

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# **THEORETISCHE MECHANICA**

Syllabus naar de colleges van

**Prof. Dr. J.B. Alblas**

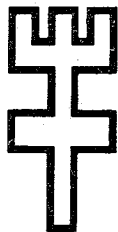
Bild Werk

STUDIEBIBLIOTHEEK  
Onderafdeling Wiskunde

**Onderafdeling  
der Wiskunde**

**THEORETISCHE  
MECHANICA**

SYLLABUS NAAR DE COLLEGES  
VAN  
PROF. DR. J. B. ALBLAS



**TECHNISCHE HOGESCHOOL  
EINDHOVEN**

DICT. NR. 214  
PRIJS f 3,00

## **ENKELE (BIBLIOGRAFISCHE) NOTITIES**

**bij**

### **Theoretische Mechanica**

Het college Theoretische Mechanica, eerder Mechanica I geheten, was bestemd voor studenten Werktuigbouwkunde, Electrotechniek en Wiskunde. Het onderhavige dictaat is onveranderd in gebruik geweest vanaf ca 1960 tot 1977.

Het voordien gebruikte dictaat, Mechanica I, verschilt alleen van Theoretische Mechanica in Hoofdstuk D. Bij Theoretische Mechanica gaat Hoofdstuk D over 'Integraalprincipes'. Bij Mechanica I gaat Hoofdstuk D over 'Electro Mechanica'. Dit laatste vermoedelijk ten behoeve van studenten Electrotechniek.

JdG, 6 Juni 2005.

# Inhoudsbeschrijving Theoretische Mechanica :

INDELING VAN DE MECHANICA

LITERATUUR

<b>pericoop</b>	<b>titel</b>	<b>blz</b>
A.	MEETKUNDIGE EN KINEMATISCHE GRONDBEGRIJPPEN	
A.I.	MEETKUNDIGE INLEIDING	
1.	Coördinaten	A.I.1
2.	Vectoren	A.I.3
3.	Tensoren	A.I.9
A.II.	MECHANISCHE STELSLS	
A.III	KINEMATICA	
1.	Het punt	A.III.1
2.	Het starre lichaam	A.III.2
3.	De relatieve beweging	A.III.4
4.	Glijden, rollen en pivoteren	A.III.8
5.	Verbindingen van systemen	A.III.12
6.	Virtuele verplaatsingen	A.III.15
A.IV.	MASSA MEETKUNDE	
1.	Dichtheden	A.IV.1
2.	Zwaartepunten	A.IV.1
3.	Traagheidsgrootheden	A.IV.3
A.V.	MASSA KINEMATICA	
1.	De hoeveelheid van beweging	A.V.1
2.	Het impulsmoment	A.V.1
3.	De kinematische energie	A.V.3

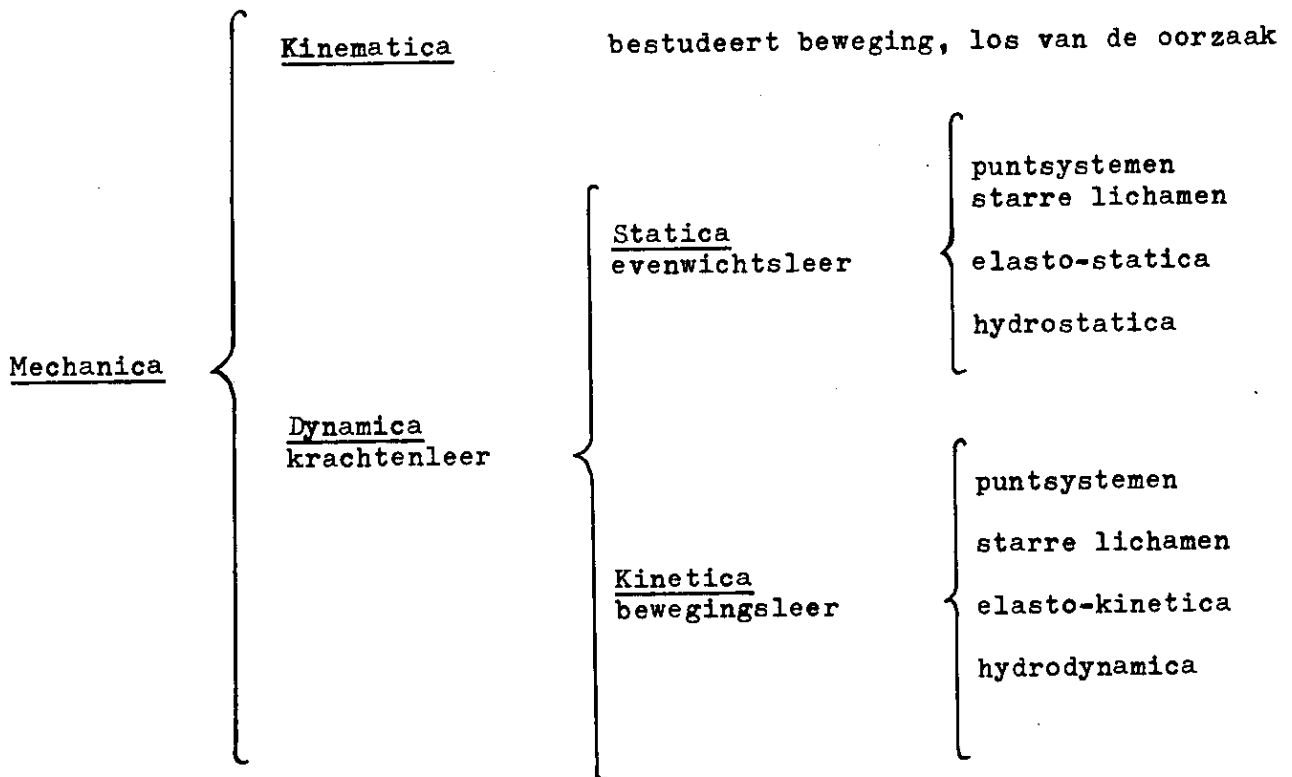
pericoop	titel	blz
B.	DYNAMISCHE GRONDBEGRIPPEN EN GRONDSTELLINGEN	
B.I.	KRACHTENLEER	
1.	Kracht	B.I.1
2.	Indeling van de krachten	B.I.1
3.	Wetten van Newton	B.I.2
4.	Eenhedenstelsels	B.I.3
5.	Het moment	B.I.3
6.	De wrijving	B.I.4
7.	De krachtdichtheid	B.I.4
8.	De momentdichtheid	B.I.5
B.II.	KRACHTVELDEN	
1.	Inleiding	B.II.1
2.	Potentiaal bij een willekeurig stelsel	B.II.3
B.III.	STATICA VAN HET SYSTEEM VAN STARRE LICHAMEN	
1.	Het principe van de virtuele arbeid	B.III.1
2.	Het principe van de stationaire potentiële energie	B.III.3
3.	Stabiliteit van het evenwicht	B.III.3
B.IV.	DYNAMICA VAN HET SYSTEEM VAN STARRE LICHAMEN	
1.	Principe van d'Alembert	B.IV.1
2.	De zwaartepuntsstelling	B.IV.1
3.	De momentenstelling	B.IV.2
4.	De vergelijkingen van Lagrange	B.IV.7
B.V.	ALGEMENE PRINCIPES	
1.	De tijdintegraal van een kracht	B.V.1
2.	De kinetische energie	B.V.1
3.	Behoudswetten	B.V.3
B.VI	BEWEGING VAN EEN MASSAPUNT IN EEN KRACHTVELD	
1.	De harmonische oscillator	B.VI.1
2.	De centrale beweging	B.VI.2
3.	Beweging met veranderlijke massa	B.VI.4

<b>pericoop</b>	<b>titel</b>	<b>blz</b>
C	ONVRIJE BEWEGING VAN SYSTEMEN	
C.I.	KINETICA VAN EINDIGE KRACHTWERKINGEN	
1.	De methode van het vrijmaken	C.I.1
2.	Onvrije puntbewegingen	C.I.2
3.	Rotatie om een as	C.I.9
4.	Rotatie om een punt	C.I.19
5.	Vlakke beweging van een vast lichaam	C.I.21
C.II.	STOTEN EN FIXEREN	
1.	Stoten	C.II.1
2.	De botsing	C.II.3
3.	Botsing van materiële lichamen	C.II.4
4.	Fixeren	C.II.4
D.	INTEGRAALPRINCIPES	
D.I.	VARIATIEREKENING	
1.	Inleiding	D.I.1
2.	De vergelijking van Euler	D.I.2
3.	Meerdere afhankelijke variabelen	D.I.7
4.	Meerdere onafhankelijke variabelen	D.I.8
D.II.	HET PRINCIPE VAN HAMILTON	
1.	De vergelijkingen van Lagrange	D.II.1
2.	Directe afleiding uit het principe van d'Alembert	D.II.1

(8 Juni 2005, JdG)

# MECHANICA I

## Indeling van de mechanica



## Literatuur

### a algemeen

- Szabó Einführung in die Technische Mechanik.  
Szabó Höhere Technische Mechanik.  
Parkus Mechanik der festen Körper.  
Meissner-Ziegler I Statik der starren, flüssigen und elastischen Körper.  
II Dynamik der starren Körper.  
III Dynamik der Systeme.

### b starre lichamen

- Becker Introduction to theoretical Mechanics.  
Timoshenko-Young Advanced Dynamics.

### c opgaven

- Mestscherski Collection of problems in Theoretical Mechanics.  
Schuh-Vollewens Vraagstukken Theoretische Mechanica.

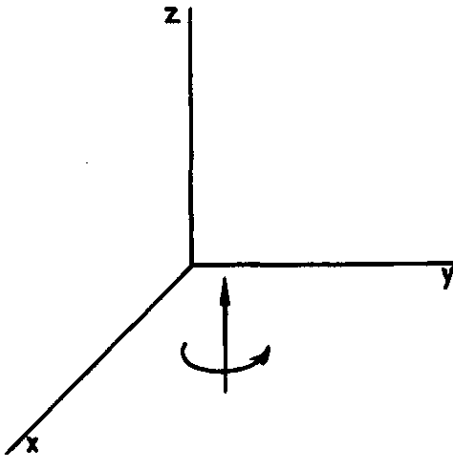
## A. Meetkundige en Kinematische Grondbegrippen

### I. Meetkundige Inleiding

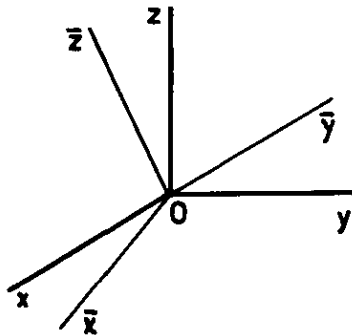
#### 1. Coördinaten

In de mechanica wordt de beweging en/of vervorming van lichamen bestudeerd. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de positie beschrijving door middel van coördinaatsystemen. In dit college zullen we ons beperken tot Cartesische coördinaten, dus tot x-y-z stelsels van loodrechte assen.

In het algemeen zal alleen gebruik gemaakt worden van rechtsdraaiende assenstelsels: de draaiing van x naar y over  $90^\circ$  behoort bij de positieve z-richting als de draaiende en voortgaande beweging van een rechtse schroef.



Verschillende standaardproblemen uit de mechanica vereisen een rotatie van het assenstelsel, bijv. van x-y-z naar  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ .



Deze rotatie is bepaald indien we de hoeken geven, welke de gestreepte assen met de ongestreepte maken.

We hebben

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= l_{\bar{x}x} x + l_{\bar{x}y} y + l_{\bar{x}z} z, \\ \bar{y} &= l_{\bar{y}x} x + l_{\bar{y}y} y + l_{\bar{y}z} z, \\ \bar{z} &= l_{\bar{z}x} x + l_{\bar{z}y} y + l_{\bar{z}z} z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



met

$$l_{\bar{a}b} = \cos(O\bar{a}, Ob). \quad (2)$$

We laten in het vervolg de streep boven de index weg en schrijven dus  $l_{ab}$  voor  $l_{\bar{a}b}$ . Daarbij wordt de conventie ingevoerd dat de eerste index steeds betrekking heeft op de gestreepte as.

De hoeken zijn natuurlijk niet onafhankelijk te kiezen. Er bestaan verschillende betrekkingen tussen de  $l_{ab}$ 's. Zo is bijv.

$$\left. \begin{aligned} l_{xx}^2 + l_{xy}^2 + l_{xz}^2 &= 1, \\ l_{xx}^2 + l_{yx}^2 + l_{zx}^2 &= 1, \\ l_{xx} l_{xy} + l_{yx} l_{yy} + l_{zx} l_{zy} &= 0, \\ l_{xx} l_{yx} + l_{xy} l_{yy} + l_{xz} l_{yz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

terwijl nog 8 overeenkomstige vergelijkingen bestaan.

Om de omslachtigheid van de schrijfwijze van (1) en (3) te vermijden voeren we een verkorte notatie in. We zullen naast elkaar gebruiken

$$x \equiv x_1, \quad y \equiv x_2, \quad z \equiv x_3, \quad (4)$$

en schrijven voor (1) dan

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^3 l_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Deze notatie kan nog meer worden verkort door de afspraak dat

- a) indien in een term twee gelijke indices voorkomen, automatisch over deze indices wordt gesommeerd (zg. Einstein-conventie),
- b) de index waarover niet wordt gesommeerd achtereenvolgens de verschillende waarden kan aannemen.

Met deze afspraken wordt (5)

$$\bar{x}_i = l_{ij} x_j. \quad (6)$$

De index  $j$  heet de dummy-index. Hij kan door iedere andere index worden vervangen (behalve  $i$ ). De index  $i$  heet de lopende index. Ook deze mag men willekeurig vervangen. Dus (6) is identiek met

$$\bar{x}_k = l_{kp} x_p. \quad (7)$$

In uitzonderingsgevallen wordt van a) en b) afgeweken. Het wordt dan speciaal vermeld.

We voeren ook in het Kronecker  $\delta$ -symbool, met de eigenschappen

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j, \\ 1 & \text{als } i = j. \end{cases} \quad (8)$$

Dan kunnen de vergelijkingen (3) worden geschreven als

$$\left. \begin{aligned} l_{ki} l_{kj} &= \delta_{ij}, \\ l_{ik} l_{jk} &= \delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

We zullen verder de transformatie als volgt aangeven

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$\bar{x}_1$	$l_{11}$	$l_{12}$	$l_{13}$
$\bar{x}_2$	$l_{21}$	$l_{22}$	$l_{23}$
$\bar{x}_3$	$l_{31}$	$l_{32}$	$l_{33}$

We kunnen ook de  $x_i$ 's uitdrukken in de  $\bar{x}_k$ 's. Daartoe moeten we de vergelijkingen (6) oplossen. Er ontstaat

$$l_{ik} \bar{x}_i = l_{ik} l_{ij} x_j = \delta_{kj} x_j = x_k, \quad (10)$$

dus

$$x_k = l_{ik} \bar{x}_i.$$

## 2. Vectoren

Een skalar is een grootte, welke getypeerd wordt door één getal, zijn waarde.

Een vector heeft in de driedimensionale ruimte drie kentallen. Het is een grootte, welke zowel grootte als richting heeft. Wij geven vectoren aan door een symbool, voorzien van een pijl:  $\vec{F}$ .

Ieder stelsel van drie getallen vormt nog geen vector. Opdat drie getallen een vector vormen, moeten zij zich bij coördinatentransformaties op voorgeschreven wijze transformeren.

Een typische vector is de positievector  $\vec{r}$  van een punt, gemeten vanuit de oorsprong. We kunnen schrijven

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (11)$$

waarbij  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  en  $\vec{k}$  de eenheidsvectoren langs de x-y-z-as zijn. Dus

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1. \quad (12)$$

Bij overgaan op het  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ -stelsel wordt

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \bar{x}\vec{\bar{i}} + \bar{y}\vec{\bar{j}} + \bar{z}\vec{\bar{k}}. \quad (13)$$

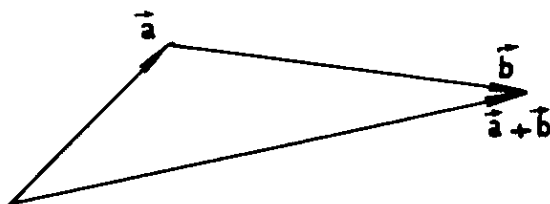
De componenten van  $\vec{r}$  transformeren zich volgens (6) en (10). We zullen een vector definiëren als een grootte, waarvan de componenten zich op deze wijze transformeren.

De som van twee vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$ , met de componenten  $a_i$  en  $b_i$ , is  $\vec{a} + \vec{b}$  met de componenten  $a_i + b_i$ . Er geldt

$$a_i = a_i + b_i, \quad (14)$$

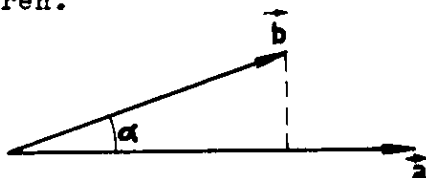
waaruit volgt:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ , (commutatieve wet),
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ , (associatieve wet),
- de parallelogramconstructie:



### Skalair product

Het skalair product van de vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  is de skalar  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$  en wordt aangegeven door  $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ . De hoek  $\alpha$  is de hoek tussen de vectoren.



Het skalair product is nul als  $\vec{a} = \vec{0}$  of  $\vec{b} = \vec{0}$  of  $\alpha = \pi/2$ .

We hebben

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}, \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Verder geldt

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

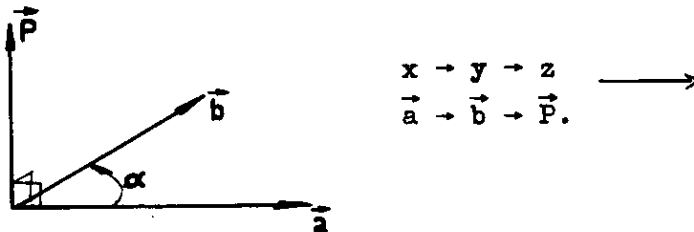
Uit (15) en (16) volgt

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_i b_i. \quad (17)$$

### Vectorproduct

$$\vec{P} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (18)$$

is een vector, loodrecht op het vlak van  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$ , van de grootte  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$ , terwijl de zin wordt bepaald overeenkomstig de rechtse schroef:



Er geldt

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}. \quad (19)$$

Verder

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \quad (20)$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \quad (21)$$

Uit (20) en (21) volgt

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Het symbool  $e_{ijk}$ 

We voeren in de grootheid  $e_{ijk}$  met de volgende eigenschappen

- a)  $e_{ijk} = 0$  als twee of drie indices onderling gelijk zijn.  
 b)  $e_{ijk} = +1$  of  $-1$  als  $i, j$  en  $k$  een even resp. een oneven permutatie vormen.

Dus  $e_{123} = 1; e_{213} = -1; e_{223} = 0.$

Indien  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  kunnen we voor de exponenten van  $\vec{c}$  schrijven

$$c_i = e_{ijk} a_j b_k. \quad (23)$$

Tijdafgeleide van een vector

Indien een vector  $\vec{p}$  van de tijd afhangt:  $\vec{p} = \vec{p}(t)$ , wordt de tijdafgeleide als volgt gedefinieerd:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t}. \quad (24)$$

Indien de tijdafgeleide bestaat, geldt

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) \equiv \dot{\vec{p}}(t) = \dot{p}_x \vec{i} + \dot{p}_y \vec{j} + \dot{p}_z \vec{k}. \quad (25)$$

Voor het skalair product geldt

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \vec{q}) = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{q} + \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} \quad (26)$$

en voor het vectorproduct

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{q}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{q} + \vec{p} \times \dot{\vec{q}}. \quad (27)$$

Plaatsafgeleide van een skalar

Indien een skalar  $\varphi$  over een ruimtelijk gebied is gedefinieerd, kunnen de afgeleiden naar de coördinaten bestaan, bijv.

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \equiv \varphi_{,i}, \quad (28)$$

waarbij we differentiatie naar  $x_i$  door  $\dots_i$  aangeven. De vector  $\vec{g}$  met de componenten (28) heet de gradient van  $\varphi$ :

$$\vec{g} = \text{grad } \varphi. \quad (29)$$

### Plaatsafgeleiden van een vector

Ook vectoren kunnen differentieerbaar zijn. De divergentie van de vector  $\vec{g}$  is

$$\text{div } \vec{g} \equiv \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \equiv g_{i,i}. \quad (30)$$

De rotatie van de vector  $\vec{g}$  is gedefinieerd door

$$\text{rot } \vec{g} = \left( \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \vec{k}, \quad (31)$$

waarvoor kan worden geschreven

$$e_{ijk} g_{k,j}. \quad (32)$$

### Stelling van Gauss

Voor een voldoende regulier veld geldt

$$\int_{\text{vol}} a_{i,i} dV = \int_S a_i n_i dS, \quad (33)$$

waarbij de integraal links over een volume  $V$  wordt genomen, dat begrensd is door het oppervlak  $S$ .  $n_i$  is de  $i$ -de component van de eenheidsnormaal op het oppervlakte-element  $dS$ , gericht naar buiten. De formule (33) wordt ook geschreven als

$$\int_{\text{vol}} \text{div } \vec{a} dV = \int_S a_n dS. \quad (34)$$

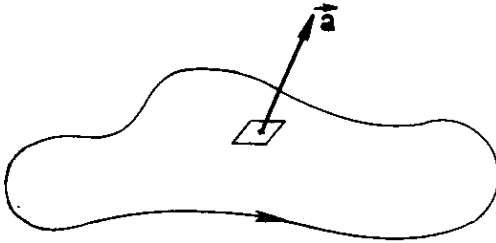
Stelling van Stokes

Deze luidt

$$\int_S (\text{rot } \vec{a})_n dS = \oint \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad (35)$$

of in indexnotatie

$$\int_S e_{ijk} a_{k,j} n_i dS = \int a_i dx_i. \quad (36)$$



De richting waarin de contour moet worden doorlopen en de positieve richting van de eenheidsnormaal op het oppervlakte-element zijn in de figuur aangegeven.

Indien  $\text{rot } \vec{a} = 0$  wordt volgens Stokes  $\oint \vec{a} \cdot d\vec{s} = 0$ , waaruit volgt dat

$$\int_a^b \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad \text{onafhankelijk is van de weg om van het punt a}$$

naar b te komen. Dan geldt

$$\vec{a} = \text{grad } \varphi \rightarrow a_i = \varphi_{,i} \quad (37)$$

de vector  $\vec{a}$  is af te leiden van een potentiaal.

Opgaven

1. Bewijs (15), (19), (22), (34) en (36).
2. Bewijs  $\delta_{ij} \delta_{ij} = 3$ ;  $e_{ijk} e_{kji} = -6$ .
3. Bewijs  $e_{ijk} e_{ist} = \delta_{js} \delta_{kt} - \delta_{jt} \delta_{ks}$ .
4. Bewijs met behulp van de indexnotatie

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

5. Bewijs met behulp van 3 dat

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

### Indeling van de vectoren in de mechanica

De vectoren, welke in de mechanica optreden, kunnen niet alle op dezelfde wijze worden behandeld. Hoewel ze bij rotatie van het assenstelsel dezelfde transformatie ondergaan, kunnen ze in andere eigenschappen onderling verschillen. Er zijn

- (a) gebonden vectoren. Deze zijn gelocaliseerd. Ze behoren bij een bepaald punt in het lichaam en kunnen niet worden verplaatst. Voorbeeld: de snelheid van een punt in een vast lichaam (6 kengrootheden).
- (b) glijdende vectoren. De werking van deze verandert niet, indien de vectoren langs hun as worden verplaatst. Voorbeeld: de kracht op een vast lichaam (5 kengrootheden).
- (c) vrije vectoren. Deze kunnen willekeurig evenwijdig worden verplaatst door het (starre) lichaam. Voorbeeld: koppel, hoeksnelheid (3 kengrootheden).

De vectoren kunnen nog op een andere wijze worden ingedeeld. Men heeft

- (a) polaire vectoren. Bij een inversie van het coördinatensysteem, dat is een omkering van het teken van de drie coördinaten, keren ook de tekens van de componenten om. Voorbeeld: snelheid.
- (b) axiale vectoren. Bij een inversie blijven hier de componenten onveranderd. Voorbeeld: moment, ieder vectorproduct van twee polaire vectoren.

### 3. Tensoren

Een tensor van de nulde orde is een grootheid, welke niet afhangt van de keuze van het coördinatensysteem. Het is dus een skalar.

Een tensor van de eerste orde is een grootheid, waarvan de (drie) componenten bij rotatie van het assenstelsel zich transformeren volgens

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_i &= l_{ij} a_j, \\ \text{en } a_i &= l_{ji} \bar{a}_j. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Een tensor van de tweede orde is een grootheid, waarvan de (negen) componenten bij rotatie van het assenstelsel zich transformeren volgens

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{ij} &= l_{ik} l_{je} a_{ke}, \\ \text{en } a_{ij} &= l_{ki} l_{ej} \bar{a}_{ke}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$



Op overeenkomstige wijze worden tensoren van hogere orde gedefinieerd. We beperken ons in dit college tot tensoren van de tweede orde.

De optelling van tensoren is commutatief. Dus

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = B_{ij} + A_{ij}, \quad (40)$$

waarbij onder de som van twee tensoren is verstaan de tensor, die men verkrijgt door de componenten op te tellen.

Tensoren zijn transitief.

Stel we hebben de coördinatentransformaties

$$x_i' = l_{ij} x_j; \quad x_i'' = l_{ij}' x_j'; \quad x_i''' = l_{ij}'' x_j'', \quad (41)$$

dan geldt

$$l_{ij}'' = l_{ik}' l_{kj}. \quad (42)$$

Ook geldt

$$a_{ij}'' = l_{ik}'' l_{jl}'' a_{kl} \quad (43)$$

en

$$a_{ij}'' = l_{ip}' l_{jq}' a_{pq}' = (l_{ip}' l_{jq}') (l_{pk} l_{ql}) a_{kl} \quad (44)$$

De vergelijkingen (43) en (44) zijn identiek.

De Kronecker  $\delta$  is een tensor van de tweede orde. We hebben

$$\bar{\delta}_{ij} = l_{ik} l_{jl} \delta_{kl} = l_{ik} l_{jk} = \delta_{ij}, \quad (45)$$

onafhankelijk van het coördinatenstelsel.

Een symmetrische tensor heeft de eigenschap

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (46)$$

een keersymmetrische

$$a_{ij} = -a_{ji}. \quad (47)$$

Iedere tensor is de som van een symmetrische en een keersymmetrische tensor.

Belangrijke tensoren uit de mechanica zijn de traagheidstensor, de spanningstensor en de deformatietensor. Ze zijn alle symmetrisch.

Hoofdassen van een symmetrische tensor van de tweede orde

Bij coördinatentransformaties, transformeren ook de componenten van de tensor. Is er een assenstelsel, waarin de symmetrische tensor  $a_{ij}$  de vorm heeft van een diagonaalmatrix?

We geven een eenheidsvector door  $\vec{n}$  aan, met de componenten  $n_j$ . Dan is  $p_i = a_{ij} n_j$  de  $i$ -de component van de vector  $\vec{p}$ . Indien  $\vec{n}$  langs  $\vec{p}$  valt wordt  $\vec{p} = a\vec{n}$ , waaruit volgt

$$(a_{ij} - a \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (48)$$

Bij gegeven  $a_{ij}$  vormt (48) een stelsel van drie homogene, lineaire vergelijkingen voor  $n_j$ . Er is alleen een oplossing, indien

$$|a_{ij} - a \delta_{ij}| = 0, \quad (49)$$

waarbij onder  $|\dots|$  de determinant wordt verstaan.

Bij uitwerken vormt (49) een derdegraadsvergelijking in  $a$ , de z.g. eigenwaarde. De vorm van (49) is

$$a^3 - A^{(1)}a^2 - A^{(2)}a - A^{(3)} = 0, \quad (50)$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} A^{(1)} &= a_{ii} \\ A^{(2)} &= \frac{1}{2} (a_{ij} a_{ji} - a_{ii} a_{jj}), \\ A^{(3)} &= |a_{ij}| \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

De grootheden  $A^{(k)}$  heten de invarianten, zij zijn scalaires en veranderen niet bij draaiing van het assenstelsel. De eigenwaarden of hoofdwaarden van de tensor zijn de oplossingen van (50). Zij zijn reëel, bij reële, symmetrische  $a_{ij}$ . Want volgens (48) geldt voor een oplossing  $a_1$  van (50) met de bijbehorende  $n_j^{(1)}$

$$a_{ij} n_j^{(1)} = a_1 n_i^{(1)}. \quad (52)$$

Voor de oplossing  $a_2$  van (50) geldt eveneens

$$a_{ij} n_j^{(2)} = a_2 n_i^{(2)} \quad (53)$$

Vermenigvuldig (52) met  $n_i^{(2)}$  en (53) met  $n_i^{(1)}$  en trek af. Dan ontstaat

$$a_{ij} (n_j^{(1)} n_i^{(2)} - n_j^{(2)} n_i^{(1)}) = (a_1 - a_2) (n_i^{(1)} n_i^{(2)}). \quad (54)$$

Door de symmetrie is de linkervorm = 0. Dus

$$(a_1 - a_2) n_i^{(1)} n_i^{(2)} = 0 \quad (55)$$

Indien  $a_1$  complex zou zijn, kunnen we voor  $a_2$  de toegevoegd complexe nemen:  $a_2 = \bar{a}_1$ . Dan is ook  $n_i^{(1)}$  complex en  $n_i^{(2)} = \bar{n}_i^{(1)}$ . Dan wordt echter  $n_i^{(1)} \cdot n_i^{(2)} = n_i^{(1)} \bar{n}_i^{(1)} > 0$ , dus  $a_1 = a_2$ .

Dit is in tegenspraak met de onderstelling van toegevoegd complex karakter. Dus zijn de drie  $a_k$ 's reëel.

Indien  $a_1 \neq a_2$ , volgt uit (55) dat

$$n_i^{(1)} \cdot n_i^{(2)} = 0, \quad (56)$$

d.w.z. de bijbehorende hoofdrichtingen staan loodrecht op elkaar. Zijn er dus drie ongelijke hoofdrichtingen, dan staan de drie richtingen loodrecht op elkaar. Indien twee hoofdwaarden gelijk worden bijv.  $a_1 = a_2$ , behoeft niet aan (56) te worden voldaan. Iedere combinatie  $\alpha n_i^{(1)} + \beta n_i^{(2)}$  voldoet dan aan

$$\alpha_{ij} [\alpha n_j^{(1)} + \beta n_j^{(2)}] = a_i [\alpha n_i^{(1)} + \beta n_i^{(2)}], \quad (57)$$

waarin  $\alpha$  en  $\beta$  nog willekeurig kunnen worden gekozen. We kunnen dan steeds  $n_i^{(1)}$  en  $n_i^{(2)}$  zo kiezen dat ze loodrecht worden. Dan worden  $\alpha$  en  $\beta$  bepaald uit (bij eenmaal gekozen  $n_i^{(1)}$  en  $n_i^{(2)}$ )

$$\left. \begin{aligned} (\alpha n_i^{(1)} + \beta n_i^{(2)}) (\alpha n_i^{(1)} + \beta n_i^{(2)}) &= 1, \\ (\alpha n_i^{(1)} + \beta n_i^{(2)}) \cdot n_i^{(1)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Meetkundig betekent het zoeken van de hoofdrichtingen het op hoofdassen brengen van het op de tweedegraads oppervlak(ken)

$$a_{ij} x_i x_j = 1, \quad (59)$$

en/of

$$a_{ij} x_i x_j = -1. \quad (60)$$

## II. Mechanische Stelsels

Naar hun natuurkundig karakter kunnen de mechanische stelsels worden ingedeeld in stelsels van gasvormige, vloeibare en vaste lichamen. De vaste lichamen kunnen weer worden onderverdeeld in ondeformeerbare lichamen (hier aangeduid met star) en deformeerbare lichamen. Het is duidelijk, dat het concept van het starre lichaam een idealisatie inhoudt, daar ieder lichaam steeds deformaties zal ondergaan. In Mechanica I worden uitsluitend de eigenschappen van starre lichamen besproken, in Mechanica II die van deformeerbare, in het bijzonder elastische lichamen.

Onderscheid wordt gemaakt tussen een lichaam en een systeem of een stelsel van lichamen. Een bijzonder star lichaam is een materieel punt, dat ontstaat indien het volume van het lichaam zeer gering is, maar de dichtheid zo groot dat het product

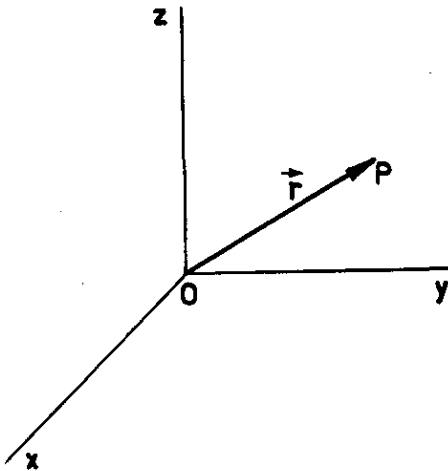
$$m = \rho V \quad (1)$$

eindig blijft. Liever beperken we het begrip tot een vast lichaam, waarvan we alleen de translatie beschouwen. Het enkelvoudige lichaam zal naast een translatie nog een rotatie kunnen uitvoeren. In het stelsel kunnen meerdere lichamen zich ten opzichte van elkaar bewegen.

Het aantal graden van vrijheid van een willekeurig systeem is het minimum aantal coördinaten, dat nodig is om de positie van het systeem te bepalen.

Een materieel punt heeft dus maximaal drie graden van vrijheid, het starre enkelvoudige lichaam maximaal zes. Een materieel stelsel kan een willekeurig eindig aantal graden van vrijheid hebben.

Een systeem van n lichamen moet worden onderscheiden van een verzameling van n vrije lichamen, omdat in het systeem de lichamen gekoppeld zijn. Zodra de bewegingsvrijheid van een lichaam wordt beperkt, bijv. doordat het gekoppeld is aan andere lichamen spreken we van een onvrije beweging, soms ook van een gedwongen beweging.

III. Kinematica1. Het punt

De positie van een willekeurig punt van het lichaam wordt bepaald door de radiusvector uit de oorsprong. De baan van het punt wordt door de parameterstelling gegeven

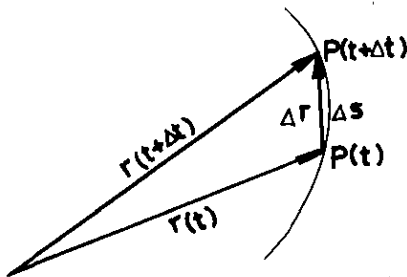
$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1)$$

De snelheid  $\vec{v}$  is gedefinieerd door

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \quad (2)$$

de versnelling  $\vec{a}$  door

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \quad (3)$$



P doorloopt zijn baan. In het interval  $t \rightarrow t + \Delta t$  doorloopt P het baanelement  $\Delta s$ , waarbij de posities bepaald zijn resp. door  $\vec{r}(t)$  en  $\vec{r}(t + \Delta t)$ . De koorde van  $\Delta s$  is  $\Delta r$ .

In de limiet is  $\Delta \vec{r} = \Delta s \cdot \vec{\tau}$ , (4)  
waarin  $\vec{\tau}$  de eenheidsvector is langs de raaklijn. Dus

$$\vec{v} = v \vec{\tau}, \quad (5)$$

waarin  $v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$ . (6)

Uit (3) volgt

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v} \vec{\tau} + v \dot{\vec{\tau}}. \quad (7)$$

Nu is  $\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds},$  (8)

terwijl

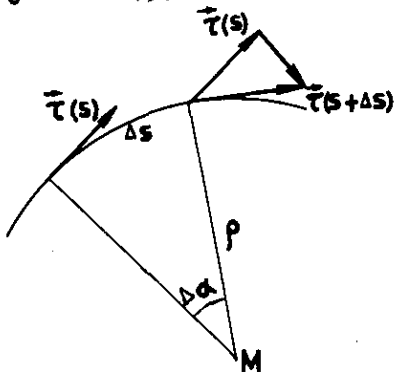
$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad (9)$$

is, waarin  $\vec{n}$  de eenheidsvector langs de normaal is, gericht op het kromtemiddelpunt en  $\rho$  de kromtestraal is.

Dus

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \quad (10)$$

Bewijs van (9)



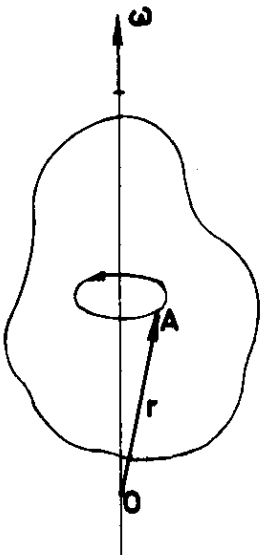
$$|\vec{\tau}| = 1$$

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2 \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \cdot 1 = \Delta\alpha$$

$$\lim \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

Het snijpunt van twee "naburige" normalen is het kromtemiddelpunt M.

## 2. Het starre lichaam



Een vast lichaam draait om een vaste as. Ieder punt beschrijft een cirkel, waarvan het middelpunt op de as ligt. Indien de hoek, waarover gedraaid is, wordt aangegeven door  $\varphi$ , is de

hoeksnelheid  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ . We voeren voor de hoeksnelheid een vectorgrootheid in.

De vector  $\vec{\omega}$  wordt als volgt gedefinieerd

(a)  $\vec{\omega}$  heeft de richting van de draaiingsas,

(b)  $|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$ , de grootte van de hoeksnelheid,

(c) draaizin en richting van  $\vec{\omega}$  corresponderen als bij de schroef.

Voor een willekeurig punt A van het lichaam, bepaald door  $\vec{r}$  vanuit een vaste oorsprong O op de as, geldt voor de snelheid  $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (11)$$

Indien het lichaam niet draait om een vaste as, doch om een vast punt, is er een draaiingsas door dat punt, welke veranderlijk is van richting. De draaiingsvector  $\vec{\omega}$  heeft nu de veranderlijke richting van deze as.

Indien het lichaam geen vast punt heeft, kan de beweging van ieder punt worden beschouwd als de translatie met een willekeurig punt mee en de rotatie om een as door dat punt. Ook nu bestaat dus een vector  $\omega$ .

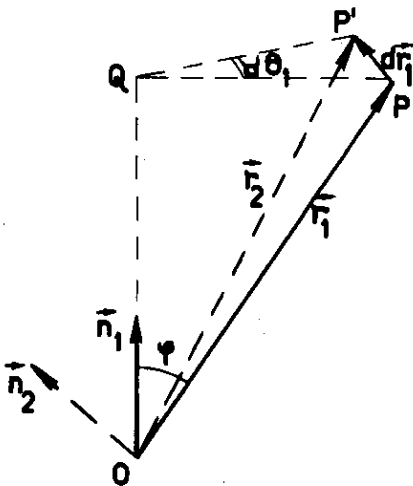
Het is in het geheel niet vanzelfsprekend, dat  $\vec{\omega}$  een vector is. Stel dat het lichaam een eindige rotatie  $R_1$  uitvoert en daarna een eindige rotatie  $R_2$  om een andere as. We schrijven dan voor de resulterende rotatie  $R_1 + R_2$ . Indien het lichaam eerst  $R_2$  uitvoert en daarna  $R_1$ , is de rotatie  $R_2 + R_1$ . Het blijkt dat

$$R_1 + R_2 \neq R_2 + R_1. \quad (12)$$

Eindige rotaties zijn dus niet door vectoren voor te stellen. Dat  $\vec{\omega}$  wel een vector is, volgt uit de voorstelling (11), waarin de vectoren  $\vec{v}$  en  $\vec{r}$  optreden. Daaruit volgt weer, dat voor infinitesimale rotaties  $\Delta R_1$  en  $\Delta R_2$  moet gelden

$$\lim_{\substack{\Delta R_1 \rightarrow 0 \\ \Delta R_2 \rightarrow 0}} (\Delta R_1 + \Delta R_2) = \lim_{\substack{\Delta R_1 \rightarrow 0 \\ \Delta R_2 \rightarrow 0}} (\Delta R_2 + \Delta R_1). \quad (13)$$

De formule (13) kan direct worden bewezen.



Het lichaam draait om OQ.  $\vec{n}_1$  is de eenheidsvector langs OQ. P is op de tijd t in  $\vec{r}_1$ , op de tijd t+dt in  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + d\vec{r}_1$ . De hoek waarover P draait is  $d\theta_1$ .

Dan is

$$|d\vec{r}_1| = r_1 \sin \varphi \cdot d\theta_1 \quad \text{of}$$

$$d\vec{r}_1 = \vec{n}_1 d\theta_1 \times r_1. \quad (14)$$

Daaruit volgt,

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{n}_1 \frac{d\theta_1}{dt} \times r_1 = \vec{\omega}_1 \times r_1. \quad (15)$$

Hierna draait het lichaam om een andere as, gegeven door  $\vec{n}_2$ . De totale verplaatsing is

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = \vec{n}_1 d\theta_1 \times \vec{r}_1 + \vec{n}_2 d\theta_2 \times \vec{r}_2, \quad (16)$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \\ &= \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times (\vec{r}_1 + d\vec{r}_1) = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times d\vec{r}_1. \end{aligned} \quad (17)$$

In de limiet geldt dus

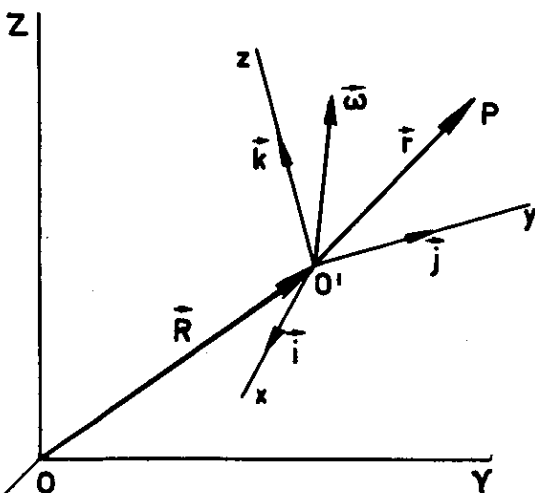
$$\begin{aligned} \vec{v} &= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_1 \text{ of} \\ \vec{\omega} &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1. \end{aligned} \quad (18)$$

De hoekversnelling is gedefinieerd door

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (19)$$

### 3. De Relatieve Beweging

Het is vaak nuttig twee assenstelsels in te voeren, een absoluut (stilstaand) en een meebewegend. We zoeken het verband tussen de kinematische grootheden, uitgedrukt in beide coördinatenstelsels.



Het X-Y-Z-stelsel is vast, het x-y-z-stelsel is bewegend. De positie van het x-y-z-stelsel wordt bepaald door  $\vec{R}$ , die de oorsprong  $O'$  vastlegt in X-Y-Z en de hoeken, welke de assen onderling met elkaar maken.

De positie van een punt P, in het x-y-z-stelsel gegeven door  $\vec{r}$ , is in het X-Y-Z-stelsel bepaald door

$$\vec{R} + \vec{r} = \vec{R} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (20)$$



De snelheid van P is de tijdafgeleide hiervan, dus

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}. \quad (21)$$

We zullen afleiden

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}, \quad (22)$$

waarmee (21) overgaat in

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}, \quad (23)$$

met

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (24)$$

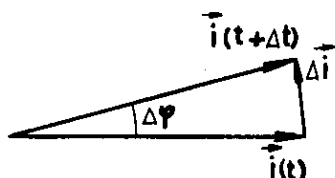
We voeren in de sleepsnelheid  $\vec{v}_{sl}$  door

$$\vec{v}_{sl} = \dot{\vec{R}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (25)$$

waarmee (23) kan worden geschreven als

$$\vec{v} = \vec{v}_{sl} + \vec{v}_{rel}. \quad (26)$$

Afleiding van (22).



De eenheidsvector  $\vec{i}$  draait gedurende de tijd  $\Delta t$  over de hoek  $\Delta\varphi$ . Dan is

$$\left| \frac{d\vec{i}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

$\Delta\varphi$  is een draaiing om de y-as en een om de z-as. Daar de draaiingen infinitesimaal zijn, kunnen ze worden opgeteld. De draaiing om de y-as heeft de grootte en richting  $-\omega_y \vec{k}$ , terwijl de draaiing om de

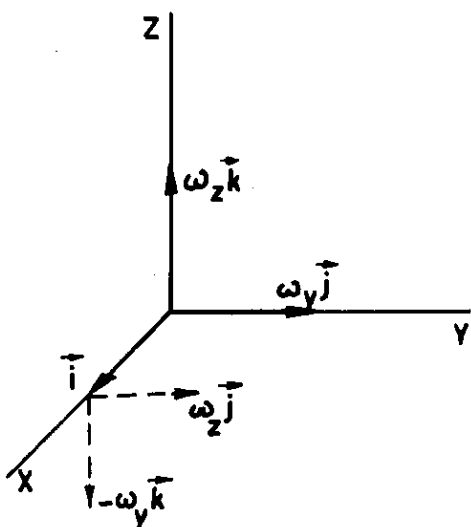
z-as aanleiding geeft tot  $+\omega_z \vec{j}$ .

Daar  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$

wordt

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}.$$

De formule voor de sleepsnelheid (25) heeft een belangrijke toepassing. Indien het stelsel x-y-z met het lichaam meebeweegt, wordt de snelheid van een punt van het lichaam P uitgedrukt in de snelheid van een ander punt van het



lichaam  $O'$ , dat willekeurig kan worden gekozen. Stel de snelheid van  $O'$  is  $\vec{v}_0$ , dus  $\vec{v}_0 \equiv \dot{\vec{R}}$ , dan geldt

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (27)$$

Deze formule heeft zeer veel toepassingen in de kinematica en dynamica. De vector  $\vec{\omega}$  is een vrije vector. Dit bewijzen we als volgt. Stel  $\vec{\omega}$  is gebonden aan  $O'$ . Dan geldt voor  $P$  met de snelheid  $\vec{v}_1$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O_1} \quad (28)$$

waarin  $\vec{r}_{O_1}$  de vector  $O'P$  is. Voor  $Q$  met de snelheid  $\vec{v}_2$  en de positie  $O'Q \equiv \vec{r}_{O_2}$  geldt

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O_2} \quad (29)$$

Door aftrekken wordt gevonden uit (28) en (29)

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{O_1} - \vec{r}_{O_2}) = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{21} \quad (30)$$

Deze formule heeft de structuur van (27) met  $\vec{\omega}$  behorende bij  $Q$  en  $\vec{r}_{21}$  gemeten vanuit  $Q$ . Dus  $\vec{\omega}$  is een vrije vector.

Indien de oorsprong  $O'$  blijft samenvallen met  $O$ , dus het x-y-z-stelsel om het vaste punt  $O$  roteert, vereenvoudigt de formule (23) tot

$$\vec{v} = \vec{v}_{rel} + (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (31)$$

Dit kan worden geschreven als

$$\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{abs} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rel} + (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (32)$$

waarbij  $\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{abs}$  de verandering van  $\vec{r}$  is gemeten in het X-Y-Z-stelsel

en  $\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rel}$  die, gemeten in het x-y-z-stelsel. De formule (32) kan

worden gegeneraliseerd tot een formule voor de verandering van een willekeurige vector  $\vec{p}$ :

$$\left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{abs} = \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{rel} + (\vec{\omega} \times \vec{p}) \quad (33)$$

Dit zien we als volgt. We ontbinden  $\vec{p}$  zowel in het X-Y-Z-stelsel (eenheidsvectoren  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ ) als in het x-y-z-stelsel:

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}. \quad (34)$$

Differentiatie geeft

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{abs}} = \frac{dp_x}{dt} \vec{i} + \frac{dp_y}{dt} \vec{j} + \frac{dp_z}{dt} \vec{k} + p_x \frac{d\vec{i}}{dt} + p_y \frac{d\vec{j}}{dt} + p_z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (35)$$

Dit is echter

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{abs}} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{rel}} + (\vec{\omega} \times \vec{p}),$$

op grond van (22).

### De relatieve versnelling

We gaan uit van (23) en differentieren deze naar de tijd. Dan ontstaat

$$\vec{a}_{\text{abs}} = \dot{\vec{v}}_{\text{abs}} = \ddot{\vec{R}} + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) + \dot{\vec{v}}_{\text{rel}}. \quad (36)$$

Nu is

$$\dot{\vec{r}} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{\text{rel}} \quad (37)$$

terwijl

$$\dot{\vec{v}}_{\text{rel}} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k} + \dot{x} \dot{\vec{i}} + \dot{y} \dot{\vec{j}} + \dot{z} \dot{\vec{k}}. \quad (38)$$

Invullen levert

$$\vec{a}_{\text{abs}} = \vec{a}_{\text{sl}} + \vec{a}_{\text{cor}} + \vec{a}_{\text{rel}}, \quad (39)$$

met

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_{\text{sl}} &= \ddot{\vec{R}} + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \\ \vec{a}_{\text{cor}} &= 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}), \\ \vec{a}_{\text{rel}} &= \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Let op dat de zo gedefinieerde  $\vec{a}_{\text{rel}}$  niet identiek is met  $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\text{rel}}$ .

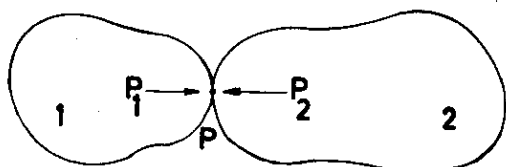
De relatieve versnelling is de versnelling in het niet-bewegende x-y-z-stelsel ( $\vec{\omega} = \vec{R} = 0$ ).

De sleepversnelling is de versnelling van een vast punt in het bewegende stelsel ( $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ ).

De Coriolisversnelling is het overige deel.

Bij de gelijkmatige beweging om een vaste as is  $\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{\omega}} = 0$ . Dan is de sleepversnelling de centripetale versnelling  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ .

#### 4. Glijden, rollen en pivoteren



Indien twee lichamen met elkaar contact maken in een punt P, kan dit punt worden beschouwd als punt van lichaam 1 ( $P_1$ ) en als punt van lichaam 2 ( $P_2$ ). De snelheid van  $P_1$  is  $\vec{v}_{P_1}$ , die van  $P_2$  :  $\vec{v}_{P_2}$ . We spreken van glijden, indien  $\vec{v}_{P_1} \neq \vec{v}_{P_2}$ .

De snelheid, waarmee lichaam 2 over lichaam 1 glijdt is  $\vec{u}$ , bepaald door

$$\vec{u} = \vec{v}_{P_2} - \vec{v}_{P_1}. \quad (41)$$

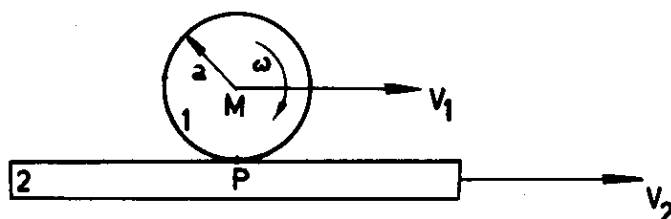
Indien de snelheid  $\vec{u} = 0$ , terwijl toch beweging plaatsvindt spreken we van rollen of van pivoteren.

Bij een rollende beweging roteert het eerste lichaam ten opzichte van het tweede om een as, welke ligt in het gemeenschappelijke raakvlak.

Bij een pivoterende beweging roteren de lichamen om een as, welke loodrecht staat op het raakvlak.

Bij een rollende beweging is het contactpunt de relatieve pool  $P_{12}$ .

Voorbeeld: cylinder op vlakke plaat



Een cylinder met straal  $a$  roteert om het middelpunt  $M$  met de hoeksnelheid  $\omega$ . Het punt  $M$  transleert met de snelheid  $v_1$ . De cylinder maakt in  $P$  contact met een vlakke plaat, welke een snelheid  $v_2$  heeft.

We hebben

$$\left. \begin{aligned} v_{P_1} &= v_1 - a\omega, \\ v_{P_2} &= v_2 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

beide naar rechts. Rollen treedt op als

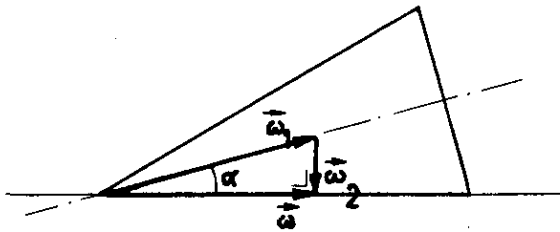
$$v_1 - a\omega = v_2, \quad (43)$$

glijden als

$$v_1 - a\omega < v_2 \quad (44)$$

$$v_1 - a\omega > v_2 \quad (45)$$

Voorbeeld



Een rechte cirkelkegel met halve top-  
hoek  $\alpha$  rolt over een plat vlak.

De kegel roteert om de beschrijvende,  
welke in het vlak valt. De hoeksnelheid  
van deze rotatie is  $\vec{\omega}$ .

De hoeksnelheid waarmee de hartlijn  
rondloopt is  $\vec{\omega}_2$ .

Dan geldt bij de getekende ontbinding

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega} - \vec{\omega}_2. \quad (46)$$

Omdat

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{\omega}_1|}{|\vec{\omega}_2|}, \quad (47)$$

is

$$\omega = \omega_2 \cot \alpha. \quad (48)$$

Indien de omlooptijd van de kegel  $T$  is, is

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T}, \quad (49)$$

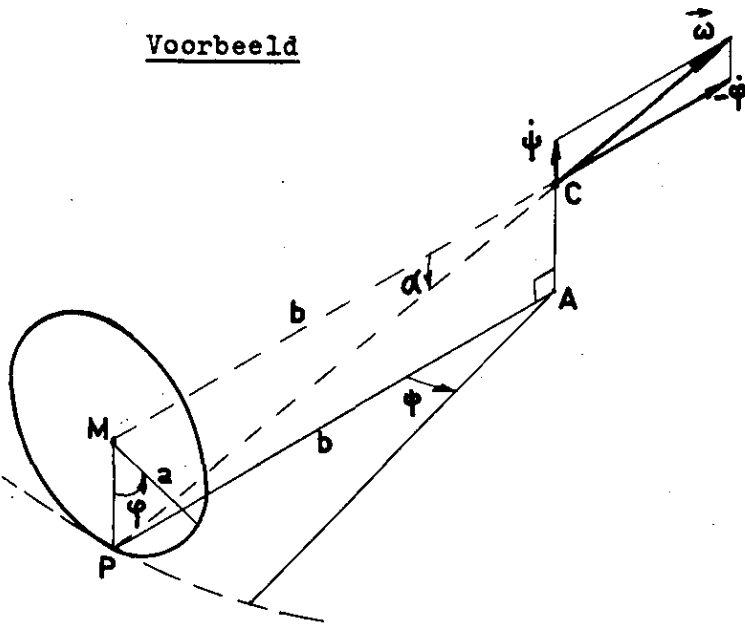
dus

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \cot \alpha. \quad (50)$$

Verder is

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (51)$$

Voorbeeld



Een wiel met straal  $a$  rolt over een plat vlak in een cirkel, waarvan het middelpunt  $A$  op afstand  $b$  van het aanrakingspunt is gelegen. De lijn  $MC$ , loodrecht op het vlak van de cirkel blijft daarbij steeds evenwijdig aan het platte vlak.  $MC = b$ . Het wiel draait over een hoek  $\varphi$  en doorloopt een hoek  $\psi$ . De conditie voor rollen is

$$a\dot{\varphi} + b\dot{\psi} = 0. \quad (52)$$

We hebben

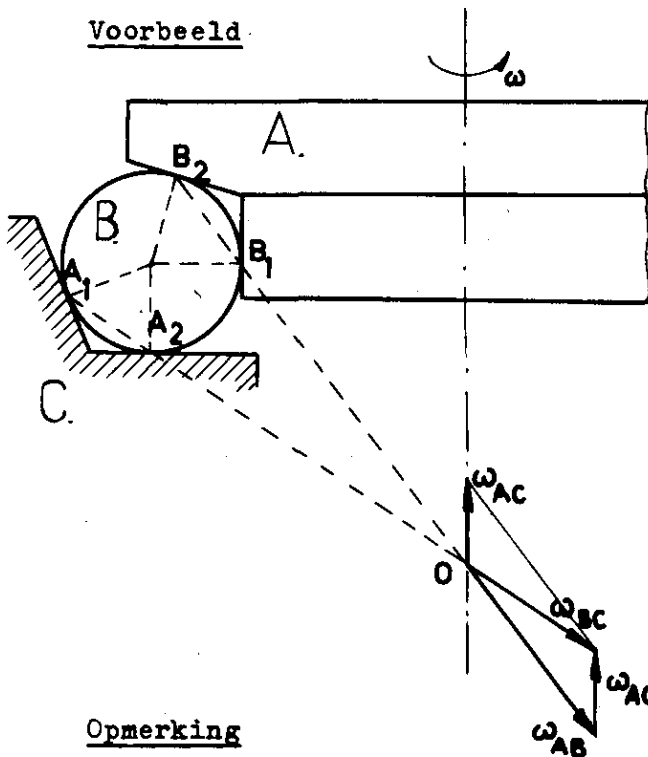
$$\tan \alpha = a/b, \quad (53)$$

waaruit

$$\dot{\psi} = -\dot{\varphi} \cdot \cot \alpha. \quad (54)$$

Vectorieel worden  $\dot{\varphi}$  en  $\dot{\psi}$  samengesteld tot  $\vec{\omega}$ . De vector  $\vec{\omega}$  valt langs de lijn  $PC$ . Het is direct te zien dat  $PC$  de momentane rotatie-as is.

Voorbeeld



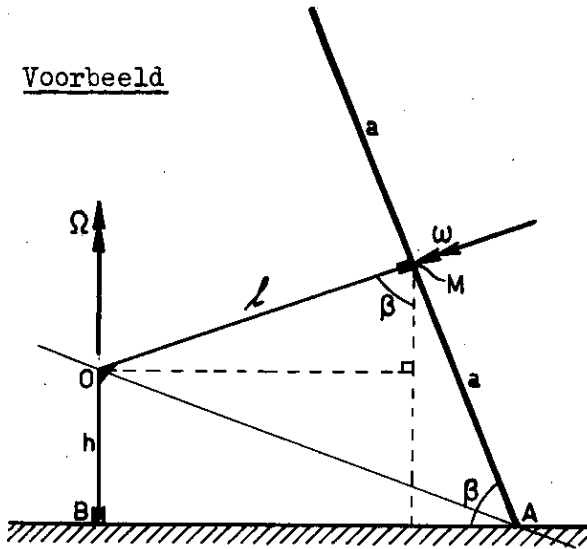
Een tap  $A$  loopt op een kogel  $B$ . De tap draait met een hoeksnelheid  $\omega (= \omega_{AC})$  om zijn as. Waar moet deze as liggen, opdat de kogel alleen rolt?

De tap draait met de hoeksnelheid  $\omega_{AC}$  t.o.v. het gestel  $C$ . Als  $B$  zuiver rolt t.o.v. het gestel, moet dit geschieden om  $A_1, A_2$ . Het rollen van  $B$  t.o.v.  $A$  geschiedt om  $B_1, B_2$ . De as moet dus door het snijpunt gaan van  $A_1, A_2$  en  $B_1, B_2$ , dat is  $O$ . Verder is

$$\vec{\omega}_{BC} = \vec{\omega}_{AC} + \vec{\omega}_{AB}. \quad (55)$$

Opmerking

Bij deze rotatie om drie vaste assen mogen de  $\omega$ 's niet als vrije vectoren worden behandeld. Zij zijn gelocaliseerd op hun assen.

Voorbeeld

Een wiel met straal  $a$  rolt over een horizontaal vlak. Het vlak door het wiel maakt een hoek  $\beta$  met het horizontale vlak. Het wiel is draaibaar om een staaf  $OM$ , lengte  $l$ , door het middelpunt van en loodrecht op het wiel. Aan de staaf  $OM$  is een tweede staaf  $OB$ , lengte  $h$ , gelast welke loodrecht op het horizontale vlak staat en een hoeksnelheid  $\Omega$  om zijn lengteas heeft. Gevraagd wordt de totale hoeksnelheid van het wiel. Het wiel heeft een hoeksnelheid  $\omega$  t.o.v.  $OM$  (zie figuur). De conditie

voor rollen wordt hier:

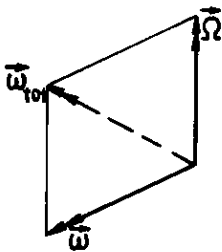
$$v_A = 0 \quad (56)$$

$$\text{of: } \Omega \cdot \overline{AB} - \omega R = 0 \quad (57)$$

$$\text{met: } \overline{AB} = l \sin \beta + a \cos \beta . \quad (58)$$

Hieruit volgt:

$$\omega = \left( \frac{l}{a} \sin \beta + \cos \beta \right) \Omega . \quad (59)$$



De totale hoeksnelheid vinden we dan uit

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\Omega} + \vec{\omega} . \quad (60)$$

N.B. We kunnen deze  $\vec{\omega}_{\text{tot}}$  direct vinden door te bedenken, dat de totale hoeksnelheid de richting moet hebben van de lijn door de in rust zijnde punten van het wiel:  $A$  en  $O$ .

## 5. Verbindingen van systemen

De meeste mechanicaproblemen hebben betrekking op de beweging van onvrije systemen. Een systeem is onvrij, indien tussen de Cartesische coördinaten meetkundige betrekkingen bestaan.

Voorbeelden: massapunt, dat zich beweegt over een vast oppervlak of langs een vaste kromme;  
lichamen, die onderling gekoppeld zijn, bv. door scharnieren.

Bestaat een systeem uit  $n$  onvervormbare lichamen, die ieder getypeerd worden door zes coördinaten, dan heeft het systeem hoogstens  $6n$  graden van vrijheid. De coördinaten, welke gebruikt kunnen worden om de positie van het systeem te beschrijven zijn de  $3n$  Cartesische coördinaten van willekeurige punten, in ieder der lichamen één, nl.  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$  en de  $3n$  hoeken, welke vaste assen in de lichamen maken met de ruimtelijke assen:  $\varphi_1, \psi_1, \chi_1; \varphi_2, \psi_2, \chi_2, \dots$ . Deze  $6n$  coördinaten geven we aan door  $p_k$  ( $k = 1 \dots 6n$ ). Door de verbindingen tussen de lichamen treden betrekkingen op

$$f_\ell(p_1, p_2, p_3, \dots, p_{6n}, t) = 0, \\ (\ell = 1, 2, \dots, m). \quad (61)$$

Zijn er  $m$  verbindingen, dan heeft het stelsel  $6n-m$  graden van vrijheid.

Het heeft zin zgn. gegeneraliseerde coördinaten  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6n-m$ ) in te voeren, zodanig dat aan de betrekkingen (61) automatisch wordt voldaan. Er zijn dan evenveel gegeneraliseerde coördinaten als graden van vrijheid. Het is duidelijk, dat in het algemeen

$$p_s = p_s(q_1, q_2, \dots, q_{6n-m}, t), \\ (s = 1, 2, \dots, 6n). \quad (62)$$

### Voorbeeld

De beweging van een massapunt op een bol met straal  $a$ . Voer in

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= a \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= a \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

dan zijn  $\theta, \varphi$  de gegeneraliseerde coördinaten. Ze bepalen de positie van het punt eenduidig.

We maken onderscheid tussen verschillende voorkomende verbindingen. Een systeem heet holonoom, indien de meetkundige voorwaarden kunnen worden uitgedrukt door betrekkingen tussen de coördinaten, zoals in (62) is aangegeven. Bij zgn. niet-holonome systemen zijn de meetkundige



voorwaarden betrekkingen tussen de differentialen van de coördinaten, welke niet kunnen worden geïntegreerd.

$$A_1(p_1, p_2, \dots, t) dp_1 + A_2(p_1, p_2, \dots, t) dp_2 + \dots \\ \dots + A_{6n}(p_1, p_2, \dots, t) dp_{6n} = 0. \quad (64)$$

Voor de differentialen kunnen ook de snelheden worden ingevoerd:

$$A_1 \dot{p}_1 + A_2 \dot{p}_2 + \dots + A_{6n} \dot{p}_{6n} = 0. \quad (65)$$

Er kunnen natuurlijk meerdere betrekkingen (65) bestaan.

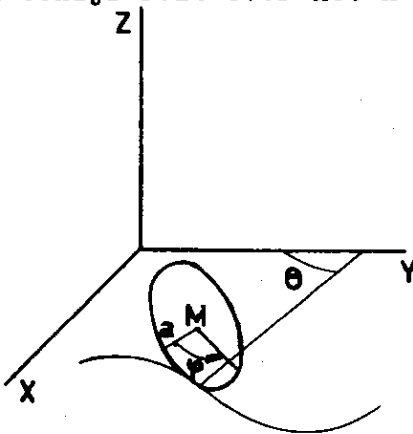
Bestaan er niet-holonome systemen?

We geven een voorbeeld.

Een schijf rolt over het x-y-vlak, zodanig, dat de schijf steeds verticaal blijft. Coördinaten zijn: (x,y) van het middelpunt M,  $\varphi$  de hoek, waarover de schijf gedraaid is,  $\theta$  de hoek tussen de y-as en de normaal op de schijf. Omdat de schijf rolt, geldt voor de snelheid v van het middelpunt met a als straal

$$v = a \dot{\varphi}. \quad (66)$$

In coördinaten wordt dit



$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -v \cos \theta = -a \dot{\varphi} \cos \theta, \\ \dot{y} &= -v \sin \theta = -a \dot{\varphi} \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

of in differentialen

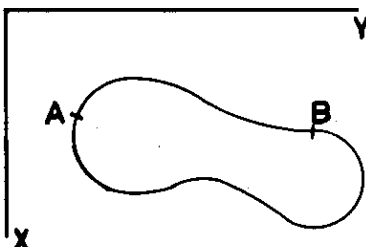
$$\left. \begin{aligned} dx + a \cos \theta d\varphi &= 0, \\ dy + a \sin \theta d\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Deze betrekkingen kunnen niet worden geïntegreerd. Kon het wel, dan waren de integralen

$$f_1(x, y, \theta, \varphi) = 0; \quad f_2(x, y, \theta, \varphi) = 0. \quad (69)$$

Los  $\theta$  op uit  $f_2 = 0$ , vul in in  $f_1 = 0$ . Los  $\varphi$  op. Dan ontstaat

$$\varphi = g(x, y). \quad (70)$$



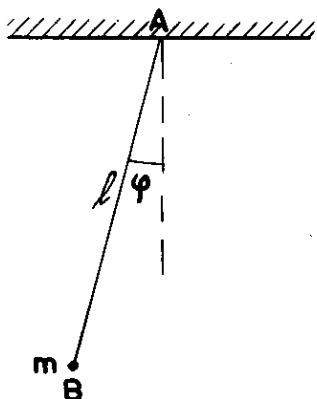
Dus rollende van A naar B is de hoekverandering gelijk voor iedere weg. Dit is onmogelijk.

Een systeem is skleronoom, indien de verbindingsrelaties de tijd niet expliciet bevatten. Doen ze dit wel, dan heet het systeem rheonoom.

Er zijn dus holonoom-skleronome, holonoom-rheonome, niet-holonoom-skleronome en niet-holonoom-rheonome systemen.

De verbindingen, die we tot dusver hebben behandeld zijn tweezijdig: ze worden getypeerd door = - tekens. Er zijn ook éenzijdige verbindingen, waarbij de meetkundige relaties in de vorm van ongelijkheden worden gegeven.

#### Voorbeeld

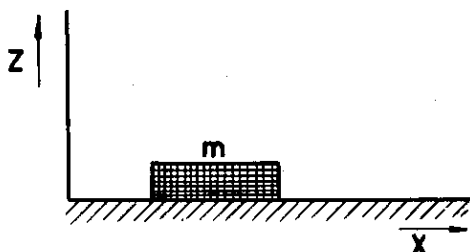


Een massapunt  $m$  hangt aan een draad  $l$ . Is de draad niet-uitrekbaar, doch wel vervormbaar, dan geldt

$$l - \overline{AB} \geq 0. \quad (71)$$

Voor  $l = \overline{AB}$  is er één graad van vrijheid: de hoek  $\varphi$ ; voor  $l < \overline{AB}$  zijn er twee graden van vrijheid, de coördinaten  $x, y$  van het punt B in het vlak. (We beschouwen alleen de vlakke beweging!)

#### Voorbeeld



Massa  $m$  op vlak  $z = 0$ .  
De relatie is

$$z \geq 0. \quad (72)$$

Het probleem heeft voor  $z = 0$ , één graad van vrijheid, de coördinaat  $x$ , doch voor  $z > 0$  twee graden van vrijheid, de coördinaten  $x$  en  $z$ .

Bij de behandeling van problemen met éenzijdige verbindingen moet men steeds een onderstelling maken over het aantal graden van vrijheid. Deze onderstelling moet later worden geverifieerd.

## 6. Virtuële verplaatsingen

Tijdens de beweging ondergaat het systeem verplaatsingen: we definiëren werkelijk of denkbeeldig optredende, zgn. virtuële verplaatsingen door de volgende eigenschappen:

- a) de verplaatsingen zijn infinitesimaal,
- b) de verplaatsingen zijn verenigbaar met de meetkundige configuratie,
- c) de verplaatsingen zijn omkeerbaar.

In een holonoom systeem geven verplaatsingen, welke aan b) en c) voldoen, veranderingen in de waarden van de gegeneraliseerde coördinaten  $q_k$ . Op grond van a) zijn dus de virtuële verplaatsingen te schrijven als  $\delta q_k$ .

IV. Massa Meetkunde1. Dichtheden

We zullen werken met puntvormige, lijnvormige, vlakvormige en ruimtelijke lichamen. De massa van het punt is  $m$ , terwijl die van de andere lichamen wordt gegeven, resp. door

$$m = \int_L \rho_\ell d\ell, \quad (1)$$

$$m = \int_A \rho_A dS, \quad (2)$$

$$m = \int_V \rho dV, \quad (3)$$

waarin  $\rho_\ell$ ,  $\rho_A$  en  $\rho$  de lijndichtheid, vlakdichtheid en dichtheid zijn. De integraties vinden plaats resp. langs de kromme  $L$ , over het oppervlak  $A$  en over het volume  $V$ .

2. Zwaartepunten

Het zwaartepunt van een systeem van  $n$  massapunten  $m_1, m_2 \dots m_n$  is gedefinieerd door

$$\vec{r}_O = \frac{\sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j}{\sum_{j=1}^n m_j}. \quad (4)$$

Het zwaartepunt van een lijnvormig, vlakvormig of ruimtelijk lichaam is bepaald door, resp.,

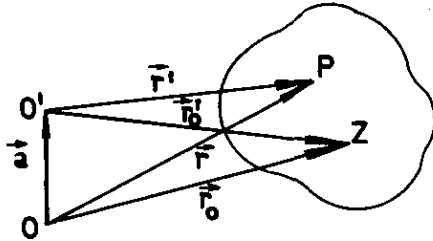
$$\left. \begin{aligned} M \vec{r}_O &= \int_L \vec{r} \rho_\ell d\ell, \\ M \vec{r}_O &= \int_A \vec{r} \rho_A dS, \\ M \vec{r}_O &= \int_V \vec{r} \rho dV, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

waarin  $M$  de totale massa van het lichaam is.

Opmerking

Het op deze wijze gedefinieerde punt is feitelijk het massa middelpunt. Het valt samen met het zwaartepunt in een homogeen zwaartekrachtsveld.

Het zwaartepunt is karakteristiek voor het stelsel. Het is onafhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel.



Ten opzichte van O is

$$M \vec{r}_O = \int_V \rho dV \vec{r}, \text{ terwijl}$$

ten opzichte van O' geldt

$$M \vec{r}'_O = \int_V \rho dV \vec{r}'.$$

Dit laatste is

$$\int_V \rho dV (\vec{r} - \vec{a}) = M \vec{r}_O - M \vec{a},$$

waaruit

$$\vec{r}'_O = \vec{r}_O - \vec{a}. \quad (6)$$

Het zwaartepunt bezit de associatieve eigenschap: het zwaartepunt van een stelsel is tevens het zwaartepunt van de zwaartepunten van de delen, waarin men het stelsel kan verdelen.

Want

$$\int_V \rho dV \vec{r} = \int_{V_1} \rho dV \vec{r} + \int_{V_2} \rho dV \vec{r} \quad \text{of}$$

$$M \vec{r}_O = m_1 \vec{r}_{O_1} + m_2 \vec{r}_{O_2}, \quad (7)$$

als  $V_1$  en  $V_2$  delen van  $V$  zijn, zo dat

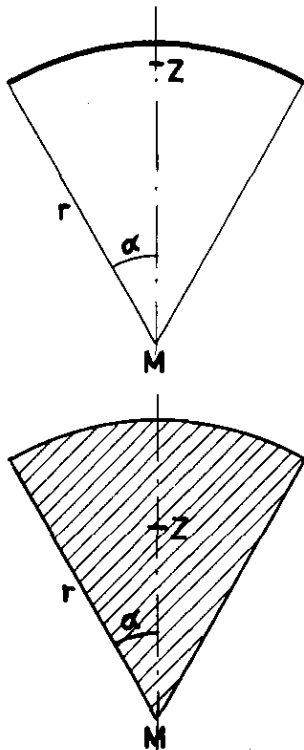
$$V = V_1 + V_2, \quad (8)$$

terwijl de massa's der delen  $m_1$  en  $m_2$  zijn. Dus

$$M = m_1 + m_2. \quad (9)$$

Het zwaartepunt ligt in een punt, lijn of vlak van symmetrie van de massaverdeling. Indien de oorsprong van het coördinatenstelsel in het zwaartepunt wordt gelegd geldt

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j &= 0 \\ \text{of } \int_V \rho dV \vec{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Belangrijke zwaartepunten

Voor de homogene cirkelboog (stang) geldt

$$MZ = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (11)$$

indien r de straal van de cirkel is, terwijl de boog  $2\alpha r$  langs is.

Voor de homogene cirkelsector (plaat) geldt

$$MZ = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (12)$$

Opgaven

1. Bepaal het zwaartepunt van een staaf, waarvan de dichtheid lineair met de lengte toeneemt.
2. Bepaal het zwaartepunt van een driehoekige plaat.
3. Bepaal het zwaartepunt van het gebogen oppervlak van een bolschijf.
4. Bepaal het zwaartepunt van een cirkelkegel.
5. Bepaal het zwaartepunt van een bolsector.

3. Traagheidsgroothedena Massatraagheidsgrootheden

Het massatraagheidsmoment van een lichaam kan worden gedefinieerd t.o.v. een punt, een lijn en een vlak. Het is steeds

$$\sum m r^2, \quad (13)$$

waarbij  $\sum$  de sommatie over alle continu of discreet verdeelde massa elementen  $m$  voorstelt, en  $r$  de afstand is van ieder element tot resp. het punt, de lijn of het vlak.

Het polaire traagheidsmoment  $J_0$ , t.o.v. de oorsprong is

$$J_0 = \sum m (x^2 + y^2 + z^2). \quad (14)$$

De planaire traagheidsmomenten  $P_{xx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{zz}$ , t.o.v. de drie coördinaten vlakken zijn

$$P_{xx} = \Sigma m x^2; P_{yy} = \Sigma m y^2; P_{zz} = \Sigma m z^2. \quad (15)$$

De traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatassen  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$  en  $J_{zz}$  zijn gedefinieerd door

$$J_{xx} = \Sigma m (y^2 + z^2) = P_{yy} + P_{zz}, \text{ etc.} \quad (16)$$

Het planaire traagheidsmoment  $P$  t.o.v. een vlak door de oorsprong, getypeerd door de richtingscosinussen van de normaal  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$ , is

$$P = \Sigma m (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \quad (17)$$

$$\alpha^2 P_{xx} + \beta^2 P_{yy} + \gamma^2 P_{zz} + 2\beta\gamma P_{yz} + 2\gamma\alpha P_{zx} + 2\alpha\beta P_{xy},$$

waarin de traagheidsproducten  $P_{yz}$ ,  $P_{zx}$  en  $P_{xy}$  gedefinieerd zijn door

$$P_{xy} = \Sigma m xy, \text{ etc.} \quad (18)$$

Het traagheidsmoment  $J$  t.o.v. een rechte door de oorsprong met de richtingscosinussen  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  vinden we uit de betrekking

$$J + P = J_0, \quad (19)$$

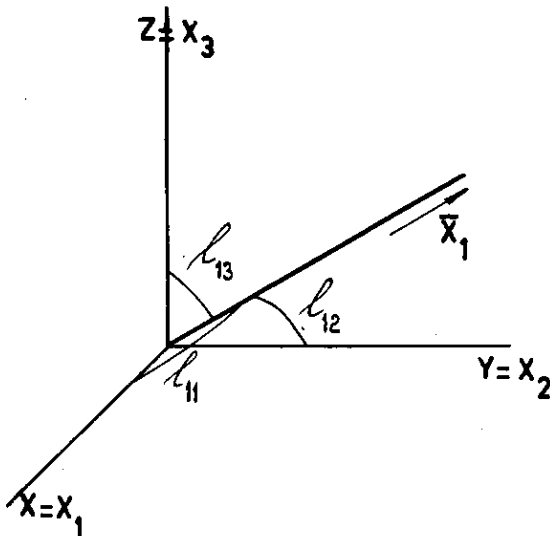
waaruit

$$J = J_{xx} \alpha^2 + J_{yy} \beta^2 + J_{zz} \gamma^2 + 2\beta\gamma J_{yz} + 2\gamma\alpha J_{zx} + 2\alpha\beta J_{xy} \quad (20)$$

waarbij de betrekkingen (14) en (17) zijn gesubstitueerd en de identiteit  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$  is gebruikt, terwijl de traagheidsproducten  $J_{xy}$  etc. zijn gedefinieerd door

$$J_{xy} = -P_{xy} \text{ etc.} \quad (21)$$

De traagheidsgrootheden  $J_{xx}$  etc. vormen een tensor van de tweede orde. Bij coördinatentransformaties transformeren ze zich volgens (I,39).



Om dit te zien leggen we de  $\bar{x}_1$ -as langs de as met de richtingscosinussen  $\alpha, \beta, \gamma$ . In de vroegere notatie is dan dus

$$\alpha = l_{11}, \beta = l_{12}, \gamma = l_{13}. \quad (22)$$

De formule (20) gaat over in

$$\bar{J}_{ii} = l_{1i} l_{1j} J_{ij}, \quad (23)$$

welke van de vorm is (I, 39).

Natuurlijk geldt ook

$$\bar{J}_{22} = l_{2i} l_{2j} J_{ij}; \quad \bar{J}_{33} = l_{3i} l_{3j} J_{ij}. \quad (24)$$

Zoals direct is te zien transformeren de  $\bar{J}_{ij}$  ( $i \neq j$ ) zich ook volgens (I.39). Het  $J_{ij}$  schema vormt dus een tensor.

Aangezien  $J$  voor iedere as positief is, is het quadratisch oppervlak

$$J_{ij} x_i x_j = 1 \quad (25)$$

reëel.

Het is de traagheidsellipsoïde. Brengen we deze op hoofdassen, dan gaat (25) over in

$$J_I X^2 + J_{II} Y^2 + J_{III} Z^2 = 1, \quad (26)$$

waarin  $J_I, J_{II}$  en  $J_{III}$  de massa hoofd traagheidsmomenten zijn.

Natuurlijk staan de assen loodrecht op elkaar.

De hoofdtraagheidsmomenten zijn de eigenwaarden van de tensor vergelijking

$$|J_{ij} - J \delta_{ij}| = 0, \quad (27)$$

zoals uit de vroegere beschouwingen blijkt.

### Stelling van Steiner

We nemen nu een bijzondere transformatie: een parallelverschuiving van de assen

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \\ z &= z' + c. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$



Dan vinden we

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \Sigma m \{ (y' + b)^2 + (z' + c)^2 \} = \\ &= J_{x'x'} + M(b^2 + c^2) + 2b \Sigma m y' + 2c \Sigma m z'. \end{aligned} \quad (29)$$

Indien  $O'$  in het zwaartepunt ligt, wordt (29)

$$J_{xx} = J_{x'x'} + M(b^2 + c^2), \quad (30)$$

en overeenkomstige formules gelden voor  $J_{yy}$  en  $J_{zz}$ . Daaruit volgt de stelling van Steiner: het traagheidsmoment om een as is gelijk aan het traagheidsmoment om een as door het zwaartepunt, evenwijdig aan de eerste, vermeerderd met het traagheidsmoment van de totale massa in het zwaartepunt t.o.v. de gegeven as.

We hebben tevens

$$J_{xy} = J_{x'y'} - M ab, \text{ etc.} \quad (31)$$

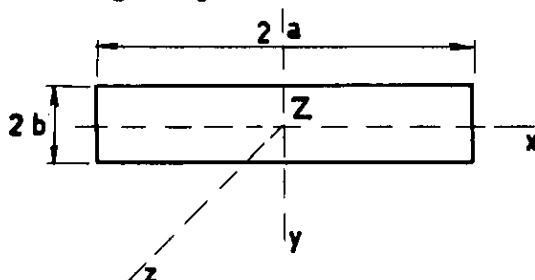
De formules (30) en (31) zijn belangrijk in de mechanica. Terwijl de zescomponentige traagheidstensor in ieder punt van het lichaam verschillend kan zijn, behoeft men hem slechts te berekenen voor één punt, bv. het zwaartepunt.

De centrale traagheidsellipsoïde is de traagheidsellipsoïde, behorende bij de assen door het zwaartepunt. Is deze eenmaal bekend, dan kan men in ieder punt de traagheidstensor bepalen zonder integratie.

#### Belangrijke traagheidsmomenten

1. Voor een homogene staaf van de lengte  $2a$  en massa  $M$  geldt  $J = \frac{Ma^2}{3}$  bij een draaiing om  $Z$ .
2. Het traagheidsmoment van een homogene cirkelvormige schijf t.o.v. een as door  $Z$ , loodrecht op het vlak van de schijf is  $J = \frac{Ma^2}{2}$ , als  $M$  de massa is en  $a$  de straal.
3. Het traagheidsmoment van een homogene cirkelvormige schijf t.o.v. een as door het zwaartepunt, in het vlak van de schijf is  $J = \frac{Ma^2}{4}$ .
4. Homogene Bol. As door het middelpunt heeft een traagheidsmoment  $J = \frac{2}{5} M a^2$ .

5. Homogene plaat. Dimensie als getekend.

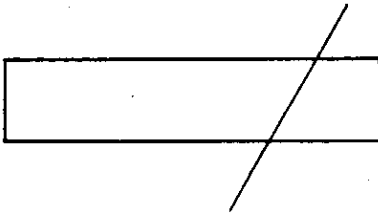


$$\begin{aligned} J \text{ om } x\text{-as} &= \frac{Mb^2}{3}, \\ J \text{ om } y\text{-as} &= \frac{Ma^2}{3}, \\ J \text{ om } z\text{-as} &= M \frac{a^2 + b^2}{3}. \end{aligned}$$

Opgaven

1. Bepaal het traagheidsmoment van een kegel t.o.v. een beschrijvende.

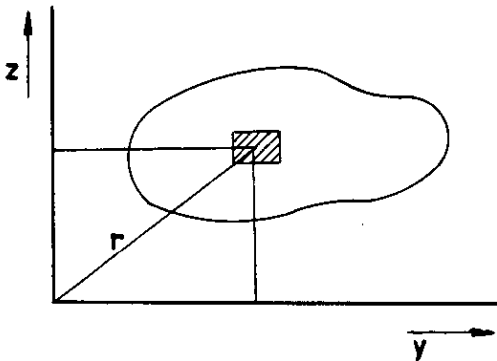
2.



Bepaal het traagheidsmoment van een rechthoekige plaat om een willekeurige as in het vlak van de plaat.

b Oppervlaktetraagheidsgrootheden

Indien  $\Sigma mr^2$  volgens (13) wordt vervangen door  $\Sigma dO \cdot r^2$ , ontstaan de oppervlaktetraagheidsgrootheden. Belangrijk in de mechanica zijn



$$\left. \begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dS, \\ I_z &= \int_A y^2 dS, \\ I_{yz} &= \int_A yz dS. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

## V. Massa Kinematica

### 1. De hoeveelheid van beweging

De hoeveelheid van beweging van een deeltje met massa  $m$  is  $m\vec{v}$ . Voor een systeem is dit

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j = M \vec{v}_0, \quad (1)$$

waarin  $\vec{v}_0$  de snelheid van het zwaartepunt is. Voor een continu systeem is dit

$$\vec{p} = \int_V \rho dV \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \cdot \vec{r} = M \vec{v}_0. \quad (2)$$

De grootte  $\vec{p}$  heet ook de impuls.

### 2. Het impulsmoment

Het moment van de hoeveelheid van beweging of het impulsmoment  $\vec{D}$  is gedefinieerd door

$$\vec{D} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j, \quad (3)$$

of voor een continu systeem

$$\vec{D} = \int_V \rho dV \cdot \vec{r} \times \vec{v}. \quad (4)$$

Hierbij wordt  $\vec{r}$  gemeten vanaf een bepaalde oorsprong. Leggen we de oorsprong in het zwaartepunt dan wordt  $\vec{D} \equiv \vec{D}_0$

$$\begin{aligned} \vec{D}_0 &= \int_V \rho dV (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = \\ &= \int_V \rho dV (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\vec{v} - \vec{v}_0). \end{aligned} \quad (5)$$

waarbij  $\vec{r}_0$  vanaf het zwaartepunt wordt gemeten.

Het impulsmoment  $\vec{D}$  t.o.v. een willekeurig punt kan worden uitgedrukt in  $\vec{D}_0$ :

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \int_V \rho \, dV \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \int_V \rho \, dV (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} + \\ &+ \int_V \rho \, dV \vec{r}_0 \times \vec{v} = \vec{D}_0 + \vec{r}_0 \times M \vec{v}_0.\end{aligned}\quad (6)$$

Verband tussen  $\vec{D}$  en  $\vec{\omega}$  bij een star lichaam

We leggen de oorsprong in het zwaartepunt ( $\vec{r}_0 = 0$ ). Dan is

$$\vec{D}_0 = \int_V \rho \, dV \vec{r} \times \vec{v}, \quad (7)$$

waarbij  $\vec{r}$  wordt gemeten vanuit Z.  
Volgens (III.27) geldt

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (8)$$

waarbij  $\vec{v}_0$  nu de snelheid van het zwaartepunt is. Met (8) gaat (7) over in

$$\begin{aligned}\vec{D}_0 &= \int_V \rho \, dV \vec{r} \times \{ \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \} = \\ &- \vec{v}_0 \times \int_V \rho \, dV \vec{r} + \int_V \rho \, dV \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).\end{aligned}\quad (9)$$

De eerste integraal in (9) is nul, volgens (IV.10). Voor de tweede integraal wordt geschreven

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} r^2 - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}), \quad (10)$$

waarmee (9) wordt

$$\vec{D}_0 = \int_V \rho \, dV \cdot r^2 \vec{\omega} - \int_V \rho \, dV \cdot \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}). \quad (11)$$

Deze formule heeft uitgeschreven de volgende gedaante

$$D_{0i} = J_{ij} \omega_j. \quad (12)$$

Deze formules gelden ook voor de draaiing om een willekeurig punt zonder snelheid.

Opmerking

In het vaste assenstelsel  $x_1 - x_2 - x_3$ , zijn de  $J_{ij}$  functies van de tijd. Aangezien (12) een vectorvergelijking is, geldt hij in iedere assenstelsel, dus ook in een meebewegend assenkruis. In dit stelsel zijn de  $J_{ij}$  constant. Kiest men de assen langs de hoofdtraagheidsassen dan gaat (12) over in

$$D_{oI} = J_I \omega_I, \quad D_{oII} = J_{II} \omega_{II}, \quad D_{oIII} = J_{III} \omega_{III}. \quad (13)$$

Bij de tweedimensionale beweging in het x-y-vlak is  $\omega_y = \omega_z = 0$ .  
Dan wordt

$$D_{oz} = J_{zz} \omega_z. \quad (14)$$

3. De kinetische energie

De kinetische energie  $T$  van een lichaam is gedefinieerd door

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho dV \cdot v^2 = \Sigma \left( \frac{1}{2} m v^2 \right). \quad (15)$$

We vullen in (15) weer de formule (III.27) in

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (16)$$

met  $\vec{v}_o$  de snelheid van het zwaartepunt. De vector  $\vec{r}$  wordt gemeten vanuit het zwaartepunt. Dan wordt

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho dV \{ v_o^2 + 2\vec{v}_o \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \} \\ &= \frac{1}{2} M v_o^2 + \frac{1}{2} \int_V \rho dV (\vec{\omega} \times \vec{r})^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Bij uitwerken van  $(\vec{\omega} \times \vec{r})^2$  wordt dit

$$T = \frac{1}{2} M v_o^2 + \frac{1}{2} J_{k\ell} \omega_k \omega_\ell. \quad (18)$$

De formule (18) brengt tot uitdrukking, dat de kinetische energie van een star lichaam additief wordt gevonden uit de translatie energie van het zwaartepunt en de rotatie energie om het zwaartepunt.

We hebben volgens (18) en (12)

$$D_k = \frac{\partial T}{\partial \omega_k}. \quad (19)$$

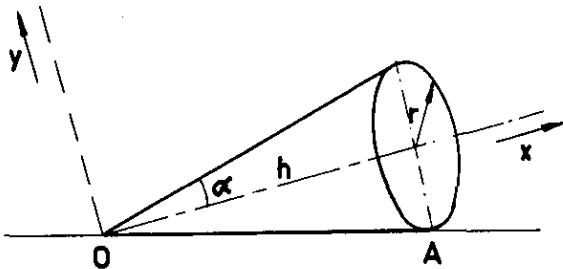
De rotatie energie op hoofdassen is

$$T = \frac{1}{2} \{ J_I \omega_I^2 + J_{II} \omega_{II}^2 + J_{III} \omega_{III}^2 \}. \quad (20)$$

Voor de rotatie energie kunnen we ook schrijven

$$T = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{\omega}. \quad (21)$$

### Voorbeeld



Een rechte cirkelkegel met tophoek  $2\alpha$  rolt over een plat vlak met de omlooptijd  $T_0$ . De massa van de kegel is  $m$ , de hoogte  $h$  en de straal van het grondvlak is  $r$ .

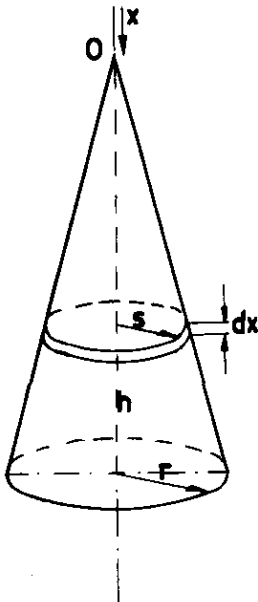
Gevraagd wordt de kinetische energie en het impulsmoment t.o.v. de top O.

Op grond van symmetrie is het direct duidelijk dat de hoofdtraagheidsassen in het punt O samenvallen met de hoogtelijn en twee onderling loodrechte lijnen in een vlak door de top evenwijdig het basisvlak. Dus:  $x$ - $y$ - $z$  zijn hoofdrichtingen. Het traagheidsmoment om de  $x$ -as  $J_1$  wordt gegeven door

$$J_1 = \frac{3}{10} m r^2, \quad (22)$$

dat om de  $y$  en  $z$ -as door

$$J_2 = J_3 = \frac{3}{5} m \left( h^2 + \frac{r^2}{4} \right). \quad (23)$$



Snijdt de kegel in schijven van dikte  $dx$  door vlakken evenwijdig aan het grondvlak.

De massa van de kegel is  $m$ . Het volume is  $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ . De dichtheid is dus

$$\frac{m}{\frac{1}{3} \pi r^2 h} = \frac{3m}{\pi r^2 h}. \quad (24)$$

De massa van het schijfje ter plaatse  $x$  is

$$\frac{3m}{\pi r^2 h} \cdot \pi s^2 dx = \frac{3m s^2}{r^2 h} dx. \quad (25)$$

Nu is

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{r} \rightarrow s = \frac{rx}{h}, \quad (26)$$

waaruit volgt dat de massa van de schijf is

$$\frac{3m x^2}{h^3} dx. \quad (27)$$

Het traagheidsmoment van deze schijf om de x-as is

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3m x^2}{h^3} dx \cdot s^2 = \frac{3}{2} \frac{mr^2 x^4}{h^5} dx. \quad (28)$$

Het totale traagheidsmoment is dus

$$J_1 = \frac{3}{2} \frac{mr^2}{h^3} \int_0^h x^4 dx = \frac{3}{10} mr^2. \quad (29)$$

Het traagheidsmoment om de y-as wordt gevonden met behulp van de stelling van Steiner. We hebben

$$\frac{3}{4} \frac{mr^2 x^4}{h^5} dx + \frac{3m x^2}{h^3} \cdot x^2 dx \quad (30)$$

voor het schijfje. Na integratie wordt dit

$$J_2 = \frac{3}{20} mr^2 + \frac{3m}{h^3} \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{3}{5} m (h^2 + \frac{r^2}{4}). \quad (31)$$

Het traagheidsmoment om de momentane draaias OA is volgens de algemene formules

$$\begin{aligned} J &= J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + J_3 \cos^2 \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{3}{20} mr^2 \cdot \frac{r^2 + 6h^2}{r^2 + h^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Nu is

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho dV (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2} \int_V \rho dV \omega^2 r^2 \sin^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \int_V \rho dV r^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} J \omega^2, \end{aligned} \quad (33)$$

als  $J$  genomen wordt t.o.v. de momentane draaias. De hoek  $\varphi$  is de hoek tussen  $\vec{\omega}$  en  $\vec{r}$ . Dus

$$T = \frac{3}{40} m r^2 \frac{r^2 + 6h^2}{r^2 + h^2} \cdot \omega^2. \quad (34)$$

$$\text{Nu is } \omega = \frac{2\pi}{T_0} \cot \alpha = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{h}{r}, \quad (35)$$

waarmee

$$T = \frac{3\pi^2}{10} m h^2 \cdot \frac{1}{T_0^2} \cdot \frac{r^2 + 6h^2}{r^2 + h^2}. \quad (36)$$

Dit resultaat is natuurlijk ook direct te vinden met behulp van de formule (18). We hebben

$$T = \frac{1}{2} J_1^* \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_2^* \omega_y^2 + \frac{1}{2} m v_0^2, \quad (37)$$

waarin  $J_1^*$  en  $J_2^*$  de traagheidsmomenten zijn t.o.v. assen door het zwaartepunt. Er geldt

$$\left. \begin{aligned} J_1^* &= J_1 = \frac{3}{10} m r^2, \\ J_2^* &= J_2 - m \left(\frac{3}{4} h\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Nu is

$$m v_0^2 = m \cdot \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \frac{9}{16} \frac{h^4}{r^2 + h^2}, \quad (39)$$

terwijl

$$m \left(\frac{3}{4} h\right)^2 \cdot \omega_y^2 = m \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \frac{9}{16} \frac{h^4}{r^2 + h^2},$$

hetzelfde dus. Dus wordt (37)

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_y^2, \quad (40)$$

een formule die direct kan worden opgeschreven daar  $O$  een vast punt is. We hebben



$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega \cos \alpha = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{h}{r} \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}, \\ \omega_y &= -\omega \sin \alpha = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{h}{r} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Daarmee wordt  $T$  gelijk aan (34).

Het impulsmoment t.o.v.  $O$  heeft de volgende componenten

$$\left. \begin{aligned} D_x &= J_1 \omega_x = \frac{3}{10} \cdot mr^2 \cdot \frac{2\pi}{T_0} \frac{h^2}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}, \\ D_y &= J_2 \omega_y = -\frac{3}{5} m (h^2 + \frac{r^2}{4}) \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}, \\ D_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

De absolute waarde van  $|\vec{D}|$  is  $\sqrt{D_x^2 + D_y^2}$ .

De component van  $\vec{D}$  langs de momentane draaias is

$$D = J\omega = \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot mr^2 \cot \alpha (1 + 5 \cos^2 \alpha). \quad (43)$$

Dit te vinden uit (42), doch ook direct, daar om een vast punt

$\vec{D} = \int_V \rho dV \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  en de component van  $\vec{D}$  in de richting van  $\vec{\omega}$  is  $J\omega$  (neem  $\vec{\omega}$  in  $r$  richting):

$$D_x = \omega_x \int_V \rho dV \cdot (y^2 + z^2). \quad (44)$$

We berekenen nu ook nog de hoeveelheid van beweging van de kegel. Volgens (2) is

$$\vec{p} = m \vec{v}_O, \quad (45)$$

waaruit

$$\begin{aligned} p &= m v_O = m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{3}{4} h \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{3\pi}{T} \cdot \frac{1}{T_0} \frac{mh^2}{\sqrt{r^2+h^2}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Merk op, dat de impuls alleen van de translatie van de beweging komt. De rotatie om het zwaartepunt geeft geen bijdrage tot de impuls.

## B. Dynamische Grondbegrippen en Grondstellingen

### I. Krachtenleer

#### 1. Kracht

In de mechanica is de kracht een glijdende vector, die kan worden ontbonden of samengesteld op de voor vectoren gebruikelijke wijze. We hebben

$$\vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \vec{K}_2 + \vec{K}_1. \quad (1)$$

Krachten, die in een punt werken, kunnen direct worden samengesteld; krachten, die niet in een punt werken, kunnen door verschuiven en evenwijdig verplaatsen met behulp van koppels naar een punt worden overgebracht en daar samengesteld.

In alle gevallen geldt voor de resultante

$$\vec{R} = \sum_{j=1}^n \vec{K}_j. \quad (2)$$

#### 2. Indeling van de krachten

We kunnen de krachten indelen in uitwendige en inwendige krachten. Uitwendige krachten zijn krachten, waarvan de oorsprong buiten het te bestuderen systeem valt; inwendige krachten zijn krachten, die de elementen van het systeem onderling op elkaar uitoefenen. Dus

$$\vec{K}_j = \vec{K}_j^{(u)} + \vec{K}_j^{(i)}. \quad (3)$$

Fundamenteel is de wet van actie en reactie. Deze leert, dat de actie (inwendige kracht) door een deel van het systeem uitgeoefend op een ander deel gelijk is en tegengesteld aan de reactie, welke dat tweede deel op het eerste uitoefent. Of anders gezegd: de som van de inwendige krachten is steeds 0

$$\sum_{j=1}^n \vec{K}_j^{(i)} = 0. \quad (4)$$

Een geheel andere indeling is die in belastingskrachten of fysische krachten en reactiekrachten of meetkundige krachten.

$$\vec{K} = \vec{K}^{(b)} + \vec{K}^{(r)}. \quad (5)$$

Een belastingskracht wordt vaak bepaald door natuurkundige grootheden. Voorbeelden: gravitatiekracht, elektrische kracht, spanningen in een elastisch lichaam. Een reactiekracht ontstaat door de bewegingsbeperkingen van een systeem: normale druk van een lichaam op een ondergrond, scharnierkracht etc.

De twee indelingen overlappen elkaar. Er zijn

- a) uitwendige belastingskrachten: gewicht, elektrische kracht;
- b) uitwendige reactiekrachten : normaalkracht;
- c) inwendige belastingskrachten : spanningen in een gedeformeerd lichaam;
- d) inwendige reactiekrachten : scharnierkrachten in een systeem.

Ook de krachten die de elementen van een star lichaam binden zijn inwendige reactiekrachten. Zij bestaan niet fysisch, daar het starre lichaam niet bestaat, doch zijn een logische consequentie van onze idealisering.

### 3. Wetten van Newton

Voor een materieel punt luiden de wetten van Newton

- I Indien op het punt geen kracht werkt, blijft het in de toestand van rust of gelijkmatige beweging, waarin het zich bevindt.
- II Tussen kracht, massa en versnelling bestaat bij doelmatige keuze van de eenheden de betrekking

$$\vec{K} = m\vec{a}. \quad (6)$$

- III Indien het punt een kracht ondervindt van een ander lichaam, oefent het op dit lichaam zelf een kracht uit, gelijk en tegengesteld gericht (actie = reactie).

#### Opmerkingen

- 1) De tweede wet heeft als bijzonder geval de eerste.
- 2) Om de tweede wet van Newton te kunnen verifiëren, moeten we krachten, massa's en versnellingen meten. Versnellingen meten we in een coördinatenstelsel, bij voorkeur in een rustend stelsel. Zo ontstaat de vraag: welk stelsel is in rust? Omdat deze vraag niet gemakkelijk te beantwoorden is, voeren we de tweede wet van Newton liever als volgt in: Er bestaat een stelsel, waarin  $\vec{K} = m\vec{a}$  geldt. Dit stelsel heet een inertiaal systeem.
- 3) Indien we een stelsel gevonden hebben waarin de tweede wet van Newton geldt, geldt deze ook in ieder stelsel dat zich ten opzichte van het eerste met gelijkmatige snelheid beweegt. Alle inertiaal systemen bewegen zich onderling gelijkmatig (relativiteitsprincipe van Galilei). In een stelsel dat zich versneld beweegt t.o.v. enig inertiaal systeem geldt de tweede wet niet.
- 4) We kunnen ook, of beter voor (6) schrijven

$$\vec{K} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}). \quad (7)$$

Deze formule is algemener dan (6) omdat de invloed van de variatie van de massa op de kracht tevens in rekening is gebracht.

- 5) De betrekking (7) is een vectorbetrekking. Ze is invariant tegenover draaiingen van het inertiaal systeem. Ondervindt bv. een lichaam een kracht, evenredig met het kwadraat van de snelheid en tegengesteld gericht, dan mag men niet schrijven

$$K = -c(\dot{x})^2, \quad (8)$$

ook niet als de beweging langs de x-as verloopt, doch

$$\vec{K} = -c \frac{\vec{v}}{v} \cdot v^2 = -c \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (9)$$

#### 4. Eenhedenstelsels

De tweede wet van Newton krijgt eerst zin na invoering van een eenhedenstelsel. We hebben het fysische stelsel, dat uitgaat van lengte, tijd en massa:

c-g-s-stelsel : cm-gr-sec  $\rightarrow$  dyne,

Giorgi-stelsel: m-kg-sec  $\rightarrow$  Newton =  $10^5$  dynes

en het technische stelsel, dat uitgaat van lengte, tijd en kracht.

m-sec-kg(kr)  $\rightarrow$  massa eenh. =  $\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}}$ .

Verband: 1 kg(kr) = 1000 g dynes =  $9,8065 \cdot 10^5$  dynes.

$$1 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}} = 9,8065 \text{ kg (massa)}.$$

#### 5. Het moment

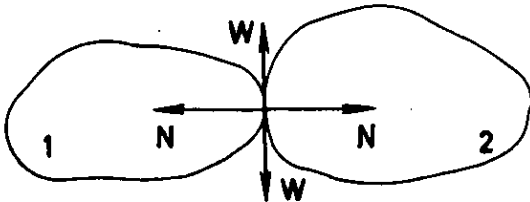
Het moment  $\vec{M}$  van een kracht  $\vec{K}$  t.o.v. een willekeurig punt O is gedefinieerd door

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{K}, \quad (10)$$

waarin  $\vec{r}$  de radiusvector is van O naar een punt op de krachtlijn.

$\vec{M}$  verandert niet van waarde, indien  $\vec{K}$  langs de krachtlijn glijdt, evenmin als R volgens (2). Daarom is  $\vec{K}$  een glijdende vector.

Het moment  $\vec{M}$  is een gebonden vector. Het behoort bij het punt O en bij de kracht  $\vec{K}$ . Wordt O als een vast punt beschouwd, d.w.z. bekijken we alleen de variatie van  $\vec{M}$  als functie van  $\vec{K}$ , dan is de werking van  $\vec{M}$  gelijkwaardig met die van een koppel. Het koppel is nu een vrije vector, het kan parallel worden verplaatst.

6. De Wrijving

Zodra twee lichamen contact met elkaar maken, treedt een normaalkracht  $N$  op, welke het indringen van de lichamen in elkaar verhindert. Er is in het algemeen ook een wrijving  $W$ .

In het geval van relatieve rust,

$$v_1 \operatorname{tg} = v_2 \operatorname{tg}, \quad (11)$$

leert het experiment dat

$$|W| \leq f N, \quad (12)$$

zodra relatieve beweging optreedt is

$$W = \pm f N, \quad (13)$$

waarin  $f$  een getal voorstelt: de wrijvingscoëfficiënt, welke afhangt van de ruwheid der aanrakingsvlakken.

Opgemerkt wordt, dat (12) en (13) een verregaande idealisering van de werkelijk optredende krachten geven. Het verschijnsel van de wrijving is meer gecompliceerd.

Bij wrijvingsvraagstukken moet men, als gevolg van de optredende ongelijkheden, evenals bij vraagstukken met eenzijdige bindingen, eerst een onderstelling maken over het al dan niet optreden van beweging. In het eerste geval geldt (13) en kan  $W$  uit  $N$  worden bepaald (indien de richting bekend is), in het tweede geval geldt (12) en is  $W$  een onafhankelijke onbekende. De onderstelling moet worden geverifieerd.

7. De krachtdichtheid

Indien op een continu lichaam een van punt tot punt variabele kracht werkt, kan worden ingevoerd de krachtdichtheid  $\vec{k}$  door

$$d\vec{K} = \vec{k} dV, \quad (14)$$

waaruit volgt

$$\vec{K} = \int \vec{k} dV. \quad (15)$$

De tweede wet van Newton kan worden geformuleerd als

$$\vec{k} = \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}). \quad (16)$$

### 8. De momentdichtheid

Op gelijke wijze wordt de momentdichtheid  $\vec{m}$  gedefinieerd door

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{k}, \quad (17)$$

zodat

$$\vec{M} = \int_{\mathcal{V}} \vec{m} \, dV = \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \vec{k} \, dV. \quad (18)$$

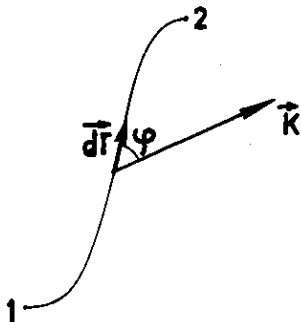
## II. Krachtvelden

### 1. Inleiding

Indien in ieder punt van een bepaald ruimtelijk gebied de krachten gegeven zijn als functie van de plaats, spreken we van een krachtveld. Dan is dus

$$\vec{K} = \vec{K}(x, y, z). \quad (1)$$

Op een materieel punt  $m$  wordt in dit krachtveld arbeid verricht bij beweging van punt 1 naar punt 2.



Deze wordt gedefinieerd door

$$A = \int_1^2 \vec{K} \cdot d\vec{r}. \quad (2)$$

We hebben

$$A = \int_1^2 K \cos \varphi ds, \quad (3)$$

als  $\varphi$  de hoek is tussen  $\vec{K}$  en  $d\vec{r}$ .

We kunnen voor (2) ook schrijven

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{K} \cdot \vec{v} dt. \quad (4)$$

$(\vec{K} \cdot \vec{v})$  is het vermogen, geleverd tijdens de beweging in het krachtveld.

Soms is een krachtveld af te leiden van een potentiaal  $U(x, y, z)$  door middel van

$$K_i = - U_{,i} \quad (5)$$

of 
$$\vec{K} = - \text{grad } U. \quad (6)$$

Noodzakelijk voor de existentie van  $U$  is dat

$$\text{rot } \vec{K} = 0, \quad (7)$$

een vergelijking die ook kan worden geschreven als

$$\oint \vec{K} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (8)$$

op grond van de stelling van Stokes.

Indien  $U$  niet expliciet van de tijd afhangt is in dit geval

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \vec{K} \cdot d\vec{r} \equiv \int_1^2 K_i dx_i = \\ &= - \int_1^2 U_{,i} dx_i = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2, \end{aligned} \quad (9)$$

dus: de verrichte arbeid is gelijk aan de afname van de potentiële energie. We hebben in het geval (8) te doen met een z.g. conservatief krachtveld.

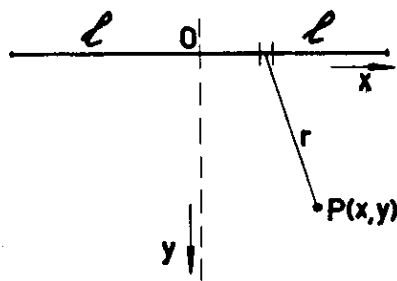
De integraal  $\int_1^2 \vec{K} \cdot d\vec{r}$  is onafhankelijk van de gevolgde weg van 1 naar 2.

#### Voorbeelden

- a. gravitatieveld :  $\vec{K} = -mg \vec{k}$ .
- b. centraal krachtveld:  $\vec{K} = f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ ,  
aantrekkend of afstotend vanuit de oorsprong.
- c. bijzonder geval van b: lineaire veer met vast uiteinde in 0,  
veerconstante  $c$ .

$$\vec{K} = -c\vec{r} ; \quad U = \frac{1}{2} cr^2. \quad (10)$$

#### Voorbeeld



Een homogene staaf, massa  $m$  en lengte  $2l$  oefent op een massapunt  $M$  in  $P$  een kracht uit volgens de algemene aantrekkingswet van Newton. [Deze luidt: twee massapunten  $m_1$  en  $m_2$ , gelegen op afstand  $r$ , trekken elkaar aan volgens de wet

$$\vec{K} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (11)$$

waarin  $f$  een evenredigheidsconstante is.]

Gevraagd wordt de potentiaal van  $P$ .



Het is duidelijk, dat het Newtonse aantrekkingsveld een potentiaal bezit. Uit (11) volgt

$$U = - f \frac{m_1 m_2}{r} . \quad (12)$$

We passen (12) toe op het probleem van de staaf. We verdelen de staaf in elementen van de lengte  $dx$ , met de massa

$$m_1 = \frac{m}{2\ell} dx,$$

terwijl  $m_2 = M$ .

De potentiaal is dus

$$U = - f \frac{m}{2\ell} \cdot M \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{r} , \quad (13)$$

in welke integraal voor  $r$  moet worden geschreven

$$r^2 = (X - x)^2 + Y^2 . \quad (14)$$

We voeren de hulphoek  $\varphi$  in door

$$X - x = Y \tan \varphi , \quad (15)$$

waarmee (13) overgaat in

$$U = f \frac{Mm}{2\ell} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} . \quad (16)$$

Deze integraal is elementair. Gevonden wordt

$$U = f \frac{Mm}{2\ell} \log \frac{X-\ell + \sqrt{(X-\ell)^2 + Y^2}}{X+\ell + \sqrt{(X+\ell)^2 + Y^2}} . \quad (17)$$

Uit (17) zijn de krachten direct te berekenen.

## 2. Potentiaal bij een willekeurig stelsel

De beschouwingen in 1 gelden voor een materieel punt. Indien een systeem met ruimtelijke uitgestrektheid door een krachtveld beweegt wordt de arbeid gedurende  $t_1$  tot  $t_2$  verricht

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_v \vec{k} \cdot \vec{v} dV, \quad (18)$$

aangezien de kracht van punt tot punt in het systeem kan veranderen. Ieder punt van het stelsel ondergaat een verplaatsing  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  gedurende  $dt$ , zodat voor (18) ook kan worden geschreven

$$A \int_1^2 \int_V \vec{k} \cdot d\vec{r} dV. \quad (19)$$

De tweede integraal is over het volume, de eerste over de achtereenvolgende standen van het stelsel.

Indien het krachtveld conservatief is, is  $\vec{k}$  af te leiden uit een potentiaal,  $u$ , door

$$\vec{k} = - \text{grad } u. \quad (20)$$

De grootte  $u$  heeft voor het lichaam het karakter van een potentiaaldichtheid. De totale potentiaal heeft de gedaante

$$U = \int_V u dV, \quad (21)$$

zoals uit de definitie van  $\vec{k}$  volgt. Het is duidelijk, dat

$$\vec{k} \cdot d\vec{r} \equiv k_i dx_i = - du, \quad (22)$$

waarmee (19) overgaat in

$$A = - \int_1^2 \int_V du dV = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2. \quad (23)$$

Bij een massapunt is

$$U = uV. \quad (24)$$

Bij een lichaam in het zwaartekrachtsveld is

$$U = \int_V z g \rho dV = g \int_V z \rho dV = m g z_0, \quad (25)$$

waarin  $z_0$  de coördinaat van het zwaartepunt is.

Bestaat het systeem uit een aantal gekoppelde onvervormbare lichamen, met totaal  $n$  vrijheidsgraden, dan worden de coördinaten van het systeem in de  $n$  algemene coördinaten  $q_k$  uitgedrukt door

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, \dots, q_n), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (26)$$

De functie  $u$  is een functie van de ruimtelijke coördinaten. Deze kunnen worden uitgedrukt door (26) in de  $q_k$ 's, waarmee

$$u = u(q_1, \dots, q_n). \quad (27)$$

Na integratie over de ruimte wordt

$$U = U(q_1, \dots, q_n), \quad (28)$$

waarbij wordt opgemerkt, dat door de integratie over de massaelementen enkele  $q_k$ 's in (28) kunnen uitvallen.

Voor de arbeid  $A$  kunnen we dan schrijven

$$\begin{aligned} A &= - \int_1^2 \int_V du \, dV = - \int_1^2 \sum_{k=1}^n \int_V dV \frac{\partial u}{\partial q_k} dq_k = \\ &= - \int_1^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^n \int_1^2 Q_k dq_k, \quad (29) \end{aligned}$$

waarin is ingevoerd de z.g. gegeneraliseerde kracht  $Q_k$  door

$$Q_k = - \frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (30)$$

Zoals uit de definitie blijkt is  $Q_k$  ook te schrijven als

$$Q_k = \sum_{j=1}^m \vec{K}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}, \quad (31)$$

in het geval van massapunten en als

$$Q_k = \int_V \vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} dV \quad (32)$$

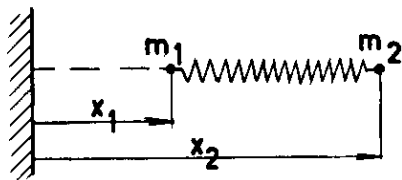
voor het continue systeem.

De formules (31) en (32) definiëren  $Q_k$  ook in het geval, dat het krachtveld niet van een potentiaal is af te leiden.

Voor de bepaling van  $Q_k$  maken we gebruik van

$$\delta A = Q_k \delta q_k, \quad (33)$$

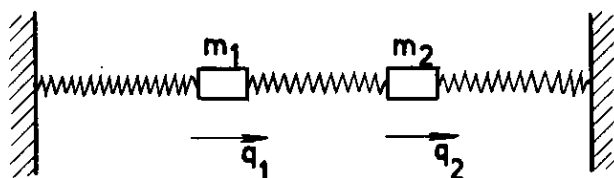
waarin  $\delta q_k$  een virtuele verplaatsing van  $q_k$  is, terwijl alle  $q_\ell$ 's met  $\ell \neq k$  constant blijven, en  $\delta A$  de bij de verplaatsing verrichte arbeid. De formule (33) volgt direct uit (19) door toepassing op een kleine verplaatsing.

Voorbeeld

Twee massapunten  $m_1$  en  $m_2$  zijn verbonden door een gewichtsloze veer, ongespannen lengte  $a$ , veerconstante  $k$ . De generaliseerde coördinaten voor de ééndimensionale beweging zijn  $x_1$  en  $x_2$ .

De potentiële energie is

$$U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - a)^2. \quad (34)$$

Voorbeeld

De massa's  $m_1$  en  $m_2$  zijn door gewichtloze veren verbonden. De veerconstanten zijn alle gelijk  $k$ . Indien in de ééndimensionale beweging  $q_1$  wordt gemeten vanuit de evenwichtstand voor  $m_1$  en evenzo  $q_2$  voor  $m_2$  is

$$U = \frac{1}{2} k (q_1^2 + q_2^2 + (q_1 - q_2)^2). \quad (35)$$

Opgave

Formuleer de Newtonse aantrekkingskracht tussen twee eindige rechte staven, welke in één vlak liggen.

### III. Statica van het systeem van starre lichamen

#### 1. Het principe van de virtuele arbeid

Een systeem heeft  $n$  graden van vrijheid. Bij een virtuele verplaatsing  $\delta \vec{r}$  van ieder punt van het systeem wordt door de krachten een arbeid  $\delta A$  verricht, bepaald door

$$\delta A = \int_V dV \vec{k} \cdot \delta \vec{r} . \quad (1)$$

Indien er evenwicht is en de bindingen in het systeem zijn tweezijdig, leert het principe van de virtuele arbeid, dat  $\delta A = 0$  is.

Dit principe is een grondprincipe van de mechanica. Het is meer geschikt dan de Newtonse formulering om er de beschouwingen op te baseren.

We kunnen (1) schrijven als

$$\delta A = 0 = \int_V dV \vec{k}^{(b)} \cdot \delta \vec{r} + \int_V dV \vec{k}^{(r)} \cdot \delta \vec{r}, \quad (2)$$

waarbij de krachtdichtheden gesplitst zijn in belastings- en reactiekrachtdichtheden.

Nu is per definitie

$$\int_V dV \vec{k}^{(r)} \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad (3)$$

voor alle  $\delta \vec{r}$ . Bij een virtuele verplaatsing verrichten de reactiekrachten dus geen arbeid. Uit (2) en (3) volgt

$$\int_V dV \vec{k}^{(b)} \cdot \delta \vec{r} = 0, \quad (4)$$

een andere formulering van het principe van de virtuele arbeid.

Om aansluiting te verkrijgen met een meer conventionele opbouw van de mechanica passen we de formules (1) tot (4) toe op enkele bijzondere gevallen.

#### a) Het materieel punt

Voor een punt gaat (1) over in

$$\vec{K} \cdot \delta \vec{r} = 0, \quad (5)$$

voor het evenwicht bij iedere toelaatbare virtuele verplaatsing. Dit is gelijkwaardig met

$$\vec{K}^{(b)} \cdot \delta \vec{r} = 0, \quad (6)$$

welke formule uit (4) volgt.

Voor een vrij punt zijn  $\vec{K}^{(b)}$  en  $\vec{K}$  identiek. De virtuele verplaatsingen zijn dan onafhankelijk. Dus geldt voor het evenwicht van een vrij punt

$$\vec{K} = 0, \quad (7)$$

zoals ook uit de eerste wet van Newton volgt.

### b) Het starre lichaam

We beperken ons tot het vrije starre lichaam, dat dus zes graden van vrijheid heeft.

Houden we  $\delta \vec{r}$  voor het gehele lichaam constant dan wordt (1)

$$0 = \delta \vec{r} \cdot \int_V dV \vec{k} = \delta \vec{r} \cdot \vec{K}, \quad (8)$$

waaruit

$$\vec{K} = 0. \quad (9)$$

Laten we het lichaam een draaiing maken om een as door een vast punt, welke as getypeerd wordt door de eenheidsvector  $\vec{e}$ , terwijl de hoek waarover gedraaid wordt  $\delta\varphi$  is. Dan is

$$\delta \vec{r} = \delta\varphi \cdot \vec{e} \times \vec{r}, \quad (10)$$

waarbij  $\vec{r}$  gemeten wordt vanuit het vaste punt. Het principe van de virtuele arbeid wordt nu

$$\delta A = 0 = \int_V dV \vec{k}^{(b)} \cdot \vec{e} \times \vec{r} \delta\varphi, \quad (11)$$

waaruit volgt op grond van de willekeurigheid van  $\delta\varphi$

$$\int_V dV \vec{k}^{(b)} \cdot \vec{e} \times \vec{r} = 0. \quad (12)$$

Voor drie willekeurige vectoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  en  $\vec{c}$  geldt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (13)$$

Toepassing op (12) levert op

$$\vec{e} \cdot \int_V dV \vec{r} \times \vec{k}^{(b)} = 0, \quad (14)$$

waaruit, op grond van de willekeurige keuze van  $\vec{e}$

$$\vec{M} = 0. \quad (15)$$

De formules (9) en (15) zijn de bekende evenwichtsformules uit de elementaire theorie.

Opgemerkt wordt dat de formuleringen volgens (1) en (4) niet beperkt zijn tot de gegeven gevallen. Zij gelden voor een willekeurig gekoppeld systeem met een eindig aantal graden van vrijheid.

## 2. Het principe van de stationnaire potentiële energie

Indien  $\vec{k}^{(b)}$  af te leiden is uit een potentiaaldichtheid  $u$  wordt (4)

$$\begin{aligned} \delta A = 0 &= \int_V dV \vec{k}^{(b)} \cdot \delta \vec{r} = \int_V dV \vec{k}_i^{(b)} \delta x_i = - \int_V dV u_{,i} \delta x_i = \\ &= - \int dV \delta u = - \delta \int u dV = - \delta U, \end{aligned} \quad (16)$$

waarbij het variatieteken en de integraal verwisseld zijn. Uit (16) volgt dat de potentiaal in evenwicht een stationnaire waarde aanneemt.

Aangezien

$$\delta U = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k \quad (17)$$

en  $\delta q_k$  onafhankelijk zijn, geldt voor het evenwicht

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0. \quad (18)$$

## 3. Stabiliteit van het evenwicht



Het evenwicht, behorende bij (18) is alleen stabiel, indien de potentiële energie een relatief minimum heeft. Want

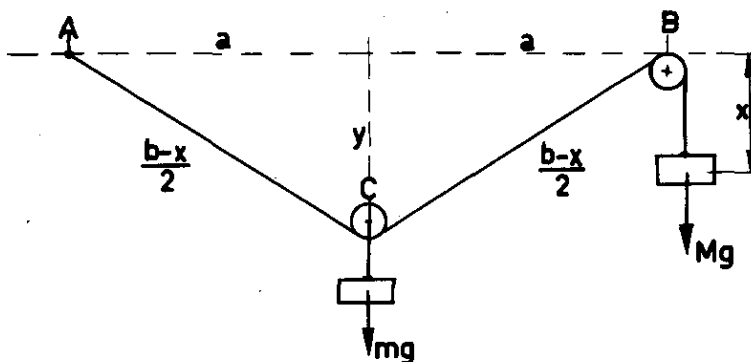
$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_\ell} \delta q_k \delta q_\ell + \dots \quad (19)$$

Bij evenwicht is de eerste som = 0. Voor infinitesimale verplaatsingen geldt dus

$$\delta U = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_\ell} \delta q_k \delta q_\ell, \quad (20)$$

mits de tweede afgeleiden niet = 0 worden. Indien (20) positief definitief is, is U een minimum en het evenwicht is stabiel. Is de vorm voor sommige combinaties van  $\delta q_k$ ,  $\delta q_\ell$  negatief, dan is het evenwicht labiel. In het eerste geval moet nl. energie worden aangewend om de evenwichtstand te verlaten, in het tweede geval komt energie vrij.

### Voorbeeld



A en B zijn vaste punten. Bij B is een katrol. Er hangt een koord van de lengte  $b$  van A over de katrol in B. In C bevindt zich een andere katrol, waaraan de massa  $m$  hangt. Aan het uiteinde van het koord hangt de massa  $M$ .

Gevraagd wordt de evenwichtstoestand.

Daar het koord een vaste lengte heeft, geldt

$$y^2 + a^2 = \left(\frac{b-x}{2}\right)^2. \quad (21)$$

Laat de massa  $M$  een virtuele verplaatsing  $\delta x$  ondergaan. Dan is de verplaatsing  $\delta y$  bepaald door

$$\delta y = - \frac{(b-x)}{\sqrt{4(b-x)^2 - 16a^2}} \delta x. \quad (22)$$

Volgens het principe van de virtuele arbeid is

$$M g \delta x = m g |\delta y|, \quad (23)$$

waaruit volgt

$$x = b - \sqrt{\frac{16M^2 a^2}{4M^2 - m^2}}. \quad (24)$$

De potentiële energie  $U$  is gegeven door

$$U = - m g y - M g x = - M g x - \frac{m g}{2} \sqrt{(b-x)^2 - 4a^2}. \quad (25)$$



De evenwichtsstand wordt bepaald uit  $\frac{dU}{dx} = 0$  en levert natuurlijk (24).

De evenwichtsstand is stabiel als

$$\frac{d^2U}{dx^2} = g \frac{\sqrt{4M^2 - m^2}}{4m^2a} > 0 \quad (26)$$

is, wat de voorwaarde levert

$$2M > m. \quad (27)$$

Dit is tevens de conditie voor de existentie van (24).  
Indien er een evenwichtsstand is, is deze stabiel.

#### IV. Dynamica van het systeem van starre lichamen

##### 1. Principe van d'Alembert

Het principe van d'Alembert brengt de dynamische vergelijkingen terug tot de evenwichtsvergelijkingen door aan de belastingskrachten de traagheidskrachten met negatief teken toe te voegen. De traagheidskrachten zijn de tijdafgeleiden van de impulsen. Het principe van d'Alembert postuleert

$$\delta A = \int_V dV \left( \vec{k}^{(b)} - \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right) \cdot \delta \vec{r} = 0, \quad (1)$$

voor willekeurige virtuele verplaatsingen  $\delta \vec{r}$ .

Voor een vrij massapunt, waarbij de  $\delta \vec{r}$ 's onafhankelijk zijn volgt uit (1) direct

$$\vec{K}^{(b)} \equiv \vec{K} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}), \quad (2)$$

de tweede wet van Newton.

##### 2. De zwaartepuntsstelling

We passen (1) toe op de beweging van één continu doch vrij lichaam. We nemen weer  $\delta \vec{r}$  constant over het gehele lichaam: dus een translatie. Dan wordt (1)

$$\delta \vec{r} \cdot \int_V dV \left( \vec{k}^{(b)} - \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right) = 0 \quad (3)$$

voor willekeurige keuze van  $\delta \vec{r}$ . Daaruit volgt dat de integraal = 0 moet zijn, waaruit

$$\vec{K}^{(b)} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} \cdot dV = \frac{d}{dt} (m \vec{v}_0), \quad (4)$$

waarin  $\vec{v}_0$  de snelheid van het zwaartepunt is.

Dus het zwaartepunt van een vast lichaam gedraagt zich als een massapunt, waarin alle massa van het lichaam is geconcentreerd. Het is duidelijk uit de afleiding, dat deze stelling nog meer algemeen geldt: Het zwaartepunt van een willekeurig systeem van onderling gekoppelde vaste lichamen, gedraagt zich als een massapunt onder invloed van de resultanten van alle krachten.

##### Opmerking

De tweede wet van Newton voor het zwaartepunt zou luiden

$$\vec{K}^{(u)} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}_0) \quad (5)$$

en dit is niet identiek met (4). Indien het lichaam of het totale systeem vrij is, d.w.z. uitsluitend onder invloed van uitwendige krachtvelden, zonder reactiekrachten is

$$\vec{K}^{(u)} = \vec{K}^{(b)} \quad (6)$$

en zijn (5) en (4) identiek.

### 3. De momentenstelling

We passen (1) toe op de rotatie van een vrij lichaam om een as, gegeven door  $\delta\varphi$  en  $\vec{e}$ . Dan is

$$\delta\vec{r} = \delta\varphi \cdot \vec{e} \times \vec{r} \quad (7)$$

en het principe van d'Alembert wordt

$$\delta\varphi \int_V dV \left\{ \vec{k}^{(b)} - \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right\} \cdot \vec{e} \times \vec{r} = 0. \quad (8)$$

Met behulp van de vectoromvorming (III,13) wordt dit

$$\vec{e} \cdot \int_V dV \left\{ \vec{r} \times \vec{k}^{(b)} - \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right\} = 0. \quad (9)$$

Daar de formule (9) voor willekeurige keuze van  $\vec{e}$  geldt moet de integraal = 0 zijn. We hebben voor het moment

$$\vec{M} = \int_V dV \cdot \vec{r} \times \vec{k}^{(b)}, \quad (10)$$

terwijl het impulsmoment gegeven is door

$$\vec{D} = \int_V dV (\vec{r} \times \rho \vec{v}). \quad (11)$$

Dus is

$$\begin{aligned} \dot{\vec{D}} &= \int_V dV \left( \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right) + \int_V dV (\dot{\vec{r}} \times \rho \vec{v}) = \\ &= \int_V \rho dV \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{v}}, \end{aligned} \quad (12)$$

daar  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ .

Dus geldt t.o.v. een vast punt O

$$\vec{M} = \vec{D}. \quad (13)$$

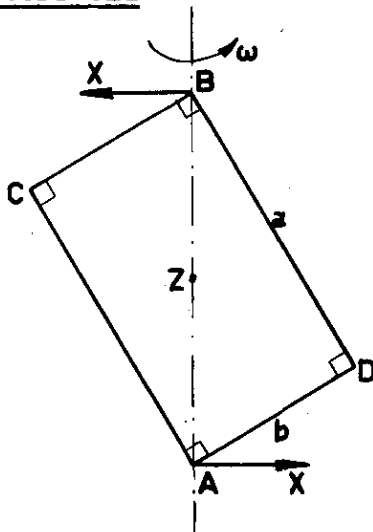
De momentenstelling geldt t.o.v. een willekeurig vast punt, doch niet t.o.v. een willekeurig bewegend punt, bijv. een met het lichaam meebewegend punt (waarom niet?).

De momentenstelling geldt echter wel ten opzichte van het bewegend zwaartepunt.

We hebben nl.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{D}}_O &= \int_V \rho dV (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_O) \times \vec{v} + \int_V \rho dV (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \dot{\vec{v}} = \\ &= \int_V \rho dV \vec{v} \times \vec{v} + \int_V \rho dV \vec{v} \times \dot{\vec{r}}_O + \int_V \rho dV (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \dot{\vec{v}} = \\ &= 0 + 0 + \vec{M}_O.\end{aligned}\quad (14)$$

#### Voorbeeld



Een rechthoekige plaat met de zijden a en b roteert met de hoeksnelheid  $\omega$  om een diagonaal AB.

Gevraagd worden de reactiekrachten in A en B.

De reactiekracht in A is X. Omdat het zwaartepunt in rust blijft is de reactiekracht in B gelijk -X.

Het impulsmoment ligt in het vlak van de plaat. Daar  $\omega$  constant is, heeft het constante grootte, doch voert een precessiebeweging uit. De verandering van het impulsmoment staat dus loodrecht op het vlak van de plaat.

Dus staat het moment M loodrecht op het vlak van de plaat. De krachten X en -X liggen dus in het vlak ACBD.

Het impulsmoment  $\vec{D}$  is bepaald door

$$\vec{D} = \int \rho dS \vec{r} \times \vec{v}, \quad (15)$$

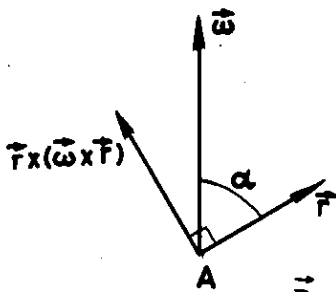
waarin  $\rho$  de oppervlaktedichtheid

$$\rho = \frac{m}{ab}, \quad (16)$$

en 
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (17)$$

Dus

$$\vec{D} = \rho \int dS \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$



De vector  $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  ligt in het vlak van  $\vec{\omega}$  en  $\vec{r}$ , heeft de grootte  $\omega r^2 \sin \alpha$  en de richting  $\perp \vec{r}$ .

Dus

$$\vec{D} = \rho \omega \int dS r^2 \vec{e}(r) \sin \alpha, \quad (18)$$

indien  $\vec{e}$  de eenheidsvector  $\perp \vec{r}$  is.

Omdat we al deze vectoren moeten optellen, ontbinden we ze in twee componenten, de componenten evenwijdig met  $\vec{\omega}$  en die loodrecht op  $\vec{\omega}$ . Dus

$$\vec{D} = \vec{D}_{\perp} + \vec{D}_{//}, \quad (19)$$

symbolisch geschreven.

Voor de toepassing van de momentenstelling moeten we  $\dot{\vec{D}}$  vinden. Nu is volgens (A, III, 33)

$$\dot{\vec{D}} = \dot{\vec{D}}_{\text{rel}} + (\vec{\omega} \times \vec{D}). \quad (20)$$

Maar  $\vec{D}$  is in het vlak van de beweging constant, dus  $\dot{\vec{D}}_{\text{rel}} = 0$ .

Daaruit volgt

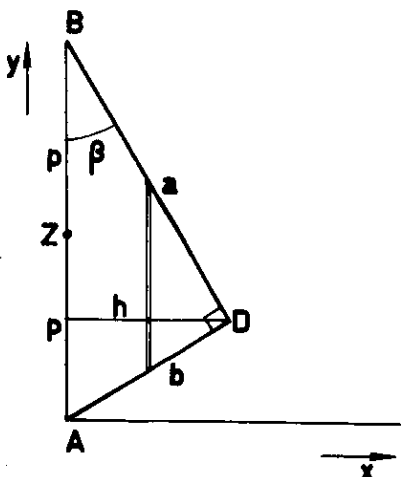
$$\dot{\vec{D}} = (\vec{\omega} \times \vec{D}) = (\vec{\omega} \times \vec{D}_{\perp}). \quad (21)$$

Het is dus voldoende de loodrechte componenten samen te nemen. Daarmee wordt

$$\dot{\vec{D}} = \rho \omega^2 \int dS r^2 \sin \alpha \cos \alpha = \rho \omega^2 \int xy \, dx \, dy, \quad (22)$$

met de richting loodrecht op het vlak.

Om de integraal in (22) te berekenen leggen we de oorsprong in het vaste punt A. We bekijken eerst de driehoek ADB.



We hebben

$$\left. \begin{aligned} 2p &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ h &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

We maken stroken van de breedte  $dx$ , evenwijdig aan de  $y$ -as. Dan levert de integratie naar  $y$  op

$$\int_{\frac{bx}{a}}^{2p - \frac{ax}{b}} y \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{bx}{a}}^{2p - \frac{ax}{b}} = 2p^2 - \frac{2pax}{b} + \frac{a^4 - b^4}{2a^2b^2} x^2. \quad (24)$$

De integratie naar  $x$  wordt

$$\int_0^h x \left( 2p^2 - \frac{2pax}{b} + \frac{a^4 - b^4}{2a^2b^2} x^2 \right) dx =$$

$$p^2 h^2 - \frac{2}{3} \frac{pah^3}{b} + \frac{1}{8} \frac{a^4 - b^4}{a^2b^2} h^4. \quad (25)$$

We moeten ook de driehoek ACB beschouwen. Het is duidelijk, dat de uitkomst verkregen wordt uit (25) door  $a$  en  $b$  te verwisselen en tevens het teken om te keren. Totaal ontstaat zo

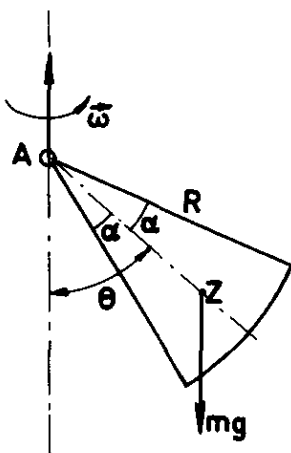
$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{3} ph^3 \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) + \frac{1}{4} \frac{a^4 - b^4}{a^2b^2} h^4 = \\ &= -\frac{1}{12} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \cdot (a^2 - b^2) \cdot \rho \omega^2 = \\ M &= -\frac{1}{12} m \omega^2 \frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

De kracht  $X$  is dus

$$X = \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{12} m \omega^2 \frac{ab(a^2 - b^2)}{\sqrt{a^2 + b^2}^3}. \quad (27)$$

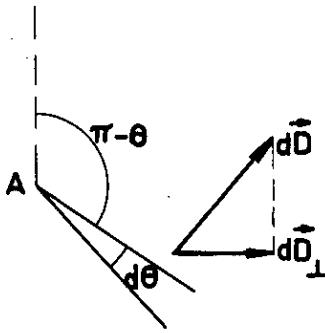
### Voorbeeld

Een cirkelsector met de tophoek  $2\alpha$  kan in een vlak scharnieren om een as door de top. Deze as wentelt met de hoeksnelheid  $\omega$ . Gevraagd wordt de evenwichtsstand van de sector.



De massa van de schijf is  $m$ , de oppervlakedichtheid is  $\rho$ . Dan is

$$\begin{aligned} m &= \int_{\theta - \alpha}^{\theta + \alpha} d\theta \int_0^R \rho r \, dr = \\ &= \alpha \rho R^2, \end{aligned} \quad (28)$$



$$\text{waaruit } \rho = \frac{m}{\alpha R^2}. \quad (29)$$

We snijden een sector onder de hoek  $d\theta$  uit.

Voor een elementje  $dm = \rho r dr d\theta$  is

$$d\vec{D} = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \rho r dr d\theta.$$

De waarde van dit vectortje is  $|dD| = \rho r dr d\theta \cdot \omega r^2 \sin \theta$ , terwijl het loodrecht op de uitgesneden sector staat.

Alle elementen uit een sector tellen we op:

$$dD = \rho \omega \int_0^R r^2 \sin \theta r dr d\theta = \rho \omega \sin \theta d\theta \cdot \frac{R^4}{4}. \quad (30)$$

Ook hier ligt weer de totale impulsmomentvector in het vlak van de sector. Omdat

$$\vec{D} = \vec{\omega} \times \vec{D},$$

speelt alleen de loodrechte component van  $\vec{D}$ :  $\vec{D}_\perp$  een rol. We hebben

$$dD_\perp = \rho \omega \sin \theta d\theta \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \cos \theta, \quad (31)$$

We integreren deze vorm en krijgen

$$\begin{aligned} D_\perp &= \rho \omega \frac{R^4}{4} \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{\rho \omega R^4}{16} (\cos 2(\theta-\alpha) - \cos 2(\theta+\alpha)). \end{aligned} \quad (32)$$

Daaruit volgt

$$\dot{D} = \frac{m\omega^2 R^2}{8\alpha} \sin 2\alpha \sin 2\theta. \quad (33)$$

Daar het moment (loodrecht het vlak) gelijk is aan

$$M = mg \cdot \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \sin \theta, \quad (34)$$

levert gelijkstelling van (33) en (34) op

$$\cos \theta = \frac{4g}{3R} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ of } \sin \theta = 0. \quad (35)$$

4. De vergelijkingen van Lagrange

We gaan uit van het principe van d'Alembert

$$\int_V dV \left( \vec{k}^{(b)} - \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right) \delta \vec{r} = 0, \quad (36)$$

toegepast op een systeem dat bestaat uit een aantal gekoppelde lichamen. Indien het systeem  $n$  vrijheidsgraden bezit, kunnen we schrijven

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (37)$$

waaruit blijkt dat de variaties  $\delta \vec{r}$  niet meer onafhankelijk kunnen worden gekozen. We hebben

$$\delta \vec{r} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (38)$$

waarin de variaties  $\delta q_k$  wel vrij en onafhankelijk mogen worden gekozen.

Uit (38) volgt direct dat

$$\int_V dV \vec{k}^{(b)} \delta \vec{r} = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k, \quad (39)$$

waarin gebruik is gemaakt van de gegeneraliseerde krachten  $Q_k$  volgens (II,32).

Door fluctioneren van (37) vinden we

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \quad (40)$$

waaruit

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}. \quad (41)$$

Verder is

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_k \partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_k}. \quad (42)$$

We vinden nu

$$-\int_V \rho dV \cdot \dot{\vec{v}} \cdot \delta \vec{r} = -\int_V \rho dV \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \delta q_k =$$



$$\begin{aligned}
& - \int_V \rho dV \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left( \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right) - \vec{r} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} \delta q_k = \\
& = - \sum_{k=1}^n \delta q_k \int_V \rho dV \left\{ \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_k} \right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_k} \right\} = \\
& = - \sum_{k=1}^n \delta q_k \int_V \rho dV \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial q_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial q_k} \right\} = \\
& = - \sum_{k=1}^n \delta q_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV - \frac{\partial}{\partial q_k} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV \right) = \\
& = - \sum_{k=1}^n \delta q_k \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\}. \tag{43}
\end{aligned}$$

Het principe van d'Alembert levert dus op

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \tag{44}$$

waaruit direct de vergelijkingen van Lagrange volgen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{45}$$

Indien een gedeelte (of alle) krachten van een potentiaal zijn af te leiden, volgens (II, 30), kunnen we schrijven

$$Q_k = Q_k^{(1)} - \frac{\partial U}{\partial q_k}. \tag{46}$$

Daar  $U$  niet van  $\dot{q}_k$  afhangt, wordt nu (45)

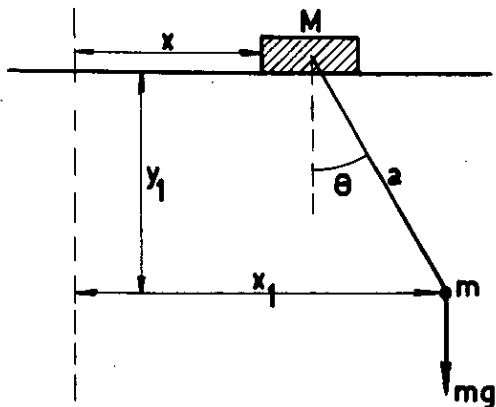
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{(1)}, \tag{47}$$

met

$$L = T - U, \tag{48}$$

de functie van Lagrange.

De  $Q_k^{(1)}$  zijn niet afgeleid van een potentiaal.

Voorbeeld

Het massapunt M kan glijden over een rail. Het is door middel van een koord (of stang) verbonden aan een massapunt m, dat kan slingeren in een vlak. Het koord heeft de lengte a.

Dit is een voorbeeld van een holonoom-skleronoom systeem.

Allereerst voeren we de generaliseerde coördinaten  $x$  en  $\theta$  in. Dan is

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + a \sin \theta, \\ y_1 &= a \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

waaruit we vinden

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [\dot{x} + a \dot{\theta} \cos \theta]^2 + a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (50)$$

Voor de potentiële energie  $U$  geldt

$$U = m g a (1 - \cos \theta), \quad (51)$$

waarmee

$$\begin{aligned} L &= T - U = \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + 2a\dot{\theta} \dot{x} \cos \theta) + m g a \cos \theta. \end{aligned} \quad (52)$$

Daaruit leiden we af

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m) \dot{x} + m a \dot{\theta} \cos \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m a \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta - m g a \sin \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m a^2 \dot{\theta} + m a \dot{x} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

De vergelijkingen van Lagrange worden

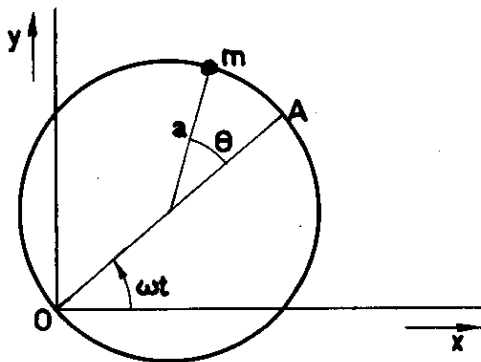
$$\left. \begin{aligned} \frac{M+m}{m} \ddot{x} + a \ddot{\theta} \cos \theta - a \dot{\theta}^2 \sin \theta &= 0, \\ a \ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Deze vergelijkingen zijn moeilijk op te lossen. Indien de hoek  $\theta$  klein is, lineariseren we, d.w.z. we beperken de vergelijkingen tot vergelijkingen van de eerste graad in  $x$ ,  $\theta$  en de afgeleiden. Dan worden (54)

$$\left. \begin{aligned} \frac{M+m}{m} \ddot{x} + a\ddot{\theta} &= 0, \\ a\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

een stelsel dat eenvoudig kan worden opgelost.

### Voorbeeld



Een cirkelvormige draad met middellijn  $OA$  draait met een eenparige hoeksnelheid  $\omega$  om een as in  $O$ , loodrecht op het vlak van de draad. Langs de draad bevindt zich een kraal, het massapunt  $m$ , dat zonder wrijving kan bewegen.

Dit is een voorbeeld van een holonoom-rheonoom systeem.

De enige gegeneraliseerde coördinaat is de hoek  $\theta$ .

We hebben

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t + a \cos (\theta + \omega t), \\ y &= a \sin \omega t + a \sin (\theta + \omega t), \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

voor de coördinaten van het punt  $m$ . Daaruit volgt

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t - a(\dot{\theta} + \omega) \sin (\theta + \omega t), \\ \dot{y} &= a\omega \cos \omega t + a(\dot{\theta} + \omega) \cos (\theta + \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

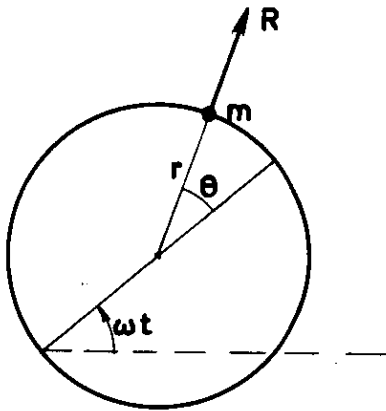
De kinetische energie  $T$  is

$$T = \frac{ma^2}{2} [\omega^2 + (\dot{\theta} + \omega)^2 + 2\omega(\dot{\theta} + \omega) \cos \theta], \quad (58)$$

waaruit de Lagrange vergelijking volgt

$$\theta + \omega^2 \sin \theta = 0. \quad (59)$$

De beweging van het punt is een slingerbeweging om de middellijn.



Op het massapunt  $m$  werkt een reactiekracht  $R$ . Deze is met de normale Lagrange vergelijking niet te bepalen, daar het Lagrange formalisme berust op het feit, dat de reactiekrachten bij een virtuele verplaatsing  $\delta q$  geen arbeid verrichten ( $\delta q = \delta \theta$  hier).

Toch is het mogelijk de reactiekracht  $R$  te bepalen door het Lagrange stelsel uit te breiden. We moeten dan  $R$  arbeid laten verrichten bij een virtuele verplaatsing. Daartoe wordt het systeem zo veranderd, dat de straal van de cirkel  $r$  kan variëren, er zijn twee graden van vrijheid:  $\theta$  en  $r$ .

We hebben de reactiekracht vrijgemaakt.

Nu geldt

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t + r \cos (\theta + \omega t), \\ y &= a \sin \omega t + r \sin (\theta + \omega t), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

waarmee voor de kinetische energie  $T$  wordt gevonden:

$$T = \frac{m}{2} [a^2 \omega^2 + a^2 \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta} + \omega)^2 + 2a\omega \dot{r} \sin \theta + 2a\omega r (\dot{\theta} + \omega) \cos \theta]. \quad (61)$$

Er zijn nu twee Lagrange vergelijkingen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad (62)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = R. \quad (63)$$

Indien we (62) uitwerken en daarna  $r = a$ ,  $\dot{r} = 0$  stellen, vinden we weer de vergelijking (59). De vergelijking (63) is formeel te begrijpen als een vergelijking van Lagrange. Zijn interpretatie is, dat bij variatie  $r \rightarrow r + \delta r$ , de kinetische energie toeneemt met

$$\delta r \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} \right],$$

terwijl  $R$  de arbeid  $R \delta r$  verricht.

Door invullen en uitwerken wordt uit (63) voor  $R$  gevonden

$$R = \frac{m}{2} (2a^2 \ddot{r} + 2a\omega \dot{\theta} \cos \theta - 2r (\dot{\theta} + \omega)^2 - 2a\omega (\dot{\theta} + \omega) \cos \theta). \quad (64)$$

De reactiekracht voor het oorspronkelijke probleem vinden we nu door te stellen

$$r = a, \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0, \quad (65)$$

waardoor (64) overgaat in

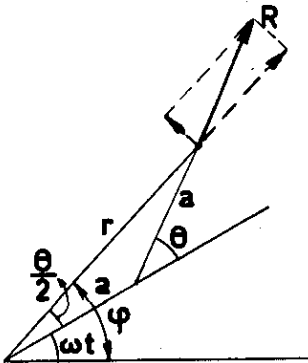
$$R = -ma (\omega^2 \cos \theta + (\dot{\theta} + \omega)^2). \quad (66)$$

Hoewel deze R dus bij de virtuele verplaatsing van het oorspronkelijke probleem:  $\delta\theta$  geen arbeid verricht, verricht R wel arbeid bij de werkelijke beweging. We bewijzen dat de arbeid door R verricht, juist gelijk is aan de toeneming van de kinetische energie. Allereerst vinden we uit (58)

$$\frac{dT}{dt} = ma^2 [\ddot{\theta} (\dot{\theta} + \omega) + \ddot{\theta} \omega \cos \theta - \dot{\theta}^2 \omega \sin \theta - \dot{\theta} \omega^2 \sin \theta], \quad (67)$$

een vorm, welke door gebruik te maken van de bewegingsvergelijking (59) vereenvoudigt wordt tot

$$\frac{dT}{dt} = -ma^2 \omega \sin \theta [(\omega + \dot{\theta})^2 + \omega^2 \cos \theta]. \quad (68)$$



Om de door R verrichte arbeid te berekenen, gaan we over op de coördinaten  $(r, \varphi)$ .

We hebben

$$\left. \begin{aligned} r &= 2a \cos \frac{\theta}{2}, \\ \varphi &= \omega t + \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

waaruit wordt gevonden

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= -a \dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \\ r \dot{\varphi} &= 2a \cos \frac{\theta}{2} (\omega + \frac{\dot{\theta}}{2}). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

De arbeid, verricht door R per seconde is dus

$$\begin{aligned} (R \cos \frac{\theta}{2}) \cdot \dot{r} + (R \sin \frac{\theta}{2}) \cdot r \dot{\varphi} &= -\frac{aR\dot{\theta}}{2} \sin \theta \\ + Raw \sin \theta + \frac{aR\dot{\theta}}{2} \sin \theta &= Raw \sin \theta. \end{aligned} \quad (71)$$

Door invullen van R uit (66) wordt dit

$$= -ma^2 \omega \sin \theta [(\omega + \dot{\theta})^2 + \omega^2 \cos \theta], \quad (72)$$

gelijk aan  $\frac{dT}{dt}$ .

## V. Algemene principes

### 1. De tijdingegraal van een kracht

Voor de resulterende kracht  $\vec{R}$  werkend op een stelsel geldt

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m \vec{v}_0) dt = (m \vec{v}_0)_2 - (m \vec{v}_0)_1. \quad (1)$$

Dus de tijdingegraal van de kracht is gelijk aan de vermeerdering van de hoeveelheid van beweging van het systeem. ( $\vec{v}_0$  is de snelheid van het zwaartepunt)

### 2. De kinetische energie

Omdat voor een willekeurig element geldt

$$\vec{k} = \rho \vec{v}, \quad (2)$$

kunnen we voor de arbeid, die door de krachten gedurende het tijdsinterval van  $t_1$  tot  $t_2$  op het gehele systeem wordt verricht, schrijven

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \vec{k} \cdot \vec{v} dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV \right\} = T_2 - T_1. \quad (3)$$

Indien de krachten van een potentiaal  $U$  zijn af te leiden, geldt volgens (II,23)

$$A = U_1 - U_2. \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt

$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2 = c, \quad (5)$$

de wet van het behoud van mechanische energie.

We kunnen (3) ook nog op andere wijze afleiden. We hebben

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \vec{k} \cdot \vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \{ \vec{k}(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) \} dV, \quad (6)$$

waarbij gebruik is gemaakt van (A,III,27).

Merk op, dat  $\vec{v}_0$  de snelheid van het zwaartepunt is en  $\vec{r}$  gemeten wordt vanuit het zwaartepunt. We kunnen voor (6) schrijven

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{K} \cdot \vec{v}_0 dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt \quad (7)$$

$$\text{Nu is } \left. \begin{aligned} \vec{K} &= \frac{d}{dt} (m \vec{v}_0), \\ \vec{M} &= \frac{d}{dt} \vec{D}_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

waarmee

$$A = \left( \frac{1}{2} m v_0^2 \right)_2 - \left( \frac{1}{2} m v_0^2 \right)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{D}}_0 dt. \quad (9)$$

Om  $\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{D}}_0$  te berekenen, voeren we een meebewegend assenstelsel in. We hebben volgens (A,III,33)

$$\dot{\vec{D}}_0 = (\dot{\vec{D}}_0)_{\text{rel}} + (\vec{\omega} \times \vec{D}_0). \quad (10)$$

De vector  $(\vec{\omega} \times \vec{D}_0)$  staat loodrecht op  $\vec{\omega}$  en dus is  $\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{D}_0) = 0$ . Dus wordt de integraal

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{D}}_0 dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot (\dot{\vec{D}}_0)_{\text{rel}} dt. \quad (11)$$

In een met het lichaam meebewegend vast assenkruis is

$$\vec{\omega} \cdot (\dot{\vec{D}}_0)_{\text{rel}} = \omega_i \dot{D}_{0i} = J_{k\ell} \dot{\omega}_k \omega_\ell, \quad (12)$$

omdat de  $J_{k\ell}$  onafhankelijk van de tijd zijn. Dan is dus

$$\vec{\omega} \cdot (\dot{\vec{D}}_0)_{\text{rel}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{k\ell} \omega_k \omega_\ell \right) = \frac{d T_{\text{rot}}}{dt}. \quad (13)$$

Uit (9), (11) en (13) volgt

$$A = T_2 - T_1. \quad (14)$$

### 3. Behoudwetten

#### a) Wet van het behoud van impuls

Is de resultante van de krachten, die op een systeem werken, of een component daarvan gelijk nul, dan is de totale impuls, resp. een component daarvan constant. Dit volgt direct uit (1).

#### b) Wet van het behoud van impulsmoment

Is het moment van de krachten, t.o.v. een vast punt gelijk aan nul, dan blijft het impulsmoment t.o.v. dat punt constant. Deze stelling geldt ook t.o.v. het zwaartepunt. Dit volgt uit (IV,13) resp. (IV,14).

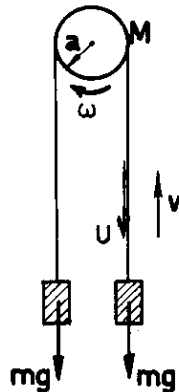
#### c) Wet van het behoud van mechanische energie

Zijn alle krachten af te leiden uit een potentiaal, welke de tijd niet bevat, dan is de mechanische energie constant.

#### Voorbeeld

Een massapunt beweegt zich onder invloed van een aantrekkend centrum. Dan is het moment van de kracht t.o.v. dit centrum gelijk aan nul, dus blijft het impulsmoment constant. Daaruit volgt weer dat de baan in een plat vlak ligt.

#### Voorbeeld



Aan een koord dat over een katrol hangt, hangen twee mannen, die ieder het gewicht  $mg$  hebben. Een begint met de relatieve snelheid  $v$  te klimmen. De massa van het schijfvormige katrol is  $M$ , de straal  $a$ .

Gevraagd wordt de snelheid van het touw  $u$ .

Het moment der uitwendige krachten is en blijft gelijk nul, dus het impulsmoment is ook nul, vanwege de begintoestand.

Het totale impulsmoment is

$$D = J\omega + mu a + ma(u-v) = 0, \quad (15)$$

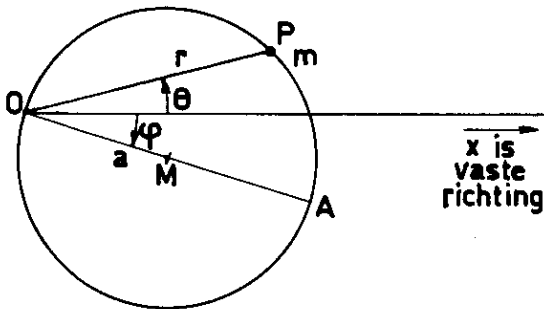
indien  $J$  het traagheidsmoment is van de schijf,  $\omega$  de hoeksnelheid. Daar

$$u = a \omega, \quad J = \frac{1}{2} Ma^2, \quad (16)$$

volgt uit (15)

$$u = \frac{2mv}{4m + M}. \quad (17)$$



Voorbeeld

Een vlakke, cirkelvormige plaat kan draaien om een as door  $O$ , een punt van de omtrek, welke as loodrecht staat op het vlak van de plaat.

In het punt  $A$ , diametraal gelegen tegenover  $O$  staat een man, massa  $m$ . De man begint te lopen langs de omtrek van de cirkel. Er is geen wrijving. De diameter van de cirkel is  $a$ , het traagheidsmoment om  $O$  is  $J$ .

Gevraagd wordt hoeveel de plaat draait, indien de man over een bepaalde boog is gelopen.

Op het systeem werkt geen moment, dus is het impulsmoment constant, en wel  $= 0$ .

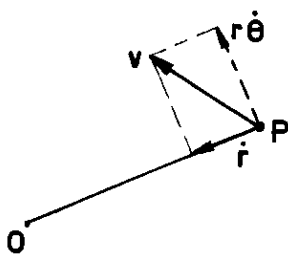
Als  $A$  in  $P$  gekomen is, is de plaat over een hoek  $\varphi$  teruggedraaid. We hebben

$$D_p = - J \dot{\varphi}. \quad (18)$$

Het impulsmoment van de man is

$$D_m = m r^2 \dot{\theta}. \quad (19)$$

Dit is als volgt te zien. De snelheid  $v$  in poolcoördinaten is



$(\dot{r}, r\dot{\theta})$ .

$\dot{r}$  is gericht op  $O$ ,  $r\dot{\theta}$  staat loodrecht op  $OP$ .

Dus wordt de wet van het behoud van impulsmoment

$$m r^2 \dot{\theta} = J \dot{\varphi}. \quad (20)$$

Voer in

$$\theta + \varphi = \psi; \quad r = a \cos \psi = a \cos (\theta + \varphi), \quad (21)$$

dan wordt vergelijking (20)

$$m a^2 \cos^2 \psi \cdot (\dot{\psi} - \dot{\varphi}) = J \dot{\varphi}, \quad (22)$$

waaruit wordt gevonden

$$\dot{\varphi} = \frac{m a^2 \cos^2 \psi}{J + m a^2 \cos^2 \psi} \cdot \dot{\psi}. \quad (23)$$

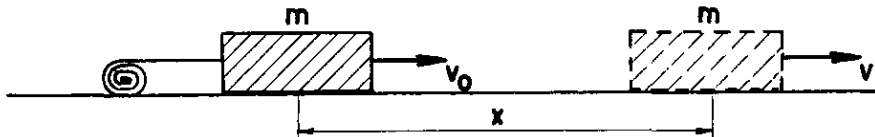
Als de man in O komt heeft hij  $\frac{\pi}{2}$  afgelegd. De plaat is dan teruggedraaid over

$$\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ma^2 \cos^2 \phi}{J + ma^2 \cos^2 \phi} d\phi = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{J}{J+ma^2}} \right). \quad (24)$$

Voor een volledige rondgang wordt

$$\varphi = \pi \left( 1 - \sqrt{\frac{J}{J+ma^2}} \right). \quad (25)$$

### Voorbeeld



Een massapunt  $m$  ligt op een horizontaal vlak, waarover het zonder wrijving kan glijden.

Aan de massa is verbonden een opgewonden ketting, waarvan de massa  $\rho$  per lengte-eenheid is.

De massa  $m$  krijgt een snelheid  $v_0$ , waardoor de ketting gaat afrollen en gedeeltelijk in beweging komt. Gevraagd wordt de snelheid op afstand  $x$  van de startplaats.

Daar op het systeem geen krachten werken, is het impuls constant. Is de massa welke op een bepaald ogenblik beweegt  $M$ , de snelheid  $v$ , dan geldt dus

$$Mv = \text{constant} = m v_0. \quad (26)$$

De massa op afstand  $x$  is

$$M = m + x\rho, \quad (27)$$

waaruit

$$v = \frac{m v_0}{m + x\rho}. \quad (28)$$

Willen we ook de plaats weten na  $t$  sec., dan moeten we (28) integreren. We hebben

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m v_0}{m + x\rho}, \quad (29)$$

$$\text{waaruit } mx + \frac{\rho}{2} x^2 = m v_0 t, \quad (30)$$

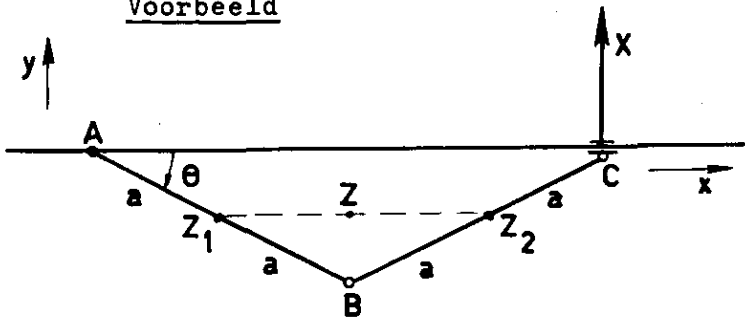
als voor  $t = 0$ ,  $x = 0$  wordt genomen.

Let op dat hier mechanische energie verloren gaat. Het verlies is

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (m+xp) \frac{m^2 v_0^2}{(m+xp)^2} = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{xp}{m+xp}. \quad (31)$$

(Waar blijft deze energie ?)

Voorbeeld



Een staaf AB scharniert om het vaste punt A, een staaf BC is scharnierend aan AB in B verbonden en het punt C glijdt zonder wrijving langs de rail AC. De lengten van AB en BC zijn ieder  $2a$ , de massa's onderling gelijk en gelijk aan  $m$ . In de beginstand liggen de staven langs AC.

Gevraagd wordt de reactiekracht in een willekeurige stand.

We zoeken eerst de bewegingsvergelijking, welke in dit probleem met één graad van vrijheid direct volgt uit de conditie van het behoud van energie. De kinetische energie  $T_1$  van AB is

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} m a^2 \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\theta}^2. \quad (32)$$

De kinetische energie  $T_2$  van BC is

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_{z_2}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m a^2 \dot{\theta}^2. \quad (33)$$

We hebben

$$v_{z_2}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (9a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2, \quad (34)$$

waarmee  $T_2$  overgaat in

$$T_2 = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 (9 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \frac{1}{3}). \quad (35)$$

De totale kinetische energie is

$$T = T_1 + T_2 = \frac{4}{3} m a^2 \dot{\theta}^2 (4 - 3 \cos^2 \theta). \quad (36)$$

De potentiële energie  $U$  is

$$U = -2 m g a \sin \theta, \quad (37)$$

en de wet van het behoud van energie luidt

$$T + U = 0, \quad (38)$$

door de keuze van  $U$ .

Uit (38) volgt

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a} \frac{\sin \theta}{4 - 3 \cos^2 \theta} . \quad (39)$$

We berekenen nu de reactiekracht X. Het totale impulsmoment D om A is

$$D = D_1 + D_2, \quad (40)$$

waarbij  $D_1$  en  $D_2$  de bijdragen zijn van AB en BC resp. We hebben

$$D_1 = -\frac{4}{3} ma^2 \dot{\theta}, \quad (41)$$

terwijl, op grond van (A,V,6) wordt gevonden

$$D_2 = \frac{1}{3} ma^2 \dot{\theta} + ma^2(-3 \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) \dot{\theta}. \quad (42)$$

Daaruit vinden we

$$D = -4 ma^2 \dot{\theta}. \quad (43)$$

$$\text{Daar } M = \dot{D} = -4 ma^2 \ddot{\theta}, \quad (44)$$

hebben we voor X de betrekking

$$4a \cos \theta \cdot X - 2mg \cdot 2a \cos \theta = -4 ma^2 \ddot{\theta}. \quad (45)$$

Daaruit

$$X = mg - \frac{ma}{\cos \theta} \ddot{\theta}. \quad (46)$$

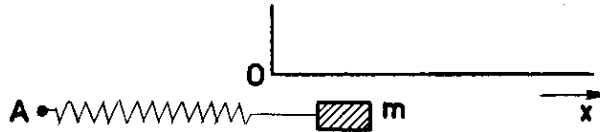
$$\text{Nu is } \ddot{\theta} = \frac{d}{dt} (\dot{\theta}) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) = \frac{3g}{4a} \frac{d}{d\theta} \frac{\sin \theta}{4-3 \cos^2 \theta}. \quad (47)$$

Uit (47) en (46) volgt

$$X = mg \frac{70 - 105 \cos^2 \theta + 36 \cos^4 \theta}{4(4-3 \cos^2 \theta)^2}. \quad (48)$$

## VI. Beweging van een massapunt in een krachtveld

### 1. De harmonische oscillator



We beschouwen de ééndimensionale beweging van een punt met massa  $m$ , dat verend is opgesteld in een evenwichtsstand.

We nemen het nulpunt  $O$  van de  $x$ -as in het evenwichtspunt en onderstellen dat bij kleine afwijkingen het massapunt een kracht ondervindt, die evenredig is met de uitwijkingen steeds naar  $O$  gericht.

Dus

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (1)$$

is de bewegingsvergelijking, indien  $k$  de veerconstante is. We nemen nu ook aan dat er een demping is, welke evenredig is met de snelheid van het punt. Indien de dempingsconstante  $f$  is, gaat (1) over in

$$m \ddot{x} + f \dot{x} + k x = 0. \quad (2)$$

Krijgt het punt een uitwijking uit de evenwichtsstand, dan voert het daarna gedempte trillingen uit. We kunnen (2) oplossen. De oplossing is, indien wordt ingevoerd.

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad (3)$$

voor het geval

$$\omega_0^2 > \frac{f^2}{4m^2}, \quad (4)$$

$$x = C e^{-f/2mt} \cos \left( \sqrt{\omega_0^2 - \frac{f^2}{4m^2}} t + D \right). \quad (5)$$

Dit is een gedempte trilling.

$$\text{Indien } \omega_0^2 = \frac{f^2}{4m^2}, \quad (6)$$

wordt de oplossing

$$x = (A + Bt) e^{-\frac{f}{2m}t}. \quad (7)$$

$$\text{Indien } \omega_0^2 < \frac{f^2}{4m^2} \quad (8)$$

is de oplossing

$$x = e^{-\frac{f}{2m}t} \left( A e^{\sqrt{\frac{f^2}{4m^2} - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\frac{f^2}{4m^2} - \omega_0^2} t} \right). \quad (9)$$

We hebben de oplossingen gegeven voor de homogene vergelijking (2). Indien op het deeltje nog een harmonische kracht  $F \cos \omega t$  werkt, wordt de bewegingsvergelijking

$$m \ddot{x} + f \dot{x} + k x = F \cos \omega t, \quad (10)$$

een vergelijking, waarvan de oplossing bestaat uit de superpositie van een particuliere oplossing en de oplossing van de homogene vergelijking (2). De particuliere oplossing van (10) is

$$x = \frac{F}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 f^2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad (11)$$

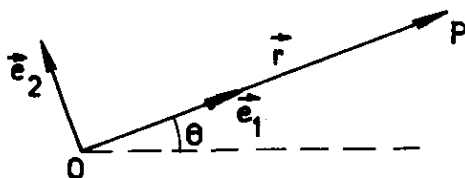
met 
$$\tan \varphi = \frac{\omega f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (12)$$

Interessant is het geval van resonantie. Dit komt voor indien de frequentie  $\omega$  zodanig is, dat de amplitude van (11) maximaal wordt. Dit gebeurt bij

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{f^2}{2m^2}}. \quad (13)$$

## 2. De centrale beweging

Indien de kracht op het massapunt steeds gericht op of van een constant punt, spreken we van een centrale beweging.



Dan is

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_1 + r \dot{\vec{e}}_1, \quad (15)$$

We transformeren de bewegingsvergelijkingen op poolcoördinaten. We hebben

$$\vec{r} = r \vec{e}_1, \quad (14)$$

indien  $\vec{e}_1$  de (in richting veranderlijke) eenheidsvector is naar het punt P.

waarbij  $\dot{\vec{e}}_1$  door de rotatie ontstaat. Daar  $\dot{\vec{e}}_1 = \dot{\theta} \vec{e}_2$ , zoals uit (A,III,22) volgt, is

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_1 + r \dot{\theta} \vec{e}_2. \quad (16)$$

We differentiëren weer. Daar

$$\dot{\vec{e}}_2 = -\dot{\theta} \vec{e}_1$$

ontstaat

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_1 + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_2. \quad (17)$$

Dus wordt

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) &= f(r), \\ r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

waarin  $f(r)$  de kracht is welke door  $O$  op  $m$  wordt uitgeoefend. Uit de tweede vergelijking (18) volgt

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0, \quad (19)$$

$$\text{waaruit } mr^2 \dot{\theta} = D = \text{constant}. \quad (20)$$

Vergelijking (20) drukt niets anders uit dan de wet van het behoud van impulsmoment. Uit (20) volgt

$$\dot{\theta} = \frac{D}{mr^2} \quad (21)$$

dat ingevuld in de eerste vergelijking (18) geeft

$$\ddot{r} - \frac{D^2}{m^2 r^3} = \frac{f(r)}{m} \equiv g(r), \quad (22)$$

de differentiaalvergelijking voor de radiële beweging. We vermenigvuldigen (22) met  $r$  en integreren. Er ontstaat

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \int_{\infty}^r f(r) dr = \text{constant}. \quad (23)$$

De vergelijking (23) drukt niets anders uit dan de wet van het behoud van arbeidsvermogen. We kunnen (23) ook schrijven als

$$\dot{r}^2 + \frac{D^2}{m^2} \frac{1}{r^2} - 2 \int_{\infty}^r g(r) dr = \text{constant} = C. \quad (24)$$

Deze vergelijking is door separatie op te lossen. We willen echter niet  $r$  als functie van de tijd, maar  $r$  als functie van de hoek  $\theta$ . We hebben

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{D}{mr^2}, \quad (25)$$

waarmee (24) overgaat in

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2}{D^2} \left[ Cr^4 - \frac{D^2}{m^2} r^2 + 2r^4 \int_{\infty}^r g(r) dr \right]. \quad (26)$$

Indien de krachtwet gegeven is, is in principe  $r(\theta)$  te bepalen.

We nemen het bijzondere geval van de Newtonse krachtwet

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad (27)$$

waarmee

$$-\int_{\infty}^r g(r) dr = -\frac{k}{mr} \quad (28)$$

wordt. Na invullen en omkeren ontstaat uit (26)

$$d\theta = \frac{D dr}{r \sqrt{C m^2 r^2 + 2 mkr - D^2}}. \quad (29)$$

De vergelijking (29) geeft na integratie

$$\theta = \arcsin \frac{mkr - D^2}{r \sqrt{(C m^2 D^2 + m^2 k^2)}} + C_1. \quad (30)$$

### 3. Beweging met veranderlijke massa

Een grote klasse van problemen ontstaat indien de massa variabel is. De mechanica alleen geeft niet altijd voldoende basis om deze problemen te behandelen. Vaak moet door een fysische beschouwing de wijze waarop de massa verandert worden bepaald. We geven een voorbeeld, waarbij enige vereenvoudigende onderstellingen zijn gemaakt.

#### Voorbeeld

Een regendruppel valt in een gelijkmatige mist. De druppel verzamelt alle massa die hij ontmoet (fysische veronderstelling). De beginstraal is nul. De druppel blijft bolvormig en ondervindt geen wrijvingsweerstand (mechanische vereenvoudiging !). Wat is de versnelling ?



Algemeen is

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}) = mg \quad (31)$$

dus

$$\ddot{x} + \frac{m}{m} \dot{x} - g = 0 \quad (32)$$

is de vergelijking, die moet worden geïntegreerd.

Allereerst moet hiertoe  $\frac{\dot{m}}{m}$  worden berekend. Als  $\rho_0$  de dichtheid van water is en  $r$  de straal van het bolletje is

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0, \quad (33)$$

waaruit

$$\dot{m} = 4 \pi \rho_0 r^2 \dot{r}. \quad (34)$$

Indien  $\rho$  de dichtheid van de mist is, is ook

$$\dot{m} = \pi r^2 \rho \dot{x}, \quad (35)$$

daar alle water in de cylinder met straal  $r$  gedurende  $dt$  wordt opgenomen. Inhoud cylinder is  $\pi r^2 dx$ . Dus is

$$\pi r^2 \rho \dot{x} = 4 \pi \rho_0 r^2 \dot{r}, \quad (36)$$

waaruit

$$4 \rho_0 \dot{r} = \rho \dot{x}. \quad (37)$$

De vergelijking (37) kan worden geïntegreerd. Indien op  $x = 0$ ,  $r = 0$  is, is

$$r = \frac{\rho}{4\rho_0} x. \quad (38)$$

Dan wordt

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{\pi r^2 \rho \dot{x}}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0} = 3 \frac{\dot{x}}{x}, \quad (39)$$

waarmee (32) overgaat in

$$x \ddot{x} + 3\dot{x}^2 - gx = 0. \quad (40)$$

Om deze vergelijking op te lossen, stellen we

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{x})^2}{dx}, \quad (41)$$

waarmee (40) overgaat in

$$\frac{1}{2} x \frac{d(\dot{x})^2}{dx} + 3 \dot{x}^2 - gx = 0. \quad (42)$$

Een particuliere oplossing van (42) is:

$$\dot{x}^2 = ax. \quad (43)$$

Na invullen, vinden we

$$a = \frac{2}{7} g. \quad (44)$$

De algemene oplossing van

$$\frac{1}{2} x \frac{d(\dot{x})^2}{dx} + 3 \dot{x}^2 = 0 \quad (45)$$

blijft niet eindig voor  $x = 0$  en moet daarom worden weggelaten.  
Het probleem is dus opgelost door

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{7} gx, \quad (46)$$

dat weer verder wordt geïntegreerd tot

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{7}\right) t^2, \quad (47)$$

waaruit volgt, dat de versnelling  $\frac{1}{7} g$  is.

## C. Onvrije beweging van Systemen

### I. Kinetica van eindige krachtwerkingen

#### 1. De methode van het vrijmaken

Een massapunt dat vrij kan bewegen heeft drie graden van vrijheid. Voor de berekening van de beweging in een krachtveld staan drie vergelijkingen ter beschikking. Deze zijn ieder van de tweede orde, waardoor ze zes integratieconstanten toelaten. Deze worden bepaald door de willekeurige beginstand en beginsnelheid. Een vrij star lichaam heeft zes graden van vrijheid en de beweging daarvan wordt beschreven door zes vergelijkingen, de drie vergelijkingen voor het zwaartepunt en de drie momentenstellingen. Een systeem van  $n$  lichamen heeft  $6n$  graden van vrijheid met  $6n$  bewegingsvergelijkingen. In het algemeen zijn de  $n$  lichamen onderling gekoppeld en/of in hun beweging beperkt. Als er  $m$  z.g. verbindingen zijn, is het aantal graden van vrijheid

$$6n - m. \quad (1)$$

In dit geval zijn er ook  $m$  onbekende verbindingskrachten of reactiekrachten. Het totaal aantal onbekenden is dus

$$6n - m + m = 6n \quad (2)$$

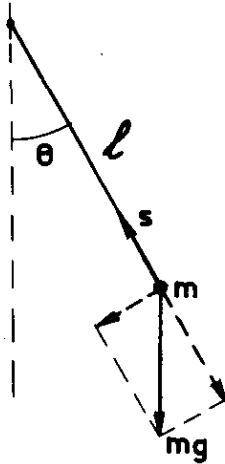
en hiervoor zijn er juist  $6n$  vergelijkingen, waarin de onbekende reactiekrachten zijn ingevoerd. Door het invoeren van de reactiekrachten, die werken op een bepaald lichaam, wordt dit als het ware "vrij gemaakt" uit het systeem. Het lichaam kan dan als een vrij lichaam worden behandeld onder invloed van de uitwendige krachten en de reactiekrachten.

Deze methode voor de behandeling van onvrije systemen is zeer algemeen en heet de methode van het vrijmaken. De methode heeft het voordeel, dat ze tevens de reactiekrachten geeft. In de praktijk is de methode vaak omslachtig.

In vele gevallen kunnen de vergelijkingen van Lagrange worden toegepast. Hierbij is het aantal onbekenden even groot als het aantal vergelijkingen, het zijn alleen de algemene coördinaten, want de reactiekrachten zijn automatisch geëlimineerd. De oorzaak hiervan is, dat de methode van Lagrange op een arbeidsprincipe berust, terwijl de arbeid der reactiekrachten bij een virtuele verplaatsing nul is.

#### 2. Onvrije puntbewegingen

We geven een aantal voorbeelden van puntbewegingen, welke niet vrij zijn.

Voorbeeld

De slinger: een massapunt  $m$  hangt aan een gewichtsloze staaf van de lengte  $l$  en slingert onder invloed van de zwaartekracht om de evenwichtsstand.

Dit is klaarblijkelijk een onvrije beweging, daar het punt gedwongen wordt zich te bewegen langs een boloppervlak, of in

het vlakke geval, langs een cirkel. De reactiekracht is hier de spanning  $S$  in de stang. De bewegingsvergelijking in de tangentiële richting luidt

$$m l \ddot{\theta} = - m g \sin \theta, \quad (3)$$

waaruit door integratie de energievergelijking volgt

$$\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{l} \cos \theta = c. \quad (4)$$

Indien de maximale amplitude  $\alpha$  is, is  $c$  bepaald door  $c = -\frac{2g}{l} \cos \alpha$ . Daarmee

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha), \quad (5)$$

dat wordt geïntegreerd tot

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = t - t_0, \quad (6)$$

indien het massapunt zich op  $t = t_0$  in  $\theta = \theta_0$  bevindt. De periode is

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (7)$$

$$\text{met } k = \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (8)$$

De integraal (7) is een elliptische integraal, welke door ontwikkeling kan worden berekend.

Opmerking

Indien de amplitude zeer klein is, kan de vergelijking (3) worden vereenvoudigd tot

$$\ddot{\theta} + g/l \theta = 0, \quad (9)$$

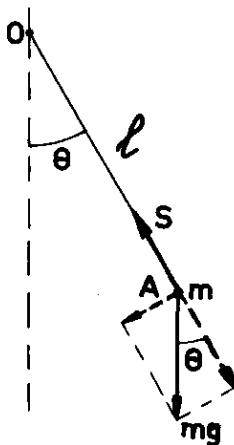
de vergelijking van de harmonische trilling.

Opmerking

De reactiekracht  $S$  is niet berekend. Hij kan gevonden worden uit de vergelijking voor de radiële beweging.

Voorbeeld

Willekeurige slingeren van een massapunt aan een koord. Dit is een voorbeeld van een eenzijdige verbinding.



Massapunt  $m$  hangt aan een buigzaam koord van de lengte  $l$ . Het systeem heeft één of twee graden van vrijheid.

a. Onderstelling  $OA = l$ . De bewegingsvergelijking is

$$\ddot{\theta} + g/l \sin \theta = 0, \quad (10)$$

terwijl voor  $S$  wordt gevonden

$$S = m(g \cos \theta + l\dot{\theta}^2). \quad (11)$$

Na integratie van (10) vinden we

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{l} \cos \theta = c, \quad (12)$$

waarin  $c$  wordt bepaald uit de conditie dat voor  $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} = \omega_0$ . Daaruit vinden we

$$l\dot{\theta}^2 = l\omega_0^2 - 2g(1 - \cos \theta), \quad (13)$$

welke vergelijking, ingevuld in (11) geeft

$$S = m(l\omega_0^2 + 3g \cos \theta - 2g). \quad (14)$$

De onderstelling a is juist, indien  $S > 0$  gedurende de gehele beweging. Het is duidelijk dat indien

$$l\omega_0^2 > 5g \quad (15)$$

aan deze conditie steeds is voldaan. Het punt maakt complete omwentelingen. Uit (13) volgt dat

$$l\omega_0^2 - 2g + 2g \cos \theta \geq 0. \quad (16)$$

Indien  $\theta < \pi/2$  blijft, blijft  $g \cos \theta > 0$  en dus  $S > 0$ . De conditie hiervoor is

$$l\omega_0^2 \leq 2g, \quad (17)$$

in welk geval hoogstens de horizontale stand wordt bereikt. Indien

$$2g < l\omega_0^2 < 5g, \quad (18)$$

wordt  $S$  volgens (14) ergens nul en wordt dus niet aan onderstelling a voldaan.

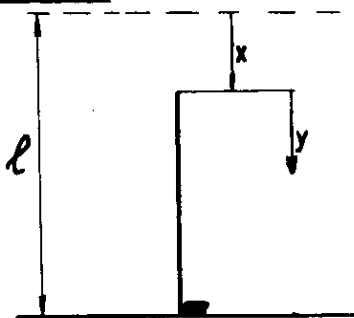
b. Onderstelling  $OA \leq l$ .

Aan deze onderstelling wordt voldaan, indien voor een bepaalde waarde van  $\theta > \pi/2$  de waarde van  $S = 0$  wordt. Dit gebeurt indien

$$\cos \theta = \frac{2g - l\omega_0^2}{3g}. \quad (19)$$

De beweging bestaat nu uit twee fasen: eerst een cirkelbeweging van  $\theta = 0$  tot  $\theta = \arccos \frac{2g - l\omega_0^2}{3g}$ . Daarna een vrije beweging in twee dimensies onder invloed van de zwaartekracht. Deze blijft zolang bestaan als  $|OA| < l$  is. Daarna begint de slingerbeweging opnieuw.

## Voorbeeld



Een ketting van de lengte  $l$ , met de lengtedichtheid  $\rho$  valt op tafel. Gevraagd wordt de drukkracht  $K$ , die op de tafel wordt uitgeoefend indien de ketting over een lengte  $x$  is gevallen.

## a) Stilstaand assenkruis.

Na  $t$  sec. is de ketting over  $x$  gevallen. Voor elk deel van de ketting dat nog niet op de grond ligt is de snelheid  $\dot{x}$ . Omdat de ketting geen drukkrachten kan opnemen geldt dan

$$\dot{x}^2 = 2gx. \quad (20)$$

In  $dt$  sec. valt een hoeveelheid massa  $\rho \dot{x} dt$  op de tafel en verliest alle impuls. Het impulsverlies in  $dt$  sec.  $dp$  is dus gelijk aan

$$dp = \rho \dot{x}^2 dt. \quad (21)$$

De kracht op de tafel t.g.v. het impulsverlies van de ketting alleen, de "dynamische" kracht is dus gelijk aan

$$K_{\text{dyn}} = \frac{dp}{dt} = \rho \dot{x}^2 = 2\rho g x \quad (22)$$

De statische kracht

$$K_{\text{st}} = \rho g x \quad (23)$$

zodat de totale kracht

$$K = 3\rho g x. \quad (24)$$

b) Bewegend assenkruis; bewegend met de oorsprong in  $y = 0$ .

Beschouw het bewegende deel van de ketting:  $0 \leq y < l - x$ .

Daarvoor geldt:  $\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_{\text{cor}} = 0$ .  
Dus

$$0 = g - \ddot{x} \quad (25)$$

Met  $x = 0$  en  $\dot{x} = 0$  voor  $t = 0$  volgt dan weer

$$\dot{x}^2 = 2gx. \quad (26)$$

Het deel van de ketting dat al op de grond ligt beweegt in het bewegende assenkruis met veranderlijke massa in negatieve  $y$ -richting. De hoeveelheid massa op  $y = l - x$  is gelijk  $\rho x$ . De snelheid  $-\dot{x}$ .

Er geldt dus voor de impulsverandering in het bewegende assenstelsel:

$$\frac{d}{dt} (\rho x \dot{x}) = -K + K_g - K_{sl} . \quad (27)$$

Dus:

$$-\rho x \ddot{x} - \rho \dot{x}^2 = -K + \rho x g - \rho x \ddot{x} . \quad (28)$$

Zodat met (25) en (26) uit (28) volgt

$$K = 3\rho g x .$$

c) Veranderlijke massa.

Beschouw alleen het bewegende deel van de ketting.

In positieve  $x$ -richting werken de krachten  $-K_{\text{dyn}}$  en  $\rho(\ell - x)g$ .

Er geldt dus voor de impulsverandering:

$$\frac{d}{dt} \{ \rho(\ell - x) \dot{x} \} = -K_{\text{dyn}} + \rho(\ell - x)g . \quad (29)$$

Zodat met (25) en (26) uit (29) volgt:

$$K_{\text{dyn}} = 2\rho g x . \quad (30)$$

Verder

$$K_{\text{st}} = \rho g x . \quad (31)$$

Zodat

$$K = 3\rho g x . \quad (32)$$

d) Totale massa.

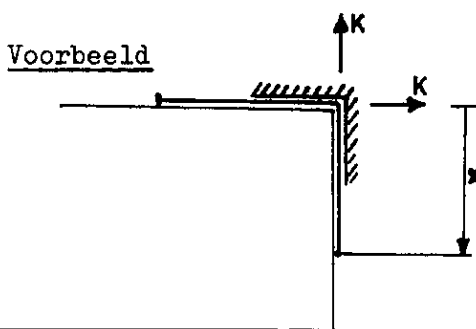
In positieve  $x$ -richting werken op de gehele ketting de krachten  $-K$  en  $\rho \ell g$ .

Voor de impulsverandering geldt dus:

$$\frac{d}{dt} \{ \rho(\ell - x) \dot{x} \} = -K + \rho g \ell . \quad (33)$$

Zodat met (25) en (26) uit (33) volgt

$$K = 3\rho g x .$$



Een ketting van de lengte  $\ell$ , met de lengtedichtheid  $\rho$  glijdt over de rand van een tafel.



Indien de kracht in de ketting  $K$  is, werkend op een met de ketting meebewegende doorsnede, geldt

$$\rho x \frac{du}{dt} = \rho gx - K, \quad (34)$$

$$\rho(\ell - x) \frac{du}{dt} = K, \quad (35)$$

waarin  $u$  de snelheid van de ketting is. Door (34) en (35) op te tellen, wordt gevonden

$$\frac{du}{dt} = \frac{gx}{\ell}, \quad \text{of} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gx}{\ell}, \quad (36)$$

met de oplossing

$$x = Ae^{\sqrt{g/\ell} t} + Be^{-\sqrt{g/\ell} t}. \quad (37)$$

#### Voorbeeld

We zetten dit vraagstuk voort, doch nu is de ketting op de tafel aan de rand op een hoop gewonden. In de tijd  $dt$  wordt een massa ( $\rho u dt$ ) in beweging gebracht, welke de hoeveelheid van beweging  $\rho u^2 dt$  heeft. Dus geldt

$$T dt = \rho u^2 dt \quad \text{of} \quad T = \rho u^2. \quad (38)$$

De bewegingsvergelijking voor het verticale stuk wordt

$$\rho x \frac{du}{dt} = \rho gx - \rho u^2, \quad (39)$$

of

$$x \frac{du}{dt} + u^2 = gx. \quad (40)$$

Deze vergelijking wordt getransformeerd door

$$\dot{u} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{x}^2}{dx}, \quad (41)$$

waardoor (40) overgaat in

$$\frac{1}{2} x \frac{d\dot{x}}{dx} + \dot{x}^2 = gx. \quad (42)$$

Een particuliere oplossing van (42) is

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{3} gx, \quad (43)$$

waaruit

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{3}\right) A^2. \quad (44)$$

De versnelling is dus  $g/3$ .

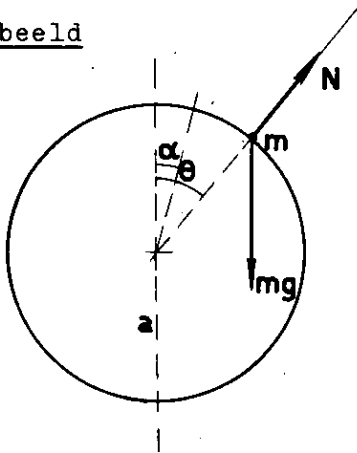
#### Opmerking

De vergelijking (39) is ook te verkrijgen met behulp van de theorie der variabele massa. We hebben

$$\frac{d}{dt} (\rho x u) = \rho g x, \quad (45)$$

welke vergelijking identiek is met (39).

#### Voorbeeld



Een deeltje met massa  $m$  wordt op een verticale cirkel gelegd, waar het af kan glijden zonder wrijving. De startplaats wordt bepaald door de hoek  $\alpha$  met de verticaal. De straal van de cirkel is  $a$ . Gevraagd wordt waar het deeltje, onder invloed van de zwaartekracht, de cirkel verlaat.

De normale druk is  $N$ . Dan geldt voor het evenwicht in de radiale richting

$$N = mg \cos \theta - ma \dot{\theta}^2. \quad (46)$$

De kinetische energie is gelijk aan de winst in potentiële energie

$$\frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}^2 = mga(\cos \alpha - \cos \theta). \quad (47)$$

Door uit (46) en (47)  $\dot{\theta}$  te elimineren, vinden we de normale druk

$$N = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \alpha). \quad (48)$$

Loslaten gebeurt, zodra  $N = 0$ , waarbij

$$\theta = \arccos \left( \frac{2}{3} \cos \alpha \right). \quad (49)$$

### 3. Rotatie om een as

Indien een massapunt gedwongen wordt te bewegen in een vlak, dat om een vaste as met een gegeven hoeksnelheid ronddraait, zijn er in principe drie methoden om het mechanicaprobleem aan te pakken t.w.

- de methode van het vrijmaken, door invoeren van de reactiekrachten en uitwerken van de bewegingsvergelijkingen in een vast assenstelsel.
- de methode van Lagrange.
- de methode van het stilzetten. Hierbij wordt een meedraaiend assenkruis ingevoerd, waarin de bewegingsvergelijkingen worden opgeschreven. Aangezien het meedraaiend systeem geen inertiaalsysteem is, gelden de formules van Newton niet. We hebben in het algemeen

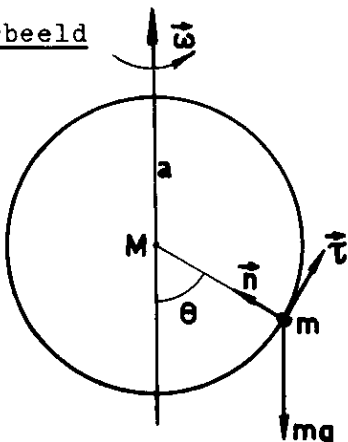
$$\vec{a} = \vec{a}_{sl} + \vec{a}_{cor} + \vec{a}_{rel}. \quad (50)$$

In een vast stelsel is  $\vec{K} = m\vec{a}$ . In het meebewegend stelsel is de ons interesserende grootheid  $m\vec{a}_{rel}$ , waarvoor geldt

$$m\vec{a}_{rel} = \vec{K} - m\vec{a}_{cor} - m\vec{a}_{sl}. \quad (51)$$

De krachten  $-m\vec{a}_{cor}$  en  $-m\vec{a}_{sl}$  heten schijnkrachten. Zij moeten worden ingevoerd en aan de werkelijk optredende krachten worden toegevoegd om een Newton relatie te verkrijgen in het niet-inertiaalsysteem. In praktische gevallen is de sleepkracht niet meer dan de centrifugaalkracht.

Voorbeeld



Een cirkelvormige draad, straal  $a$ , roteert met een constante hoeksnelheid  $\omega$  om een verticale as door het middelpunt. Langs de draad kan zonder wrijving een massapunt  $m$  glijden.

Gevraagd wordt de bewegingsvergelijkingen op te stellen.

We lossen dit probleem op met behulp van de methode van het stilzetten.

Op het punt werken de krachten:

- a. het gewicht  $mg$ .
- b. de reactie  $R$  gericht langs  $\vec{n}$  naar  $M$ .
- c. de reactie  $S$ , die loodrecht op het vlak van de draad staat.  
We noemen de eenheidsvector in deze richting  $\vec{\sigma}$ .

De sleepkracht  $- m\vec{a}_{sl}$  wordt hier gelijk aan  $- m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$  en

heeft de grootte  $ma\omega^2 \sin \theta$ , gericht van de as.

De Corioliskracht  $- m\vec{a}_{cor}$  wordt hier  $- m \cdot 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel})$ , heeft de grootte  $2m\omega a \dot{\theta} \cos \theta$  in de richting  $-\vec{\sigma}$ .

We passen nu de formule (51) toe:

$$\begin{aligned} m\vec{a}_{rel} &= m\ddot{\theta}\vec{\tau} + m\dot{\theta}^2\vec{n} = -mg \cos \theta \cdot \vec{n} \\ &- mg \sin \theta \cdot \vec{\tau} + R\vec{n} + S\vec{\sigma} + ma\omega^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \vec{\tau} \\ &- ma\omega^2 \sin^2 \theta \vec{n} - 2m\omega a \dot{\theta} \cos \theta \vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (52)$$

We stellen nu de factoren voor de eenheidsvectoren gelijk. Zo ontstaat

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{a} \sin \theta &= 0, \\ \dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta + \frac{g}{a} \cos \theta - \frac{R}{ma} &= 0, \\ - 2\omega \dot{\theta} \cos \theta + \frac{S}{ma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

De eerste vergelijking (53) levert de bewegingsvergelijking voor  $\theta$  in het stilgezette vlak. De tweede geeft de reactiekracht  $R$ , de derde de kracht  $S$ .

We integreren de eerste vergelijking (53). Er ontstaat

$$\dot{\theta}^2 - \omega^2 \sin^2 \theta - \frac{2g}{a} \cos \theta = \text{const.} \quad (54)$$

De vorm (54), vermenigvuldigd met  $\frac{1}{2}ma^2$  heeft de gedaante van een energievergelijking. Toepassen van  $T + U = \text{constant}$  leidt tot

$$\frac{1}{2} ma^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mga \cos \theta = \text{const}, \quad (55)$$

een formule die fout is. De wet van het behoud van arbeidsvermogen gaat hier dus niet op. Dit is te verklaren uit het feit, dat de reactiekracht S arbeid verricht.

We berekenen deze arbeid. Van  $t_1$  tot  $t_2$  wordt

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} S a \sin \theta d(\omega t) = 2 m a^2 \omega^2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta dt \\ &= m a^2 \omega^2 (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1). \end{aligned} \quad (56)$$

De verandering in energie  $\Delta(T + U)$  moet gelijk zijn aan deze arbeid:

$$\Delta(T + U) = A \quad (57)$$

levert na omvorming

$$\frac{1}{2} ma^2 (\dot{\theta}^2 - \omega^2 \sin^2 \theta) - mga \cos \theta = \text{const}, \quad (58)$$

overeenkomstig (54).

We willen toch graag een energiewet voor deze gedwongen beweging. We interpreteren daartoe (58) als volgt. De kinetische energie

$$T = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}^2, \quad (59)$$

de energie bij stilgezette rotatie.

$$U_1 = - mga \cos \theta, \quad (60)$$

de potentiële energie der uitwendige kracht en

$$U_2 = - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin^2 \theta, \quad (61)$$

de potentiële energie van de centrifugaalkracht. Dan is dus

$$T + U_1 + U_2 = C. \quad (62)$$

Om (61) te begrijpen dienen we te bedenken dat

$$U_2 = - \int_0^{a \sin \theta} m \omega^2 \rho d\rho = - \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2 \theta. \quad (63)$$

Zijn er oplossingen, waarvoor  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ? Dan moet

$$\sin \theta (a \omega^2 \cos \theta - g) = 0 \quad (64)$$

zijn, een vergelijking met de oplossingen

$$\theta = 0, \theta = \pi, \theta = \pm \arccos \frac{g}{a \omega^2}. \quad (65)$$

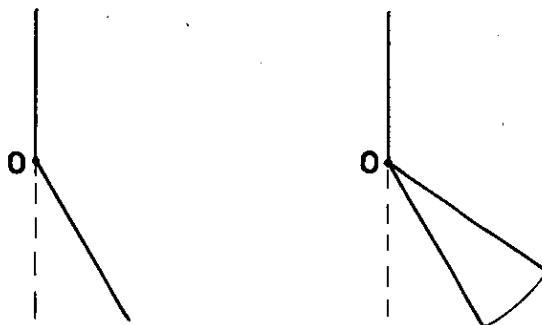
We noemen deze toestanden kinetische evenwichtstoestanden. Merk op dat de derde waarde van  $\theta$  in (65) alleen bestaat indien

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (66)$$

### Rotatie om een as van een vast lichaam

We bestuderen de beweging van een vast lichaam, dat roteert om een vaste as, met behulp van de methode van het stilzetten. We beperken ons daarbij tot  $\vec{\omega} = 0$ , terwijl natuurlijk  $\vec{R} = 0$  is. Bij meer gecompliceerde gevallen van relatieve beweging heeft deze methode nauwelijks voordelen. Tevens beperken we ons tot de problemen, waarbij een vlakke figuur of een staaf om een as in het vlak kan draaien. De as wordt zelf met de hoeksnelheid  $\omega$  gewenteld. We nemen als oorsprong van het coördinatenstelsel het draaipunt O.

Voor ieder element van het lichaam geldt (51), zodat



$$\int_{\mathbf{v}} \rho dV \cdot \vec{a}_{\text{rel}} = \vec{K} - \int_{\mathbf{v}} \rho dV \vec{a}_{\text{sl}} - \int_{\mathbf{v}} \rho dV \vec{a}_{\text{cor}}. \quad (67)$$

In (67) worden alleen volume-integralen geschreven. Ze kunnen in bijzondere gevallen door lijn of oppervlakte-integralen worden vervangen. We voeren de coördinaten van het zwaartepunt O in, in het stilgezette stelsel. Dan wordt (67)

$$m \vec{a}_{\text{o}(\text{rel})} = \vec{K} - \int_{\mathbf{v}} \rho dV \{ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \} - 2 \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}). \quad (68)$$

We kunnen de krachten splitsen in die, welke in het vlak van het lichaam liggen,  $K_{//}$ , en die welke er loodrecht op staan  $K_{\perp}$ . We hebben

$$\vec{K}_{\perp} = 2 \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}), \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \vec{K}_{//} &= m \vec{a}_{\text{o}(\text{rel})} - \int_{\mathbf{v}} \rho dV \cdot \omega^2 p \vec{e} = \\ &= m \vec{a}_{\text{o}(\text{rel})} - m \omega^2 p_{\text{o}} \vec{e}, \end{aligned} \quad (70)$$

waarin  $p$  de afstand van een element is tot de draaias,  $p_{\text{o}}$ , die van het zwaartepunt en  $\vec{e}$  een eenheidsvector, loodrecht op de draaias, naar buiten gericht.

Opmerking:

Let op, dat de werklijn der centrifugaalkrachten in het algemeen niet door het zwaartepunt hoeft te gaan.

Voor praktische berekeningen hebben we niet veel aan de formules (69) en (70) omdat de reactiekrachten niet bekend zijn. We passen nu de momentenstelling toe t.o.v. het vaste draaipunt. Dan wordt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{r} \times \vec{a}_{\text{rel}}) &= \vec{M} - \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{r} \times \vec{a}_{\text{sl}}) \\ &- \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{r} \times \vec{a}_{\text{cor}}), \end{aligned} \quad (71)$$

waarvoor we kunnen schrijven

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{r} \times \vec{v}_{\text{rel}}) &= \vec{M} - \int_{\mathbf{v}} \rho dV \vec{r} \times \{ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \} \\ &- 2 \int_{\mathbf{v}} \rho dV \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}). \end{aligned} \quad (72)$$

We werken deze formule niet uit voor het algemene geval, doch passen hem toe op bijzondere problemen.

### De Energie

Zoals we reeds bij het voorbeeld gezien hebben, geldt de wet van het behoud van energie niet voor deze soort van gedwongen bewegingen. De kracht  $\vec{K}_{\perp}$  verricht nl. arbeid tijdens de beweging. Deze arbeid is

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \vec{K}_{\perp} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}) = \\ &= 2 \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \\ &\left\{ \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \right\}_2 - \left\{ \int_{\mathbf{v}} \rho dV (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \right\}_1. \end{aligned} \quad (73)$$

Na enige omwerking wordt dit

$$A = \omega^2 (J_{\omega_2} - J_{\omega_1}), \quad (74)$$

waarin  $J_{\omega}$  het traagheidsmoment is om de draaias.



We zien dat  $A = 0$ , zodra er geen beweging in het vlak meer plaats vindt, daar dan

$$J_1 = J_2 . \quad (75)$$

Indien we schrijven

$$\Delta(T + U) = A, \quad (76)$$

wordt dit

$$\begin{aligned} \{U + T_1 + \frac{1}{2}J_\omega \omega^2 - J_\omega \omega^2\}_2 = \\ \{U + T_1 + \frac{1}{2}J_\omega \omega^2 - J_\omega \omega^2\}_1, \end{aligned} \quad (77)$$

waar geschreven is

$$T = T_1 + \frac{1}{2}J_\omega \omega^2, \quad (78)$$

met  $T_1$  de kinetische energie van het stilgezette probleem. Dus

$$U + T_1 + U_2 = \text{const}, \quad (79)$$

waarbij

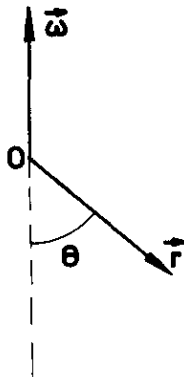
$$U_2 = -\frac{1}{2}\omega^2 J_\omega = -\frac{1}{2}\omega^2 \int_V \rho dV p^2, \quad (80)$$

de centrifugaalpotentiaal, met  $p$  de afstand van ieder element tot de draaias.

### Kinetische Stabiliteit

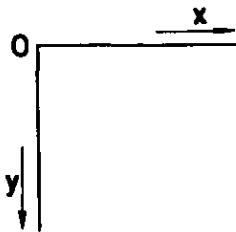
We hebben reeds bij de behandeling van de gedwongen beweging van het massapunt gezien, dat er evenwichtstoestanden bestaan, waarbij het lichaam zich in het vlak niet meer beweegt. In het stilgezette probleem houden dan uitwendige krachten en centrifugaal-krachten elkaar in evenwicht. Het probleem wordt de hoek  $\theta$  te bepalen, waaronder het lichaam staat, en te onderzoeken of deze stand stabiel of labiel is. Daartoe gaan we terug tot de vergelijking (73), waarin wordt gezet  $\vec{v}_{\text{rel}} = 0$ . Dan gaat (73) over in

$$\vec{M} = \int_V \rho dV \vec{r} \times \{ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \}. \quad (81)$$



De vector  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  heeft de waarde  $\omega^2 r \sin \theta$  en is gericht in het vlak van  $\omega$  en  $r$  op de as. De vector  $\vec{r} \times \{ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \}$  staat loodrecht op het vlak en heeft de grootte  $\omega^2 r \sin \theta \cos \theta$ . Indien we pijlen weglaten, is

$$M = \omega^2 \int_V \rho dV r^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (82)$$



Na invoering van het assenkruis  $x, y$ , wordt (82)

$$M = J_{xy} \omega^2, \quad (83)$$

$$\text{waaruit } J_{xy} = \frac{M}{\omega^2}. \quad (84)$$

$M$  en  $\omega$  zijn gegeven grootheden.  $J_{xy}$  hangt af van de hoek  $\alpha$ , die een vaste lijn maakt met de verticaal. De evenwichtsstand is dus uit (84) te bepalen.

De stabiliteit van de kinetische evenwichtstoestand kan worden onderzocht, door in het stilgezette probleem de potentiële energie van de uitwendige krachten en de centrifugaalkrachten te variëren door een kleine hoekverdraaiing  $\delta\alpha$ . Indien

$$U = U_1 + U_2, \quad (85)$$

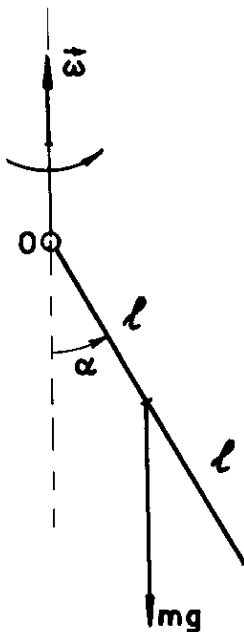
met  $U_1$  de potentiaal van de uitwendige krachten en  $U_2$  die van de centrifugaalkrachten, wordt het evenwicht bepaald door

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial U}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (86)$$

terwijl de stabiliteit volgt uit de voorwaarde

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} > 0. \quad (87)$$

### Voorbeeld



Een staaf met massa  $m$  en lengte  $2l$  wordt gedwongen te wentelen om een as met de hoeksnelheid  $\omega$ . De staaf kan in  $O$  scharnieren om een as, welke loodrecht staat op het vlak van de staaf en de vector  $\vec{\omega}$ .

Gevraagd wordt de evenwichtsstand en de stabiliteit van deze stand te onderzoeken.

Voor het stilgezette probleem, moet het moment van  $mg$  t.o.v.  $O$  evenwicht maken met het moment van de centrifugaalkrachten. We hebben

$$M = mg l \sin \alpha, \quad (88)$$

terwijl het moment der centrifugaalkrachten is

$$\int_0^{2l} (\rho dx) \cdot x \omega^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot x =$$

$$\frac{4l^2}{3} m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, \text{ waarin } \rho = \frac{m}{2l} \text{ is gezet.}$$

Gelijkstelling levert

$$\sin \alpha = 0 \quad \text{of} \quad \cos \alpha = \frac{3g}{4l} \frac{1}{\omega^2}. \quad (89)$$

We lossen het probleem nu ook op met behulp van de potentiële energie-uitdrukkingen. We hebben in een willekeurige stand

$$U_1 = -mg\ell \cos \theta, \quad (90)$$

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{1}{2}\omega^2 \int_0^{2\ell} \left(\frac{m}{2\ell} dx\right) x^2 \sin^2 \theta = \\ &= -\frac{2\ell^2}{3} \omega^2 m \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (91)$$

Uit  $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$  volgt

$$mg\ell \sin \theta - \frac{4\ell^2}{3} m\omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (92)$$

waaruit  $\theta = \alpha$  met

$$\sin \alpha = 0; \quad \cos \alpha = \frac{3g}{4\ell} \cdot \frac{1}{\omega^2}. \quad (93)$$

We onderzoeken nu de stabiliteit. We vinden

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\alpha} = mg\ell \cos \alpha - \frac{4m\ell^2}{3} \omega^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (94)$$

De toestand  $\sin \alpha = 0$ , of  $\alpha = \pi$  en  $\alpha = 0$  leidt tot

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\pi} = -mg\ell - \frac{4m\ell^2}{3} \omega^2 < 0, \quad (95)$$

$\theta = \pi$  is dus instabiel; en

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=0} = mg\ell - \frac{4m\ell^2}{3} \omega^2, \quad (96)$$

waaruit blijkt dat deze toestand stabiel is voor  $\omega^2 < \frac{3g}{4\ell}$ , labiel voor  $\omega^2 > \frac{3g}{4\ell}$ .

De toestand, bepaald door  $\cos \alpha = \frac{3g}{4\ell} \frac{1}{\omega^2}$  leidt tot

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\arccos \frac{3g}{4\ell} \frac{1}{\omega^2}} = -\frac{3}{4} \frac{mg^2}{\omega^2} + \frac{4m\ell^2}{3} \omega^2, \quad (97)$$

welke vorm  $> 0$  is voor  $\omega^2 > \frac{3g}{4\ell}$ . (98)

Opgave

Onderzoek de stabiliteit bij  $\omega^2 = \frac{3g}{4\ell}$ .

Opgave

Behandel het probleem van pag (B,IV,5) met de methode van het stilzetten. Onderzoek de kinetische evenwichtstoestanden op stabiliteit.

Opgave

Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtstoestanden van het probleem van pag (C,I,8), maar nu met behulp van de differentiaalvergelijking).

4. Rotatie om een punt

Verschillende problemen, die in de vorige paragraaf zijn behandeld hadden ook betrekking op de rotatie om een punt. Daar was echter steeds een vaste as aanwezig, waarom het lichaam roteerde, al dan niet gecombineerd met een andere rotatie. We zullen nu de rotatie om een punt bestuderen, waarbij geen vaste as is. De momentenstelling t.o.v. dit vaste punt luidt

$$\vec{M} = \dot{\vec{D}}. \quad (99)$$

We kunnen  $\vec{D}$  uitdrukken in de hoeksnelheden. Dan is

$$D_i = J_{ik} \omega_k \quad (100)$$

voor een willekeurig coördinatenstelsel. In zo'n stelsel zijn noch  $\omega_k$ , noch  $J_{ik}$  constant, zodat

$$\dot{D}_i = \dot{J}_{ik} \omega_k + J_{ik} \dot{\omega}_k. \quad (101)$$

Daarom passen we liever (99) toe op een, met het lichaam, meebewegend assenkruis. In dit assenkruis zijn de  $J_{ik}$  constanten en we hebben

$$\dot{D}_i = J_{ik} \dot{\omega}_k. \quad (102)$$

In een bewegend assenkruis is  $\dot{\vec{D}}$  echter niet te schrijven als de afgeleide naar de tijd alleen doch te splitsen volgens (A,III,33). Dus

$$\dot{\vec{D}} = \left(\frac{d\vec{D}}{dt}\right)_{rel} + (\vec{\omega} \times \vec{D}). \quad (103)$$

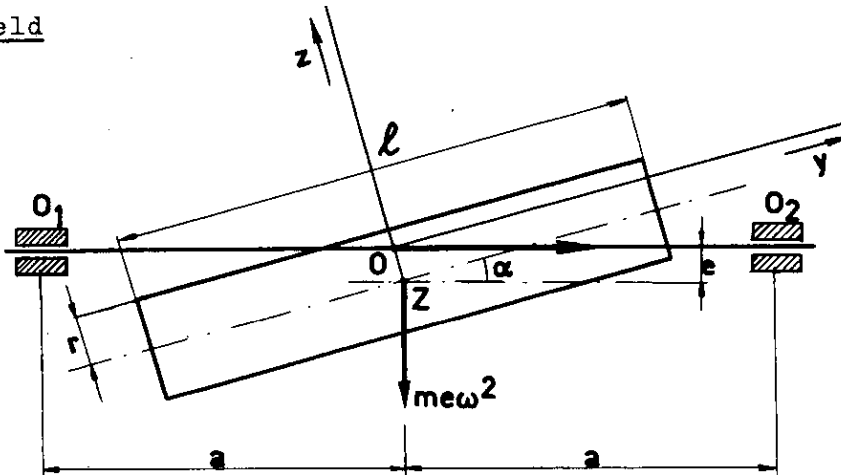
Indien we het assenkruis leggen langs de hoofdassen van de traagheidsellipsoïde is

$$D_x = J_I \omega_x, \quad D_y = J_{II} \omega_y, \quad D_z = J_{III} \omega_z, \quad (104)$$

en de vergelijkingen (99) worden

$$\left. \begin{aligned} M_x &= J_I \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (J_{III} - J_{II}), \\ M_y &= J_{II} \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (J_I - J_{III}), \\ M_z &= J_{III} \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (J_{II} - J_I). \end{aligned} \right\} (105)$$

Voorbeeld



Een cylinder draait om een as  $O_1O_2$  met constante hoeksnelheid  $\omega$ . Het gewicht van de cylinder is  $mg$ , de straal van het grondvlak  $r$ , de lengte  $l$ . De excentriciteit van het zwaartepunt is  $e$ . De draaiingsas en de as van de cylinder snijden elkaar onder een hoek  $\alpha$ . Gezocht worden de lagerkrachten in  $O_1$  en  $O_2$ .

We voeren in het meedraaiende assenkruis  $x, y, z$ , waarvan de  $z$ -as samenvalt met de hoofdtraagheid in het zwaartepunt, loodrecht het manteloppervlak, de oorsprong  $O$  het snijpunt is van  $Zz$  met de draaiingsas  $O_1O_2$ , de  $y$ -as evenwijdig is met de middellijn en de  $x$ -as loodrecht staat op  $y$  en  $z$ -as. Dan is

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega \cos \alpha, \quad \omega_z = -\omega \sin \alpha, \quad (106)$$

en de vergelijkingen (105) leveren op

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha (J_z - J_y), \\ M_y &= M_z = 0. \end{aligned} \right\} (107)$$

Aangezien

$$J_z = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{\ell^2}{12} \right), \quad J_y = \frac{mr^2}{2} + \frac{me^2}{\cos^2 \alpha}, \quad (108)$$

wordt

$$M_x = m\omega^2 \frac{\sin 2\alpha}{8} \left( r^2 - \frac{\ell^2}{3} \right) + me^2\omega^2 \tan \alpha. \quad (109)$$

Daar verder, indien de krachten bij  $O_1$  en  $O_2$  ook worden aangeduid met  $O_1$  en  $O_2$

$$O_1 + O_2 = m\omega^2, \quad (110)$$

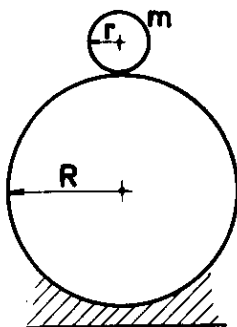
$$M_x = O_2(a + e \tan \alpha) - O_1(a - e \tan \alpha), \quad (111)$$

vinden we tenslotte

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= m\omega^2 \left[ \frac{e}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{16a} \left( \frac{\ell^2}{3} - r^2 \right) \right], \\ O_2 &= m\omega^2 \left[ \frac{e}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{16a} \left( \frac{\ell^2}{3} - r^2 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

## 5. Vlakke beweging van een vast lichaam

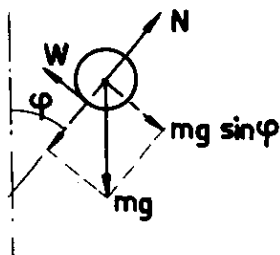
We behandelen alleen een voorbeeld.



### Voorbeeld

Een cylinder met massa  $m$  en straal  $r$  ligt op een andere cylinder met straal  $R$ . De laatste cylinder is vast. We bestuderen de gehele beweging onder invloed van de zwaartekracht.

Indien de bewegende cylinder over een hoek  $\varphi$  heeft bewogen geldt in deze stand



$$mg \cos \varphi = N + m \frac{v^2}{R+r} . \quad (113)$$

Daar  $v = (R + r) \dot{\phi}$  , (114)

wordt (113)

$$N = mg \cos \varphi - m(R + r) \dot{\phi}^2 . \quad (115)$$

Als de wrijving  $W$  is, geldt in de tangentiële richting

$$mg \sin \varphi = W + (R + r) m \ddot{\phi} , \quad (116)$$

waaruit

$$W = mg \sin \varphi - (R + r) m \ddot{\phi} . \quad (117)$$

We onderstellen, dat de cylinder begint te rollen. Dan is

$$Wr = I \ddot{\theta} = I \frac{R+r}{r} \ddot{\phi} , \quad (118)$$

waarin  $\theta$  de hoek is, waarover de cylinder bij de beweging over  $\varphi$  is gerold, omdat

$$R\varphi = r\theta - r\varphi . \quad (119)$$

Daar  $I = \frac{1}{2}mr^2$ , gaat (118) over in

$$W = \frac{1}{2}m(R + r)\ddot{\phi} . \quad (120)$$

We lossen uit (117) en (120)  $\ddot{\phi}$  op. We vinden

$$\ddot{\phi} = \frac{2g}{3(R+r)} \sin \varphi , \quad (121)$$

een vergelijking welke we kunnen integreren tot

$$\dot{\phi}^2 = \frac{4g}{3(R+r)} (1 - \cos \varphi) , \quad (122)$$

indien op  $t = 0$ ,  $\dot{\phi} = 0$  is.

De formule (122) is natuurlijk ook te vinden met behulp van het energieprincipe.



Is het mogelijk, dat de cylinder al rollende loslaat? Dan moet  $N = 0$  worden, dus

$$mg \cos \varphi - \frac{4mg}{3} (1 - \cos \varphi) = 0, \quad (123)$$

waaruit  $\cos \varphi = \frac{4}{7}$ . (124)

Daar  $W \leq fN$ , moet als  $N \rightarrow 0$  ook  $W \rightarrow 0$ , dit kan niet, tenzij  $f = 0$ .  $W$  is nl. bepaald door (120) en (121) en zou  $> fN$  worden. Dus de cylinder zal gaan glijden.

We bepalen het gebied, waarover rollen plaatsvindt. Uit (120) en (121) volgt

$$W = \frac{mg}{3} \sin \varphi, \quad (125)$$

uit (115) en (122) volgt

$$N = \frac{7mg}{3} \cos \varphi - \frac{4mg}{3}. \quad (126)$$

De cylinder rolt, zolang  $W \leq fN$ , dus

$$\sin \varphi \leq f(7 \cos \varphi - 4). \quad (127)$$

Om (127) op te kunnen lossen nemen we het concrete geval  $f = \frac{3}{8}$ . Dan wordt  $\sin \varphi = \frac{3}{8} (7 \cos \varphi - 4)$  voor

$$\cos \varphi = \frac{4}{5}; \sin \varphi = \frac{3}{5}. \quad (128)$$

Het rollen eindigt bij  $\arccos \frac{4}{5}$ .

Het glijden opent de tweede fase van de beweging. Dan geldt

$$W = fN = \frac{3}{8} N, \quad (129)$$

terwijl er nu twee graden van vrijheid zijn  $\varphi$  en  $\theta$ . De bewegingsvergelijkingen zijn

$$\left. \begin{aligned} N &= mg \cos \varphi - m(R + r) \dot{\varphi}^2, \\ fN &= mg \sin \varphi - m(R + r) \ddot{\varphi}, \\ fNr &= I \ddot{\theta} = \frac{1}{2} mr^2 \ddot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

De beginsnelheid van de tweede fase volgt uit (122) en (128). Er is

$$\dot{\phi}^2 = \frac{4g}{15(R+r)}. \quad (131)$$

Uit de eerste twee vergelijkingen (130) elimineren we N. Er ontstaat

$$fg \cos \varphi - g \sin \varphi = f(R+r) \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(R+r) \frac{d(\dot{\phi}^2)}{d\varphi}. \quad (132)$$

De vergelijking (132) wordt geïntegreerd. Stel

$$\dot{\phi}^2 = x, \quad (133)$$

dan is

$$\frac{dx}{d\varphi} - 2fx = \frac{2g}{R+r} (\sin \varphi - f \cos \varphi). \quad (134)$$

Daar de homogene oplossing van (134) is

$x = e^{2f\varphi}$ , stellen we  $x = A(\varphi) e^{2f\varphi}$ . Na invullen ontstaat

$$A = \frac{2g}{R+r} \int_{\alpha}^{\varphi} e^{-2f\varphi} (\sin \varphi - f \cos \varphi) d\varphi. \quad (135)$$

Dus wordt

$$x = e^{2f\varphi} \cdot \frac{2g}{R+r} \int_{\alpha}^{\varphi} e^{-2f\varphi} (\sin \varphi - f \cos \varphi) d\varphi + B e^{2f\varphi}. \quad (136)$$

Volgens (131) is voor

$$\varphi = \arccos \frac{4}{5} \rightarrow x = \frac{4g}{15(R+r)}. \quad (137)$$

Nemen we  $\alpha = \arccos \frac{4}{5}$ , dan wordt

$$B = e^{-2f\alpha} \cdot \frac{4g}{15(R+r)}. \quad (138)$$

De complete oplossing wordt dus

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^2 &= \frac{2g}{R+r} e^{2f\varphi} \int_{\alpha}^{\varphi} e^{-2f\varphi} (\sin \varphi - f \cos \varphi) d\varphi \\ &+ \frac{4g}{15(R+e)} e^{2f(\varphi-\alpha)}. \end{aligned} \quad (139)$$

Wanneer laat de cylinder nu los. We stellen bij  $\varphi = \beta$ , dan moet dus  $N = 0$  worden. Dus uit de eerste vergelijking van (130) volgt

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 2e^{2f\beta} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-2f\varphi} (\sin \varphi - f \cos \varphi) d\varphi \\ &+ \frac{4}{15} e^{2f(\beta-\alpha)}. \end{aligned} \quad (140)$$

We kunnen de integraal uitwerken. Met  $f = \frac{3}{8}$  ontstaat zo voor de hoek van loslaten  $\beta$

$$\cos (\beta - \alpha) = e^{\frac{3}{4}(\beta-\alpha)} \cdot \frac{7}{9}. \quad (141)$$

## II. Stoten en fixeren

### 1. Stoten

We hebben in het voorafgaande gezien, dat voor de tijdintegraal van een kracht geldt

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{K} dt = (m\vec{v}_0)_2 - (m\vec{v}_0)_1, \quad (1)$$

en voor de tijdintegraal van een moment

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = (\vec{D})_2 - (\vec{D})_1. \quad (2)$$

Deze formules, welke algemeen geldig zijn, zijn van weinig betekenis. Alleen voor het geval, dat gedurende een zeer kort tijdsinterval  $t_2 - t_1$ , een zeer hevige kracht werkt, gebruiken we ze. Het is duidelijk dat bij een begrensde kracht geldt

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{K} dt = \overline{\vec{K}} (t_2 - t_1) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Daarom moet, indien we formeel  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$  nemen,  $|\vec{K}| \rightarrow \infty$  gaan, zó dat het product eindig blijft. Dit is alleen formeel. In de praktijk is  $(t_2 - t_1)$  natuurlijk eindig, maar zo klein, dat we de bewegingsveranderingen gedurende dit interval kunnen verwaarlozen. We definiëren de stoot  $\vec{S}$  door

$$\vec{S} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{K} dt. \quad (4)$$

Volgens (1) is dan dus

$$\vec{S} = \Delta m \vec{v}_0, \quad (5)$$

indien door  $\Delta$  de plotselinge verandering in de bewegingsgrootte wordt gegeven. De uitwerking van de stoot is dus een discontinue verandering in de hoeveelheid van beweging. Het moment van de kracht is het stootmoment. Er geldt

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{K} dt = \\ &= \vec{r} \times \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{K} dt = \vec{r} \times \vec{S}.\end{aligned}\quad (6)$$

Verder is

$$\vec{M} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{\Delta D}.\quad (7)$$

Gedurende het stootinterval verandert de positie van het punt niet t.o. waarvan we het moment bepalen. Ook de traagheidsmomenten veranderen niet gedurende de stoot. Dus mag (7) t.o.v. elk punt worden toegepast. We hebben

$$\begin{aligned}\vec{S} &= m \Delta \vec{v}_0, \\ M_i &= J_{ik} \Delta \omega_k.\end{aligned}\quad (8)$$

Door de stoot wordt arbeid verricht. We hebben

$$A = \frac{1}{2} m \Delta (v_0^2) + \frac{1}{2} J_{k\ell} \Delta (\omega_k \omega_\ell).\quad (9)$$

We kunnen hiervoor schrijven

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} m (\vec{v}_{02} - \vec{v}_{01}) \cdot (\vec{v}_{02} + \vec{v}_{01}) \\ &+ \frac{1}{2} J_{k\ell} \frac{\Delta \omega_k (\omega_{\ell 2} + \omega_{\ell 1}) + \Delta \omega_\ell (\omega_{k 1} + \omega_{k 1})}{2},\end{aligned}\quad (10)$$

waarvoor kan worden geschreven

$$A = \vec{S} \cdot \frac{\vec{v}_{02} + \vec{v}_{01}}{2} + \vec{M} \cdot \frac{\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1}{2}.\quad (11)$$

Natuurlijk moet in (9), (10) en (11) de rotatie-energie om het zwaartepunt worden genomen.

2. De botsing

Bij een botsing stoten twee lichamen op elkaar. We beschouwen alleen materiële punten. Zijn de massa's  $m_1$  en  $m_2$ , de snelheden voor de botsing  $v_1$  en  $v_2$ , na de botsing  $V_1$  en  $V_2$ , dan geldt als de lichamen vrij zijn de wet van het behoud van impuls:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 . \quad (12)$$

De botsing kan zijn

a. volkomen elastisch. Dan blijft de kinetische energie van het systeem constant:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 ; \quad (13)$$

b. volkomen onelastisch. Dan zijn de snelheden van de punten na de botsing gelijk

$$V_1 = V_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} ; \quad (14)$$

c. gedeeltelijk elastisch. Dan geldt

$$V_1 - V_2 = -\lambda(v_1 - v_2) , \quad (15)$$

waarin  $\lambda$  de botsingscoëfficiënt is. We hebben steeds

$$0 \leq \lambda \leq 1 , \quad (16)$$

terwijl voor  $\lambda = 0$  de botsing volkomen onelastisch is en voor  $\lambda = 1$  de botsing volkomen elastisch.

We vinden uit (12) en (15) voor de snelheden

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{(m_1 - \lambda m_2)v_1 + (1 + \lambda)m_2 v_2}{m_1 + m_2} , \\ V_2 &= \frac{(m_2 - \lambda m_1)v_2 + (1 + \lambda)m_1 v_1}{m_1 + m_2} . \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

De kinetische energie neemt in het algemeen af door de botsing. Gevonden wordt

$$-\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} (1 - \lambda^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (18)$$

### 3. Botsing van materiële lichamen

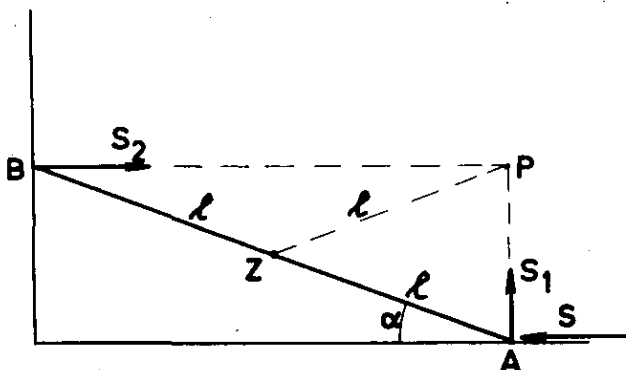
Indien twee vaste lichamen met snelheden  $\vec{v}_1, \vec{\omega}_1$ ; en  $\vec{v}_2, \vec{\omega}_2$  met elkaar botsen, kan men het beste het systeem vrijmaken. We onderstellen dat ieder der lichamen een stoot  $\vec{S}$  ondervindt, onderling gelijk en tegengesteld gericht. De stootkracht nemen we aan loodrecht op het aanrakingsvlak. Het probleem is nu gesplitst in twee stootvraagstukken, met onbekende stoot. Om de noodzakelijke extra vergelijking te verkrijgen, onderstellen we dat voor de snelheden langs de normaal de betrekking (15) blijft bestaan. Het probleem is nu oplosbaar.

### 4. Fixeren

Indien van een bewegend lichaam plotseling een punt wordt vastgehouden, spreken we van een fixering. Ook dit probleem kan worden opgelost door invoering van een onbekende stootkracht. De stoot zelf kan worden bepaald uit de kinematische conditie, dat na de stoot het gefixeerde punt een snelheid nul heeft.

#### Voorbeeld

Een ladder met de lengte  $2\ell$  en massa  $m$  staat onder een hoek  $\alpha$  met de horizontaal tegen een muur. Er wordt tegen gestoten met de stoot  $S$ , horizontaal gericht, in het steunpunt A op de grond.



Gevraagd wordt de beweging, direct na de stoot, onder de onderstelling, dat er geen wrijving is.

We maken allereerst de onderstelling, dat de ladder niet loslaat van de muur. Dan treden twee reactiestoten op:  $S_1$  verticaal gericht, in A en  $S_2$  horizontaal gericht, in B, het raakpunt met de muur.

We passen de momentenstelling toe t.o.v. P. Dan is

$$S \cdot 2\ell \sin \alpha = J(\text{t.o.v. P}) \cdot \dot{\alpha}. \quad (19)$$

Daar  $J = \frac{4}{3} m \ell^2$ , wordt

$$\ddot{\alpha} = \frac{3 S \sin \alpha}{2 m \ell} . \quad (20)$$

Met de zwaartepuntstelling

$$(\dot{x}_0 = - \ell \dot{\alpha} \sin \alpha, \dot{y}_0 = \ell \dot{\alpha} \cos \alpha),$$

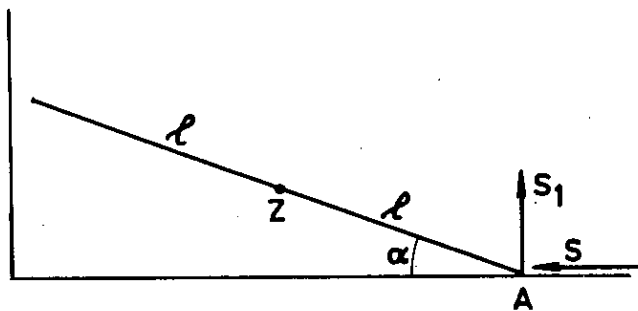
vinden we nu  $S_1$  en  $S_2$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{2} S \sin \alpha \cos \alpha, \\ S_2 &= S(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

De onderstelling dat de ladder niet loslaat, is juist zolang  $S_2 > 0$  blijft. Dus dan moet

$$\sin \alpha < \sqrt{2/3} . \quad (22)$$

Indien  $\sin \alpha > \sqrt{2/3}$ , zou  $S_2 < 0$  worden en is de onderstelling onjuist. We maken nu de onderstelling dat de ladder loslaat.



Nu is er slechts een reactie-stoot  $S_1$ . Er zijn echter twee graden van vrijheid: de hoek  $\alpha$  en de  $x$  coördinaat van  $Z$ .

Nu is  $y_0 = \ell \sin \alpha$ , waaruit  $\dot{y}_0 = \ell \dot{\alpha} \cos \alpha$ , terwijl  $x_0$  niet meer bepaald wordt door  $\alpha$ , doch onafhankelijk is. We hebben

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= m \ell \ddot{\alpha} \cos \alpha, \\ S \ell \sin \alpha - S_1 \ell \cos \alpha &= \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

waaruit door elimineren van  $S_1$  volgt

$$\ddot{\alpha} = \frac{3 S \sin \alpha}{m \ell (1 + 3 \cos^2 \alpha)} . \quad (24)$$

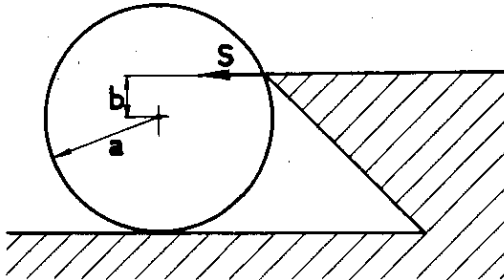
Voorts is



$$\dot{x}_0 = -\frac{S}{m}. \quad (25)$$

Bewijs dat  $\dot{x}_0 < -l\dot{\alpha} \sin \alpha$ , met deze  $\dot{\alpha}$  voor  $\sin \alpha > \sqrt{2/3}$ , zodat aan deze onderstelling wordt voldaan.

### Voorbeeld



Hoe moet een billard worden geconstrueerd, opdat bij een rechte stoot van de bal tegen de rand, een minimum van energie verloren gaat? Aangenomen wordt dat de stoot horizontaal is.

De bal rolt voor de stoot. Indien het energieverlies minimaal moet zijn, moet de bal ook na de stoot rollen.

De massa van de bal is  $m$ , de straal is  $a$ , de excentriciteit van de rand  $b$ .

Indien de hoeksnelheid voor de stoot  $\omega$  is, is de snelheid voor de stoot

$$v = a\omega. \quad (26)$$

Na de stoot moet de bal weer rollen. Dus moet

$$v + \Delta v = a(\omega + \Delta\omega), \quad (27)$$

waarbij  $\Delta v$  de verandering van de snelheid en  $\Delta\omega$  de verandering van de hoeksnelheid is door de stoot. Uit (26) en (27) volgt

$$\Delta v = a \Delta\omega. \quad (28)$$

We hebben de dynamische vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} S &= m \Delta v, \\ M &= Sb = I \Delta\omega, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

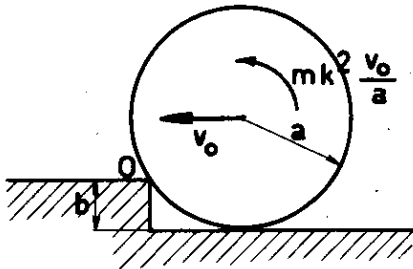
waaruit volgt

$$\frac{\Delta v}{\Delta\omega} = \frac{I}{mb} = a. \quad (30)$$

Daar voor een bol  $I = \frac{2}{5} ma^2$ , volgt uit (30)

$$b = \frac{2}{5} a. \quad (31)$$

Voorbeeld



Een bal met de massa  $m$  en de straal  $a$  rolt met de snelheid  $v_0$  tegen een trottoirrand met de hoogte  $b$ . Er volgt een stoot. We nemen aan dat de bal na de stoot om  $O$  roteert. Gevraagd wordt de minimum snelheid te bepalen, waarmee de bal juist op het trottoir kan springen.

Op het eerste gezicht lijkt dit probleem eenvoudig: indien de kinetische energie van de bal (translatie + rotatie energie) groter of gelijk de potentiële energie  $mgh$  is, zal de bal op het trottoir springen. Deze beschouwing is onjuist. Door de stoot gaat energie verloren en de conclusie kan niet op zulk een eenvoudige wijze worden getrokken.

De stoot is onbekend. Het is dus niet verstandig de impulsveranderingen op te schrijven. De stoot gaat door  $O$ , dus heeft geen stootmoment. Ten opzichte van  $O$  blijft gedurende de stoot het impulsmoment constant.

Voor de stoot is het impulsmoment t.o.v.  $O$

$$D = m v_0 (a - b) + m k^2 \frac{v_0}{a}, \quad (32)$$

waarin  $k^2 = \frac{I}{m}$ , de traagheidsstraal in het kwadraat is, en  $v_0/a$  de hoeksnelheid. Na de stoot heeft de bal de hoeksnelheid  $\omega$  om  $O$ . Het impulsmoment is

$$D = m(a^2 + k^2)\omega. \quad (33)$$

Uit (32) en (33) volgt

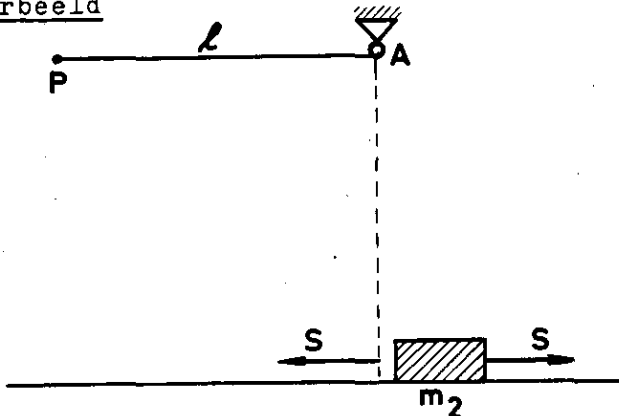
$$\omega = \frac{k^2 v_0/a + v_0(a-b)}{a^2 + k^2}. \quad (34)$$

De rotatie kinetische energie tijdens deze beweging is  $\frac{1}{2} m(a^2 + k^2)\omega^2$  en deze moet groter zijn dan  $mgb$ , de potentiële energie. Dus

$$(a^2 - ab + k^2)^2 v_0^2 > 2ga^2 b(a^2 + k^2), \quad (35)$$

is de gezochte conditie.

Voorbeeld



Een staaf van de lengte  $l$  en de massa  $m$  is scharnierend opgehangen in A. Uit een horizontale stand wordt hij losgelaten. Hij botst tegen een massa  $m_2$  op het horizontale vlak.

Gevraagd wordt de snelheid van  $m_2$  na de botsing.

We geven de staaf aan met het nummer 1, het massapunt door 2. Grootheden voor de botsing door kleine letters en na de botsing met hoofdletters.

Met behulp van de stelling van het behoud van arbeidsvermogen bepalen we  $\omega_1$  en  $v_1$  de snelheid van P. We hebben

$$\frac{1}{2} m_1 g l = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_1 l^2 \omega_1^2 = \frac{1}{6} m_1 v_1^2, \quad (36)$$

$$\text{waaruit } v_1 = \sqrt{3 g l}. \quad (37)$$

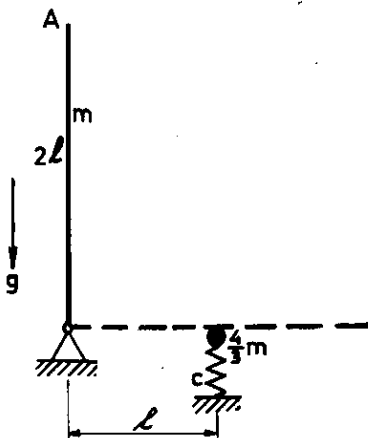
We voeren de stoot S in. Dan geldt

$$\left. \begin{aligned} S &= m_2 V_2 \\ S l &= \frac{1}{6} m_1 l^2 \left( \sqrt{\frac{3g}{l}} - \Omega_1 \right) \\ V_1 &= \frac{1}{3} l \Omega_1 \\ V_2 - V_1 &= -\lambda (v_2 - v_1) = \lambda \sqrt{3 g l}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Uit (38) wordt door eliminatie van  $V_1$ , S en  $\Omega_1$  gevonden

$$V_2 = \frac{(1+\lambda)m_1 \sqrt{3g l}}{m_1 + 3m_2}. \quad (39)$$

## Voorbeeld



De staaf OA (lengte  $2l$ , massa  $m$ , draaibaar om  $O$ ) wordt in de verticale stand zonder beginsnelheid losgelaten. Als de staaf de horizontale stand bereikt, botst hij op een in rust zijnde massaveersysteem (massa  $\frac{4}{3}m$ , veerstijfheid  $c$ ), dat zich op een afstand  $l$  van  $O$  bevindt. De optredende botsing is volkomen onelastisch. We nemen aan dat de veerstijfheid  $c$  zo groot is, dat de maximale indrukking van de veer veel kleiner is dan  $l$  ( $\frac{c}{m} \ll \frac{g}{l}$ ). Gevraagd wordt de hoek waarop na de botsing de staaf van de massa loslaat.

1° fase: val van de staaf tot aan de botsing:

$$T + U = \text{const} \quad (40)$$

$$\text{geeft: } mgl = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_0^2 \quad (41)$$

$\dot{\varphi}_0$  is de hoeksnelheid van de staaf bij het bereiken van de horizontale stand

$$\text{Dus: } \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}. \quad (42)$$

Botsing:  $\lambda = 0$ , dus de snelheid van het massapunt en van het zwaartepunt van de staaf na de botsing zijn gelijk  $V$ .

Het impulsmoment om  $O$  van het totale systeem moet voor en na de botsing gelijk zijn (alleen een reactiestoot in  $O$ ), dus

$$\frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}_0 = \left( \frac{4}{3} m l^2 + \frac{4}{3} m l^2 \right) \frac{V}{l}. \quad (43)$$

Dit geeft

$$\dot{\varphi} = \frac{V}{l} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g}{2l}}. \quad (44)$$

2° fase: beweging van staaf en massa samen



Voor dit systeem geldt (zie figuur):

$$\text{staaf: } mgl - Nl = \frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} \quad (45)$$

$$\text{massa: } N - cx = \frac{4}{3} m \ddot{x} \quad (46)$$

(het gewicht van de massa wordt gecompenseerd door de statische indrukking van de veer).

verband  $l$  en  $\theta$  ( $\theta \ll 1$ ):  $x = l \cdot \theta$ .

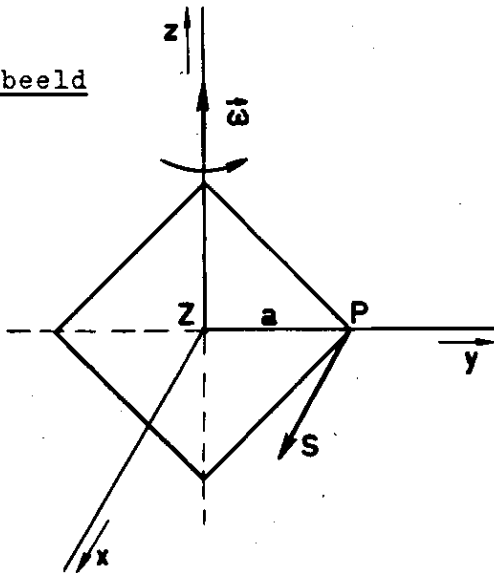
De staaf laat los van de massa als  $N = 0$  wordt.  $N = 0$  in vergelijking (46) geeft

$$\ddot{\theta}_l = - \frac{3}{4} \cdot \frac{c}{m} \cdot \theta_l. \quad (47)$$

Dit substitueren in (45) geeft voor de loslaathoek  $\theta_l$ :

$$\theta_l = - \frac{mg}{cl}. \quad (48)$$

Voorbeeld



Een vierkante plaat met massa  $m$  en diagonaal  $2a$  draait momentaan om een as door het zwaartepunt langs een diagonaal, met de hoeksnelheid  $\omega$ . Het hoekpunt  $P$  wordt gefixeerd. Gevraagd wordt de hoeksnelheid na de fixatie.

We leggen een  $x$ - $y$ - $z$ -stelsel als getekend. We onderstellen de stoot  $S$  // de  $x$ -as.

Voor de fixering is

$$v_o = 0; \omega_o = \omega; v_p = -a\omega, \quad (49)$$

gericht langs de  $x$ -as.

Na de fixering is

$$v_o = \bar{v}, \text{ langs de pos } x\text{-as}; \omega_o = \bar{\omega}; v_p = \bar{v} - a\bar{\omega}, \quad (50)$$

waarin  $\bar{v}$  en  $\bar{\omega}$  onbekenden zijn. Uit de kinematische conditie  $v_p = 0$  volgt

$$\bar{v} = a\bar{\omega}. \quad (51)$$

De dynamische vergelijkingen zijn

$$\left. \begin{aligned} S &= \Delta(mv_o) = m\bar{v} = ma\bar{\omega}, \\ M &= -Sa = \Delta(I\omega) = I(\bar{\omega} - \omega), \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

waaruit volgt na elimineren van  $S$

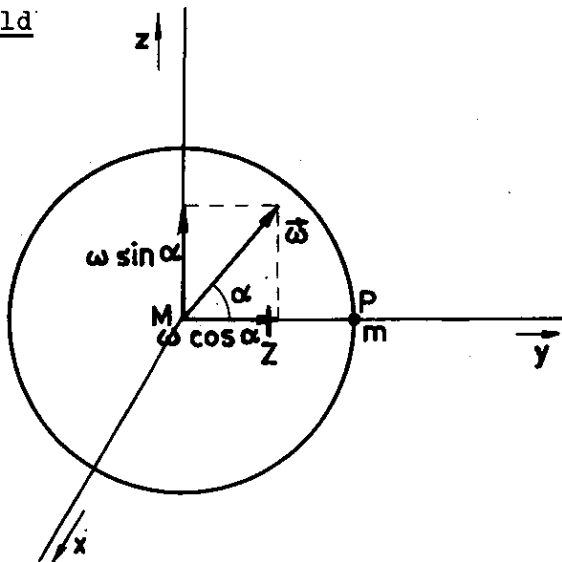
$$\bar{\omega} = \frac{I}{I+ma^2} \omega. \quad (53)$$

Daar  $I = \frac{1}{6} ma^2$ , wordt

$$\bar{\omega} = \frac{1}{7} \omega. \quad (54)$$

Opmerking

De formule (53) drukt uit het behoud van impulsmoment t.o.v. P en kan direct worden opgeschreven.

Voorbeeld

Een bol met massa  $m$  en straal  $a$ , waarop op het oppervlak een massa  $m$  is bevestigd, draait met een hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  om een momentane as door het middelpunt  $M$ . Plotseling wordt het punt  $P$  gefixeerd. Gevraagd wordt te berekenen de stootkracht  $S$  en de hoeksnelheid  $\vec{\bar{\omega}}$ , waarmee de bol na de fixering roteert.

We leggen de  $y$ -as langs  $MP$  en de vector  $\vec{\omega}$  in het  $y$ - $z$ -vlak. Het zwaartepunt ligt op een afstand  $a/2$  van  $M$  op  $MP$ . De hoek welke  $\vec{\omega}$  maakt met de  $y$ -as is  $\alpha$ . Voor de stoot is de hoeksnelheid

$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) . \quad (55)$$

De snelheid van  $Z$  is

$$\vec{v}_0 = \left( -\frac{a\omega}{2} \sin \alpha, 0, 0 \right) , \quad (56)$$

en de snelheid van  $P$

$$\vec{v}_P = (-a\omega \sin \alpha, 0, 0) . \quad (57)$$

Na de stoot is de hoeksnelheid

$$\vec{\bar{\omega}} = (0, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z) , \quad (58)$$

waaruit de snelheid van  $Z$  volgt

$$\vec{v}_0 = \left( \frac{a\bar{\omega}_z}{2}, 0, 0 \right) . \quad (59)$$

De snelheid van  $P$  is (na de stoot)

$$\vec{v}_P = (0,0,0) = \vec{v}_O - \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \vec{a} . \quad (60)$$

De dynamische vergelijkingen leveren op

$$S_y = S_z = 0 , \quad (61)$$

$$S_x = \Delta(2m v_{ox}) = ma\bar{\omega}_z + ma\omega \sin \alpha , \quad (62)$$

$$M_x = 0 = \Delta(I\omega_x) , \quad (63)$$

$$M_y = 0 = \Delta(I\omega_y) = I(\bar{\omega}_y - \omega \cos \alpha) , \quad (64)$$

$$M_z = -S_x \cdot \frac{a}{2} = I(\bar{\omega}_z - \omega \sin \alpha) . \quad (65)$$

Uit (64) volgt

$$\bar{\omega}_y = \omega \cos \alpha , \quad (66)$$

een vergelijking, welke uitdrukt dat het impulsmoment om de as MP behouden blijft.

Door S te elimineren uit (62) en (65) wordt gevonden met

$$I = \frac{2}{5} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 = \frac{9}{10} ma^2 , \quad (67)$$

$$\bar{\omega}_z = \frac{2}{7} \omega \sin \alpha . \quad (68)$$

Met (68) wordt S volgens (62)

$$S = \frac{9}{7} ma\omega \sin \alpha . \quad (69)$$

D. IntegraalprincipesI. Variatierekening1. Inleiding

Het is een van de problemen van de differentiaalrekening, bij een gegeven functie  $f(x)$  de waarden  $x_1, x_2, \dots$  te zoeken, waarvoor de functie een maximum- of minimumwaarde aanneemt. Is de functie in een interval  $[a, b]$  differentieerbaar, dan is de noodzakelijke voorwaarde daartoe

$$f'(x_1) = 0, \text{ etc.} \quad (1)$$

Het is bekend, dat (1) wel noodzakelijk doch niet voldoende is. Is nl. de tweede afgeleide  $= 0$ , dan bestaat de mogelijkheid, dat in het geheel geen extreme waarde optreedt, doch een horizontaal buigpunt. In ieder geval is de functie  $f(x)$  in  $x_1$  stationnair.

In de variatierekening bestuderen we de eigenschappen van integralen van de vorm

$$\int_a^b f \{y(x), y'(x), x\} dx. \quad (2)$$

Hierin is  $f$  een gegeven functie van drie argumenten,  $y(x)$  een functie van  $x$  en  $y'(x)$  de afgeleide daarvan. Het grondprobleem van de variatierekening is uit een bepaalde klasse van functies, een functie  $y(x)$  te zoeken, zó, dat de integraal (2) stationnair wordt. We schrijven

$$\delta \int_a^b f \{y(x), y'(x), x\} dx = 0. \quad (3)$$

De onbekende van het probleem is dus een functie  $y(x)$ . We zullen in het volgende onderstellen, dat de functie  $f$  voldoende differentieerbaar en ontwikkelbaar is om de toe te passen operaties mogelijk te maken. Verder zullen we niet onderzoeken of een werkelijk extremum optreedt of niet en van welke aard het eventuele extremum is.

We zeggen dat twee functies  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$  naburig zijn van de orde nul, indien

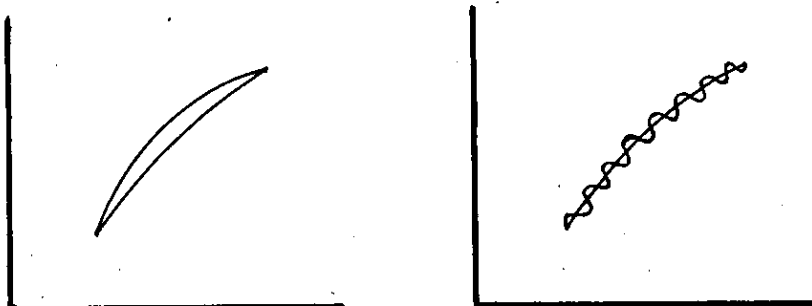
$$|y_1(x) - y_2(x)| < \epsilon_1, \quad (4)$$

voor iedere waarde van  $x$  in het beschouwde interval. Geldt (4) en tevens

$$|y'_1(x) - y'_2(x)| < \epsilon_2, \quad (5).$$



dan spreken we van naburigheid van de orde een, etc.



Indien het grondprobleem (3) van de variatierekening door een functie  $s(x)$  wordt opgelost, voor de klasse van alle functies welke alleen voldoen aan

$$|s(x) - y(x)| < \varepsilon_1, \quad (6)$$

spreken we van een sterk extremum. Laten we alleen vergelijkingsfuncties  $y(x)$  toe, welke naast (6) nog aan

$$|s'(x) - y'(x)| < \varepsilon_2, \quad (7)$$

voldoen, dan hebben we een zwak extremum. We beperken ons tot de formulering van zwak stationnair karakter, dus we eisen voor de vergelijkingsfuncties (6) en (7).

## 2. De vergelijking van Euler

We kunnen schrijven voor een willekeurige functie

$$y(x) = s(x) + \varepsilon t(x) \stackrel{\text{def}}{=} s(x) + \delta y(x), \quad (8)$$

waarin  $\varepsilon$  een willekeurig getal is en  $t(x)$  een willekeurige functie. Daar

$$y'(x) = s'(x) + \varepsilon t'(x), \quad (9)$$

moet op grond van (7),  $\varepsilon t'(x) \rightarrow 0$  voor  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We eisen dat

$$t(a) = t(b) = 0. \quad (10)$$

Indien 
$$I_s = \int_a^b f(s, s', x) dx, \quad (11)$$

wordt 
$$I = \int_a^b f(y, y', x) dx =$$

$$\int_a^b f(s + \varepsilon t, s' + \varepsilon t', x) dx. \quad (12)$$

Op grond van de onderstellingen geldt

$$f(s + \epsilon t, s' + \epsilon t', x) = f(s, s', x) + \epsilon \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) + \frac{\epsilon^2}{2!} \left( t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2tt' \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s'} + t'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s'^2} \right) + \dots, \quad (13)$$

waarin

$$\frac{\partial f}{\partial s} \text{ betekent } \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=s} \text{ etc.}$$

Indien we (13) invullen in (12) ontstaat

$$I = I_s + \epsilon \int_a^b \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) dx + \frac{\epsilon^2}{2!} \int_a^b \left( t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2tt' \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s'} + t'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s'^2} \right) dx + \dots \quad (14)$$

We definiëren

$$\delta I = I - I_s, \quad (15)$$

de verandering welke de funktionaal (11) aanneemt, indien  $s$  door een "naburige" kromme wordt vervangen. Het is de variatie van de integraal. Omdat  $\epsilon$  in (8) zowel positief als negatief kan zijn, (in tegenstelling tot  $\epsilon_1$  en  $\epsilon_2$  in (4) en (5)), is het noodzakelijk voor het optreden van een extremum, dat

$$\int_a^b \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) dx = 0, \quad (16)$$

waardoor

$$\delta I = \frac{\epsilon^2}{2} \int_a^b (\dots) dx + \dots \quad (17)$$

De oplossing van het probleem is in ieder geval een oplossing van (16), welke kan worden geschreven

$$\int_a^b \left( t \frac{\partial f}{\partial s} + t' \frac{\partial f}{\partial s'} \right) dx = \int_a^b t \frac{\partial f}{\partial s} dx + t \frac{\partial f}{\partial s'} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial s'} \right) \cdot t dx = 0. \quad (18)$$

Op grond van (10) kan hiervoor worden geschreven

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial s'} \right) \right\} t(x) dx = 0, \quad (19)$$

een noodzakelijke voorwaarde, opdat  $s(x)$  aan de integraal (11) een extreme waarde geeft. Ook indien dit niet het geval is, wordt (11) door de  $s(x)$  welke voldoet aan (19) stationnair.

We merken op, dat (19) moet gelden voor een willekeurige functie  $t(x)$ , alleen beperkt door de eisen van differentieerbaarheid. Dan moet dus

$$\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial s'} = 0. \quad (20)$$

De functie  $s(x)$  is de oplossing van

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

indien  $f(y, y', x)$  gegeven is. De vergelijking (21) heet de vergelijking van Euler.

Uitgeschreven is vergelijking (21) van de vorm

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (22)$$

### Voorbeeld

Gevraagd wordt de kromme te bepalen, welke de kortste afstand tussen twee punten in het Euclidische vlak geeft. Het probleem is

$$\delta I = \delta \int_1^2 ds = 0 \quad (23)$$

$$\text{Nu is } ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (24)$$

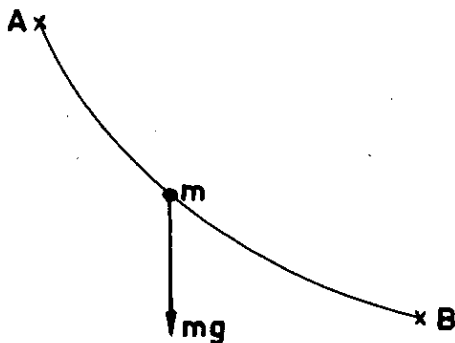
$$\text{dus } \delta \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2} dx = 0. \quad (25)$$

Daar  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , is de vergelijking van Euler

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0, \quad (26)$$

waaruit  $y'$  is constant.  
Het is dus een rechte lijn.

Voorbeeld



Tussen twee punten A en B wordt een kromme aangebracht, waarover een massapunt  $m$ , onder invloed van de zwaartekracht, kan glijden zonder wrijving. Gevraagd wordt de vorm van de kromme, opdat de tijd om van A naar B te komen een minimum wordt.

(Brachistochrone probleem van Johann Bernouilli, 1696).

Het probleem is

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{v} = 0. \quad (27)$$

$$\text{Met } ds^2 = dx^2 + dy^2 \text{ en } v = \sqrt{2gy}, \quad (28)$$

wordt (27)

$$\delta \int_A^B \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx = 0. \quad (29)$$

Hier wordt  $f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ , een functie, welke  $x$  niet expliciet bevat.

Dan kan de vergelijking van Euler worden geïntegreerd tot

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c, \quad (30)$$

daar

$$\frac{d}{dx} (f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}) = \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx} (\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0$$

$$\text{leidt tot } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} (\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0.$$

De vergelijking (30) is

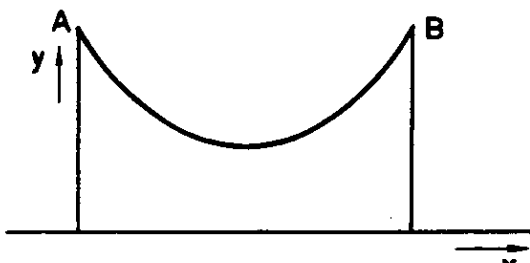
$$y(1 + y'^2) = 2c, \quad (31)$$

waaruit met  $y = \operatorname{tg} \varphi$  volgt

$$\left. \begin{aligned} y &= c_1 (1 + \cos 2\varphi), \\ x &= c_2 - c_1 (2\varphi + \sin 2\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

de parametervorm van de cycloïde. De waarden van  $c_1$  en  $c_2$  kunnen zo worden bepaald, dat de cycloïde door A en B gaat.

#### Voorbeeld



Een ketting hangt tussen twee punten A en B onder invloed van de zwaartekracht. Wat is de vorm van de ketting?

Indien  $\rho$  de massa per lengte-eenheid is, is de potentiële energie van een element  $ds$

$$\rho g ds \cdot y. \quad (33)$$

De totale potentiële energie  $U$  wordt

$$U = \int_A^B \rho g y ds. \quad (34)$$

Met  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , is het probleem

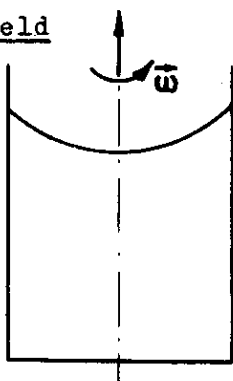
$$\delta \int_A^B y \sqrt{1 + y'^2} dx = 0, \quad (35)$$

waarvan de oplossing is

$$y = c \cosh \frac{x+b}{c}. \quad (36)$$

De constanten  $b$  en  $c$  worden bepaald door de positie van A en B. De lijn is een "kettinglijn".

#### Voorbeeld



Een cylinder, gevuld met een ideale vloeistof, roteert met een constante hoeksnelheid  $\omega$  om zijn as. Gevraagd wordt het vrije oppervlak van de vloeistof te bepalen.

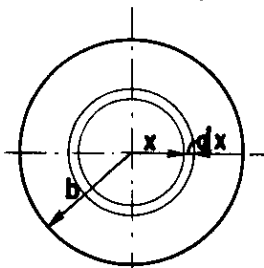
Indien de dichtheid  $\rho$  is werken op een volume-element  $dV$  de krachten  $\rho g dV$  naar beneden en  $\rho r \omega^2 dV$  naar buiten, indien  $r$  de afstand is van het element tot de as. De potentiële energie van het stilgezette probleem is dus

$$U = \int_V \rho dV \left\{ gz - \frac{1}{2} r^2 \omega^2 + a \right\}, \quad (37)$$

waarin  $z$  de coördinaat is langs de as, gemeten vanaf de bodem en  $a$  een constante is. We stellen

$\rho dV = \rho \cdot 2\pi x dx \cdot dz$  en voeren de integratie naar  $z$  uit.

De waarde van  $z$  aan het oppervlak noemen we  $y$ . Dan is



$$U = \int_0^b \rho \cdot 2\pi x dx \int_0^y (gz - \frac{1}{2} r^2 \omega^2 + a) dz,$$

waaruit het variatieprobleem

$$\delta \int_0^b (xy^2 g - x^3 y \omega^2 + 2xy a) dx = 0 \quad (38)$$

volgt. De Eulerse vergelijking is hier  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , waaruit

$$gy - \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + a = 0. \quad (39)$$

Het oppervlak is een parabool.

### 3. Meerdere afhankelijke variabelen

We nemen twee onbekende functies  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$ . Het variatieprobleem is

$$\delta \int_a^b f(y_1, y_2; y_1', y_2'; x) dx = 0. \quad (40)$$

We nemen aan, dat  $y_1$  en  $y_2$  de oplossingen zijn van (40) en dat  $\delta y_1$  en  $\delta y_2$  kleine variaties zijn van deze functies. Ze voldoen aan

$$\delta y_1(a) = \delta y_1(b) = \delta y_2(a) = \delta y_2(b) = 0. \quad (41)$$

We vinden uit (40)

$$\begin{aligned}
\delta \int_a^b f \, dx &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \delta y_1' + \frac{\partial f}{\partial y_2'} \delta y_2' \right) dx \\
&= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \delta y_1' \right) dx + \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2'} \delta y_2' \right) dx \\
&= \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) \right\} \delta y_1 \, dx \\
&\quad + \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_2'} \right) \right\} \delta y_2 \, dx = 0. \tag{42}
\end{aligned}$$

Daar (42) geldt voor iedere toelaatbare willekeurige  $\delta y_1$  en  $\delta y_2$  moet

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_2'} \right) &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{43}$$

zijn. Dit zijn twee vergelijkingen van het karakter van de Eulerse vergelijking.

#### 4. Meerdere onafhankelijke variabelen

We beschouwen nu het probleem

$$\delta \iint f(x,y; z; p,q) dx dy = 0, \tag{44}$$

waarbij gezocht wordt  $z = z(x,y)$  en  $p$  en  $q$  gegeven zijn door

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{45}$$

We onderstellen, dat (44) wordt opgelost door

$$\begin{aligned}
z(x,y) &= s(x,y) \quad \text{en we stellen} \\
z(x,y) &= s(x,y) + \varepsilon \zeta(x,y). \tag{46}
\end{aligned}$$

Dan ontstaat

$$\delta I = \iint f(x,y; s + \varepsilon \zeta; p + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x}, q + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y}) dx dy -$$

$$\begin{aligned}
 & - \iint f(x,y; s; p,q) dx dy = \\
 & = \epsilon \iint \left\{ \zeta \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right\} dx dy + O(\epsilon^2). \quad (47)
 \end{aligned}$$

Voor een stationnaire waarde moet dus

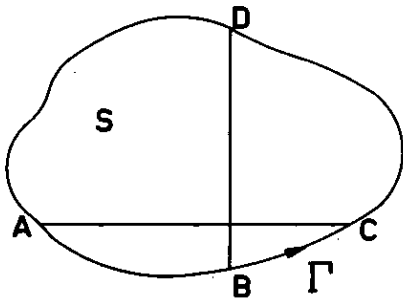
$$\iint \left( \zeta \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) dx dy = 0. \quad (48)$$

We gebruiken de hulpstelling: indien  $\varphi$  en  $\psi$  twee funkties van  $x$  en  $y$  zijn, waarvan de eerste partiële afgeleiden continu zijn, geldt

$$\iint_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} \varphi dy - \psi dx, \quad (49)$$

indien het oppervlak  $s$  begrensd wordt door de kromme  $\Gamma$  en de integratierichting lang  $\Gamma$  het oppervlak aan de linkerzijde laat.

Het bewijs van (49) is in wezen een zaak van partieel integreren.



We hebben

$$\begin{aligned}
 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy &= \iint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) dy \\
 &= \int \varphi_C dy_C - \varphi_A dy_A. \quad (50)
 \end{aligned}$$

Nu is  $dy_C = dy$ ,  $dy_A = -dy$ ,

dus (50) wordt

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} \varphi dy. \quad (51)$$

Evenzo is

$$\iint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = \iint \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) dx = \int \psi_D dx_D - \psi_B dx_B. \quad (52)$$

Doch nu is  $dx_D = -dx$ ;  $dx_B = dx$ , dus

$$\iint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = - \int \psi dx. \quad (53)$$

Daarmee is (49) bewezen voor een enkelvoudig samenhangend gebied.



We stellen nu

$$\varphi = \zeta \frac{\partial f}{\partial p} \quad \text{en} \quad \psi = \zeta \frac{\partial f}{\partial q}, \quad (54)$$

waarmee (49) overgaat in

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}} \left\{ \zeta \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right\} dx dy \\ &= \int_{\Gamma} \zeta \left( \frac{\partial f}{\partial p} dy - \frac{\partial f}{\partial q} dx \right). \end{aligned} \quad (55)$$

We eisen dat de variatie  $\zeta(x,y)$  langs de rand overal nul wordt

$$\zeta(x,y) = 0 \quad \text{langs} \quad \Gamma. \quad (56)$$

Daarmee wordt (55)

$$\iint \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) dx dy = - \iint \zeta \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) dx dy. \quad (57)$$

Indien we dit invullen in (48) ontstaat

$$\iint \zeta \left\{ \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right\} dx dy = 0, \quad (58)$$

waaruit volgt, op grond van de willekeurige vorm van  $\zeta$ , dat  $s$  moet voldoen aan

$$\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \quad (59)$$

Indien we  $f(x,y; z; p,q)$  geven is  $s$  de oplossing van

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \quad (60)$$

### Voorbeeld

De functie  $z$ , welke

$$\iint \left\{ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad \text{stationnair maakt}$$

$$\text{is} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (61)$$

de vergelijking van Laplace.

## II. Het principe van Hamilton

### 1. De vergelijkingen van Lagrange

Het is uit het voorafgaande duidelijk, dat voor een holonoom-conservatief systeem, de vergelijkingen van Lagrange kunnen worden beschouwd als de Eulerse vergelijkingen, behorende bij het variatieprincipe

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (1)$$

Hierin is  $L = T - U$ , de Lagrangefunctie, een functie van de generaliseerde coördinaten  $q_k$  en hun afgeleiden  $\dot{q}_k$ :

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (2)$$

Het principe, uitgedrukt door (1), is het principe van Hamilton. Het toont, dat de in de natuur gerealiseerde, werkelijk optredende

funkties  $q_k(t)$  een extreme waarde geven aan  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  ten opzichte van "naburige" (gevarieerde) funkties. Daarbij is principieel noodzakelijk dat aan de grenzen  $t_1$  en  $t_2$  de variaties verdwijnen:

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0. \quad (3)$$

### 2. Directe afleiding uit het principe van d'Alembert

We kunnen Hamilton's principe ook direct afleiden uit het principe van d'Alembert. Allereerst merken we op dat voor de gebruikte variaties geldt

$$\frac{d}{dt} \delta y(t) = \delta \frac{dy(t)}{dt}. \quad (4)$$

Dit volgt direct uit de vorm van de variaties

$$y(t) = y_0(t) + \epsilon s(t), \quad (5)$$

waarin  $s(t)$  een differentieerbare, willekeurige functie is. Ook geldt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} f(y, y', t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta f(y, y', t) dt, \quad (6)$$

op grond van een eenvoudige stelling uit de integraalrekening.

Het principe van d'Alembert luidt

$$\delta A = \int_V dV \left\{ \vec{k}^{(b)} - \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right\} \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (7)$$

Voor een conservatief stelsel geldt

$$\vec{k}^{(b)} = - \text{grad } u \quad (8)$$

en het eerste gedeelte kan worden geschreven als

$$\begin{aligned} \int_V dV \{ \vec{k}^{(b)} \} \cdot \delta \vec{r} &= - \int_V dV \cdot (\text{grad } u) \cdot \delta \vec{r} = \\ &= - \int_V dV \cdot \delta u = - \delta \int_V u dV = - \delta U. \end{aligned} \quad (9)$$

Het tweede gedeelte is

$$\begin{aligned} - \int_V dV \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \cdot \delta \vec{r} &= - \int_V dV \frac{d}{dt} (\rho \vec{v} \cdot \delta \vec{r}) + \int_V dV \rho \vec{v} \frac{d}{dt} \delta \vec{r} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_V dV (\rho \vec{v} \cdot \delta \vec{r}) + \frac{1}{2} \int_V dV (\delta \rho v^2). \end{aligned} \quad (10)$$

We integreren nu d'Alembert's principe. Er ontstaat

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt - \int_V dV (\rho \vec{v} \cdot \delta \vec{r}) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt. \quad (11)$$

Aangezien  $\delta \vec{r}$  voor  $t_1$  en  $t_2 = 0$  wordt gesteld, wordt

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0 &= \int_{t_1}^{t_2} - \delta U dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Dit is weer het principe van Hamilton.