde cylinder is deze functie niet voldoende analoog aan de nu gezochte functie. We proberen daarom

$$y = y_0 (1 - x^2/\ell^2) \quad (238)$$

en vinden

$$P_1 = 1,50 \frac{EI_0}{\ell^2}, \quad (239)$$

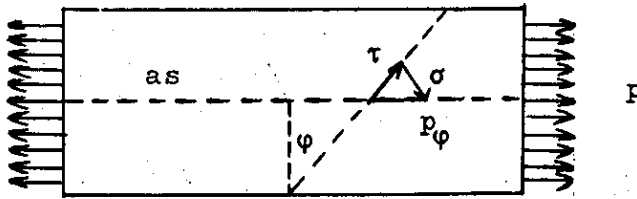
slechts 3% hoger dan de exacte waarde. Het behoeft niet verder te worden betoogd, dat Rayleigh's principe speciaal daar van toepassing is, waar de exacte knikwaarde niet of zeer moeilijk kan worden gevonden door wiskundige oplossing van de knikdifferentiaalvergelijking.

#### 11. Aanvulling van de spanningsleer

We onderscheiden de lijnspanningstoestand, de vlakspanningstoestand en de ruimtespanningstoestand.

a) lijnspanningstoestand : alle spanningen zijn evenwijdig aan een lijn, de as van de spanningstoestand. Een willekeurig vlak door de as van de spanningstoestand is spanningsvrij, d.w.z. aan de beide zijden van het vlak oefenen de delen geen kracht op elkaar uit.

Voorbeeld : (bij benadering) gerekte staaf.



We vragen welke spanningen bestaan in een vlakje, waarvan de normaal een hoek  $\varphi$  met de as maakt. Is de doorsnede  $F_\varphi$ , dan is het oppervlak van dit vlakje

$$F_\varphi = \frac{F_0}{\cos \varphi} \quad (240)$$

Voorts is

$$\sigma = p_\varphi \cos \varphi, \quad (241)$$

$$\tau = p_\varphi \sin \varphi,$$

terwijl  $pF_0 = p_\varphi F_\varphi$  , (242)

waaruit volgt, dat  $p_\varphi = p \cos \varphi$ . (243)

Uit (243) en (241) volgt

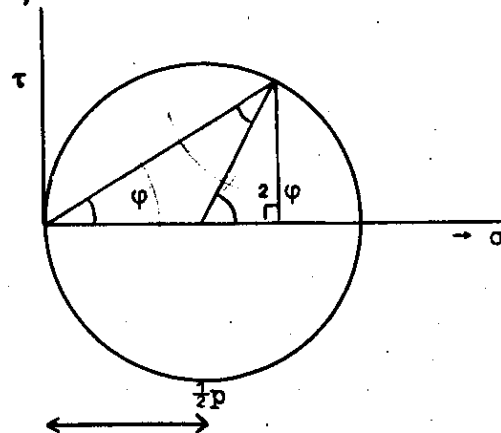
$$\sigma = p \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}p(1 + \cos 2\varphi), \quad (244)$$

$$\tau = p \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2}p(\sin 2\varphi).$$

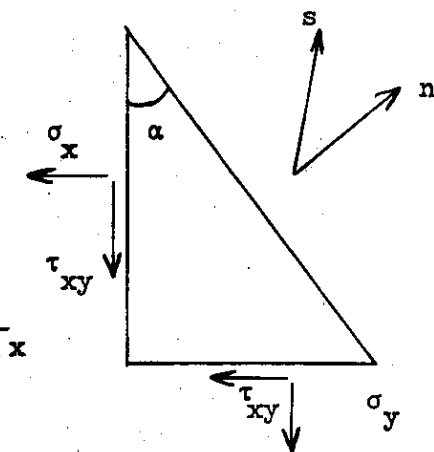
Het verband tussen  $\sigma$  en  $\tau$  voor de lijnspanningstoestand wordt dus gevonden uit

$$(\sigma - \frac{1}{2}p)^2 + \tau^2 = (\frac{1}{2}p)^2, \quad (245)$$

de cirkel van Mohr.



b) de vlakspanningstoestand. Nu zijn alle spanningen evenwijdig aan een vlak : alleen de spanningen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  zijn ongelijk nul. We bekijken een driehoek in het vlak



We bekijken het vlak onder de hoek  $\alpha$ . De spanning is  $\vec{s}$ . De evenwichtsvoorwaarden leveren op in de richting van de normaal

$$\sigma dF = \sigma_x \cos \alpha dF \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha dF \sin \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha dF \cos \alpha \quad \text{of}$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (246)$$

In de richting loodrecht de normaal werkt  $\tau$ .

$$\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (247)$$

De cirkel van Mohr vinden we door elimineren van de hoek  $\alpha$ . Er ontstaat

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (248)$$

Indien de hoofdspansingen  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  zijn wordt

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

c) In de ruimtespanningstoestand zijn geen der spanningen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} = 0$ . Er zijn drie hoofdspansingen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  te bepalen uit (35).

Om de normaalspanning te bepalen op een vlak, gegeven door de hoeken, die de normaal maakt met de hoofdassen OX, OY, OZ, nl.  $\alpha, \beta, \gamma$ , gebruiken we de vergelijking (33). Er geldt ( $\tau$ 's zijn 0)

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma. \quad (250)$$

De totale spanning  $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  (251)

vinden we uit (23)

$$p^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma, \quad (252)$$

met behulp van welke formule  $\tau$  is te berekenen.

Om weer een betrekking te vinden tussen  $\sigma$  en  $\tau$  moeten we de hoeken  $\alpha, \beta, \gamma$  elimineren uit (250), (252) en

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (253)$$

We lossen eerst de cos. op

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \\ \cos^2 \beta &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ \cos^2 \gamma &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

Uit het feit, dat de cosinussen in het kwadraat positief moeten zijn, kunnen we belangrijke conclusies trekken. Om de discussies te vereenvoudigen nemen we aan, of liever nummeren we

$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1. \quad (255)$$

Dan geldt

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0 \quad (256)$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) \leq 0 \quad (257)$$

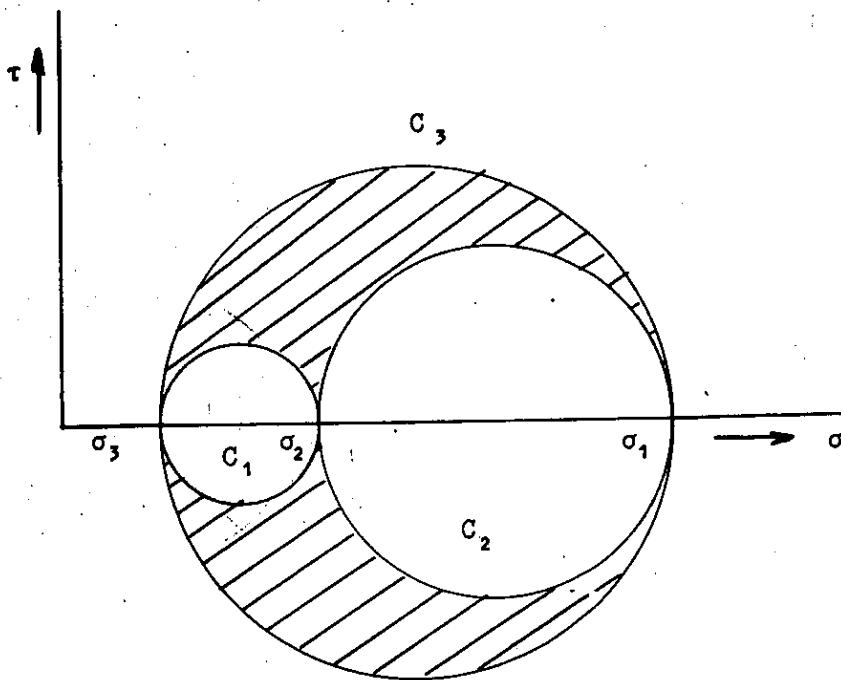
$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geq 0 \quad (258)$$

(256) is een cirkel door  $(\sigma_2, 0)$  en  $(\sigma_3, 0) \rightarrow C_1$

(257) is een cirkel door  $(\sigma_3, 0)$  en  $(\sigma_1, 0) \rightarrow C_3$

(258) is een cirkel door  $(\sigma_1, 0)$  en  $(\sigma_2, 0) \rightarrow C_2$

Alle drie middelpunten liggen op de  $\sigma$ -as. We hebben dus



Het  $(\sigma, \tau)$  punt ligt dus buiten  $C_1$  en  $C_2$  en binnen  $C_3$ , dus in het gearceerde gebied.

Het maximum  $\tau$  is gegeven door

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (259)$$

## HOOFDSTUK XII. ELASTO-KINETICA, EIGENWAARDEN, EIGENFUNCTIES

### 1. Inleiding

We hebben in hoofdstuk X het principe van Hamilton afgeleid

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (1)$$

$$\text{met } L = T - U, \quad (2)$$

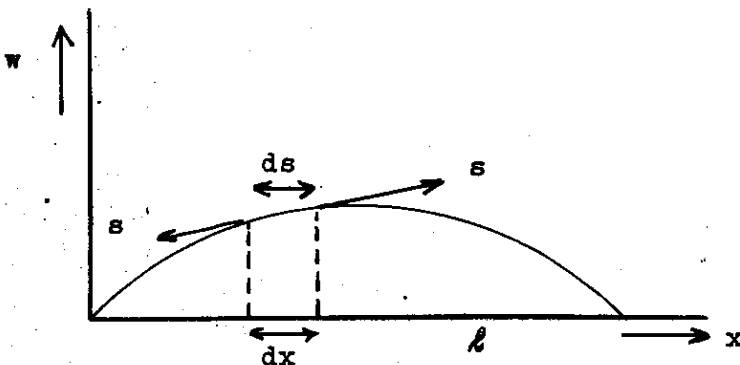
voor onvervormbare lichamen :  $U$  is de potentiële energie van de uitwendige krachten. Dit principe is echter veel algemener, we mogen onder  $U$  verstaan de totale potentiële energie van het elastisch vervormde lichaam.

Op deze wijze geïnterpreteerd levert (1) de basis voor de afleiding van de bewegingsvergelijkingen van lichamen, die tijdens of door de beweging van vorm veranderen : bv. snaren, membranen, balken, platen. We zullen beginnen de bewegingsvergelijkingen af te leiden, waarbij we uitgaan van (1). We zullen ook in sommige gevallen een meer elementaire afleiding van de bewegingsvergelijkingen geven.

### 2. De bewegingsvergelijkingen

#### a) de snaar

Een snaar is een elastische draad, welke onder invloed van de spanning, waaronder hij gerekt wordt, bewegingen kan uitvoeren om een evenwichtsstand.



We beperken ons tot kleine amplituden.

De uitbuiging is gegeven door  $w$ . In de evenwichtsstand ligt de snaar langs de  $x$ -as van 0 tot  $l$ . De "spanning" in de snaar is  $S$ . Deze spanning is geen echte spanning, doch een rekkracht.

De massa van een lengteelementje  $dx = \mu dx$ , waarin  $\mu$  de lijndichtheid is. We bekijken een lijnelement  $ds$ , ter plaatse  $x$ . De uitwijking is  $w$  en de snelheid is  $\frac{\partial w}{\partial t}$ .

De kinetische energie is dus

$$T = \frac{1}{2} \mu ds \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2. \quad (3)$$

Indien de uitbuigingen klein zijn is  $\mu = \text{constant}$ ,  $dx \approx ds$ , dus (3) wordt

$$T = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (4)$$

en de totale kinetische energie van de staaf is

$$T = \frac{1}{2} \mu \int_0^{\ell} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (5)$$

Door de spanning  $S$  heeft het lijnelementje  $ds$  een potentiële energie  $U$ . Deze is gelijk aan de energie van de lengteverandering

$$U = S(ds - dx). \quad (6)$$

Immers wordt  $dx$  op  $ds$  gebracht, dan verricht de constante (in eerste benadering) kracht  $S$  de arbeid  $S ds - S dx$ . Nu is

$$ds = \sqrt{dw^2 + dx^2} = dx \sqrt{1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \quad (7)$$

Daar  $\frac{\partial w}{\partial x}$  klein is t.o.v. 1, wordt (7) benaderd door

$$ds = dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots \right). \quad (8)$$

Dus

$$U = \frac{1}{2} S \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (9)$$

en de totale potentiële energie wordt

$$U = \frac{1}{2} S \int_0^{\ell} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (10)$$

Uit het principe van Hamilton volgt dat

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} \mu \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - S \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = 0. \quad (11)$$

Hierin zijn  $t_1$  en  $t_2$  willekeurig. Indien  $w(x, t)$  de werkelijke uitwijking is en we variëren deze tot  $w + \delta w(x, t)$ , moet als nevenvoorwaarde van het principe van Hamilton voldaan zijn aan

$$\delta w(x, t_1) = \delta w(x, t_2) = 0 \quad (12)$$

voor alle  $x$ .



We voeren formeel de variatie uit. Er ontstaat

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \left[ \mu \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) - S \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (13)$$

voor alle toelaatbare variaties.

Nu is

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \delta w, \\ \delta \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \delta w. \end{aligned} \quad (14)$$

Invullen van (14) in (13), gedeeltelijke integratieverwisseling en partiële integratie levert op

$$\begin{aligned} &\int_0^{\ell} dx \int_{t_1}^{t_2} \mu \frac{\partial w}{\partial t} d(\delta w) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} S \frac{\partial w}{\partial x} d(\delta w) = \\ &\int_0^{\ell} dx \left( \mu \frac{\partial w}{\partial t} \delta w(t) \Big|_{t_2} - \mu \frac{\partial w}{\partial t} \delta w(t) \Big|_{t_1} \right) - \int_0^{\ell} dx \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot \delta w \cdot dt - \\ &\int_{t_1}^{t_2} dt \left( S \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_{\ell} - S \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0 \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \delta w \cdot dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Op grond van (12) en

$$\delta w(0, t) = \delta w(\ell, t) = 0 \quad (16)$$

wordt dit

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot \delta w(x, t) = 0. \quad (17)$$

Daar dit voor willekeurige variaties  $\delta w(x, t)$  geldt, moet

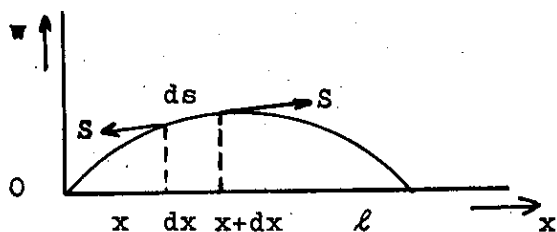
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

zijn, of met  $C^2 = S/\mu$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (19)$$

Dit is de partiële differentiaalvergelijking voor de trillende snaar.

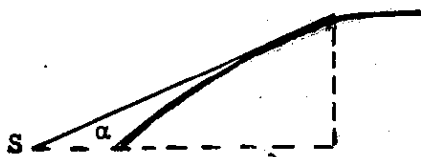
### Andere afleidingen



De spanning  $S$  constant langs de gehele snaar werkt langs de raaklijn.

De component van de kracht ter plaatse  $x$  in de richting van  $w$  is dus  $S \sin \alpha \approx S \alpha \approx S \frac{\partial w}{\partial x}$ .

Op het lijnelementje werkt dus een kracht



$$\left( S \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( S \frac{\partial w}{\partial x} \right)_x = S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (20)$$

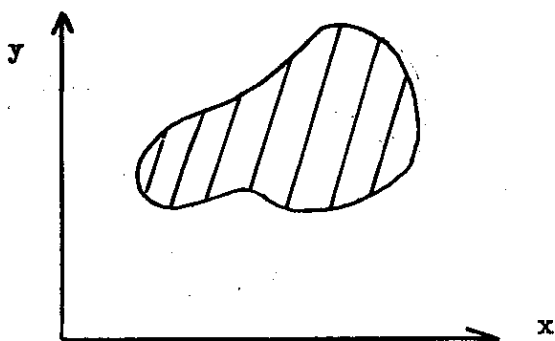
gericht naar boven. De versnelling is  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ , zodat  $K = ma$  oplevert

$$S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx. \quad (21)$$

Opmerking : deze afleiding is veel eenvoudiger dan de vorige. Het voordeel van het gebruik van het principe van Hamilton is dat het algemeen toepasbaar is en tot directe methoden van de variatierekening leidt.

### b) het membraan

Het membraan kan worden beschouwd als een tweedimensionale snaar. Het wordt langs de randen ingeklemd.



De spanning die in het membraanvlak werkt,  $S$ , is de kracht per lengte-eenheid.

De massa per oppervlakte-eenheid is  $\mu$ . We hebben

$$T = \frac{\mu}{2} \iint_{\text{opp}} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad \text{en} \quad (22)$$

$$U = \iint_{\text{opp}} (dO - dx dy) S = \iint_{\text{opp}} S dx dy \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} - 1 \approx$$

$$S/2 \iint_{\text{opp}} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (23)$$

Weer schrijven we op

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (24)$$

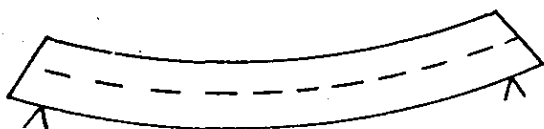
waaruit ontstaat

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (25)$$

met  $c^2 = S/\mu$ . (26)

### c) de staaf

Het verschil tussen een snaar en een staaf is, dat de snaar zich in ongespannen toestand niet verzet tegen vormveranderingen, terwijl de staaf dit wel doet: de staaf heeft stijfheid. De staaf kan allerlei trillingen uitvoeren: buigingstrillingen, torsietrillingen en longitudinale trillingen. We bekijken alleen de buigingstrillingen.



Indien de massadichtheid van de staaf  $\rho$  is, het oppervlak ter plaatse  $x$ ,  $O$ , de uitbuiging  $w$ , hebben we

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \cdot O \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx.$$

De potentiële buigingsenergie is

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (28)$$

Volgens Hamilton is dus

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left\{ \rho O \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} = 0. \quad (29)$$

Aangezien

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \delta w \\ \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w \end{aligned} \quad (30)$$

wordt dit

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left\{ \rho O \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta w - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w \right\} = \\ & \int_0^l dx \int_{t_1}^{t_2} \rho O \frac{\partial w}{\partial t} d(\delta w) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d \left( \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right) = \\ & \int_0^l dx \left\{ \rho O \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_2} - \rho O \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1} \right\} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \cdot \rho O \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot \delta w - \\ & \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta w \Big|_l - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta w \Big|_0 \right\} + \\ & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \delta w. \end{aligned} \quad (31)$$

De laatste integraal van (31) gaan we weer verder partieel integreren. We krijgen

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) d(\delta w) = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0^{\ell} - \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0 - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot \delta w. \quad (32)$$

$$\text{Steeds is } \delta w(x, t_1) = \delta w(x, t_2) = 0. \quad (33)$$

Samenvattend hebben we dus

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \left( \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \cdot \delta w(x, t) - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot \delta w \right) \Big|_{x=\ell} - \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \right) \Big|_{x=0} \right] = 0 \quad (34)$$

Hieruit volgt, dat algemeen geldt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (35)$$

de differentiaalvergelijking voor de trillende staaf, terwijl aan de randen moet worden voldaan aan

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w = 0, \quad (36)$$

de conditie, dat aan de randen geen energie wordt toegevoegd. Is de balk opgelegd, dan geldt aan de randen

$$\delta w = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (37)$$

is de balk ingeklemd, dan is

$$\delta w = 0 \quad ; \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (38)$$

Een vrije rand heeft

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (39)$$

zodat aan (36) steeds automatisch door de randvoorwaarden wordt voldaan.

#### d) de plaat

Weer geldt hier bij constante massadichtheid  $\mu$  per oppervlakteëenheid

$$T = \frac{\mu}{2} \iint_{\text{opp}} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (40)$$

terwijl U gegeven is door (zie hoofdstuk XI (197))

$$U = \frac{D}{2} \iint_{\text{opp}} \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right) dx dy. \quad (41)$$

Het probleem  $\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0$  is wat ingewikkelder dan het vooraf-

gaande, doch loopt analoog. We vinden

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\mu}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (42)$$

### 3. De trillingsvormen

#### a) inleiding

De trillingsvormen worden bepaald uit de vergelijkingen (19), (25), (35) en (42). We zoeken oplossingen van de vorm

$$w(x,y,t) = W(x,y) \cos \omega t, \quad (43)$$

dus oplossingen die een harmonische tijdafhankelijkheid vertonen. Voor de amplitudefuncties hebben we

$$\text{snaar} \quad : \quad \frac{d^2 W}{dx^2} + k^2 W = 0, \quad (44)$$

$$\text{membraan} \quad : \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0, \quad (45)$$

$$\text{staaf} \quad : \quad \frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 W}{dx^2}) - \rho_0 \omega^2 W = 0, \quad (46)$$

$$\text{plaat} \quad : \quad \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{\mu \omega^2}{D} W = 0, \quad (47)$$

$$\text{waarin } k = \omega/c \quad (48)$$

het golfgetal is.

Het probleem is de eigenwaarden te vinden, d.w.z. de waarden van  $k$  of  $\omega$  in de vergelijkingen (44) tot (47) voor homogene randvoorwaarden. Een triviale oplossing is  $W = 0$ .

#### b) De eendimensionale trilvormen

De oplossing van de snaarvergelijking (44) is zeer eenvoudig. De randvoorwaarden zijn

$$W(0) = W(\ell) = 0, \quad (49)$$

waarmee wordt uitgedrukt dat de snaar aan de randen ingeklemd is. Een algemene oplossing is

$$W(x) = A \cos kx + B \sin kx. \quad (50)$$

Invullen van (49) levert op

$$A = 0 \quad ; \quad B \sin k\ell = 0. \quad (51)$$

Een niet-triviale oplossing wordt alleen verkregen indien  $\sin k\ell = 0$ , of als

$$k = \frac{n\pi}{\ell}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (52)$$

Dit zijn de eigenwaarden van het probleem (44)-(49). De eigenfrequenties zijn

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{nc}{2\ell}. \quad (53)$$

De eigenfuncties zijn  $B \sin \frac{n\pi x}{\ell}$ .

Indien bij de staaf EI niet van x afhangt kunnen we schrijven voor (46)

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = 0, \quad (54)$$

met  $k^4 = \frac{\rho_0}{EI} \cdot \omega^2. \quad (55)$

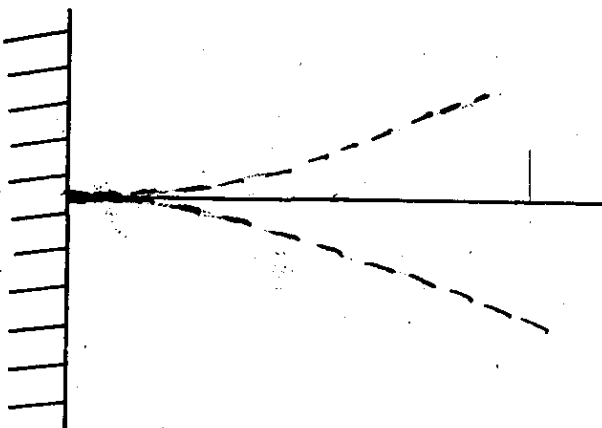
Om (54) op te lossen moeten we aan ieder eind twee randvoorwaarden geven, bv.

opgelegd :  $W = \frac{d^2 W}{dx^2} = 0, \quad (56)$

ingeklemd :  $W = \frac{dW}{dx} = 0, \quad (57)$

vrij :  $\frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{d^3 W}{dx^3} = 0. \quad (58)$

Natuurlijk zijn ook combinaties voor de twee einden te maken. We lossen als voorbeeld alleen het probleem ingeklemd vrij op.





De algemene oplossing van (54) is

$$W = A \sin kx + B \cos kx + C \sinh kx + D \cosh kx. \quad (59)$$

Nu is voor  $x = 0$  :  $W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$  of

$$\left. \begin{aligned} B + D &= 0, \\ kA + kC &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

waaruit volgt, dat  $W$  te schrijven is als

$$W = A [\sin kx - \sinh kx] + B [\cos kx - \cosh kx]. \quad (61)$$

Voor  $x = l$  geldt

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{d^3 W}{dx^3} = 0, \quad \text{dus} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} A(\sin kl + \sinh kl) + B(\cos kl + \cosh kl) &= 0, \\ A(\cos kl + \cosh kl) - B(-\sin kl + \sinh kl) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Deze vergelijkingen hebben alleen niet-triviale oplossingen, indien

$$\begin{vmatrix} \sin kl + \sinh kl & \cos kl + \cosh kl \\ \cos kl + \cosh kl & -\sin kl + \sinh kl \end{vmatrix} = 0, \quad \text{of}$$

$$\sinh^2 kl - \sin^2 kl = \cosh^2 kl + \cos^2 kl + 2 \cos kl \cosh kl. \quad (64)$$

Dit wordt

$$\cos kl \cosh kl = -1, \quad (65)$$

een transcendente vergelijking met de oplossingen

$$k_1 l = 1,8751\dots ; \quad k_2 l = 4,6941\dots ; \quad k_3 l = 7,8548\dots \text{ etc.} \quad (66)$$

Voor de eigenfrequenties hebben we volgens (55)

$$f_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho_0}} \cdot \frac{k^2 n}{2\pi}, \quad \text{dus} \quad (67)$$

$$f = \sqrt{\frac{EI}{\rho_0}} \cdot \frac{(1,8751)^2}{2\pi l^2} \quad \text{etc.} \quad (68)$$

de oneindige staaf. Een lopende golf van het type

$$W = A \sin kx \quad (69)$$

heeft als golfgetal

$$k^4 = \frac{\rho_0}{EI} \omega^2. \quad (70)$$

Wordt de fasesnelheid  $c$  gedefinieerd door

$$c = \omega/k, \quad (71)$$

dan vinden we voor deze snelheid

$$c = \frac{\omega}{\sqrt[4]{\frac{\rho_0}{EI} \cdot \omega^2}} = \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho_0}} \cdot \sqrt{\omega}. \quad (72)$$

De phasesnelheid is dus evenredig met de  $\sqrt{\omega}$ . Men spreekt van dispersie, indien de phasesnelheid met de dispersie verandert. De staaf levert ons het eenvoudigste voorbeeld van een dispergerend medium. Starten verschillende golven met verschillende frequentie, dan lopen de hogere frequentiegolven sneller dan de lagere. De verschillende frequenties komen steeds meer uit elkaar.

#### De methode van Rayleigh voor de frequentieberekening

Indien in (46)  $EI$  en  $\rho_0$  van  $x$  afhangen wordt de vergelijking zeer gecompliceerd. In vele gevallen is dan een exact mathematische behandeling uitgesloten. We passen weer de methode van Rayleigh toe. We gaan uit van (46)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \rho_0 \omega^2 \cdot W = 0, \quad (73)$$

vermenigvuldigen deze vergelijking met  $W$  en integreren over  $x$  van 0 tot  $l$ . Er ontstaat

$$\int_0^{\ell} W \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx - \omega^2 \int_0^{\ell} \rho O W^2 dx = 0. \quad (74)$$

De eerste integraal vormen we om door partiële integratie.  
We hebben

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} W \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx &= W \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \frac{W}{dx} dx = \\ &= W \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^{\ell} - \frac{dW}{dx} \cdot \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (75)$$

De eerste twee termen zijn :  $W \times$  dwarskracht en  $\frac{dW}{dx} \times$  moment aan de uiteinden. Bij natuurlijke randvoorwaarden zijn deze termen nul : bv. of  $W = 0$  of dwarskracht = 0 enz. D.w.z. aan de randen wordt geen energie toegevoerd. Dus hebben we uit (75) en (74)

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^{\ell} \rho O W^2 dx}. \quad (76)$$

Wat betekent dit ? Indien we aannemen

$$w = W(x) \cos \omega t \quad (77)$$

en dit invullen in

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho O \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (78)$$

$$\text{ontstaat } T = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot \int_0^{\ell} \rho O W^2 dx, \quad (79)$$

terwijl we voor

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad \text{vinden}$$

$$U = \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (80)$$

De middelwaarde over een periode van  $\sin^2 \omega t$  en  $\cos^2 \omega t$  is  $= \frac{1}{2}$ , dus

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^{\ell} \rho_0 W^2 dx \quad (81)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx$$

De vergelijking (74) drukt dus uit, dat

$$\bar{T} = \bar{U}, \quad (82)$$

een vergelijking, die we natuurlijk ook direct uit fysieke beschouwingen hadden kunnen vinden.

We passen nu Hamilton's principe toe

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt (T - U) = 0, \quad \text{of} \quad (83)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^{\ell} \rho_0 W^2 dx - \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \right] = 0. \quad (84)$$

De variaties moeten voldoen aan

$$\delta w(x, t_1) = \delta w(x, t_2) = 0, \quad (85)$$

voor alle  $x$ , of

$$\delta W(x) \cos \omega t_1 = \delta W(x) \cos \omega t_2 = 0. \quad (86)$$

We moeten dus  $t_1$  en  $t_2$  zo kiezen dat

$$\cos \omega t_1 = \cos \omega t_2 = 0, \quad (87)$$

terwijl dan  $\delta W(x)$  willekeurig kan worden gemaakt. We kiezen bv.

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\omega}, \quad t_2 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\omega}, \quad (88)$$

vullen dit in (84) in, integreren en vinden

$$\delta \int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \delta \int_0^{\ell} \rho_0 W^2 dx = 0. \quad (89)$$

We bepalen nu  $\delta \omega^2$  uit (76). Er ontstaat

$$\begin{aligned} \delta \omega^2 &= \frac{1}{\left[ \int_0^{\ell} \rho_0 W^2 dx \right]^2} \left\{ \int_0^{\ell} \rho_0 W^2 dx \cdot \delta \int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \delta \int_0^{\ell} \rho_0 W^2 dx \right\} = \quad (90) \\ &= \frac{1}{\int_0^{\ell} \rho_0 W^2 dx} \left\{ \delta \int_0^{\ell} EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \delta \int_0^{\ell} \rho_0 W^2 dx \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dus  $\delta \omega^2 = 0$ , hetgeen betekent, dat de waarde van  $\omega^2$  bepaald uit (76) een extremum is. Het is weer een minimum. De praktische toepassing van het principe van Rayleigh ligt weer in de mogelijkheid  $W$  te benaderen door een eenvoudige functie met parameters,  $\omega^2$  uit (76) te berekenen en de parameters zo te kiezen, dat  $\omega^2$  een minimum wordt. We vonden op deze wijze de grondfrequentie. Ook hogere eigenfrequenties, die relatieve minima zijn, zijn te berekenen, doch we gaan daar niet op in.

Voorbeeld :

We bekijken weer de ingeklemd-vrije staaf, die homogeen is. Een "oplossing" die voldoet aan

$$W = \frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{voor } x = 0,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{d^3W}{dx^3} = 0 \quad \text{voor } x = l \text{ is:}$$

$$W = cx^2(6l^2 - 4lx + x^2), \quad (91)$$

waarin  $c$  een constante is.

Deze oplossing is te verbeteren door verdere termen toe te voegen, die aan de randvoorwaarden voldoen.

Met (91) wordt (76)

$$\omega^2 = \frac{EI \int_0^l \left( \frac{d^2W}{dx^2} \right)^2 dx}{\rho_0 \int_0^l W^2 dx} = \frac{EI}{\rho_0} \cdot \frac{1}{l^4} \cdot 12,46, \quad (92)$$

waaruit

$$f = \sqrt{\frac{EI}{\rho_0} \cdot \frac{1}{2\pi l^2} \cdot \sqrt{12,46}}. \quad (93)$$

De exacte coëfficiënt is  $(1,8751)^2 = \sqrt{12,3623}$ .

c) de tweedimensionale trilvormen

De bepaling van de eigenfrequenties van een membraan komt neer op het oplossen van

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0, \quad (94)$$

met de randvoorwaarde

$$W = 0 \quad \text{aan de randen.} \quad (95)$$

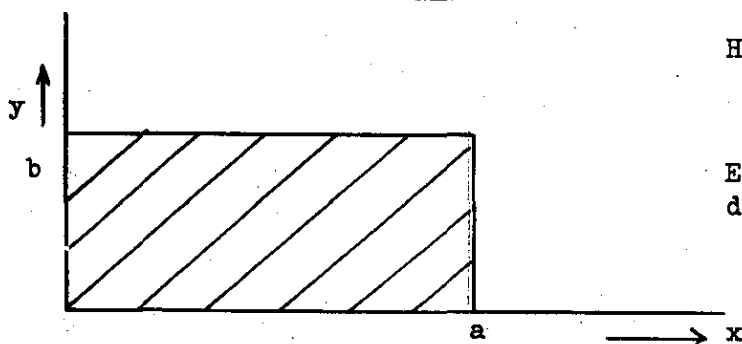
Exacte oplossingen van het probleem (94), (95) kunnen slechts gevonden worden voor eenvoudige vormen van het membraan. In andere gevallen maken we gebruik van

$$k^2 = \min_{\text{opp}} \frac{\iint \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy}{\iint_{\text{opp}} W^2 dx dy} \quad (96)$$

voor de grondfrequentie. De afleiding van de vergelijking (96) geschiedt op analoge manier uit (24) met (22) en (23) als die van (90) uit (83). De onoplosbaarheid van het randvoorwaardeprobleem voor willekeurige vormen doet pas hier duidelijk het voordeel van de formulering (24) zien, boven een elementaire.

We geven enkele eenvoudige membraantrillingen.

#### 1. het rechthoekig membraan



Het membraan is gespannen tussen

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad x = a \\ y &= 0, \quad y = b. \end{aligned}$$

Een oplossing wordt gezocht van de vorm

$$W = A \sin px \sin qy. \quad (97)$$

De oplossing (97) is inderdaad een oplossing als hij voldoet aan (94) of als

$$-p^2 - q^2 + k^2 = 0 \quad (98)$$

en aan de randvoorwaarden (95) of

$$\begin{aligned} pa &= n\pi, \\ qb &= m\pi. \end{aligned} \quad (99)$$

We hebben dus  $p = \frac{n\pi}{a}$ ,  $q = \frac{m\pi}{b}$ ,

$$k = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}, \quad (100)$$

terwijl de eigenfunctie (97) is

$$W = A_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (101)$$

De grondfrequentie  $f$  is gegeven door

$$f = \frac{W_1}{2\pi} = \frac{k_1 c}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}. \quad (102)$$

## 2. het cirkelvormig membraan

We transformeren de vergelijking (94) op pool coördinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

waardoor (94) overgaat in

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + k^2 W = 0. \quad (104)$$

Voor een cirkelsymmetrische trilling is  $\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0$ , waardoor (104) wordt vereenvoudigd tot

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + k^2 W = 0. \quad (105)$$

Dit is de Besselse differentiaalvergelijking. De oplossing is

$$W = A J_0(kr) + B Y_0(kr), \text{ met} \quad (106)$$



$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{1}{2}x)^{2m}}{(m!)^2} \quad \text{en} \quad (107)$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [\log x + C - \log 2] J_0(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (\frac{x}{2})^{2m}}{(m!)^2} \cdot \varphi(m) \quad (108)$$

$$\text{met } \varphi(m) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

$$C = 0,5772\dots$$

de constante van Euler.

Indien  $x \rightarrow 0$  blijft  $J_0$  eindig, doch  $Y_0$  gaat naar oneindig als gevolg van de term  $\log x$ . Voor een gesloten membraan moeten we dus nemen

$$B = 0 \quad \text{of} \quad (109)$$

$$W = A J_0(kr).$$

De oplossing (109) voldoet aan de differentiaalvergelijking en blijft eindig voor  $x \rightarrow 0$ . Hij moet ook nog voldoen aan de eis dat  $W = 0$  aan de rand  $r = R$  of

$$J_0(kR) = 0. \quad (110)$$

De vergelijking (110) is een transcendente vergelijking voor  $k$ . De nulpunten van  $J_0(x)$  zijn

$$x_1 = 2,4048\dots ; \quad x_2 = 5,5201\dots ; \quad x_3 = 8,6537\dots , \quad (111)$$

waaruit volgt, dat de eigenwaarden worden gevonden uit

$$k_1 = \frac{2,4048\dots}{R} ; \quad k_2 = \frac{5,5201\dots}{R} \quad \text{etc.} \quad (112)$$

De grondfrequentie is

$$f = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{k_1 c}{2\pi} = \frac{1,2024}{\pi} \frac{c}{R} \quad (113)$$

en de bijbehorende eigentrilling is

$$W = A J_0\left(2,4048 \frac{r}{R}\right) \cos \omega t. \quad (114)$$

Indien we de plaatvergelijking schrijven als

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - k^4 W = 0, \quad (115)$$

met  $k^4 = \frac{\mu \omega^2}{D}, \quad (116)$

geldt weer voor de grondfrequentie een minimumvergelijking, nl.

$$k^4 = \min \frac{\iint_{\text{opp}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dx dy}{\iint_{\text{opp}} W^2 dx dy}. \quad (117)$$

We verwachten feitelijk de meer algemene vergelijking

$$k^4 = \min \frac{\iint_{\text{opp}} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy}{\iint_{\text{opp}} W^2 dx dy} \quad (118)$$

voor willekeurige randvoorwaarden. Leidt dit zelf af. Aangezien

$$\iint_{\text{opp}} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (119)$$

te schrijven als een lijnintegraal, welke tot de variaties bij natuurlijke randvoorwaarden niet bijdraagt, zijn (117) en (118) gelijkwaardig.

Dit zien we direct door (119) te schrijven als

$$\frac{1}{2} \iint_{\text{opp}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right\} dx dy$$

wat gelijk is aan

$$\frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy - \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx, \quad (120)$$

waarbij de integraal wordt genomen langs de begrenzingskromme.

We gaan niet verder in op plaattrillingen.