TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

THEORETISCHE MECHANICA

Vraagstukken met Antwoorden

en

Tentamenopgaven 1968-1974

bij het College van Prof.dr. J.B.Alblas

Jdg1.TU

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken met antwoorden

Behorende bij het college theoretische mechanica
van prof.dr. J.B. Alblas

Dictaatnr. 2.215   Prijs ƒ 8,--

Inhoudsbeschrijving Vraagstukken
bij
Theoretische Mechanica :

JdG, 9 Juni 2005

Herkansingen

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Herkansingsexamen Theoretische Mechanica op vrijdag 23 januari 1970, 9.00-11.00 uur.

N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.
Theorievragen kort beantwoorden.

1. a) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.
   b) Hoeveel gegeneraliseerde coördinaten heeft een star lichaam dat om een vast punt kan draaien?

2. Een kegel rolt over een horizontaal vlak. Wat is het verband tussen de hoeksnelheid van de kegel en de hoeksnelheid waarmee de as van de kegel rondloopt?

3. Een cylinder (gewicht mg) glijdt of rolt over een ruw horizontaal vlak (wrijvingscoëfficiënt f). Waar hangt de grootte en richting van de wrijvingskracht W van af, en hoe is het verband?

4. Leid af, dat de kinetische energie T van een star lichaam kan worden geschreven in de vorm

$$T = \tfrac{1}{2} m v_z^2 + \tfrac{1}{2} I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j\ ,$$

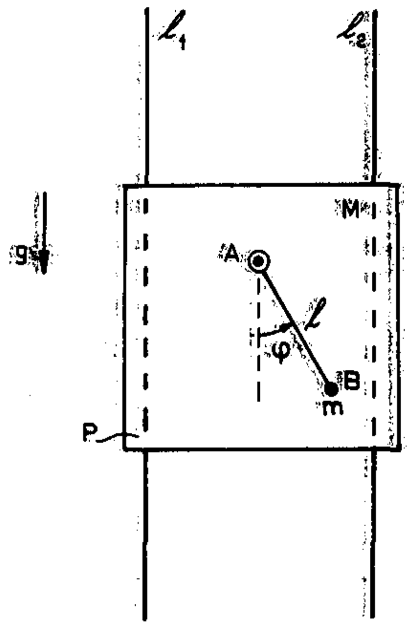
   en interpreteer de grootheden die in deze formule voorkomen. Welke termen zijn invariant bij draaiing van het assenkruis?

5. Als een mechanisch systeem in een toestand van stabiel evenwicht verkeert, wat geldt dan ten aanzien van de potentiaal van de belastingkrachten, waarvan het bestaan mag worden aangenomen?

6. a) Hoe wordt een stoot gedefinieerd?
   b) Welke grootheden veranderen tijdens een stoot- of botsingsverschijnsel en welke niet?
   c) Wat is de botsings- of restitutiecoëfficiënt?

Z.O.Z.

7.



Op het schriftelijk examen Theoretische Mechanica in januari 1970 was in opgave 3 sprake van een lift P (massa M), die langs verticale rechten ℓ_1 en ℓ_2 bewegen kan. Tussen de lift en elk van de geleidingen werkt een constante wrijvingskracht W. Verder is in punt A aan de lift een slinger opgehangen, bestaande uit een massaloze staaf AB en een puntmassa m in B. Het geheel valt onder invloed van de zwaartekracht g.

a) Bij het maken van de opgave schreven vele kandidaten, dat de verticale kracht door de slinger in A op de lift uitgeoefend gelijk was aan

$$mg + m\ell\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \ .$$

Waarom is deze bewering niet juist?

b) Als W = 0, zal de lift dan met een versnelling g vallen?

Herkansingsexamen Theoretische Mechanica, W IV, WSK IV, op zaterdag 20 juni 1970, 9.00-11.00 uur.

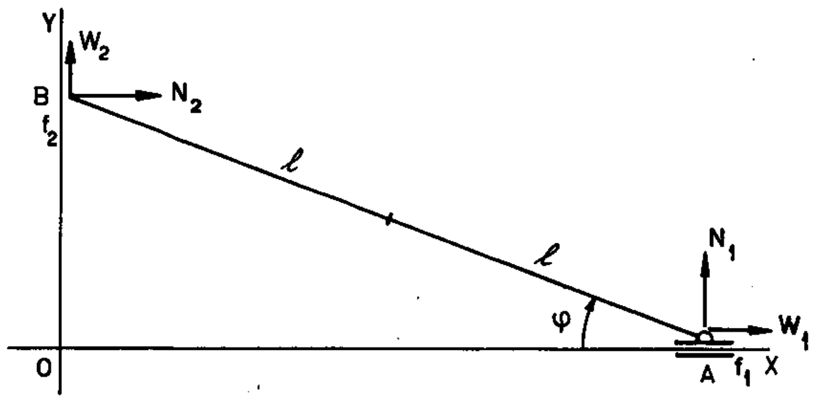
N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.
Theorievragen kort beantwoorden.

1. a) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.
   b) Geef een definitie van virtuele verplaatsingen.

2. Geef met ja of neen antwoord op de volgende vragen:
   a) Kunnen reactiekrachten virtuele arbeid verrichten?
   b) Kunnen reactiekrachten bij de in werkelijkheid plaats vindende beweging arbeid verrichten?
   c) Is het noodzakelijk dat een belastingskracht bij alle mogelijke virtuele verplaatsingen arbeid verricht?
   d) Moeten reactiekrachten, als ze aanwezig zijn, bij de methode van het vrijmaken in rekening worden gebracht?
   e) Hebben in een niet-inertiaal systeem de in rekening te brengen schijnkrachten altijd het karakter van belastingskrachten?

3. Leid, uitgaande van de definitie, een eenvoudige uitdrukking af voor:
   a) De impuls van een star lichaam.
   b) Het impulsmoment van een star lichaam ten opzichte van een willekeurig punt.

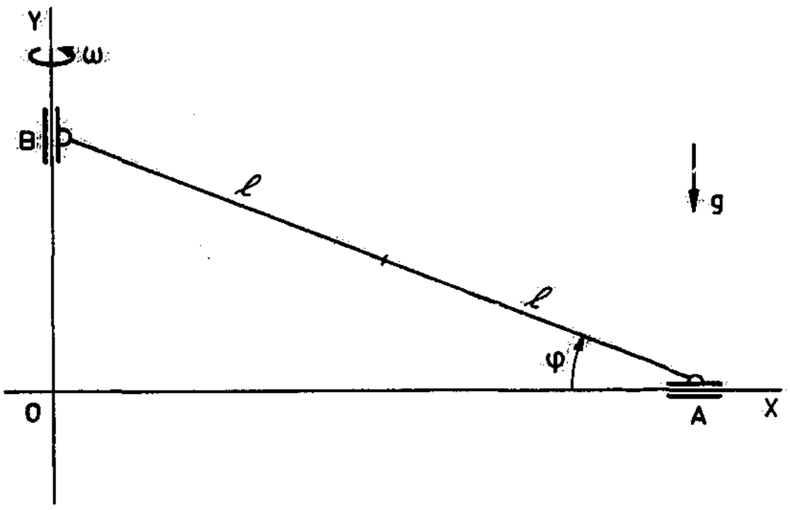
4.



Staaf AB beweegt met het uiteinde A (tweezijdige verbinding, wrijvingscoëfficiënt f_1) langs de X-as en met het uiteinde B (eenzijdige verbinding, wrijvingscoëfficiënt f_2) langs de Y-as. Geef aan de condities waaraan N_2, W_1 en W_2 moeten voldoen voor de gevallen $\dot{\varphi} > 0$, $\dot{\varphi} = 0$ en $\dot{\varphi} < 0$.

Z.O.Z.

5.



De staaf AB (lengte 2ℓ, massa m) glijdt zonder wrijving langs de assen van een assenkruis OXY, waarvan de X-as met een constante hoeksnelheid ω om de Y-as wentelt. Voor de aangegeven hoek φ geldt de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{4}{3} m\ell^2\ddot{\varphi} + \frac{4}{3} m\ell^2\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi + mg\ell \cos\varphi = 0 \; .$$

Leid uit deze vergelijking af,

a) dat kinetisch evenwicht bestaat voor

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{(voor alle waarden van } \omega\text{)},$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{2} \quad \text{(voor alle waarden van } \omega\text{)},$$

$$\varphi = -\arcsin\left(\frac{3}{4}\frac{g}{\ell\omega^2}\right) \quad \left(\text{mits } |\omega| \geq \sqrt{\frac{3g}{4\ell}}\right) ,$$

b) dat de stand $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ altijd instabiel is.

6. a) Hoe wordt een stoot gedefinieerd?
   b) Welke grootheden veranderen tijdens een stoot- of botsingsverschijnsel en welke niet?
   c) Wat is de botsings- of restitutiecoëfficiënt?

Definieer precies de grootheden die U hierbij in het antwoord betrekt.

Herkansingsexamen Theoretische Mechanica op zaterdag 30 januari 1971, 9.00-11.00 uur.

N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.
Theorievragen kort beantwoorden.

1. Beschouw een conservatief systeem met twee graden van vrijheid (q_1,q_2).
   i) Bestaat er een potentiële energie?
   ii) Geef de conditie waaruit de evenwichtsstanden kunnen worden bepaald.
   iii) Geef de voorwaarden waaraan voldaan moet zijn, opdat een evenwichtsstand stabiel is.

2. Beschouw twee lichamen welke tegen elkaar botsen. Welke relaties volgen uit de gegevens:
   i) de oppervlakken van de beide lichamen zijn glad,
   ii) de botsing is volkomen elastisch ($\lambda = 1$),
   iii) de botsing is volkomen onelastisch ($\lambda = 0$).

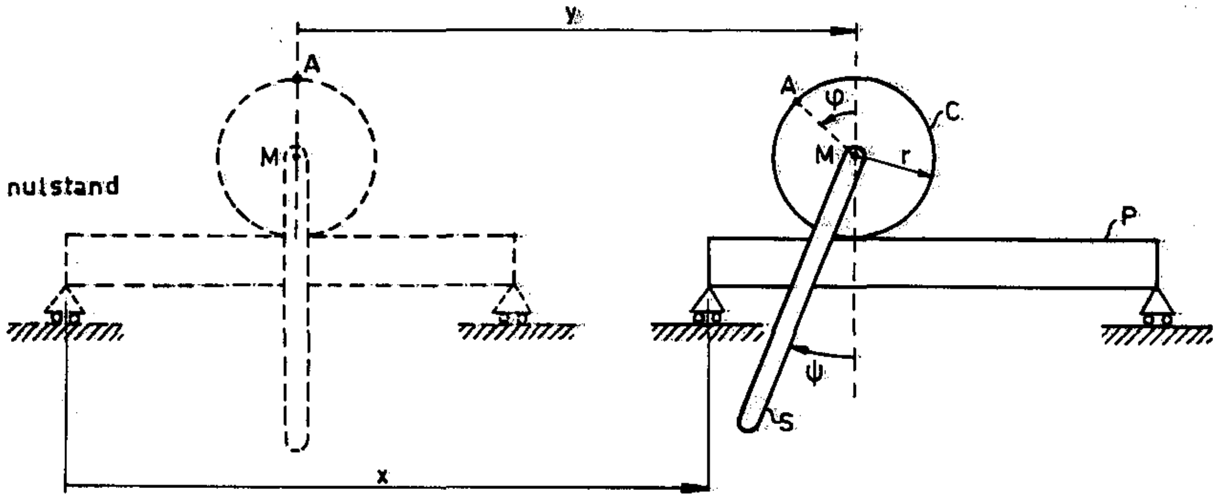
3. Leid, uitgaande van de definitie, een eenvoudige uitdrukking af voor
   i) De impuls van een star lichaam.
   ii) Het impulsmoment van een star lichaam ten opzichte van een willekeurig punt.
   iii) Het impulsmoment van een star lichaam ten opzichte van zijn zwaartepunt.
   iv) Ten opzichte van welke punten geldt de momentenstelling: $\vec{M} = \dot{\vec{D}}$.

4. i) Kunnen reactiekrachten virtuele arbeid verrichten?
   ii) Kunnen reactiekrachten bij de in werkelijkheid plaats vindende beweging arbeid verrichten? Zo ja, geef een voorbeeld.
   iii) Wat is het essentiële verschil tussen de methode van Lagrange en die van het vrijmaken?

5. i) Wat verstaat U onder een kinetische evenwichtsstand? Geef een voorbeeld.
   ii) Geef twee manieren aan, waarop U voor het door U gekozen voorbeeld de kinetische evenwichtsstanden kunt bepalen.

Z.O.Z.

6. i) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.



Van het hier geschetste systeem is gegeven dat de plaat P alleen in horizontale richting kan bewegen, dat de cylinder C rolt over P en dat de staaf S in M vrij kan draaien ten opzichte van C (alleen beweging in vlak van tekening). Behalve tussen C en P is er nergens wrijving.

ii) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem? Kies de gegeneraliseerde coördinaten.

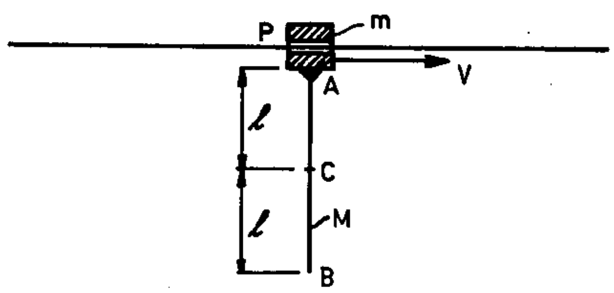
iii) Geef de kinematische rolconditie.

Herkansingsexamen Theoretische Mechanica, W IV, WSK IV, op zaterdag 19 juni 1971, 9.00-11.00 uur.

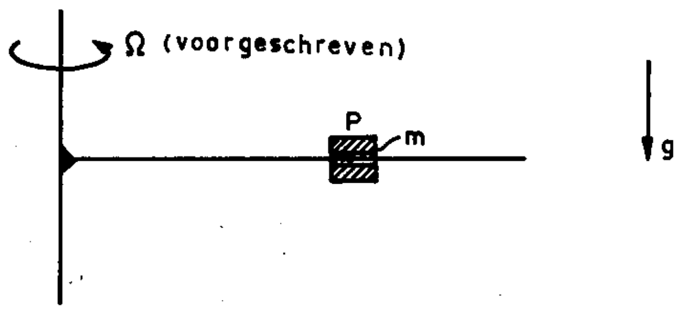
N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.
Theorievragen kort beantwoorden.

1. a) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.
   b) Geef een definitie van virtuele verplaatsingen.

2. Leid, uitgaande van de definitie, een eenvoudige uitdrukking af voor:
   a) de impuls van een star lichaam;
   b) het impulsmoment van een star lichaam ten opzichte van zijn zwaartepunt;
   c) het impulsmoment van een star lichaam ten opzichte van een willekeurig punt.
   d) Bepaal van onderstaand stelsel, bestaande uit een massapunt P (massa m) en een homogene staaf AB (massa M, lengte 2ℓ), dat transleert met een snelheid V, de impuls en de impulsmomenten om P én om C.



3.



Langs een staaf welke met een voorgeschreven hoeksnelheid Ω om de verticaal roteert, is een massapunt P (massa m) zonder wrijving verschuifbaar.

Z.O.Z.

a) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
b) Kies de gegeneraliseerde coördina(a)t(en).
c) Hoeveel vergelijkingen van Lagrange kunt U voor dit systeem opstellen?
d) Welke extra onbekenden krijgt U bij de methode van het vrijmaken?

4. Geef met ja of neen antwoord op de volgende vragen.

a) Heeft een stoot de dimensie van een kracht?
b) Geldt bij een stootvraagstuk altijd dat de impuls behouden blijft?
c) Indien een star lichaam in één punt gefixeerd wordt, geldt dan altijd dat het impulsmoment van dat lichaam om dat punt behouden blijft?
d) Geldt bij een stootvraagstuk altijd dat de kinetische energie behouden blijft?
e) Geldt bij een stootvraagstuk altijd dat de potentiële energie behouden blijft?
f) Geldt de stelling die zegt dat het stootmoment om een punt gelijk is aan de verandering van het impulsmoment om dat punt, om ieder willekeurig punt?

5. Geef met ja of neen antwoord op de volgende vragen.

a) Verrichten wrijvingskrachten altijd arbeid?
b) Is het impulsmoment van een translerend star lichaam om elk punt gelijk aan nul?
c) Heeft de impulsvector van een star lichaam altijd dezelfde richting als de zwaartepuntssnelheid?
d) Heeft de impulsmomentvector van een star lichaam altijd dezelfde richting als de hoeksnelheid?
e) Geldt de momentenstelling: $\underline{M} = \dot{\underline{D}}$, alleen om het zwaartepunt?

6. a) Hoe luidt het principe van d'Alembert?
b) Als de uitwendige krachten conservatief zijn, hoe luidt dan het verband tussen de uitwendige kracht per volume-eenheid $\underline{k}^{(b)}$ en de potentiële energie per volume-eenheid u ?
c) Leid uit het principe van d'Alembert het principe van Hamilton af.
d) Welk stelsel vergelijkingen kan uit het principe van Hamilton worden afgeleid?

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 29 januari 1972, W IV, WSK IV, 9.00-11.00 uur.

N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.
Theorievragen kort beantwoorden.

□÷□

1. a) Wat zijn gegeneraliseerde coördinaten?
   b) Wat zijn virtuele verplaatsingen?

2. Leid, uitgaande van de definitie, een eenvoudige uitdrukking af voor
   a) de impuls van een star lichaam,
   b) het impulsmoment van een star lichaam ten opzichte van een willekeurig punt,
   c) het impulsmoment van een star lichaam ten opzichte van het zwaartepunt.

   Beantwoord verder:

   d) Heeft het impulsmoment $\underline{D}$ altijd dezelfde richting als de hoeksnelheid $\underline{\omega}$?
   e) Is het impulsmoment $\underline{D}$ van een translerend lichaam om elk punt gelijk aan nul?

3. Een kegel rolt met hoeksnelheid $\underline{\omega}_k$ over een vlak. Dit vlak draait met constante hoeksnelheid $\underline{\omega}_v$ om een as door de top van de kegel en loodrecht op het vlak. Hoe moet de verhouding van de grootten van de beide hoeksnelheden worden gekozen, opdat juist een van de beschrijvenden van de kegel in rust is?

4. a) Waarin onderscheiden zich belastingskrachten van reactiekrachten?
   b) Welke krachten moet U in rekening brengen bij de methode van het vrijmaken?
   c) Welke krachten moet U in rekening brengen bij de methode van Lagrange?
   d) Wanneer kunnen reactiekrachten arbeid verrichten?
   e) Verrichten wrijvingskrachten altijd arbeid?
   f) Wanneer moeten centrifugaalkrachten worden ingevoerd?

Z.O.Z.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 29 januari 1972, W IV, WSK IV.

□÷□

5. a) Wat is de dimensie van een stoot?

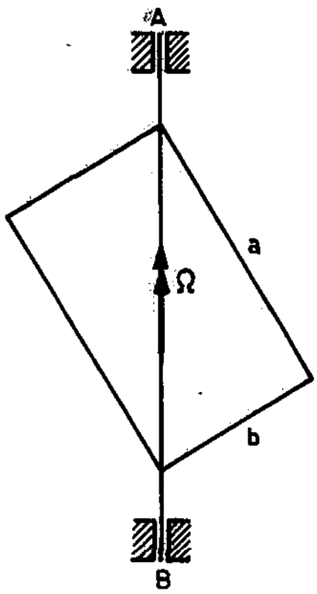
   b) Geef met ja of nee antwoord op de volgende vragen.
   Verandert bij een stootproces

   i) de positie van het lichaam?
   ii) de impuls?
   iii) het impulsmoment?
   iv) de kinetische energie?
   v) de potentiële energie?

6. Geef voor een conservatief systeem met een graad van vrijheid de voorwaarden voor

   a) de evenwichtsstanden
   b) de stabiliteit van deze evenwichtsstanden.

7.



Een rechthoekige homogene plaat met zijden a en b roteert met hoeksnelheid Ω om een as AB langs een diagonaal van de plaat.
Waarom treden er in de oplegpunten A en B reactiekrachten op en hoe zijn ze gericht?

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 17 juni 1972, 9.00-11.00 uur.

N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.
Theorievragen kort beantwoorden.

o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

1. a) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.
   b) Geef een definitie van virtuele verplaatsingen.

2. Geef aan of de volgende uitspraken waar of niet waar zijn (kort argumenteren).
   a) Een gegeneraliseerde kracht heeft altijd de dimensie van een kracht.
   b) Het impulsmoment van een translerend star lichaam is om ieder punt gelijk aan nul.
   c) Zowel belastingskrachten als reactiekrachten kunnen bij virtuele verplaatsingen arbeid verrichten.
   d) De vergelijkingen van Lagrange gelden alleen voor holonome systemen.
   e) De resulterende centrifugaalkracht grijpt altijd in het zwaartepunt aan.

3. a) Geef de definitie van een stoot.
   b) Wat is de dimensie van een stoot?
   c) Welke grootheden veranderen tijdens een stoot- of botsingsproces en welke niet?
   d) Als een lichaam gefixeerd wordt in een punt met snelheid ongelijk aan nul, neemt de kinetische energie dan altijd af?
   e) Bij een botsing tussen twee lichamen geldt de volgende relatie

$$V_1 - V_2 = -\lambda\,(v_1 - v_2)\ .$$

   Geef volledige definities van de in bovenstaande vergelijking voorkomende grootheden.

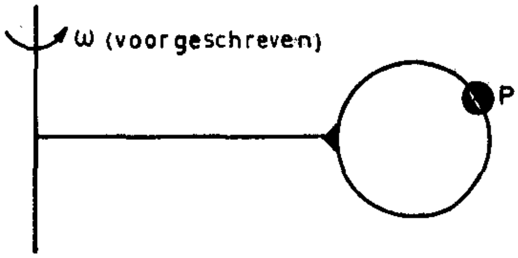
4. Leid, uitgaande van de definitie, een eenvoudige uitdrukking af voor
   a) de impuls van een star lichaam.
   b) Het impulsmoment van een star lichaam t.o.v. een willekeurig vast punt.
   c) Bewijs dat om een willekeurig vast punt geldt $\underline{M} = \dot{\underline{D}}$.

Zie. blz. 2

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 17 juni 1972.

o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

5. Langs een hoepel die star bevestigd is aan een staaf, die met voorgeschreven hoeksnelheid ω om een verticale as roteert, kan een massapunt P (massa m) zonder wrijving bewegen.



Gevraagd wordt:

a) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?

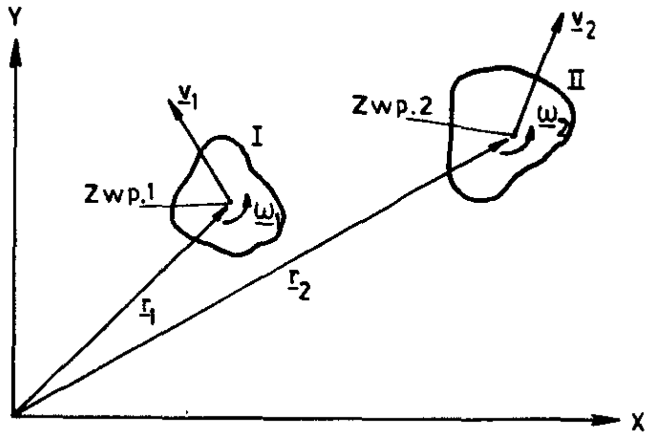
b) Kies de gegeneraliseerde coördina(a)t(en).

c) Mag op dit systeem de methode van Lagrange worden toegepast?

d) Welke extra onbekenden krijgt U bij de methode van het vrijmaken?

e) Geef twee methoden aan waarmee U de kinetische evenwichtsstanden van dit systeem kunt bepalen.
(Definieer nauwkeurig de door U gebruikte grootheden.)

6.



Zie blz. 3

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 17 juni 1972.

Beschouw twee vlakke lichamen I en II met snelheden resp. $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ (in vlak), hoeksnelheden resp. $\underline{w}_1$ en $\underline{w}_2$ ($\perp$ vlak), massa's resp. m_1 en m_2, traagheidsmomenten t.o.v. Zwp. 1 en Zwp. 2 resp. J_1 en J_2 ($\perp$ vlak).
Bepaal:

a) Het zwaartepunt van het totale stelsel.

b) Het traagheidsmoment J ($\perp$ vlak) om dit zwaartepunt.

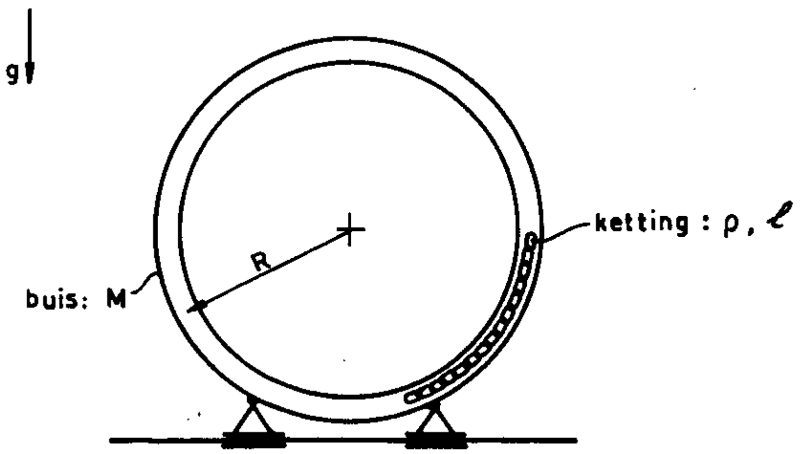
c) Het impulsmoment $\underline{D}$ ($\perp$ vlak) om dit zwaartepunt.

7. Beschouw een cirkelvormige homogene buis (massa M, straal R) met te verwaarlozen diameter die zonder wrijving kan glijden langs een horizontale as. In de buis bevindt zich een homogene ketting (lengte ℓ, massadichtheid ρ) die zonder wrijving kan glijden in de buis. De versnelling van de zwaartekracht is g.
Beantwoord kort geargumenteerd de volgende vragen:
Geldt voor het hele systeem:

a) T + U = constant?

b) De impuls in horizontale richting is constant?

c) De impuls in verticale richting is constant?



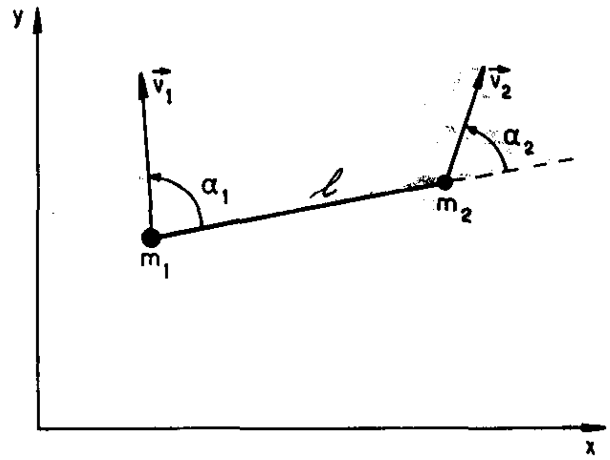
Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 27 januari 1973, 9.00-11.00 uur.

N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.

∆↑∆

1. a) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.
   b) Beschouw een stelsel starre lichamen. Geef het verband tussen het aantal lichamen (n), het aantal bewegingsbeperkingen (p) en het aantal gegeneraliseerde coördinaten (m).

2. Beschouw een starre halter bestaande uit een massaloze staaf, lengte ℓ, met aan elk uiteinde een massapunt (m_1,m_2). Dit stelsel kan bewegen in een plat vlak. De massapunten m_1 en m_2 hebben een snelheid v_1 resp. v_2 welke een hoek α_1 resp. α_2 met de staaf maakt.

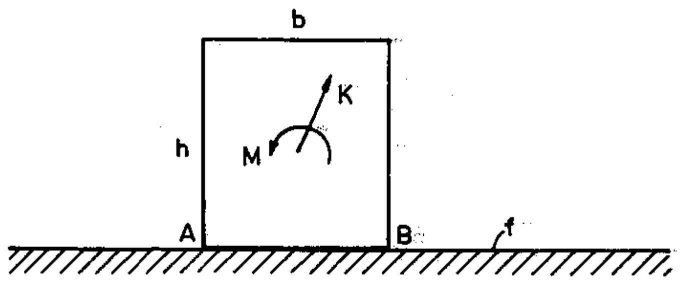


   a) Tengevolge van het star zijn van het lichaam bestaat er een verband tussen $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Hoe luidt dit verband?
   b) Bepaal het zwaartepunt van het systeem.
   c) Bepaal de snelheid van het zwaartepunt.
   d) Bepaal de hoeksnelheid van de halter.
   e) Bepaal de impulsvector.
   f) Bepaal het impulsmoment om het zwaartepunt.
   g) Bepaal de kinetische energie.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 27 januari 1973.

Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ

3.



Gegeven een rechthoekig blok, breedte b, hoogte h, dat staat op een ruw horizontaal vlak, wrijvingscoëfficiënt f. Het blok wordt belast door een willekeurige kracht en/of moment en kan bewegen in het vlak van tekening.
Geef de condities, uitgedrukt in de reactiegrootheden van de vloer op het blok, waaronder het blok:

a) in rust blijft,
b) loslaat van de vloer,
c) gaat glijden, maar volledig in contact blijft met de vloer,
d) gaat kantelen om A, waarbij A in rust blijft.

4. Geef met ja of neen antwoord op de volgende vragen:
   a) Is de impuls van een star lichaam altijd gelijk aan zijn massa vermenigvuldigd met de snelheid van zijn zwaartepunt?
   b) Is de plaats van het zwaartepunt in een lichaam afhankelijk van de keuze van het assenstelsel?
   c) Is de som van de kinetische en de potentiële energie altijd constant?
   d) Moeten bij de methode van Lagrange de reactiekrachten in rekening worden gebracht?
   e) Is het massatraagheidsmoment om een centrale hoofdtraagheidsas altijd kleiner dan dat om een andere met bedoelde centrale as evenwijdige rechte?

Zie blz. 3

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 27 januari 1973.

5. a) Geef de definitie van een stoot.
Wanneer blijft bij een stoot- of botsingsverschijnsel
b) de impuls,
c) het impulsmoment om een willekeurig punt A,
d) de kinetische energie en
e) de potentiële energie
behouden.

6. Beschouw het volgende krachtenveld

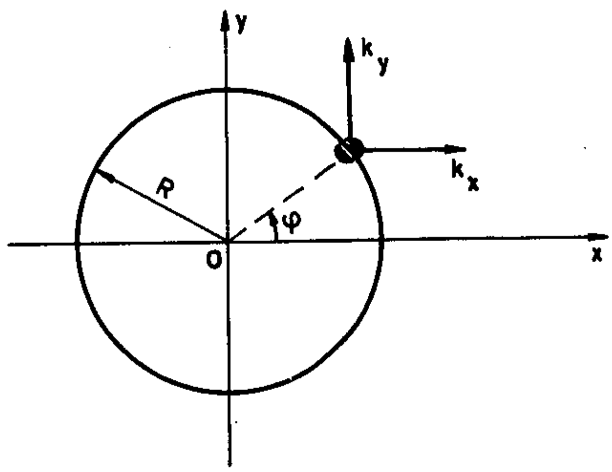
$$k_x = -1 - x - y,$$
$$k_y = -1 - x - y,$$
$$k_z = 0,$$

(k_x, k_y, k_z zijn de componenten van $\vec{k}$ t.o.v. een rechthoekig assenstelsel Oxyz).

a) Toon aan dat dit krachtenveld conservatief is.

b) Bewijs dat dit krachtenveld de volgende potentiële energie heeft

$$U = x + y + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 + xy + \text{constante}.$$



Beschouw een massapunt dat in het xy-vlak kan bewegen langs een cirkel met straal R, onder invloed van bovenstaand krachtenveld.

c) Druk de potentiële energie U uit in de hoek φ (zie figuur).

d) Bewijs dat dit systeem twee evenwichtsstanden heeft voor $R < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ en vier voor $R > \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

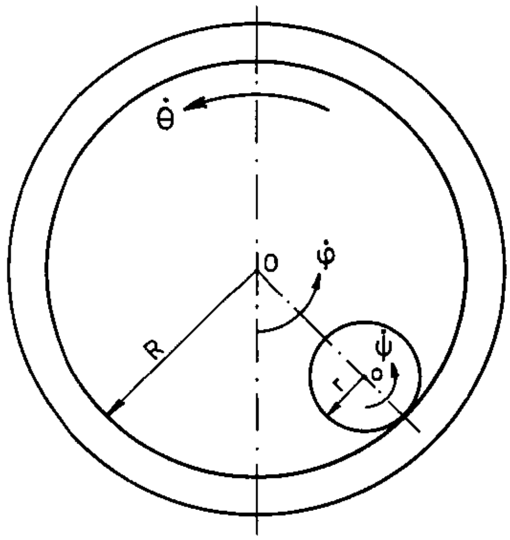
Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 16 juni 1973, 9.00 - 11.00 uur.

N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.

Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ

1. i) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.
   ii) Beschouw een stelsel starre lichamen. Geef het verband tussen het aantal lichamen (n), het aantal bewegingsbeperkingen (p) en het aantal gegeneraliseerde coördinaten (m).

2.



Een ring, straal R, roteert met een hoeksnelheid $\dot{\theta}$ om een as door zijn middelpunt O en loodrecht op zijn vlak. Aan de binnenkant van de ring rolt een schijfje, straal r en middelpunt o, ten opzichte van de ring. De hoeksnelheid van het schijfje is $\dot{\psi}$ en de hoeksnelheid van de verbindingslijn Oo is $\dot{\varphi}$.
Geef het verband tussen $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ en $\dot{\varphi}$ dat volgt uit het gegeven dat het schijfje rolt over de ring.

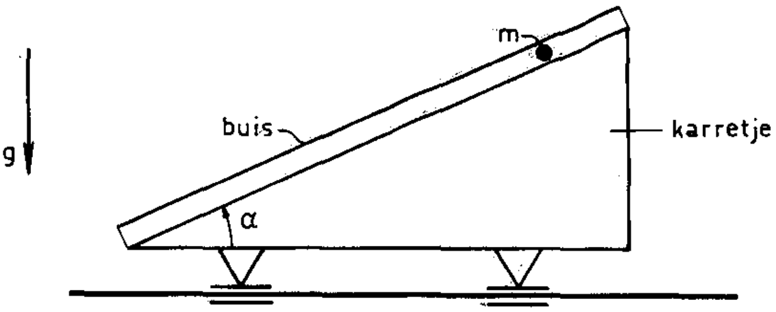
3. Gegeven een krachtenveld $\underline{k}$.
   i) Aan welke conditie moet $\underline{k}$ voldoen, opdat het krachtenveld conservatief is?
   ii) Geef, voor het geval aan bovenstaande conditie voldaan is, het verband tussen $\underline{k}$ en de potentiële energiedichtheid u.

Zie blz. 2.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 16 juni 1973.

4. i) Hoe luidt het principe van de virtuele arbeid?
   ii) Hoe luidt het principe van d'Alembert?
   iii) Leid voor een vrij massapunt uit het principe van de virtuele arbeid de eerste wet van Newton af, en
   iv) uit het principe van d'Alembert de tweede wet van Newton.
   v) Leid, voor een vrij lichaam, uit het principe van d'Alembert de zwaartepunts- en de momentenstelling af.

5.



Een karretje, waarop onder een hoek α een open, gladde buis is bevestigd, kan zonder wrijving glijden langs een horizontale rechte $\mathcal{L}$. In de buis bevindt zich een massapunt m. Beschouw de beweging van karretje en massapunt waarbij m zich nog in de buis bevindt.

Blijft hierbij behouden:

i) De impuls van het totale systeem in horizontale richting?
ii) Idem in verticale richting?
iii) De impuls van het karretje in horizontale richting?
iv) De impuls van het massapunt in verticale richting?
v) De som van de potentiële en kinetische energie van het massapunt?
vi) Idem van de kar?
vii) Idem van het totale systeem?

Zie blz. 3.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 16 juni 1973.

Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ

6. Beschouw twee lichamen die tegen elkaar botsen.
Welke relaties volgen uit de gegevens:
   i) De oppervlakken van de beide lichamen zijn glad.
   ii) De botsing is volkomen elastisch (λ = 1).
   iii) De botsing is volkomen onelastisch (λ = o).

7. Beantwoord de volgende vragen met ja of neen.
   i) Kunnen reactiekrachten virtuele arbeid verrichten?
   ii) Is in een kinetische evenwichtsstand de potentiële energie van de belastingskrachten, waarvan het bestaan mag worden aangenomen, stationair?
   iii) Valt het aangrijpingspunt van de resulterende centrifugaalkracht altijd samen met het zwaartepunt?
   iv) Geldt de momentenstelling $\underline{M} = \dot{\underline{D}}$ alleen ten opzichte van een vast punt?
   v) Blijft bij een botsing altijd de totale impuls behouden?
   vi) Heeft het impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt altijd dezelfde richting als de hoeksnelheid?
   vii) Is het massatraagheidsmoment om een centrale hoofdtraagheidsas altijd kleiner dan dat om een andere met bedoelde centrale as evenwijdige as?
   viii) Blijft bij een stootproces altijd de potentiële energie behouden?
   ix) Blijft bij een stootproces altijd de kinetische energie behouden?
   x) Is het impulsmoment van een translerend star lichaam om ieder punt gelijk aan nul?

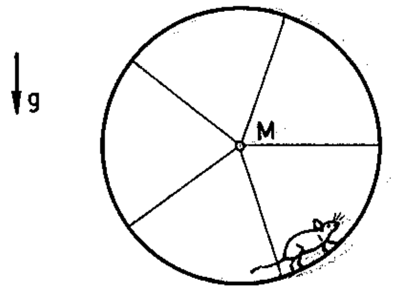
TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN H20.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 26 januari 1974, 9.00-11.00 uur.

N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.

1. a) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.
   b) Beschouw een stelsel starre lichamen. Geef het verband tussen het aantal lichamen (n), het aantal bewegingsbeperkingen (p) en het aantal gegeneraliseerde coördinaten (m).

2. Een muis loopt in een verticaal cirelvormig rad dat kan draaien om zijn vaste middelpunt M. De versnelling van de zwaartekracht is g.



   a) De kracht $\underline{K}$ die de muis op het rad uitoefent is gegeven. Beantwoord de volgende vragen:

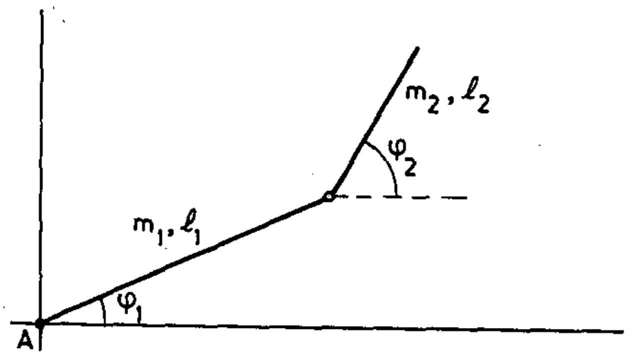
      1) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
      2) Geef de gegeneraliseerde coördina(a)t(en).
      3) Bepaal de gegeneraliseerde kracht(en).
      4) Is $\underline{K}$ een reactie- of een belastingskracht?
      5) Geldt T + U = constant?

   b) De snelheid van de muis ten opzichte van het rad is gegeven ($\underline{K}$ is nu onbekend).
      Beantwoord weer de vragen 1 t/m 5.

Zie blz. 2.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 26 januari.

3. Twee staven met lengte en massa ℓ_1, m_1 respectievelijk ℓ_2, m_2 zijn scharnierend verbonden. Staaf 1 is scharnierend verbonden met het vaste punt A. De staven bewegen vrij in een horizontaal vlak.

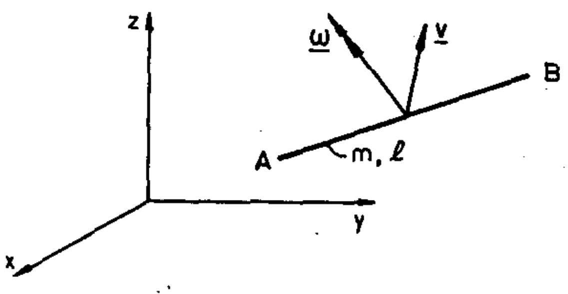


a) Bepaal het impulsmoment t.o.v. A.

b) Is dit impulsmoment constant? (Argumenteer Uw antwoord.)

4. Een cylinder (gewicht mg) glijdt of rolt over een ruw horizontaal vlak (wrijvingscoëfficiënt f). Waar hangt de grootte en richting van de wrijvingskracht W van af en hoe is het verband?

5. Een staaf AB met massa m en lengte ℓ beweegt in de ruimte met snelheid van het zwaartepunt $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$ en hoeksnelheid $\underline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.
Het uiteinde B van de staaf wordt gefixeerd.



Gevraagd:

a) Hoeveel onbekenden heeft dit probleem?

b) Welke vergelijkingen hebt U nodig om deze onbekenden te bepalen?

c) Geldt $\Delta\underline{p} = \underline{0}$?

d) Geldt $\Delta\underline{D}_{zwpt} = \underline{0}$?

e) Geldt $\Delta\underline{D}_B = \underline{0}$? Argumenteer c), d) en e).

Zie blz. 3.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 26 januari.

6. Gegeven is een conservatief systeem met twee graden van vrijheid: x en φ. Voor de potentiële energie geldt

$$U = -mg(\ell + x)\cos\varphi + \tfrac{1}{2}cx^2 .$$

Gevraagd:

a) Bepaal de evenwichtsstanden.

b) Bepaal de stabiliteit van deze standen.

7. Beantwoord de volgende vragen met ja of nee (kort argumenteren).

a) Heeft een gegeneraliseerde kracht altijd de dimensie van een kracht?

b) Geldt $\underline{M} = \dot{\underline{D}}$ alleen om een vast punt?

c) Moeten reactiekrachten in rekening worden gebracht bij vrijmaken?

d) Gaat bij botsing van twee vrije lichamen altijd energie verloren?

e) Is bij een kinetische evenwichtsstand de potentiële energie van de belastingskrachten minimaal?

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 15 juni 1974, 9.00 - 11.00 uur.

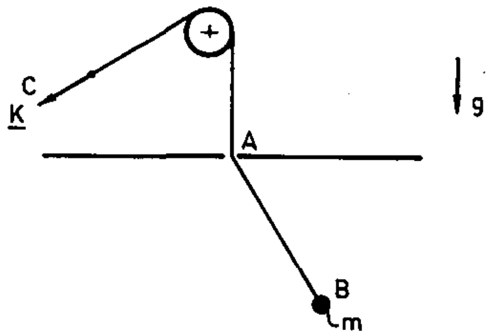
N.B. Papier slechts aan één zijde beschrijven.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

1. a) Geef een definitie van gegeneraliseerde coördinaten.

   b) Beschouw een stelsel starre lichamen. Geef het verband tussen het aantal lichamen (n), het aantal bewegingsbeperkingen (p) en het aantal gegeneraliseerde coördinaten (m).

2. De vrije lengte AB van een slinger, bestaande uit een volkomen buigzaam niet rekbaar koord en een massa m, kan variëren door aan het uiteinde C te trekken, zoals in de figuur. De versnelling van de zwaartekracht is g.



   a) De kracht $\underline{K}$ waarmee in C aan de slinger getrokken wordt is gegeven. Beantwoord de volgende vragen:
      1) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
      2) Geef de gegeneraliseerde coördina(a)t(en).
      3) Bepaal de gegeneraliseerde kracht(en).
      4) Is $\underline{K}$ een reactie of belastingskracht?
      5) Geldt $T + U$ = constant?

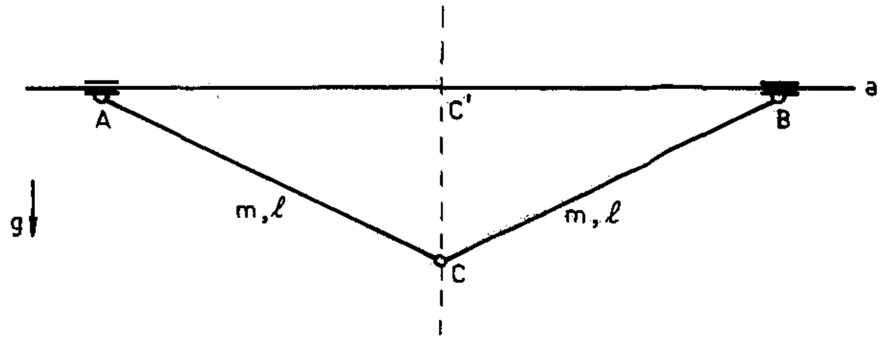
   b) De lengte van AB is gegeven ($\overline{AB} = \ell(t)$) en $\underline{K}$ is nu onbekend. Beantwoord weer de vragen 1) t/m 5).

Zie blz. 2.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 15 juni 1974.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

3.



Twee homogene staven AC en BC (lengte ℓ, massa m) kunnen in A en B zonder wrijving glijden langs een horizontale geleiding a. In C zijn de staven door een wrijvingsloosscharnier verbonden. De staven bevinden zich oorspronkelijk in horizontale stand. Op zeker moment beginnen de staven te bewegen onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g).

Gevraagd wordt (kort toelichten):

a) verandert de impuls van AC in horizontale richting?

b) verandert de impuls van het hele systeem in horizontale richting?

c) Verandert de impuls van AC in vertikale richting?

d) Verandert de impuls van het hele systeem in vertikale richting?

e) Verandert het impulsmoment van AC t.o.v. zijn zwaartepunt?

f) Verandert het impulsmoment van het hele systeem t.o.v. het zwaartepunt van het hele systeem?

g) Verandert het impulsmoment van het hele systeem t.o.v. C'?

h) Verandert de potentiële energie van het hele systeem?

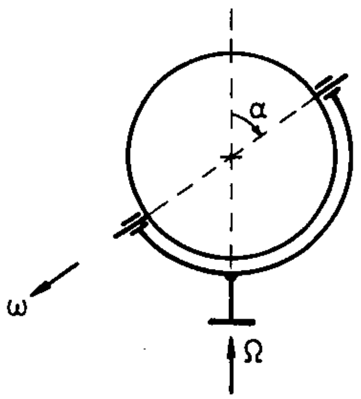
Zie blz. 3.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 15 juni 1974.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

4. Beantwoord kort geargumenteerd de volgende vragen:
   a) Grijpt de resulterende centrifugaalkracht steeds in het zwaartepunt aan?
   b) Gaat bij een botsing van twee vrije lichamen steeds energie verloren?
   c) Is het impulsmoment van een translerend star lichaam om ieder punt gelijk aan nul?
   d) Kunnen zowel belastingskrachten als reactiekrachten bij virtuele verplaatsingen arbeid verrichten?
   e) Heeft een gegeneraliseerde kracht altijd de dimensie van een kracht?
   f) Verrichten wrijvingskrachten altijd arbeid?
   g) Heeft de impulsvector van een star lichaam altijd dezelfde richting als de zwaartepuntssnelheid?
   h) Zijn de snelheden in de kinematische relatie $V_1 - V_2 = -\lambda(v_1 - v_2)$ de snelheden van de zwaartepunten van de botsende lichamen?
   i) Volgt uit het gegeven dat de oppervlakken van twee botsende lichamen glad zijn dat de stoot loodrecht op het oppervlak staat?
   j) Volgt uit het gegeven dat de oppervlakken van twee botsende lichamen volkomen ruw zijn dat de stoot in het gemeenschappelijk raakvlak ligt?

5)



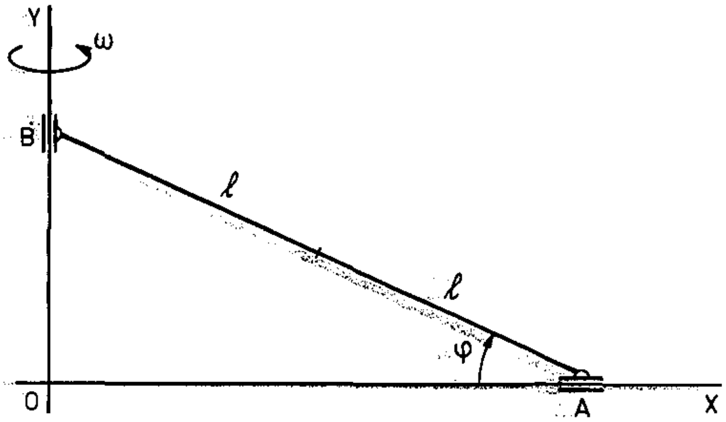
Aan het voetstuk van een stilstaande globe geeft men plotseling een hoeksnelheid Ω. Bereken de hoeksnelheid ω die de bol daardoor krijgt ten opzichte van het voetstuk. Verifieer of Uw uitkomst overeenstemt met hetgeen U verwacht voor $\alpha = 0$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Zie blz. 4.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 15 juni 1974.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

6. Een staaf AB (lengte 2ℓ, massa m) glijdt zonder wrijving langs de assen van een assenkruis OXY, waarvan de X-as met constante hoeksnelheid ω om de Y-as wentelt.



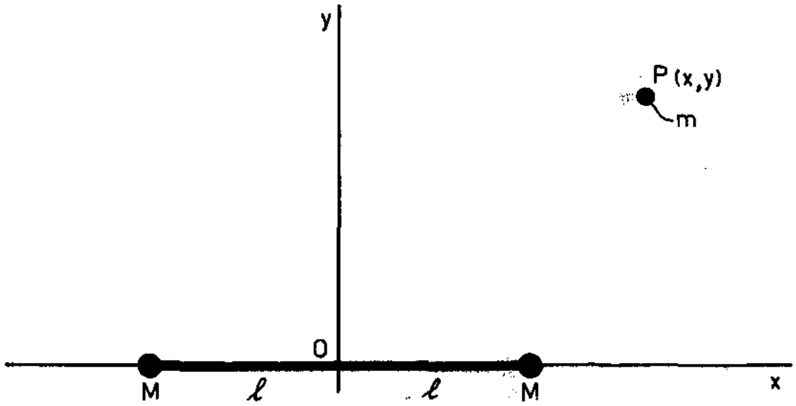
Zet het OXY-stelsel stil en bereken:

a) de centrifugaalkracht

b) de centrifugaalpotentiaal

c) het aangrijpingspunt van de centrifugaalkracht.

7.



Een halter bestaande uit een massaloze staaf, lengte 2ℓ, met in zijn beide eindpunten een massa M, oefent op een massapunt P, massa m, een kracht uit volgens de gravitatiewet van Newton ($\underline{K} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r}$).

Bereken:

Zie blz. 5.

Herkansingsexamen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 15 juni 1974.

T↓T↓T↓T↓T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T↑T

i) de potentiaal van de gravitatie in P,

ii) de kracht die door de halter op m wordt uitgeoefend.

Beantwoord met een korte motivering de volgende vraag:

iii) Valt de werklijn van de kracht op P langs OP (O is het middelpunt van de staaf)?

Vraagstukken

1. Een materieel punt P wordt door een vast punt O aangetrokken met een kracht $m\mu^2 r$ ($\mu > 0$), waarin r de afstand tot O is. In een punt A, waar $r = a$ ($a > 0$) is, wordt P met een snelheid 0 losgelaten.
Bepaal de perioden van de slingeringen om A en de snelheid, waarmede O telkens gepasseerd wordt. Welke is de dimensie van μ ?
Hint: Gebruik K = ma.

Antwoord:

$$[\mu] = [t^{-1}] \qquad T = \frac{2\pi}{\mu} \qquad \dot{r}_0 = \pm\,\mu a \quad .$$

2. Dezelfde vragen als 1. met dit verschil, dat P in A een langs OA vallende beginsnelheid v_0 heeft, positief gerekend van O af.
Bepaal ook de amplitudo.

Antwoord:

$$T = \frac{2\pi}{\mu} \qquad \dot{r}_0 = \pm\sqrt{\mu^2 a^2 + v_0^2} \qquad \text{amplitudo} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2 a^2 + v_0^2} \quad .$$

3. Een materieel punt P wordt door een vast punt O aangetrokken met een kracht $\frac{m\mu}{r^2}$ ($\mu > 0$), waarin r de afstand tot O is. In een punt A, waar $r = a$ ($a > 0$) is, wordt P met een snelheid 0 losgelaten.
Op welk tijdstip en met welke snelheid komt P in O? Welke is de dimensie van μ?

Antwoord:

$$[\mu] = [\ell^3 t^{-2}] \qquad \dot{r}_0 = -\sqrt{\frac{2\mu}{a}}\sqrt{\frac{a-x}{x}} \quad ; \quad t = \frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{a}{2\mu}} \quad .$$

4. Een materieel punt P heeft op het tijdstip $t = 0$ een snelheid v_0. Het is onderworpen aan een luchtweerstand evenredig aan de snelheid v, die bij een snelheid 1 gelijk is aan mk.
Onderzoek de beweging van P. Welke is de dimensie van k?

Antwoord:

$$[k] = [t^{-1}] \qquad x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \quad .$$

5. Dezelfde vraag als 4., maar met een luchtweerstand mkv^2.

Antwoord:

$$[k] = [\ell^{-1}] \qquad x = \frac{1}{k}\,\ell n(kv_0 t + 1) \quad .$$

6. Dezelfde vraag als 4., maar met een luchtweerstand $mk\sqrt{v}$. Na hoeveel tijd en waar komt P in rust?

Antwoord:

$[k] = [\ell^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}}]$ $\qquad 12kx = 8v_0\sqrt{v_0} - (2\sqrt{v_0} - kt)^3 \qquad$ in rust $t = \frac{2\sqrt{v_0}}{k}$ in $x = \frac{2}{3k} v_0^{\frac{3}{2}}$

7. Men laat een materieel punt P vallen met een beginsnelheid 0. Behalve de zwaartekracht werkt op P een luchtweerstand mkv.
Onderzoek de beweging van P.

Antwoord:

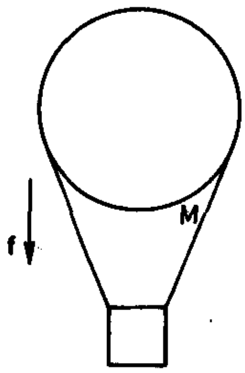
$$z = \frac{g}{k^2}(e^{-kt} - 1) + \frac{g}{k} t \quad .$$

8. Op een schip dat met maximale snelheid V vaart, zet men de voortstuwingsmachines op volle kracht achteruit.
Gegeven is, dat de weerstand die het schip ondervindt evenredig is met het kwadraat van de snelheid en dat de versnelling, die de maximum stuwkracht aan het vrije schip zou geven, gelijk is aan a.
Gevraagd wordt de tijd waarin en de afstand waarover het schip bij bovenbedoelde manoeuvre tot stilstand komt.

Antwoord:

$t = \frac{\pi V}{4a}$; $\qquad$ afgelegde weg: $\frac{V^2}{2a} \log 2$.

9.



Een ballon waarvan de totale massa (inclusief die van de mand, uitrusting e.d.) M bedraagt, daalt verticaal met een versnelling f.
Hoeveel massa moet afgeworpen worden om te bewerkstelligen dat de ballon zal stijgen met een versnelling f?

Antwoord:

$$\Delta M = M \frac{2f}{f + g} \quad .$$

10. Een materieel punt P wordt door een vast punt O aangetrokken met een kracht $m\mu^2 r$, waarin r zijn afstand tot O is. Bij zijn beweging ondervindt P een

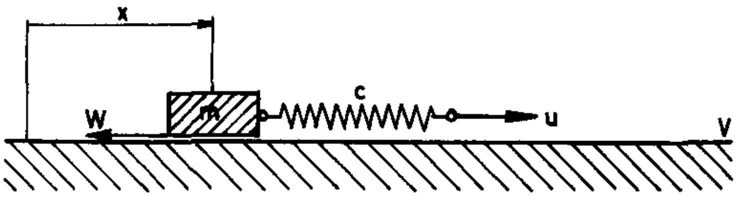
constante wrijving mW. Het materiële punt wordt met een snelheid 0 losgelaten in een punt A op een afstand $a = \frac{43W}{2\mu^2}$ van O.

Na hoeveel heen- en weergaan en waar komt P in rust?

<u>Antwoord</u>:

Na 11 maal, $r = \frac{W}{2\mu^2}$.

11.



Een puntmassa P (massa m) kan bewegen over een horizontaal vlak V en is verbonden met een uiteinde van een massaloze veer (stijfheid c), De beweging van P over V gaat gepaard met een droge wrijvingskracht W. Voor $t < 0$ is het systeem in rust. Voor $t \geqslant 0$ wordt het vrije uiteinde van de veer bewogen met een constante snelheid u over V.
Gevraagd wordt de beweging van P te berekenen.

<u>Antwoord</u>:

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{W}{uc} \quad : \quad x = 0$$

$$t \geqslant \frac{W}{uc} \quad : \quad x = -\frac{u}{\omega}\sin[\omega(t - \frac{W}{uc})] + u(t - \frac{W}{uc}) \quad .$$

12. Een materieel punt P ondervindt van de x-as van een rechthoekig assenkruis een aantrekking $m\mu^2 r$, waarin r de afstand tot de x-as is. Ten tijde $t = 0$ bevindt P zich in het punt (0,a) van de y-as ($a > 0$) en heeft het een snelheid v_0 ($v_0 > 0$) in de richting van de positieve x-as.
Welke baan beschrijft P?

<u>Antwoord</u>:

$$x = v_0 t \qquad y = a \cos \mu t \quad .$$

13. Een materieel punt P is onderworpen aan een centrale aantrekking $\frac{mk}{r^2}$ (aantrekingskracht van <u>Newton</u>). Op het tijdstip $t = 0$ is P in A op een afstand a ($a > 0$) van het centrum C met een loodrecht op CA staande snelheid $v_0 = \sqrt{\frac{2k}{a}}$.
Op welk tijdstip en in welk punt is r aangegroeid tot 2a en welke snelheid heeft P dan?

Antwoord:

$$t = \frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{k}} \qquad v = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \ .$$

14. Een materieel punt P kan zich aan de buitenkant bewegen langs een cirkel (straal r) in een verticaal vlak, onder de invloed van de zwaartekracht; P kan de cirkel (b.v. een naar de buitenkant open cirkelvormige gladde goot) naar de buitenkant verlaten. Het materiële punt P bevindt zich in het hoogste punt van de cirkel in labiel evenwicht. Men geeft P een kleine, (te verwaarlozen) beginsnelheid. Waar verlaat P de cirkel en waar treft P het horizontale vlak, dat zich op een afstand 10r onder het laagste punt van de cirkel bevindt?

Antwoord:

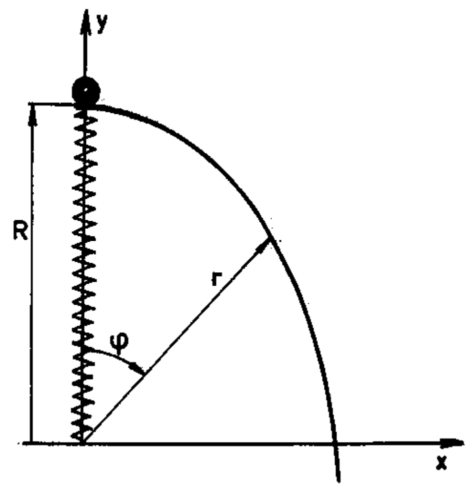
$$\varphi = \text{bg} \cos \frac{2}{3} \qquad x = \frac{37}{27} r\sqrt{5} \ .$$

15. Het materiële punt P van 14. bevindt zich in het hoogste punt van de cirkel. Men geeft aan P een zo grote beginsnelheid v_0 langs de raaklijn aan de cirkel, dat P onmiddellijk de cirkel verlaat. Hoe groot moet daartoe v_0 minstens zijn? Als v_0 de kleinste waarde heeft, waarvoor de cirkel direct wordt verlaten, waar en op welk tijdstip treft P dan het horizontale vlak door het middelpunt O van de cirkel?

Antwoord:

$$v_0 \geq \sqrt{gr} \qquad x = r\sqrt{2} \ .$$

16.



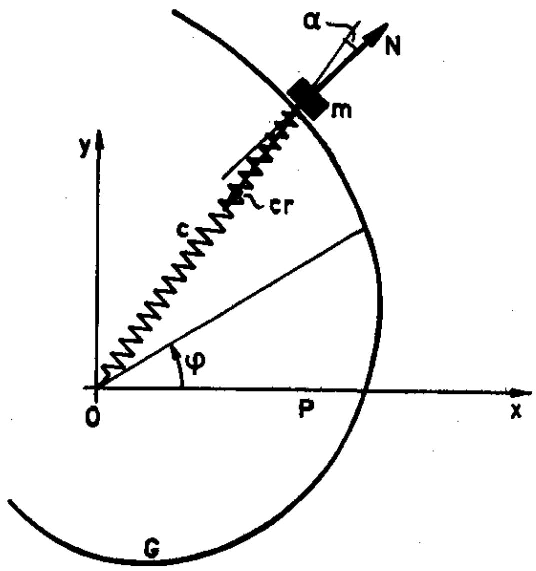
Een puntmassa kan zonder wrijving bewegen langs de buitenzijde van een vaste vlakke gekromde rail in het horizontale Oxy-vlak. De buitenzijde van de rail

is gegeven door de vergelijking $r = Re^{-\varphi}$, waarbij r de lengte is van de plaatsvector van een punt aan de buitenzijde van de rail gemeten vanuit O en φ de hoek tussen de positieve y-richting en de plaatsvector. De puntmassa is door middel van een lineaire massaloze veer verbonden met de oorsprong O. De veerconstante is c en de lengte van de ongespannen veer nul. De massa wordt op een bepaald tijdstip zonder beginsnelheid losgelaten in het punt (O,R).
Bepaal de hoek φ waarop het massapunt loskomt van de rail.
Hint: Vrijmaken plus T + U = constant.

Antwoord:

$\varphi = \frac{1}{2} \log 2$.

17.



Een puntmassa (massa m) kan zonder wrijving glijden langs de buitenkant van een goot G. Deze goot heeft de vorm van een vlakke spiraal waarvan de vergelijking ten opzichte van het polaire assenkruis r, φ (met een gegeven punt O als oorsprong en een gegeven lijn OP als poolas) luidt $r = \mu\varphi$, waarin μ een positieve constante voorstelt. Het massapunt is met O verbonden door een massaloze veer (stijfheid c, ongespannen veerlengte $\ell_0 = 0$). De zwaartekracht wordt niet in rekening gebracht. Op een bepaald tijdstip bevindt het punt zich in $\varphi = 1$ zonder snelheid.
Bewijs dat het punt gedurende de volgende beweging losraakt van de goot in het punt

$$\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)} \text{ .}$$

18. De gladde buis AB heeft de vorm van een cirkelboog (straal r); deze ligt in een verticaal vlak. De middelpuntshoek is 300°. De middellijn door A is horizontaal, terwijl B hoger ligt dan A. Men laat een materieel punt P met een beginsnelheid 0 los in een punt, dat op een hoogte h verticaal boven A ligt. Daardoor valt P in de buis en doorloopt deze geheel. In B verlaat P weer de buis; daarbij komt P juist in A, waardoor P weer in de buis terecht komt. Hoe groot moet h daartoe zijn?

Antwoord:

$h = \frac{7}{12} r\sqrt{3}$.

19. a) Een aan de zwaartekracht onderworpen materieel punt P kan zich bewegen langs de in een verticaal vlak gelegen kromme ABC. Het deel AB der kromme is een cirkelboog (straal r, middelpunt M); B is het laagste punt van de cirkel en hoek AMB = 60°. Het deel BC der kromme is een paraboolboog; B is de top van de parabool en de as van de parabool valt langs de rechte MB. Het punt C ligt $\frac{1}{2}r$ onder het horizontale vlak door B en r rechts van de verticaal door B, terwijl A links van die verticaal ligt. In A wordt P met een beginsnelheid losgelaten. Bepaal de beweging langs de paraboolboog in horizontale richting (dus de beweging van de projectie van P op het horizontale vlak door B). Bepaal de duur van de parabolische beweging. Schrijf de duur van de cirkelbeweging als bepaalde integraal.

b) Bepaal de druk in de verschillende punten van de parabool door deze kromme op P uitgeoefend.

Antwoord:

a) eenparige beweging; duur parabolische beweging $t = \sqrt{\frac{r}{g}}$;

duur cirkelbeweging $t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\pi/3} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi - 1}}$;

b) nul.

20. Twee massa's m_1 en m_2, verbonden door een massaloos en niet-rekbaar koord ter lengte b, worden met de hand rondgedraaid en plotseling losgelaten, zodanig dat op het moment van loslaten de massa m_1 in rust is en de massa m_2 een snelheid v_0 heeft. De zwaartekrachtsversnelling is gelijk aan g. Gevraagd wordt de trekkracht in het koord na het loslaten.

Antwoord:

$$S = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{(m_1 + m_2) b} \quad .$$

21. Een één-massa-veersysteem voorzien van een vloeistofdemper, trilt met een periode $T = \frac{1}{2}$ sec. In 10 volledige cycli neemt de verplaatsingsamplitude af van $x_1 = 2$ cm tot $x_{11} = 1$ cm. Gevraagd wordt de dempingscoëfficiënt k, indien nog gegeven is dat de massa gelijk is aan $\frac{2}{g}$ kg $\sec^2 \mathrm{cm}^{-1}$.

Antwoord:

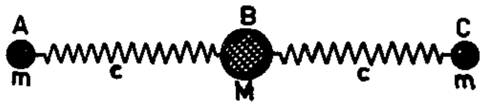
$$k = 0{,}565 \times 10^{-3} \text{ kg sec cm}^{-1} \quad .$$

22. Hoever daalt de resonantiefrequentie van een gedempt één-massa-veersysteem met dempingscoëfficiënt $k = \frac{1}{2} k_{kritisch}$ in verhouding tot de resonantiefrequentie f_0 van het ongedempte systeem?

Antwoord:

$$f = 0{,}866\, f_0 \quad .$$

23.



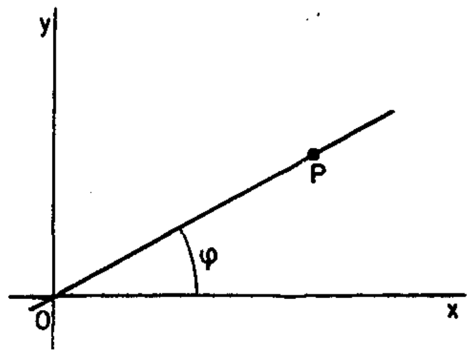
Drie puntmassa's onderling verbonden door lineaire veren zoals in de figuur is aangegeven, kunnen zonder wrijving langs een horizontale lijn bewegen. De massa's A en C zijn elk m, de massa van B is M. De veerconstanten zijn elk gelijk aan c.

Bereken de eigenfrequenties van dit systeem.

Antwoord:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad , \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{2c}{M}} \, , \quad \lambda_3 = 0 \quad .$$

24.



Gegeven is een rechthoekig in rust zijnd assenkruis $(0,x,y)$ en een rechte ℓ waarlangs een massapunt P met massa m zonder wrijving kan glijden. De rechte ℓ wentelt in het vlak van de hoek φ, die ℓ insluit met de positieve x-as, wordt gegeven door

$\varphi = 2(\arctan e^t) - \frac{\pi}{2}$. Verder werkt op P de kracht $\vec{K} = -mx\vec{e}_x$, waarbij $\vec{e}_x$ de eenheidsvector in de richting van de positieve x-as is. De zwaartekracht wordt buiten beschouwing gelaten. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt P zich in O en op het tijdstip $t = 1$ bevindt P zich op een afstand a van O. Hoe groot is de afstand tussen P en O op het tijdstip $t = 2$?

Antwoord:

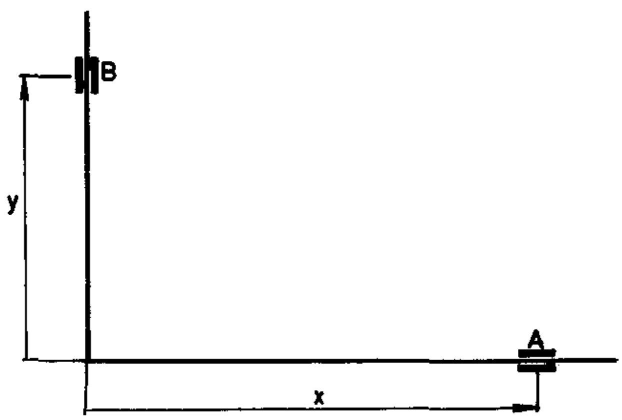
$r(t = 2) = 2a$.

25. Een puntmassa P (massa m) kan zonder wrijving bewegen in een horizontaal vlak dat drie vaste punten A, B en C bevat ($AB = 2\ell$, $BC = \ell$, $AC = 3\ell$). Het punt P wordt aangetrokken door A en B met een kracht cPA respectievelijk cBP en afgestoten door C met een kracht cPC. Op zeker tijdstip bevindt P zich in C met een snelheid v_0 loodrecht op AC.
Hoever verwijdert P zich van de lijn AC en waar en wanneer passeert P voor de eerste maal weer de lijn AC of het verlengde daarvan?

Antwoord:

x-as langs ABC en y-as $\perp$ ABC: $y_{max} = \frac{v_0}{\omega}$, $x_0 = -5\ell$.

26.



Twee puntmassa's A en B kunnen zonder wrijving bewegen langs twee onderling loodrechte assen met snijpunt O.
Op de puntmassa's werken de volgende krachten:

Op A een kracht kx^2 van O af gericht en een kracht fr^2 in de richting van B;

Op B een kracht ky^2 van O af gericht en een kracht fr^2 in de richting van A.

Hierbij is x de afstand OA, y de afstand OB en r de afstand AB; terwijl f en k twee positieve constanten zijn.
Ga na of dit systeem een potentiaal bezit.

26. Antwoord:

De potentiaal is: $-\frac{1}{3}kx^3 - \frac{1}{3}ky^3 + \frac{1}{3}fr^3$.

27. a) Een rechte AB wordt met een constante hoeksnelheid ω rondgedraaid om een loodrecht op AB staande horizontale as door A. Een aan de zwaartekracht onderworpen materieel punt P is langs AB verschuifbaar. Op het tijdstip $t=0$ bevindt P zich verticaal boven A op een afstand a met een zodanige relatieve beginsnelheid, dat P zich niet onbepaald ver van A verwijdert. Bepaal die beginsnelheid en bewijs, dat de baan van P asymptotisch tot een door A gaande cirkel nadert.

b) Druk de druk N, die de rechte AB op P uitoefent, uit in t.
Hint: Gebruik relatieve beweging.

Antwoord:

a) $r = \frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t + (a - \frac{g}{2\omega^2})e^{-\omega t}$.

b) $N = 2\,mg\sin\omega t + m(2\omega^2 a - g)e^{-\omega t}$ positief in de zin der rotatie.

28. a) De rechte AB wordt om een as door A loodrecht op AB met een constante hoeksnelheid ω rondgedraaid. Een materieel punt P is langs AB verschuifbaar en bevindt zich op het tijdstip $t=0$ op een afstand 3a $(a>0)$ van A met een relatieve snelheid 0. Op welk tijdstip komt P in B, als $AB = 5a$ is, en welke snelheid heeft P dan?

b) P ondervindt een wrijving fN, waarin N de normale druk is, die de rechte AB op P uitoefent. Druk $r = AP$ uit in de tijd t.

Antwoord:

a) $t = \frac{\ln 3}{\omega}$; $v = 4\omega a$.

b) $$r = \frac{3}{2}a\left(1 + \frac{f}{\sqrt{f^2+1}}\right)e^{\omega t(\sqrt{f^2+1}-f)} + \frac{3}{2}a\left(1 - \frac{f}{\sqrt{f^2+1}}\right)e^{-\omega t(\sqrt{f^2+1}+f)} .$$

2. a) Een cirkel met straal r (middelpunt M) wordt met een constante hoeksnelheid ω rondgedraaid om een as, die in een punt A van de cirkel loodrecht op het vlak van de cirkel staat. Een materieel punt P is langs de cirkel verschuifbaar. Onderzoek de kinetische evenwichtspunten.

b) Het materiële punt P wordt in het diametraal tegenover A gelegen punt B met een resulterende snelheid 0 losgelaten. Op welk tijdstip en met welke snelheid wordt A bereikt? Op welk tijdstip en met welke resulterende snelheid passeert P de middellijn van de cirkel, die loodrecht op AB staat?

c) Druk de kracht N, door de cirkel op P uitgeoefend, uit in de daar gebruikte hoek φ. Ga na waar N maximaal is.

Antwoord:

a) A: labiel, B: stabiel (B diametraal t.o.v. A); periode kleine trillingen om B: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

b) In A: $v_{sl} = v_{rel} = 0 \quad t \to \infty$, halverwege: $v_{sl} = v_{rel} = \omega r\sqrt{2}$.

c) $N = \frac{2}{3} m\omega^2 r\{(3 \cos \frac{1}{2}\varphi - 1)^2 - 1\}$, $|N|$ = maximaal voor $\varphi = 0$, dus bij begin beweging.

30. Een materieel punt is beweegbaar langs een kromme (die geen vlakke kromme behoeft te zijn), die met constante hoeksnelheid om een as draait. Bij het begin der beweging is de relatieve snelheid in grootte gelijk aan de sleepsnelheid. Bewijs, dat dit zo blijft.
Hint: Oplossen op de volgende manieren:
   1. Vrijmaken.
   2. $T + U = c$ in stilgezette stelsel.
   3. Lagrange.

31. Een massa m valt zonder beginsnelheid over een zekere afstand op de aarde op een breedtegraad λ. De lucht oefent op deze massa tijdens de val een tegenwerkende kracht uit die evenredig is met de snelheid (evenredigheidsconstante k). De valtijd is t_0. Toon aan dat de afstand tussen het punt waar de massa de grond raakt en het punt waar de massa zou vallen indien de aarde niet zou roteren, gelijk is aan

$$\frac{g\omega \cos \lambda}{3} t_0^3 (1 - \frac{k}{4m} t_0) .$$

Verwaarloos in deze opgave de translatieversnelling van de aarde en de termen met k^2.

32. De straal r van een zeepbel is een functie van de tijd: $r = \alpha t + r_0$, waarin α en r_0 constanten zijn. Een massapunt met een massa gelijk aan de eenheid kan bewegen in het vlak van de bel. Op het tijdstip $t = 0$ is de tangentiële snel-

heid gelijk aan v. Gevraagd wordt de verdere beweging en de reactiekracht van het oppervlak.

Antwoord:

$$\theta = \frac{v}{\alpha}\,(1 - \frac{r_0}{r})\ ; \qquad R = -\,\frac{v^2 r_0^2}{r^3}\ .$$

33. Twee homogene staven AC en BC, beide lang 2ℓ en met massa m, zijn in C zonder wrijving scharnierend verbonden. De punten A en B zijn langs een horizontale rechte ℓ verschuifbaar met een wrijvingscoëfficiënt f. De staven zijn onderworpen aan de zwaartekracht (versnelling g). Op het tijdstip $t = 0$ bevindt C zich in het verticale vlak door ℓ en boven ℓ; hoek CAB is gelijk α, terwijl de snelheden nul zijn. Aan welke voorwaarde moet f voldoen, opdat beweging zal ontstaan? Als aan deze voorwaarde voldaan is, hoe groot is dan de beginversnelling van A? Als $f = 0$ is, schrijf dan het tijdstip, waarop AC horizontaal is, als bepaalde integraal.
Hint: Denk aan symmetrie om C, en bekijk één vrijgemaakte staaf. Pas toe $K = ma$ (in twee richtingen) en $M = \dot{D}$.

Antwoord:

$$f < \tfrac{1}{2}\cot\alpha\ ; \quad -\,g\,\frac{6f\,\sin^2\alpha - 3\,\sin\alpha\,\cos\alpha}{2 - 3f\,\sin\alpha\,\cos\alpha}\ , \qquad \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\alpha - \sin\varphi}}\ .$$

34. Een homogene rechte staaf AB (massa m, lengte 2ℓ) kan met het ene uiteinde A glijden langs een vaste verticale rechte k. De glijdende beweging van A langs k gaat gepaard met wrijving (wrijvingscoëfficiënt f). De staaf kan bovendien zonder wrijving om A draaien en is onderworpen aan de zwaartekracht (versnelling g). Hij wordt zonder snelheid losgelaten in een stand waarbij het uiteinde B hoger ligt dan A en de hoek tussen AB en k gelijk is aan 60°. Nodig en voldoende, opdat A onmiddellijk na het loslaten niet langs k gaat glijden, is, dat f voldoet aan een ongelijkheid van de vorm $f > c$. Bepaal het getal c.

Antwoord:

$$c \geqslant \frac{7}{9}\sqrt{3}\ .$$

35. Van een homogene, vlakke plaat in de vorm van een rechthoekige, gelijkbenige driehoek is de massa m en de lengte van de schuine zijde 6ℓ. Bewijs, dat het traagheidsmoment t.o.v. het hoekpunt A van de rechte hoek gelijk is aan $6m\ell^2$.

Dit lichaam wordt in verticale stand zonder beginsnelheid met het hoekpunt A op een ruw horizontaal vlak geplaatst, zodanig, dat de schuine zijde een voor het verdere te verwaarlozen hoek met de horizon maakt en overgelaten aan de werking van de zwaartekracht (versnelling g). Bij de beweging, die nu ontstaat, gaat de plaat uitglijden juist voordat een van de rechthoekszijden horizontaal is. Bereken de wrijvingscoëfficiënt tussen de plaat en het vlak.

Antwoord:

$$f = \frac{2-\sqrt{2}}{4} .$$

36. a) Bewijs, dat de afstand van het zwaartepunt van een massieve, homogene halve bol (straal R) tot het platte grensvlak $\frac{3}{8}$ R bedraagt.

b) Bewijs, dat het traagheidsmoment van een massieve, homogene bol (straal R, massa m) ten opzichte van een middellijn $\frac{2}{5}mR^2$ bedraagt.

c) Men plaatst een massieve, homogene platte bol (straal R) op een volkomen ruw horizontaal vlak, zo, dat het platte grensvlak verticaal staat en laat hem daarna zonder beginsnelheid los (versnelling van de zwaartekracht g). Bepaal de hoekversnelling van het lichaam onmiddellijk na het loslaten.

d) Bepaal ook de hoeksnelheid van het onder c) genoemde lichaam op het ogenblik, dat het door de evenwichtsstand gaat.

Antwoord:

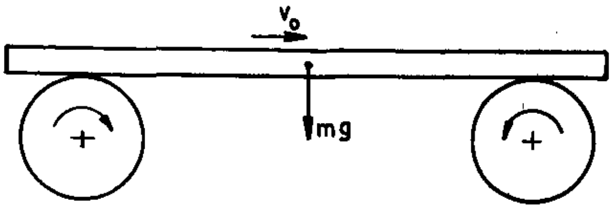
c) $\frac{15g}{56R}$; d) $\sqrt{\frac{15g}{13R}}$.

37. Een horizontaal vlak wordt gedwongen een translatie uit te voeren, waarbij alle punten van het vlak cirkelbanen in verticale vlakken eenparig doorlopen. Het vlak blijft daarbij dus horizontaal. De straal van de cirkels is R, de hoeksnelheid ω. Op het vlak ligt een stoffelijk punt (massa m), dat op het tijdstip $t = 0$, waarop het vlak door zijn laagste stand gaat, ten opzichte van het vlak in rust is. De wrijvingscoëfficiënt tussen het punt en het vlak is $\mathrm{tg}\alpha$; de versnelling van de zwaartekracht is g.
Wat is de waarde, die men aan ω mag geven, opdat het punt ten opzichte van het vlak nog juist in rust blijft?

Antwoord:

$$\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{R}} .$$

38.



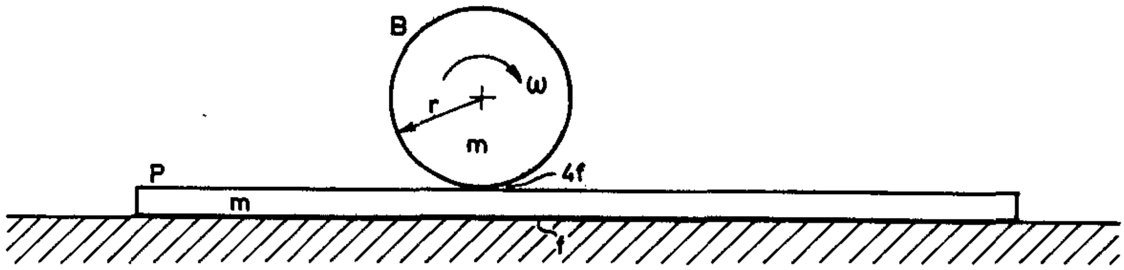
Een balk met massa m ligt horizontaal op twee identieke cirkelvormige schijven die met gelijke hoeksnelheid doch in tegengestelde zin ronddraaien in een verticaal vlak door de balk. De wrijvingscoëfficiënt tussen de schijven en de balk is gelijk aan f en de zwaartekrachtversnelling is g. Neem aan dat ten tijde $t = 0$ het zwaartepunt Z van de balk zich midden tussen de rollen bevindt en dat de balk op dit moment een snelheid v_0 heeft. Ga de beweging van de balk na.

Hint: Bepaal de normaalkrachten als functie van de plaats van Z.

Antwoord:

$$x = v_0\sqrt{\frac{\ell}{fg}}\sin\sqrt{\frac{fg}{\ell}}\,t \quad .$$

39.



Op een horizontale tafel ligt een dunne plaat P met massa m en constante dikte. De wrijvingscoëfficiënt tussen de plaat en de tafel is gelijk aan f. Op de in rust zijnde plaat wordt een, om de horizontaal door zijn middelpunt met de hoeksnelheid ω draaiende homogene bol B (massa m en straal r) geplaatst.

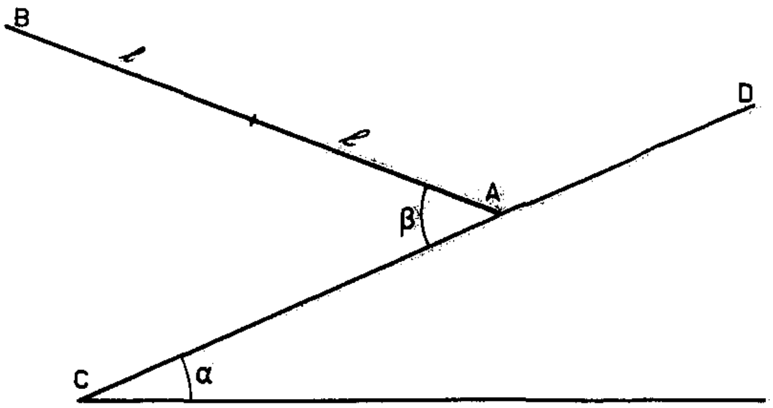
Hierna beweegt het systeem verder onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g). De wrijvingscoëfficiënt tussen bol en plaat is gelijk aan 4f. Welke afstand over de plaat legt de bol al slippende af en over welke afstand verschuift de plaat gedurende deze tijd, indien mag worden aangenomen dat de plaat zo groot is dat de bol niet voortijdig van de plaat af slipt.

Antwoord:

Afstand van bol over de plaat: $\dfrac{\omega^2 r^2}{128fg}$.

Afstand waarover de plaat verschuift: $\dfrac{3\omega^2 r^2}{256fg}$.

40.



Een starre homogene rechte staaf AB (lengte 2ℓ, massa m) kan bewegen in een vast verticaal vlak zodanig dat het uiteinde A glijdt langs een in dit vlak liggende vaste rechte CD.
Zoals hierboven is geschetst maakt CD met de horizontaal een hoek α en met de staaf AB een hoek β. De wrijvingscoëfficiënt in A bedraagt f en de zwaartekrachtversnelling is g.
Gegeven is dat het punt A met een zodanige snelheid langs CD in de richting van C wordt bewogen dat de hoek β constant blijft.

a) Bereken de kracht die hiertoe in het punt A langs CD op de staaf moet worden uitgeoefend.

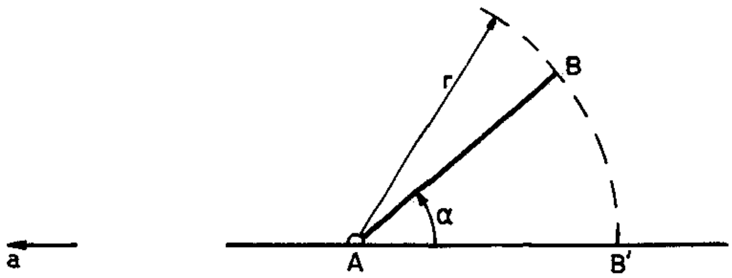
b) Voor welke waarden van β is de versnelling van A gelijk aan nul?

c) Onderzoek de stabiliteit voor kleine trillingen.

Antwoord:

a) $K = mg\cos\alpha(\mathrm{cotg}\,\beta + f)$; b) $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$; c) Stabiel: $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} < 0$.

41.



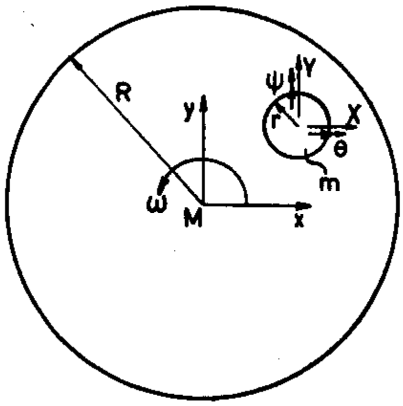
In bovenstaande schets stelt AB een treindeur voor die is bevestigd aan de wagon door middel van scharnieren bij A (lengte AB = r). De deur mag worden opgevat als een homogene rechthoekige plaat die zonder wrijving draaibaar is om een aan de wagon bevestigde verticale as die samenvalt met één van de zijden van de rechthoek.
Indien bij stilstaande trein de deur met een hoeksnelheid ω wordt dichtgeworpen dan valt de deur in stand AB' in het slot indien $\omega \geq \omega_0$. Indien de

trein zich in beweging zet terwijl de deur openstaat onder een hoek $\alpha = 60°$ en de versnelling a van de trein is constant, hoe groot moet a dan zijn opdat de deur alsnog in het slot valt?

Antwoord:

$a \geq \frac{2}{3} \omega_0^2 r$.

42.

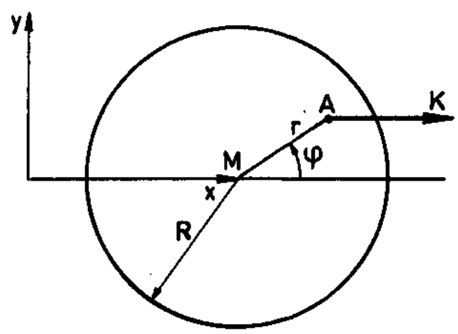


Een horizontale schijf, straal R, draait met de constante hoeksnelheid ω om een in de ruimte vaste verticale as door het middelpunt. Over het vlak van de schijf rolt een homogene bol, massa m, straal r. Gevraagd wordt de bewegingsvergelijkingen van de bol op te stellen.

Antwoord:

$\ddot{x} + \frac{4\omega^2}{49} x = A$; $\ddot{y} + \frac{4\omega^2}{49} y = B$; A en B volgen uit de beginvoorwaarden.

43.



Een homogene cirkelvormige schijf (middelpunt M, straal R en massa m) kan bewegen in een volkomen glad, horizontaal vlak. Op de schijf werkt een constante kracht K (constant in grootte en richting), welke aangrijpt in het punt A van de schijf, gelegen op een afstand r van M. ($r < R$).
Op het tijdstip $t = 0$ bevindt de schijf zich in rust, waarbij de lijn MA een hoek φ_0 maakt met de lijn door M evenwijdig met K.
Gevraagd wordt:

) de beweging van de schijf.

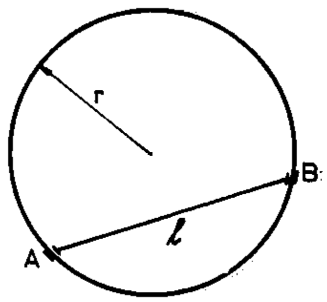
b) Behandel het speciale geval $\varphi_0 \ll 1$.

Antwoord:

a) $x = \frac{K}{2m} t^2$; $y = 0$; $\frac{1}{4} mR^2 \dot{\varphi}^2 = Kr(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$;

b) $\ddot{\varphi} + \frac{2Kr}{mR^2}\varphi = 0$.

44. De beide uiteinden A en B van een balk ter lengte ℓ kunnen zonder wrijving glijden over een horizontale cirkel met straal r. Een hond zit in punt A en rent op een gegeven moment met een constante snelheid over de balk naar B, waar een bakje met voer staat. Ga na in welk punt van de cirkel het uiteinde B zich bevindt als de hond in B aankomt en bewijs dat de hond in zijn uitgangspunt terugkeert indien de massa van de balk verwaarloosbaar klein is.



Hint: Behoud van impulsmoment.

Antwoord:

De balk draait over een hoek

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{4r^2 - \ell^2}{4i^2 + 4r^2 - \ell^2}}\ \text{bg sin}\ \frac{\ell}{2\sqrt{i^2 + r^2}} ,$$

waarin $i^2 = \frac{I}{m}$,

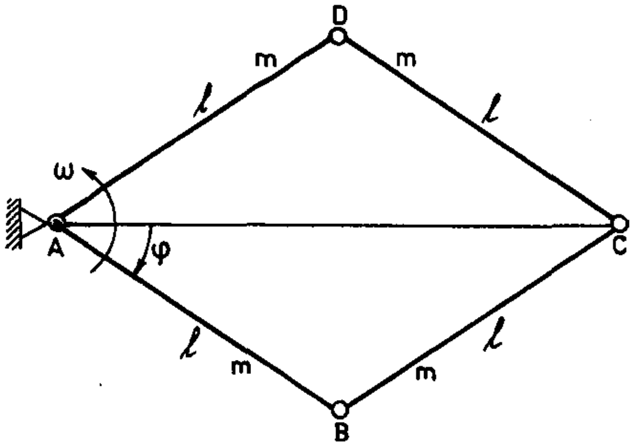
I = massatraagheidsmoment van de balk t.o.v. het middelpunt van de cirkel.
m = massa van de hond.
Voor I = 0 is $\varphi = 2\text{bg sin}\ \frac{\ell}{2r}$, dus B komt in A terecht.

45. Een horizontale, homogene cirkelvormige schijf (straal R, massa m) is zonder wrijving draaibaar om een verticale as door het middelpunt. De schijf is aanvankelijk in rust. Aan de rand staat een persoon A (massa m). Deze gaat zich langs de omtrek van de schijf met constante snelheid v bewegen. In welke richting en over welke hoek is de schijf gedraaid als A de omtrek van de schijf heeft doorlopen?

Antwoord:

240° .

46.



Vier homogene staven, elk met massa m, lengte ℓ en onderling verbonden door wrijvingsloze scharnieren vormen tesamen de ruit ABCD (hoek CAB = α). De punten A en C zijn verbonden door een massaloos onrekbaar koord.
De ruit draait in zijn vlak met een hoeksnelheid Ω om een vaste as door A. Op een bepaald ogenblik wordt het koord tussen de punten A en C doorgeknipt. Er is geen zwaartekracht.

a) Gevraagd wordt te bepalen de hoeksnelheden van de staven AB en BC na het doorknippen van het koord als functie van de hoek CAB.

b) Bepaal bovendien de tijd τ, in integraalvorm, die verloopt tot het moment waarop de punten B en D samenvallen.

c) Hoe groot zijn op dat ogenblik de hoeksnelheden van AB en BC ?
Hint: D om A en T zijn constant.

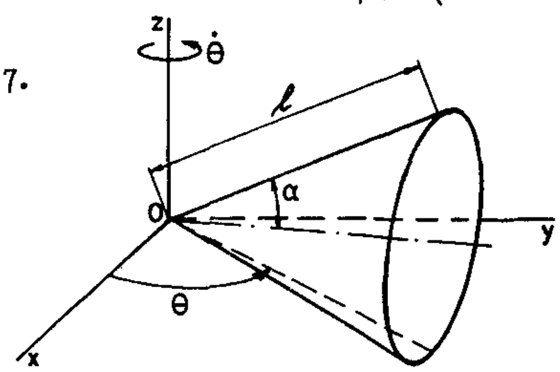
Antwoord:

a) $\omega = \dfrac{\Omega(1+3\cos^2\alpha)}{1+3\cos^2\varphi}$, $\quad \dot{\varphi}^2 = \dfrac{3\Omega^2(1+3\cos^2\alpha)(\cos^2\varphi-\cos^2\alpha)}{(1+3\sin^2\varphi)(1+3\cos^2\varphi)}$.

b) $\tau = \displaystyle\int_{\varphi=0}^{\alpha} \sqrt{\frac{(4+9\sin^2\varphi\cos^2\varphi)}{3\Omega^2(1+3\cos^2\alpha)(\cos^2\varphi-\cos^2\alpha)}}\, d\varphi$.

c) Staaf AB : $\omega - \dot{\phi}$ (voor $\varphi = 0$) ($\dot{\phi} < 0$)
BC : $\omega + \dot{\phi}$ (")
CD : $\omega - \dot{\phi}$ (")
DA : $\omega + \dot{\phi}$ (")

47.

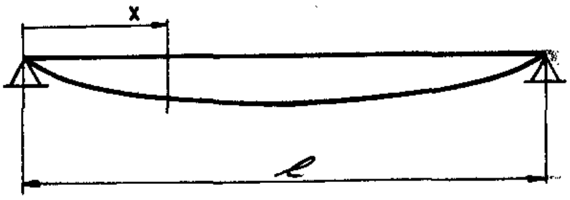


Een homogene rechte cirkelkegel met massa m, beschrijvende ℓ en halve tophoek α, rolt zonder te slippen over een vlak. Indien de hoeksnelheid om de z-as, die in de top O loodrecht op dit vlak staat, gelijk is $\dot\theta$, hoe groot is dan de kinetische energie van T van dit systeem?

Antwoord:

$$T = \frac{3}{20}\, m\ell^2 \cos^2\alpha\,(3\cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha)\dot\theta^2 \quad .$$

48.

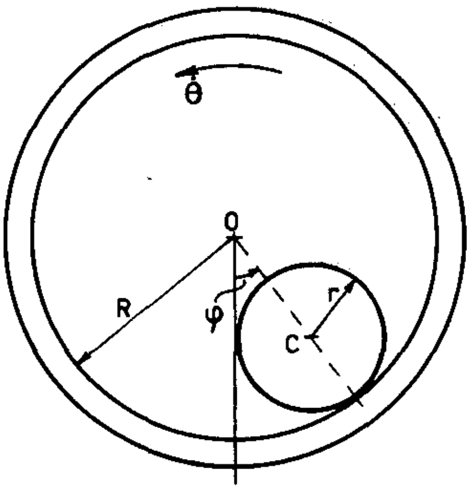


Bereken de kinetische energie van een trillende balk, die hiernaast is geschetst, indien de snelheid in een doorsnede gelegen op afstand x van een uiteinde gelijk is aan $v_0 \sin \frac{\pi x}{\ell}$ en de massa van de balk gelijk is aan $\mu\ell$.

Antwoord:

$$T = \frac{\mu\ell}{4} v_0^2 \quad .$$

49.

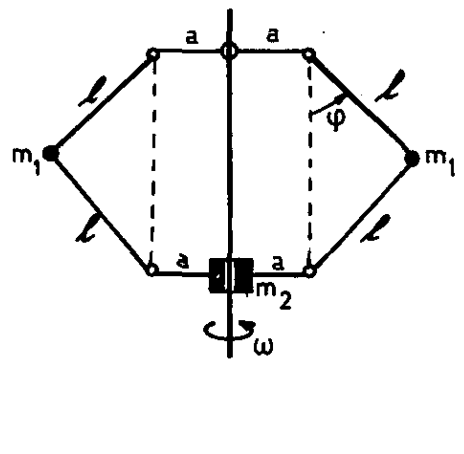


Een ring met massa M en straal R draait met een hoeksnelheid $\dot\theta$ om een as door zijn middelpunt O loodrecht op zijn vlak. Aan de binnenkant van de ring rolt een cirkelvormig schijfje met massa m en straal r. De assen van het schijfje en de cylinder zijn evenwijdig aan elkaar en de plaats van het schijfje langs de binnenomtrek van de ring wordt bepaald door hoek φ, zoals is geschetst. Geef een uitdrukking voor de kinetische energie T voor het geval dat er geen slip optreedt.

Antwoord:

$$T = \tfrac{1}{2}(M + \tfrac{1}{2}m)R^2\dot\theta^2 + \tfrac{3}{4}m(R-r)^2\dot\varphi^2 - \tfrac{1}{2}mR(R-r)\dot\varphi\dot\theta \quad .$$

50.

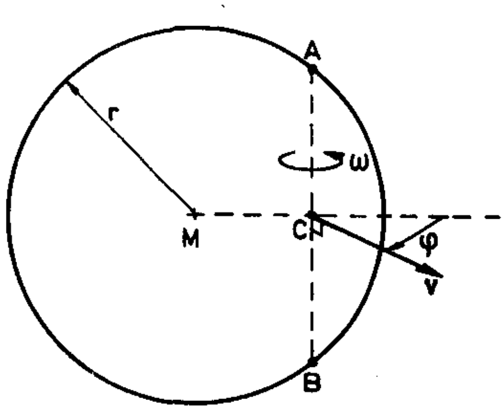


De hiernaast geschetste regulateur bezit twee ronddraaiende massa's m_1 en een schuifmassa m_2. Het geheel draait om een verticale as met hoeksnelheid ω. Het massatraagheidsmoment van de T-vormige as bedraagt I en de massa's van de scharnierende armen ter lengte ℓ kunnen worden verwaarloosd. Gevraagd wordt een uitdrukking voor de kinetische energie T van het systeem. m_1 en m_2 zijn puntmassa's (geen traagheidsmomenten).

Antwoord:

$$T = \tfrac{1}{2} I\omega^2 + m_1[(a + \ell \sin \varphi)^2\omega^2 + \ell^2\dot{\varphi}^2] + \tfrac{1}{2}m_2(4\ell^2 \sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 .$$

51.

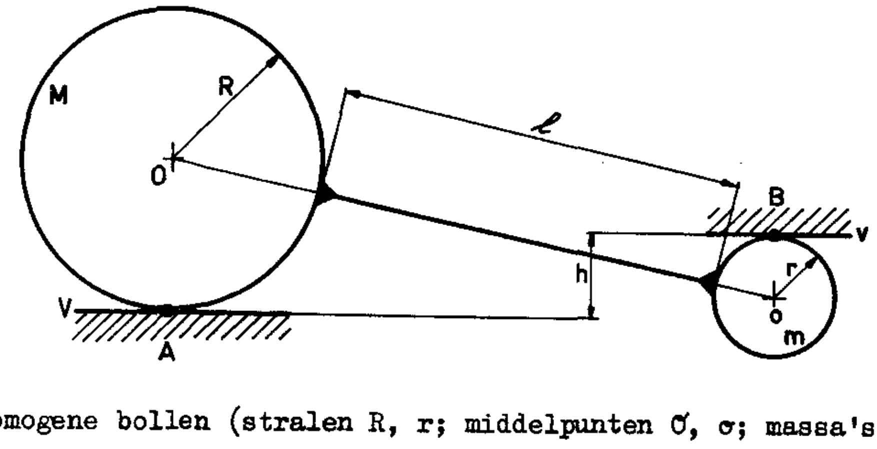


Van een homogene massieve bol (straal r, middelpunt M, massa m) worden twee willekeurige punten van het buitenoppervlak aangeduid met A en B. Het midden van AB is punt C.
Gegeven is dat de bol met een hoeksnelheid ω draait om de lijn AB en dat de punten A en B beide een snelheid v hebben die loodrecht staat op AB en een hoek φ maakt met MC.
Hoe groot is de kinetische energie van de bol?

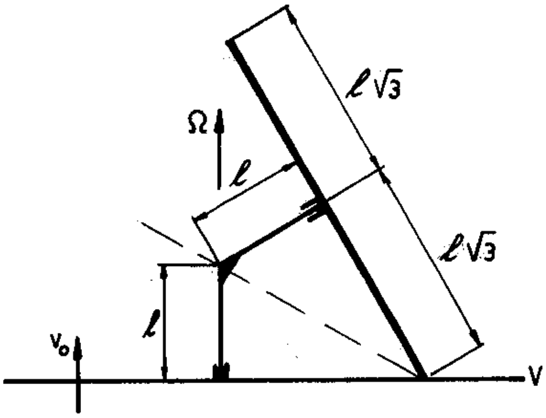
Antwoord:

$$T = \tfrac{1}{2} m[v^2 + \omega^2\ell^2 + 2v\omega\ell \sin \varphi + \frac{1}{5} r^2\omega^2] .$$

52.



Twee homogene bollen (stralen R, r; middelpunten O, o; massa's M, m) zijn star met elkaar verbonden door een massaloze staaf (lengte ℓ).
Een bol rolt over de bovenkant van een vlak V en de andere over de onderkant van een met V evenwijdig vlak v. De afstand tussen V en v bedraagt h.
Gevraagd wordt de impuls $\underline{p}$, het impulsmoment $\underline{D}$ ten opzichte van het zwaartepunt en de kinetische energie T uit te drukken in de hoeksnelheid $\underline{\omega}$.
Hint: Resulterende $\vec{Q}$ valt langs AB.

53. 

Een homogene cirkelvormige schijf, massa m, straal $\ell\sqrt{3}$, rolt over het horizontale vlak V. De schijf is draaibaar om een staaf, lengte ℓ, door het middelpunt en loodrecht op het vlak van de schijf. Aan de staaf is een tweede even lange staaf gelast. Deze tweede staaf draait met constante hoeksnelheid Ω om zijn lengteas, welke loodrecht staat op het vlak V. Het vlak V heeft een snelheid v_0 in verticale richting.
Gevraagd wordt een algemene uitdrukking voor de kinetische energie van een star lichaam af te leiden en met deze uitdrukking de kinetische energie van de schijf te berekenen.

Antwoord:

$$T = \frac{27}{32} m\Omega^2 \ell^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

54. In een rechthoekig coördinatenstelsel Oxyz beweegt een massapunt onder invloed van een krachtveld, waardoor op de plaats (x,y,z) een kracht met componenten K_x, K_y en K_z in x, y en z-richting wordt bepaald.

Bereken voor de gevallen

$$A \qquad \{K_x = 2x + y^2 \; , \; K_y = 3z + 2xy \; , \; K_z = 3y + 2z^2\}$$

$$\text{en } B \qquad \{K_x = 3y + 2z^2 \; , \; K_y = 2x + y^2 \; , \; K_z = 3z + 2xy\}$$

de arbeid welke in de krachtvelden wordt verricht indien de puntmassa van het punt (0,0,0) naar het punt (1,2,2) wordt gebracht langs de beide volgende wegen:

a: langs de x-as naar (1,0,0), evenwijdig aan de z-as naar (1,0,2), evenwijdig aan de y-as naar (1,2,2);

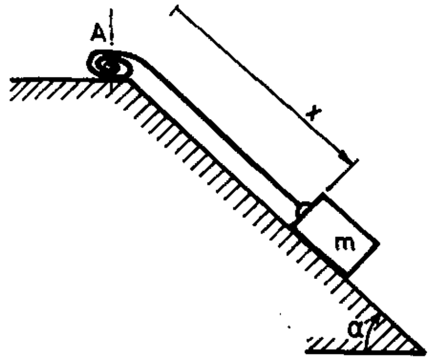
b: langs de z-as naar (0,0,2), evenwijdig aan de y-as naar (0,2,2), evenwijdig aan de x-as naar (1,2,2).

Zijn de krachtvelden in de gevallen A en B conservatief?
Motiveer uw antwoord.

Antwoord:

a) Ja. b) Neen.

55.



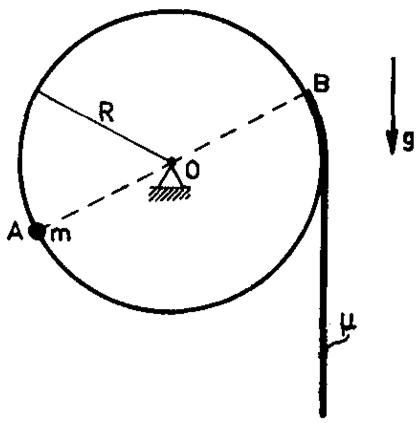
Een massa m beweegt mede onder invloed van de zwaartekracht, zonder wrijving over een hellend vlak met hoek α. De massa is bevestigd aan een ketting met massa μ per lengteëenheid die op een punt A van de bovenrand van het hellend vlak is opgehaspeld. De rotatie-energie verbonden aan het draaien van de haspel wordt verwaarloosd. De lengte van de gehele ketting bedraagt ℓ. Indien de massa zonder snelheid vanuit A begint te bewegen en indien $\mu\ell = m$ wat is dan de snelheid v indien de ketting geheel is afgerold?

Hint: $T + U \neq$ constant. Waarom?

Antwoord:

$$v = \sqrt{\frac{7}{6} g\ell \sin\alpha} \ .$$

56.



Een ronde homogene schijf, massa M, straal R, kan vrij draaien om een vaste, horizontale as door het middelpunt loodrecht op de schijf. Op de rand van de schijf, in het punt A, is een massapunt, massa m, bevestigd.

In het punt B van de schijf diametraal tegenover A is een onrekbare volkomen slappe homogene ketting, lengte $\frac{\pi}{2}R$, soortelijke massa per lengteëenheid μ, opgehangen.

Het systeem wordt vrijgelaten vanuit de stand waarop de lijn AOB horizontaal is en de hoeksnelheid van de schijf gelijk aan nul. De versnelling van de zwaartekracht is g.

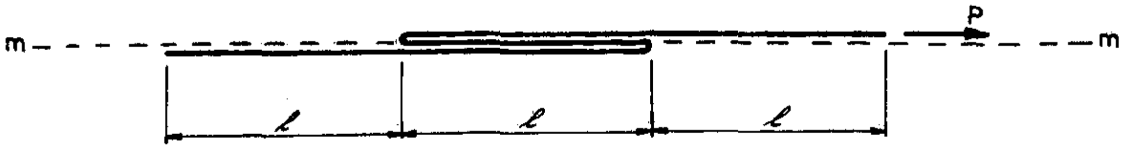
Gevraagd wordt de grootte van m te bepalen opdat na het vrijlaten, de ketting juist geheel op de schijf wordt gewikkeld.

Hint: $T + U =$ constant. Waarom?

Antwoord:

$$m = \left(\frac{\pi^2}{8} + 1\right)\mu R \ .$$

57.



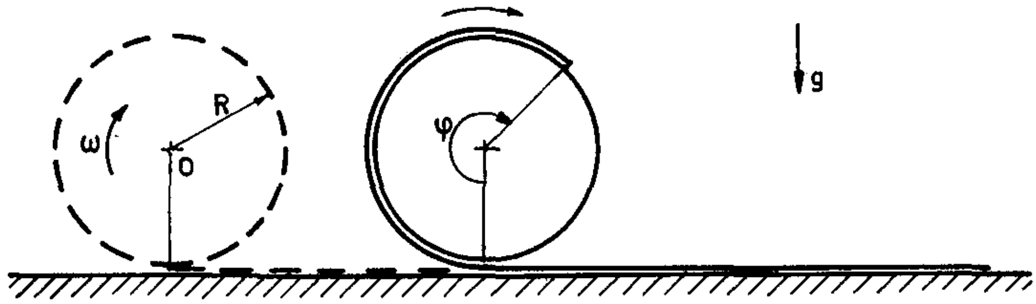
Op een volkomen glad horizontaal vlak kan een ketting (massa μ per lengte-eenheid, lengte 5ℓ) bewegen langs een vaste lijn mm. De ketting wordt zonder enige snelheid neergelegd in de hierboven geschetste configuratie en vervolgens laat men op het rechter uiteinde een constante kracht P werken in de richting mm. Bereken de snelheid van de ketting en het verloop van de normaalkracht over de ketting.
Hint: $T + U \neq$ constant. Waarom?

Antwoord:

$$0 \leqslant x < 2\ell \ : \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2P}{\mu}\left\{1 - \frac{1}{(1+\frac{x}{4\ell})^2}\right\}} \ ;$$

$$x > 2\ell \ : \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2P}{5\mu\ell}\,(x-\ell)}$$, waarbij x de verplaatsing van het rechteruitein

58.

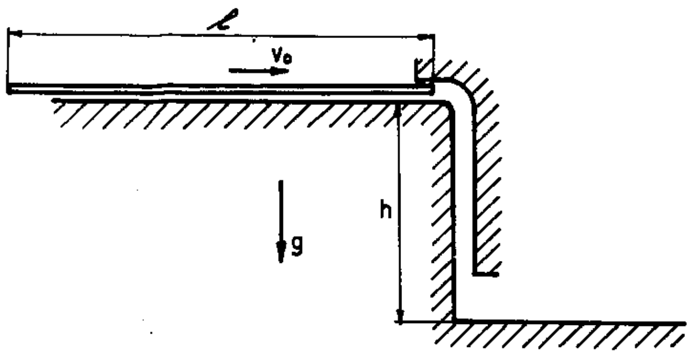


Een gestrekte homogene, oneindig lange ketting, massa ρ per lengteëenheid ligt op een ruw horizontaal vlak. Het uiteinde van de ketting is bevestigd aan een punt op de omtrek van een ruwe homogene verticale schijf, massa M, straal R, middelpunt O. Op een bepaald ogenblik krijgt de schijf een hoeksnelheid ω en rolt in de richting van de ketting. Tijdens het rollen wordt de ketting op de schijf gewikkeld, waarbij de verwaarlozing mag worden toegepast, dat O alleen in horizontale richting beweegt. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g. Gevraagd wordt de hoeksnelheid van de schijf als functie van de rolhoek φ te bepalen.
Hint: $T + U$ = constant. Waarom?

Antwoord:

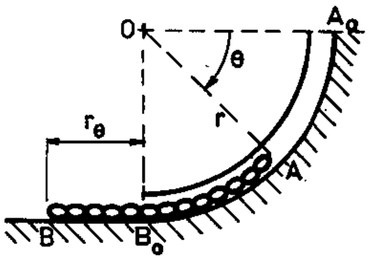
$$\dot{\varphi}^2[\tfrac{3}{4}\,mR^2 + \rho R^3(\varphi - \sin\varphi)] = \tfrac{3}{4} mR^2\omega^2 - \rho g R^2(\varphi - \sin\varphi) \ .$$

59.



Een homogene gestrekte ketting, massa m, lengte ℓ, glijdt aanvankelijk eenparig zonder wrijving langs zijn hartlijn over een horizontaal vlak.
Op een bepaald ogenblik valt de ketting over de rand van het vlak zuiver verticaal van een hoogte h naar beneden waarna hij een tweede horizontaal vlak treft.
Gegeven is voorts dat de valhoogte h kleiner is dan de lengte ℓ en dat de botsing op het tweede horizontale vlak volkomen onelastisch is.
Gevraagd wordt de beweging van de ketting onder invloed van de zwaartekracht in de verschillende stadia te beschrijven.

60.



Een gladde buis, gebogen in een kwart cirkelboog met een straal r, bevat een ketting met een lengte $\ell = \frac{\pi r}{2}$ en massa $\frac{m\pi r}{2}$. De buis staat vast in een verticaal vlak op een glad horizontaal vlak zoals hiernaast is geschetst. De ketting begint onder invloed van de zwaartekracht te bewegen zonder beginsnelheid.
Gevraagd wordt de snelheid v als functie van de hoek θ.

Antwoord:

$$v = 2\sqrt{\frac{gr}{\pi}(\theta + \cos\theta - 1)}\ .$$

61. Een vast lichaam bestaat uit een homogene cirkelvormige schijf (massa m, middelpunt M) van te verwaarlozen dikte, aan de omtrek waarvan een stoffelijk punt P (massa m) is bevestigd. Dit lichaam wordt zonder beginsnelheid op een ruw horizontaal vlak geplaatst, zodanig, dat het vlak van de schijf verticaal en MP horizontaal is en aan de werking van de zwaartekracht overgelaten. Hoe groot moet de wrijvingscoëfficiënt tussen schijf en vlak tenminste zijn, opdat de schijf aanvankelijk zuiver rolt?
Hint: $v = \omega r$ en $|W| \leq fN$.

Antwoord:

$f \geqslant \frac{1}{3}$.

62. a) Een homogeen wigvormig lichaam (massa M) heeft de vorm van een recht driezijdig prisma, waarvan het grondvlak ABC en het bovenvlak GHJ driehoeken zijn, die rechthoekig zijn in C, resp. J; de opstaande ribben van het prisma zijn AG, BH en CJ. Het lichaam wordt met het opstaande zijvlak BCJH op een horizontaal vlak (wrijvingscoëfficiënt f_1) geplaatst. Hierdoor ontstaat een verschuifbaar hellend vlak (hellingshoek γ, zodat hoek CBA = γ is). Op dit hellende vlak plaatst men een homogene bol (massa m), waarvan de straal r klein is ten opzichte van BC = a. De plaatsing geschiedt zodanig, dat het raakpunt met het hellend vlak gelegen is in het vlak door het zwaartepunt van de wig loodrecht op AG op een te verwaarlozen afstand van AG. In die stand worden wig en bol zonder beginsnelheden losgelaten. Tussen het hellend vlak ABHG en de bol is de wrijvingscoëfficiënt f. Men beschouwt de beweging tot het tijdstip, waarop de bol het horizontale vlak bereikt. Onder welke voorwaarde blijft de wig in rust en rolt de bol zuiver?

b) Geef de voorwaarde aan, waaronder de wig in rust blijft en de bol uitglijdt.

c) Neem $f_1 = 0$ (geen wrijving tussen horizontaal vlak en wig). Geef aan in welk geval de bol zuiver gaat rollen en de wig niet gaat kantelen.

d) Neem weer $f_1 = 0$. Geef aan in welk geval de bol gaat uitglijden en de wig niet gaat kantelen.

Antwoord:

a) $f \geqslant \frac{2}{7}\operatorname{tg}\gamma \quad , \quad f_1 \geqslant \dfrac{5m \sin\gamma \cos\gamma}{7M + 2m + 5m\cos^2\gamma} \quad , \quad M \geqslant \frac{15}{7} m \sin^2\gamma$.

b) $f < \frac{2}{7}\operatorname{tg}\gamma \quad , \quad f_1 \geqslant \dfrac{m(\sin\gamma - f\cos\gamma)\cos\gamma}{M + m\cos^2\gamma + fm\cos\gamma\sin\gamma}$,

$M \geqslant 3m(\sin\gamma - f\cos\gamma)\sin\gamma$.

c) $f \geqslant 2\,\dfrac{M+m}{7M+2m}\operatorname{tg}\gamma \quad , \quad M \geqslant \frac{1}{7} m(5\sin^2\gamma - 2)$.

d) $\dfrac{m\sin^2\gamma - M}{m\cos\gamma\sin\gamma} \leqslant f < 2\,\dfrac{M+m}{7M+2m}\operatorname{tg}\gamma \quad , \quad M > \frac{1}{7} m(5\sin^2\gamma - 2)$.

63. Een homogene bol wordt zonder rotatie langs een hellend vlak omhoog geworpen. De hellingshoek van dit vlak is α en de wrijvingscoëfficiënt tussen bol en vlak is μ. Toon aan dat de tijd gedurende welke de bol omhoog beweegt gelijk is aan de overeenkomstige tijd bij $\mu = 0$ en dat de tijd gedurende welke de bol slipt zich verhoudt tot de tijd waarin de bol rolt als $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{7\mu}$.

64. Een holle bol met een constante vlaktedichtheid heeft een massa m en een straal r. Een materieel punt A (massa m) is aan de binnenkant tegen de wand van de bol bevestigd. Men plaatst de bol zodanig zonder beginsnelheid op een glad hellend vlak (hellingshoek α), dat A zich verticaal onder het middelpunt M van de bol bevindt. Onderzoek de beweging van die bol. Bepaal de grootste absolute waarde der hoeksnelheid van die bol.

Antwoord:

Indien φ de hoek voorstelt tussen de lijn MA en de loodlijn uit M op het hellend vlak en x de verplaatsing van de projectie Q van het midden van M en A, dan geldt

$$r(7+3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 = 12g(\cos\varphi - \cos\alpha)\cos\alpha .$$

Hieruit volgt

$$-\alpha \leqslant \varphi \leqslant +\alpha \quad \text{en} \quad (\dot{\varphi}^2)_{max} = \frac{12g(1-\cos\alpha)\cos\alpha}{7r} .$$

65. Langs een homogene hoepel (middelpunt M, straal r, massa 3m, geen dikte) is een materieel punt (massa 2m) verschuifbaar (wrijvingscoëfficiënt f). De hoepel wordt op een hellend vlak (wrijvingscoëfficiënt f_1, hellingshoek bg sin 4/5) geplaatst. Het geheel is onderworpen aan de zwaartekracht (versnelling g). Op het tijdstip $t = 0$ zijn alle snelheden 0 en is het vlak van de hoepel verticaal en loodrecht op het hellend vlak; het materiële punt bevindt zich dan even hoog als M aan de kant waar het hellend vlak naar boven loopt. De wrijvingscoëfficiënten f en f_1 zijn zo, dat de hoepel zuiver gaat rollen en het materiële punt zich steeds op een horizontale middellijn door M bevindt (dus in het dichts bij het hellend vlak gelegen punt van de hoepel, waar de raaklijn verticaal is).
Bereken f en de versnelling van M. Welke waarde moet f_1 minstens hebben?

Antwoord:

$f = 4$; $\frac{5}{16}g$; $f_1 \geqslant \frac{13}{16}$.

66. Op een glad horizontaal vlak staat een homogeen rechthoekig blok (hoogte ℓ, massa m). Een homogene staaf AB (lengte 4ℓ, massa m) steunt met het uiteinde A op het horizontale vlak en verder tegen een ribbe van het bovenvlak van het blok (eveneens zonder wrijving). In de beginstand zijn alle snelheden gelijk aan 0. Het zwaartepunt Z van de staaf is dan met het midden van genoemde ribbe in aanraking, terwijl AB dan ligt in een vlak loodrecht op die ribbe. Hoeveel is het blok uit zijn beginstand verschoven op het tijdstip t_1, waarop B het midden van genoemde ribbe van het bovenvlak bereikt heeft, en welke snelheid heeft het blok dan? Het blok wordt zo breed ondersteld, dat het niet gaat kantelen.

Hint: Beschouw de beweging van het zwaartepunt van het gehele systeem.

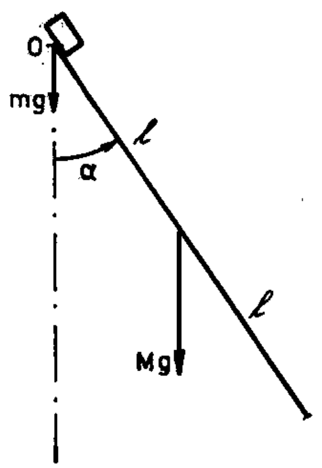
Antwoord:

$\frac{\ell}{4}\sqrt{15}$; $31\sqrt{\frac{3g\ell}{6010}}$.

67. Een kubusvormige bak glijdt met enige wrijving over een hellend vlak onder invloed van de zwaartekracht. De wrijvingscoëfficiënt bedraagt μ. Twee ribben van het grondoppervlak blijven gedurende de beweging horizontaal. Indien in de bak net voldoende water aanwezig is om het grondoppervlak te bedekken tijdens het glijden, dan kan worden aangetoond dat het volume water gelijk is aan $\mu/2$ maal de inhoud van de bak.

68. Een getijstroom stroomt in noordelijke richting door een kanaal met een breedte b op een breedtegraad λ. Indien v de snelheid van het water voorstelt en ω de hoeksnelheid van de aarde dan kan men aantonen dat de stand van het water op de oostelijke oever die op de westelijke oever overschrijdt met een bedrag $\frac{2bv\omega \sin \lambda}{g}$.

69.



Een homogene staaf van de lengte 2ℓ kan slingeren om het vaste punt O onder invloed van de zwaartekracht.

In de uiterste stand, bij de amplitude α wordt in O een, als puntvormig te beschouwen, blokje met massa m losgelaten. Dit begint onder invloed van de zwaartekracht te glijden langs de staaf. Hierbij wordt geen wrijving ondervonden. De eerste fase van de beweging duurt tot het blokje loslaat. Stel voor deze eerste fase de bewegingsvergelijkingen van het systeem op en geef tevens de mathematische voorwaarde voor het loslaten.

Antwoord:

$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = mg \cos \varphi$, $m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = N - mg \sin \varphi$, $\frac{4}{3} M\ell^2\ddot{\varphi} = -Nr - Mg\ell \sin \varphi$.

Loslaten als $N = 0$.

70. a) Een cirkel (straal r, middelpunt M) wordt met een constante hoeksnelheid ω om een verticale middellijn gewenteld. Een homogene stang AB (massa m, lengte 2ℓ) kan met de uiteinden A en B zonder wrijving langs de cirkel glijden. De stang is onderworpen aan de zwaartekracht. In welk geval heeft de wenteling geen invloed op de relatieve beweging van AB ?

b) Neem $\ell < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$. Onderzoek de kinetische evenwichtsstanden op stabiliteit.

c) Neem $\ell > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$. Onderzoek de kinetische evenwichtsstanden op stabiliteit.

d) Bepaal voor $\ell > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$ de periode der kleine slingeringen om de evenwichtsstand, waarbij AB horizontaal en hoger dan M gelegen is. De hoeksnelheid ω wordt voldoende groot ondersteld.

Antwoord:

a) Zij Z het zwaartepunt van AB, MZ = a en φ de hoek, die MZ met de naar beneden gekeerde verticaal door M maakt. Dan is:

$$(\ell^2 + 3a^2)\dot{\varphi}^2 - \omega^2(\ell^2\cos^2\varphi + 3a^2\sin^2\varphi) - 6ga \cos \varphi = \text{constant} ,$$

$$(\ell^2 + 3a^2)\ddot{\varphi} + \{\omega^2(\ell^2 - 3a^2)\cos \varphi + 3ga\}\sin \varphi = 0 .$$

Is $\ell^2 = 3a^2$, dus $a = \frac{1}{2}r$, dan valt ω uit de vergelijking weg.

b) Is P de potentiële energie van zwaartekracht en centrifugaalkracht tesamen, dan is:

$$P = -\frac{1}{6} m\{\omega^2(\ell^2\cos^2\varphi + 3a^2\sin^2\varphi) + 6ga \cos \varphi\},$$

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{1}{3} m\{\omega^2(\ell^2 - 3a^2)\cos \varphi + 3ga\}\sin \varphi .$$

Is $\ell < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$, dan is $\ell^2 - 3a^2 < 0$ $(a > \frac{1}{2}r)$. Is $\omega^2 < \dfrac{3ga}{3a^2 - \ell^2}$, dan neemt P voortdurend toe, als φ toeneemt van 0 tot π. Er is dan alleen stabiel kinetisch evenwicht voor $\varphi = 0$. Is $\omega^2 > \dfrac{3ga}{3a^2 - \ell^2}$, dan is P minimaal voor

$\cos\varphi = \dfrac{3ga}{3a^2 - \ell^2}$. Voor die tussen 0 en 90° gelegen waarde van φ (of het tegengestelde daarvan) is er stabiel kinetisch evenwicht.

c) Is $\ell > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$, dan is $\ell^2 - 3a^2 > 0$ ($a < \frac{1}{2}r$). Is $\omega^2 \leqslant \dfrac{3ga}{\ell^2 - 3a^2}$, dan neemt P voortdurend toe, als φ toeneemt van 0 tot π. Er is dan alleen stabiel kinetisch evenwicht voor $\varphi = 0$. Is $\omega^2 > \dfrac{3ga}{\ell^2 - 3a^2}$ en neemt φ toe van 0 tot π, dan neemt P eerst toe, om voor een stompe waarde van φ een maximum te bereiken (labiel kinetisch evenwicht). Vervolgens neemt P weer af. Nu zijn $\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$ de stabiele kinetische evenwichtsstanden.

d) Stelt men $\varphi = \pi + u$ (u in absolute waarde klein), dan vindt men bij benadering:

$$(\ell^2 + 3a^2)\ddot{u} + \{\omega^2(\ell^2 - 3a^2) - 3ga\}u = 0 .$$

Is $\omega^2 > \dfrac{3ga}{\ell^2 - 3a^2}$, dan vindt men voor de periode der kleine slingeringen om de stand $\varphi = \pi$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 3a^2}{\omega^2(\ell^2 - 3a^2) - 3ga}} .$$

71. Een horizontale, homogene cirkelvormige schijf (straal R, massa 2m) is zonder wrijving draaibaar om de verticale as door het middelpunt M. Op de schijf is een horizontale buis van te verwaarlozen massa, die in de vorm van een cirkel is gebogen, bevestigd. Deze cirkel, waarvan de straal $\frac{1}{2}$R is, gaat door M en raakt dus aan de rand van de schijf. Een stoffelijk punt P met massa m doorloopt de buis met constante hoeksnelheid ω. Op het ogenblik, waarop P het punt M passeert, is de schijf in rust.

a) Hoe groot is de hoeksnelheid van de schijf, als P, van M af gerekend, een boog van φ radialen heeft doorlopen?

b) Bewijs, dat de schijf voortdurend in dezelfde zin draait.

c) Schrijf de hoek α, waarover de schijf gedraaid is, als P voor het eerst weer in M terugkeert als bepaalde integraal en bewijs, dat α niet van ω afhangt.

<u>Hint</u>: Impulsmoment constant.

Antwoord:

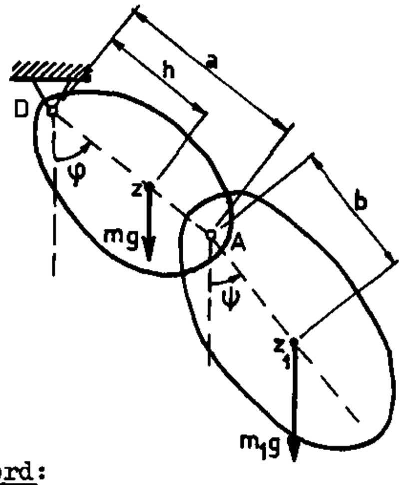
a) $\dfrac{\omega \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{2(1+\sin^2\frac{1}{2}\varphi)}$; c) $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\,(2-\sqrt{2})$.

72. Een homogene balk met lengte ℓ en massa m is aan beide einden opgelegd. Op zeker ogenblik wordt een van beide steunpunten weggehaald. Bereken met behulp van het principe van d'Alembert de oplegkracht die op dit ogenblik onder invloed van de zwaartekracht op het overblijvende steunpunt werkt.

Antwoord:

$\frac{mg}{4}$.

73.

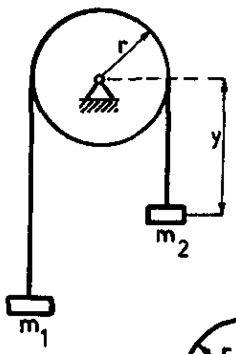


Leid de bewegingsvergelijkingen af van de dubbele fysische slinger voor kleine bewegingen om de stabiele evenwichtsstand. De punten Z en Z_1 zijn de zwaartepunten van de twee delen, i en i_1 de traagheidsstralen met betrekking tot de punten O resp. A en m_1 en m_2 de massa's.

Antwoord:

$(mi^2 + m_1a^2)\ddot{\varphi} + (mh + m_1a)g\varphi + m_1ab\ddot{\psi} = 0$, $ab\ddot{\varphi} + i_1^2\ddot{\psi} + gb\psi = 0$.

74.

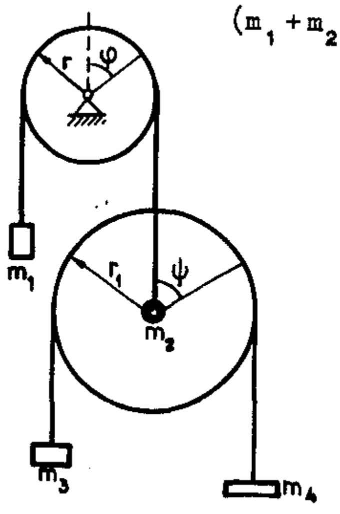


Leid de vergelijkingen af voor de beweging die de massa's m_1 en m_2 van Atwood's machine onder invloed van de zwaartekracht uitvoeren. Verwaarloos de massa van de schijf en van de snaar.

Antwoord:

$(m_1 + m_2)\ddot{y} = (m_2 - m_1)g$.

75.



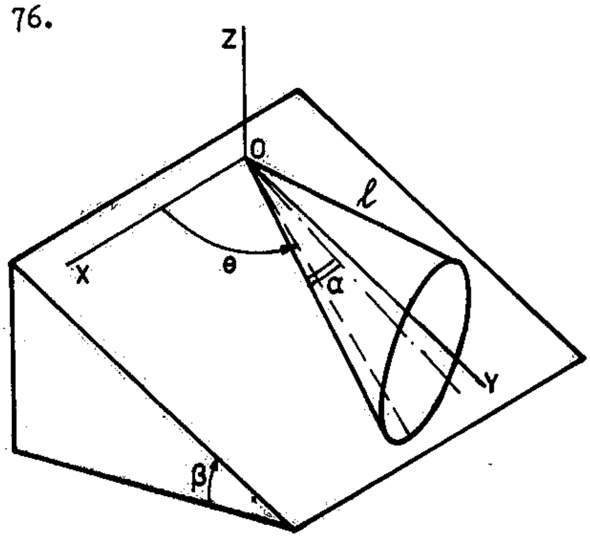
Leid de vergelijkingen af voor de beweging die het hiernaast getekende toestel uitvoert onder invloed van de zwaartekracht. Verwaarloos het massatraagheidsmoment van de schijven en de massa van het koord en neem de hoeken φ en ψ als gegeneraliseerde coördinaten.

Antwoord:

$$r(m_1+m_2+m_3+m_4)\ddot{\varphi} - r_1(m_3-m_4)\ddot{\psi} = (-m_1+m_2+m_3+m_4)g \ ,$$

$$r(m_3-m_4)\ddot{\varphi} - r_1(m_3+m_4)\ddot{\psi} = (m_3-m_4)g \ .$$

76.

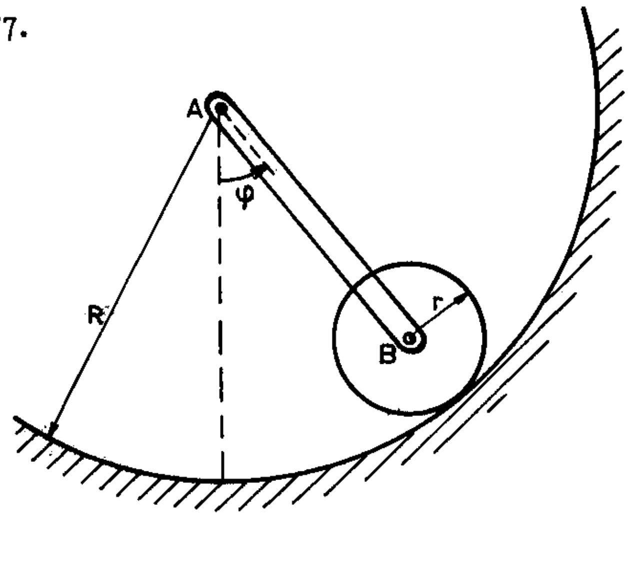


Een homogene rechte cirkelkegel met massa m, beschrijvende ℓ en halve tophoek α rolt over een volkomen ruw vlak dat met het horizontale vlak een hoek β maakt. De beweging is uiteraard volkomen vastgelegd door de hoek θ tussen de horizontale X-as en de raakbeschrijvende, zoals in de figuur is aangegeven. Onder invloed van de zwaartekracht kan de kegel kleine trillingen om de evenwichtsstand uitvoeren. Hoe groot is de eigentrillingstijd T ?

Antwoord:

$$T = 3\pi\sqrt{\frac{\ell}{5g}\left(\frac{3\cos^2\alpha + \frac{1}{5}\sin^2\alpha}{\sin\beta}\right)} \ .$$

77.

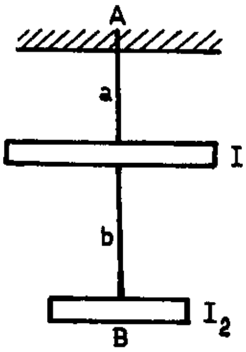


Een slanke prismatische staaf AB met massa m_1 is in A scharnierend opgehangen en kan onder invloed van de zwaartekracht in een verticaal vlak slingeren. Aan het andere uiteinde B is bevestigd een rond schijfje met massa m_2 en straal r dat zonder te slippen rolt in een cirkelvormige goot met straal R en middepunt in A. Hoe groot is de eigentrillingstijd T voor kleine trillingen onder invloed van de zwaartekracht om de evenwichtsstand?

Antwoord:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m_1+9m_2}{3m_1+6m_2}\left(\frac{R-r}{g}\right)} \ .$$

78. De hiernaast geschetste as AB heeft een constante torsiestijfheid GIp en draagt twee schijven met massatraagheidsmomenten I_1 en I_2. Gevraagd worden uitdrukkingen voor de potentiële energie en gegeneraliseerde krachten, waarbij moet worden uitgegaan van de hoekverdraaiingen φ en ψ van de schijven I_1 en I_2 als gegeneraliseerde coördinaten. Leid met behulp van de vergelijkingen van Lagrange de bewegingsvergelijkingen af. Hoe groot is het aantal eigefrequenties en hoe kunnen zij worden berekend? Leidt dit ook af met d'Alembert.



Antwoord:

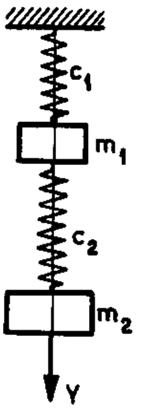
$$U = \frac{\varphi^2 GIp}{2a} + \frac{(\psi - \varphi)^2 GIp}{2b} . \quad Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{\varphi GIp}{a} + \frac{(\psi - \varphi) GIp}{b} ,$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial U}{\partial \psi} = -\frac{(\psi - \varphi) GIp}{b} . \quad I_2 \ddot{\psi} = -(\psi - \varphi)\frac{GIp}{b} ,$$

$$I_1 \ddot{\varphi} = (\psi - \varphi)\frac{GIp}{b} - \varphi \frac{GIp}{a} .$$

Er zijn twee eigenfrequenties. Te berekenen door in de bewegingsvergelijkingen te substitueren $\psi = \psi_0 \sin \omega t$ en $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ en vervolgens de determinant van de coëfficiënten van ψ_0 en φ_0 gelijk aan nul te stellen.

79. Twee massapunten m_1 en m_2 zijn opgehangen aan veren met veerstijfheid c_1 en c_2 zoals hiernaast is geschetst. De deeltjes kunnen alleen in de Y-richting zonder wrijving bewegen. Gevraagd worden de potentiële energie en de gegeneraliseerde krachten indien als gegeneraliseerde coördinaten de verplaatsingen y_1 en y_2 van m_1 en m_2 worden aangenomen. Hoe luiden de bewegingsvergelijkingen? Leidt dit ook af met d'Alembert.



Antwoord:

$$U = \tfrac{1}{2} c_1 y_1^2 + \tfrac{1}{2} c_2 (y_2 - y_1)^2 . \quad Q_1 = -\frac{\partial U}{\partial y_1} = -c_1 y_1 + c_2 (y_2 - y_1) ,$$

$$Q_2 = -\frac{\partial U}{\partial y_2} = -c_2 (y_2 - y_1) . \quad m_2 \ddot{y}_2^2 = -c_2 (y_2 - y_1) ,$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -c_1 y_1 + c_2 (y_2 - y_1) .$$

80. Gegeven is een homogeen vast lichaam (massa 2m), dat de gedaante heeft van een vierkant waarvan men het binnen de ingeschreven cirkel C gelegen deel heeft weggenomen. De straal van deze cirkel is R. Het lichaam wordt verticaal geplaatst, zodanig dat het met een der zijden van het vierkant op een horizontaal vlak rust. Een homogene staaf (massa m, lengte $R\sqrt{3}$) beweegt zich met de uiteinden langs de omtrek van de cirkel C. Het geheel is onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g). Er is nergens wrijving. Als coördinaten van het stelsel worden ingevoerd de horizontale verplaatsing x van het middelpunt van C en de hoek φ, die de staaf met het horizontale vlak maakt.

a) Bepaal de kinetische energie van het stelsel.

b) Bepaal de vergelijkingen van Lagrange voor het stelsel.

c) Leid uit deze vergelijkingen af dat de horizontale projectie van het zwaartepunt van het stelsel zich eenparig beweegt en bewijs dit ook rechtstreeks.

d) Leid een bewegingsvergelijking van de tweede orde af, die alleen de coördinaat φ bevat.

e) Bepaal de cirkelfrequentie der kleine trillingen van de staaf om de stabiele evenwichtsstand.

f) Leid een bewegingsvergelijking van de eerste orde af, die alleen de coördinaat φ bevat.

g) Voor $t = 0$ is de staaf verticaal, terwijl alle snelheden nul zijn. Voor $t = t_1$ is de staaf voor het eerst horizontaal. Bepaal voor $t = 0$ de hoekversnelling van de staaf en de versnelling van het raam; bepaal voor $t = t_1$ de hoeksnelheid van de staaf, de snelheid van het raam en de door het raam afgelegde weg.

<u>Antwoord:</u>

a) $m(\frac{3}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{4}R^2\dot{\varphi}^2)$.

b) $6\dot{x} + R\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{constant}$,

$\ddot{x}\cos\varphi + R\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$.

d) $R\ddot{\varphi}(6 - \cos^2\varphi) + R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + 6g\sin\varphi = 0$.

e) $\sqrt{\frac{6g}{5R}}$.

f) $R\dot{\varphi}^2(6-\cos^2\varphi) - 12g\cos\varphi = \text{constant}$

g) $-\frac{g}{R}$, 0 , $-\sqrt{\frac{12g}{5R}}$, $\sqrt{\frac{gR}{15}}$, $\frac{1}{6}R$.

81. Van een homogene rechte staaf AB (massa m, lengte 2ℓ) kan het uiteinde A zich slechts bewegen langs een vaste horizontale rechte h; het andere uiteinde B blijft daarbij steeds verticaal beneden A. In B is aan AB een tweede homogene rechte staaf BC (massa m, lengte 4ℓ) scharnierend bevestigd. Deze staaf kan in B slechts draaien om de as door B loodrecht op het vlak door h en AB. Het geheel is onderworpen aan de zwaartekracht (versnelling g) en er is nergens wrijving.

Als noodzakelijke coördinaten voert men in: de afstand u van A tot een vast punt van h en de hoek φ, die BC maakt met de naar beneden gerichte verticaal.

a) Stel de uitdrukking op voor de kinetische energie van het stelsel bestaande uit de staven AB en BC, als ook die voor de potentiële energie.

b) Stel de bewegingsvergelijkingen van Lagrange op voor het in a) bedoelde stelsel.

Als nog gegeven is, dat voor $t=0$ het punt C op h ligt en dat $u=\dot{u}=\varphi=0$ op dit tijdstip, bereken dan:

c) u op het tijdstip, waarop BC voor het eerst na het tijdstip $t=0$ horizontaal is.

d) De kracht (grootte en richting), die BC op AB uitoefent in de onder c) genoemde horizontale stand.

<u>Antwoord</u>:

a) $\frac{1}{3}m(3\dot{u}^2 + 6\ell\dot{u}\dot{\varphi}\cos\varphi + 8\ell^2\dot{\varphi}^2)$, $-2mg\ell\cos\varphi$.

b) $\dot{u} + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{constant}$, $\ddot{u}\cos\varphi + \frac{8}{3}\ell\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$.

c) $u = \frac{1}{2}\ell(\sqrt{3}-2)$.

d) $K = \frac{1}{8}mg\sqrt{13}$, $\frac{K_r}{K_h} = \frac{2}{3}$.

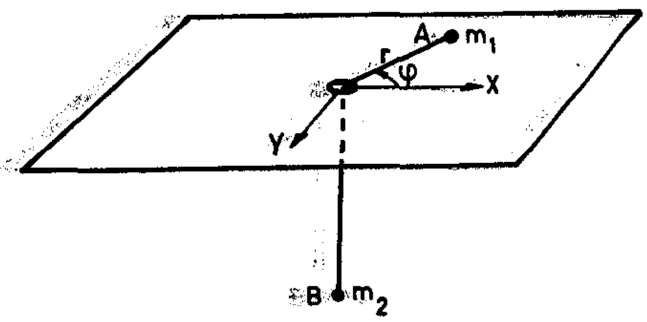
82. Twee massa's m_1 en m_2 zijn verbonden door een massaloze veer met veerconstante c. Het systeem wordt in rotatie om het zwaartepunt gebracht met een hoeksnelheid ω en daarna losgelaten. Indien de massa's langs de verbindingslijn tussen hen kleine bewegingen uitvoeren, wat is dan de hoekfrequentie ω van

deze trillingen? Blijft de berekening en het eindantwoord geldig indien

$$\omega = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \quad ?$$

83. Een massapunt m is opgehangen door middel van een massaloze veer, met veerconstante c en een ongespannen lengte b, aan een punt dat een constante opwaarts gerichte versnelling a_0 bezit. De zwaartekrachtsversnelling g werkt verticaal naar beneden. Stel de Lagrange functie op en leid daaruit de bewegingsvergelijking voor de verticale beweging van het massapunt af.

84.



Twee puntmassa's m_1 en m_2 zijn verbonden door een volkomen buigzaam, doch niet-rekbaar koord ter lengte ℓ, zoals hiernaast is geschetst. Het deeltje in A beweegt over glad horizontaal vlak en het koord gaat door een gat in punt O van de tafel. Het gewicht bij B hangt verticaal onder O. Stel de vergelijkingen op voor de bewegingen onder invloed van de zwaartekracht. Hoe groot is de eigentrillingsperiode T voor kleine trillingen om een evenwichtsstand, waarvoor $\dot{\varphi} = \omega$?

Antwoord:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \;, \quad (m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 r\dot{\varphi}^2 = -m_2 g \;.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\dfrac{3m_1}{m_1 + m_2}}} \;.$$

85. Een tot een cirkel met straal r en middelpunt M gebogen homogene buis (massa m) is zonder wrijving draaibaar om een vaste horizontale as, die in een punt A van de buis loodrecht op het vlak van de buis staat. In de buis kan zich een stoffelijk punt P (massa m) zonder wrijving bewegen. Het geheel is onderworpen aan de zwaartekracht (versnelling g). Als coördinaten neemt men de hoek θ, die AM maakt met de naar beneden gerichte verticaal en de hoek φ, die MP maakt met het verlengde van AM.

a) Leid de uitdrukkingen voor de potentiële en de kinetische energie van het stelsel af.

b) Stel de bewegingsvergelijkingen van Lagrange op.

c) Bepaal de cirkelfrequenties van de hoofdtrillingen om de stabiele evenwichtsstand van het stelsel.

Antwoord:

a) $\frac{1}{2}mr^2\{3\dot\theta^2 + (\dot\theta+\dot\varphi)^2 + 2\dot\theta(\dot\theta+\dot\varphi)\cos\varphi\}$, $-2mgr\cos\theta - mgr\cos(\theta+\varphi)$.

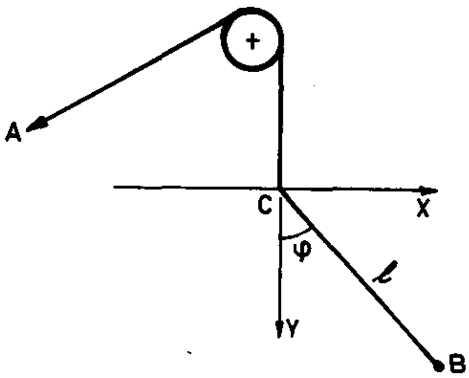
b) $4r\ddot\theta + 2r\ddot\theta\cos\varphi - 2r\dot\theta\dot\varphi\sin\varphi + 2r\ddot\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi - r\dot\varphi^2\sin\varphi =$

$= -2g\sin\theta - g\sin(\theta+\varphi)$,

$2r\ddot\theta\cos^2\frac{1}{2}\varphi + r\dot\theta^2\sin\varphi + r\ddot\varphi = -g\sin(\theta+\varphi)$.

$\sqrt{\frac{g}{2r}}$ en $2\sqrt{\frac{g}{2r}}$.

86.



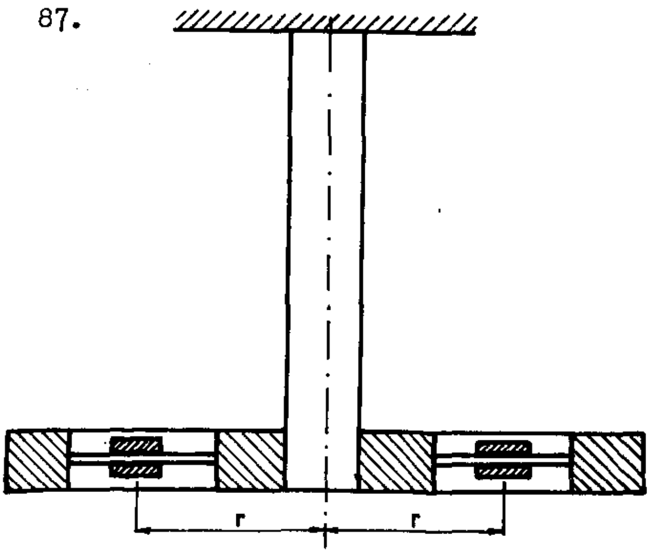
De vrije lengte CB van een slinger, bestaande uit massa m aan een volkomen buigzaam, niet-rekbaar koord, kan worden gewijzigd bijvoorbeeld door aan het vrije einde A te trekken zoals in nevenstaande figuur. De plaats van B is bepaald door φ en ℓ, welke laatste functie een voorgeschreven functie $\ell(t)$ van de tijd is. Stel de bewegingsvergelijking op voor bewegingen onder invloed van de zwaartekracht. Mag men in dit geväl de vergelijkingen van Lagrange toepassen?

Hint: Welke gegeneraliseerde coördinaat(en) neemt U?

Antwoord:

$\ell^2\ddot\varphi + 2\ell\dot\ell\dot\varphi + g\ell\sin\varphi = 0$; ja .

87.



Een vliegwiel is bevestigd aan het einde van een verticale as met torsiestijfheid S_w en het traagheidsmoment I van het vliegwiel varieert volgens $I = I_0(1 + a\sin\omega t)$, bijvoorbeeld door het op bepaalde wijze verschuiven van twee symmetrisch gelegen massa's m langs twee spaken van het wiel. Stel de bewegingsvergelijkingen op voor kleine hoekverdraaiingen θ om de evenwichtsstand.

<u>Antwoord</u>:

$$I_0\ddot{\theta} + \frac{I_0 a\omega \cos\omega t}{1+a\sin\omega t}\dot{\theta} + \frac{S_w}{1+a\sin\omega t}\theta = 0 \quad .$$

88. De rechte lijn ℓ_1, die loodrecht staat op de in de ruimte vaste rechte lijn ℓ_2, wentelt om deze laatste met een constante hoeksnelheid ω. Langs ℓ_1 resp. ℓ_2 is een puntmassa m_1 resp. m_2 verschuifbaar. De beide puntmassa's zijn verbonden door een massaloze veer, waarvan de ongespannen lengte gelijk is aan a. De veerstijfheid is c. Er is geen wrijving en de zwaartekracht mag buiten beschouwing worden gelaten.

a) Bepaal de stabiele kinetische evenwichtsstanden.

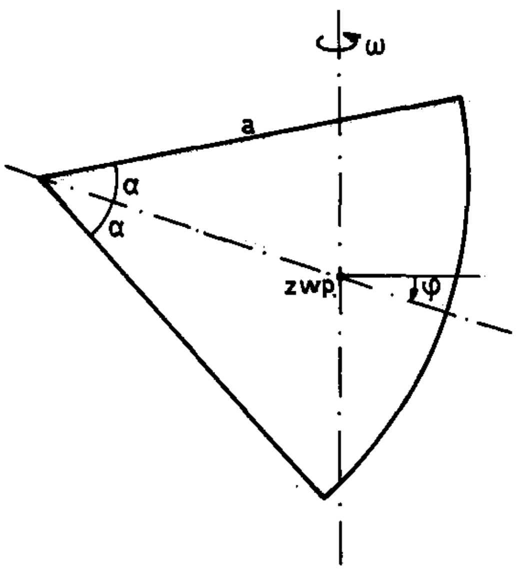
b) Bepaal de frequentie van de kleine trillingen om deze standen.

<u>Antwoord</u>:

a) Alleen als: $\omega^2 < \sqrt{\frac{c}{m_1}}$ bestaat de stabiele evenwichtsstand: $|x_1| = \dfrac{a}{1-\dfrac{m_1\omega^2}{c}}$ en $x_2 = 0$.

b) $\lambda_1 = \sqrt{\frac{c}{m_1} - \omega^2}$, $\lambda_2 = \omega\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$.

89.



Het vlak van een cirkelvector met massa m, halve tophoek α en straal a draait met een constante hoeksnelheid ω om een in de ruimte vaste as die door het zwaartepunt van de sector gaat en in dat vlak ligt. De sector is op zijn beurt draaibaar in dat vlak om een as eveneens door het zwaartepunt.
Bereken de evenwichtsstanden en ga het dynamische gedrag om de evenwichtsstanden na. Geef aan de invloed van een variatie van α tussen de grenzen 0 en π.
De zwaartekracht mag buiten beschouwing worden gelaten.
<u>Hint</u>: Oplossen met

1) Stilzetten.

2) Lagrange.
3) Vrijmaken.

Antwoord:

Evenwichtsstanden: $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{\pi}{2}$. $\varphi = 0$ is stabiel als

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - \frac{4(1-\cos 2\alpha)}{9\alpha^2} > 0 \ ,$$

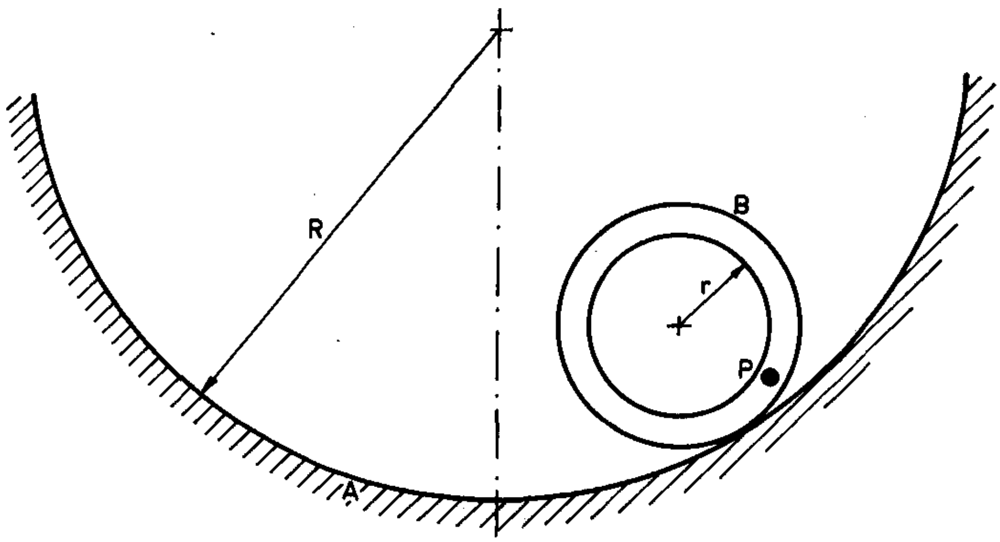
anders instabiel (dan $\varphi = \frac{\pi}{2}$ stabiel).

90. Een homogene bol met massa m en straal a is in een willekeurig punt van zijn oppervlak opgehangen aan een niet-rekbaar slap koord ter lengte ℓ, dat gedurende de beweging gespannen blijft. Stel de bewegingsvergelijkingen op voor de slingeringen onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g) en bereken de frequenties van de kleine trillingen om de evenwichtsstand.

Antwoord:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{5g}{4a} + \frac{7g}{4\ell}\right) \pm \frac{5}{4}\sqrt{g^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{6}{5a\ell} + \frac{49}{25\ell^2}\right)}} \ .$$

91.

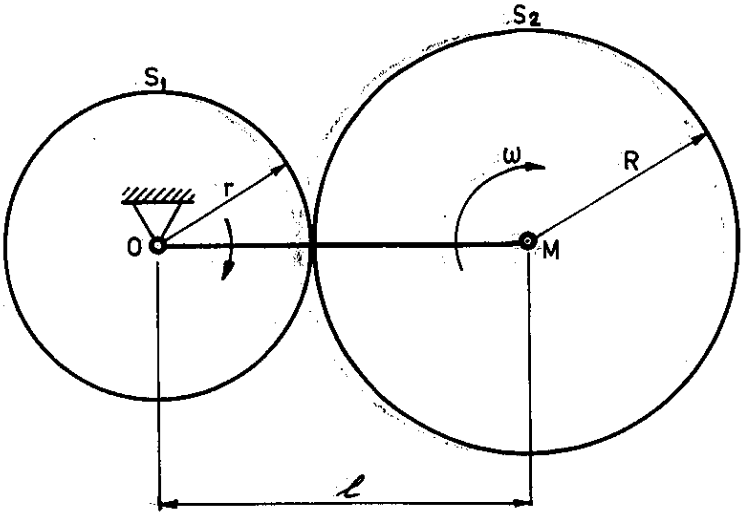


Zoals hierboven is geschetst rolt in een verticaal vlak een, in een cirkelvorm met straal r gebogen buis B, langs een vaste, in hetzelfde vlak liggende cirkelvormige rand A, waarvan de straal gelijk is aan R. In de buis, waarvan de constante afmetingen der dwarsdoorsnede klein zijn ten opzichte van R en r, kan een puntmassa P zonder wrijving glijden. De massa van V is evenals die van P gelijk aan m. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g. Bepaal de stabiele evenwichtsstanden en de bijbehorende frequenties van de kleine trillingen om die standen.

Antwoord:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g(3R - r) \pm g\sqrt{9R^2 - 22rR + 17r^2}}{4r(R - r)}} .$$

92.

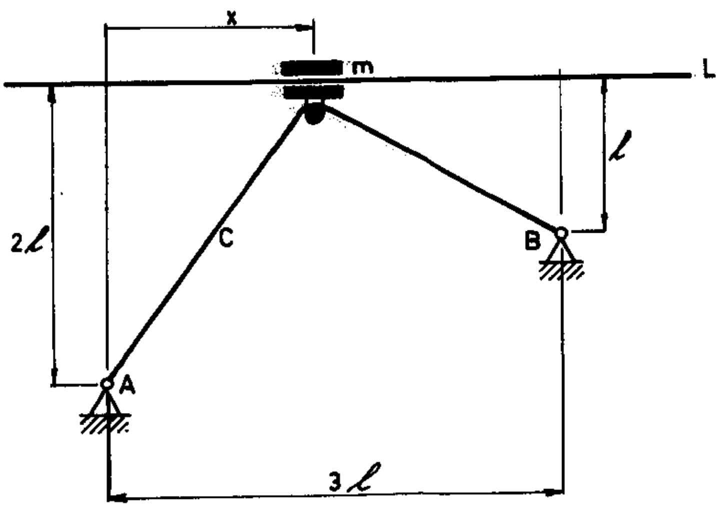


Een homogene starre staaf OM (massa m, lengte ℓ) kan zonder wrijving draaien om zijn vaste uiteinde O. Om het andere uiteinde M is, eveneens zonder wrijving, draaibaar een homogene starre cirkelvormige schijf S_2 (massa M, straal R), die tevens rolt over de omtrek van een starre cirkelvormige schijf S_1 (straal r), waarvan het middelpunt samenvalt met O ($\ell = R + r$) en die niet draaibaar is. Het systeem beweegt in een verticaal vlak onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g). Indien een periodieke beweging wordt uitgevoerd waarbij in de uiterste stand de lijn OM horizontaal is, wat is dan de grootste hoeksnelheid van S_2 ?

Antwoord:

$$\omega_{max} = \frac{\ell}{R}\sqrt{\frac{g}{\ell} \cdot \frac{3m + 6M}{m + \frac{9}{2}M}} .$$

93.



Een lichaam met massa m, kan zonder wrijving bewegen langs een rechte L. Aan het lichaam bevindt zich een oog waardoor een massaloos elastisch koord loopt met veerconstante c en te verwaarlozen ongespannen lengte. De beide uiteinden van dit koord zijn bevestigd in twee punten A en B welke met de rechte L in een vlak liggen op de in de figuur aangegeven wijze. Gevraagd wordt voor het systeem de evenwichtsstanden en de kleine trillingen om deze standen te bepalen in de volgende gevallen:

a) Het koord kan zonder wrijving door het oog glijden.

b) Het koord is in het midden vast aan het oog bevestigd.

Hint: Oplossen met:

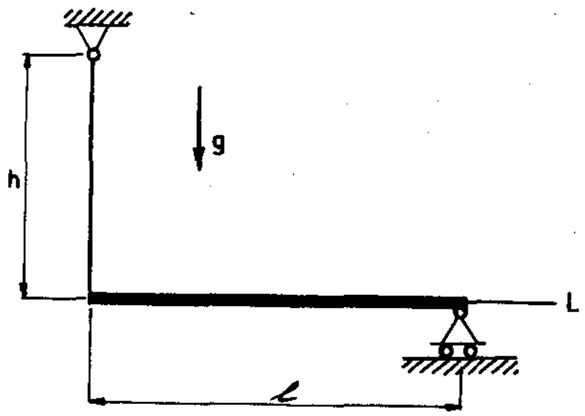
1) Lagrange.
2) Vrijmaken.

Antwoord:

a) $x = 2\ell$ en $\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}$.

b) $x = \frac{3}{2}\ell$ en $\omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}}$.

94.

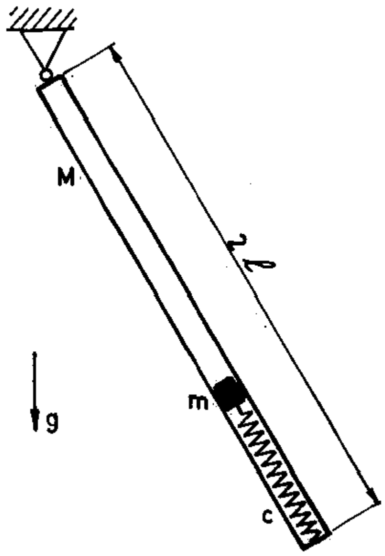


Een homogene staaf, massa m, lengte ℓ, kan met één einde zonder wrijving glijden langs een horizontale rechte L. De staaf is in het andere einde met behulp van een massaloos onrekbaar koord, lengte h, bevestigd aan een vast punt op een hoogte h verticaal boven L. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt de frequentie en de trillingstijd van kleine trillingen in het verticale vlak om de getekende evenwichtsstand te berekenen.
Hint: Hoeveel graden vrijheid.

Antwoord:

$\omega = \sqrt{\frac{g}{2h}}$.

95. 

Een homogene afgesloten buis, massa M, lengte 2ℓ, is in een uiteinde opgehangen aan een vast punt en kan zonder wrijving bewegen in een verticaal vlak. In de buis kan een massapunt, massa m, zonder wrijving glijden. De massa is door een massaloze veer, veerconstante c, ongespannen veerlengte ℓ, verbonden met het vrije einde van de buis. De versnelling van de zwaartekracht is g. Gevraagd wordt de evenwichtsstanden van het systeem en de frequenties van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstanden te bepalen. Aangenomen mag worden dat de veerconstante zo groot is dat gedurende de beweging het massapunt niet in aanraking komt met de uiteinden van de buis.

Antwoord:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \;, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{[M\ell + m(\ell + \frac{mg}{c})]g}{\frac{4}{3}M\ell^2 + m(\ell + \frac{mg}{c})^2}} \;.$$

96. Een verticaal vlak α wentelt met constante hoeksnelheid ω om een verticale rechte z in dit vlak. In α ligt een rechte x loodrecht op z. Van een homogene staaf (lengte 2ℓ, massa m), die onderworpen is aan de zwaartekracht (versnelling g), bewegen de uiteinden A en B zich zonder wrijving opvolgend langs x en z.

a) Bepaal de stabiele kinetische evenwichtsstanden van de staaf als $\omega^2 > \frac{3g}{4\ell}$.

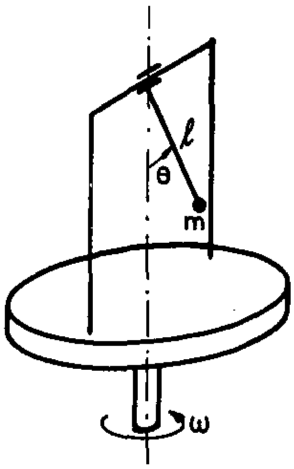
b) Bepaal de cirkelfrequentie van de kleine trillingen om deze standen.

Hint: Oplossen met
1) Lagrange.
2) Stilzetten.
3) Vrijmaken.

Antwoord:

$$\frac{\sqrt{16\ell^2\omega^4 - 9g^2}}{4\ell\omega} \;.$$

97. a)



Een starre mathematische slinger met lengte ℓ en massa m kan draaien om een horizontale as die bevestigd is op een schijf die met een constante hoeksnelheid ω om een verticale as draait. Het ophangpunt van de slinger bevindt zich op deze verticale as. De versnelling van de zwaartekracht is g. Voor welke waarden van ω is een beweging mogelijk zodanig dat θ constant is en verschilt van nul? Hoe luidt de betrekking tussen θ en ω?

b) Veronderstel dat de schijf niet aangedreven wordt doch vrij kan draaien om een verticale as. Ten tijde $t = 0$ is $\theta = 0$, $\ell\dot{\theta} = v_0$ en $\omega = \omega_0$. Ga de beweging van het mechanisme na en in het bijzonder de wisselwerking tussen de beweging van de slinger en de rotatie van de schijf, die een massatraagheidsmoment gelijk aan I heeft.

c) Onderzoek de stabiliteit van de verticale evenwichtsstand van de slinger indien de massa van de slinger zich onder het ophangpunt bevindt, voor het geval dat ω constant is.

Antwoord:

a) $\theta = 0$ of $\cos\theta = \frac{g}{\ell\omega^2}$. Hieruit volgt: $\theta \neq 0$ indien $\omega^2 > \frac{g}{\ell}$.

b) $(I + m\ell^2\sin^2\theta)\omega = I\omega_0$,

$$\tfrac{1}{2}(I + m\ell^2\sin^2\theta)\omega^2 + \tfrac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = \frac{I}{2}\omega_0^2 + \tfrac{1}{2}mv_0^2 .$$

Voor kleine waarden van θ:

$$\tfrac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}m\ell(g - \ell\omega_0^2)\theta^2 = \text{constant.}$$

Voor $\omega_0^2 < \frac{g}{\ell}$ slingert de massa om de verticale stand $\theta = 0$.

Voor $\omega_0^2 > \frac{g}{\ell}$ slingert de massa om een gemiddelde waarde van θ die ongelijk aan nul is.

c) Stabiel evenwicht bij $\theta = 0$ alleen indien $\omega^2 < \frac{g}{\ell}$.

98. Twee volkomen gladde bollen, elk met straal r en massa m, worden geplaatst in een holle cylinder, met straal a en aan beide kanten open, die staat op een horizontaal vlak zodanig dat zijn as verticaal is $(r > a/2)$. Indien verder gegeven is dat de cylinder niet in beweging komt, wordt gevraagd te be-

wijzen dat voor de massa M van de cylinder geldt $M \geqslant 2m(1 - \frac{r}{a})$.
Hint: Zoek minimum potentiële energie.

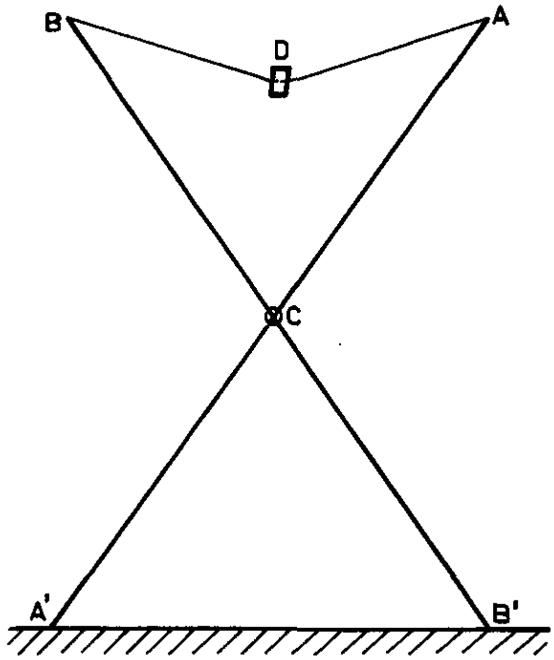
99. Een staaf met massa m steunt op een volkomen gladde horizontale vaste stang en zijn onderste uiteinde vindt steun op een volkomen glad horizontaal vlak. De hoek die de staaf met het horizontale vlak maakt is gelijk aan θ. Bereken de horizontale kracht die op dit uiteinde moet worden uitgeoefend opdat de staaf zich in een evenwichtstoestand bevindt, indien gegeven is de hoogte h van de stang boven het vlak en de afstand a van het zwaartepunt van de staaf van het onderste einde.
(Opmerking: vrijmaken, virtuele arbeid, min. pot. en.).

Antwoord:

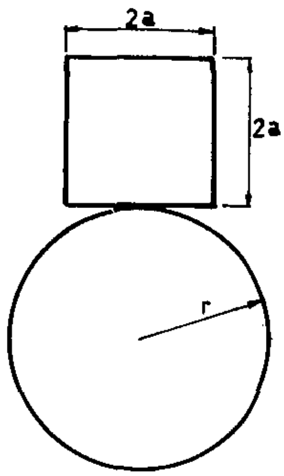
$\frac{mga}{h} \sin^2\theta \cos\theta$.

100. Een homogene staaf met massa m en lengte 2ℓ is opgehangen aan twee punten in een horizontaal vlak door middel van twee draden met lengte a, die oorspronkelijk verticaal hingen. Deze draden zijn verbonden met de einden van de staaf. Toon aan, dat het koppel M, dat op de staaf moet worden uitgeoefend om deze in een horizontale stand te houden die loodrecht staat op de aanvankelijke richting, gelijk is aan $M = \frac{mg\ell^2}{\sqrt{a^2 - 2\ell^2}}$.
(Opmerking: vrijmaken, virtuele arbeid, min. pot. en.).

101.



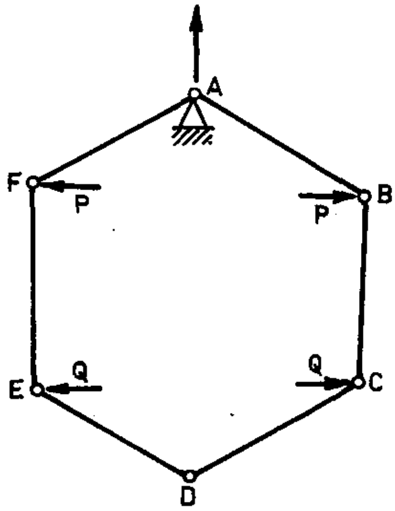
Twee identieke, massaloze staven AA' en BB' zijn door een wrijvingsloos scharnier in punt C verbonden (AC = = CA' = BC = CB') en staan in een verticaal vlak op een volmaakt gladde horizontale tafel. De bovenste uiteinden A en B zijn verbonden door een massaloze draad ADB, waarover een ringetje van een zeker gewicht zonder enige wrijving kan schuiven. Toon aan, dat in de evenwichtsstand de horizontaal door D de lijnstukken AC en CB middendoor deelt.
(Opmerking: vrijmaken, virtuele arbeid, min. pot. en.).

102. 

Een homogene massieve kubus met ribbe 2a rust op een horizontaal liggende cylinder met straal r. De hartlijn van de cylinder loopt evenwijdig met een ribbe van de kubus. Ga na, of het evenwicht stabiel is en neem daarbij aan, dat glijden niet optreedt.

Antwoord:

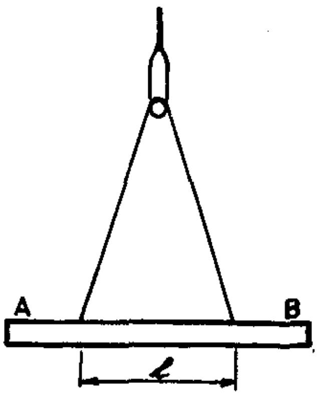
Voor $r > a$ stabiel.

103. 

Zes identieke staven met ieder een massa m zijn scharnierend aan elkaar verbonden. Zoals in nevenstaande figuur is geschetst, is het geheel in een scharnierpunt opgehangen in een verticaal vlak en vormen de staven tesamen onder invloed van de zwaartekracht en van de krachten P en Q een regelmatige zeshoek. Hoe groot is het aantal gegeneraliseerde coördinaten en hoe groot zijn de krachten P en Q ?

Antwoord:

$P = \frac{5}{2}mg\sqrt{3}$; $Q = \frac{1}{2}mg\sqrt{3}$.

104. 

Een stuk profielijzer hangt aan een haak met behulp van een kabel die in de punten A en B is vastgemaakt. De kabel kan zonder wrijving over de haak glijden. De afstand van A tot B is gelijk aan ℓ, de lengte van de kabel is L en het zwaartepunt van de balk ligt midden tussen A en B. Toon aan, dat de horizontale stand van de balk instabiel is.

105. Een deeltje met massa m bevindt zich in het midden A van een holle buis met lengte 2b en massa M. De buis die aan beide einden dicht is, ligt op een volkomen gladde horizontale tafel. De restitutiecoëfficiënt tussen M en m bedraagt e. Gegeven is verder dat het deeltje m op een bepaald moment zich

met een snelheid v_0 ten opzichte van de buis verplaatst. Gevraagd worden de volgende grootheden:

a) De snelheden van m en M na de eerste botsing.

b) Het verlies aan energie als gevolg van de eerste botsing.

c) De tijd die m er over doet om weer in A terug te keren in zijn oorspronkelijke bewegingsrichting.

Hint: Blijft de impuls behouden? Waarom?

Antwoord:

a) Snelheid m: $v_0' = \frac{m - eM}{m + M} v_0$, snelheid M: $V' = \frac{m}{m + M}(1 + e)v_0$.

b) $\Delta T = -\frac{1}{2}\frac{mM}{(m + M)}(1 - e^2)v_0^2$.

c) $t = \frac{b}{v_0}\left(1 + \frac{1}{e}\right)^2$.

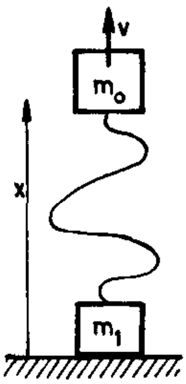
106. Een man met massa m staat in een lift met massa M, die daalt met een snelheid V. De massa van het contragewicht bedraagt M + m. Plotseling springt de man omhoog met een energie, waardoor hij een hoogte h zou bereiken, indien hij dit op vaste grond deed. Bereken de snelheden en de versnellingen van de man en van de lift onmiddellijk na het opspringen. Wat is de maximale hoogte van de man met betrekking tot de lift?

Antwoord:

Lift: $v_\ell = V + \frac{m}{2(M + m)}\sqrt{2gh}$, $a_\ell = -\frac{m}{2M + m} g$.

Man: $v_m = V - \sqrt{2gh}$, $a_m = g$, $h_{max} = \frac{2(M + m)}{2M + m} h$.

107.

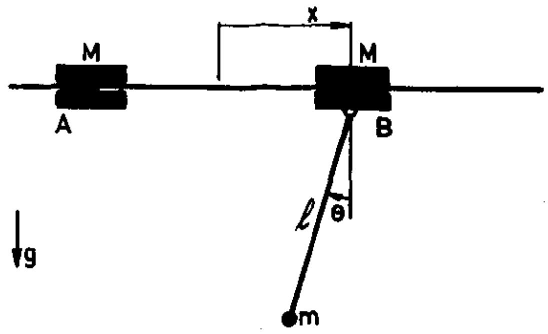


Twee massa's m_0 en m_1 zijn verbonden door een buigzaam, doch niet-rekbaar koord ter lengte ℓ. Indien m_0 vanaf de grond, waar m_1 aanvankelijk blijft liggen, met snelheid v_0 omhoog wordt geworpen, welke hoogte h boven de grond zal m_0 dan bereiken? Neem aan, dat de botsing volkomen onelastisch geschiedt en dat de massa van het koord te verwaarlozen is.

Antwoord:

$$h = \ell\left[1 - \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1}\right)^2\right] + \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g} .$$

108.



Twee massapunten A en B kunnen zonder wrijving glijden langs een horizontale rechte. Aan de massa B hangt, zonder wrijving scharnierend, een massaloze staaf, lengte ℓ, waaraan in het uiteinde een puntmassa m is bevestigd. De versnelling van de zwaartekracht is g. Op een bepaald ogenblik botst de massa A met een snelheid v tegen de massa B welke evenals de staaf in rust is. Op het moment van botsing hangt de staaf verticaal onder B. De botsing is volkomen elastisch. Gevraagd het verloop van de beweging van de massapunten na de botsing te bepalen.

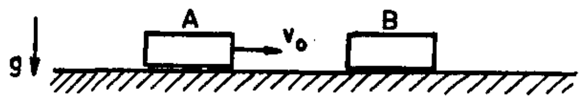
Antwoord:

Bewegingsvergelijkingen: A staat stil.

$$B: \begin{cases} \dfrac{M+m}{m}\,\ddot{x} - \ell\ddot{\theta}\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\ -\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Beginvoorwaarden: $\dot{x}(B) = v$, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = v/\ell$.

109.

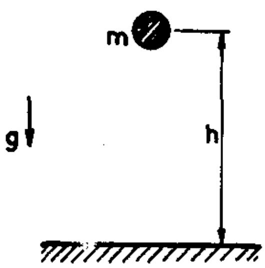


Twee massa's, A en B, beide massa m, kunnen glijden langs een horizontale rechte. De massa A kan zonder wrijving bewegen, de massa B met een wrijvingscoëfficiënt $\frac{\mu}{g}$, waarin g de versnelling van de zwaartekracht is. Op een bepaald moment botst de massa A met een snelheid v_0 tegen de in rust zijnde massa B. Voor deze en de volgende botsingen is de botsingscoëfficiënt 1/3. Gevraagd de weg te bepalen welke door de massa's wordt afgelegd tot zij beide tot rust komen.

Antwoord:

$$x_{tot} = \frac{v_0^2}{4\mu} .$$

110.



Een massapunt (massa m) wordt op een hoogte h boven een horizontaal vlak zonder beginsnelheid losgelaten. De botsingscoëfficiënt tussen het massapunt m en het horizontale vlak bedraagt λ. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt:

a) De tijd die verloopt tussen het loslaten van het massapunt en het tot rust komen ervan.

b) De waarde van λ, indien de totale door het massapunt afgelegde weg gelijk is aan 2h.

Antwoord:

a) $t = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

b) $\lambda = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

111. Een volkomen glad bolletje met massa m_2 is bevestigd aan een vast punt door middel van een niet rekbaar koord waarvan de massa wordt verwaarloosd. Een tweede bolletje met massa m_1 en een snelheid v_1 treft m_2 onder een hoek θ met het koord. De botsingscoëfficiënt bedraagt e. Gevraagd worden de snelheden v_1' en v_2' van resp. m_1 en m_2 na de botsing. Snelheid van m_1 is gericht volgens de verbindingslijn van de zwaartepunten van m_1 en m_2.

Antwoord:

$$v_1' = \frac{v_1(m_1\sin^2\theta - em_2)}{m_2 + m_1\sin^2\theta} \quad ; \quad v_2' = \frac{(e+1)m_1v_1\sin\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta} .$$

112. Een volkomen gladde bol treft een tweede die in rust was. Na de botsing staan de bewegingsrichtingen van beide bollen loodrecht op elkaar. Gevraagd wordt te bewijzen dat, indien de bollen volkomen veerkrachtig zijn, de beide massa's aan elkaar gelijk moeten zijn.

113. Twee identieke bollen (massa m) raken elkaar en rusten op een gladde horizontale tafel. Een derde bol met massa m' botst tegen de beide bollen. Bewijs dat m' ten gevolge van deze botsing tot rust komt indien 2m' = 3me, waarin e de restitutiecoëfficiënt voorstelt en bereken het verlies aan energie tijdens de stoot. De drie bollen hebben gelijke stralen.

114. Een volkomen glad wigvormig lichaam met massa M en hoek α kan bewegen op een volkomen gladde horizontale tafel in een richting loodrecht op zijn rand. Een deeltje met massa m wordt vanaf de wig langs de wig omhoog geschoten met relatieve snelheid V. Leidt af dat het deeltje terugkeert in het punt van de

wig vanwaar het werd weggeworpen na een tijd $\frac{2V(M+m\sin^2\alpha)}{(m+M)g\sin\alpha}$. Bereken ook de kracht tussen het deeltje en de wig gedurende de beweging.

115. Een mechanisch stelsel bestaat uit een vlakke, homogene cirkelvormige schijf (middelpunt O, massa m), waaraan in een punt A van de omtrek een homogene rechte staaf AB (massa m, lengte 2ℓ) is bevestigd. Deze staaf kan in alle richtingen vrij om A draaien. Het stelsel bevindt zich in rust op een horizontaal vlak, zodanig, dat AB in het verlengde van OA ligt en wordt in een punt C van de omtrek van de schijf getroffen door een horizontale stoot S, die naar OA gericht is en loodrecht op OA staat. Wanneer de schijf onmiddellijk na de stoot geen hoeksnelheid heeft, bereken dan:

a) $\cos \angle AOC$.

b) De hoeksnelheid van de staaf onmiddellijk na de stoot.

c) De arbeid door de stoot verricht.

Er is nergens wrijving.

<u>Antwoord</u>:

a) $\cos \angle AOC = \frac{1}{5}$. b) $\frac{3S}{5m\ell}$. c) $\frac{2S^2}{5m}$.

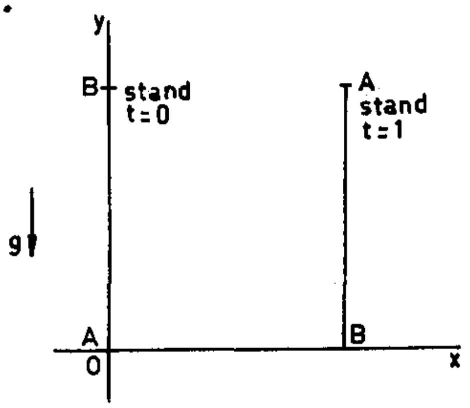
116. a) Met een kanon met massa M en star gemonteerd op een afuit, dat zonder enige wrijving over een horizontaal oppervlak kan rijden, wordt een projectiel met massa m onder een elevatiehoek α afgeschoten, Bepaal de bewegingsrichting van het projectiel bij het verlaten van de loop en toon aan dat, indien het vlak door het kanon onder een hoek β met de horizontaal door het projectiel loodrecht wordt getroffen, geldt $\text{tg}\,\alpha = \frac{M(\cot\beta + 2\text{tg}\,\beta)}{M+m}$.

b) Met het kanon kan men een projectiel met massa m verticaal omhoog schieten tot een hoogte h boven de grond. Indien de elevatie vervolgens op een hoek α wordt ingesteld, wat is dan voor hetzelfde projectiel de schootsverheid uitgedrukt in de grootheden M, m, α en h ?

<u>Antwoord</u>:

a) $\text{bg tg}\{(1+\frac{m}{M})\text{tg}\,\alpha\}$.

b) $\frac{2Mh\sin 2\alpha}{(M+m)}$.

117. 

Van een in rust zijnd rechthoekig assenkruis (O,x,y) is de positieve y-as verticaal naar boven gericht. Een homogene staaf AB met massa m en lengte 2ℓ kan zonder wrijving bewegen in het door het assenkruis bepaalde vlak V. De versnelling van de zwaartekracht is g. Van de aanvankelijk in rust zijnde staaf bevinden zich de uiteinden A en B respectievelijk in O en op de positieve y-as.

Ten tijde $t=o$ wordt de staaf in A door een stoot $\vec{S}$ getroffen waarvan de vector in V ligt.

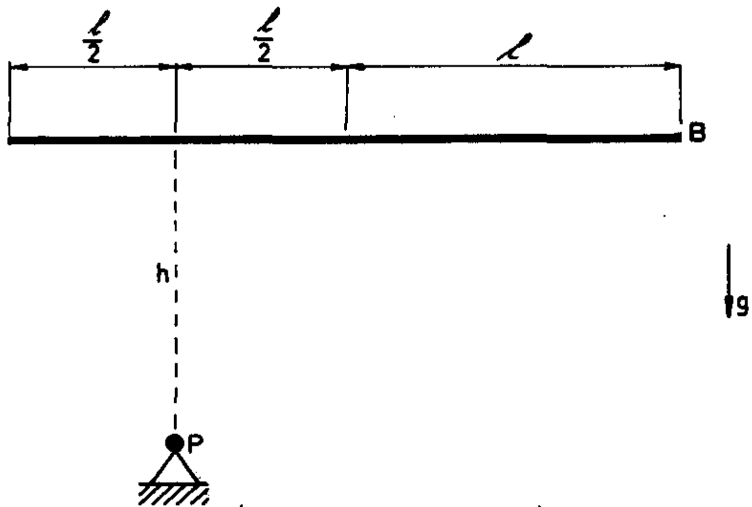
a) Bepaal de componenten S_x en S_y van $\vec{S}$ zodanig, dat op het tijdstip $t=1$ het punt B de x-as bereikt en het punt A zich loodrecht boven B bevindt.

b) Bepaal ook voor deze waarden van S_x en S_y de afstand OB voor $t=1$.

<u>Antwoord</u>:

a) $S_x = \frac{\pi}{3} m\ell$, $S_y = \frac{1}{2} mg$.

b) $OB(t=1) = \frac{\pi}{3}\ell$.

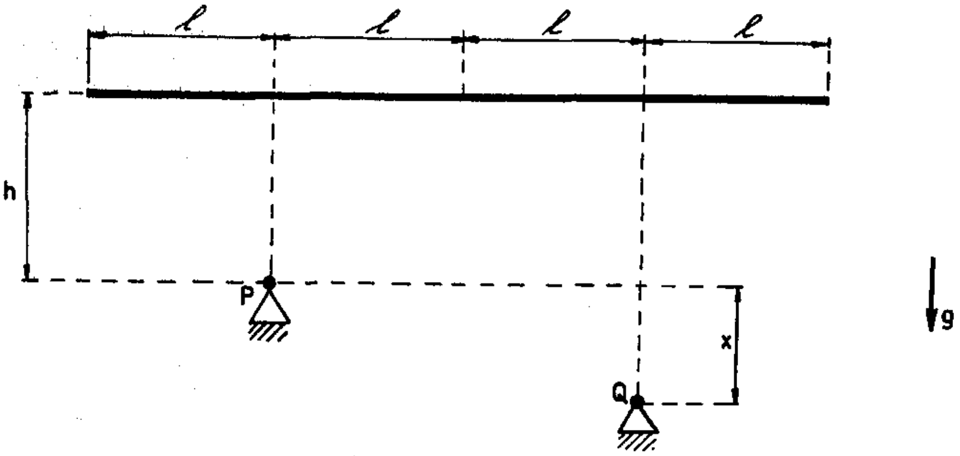
118. 

Een starre homogene balk B (lengte 2ℓ, massa m) valt in horizontale stand onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g) van een hoogte h op een starre pen P. Zoals aangegeven in de figuur treft P de balk B op een afstand $\frac{1}{2}\ell$ van een uiteinde. De botsing verloopt volkomen onelastisch. Hoe beweegt de balk vlak na de botsing?

Antwoord:

Na de botsing roteert de balk met een hoeksnelheid: $\frac{6}{7}\sqrt{2gh}$ om het punt P.

119.



Een homogene starre staaf (lengte 4ℓ, massa m) valt in horizontale stand en zonder beginsnelheid onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g) van een hoogte h op een vaste gladde pen P, zoals hierboven is geschetst. De botsing in P is volkomen elastisch. Gerekend vanaf het moment van de botsing in P stoot de staaf na een tijd $\tau = \frac{7\pi}{24}\frac{\ell}{\sqrt{2gh}}$ tegen een vaste gladde pen Q, waarvan de plaats in bovenstaande schets is aangegeven. De botsing in Q is volkomen onelastisch.

a) Bereken de grootte van stoten in P en Q.

b) Bereken de snelheden van de staaf vóór en onmiddellijk ná de botsingen.

c) Toon aan dat $h > \frac{49\pi^2\ell}{96(24+\pi)}$, opdat na P eerst Q wordt getroffen.

d) Bereken de waarde van x.

Antwoord:

a) $P: \frac{8m}{7}\sqrt{2gh}$, $Q: m[-\frac{64}{35}h + \frac{7\pi}{15}\ell]\sqrt{\frac{g}{2h}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Voor 1° botsing: $v_0 = \sqrt{2gh}$,

na 1° botsing: $v_{zw_1} = -\frac{1}{7}v_0$, $\omega_1 = \frac{6}{7}\frac{v_0}{\ell}$,

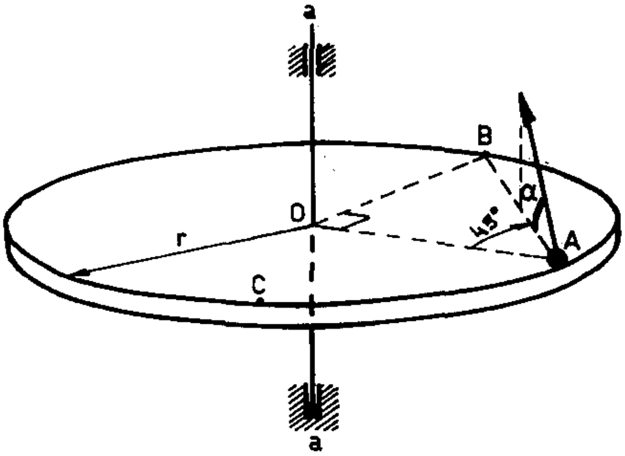
voor 2° botsing: $v_{zw_2} = -\frac{1}{7}v_0 + \frac{7\pi\ell}{24}\sqrt{\frac{g}{2h}}$, $\omega_2 = \frac{6}{7}\frac{v_0}{\ell}$,

na 2° botsing: v_{zw_3} (verticaal) $= (-\frac{32}{35} + \frac{7\pi}{30}\frac{\ell}{h})\sqrt{\frac{gh}{2}}$

v_{zw_3} (horizontaal) $= \omega_3\ell + \frac{1}{2}v_{zw_2}$, $\omega_3 = (\frac{27}{35}\frac{h}{\ell} - \frac{7\pi}{80})\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

d) $x = \ell(1 - \frac{\pi}{24}) + \frac{49\pi^2}{1152} \cdot \frac{g\ell^2}{v_0^2}$.

120.

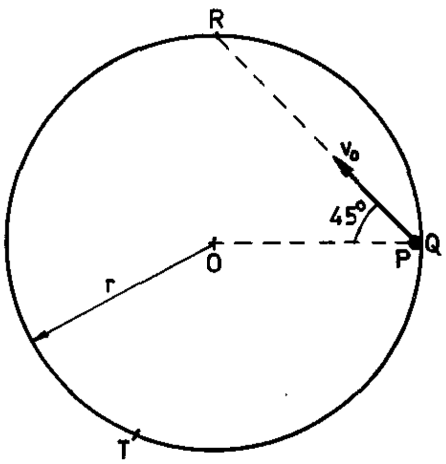


Een homogene, cirkelvormige en gladde schijf (straal r, middelpunt O en massa M) is zonder wrijving draaibaar om een in de ruimte vaste, verticale en massaloze as a-a, die loodrecht staat op het vlak van de schijf. De punten A en B liggen aan de omtrek van de schijf ($\angle$ AOB = 90°). Op een zeker tijdstip wordt in A vanaf de stilstaande schijf een puntmassa m omhooggeschoten zodanig dat de snelheid v_0 ten opzichte van het punt A van de schijf ligt in het verticale vlak door AB en een hoek α maakt met AB. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g. Na een tijd τ valt m op de schijf, botst volkomen veerkrachtig en komt na enige tijd opnieuw in contact met de schijf, nu in een punt C van de omtrek. Bereken v_0 en de positie van C bij het begin van de beweging.
Hint: Behoud van impulsmoment om O. Waarom?

Antwoord:

$$v_0 = (M + 2m)\sqrt{\frac{gr\sqrt{2}}{2 \sin 2\alpha(M^2 + 2mM + 2m^2)}} \quad , \quad \text{hoek AOC} = \frac{2m^3}{(M + 2m)(M^2 + mM + m^2)} \; .$$

121.

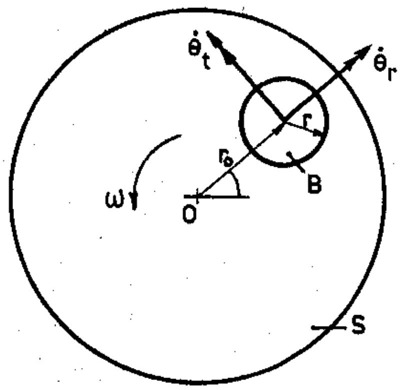


In bovenstaande figuur is geschetst een homogene cirkelvormige schijf (straal r, massa M), die zonder wrijving draaibaar is in een horizontaal vlak om het in de ruimte vaste middelpunt O. In het vlak van de schijf kan een puntmassa P (massa m) bewegen eveneens zonder wrijving. Voor $t \leqslant 0$ bevindt P zich in het punt Q aan de omtrek van de schijf en staat de schijf stil. Op het tijdstip $t = 0$ wordt P vanuit Q weggeschoten met een snelheid v_0 ten opzichte van het punt Q van de schijf in de richting QR($\angle$ OQR = 45°) en ten tijde $t = \tau$ passeert P de omtrek in punt T. Gevraagd wordt de grootte van τ en de positie van T op het tijdstip $t = 0$.

Antwoord:

$$\tau = \frac{r\sqrt{2}}{v_0}\,\frac{(M+2m)^2}{(M^2+2mM+2m^2)} \quad , \qquad \text{hoek } QOT = \frac{2m(M+2m)}{M^2+2mM+2m^2} \quad .$$

122.

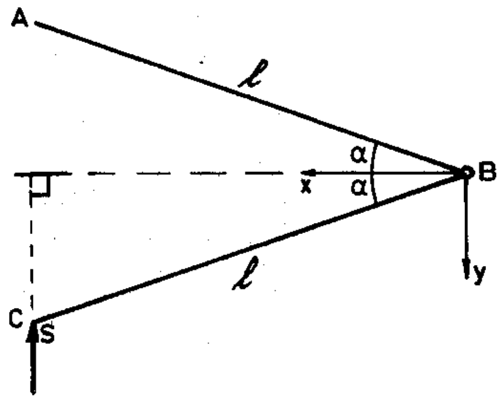


Een homogene bol B (straal r, massa m) rust op een stilstaande vlakke horizontale schijf S. Het oppervlak van S is volkomen ruw. De hoeizontale afstand tussen O en het middelpunt van B bedraagt r_0. Plotseling begint S te draaien met een hoeksnelheid ω om een verticale as door een punt O van S. Bereken de aanvankelijke bewegingstoestand van de bol

Antwoord:

$$\dot r_0 = 0 \quad , \quad \dot\varphi = \frac{2}{7}\,\omega \ , \quad \dot\theta_r = \frac{5}{7}\,\frac{r_0\omega}{r} \quad , \quad \dot\theta_t = 0 \ .$$

123.



De homogene staven AB en CB (ieder met massa m en lengte ℓ) zijn in punt B scharnierend met elkaar verbonden. De hoek ABC is gelijk aan 2α. Op het aanvankelijk in rust zijnde systeem werkt in punt C een stoot S, waarvan de werklijn valt langs CA. Bereken de beweging direct na de stoot en de grootte en richting van de reactiestoot in het scharnier bij B. Wat is de arbeid verricht door S ?

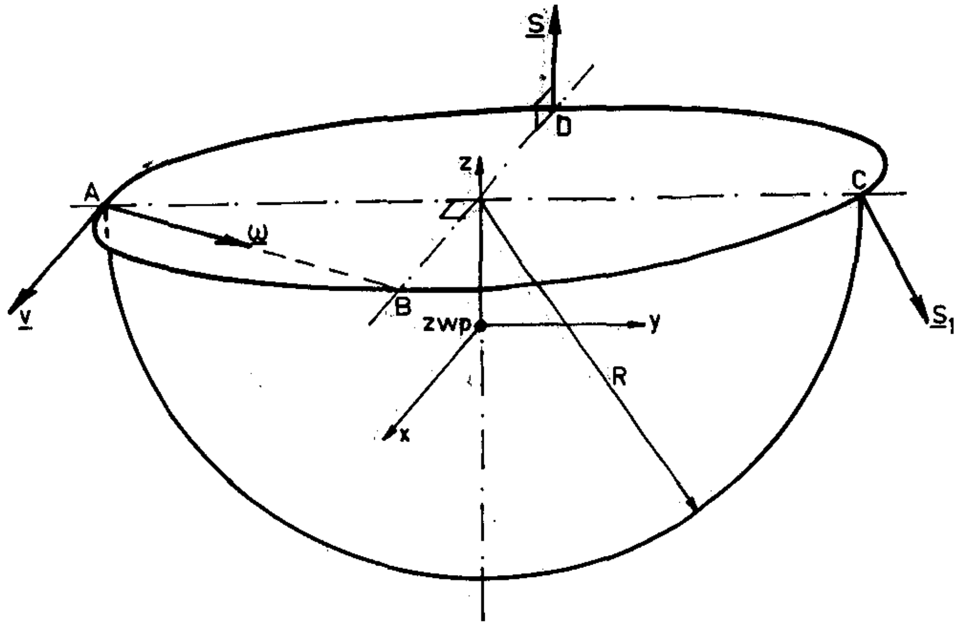
Antwoord:

$$\omega_{tot} = \frac{3S\cos\alpha}{m\ell(1+3\sin^2\alpha)} \pm \frac{6S\cos\alpha}{m\ell(1+3\cos^2\alpha)} \quad ;$$

$$\dot x_B = -\frac{3S\sin\alpha\cos\alpha}{m(1+3\cos^2\alpha)} \quad ; \quad \dot y_B = -\frac{S(1-3\cos 2\alpha)}{2m(1+3\sin^2\alpha)} \quad ;$$

$$S_x = -\frac{3S\sin\alpha\cos\alpha}{2(1+3\sin^2\alpha)} \quad ; \quad S_y = \frac{S(1-3\cos^2\alpha)}{2(1+3\cos^2\alpha)} \quad .$$

124.



Een vrije halve bolschaal (massa m, straal R), die star en homogeen is, wordt begrensd door een grote cirkel waarop vier punten A, B, C en D zijn gemarkeerd zoals hierboven is geschetst (AC ⊥ BD). De bol, waarvan de momentane snelheidsverdeling wordt gegeven door de snelheid $\underline{v}$ van punt A en de rotatie $\underline{\omega}$ ($\underline{v}$ is evenwijdig met DB en de richting van $\underline{\omega}$ is die van de lijn AB), wordt gelijktijdig getroffen door de stoten $\underline{S}$ in D en $\underline{S}_1$ in C ($\underline{S}$ staat loodrecht op vlak ABCD). Gevraagd wordt het impulsmoment in punt C vlak na de stoot.

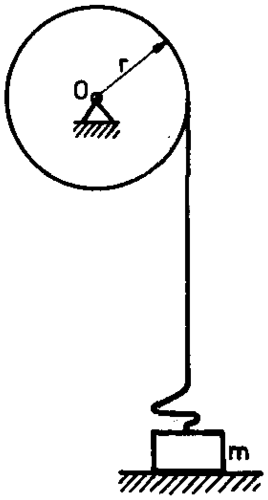
Antwoord:

$$D_x = -\frac{1}{6}m\omega R^2\sqrt{2} - SR \quad ,$$

$$D_y = \frac{1}{3}m\omega R^2\sqrt{2} + SR - \frac{1}{2}mvR \quad ,$$

$$D_z = -\frac{1}{4}m\omega R^2\sqrt{2} + mvR \quad .$$

125.

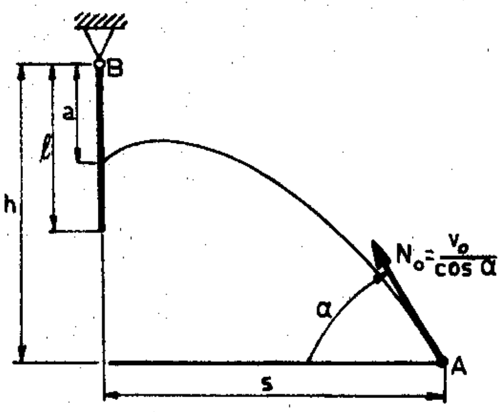


Op de omtrek van een schijf, straal r en traagheidsmoment J om de draaiingsas, is een uiteinde van een massaloos onrekbaar koord bevestigd. Het andere uiteinde van het slap hangende koord is vastgemaakt aan een lichaam met massa m, dat in rust op een vlak onder de schijf ligt. Wanneer de schijf zonder wrijving begint te draaien met een hoeksnelheid Ω wordt op een bepaald ogenblik het koord gespannen. De botsing verloopt volkomen onveerkrachtig. Gevraagd wordt de verandering in de hoeksnelheid van de schijf en de verandering van de kinetische energie van het systeem op dat moment te bepalen.

Antwoord:

$$\omega = \frac{I\Omega}{(I + mr^2)} \quad ; \quad \Delta T = \frac{mr^2}{(I + mr^2)} \cdot \frac{1}{2} I\Omega^2 \quad .$$

126.



Een massapunt, massa m, wordt met een snelheid N_0 onder een hoek α met de horizontaal weggeschoten in het zwaartekrachtsveld vanuit het punt A. Nadat het massapunt, in horizontale richting gemeten, een weg s heeft afgelegd, treft het een homogene gladde staaf, massa M, lengte ℓ, welke in een uiteinde in een vast punt B op een hoogte h boven A scharnierend is opgehangen. De botsingscoëfficiënt bedraagt λ. Gevraagd wordt de bewegingen voor en na de botsing en het energieverlies door de stoot te bepalen.

Hint: De staaf is glad, dus de stoot staat loodrecht op de staaf.

Antwoord:

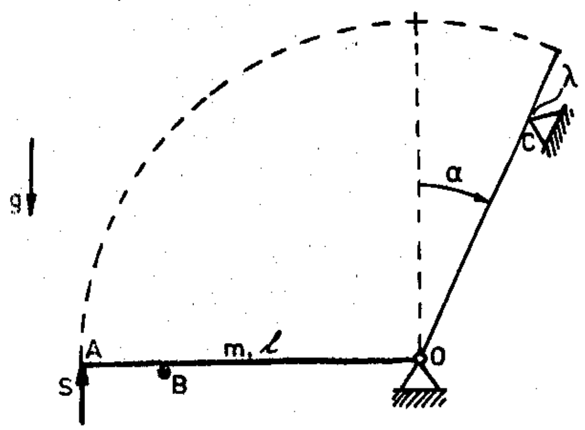
$$v_0 = N_0 \cos\alpha \quad \text{en} \quad a = h + \frac{gs^2}{2v_0^2} - s \tan\alpha \ .$$

Hoeksnelheid van de staaf na de botsing: $\dot{\phi} = \dfrac{ma(1 + \lambda)}{ma^2 + \frac{1}{3} M\ell^2} v_0$.

Horizontale snelheid van de massa na de botsing: $V = \dfrac{ma^2 - \frac{1}{3}\lambda M\ell^2}{ma^2 + \frac{1}{3} M\ell^2} v_0$.

Energieverlies: $\Delta T = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[1 - \dfrac{(ma^2 + \frac{1}{3}\lambda^2 M\ell^2)}{(ma^2 + \frac{1}{3} M\ell^2)} \right]$.

127.



In een verticaal vlak V liggen drie punten O, B en C. De lijn OB is horizontaal en de lijn OC maakt een hoek $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ met OB, waarbij C boven OB ligt. Aan het punt O is scharnierend bevestigd een homogene, rechte staaf OA (lengte ℓ, massa m), welke zonder wrijving kan draaien in het verticale vlak V. De afstanden OB en OC zijn kleiner dan ℓ. In de rusttoestand ligt de staaf vrij op een ondersteuning in het punt B. Op zeker moment werkt in het einde A op de staaf in rust een verticale, naar boven gerichte stoot S. In het punt C bevindt zich een vaste aanslag. De botsingscoëfficiënt tussen de staaf en het punt C bedraagt λ $(0 < \lambda < 1)$; die tussen de staaf en het punt B is gelijk aan nul. De versnelling van de zwaartekracht is g. Gevraagd wordt:

a) De maximale en de minimale waarde waartussen S moet liggen, opdat de staaf uiteindelijk langs de rechte OC tot rust komt.

b) Verklaar de grensgevallen: $\lambda = 0$ en $\lambda = 1$.

Antwoord:

$$S_{min} = \frac{1}{3} m\sqrt{3g\ell} \quad , \quad S_{max} = \frac{m}{3\lambda}\sqrt{3g\ell[1-(1-\lambda^2)\cos\alpha]} \; .$$

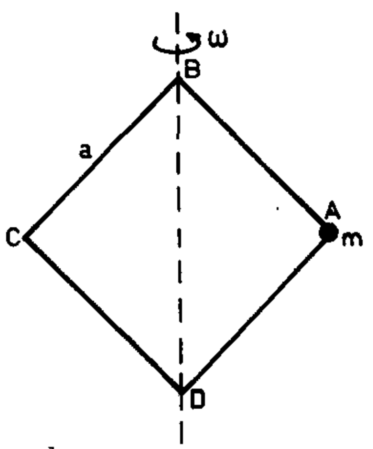
128. Een vrije homogene bol (massa m en straal a), op welks oppervlak in een willekeurig punt P een puntmassa m is bevestigd, roteert momentaan met een hoeksnelheid ω om een willekeurige as door zijn middelpunt. Plotseling wordt het punt P vastgezet. Gevraagd wordt de grootte en richting van de stoot en van de hoeksnelheid ná de stoot.
Hint: Zoek as(sen), waarom het impulsmoment constant is.

Antwoord:

$S = \frac{9}{7} ma\omega \sin\beta$ met: β = hoek tussen MP en rotatieas.

Hoeksnelheid na de stoot:
component langs MP: $\omega \cos\beta$,
component in vlak door ω en MP en $\perp$ MP: $\frac{2}{7}\omega \sin\beta$.

129.



Een vrije homogene vierkante plaat ABCD met massa m en zijde a roteert momentaan om de diagonaal BD met de hoeksnelheid . Het hoekpunt A botst tegen een in rust zijnde puntmassa m, welke door de botsing blijvend aan de plaat wordt verbonden. Er is géén zwaartekracht. Hoe is de beweging van de plaat onmiddellijk ná de botsing?

Antwoord:

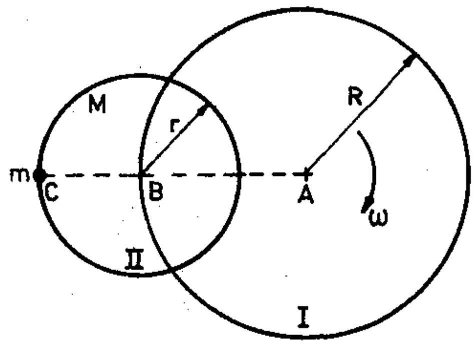
$\Omega = \frac{1}{7}\omega$.

130. Een vrije homogene kegel (hoogte h, straal grondvlak a, massa m) draait om zijn symmetrie-as met een hoeksnelheid ω. Plotseling worden de top en een willekeurig punt op het manteloppervlak gefixeerd. Bereken de na het stootverschijnsel optredende hoeksnelheid.

Antwoord:

$$\Omega = \frac{2\omega}{\cos\,\alpha(6 + \tan^2\alpha)}\,.$$

131.



Een schijf, I, straal R, draait aanvankelijk met constante hoeksnelheid ω om een as loodrecht op de schijf door het middelpunt A. Een tweede schijf, II, homogeen, massa M, straal r, is draaibaar om zijn middelpunt B aan de eerste schijf bevestigd. Het punt B ligt op de omtrek van I, terwijl de schijven in hetzelfde vlak bewegen. Op de omtrek van II is in het punt C een massapunt, massa m, bevestigd. Het systeem beweegt zodanig dat de twee schijven t.o.v. elkaar in rust zijn, terwijl C op het verlengde van AB ligt. Op een bepaald ogenblik wordt schijf I vastgezet. Bereken:

a) De stoot in B.

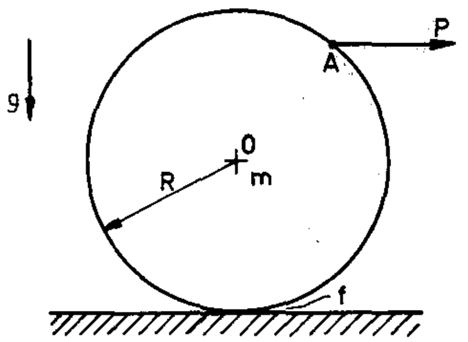
b) De hoeksnelheid van II onmiddellijk na het vastzetten.

Hint: Beschouw impulsmoment om punt B.

Antwoord:

a) $S = \dfrac{\omega MR}{M + 2m}\,(M + 3m)\,.$

b) $\Omega = \dfrac{Mr + 2m(R + r)}{Mr + 2mr}\,\omega\,.$



Een homogene cirkelvormige schijf, massa m, straal R, staat loodrecht op een ruw horizontaal vlak. De wrijvingscoëfficiënt tussen schijf en vlak is f. In een punt A van de omtrek van de schijf grijpt een horizontale constante kracht P in het vlak van de schijf aan. Op het tijdstip $t=0$ is de schijf in rust en bevindt het punt A zich verticaal boven het middelpunt. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt:

a) de waarde van f opdat de schijf aanvankelijk rolt;

b) de waarde van f opdat de schijf gedurende de gehele beweging blijft rollen;

c) de beweging van de schijf te beschrijven, indien f groter is dan de onder b) gevonden waarde.

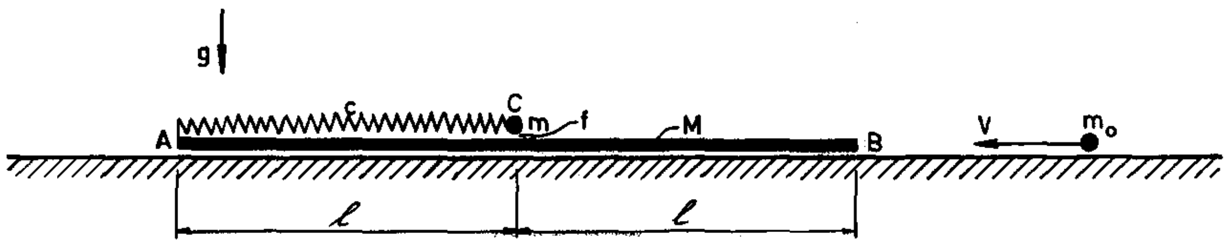
Antwoord

a) $f \geq \frac{P}{3mg}$.

b) $f \geq \frac{P}{mg}$.

c) $\dot{\varphi}^2 = \frac{4P}{3mR} (\varphi + \sin\varphi)$.

133.



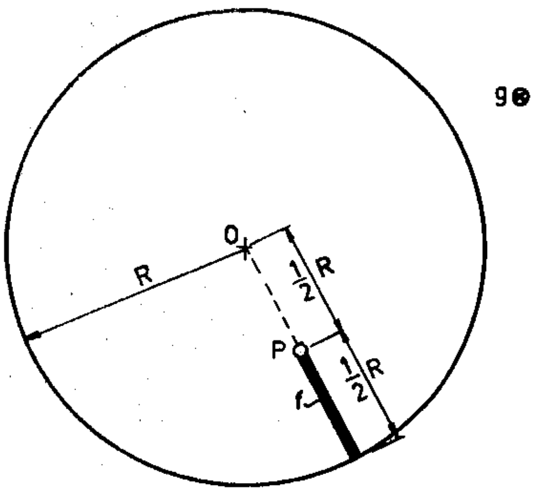
Een homogene balk, massa M, lengte 2ℓ, ligt op een glad horizontaal vlak. Op de balk ligt een massapunt C, massa m, met een massaloze veer, veerstijfheid c, ongespannen lengte ℓ, verbonden met het uiteinde A van de balk. De wrijvingscoëfficiënt tussen massapunt en balk is f, de versnelling van de zwaartekracht is g. Op het tijdstip $t=0$ botst een massapunt, massa m_0, met snelheid V, gericht langs de hartlijn van de balk, tegen het uiteinde B van de balk. De botsingscoëfficiënt is λ.

Gevraagd wordt hoe groot f moet zijn opdat het massapunt C van de balk glijdt.

Antwoord

f uit: $\mu f m g[v - \sqrt{v^2 + (\mu f m g)^2}\,] + v^2 = \mu c \ell \sqrt{v^2 + (\mu f m g)^2}$.

134.



Een cirkelvormige ruwe schijf, straal R, kan om een verticale as door het middelpunt O draaien. Op de schijf ligt een homogene staaf, massa m, lengte $\frac{1}{2}$R, scharnierend verbonden met de schijf in het punt P op een afstand $\frac{1}{2}$R van O. De staaf ligt in het verlengde van de lijn OP. De wrijvingscoëfficiënt tussen staaf en schijf is f, de versnelling van de zwaartekracht is g.

Op een bepaald tijdstip begint de schijf met de constante hoeksnelheid ω te roteren.

Gevraagd wordt de bewegingsvergelijking van de staaf met de beginvoorwaarden te bepalen.

Antwoord

$\frac{1}{3} mR\ddot{\theta} + \frac{1}{2} m\omega^2 R \sin\theta = - W$,

met $W = mgf$ voor $\dot{\theta} > 0$,

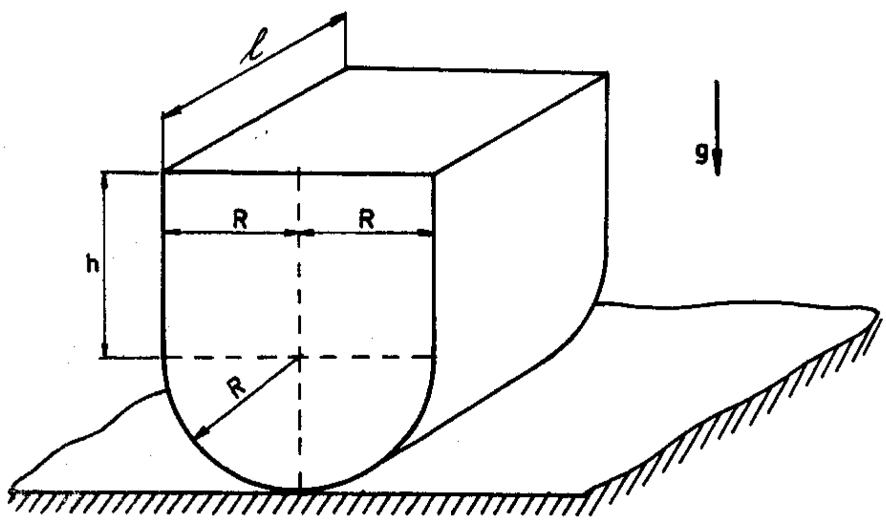
$W = - mgf$ voor $\dot{\theta} < 0$,

en θ: hoek tussen staaf en OP.

Beginvoorwaarden:

$t = 0$, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \frac{5}{2}\omega$.

135.

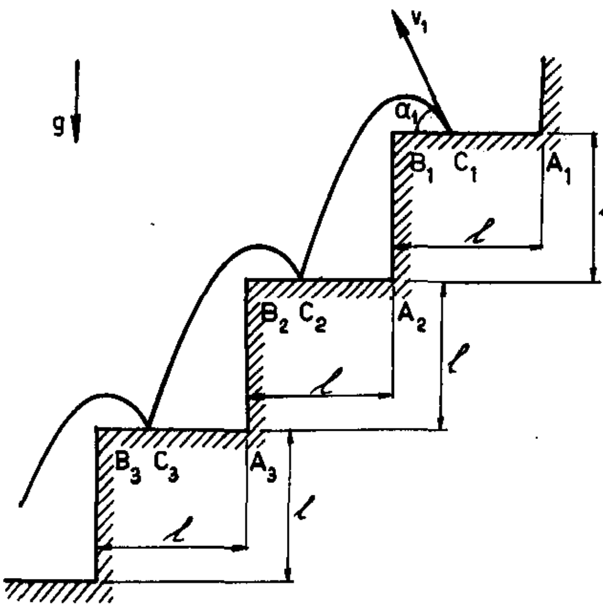


Een homogeen cilindrisch lichaam (lengte ℓ, soortelijke massa ρ) heeft een dwarsdoorsnede bestaande uit een halve cirkel (straal R) aan een rechthoek (hoogte h, breedte 2R).
Dit lichaam rust, met de lengteas horizontaal, op een volkomen ruw horizontaal vlak. De versnelling van de zwaartekracht is g.
Aan welke voorwaarde moet h voldoen, opdat de stand van het lichaam, waarbij de symmetrielijn van de dwarsdoorsnede verticaal staat, stabiel is.

Antwoord

$$h < \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,R \quad .$$

136.

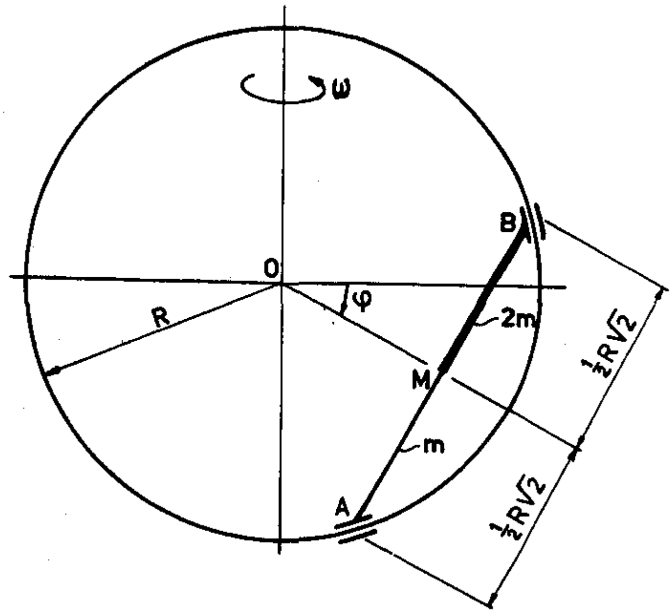


In een verticaal vlak ligt een volkomen gladde trap met de treden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc. De breedte van de treden en de afstand tussen twee treden bedraagt ℓ. Vanaf het punt C_1 op de trede A_1B_1 wordt een massapunt (massa m) afgeschoten met een snelheid v_1 onder een hoek α_1 met de horizontaal $(0 < \alpha_1 < \pi/2)$. Het massapunt gaat bewegen onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g) en valt (botst) na enige tijd in het punt C_2 op de trede A_2B_2. Tussen C_1 en C_2 raakt het massapunt geen andere punten van de trap. De afstanden B_1C_1 en B_2C_2 zijn gelijk. De botsingscoëfficiënt tussen trap en massapunt bedraagt λ. Na de botsing in C_2 stuit het massapunt op de trede A_3B_3 etc.
Hoe moeten v_1 en α_1 gekozen worden, opdat de baan die het massapunt tussen twee opeenvolgende treden beschrijft, voor alle treden identiek is.

Antwoord

$$v_1 = \sqrt{\frac{(1-2\lambda+5\lambda^2)}{2(1-\lambda^2)}}\,\sqrt{g\ell} \quad , \qquad \alpha_1 = \arctan\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right) \quad .$$

137.



Een cirkel (straal R, middelpunt O) roteert met een constante hoeksnelheid ω om een middellijn. Een inhomogene staaf AB kan met de uiteinden A en B zonder wrijving langs de cirkel glijden. De lengte van de staaf is $R\sqrt{2}$. De staaf bestaat uit twee homogene stukken: AM met massa m en MB met massa 2m. (AM = MB). De invloed van de zwaartekracht kan buiten beschouwing worden gelaten.

Gevraagd wordt de kinetische evenwichtsstanden van AB te bepalen en de stabiliteit van deze standen te onderzoeken.

Antwoord

Evenwichtsstanden:

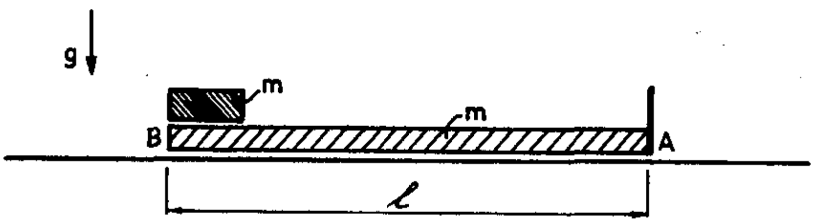
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \ : \ \sin(2\varphi) = \frac{1}{5}\sqrt{5} \quad \text{, stabiel,}$$

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi \ : \ \sin(2\varphi) = \frac{2}{5}\sqrt{5} \quad \text{, instabiel,}$$

$$\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} \ : \ \sin(2\varphi) = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \quad \text{, stabiel}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi : \ \sin(2\varphi) = -\frac{2}{5}\sqrt{5} \quad \text{, instabiel.}$$

138.



Een balk AB, massa m, lengte ℓ, kan zonder wrijving glijden op een horizontaal vlak. Op de balk kan een blok, massa m en te verwaarlozen lengte, glijden. De wrijvingscoëfficiënt tussen blok en balk bedraagt f. De versnelling van de zwaartekracht is g.

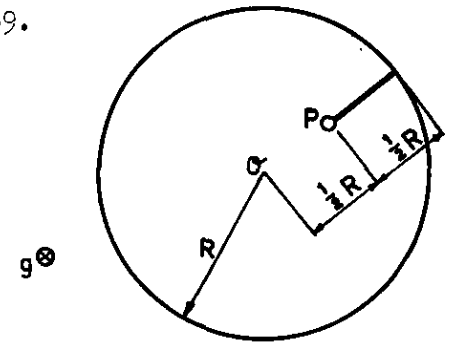
Op zeker moment wordt het blok met een snelheid v_0 ten opzichte van de balk vanaf het uiteinde B afgeschoten in de richting van het andere uiteinde A waar zich een aanslag bevindt. De botsing van het blok met de aanslag is volkomen elastisch.

Hoe groot moet v_0 gekozen worden, opdat het blok na de botsing tussen A en B tot rust komt.

Antwoord

$2\sqrt{fg\ell} < v_0 < 2\sqrt{2fg\ell}$.

139.

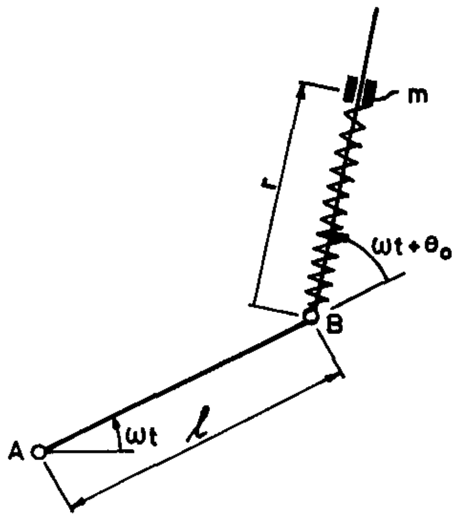


Een schijf, straal R, draait met de hoeksnelheid ω om een vaste verticale as door het middelpunt O. Op de schijf ligt een homogene staaf, massa m, lengte $\frac{1}{2}$R, welke scharnierend is bevestigd in het punt P op een afstand $\frac{1}{2}$R van O. De staaf ligt in het verlengde van OP. Het scharnier is wrijvingsloos. De wrijvingscoëfficiënt tussen de staaf en de schijf bedraagt f. De versnelling van de zwaartekracht is g.
Op een bepaald ogenblik wordt de schijf gefixeerd.
Hoe groot moet ω worden gekozen opdat na de fixatie de staaf juist éénmaal om P roteert.

Antwoord

$\omega = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{3\pi fg}{R}}$.

140.

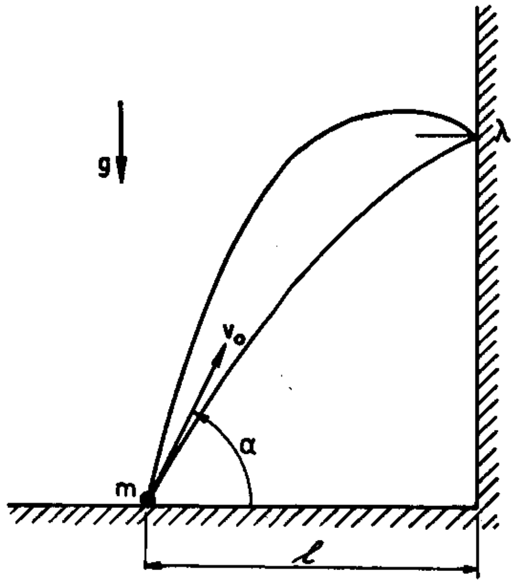


De staaf AB, lengte ℓ, draait met constante hoeksnelheid ω om de verticale as door het uiteinde A. In het uiteinde B is een tweede staaf bevestigd welke kan scharnieren in het horizontale vlak door A.
De relatieve hoeksnelheid van de tweede staaf t.o.v. de eerste is ω. Langs deze staaf kan een massapunt glijden, massa m, dat via een massaloze lineaire veer, (veerconstante c, ongespannen lengte ℓ_0) verbonden is met het scharnier in B.
Gevraagd wordt de beweging van het massapunt te beschrijven.

Antwoord

$m\ddot{r} - 4m\omega^2 r - m\omega^2\ell\cos(\omega t + \theta_0) = -c(r - \ell_0)$.

141.

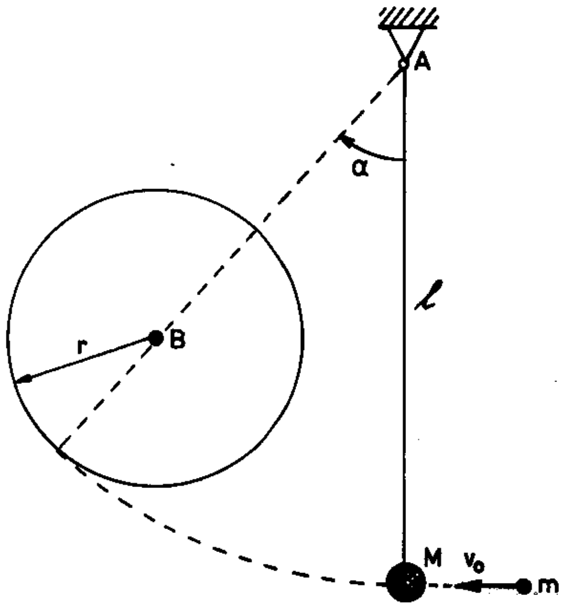


Een massapunt, massa m, wordt met beginsnelheid v_0 vanuit het punt A onder een hoek α met de horizontaal afgeschoten. Nadat het punt in horizontale richting de weg ℓ heeft afgelegd botst het tegen een gladde verticale wand, loodrecht op de horizontale component van v_0. De botsingscoëfficiënt bedraagt λ, de versnelling van de zwaartekracht g.
Gevraagd v_0 opdat de baan van het punt na de botsing weer door A gaat.

Antwoord

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\ell(\lambda+1)}{\lambda \sin 2\alpha}} .$$

142.



Een massa m hangt aan een volkomen buigzaam, massaloos koord, lengte ℓ, bevestigd in het vaste punt A. Een massa m wordt met een snelheid v_0 horizontaal in de massa M geschoten. Na de botsing beschrijft de totale massa, M + m, aanvankelijk een cirkelbeweging om A. Nadat over een hoek α is gedraaid raakt het koord de vaste pen B op een afstand $\ell - r$ $(r < \frac{1}{2}\ell)$ van A. De diameter van de pen is te verwaarlozen. De snelheid van de totale massa is zo groot dat gedurende de volgende beweging een cirkel om B wordt beschreven waarbij het koord strak gespannen blijft. De versnelling van de zwaartekracht is g.
Gevraagd wordt de minimale grootte van v_0 te bepalen.

Antwoord

$$v_0 = \frac{M+m}{m} \sqrt{g[r(2+\cos\alpha) + \ell(1-\cos\alpha)]} .$$

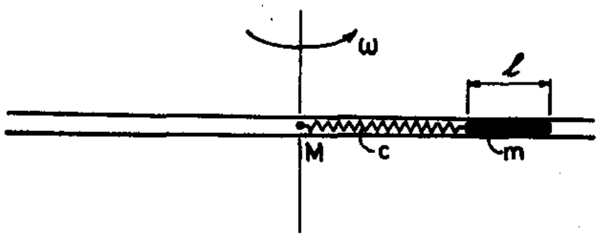
Examenvraagstukken

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/Tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 6 april 1968, 9.00 - 12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

1.



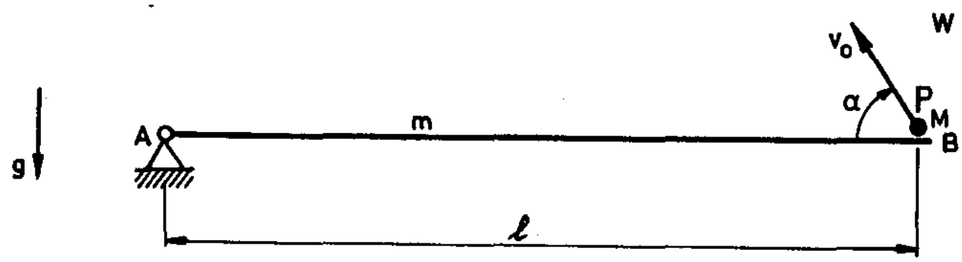
Een homogene staaf (massa m, lengte ℓ) kan zonder wrijving glijden in een rechte buis. Een uiteinde van de staaf is door middel van een massaloze veer (veerconstante c, ongespannen veerlengte nul) verbonden met het punt M van de buis. De buis draait met de constante hoeksnelheid ω om het vaste punt M in een horizontaal vlak.

a) Bepaal de evenwichtsstand van de staaf.

b) Voor welke waarden van ω is deze evenwichtsstand stabiel?

c) Bepaal de frequentie van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstand.

2.



De homogene staaf AB (massa m, lengte ℓ) kan in een vast verticaal vlak W draaien om het vaste punt A. Op de staaf bevindt zich in het punt B een massapunt P (massa M). Op een tijdstip t_0 waarop de staaf zich in de getekende horizontale stand bevindt en waarop alles in rust is, wordt P vanaf het punt B van de staaf in W weggeschoten, zodanig dat de relatieve snelheid van P ten opzichte van B gelijk is aan v_0 en een hoek α met de staaf maakt. Daarna bewegen de staaf en het massapunt onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g). Na een tijd t_1 treft P de balk juist in punt A.

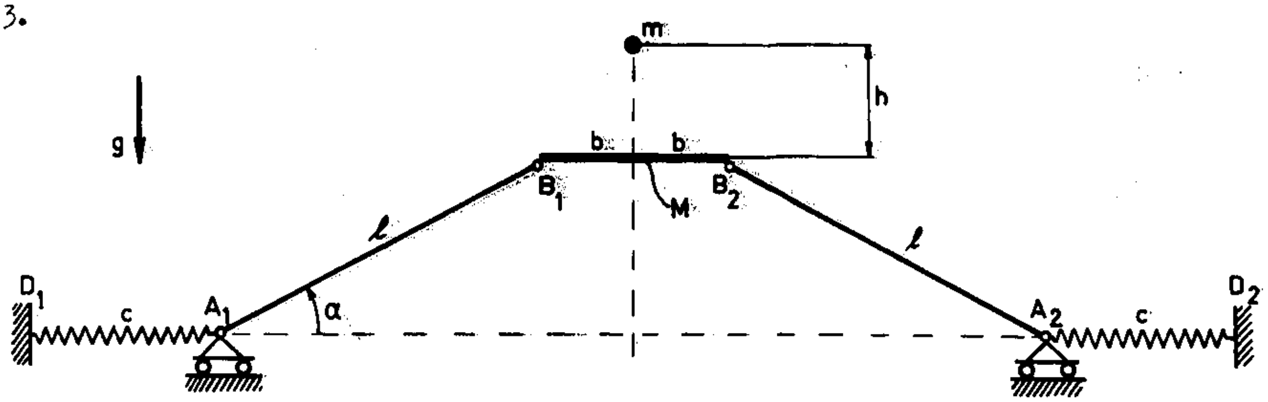
a) Waarom blijft de impuls op $t = t_0$ niet behouden?
   Bereken de reactiestoot, die op $t = t_0$ in A optreedt.

b) Bereken t_1.

c) Bereken het verband dat tussen de grootheden v_0, α, ℓ, g, m en M moet bestaan.

d) Geef een vergelijking waaruit men de hoek kan bepalen waarover de staaf op het moment van treffen is gedraaid.

3.



Een homogene staaf B_1B_2 (lengte 2b, massa M) is in zijn eindpunten B_1 en B_2 scharnierend verbonden met twee massaloze staven A_1B_1 en A_2B_2 (lengte ℓ), welke in de punten A_1 en A_2 verbonden zijn met twee massaloze lineaire veren (veerstijfheid c), die bevestigd zijn aan de vaste punten D_1 en D_2. De punten A_1 en A_2 kunnen alleen horizontaal bewegen. In de rusttoestand is de staaf B_1B_2 zuiver horizontaal en bevindt zich op een afstand $\ell \sin \alpha$ boven de horizontale rechte door D_1, A_1, A_2 en D_2. De massa M is zo klein dat de evenwichtsstand met $\alpha > 0$ mogelijk is. De versnelling van de zwaartekracht is g.

i) Bereken de statische indrukking van de veren A_1D_1 en A_2D_2.

Op een hoogte h verticaal boven het midden van B_1B_2 bevindt zich een massa m. De massa m wordt zonder beginsnelheid losgelaten. De botsing tussen m en B_1B_2 is volkomen onelastisch en m blijft met de staaf meebewegen.

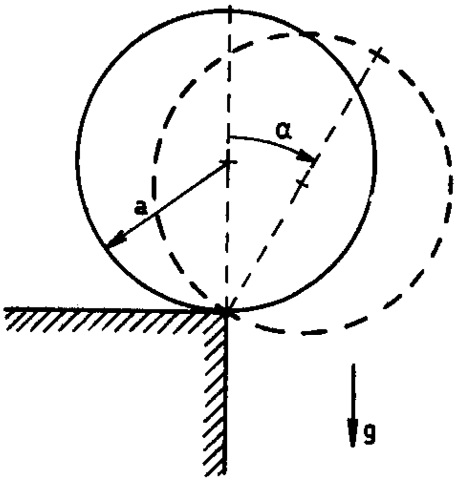
ii) Toon aan dat tijdens de botsing de impuls behouden blijft, als gevolg van het feit dat de staven A_1B_1 en A_2B_2 en de veren A_1D_1 en A_2D_2 massaloos zijn.

iii) Gevraagd de grootte van h, opdat de staaf B_1B_2 door de horizontaal A_1A_2 zal gaan, waarbij aangenomen ~~mag worden~~ dat de staaf B_1B_2 steeds horizontaal blijft.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

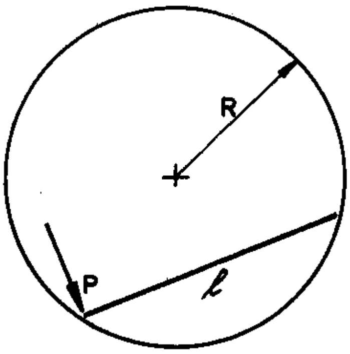
Examen/tentamen Theoretische Mechanica, W IV, WSK IV op zaterdag 8 juni 1968, 9.00 - 12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

1. 

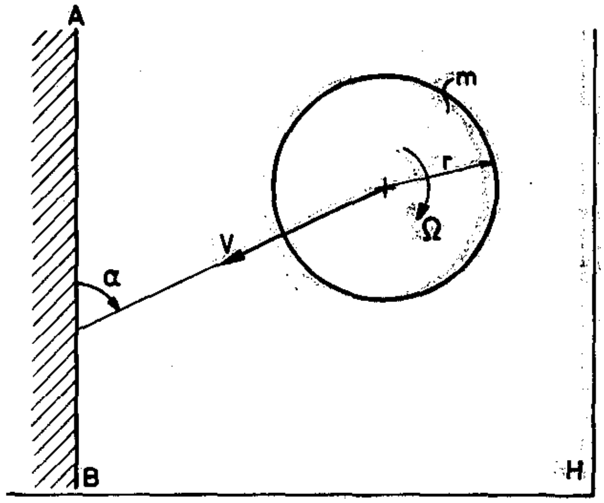
Een homogene bol (massa m, straal a) is in rust op de rand van een horizontaal vlak. Deze rusttoestand wordt verstoord en de bal rolt van het vlak met een beginsnelheid die verwaarloosbaar klein is. De wrijving tussen de bol en de rand is groot genoeg om glijden te voorkomen. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.

a) Bereken de hoek α waarbij de bol van de rand loskomt.
b) Hoe groot is de hoeksnelheid op dat moment?
c) Wat is de kleinste waarde van de wrijvingscoëfficiënt die mogelijk is?

2. 

Een homogene balk (massa m, lengte ℓ) beweegt in een horizontaal vlak zodanig dat de eindpunten van de balk zonder wrijving glijden lang een cirkel (straal R).
Op de balk werkt een horizontale kracht P aangrijpend in een van de eindpunten. De kracht blijft tijdens de beweging steeds loodrecht op de balk.

Gevraagd wordt te berekenen de toename van de energie en van de hoeksnelheid van de balk gedurende de eerste omwenteling.

3. 

Een homogene cirkelvormige schijf (straal r, massa m) beweegt zonder wrijving in een horizontaal vlak H. De schijf heeft een hoeksnelheid Ω en de snelheid van zijn middelpunt is V. Na enige tijd botst de schijf tegen een starre wand AB, welke loodrecht op H staat en een hoek α maakt met de richting van V.

Gevraagd wordt de beweging van de schijf na de botsing voor twee verschillende gevallen:

i) de wand AB is volkomen glad,

ii) de wand AB is volkomen ruw.

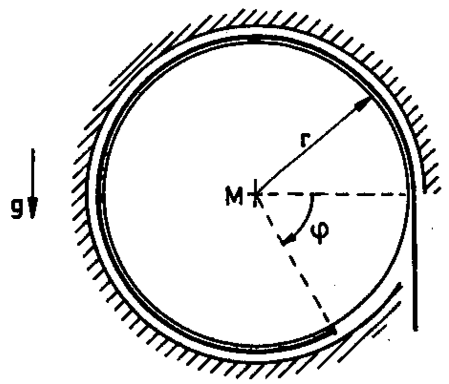
In beide gevallen is de botsingscoëfficiënt in de richting loodrecht op AB gelijk aan λ.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Tentamen Theoretische Mechanica, W IV, WSK IV, zaterdag 12 october 1968, 9.00 - 12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen te worden gemaakt en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

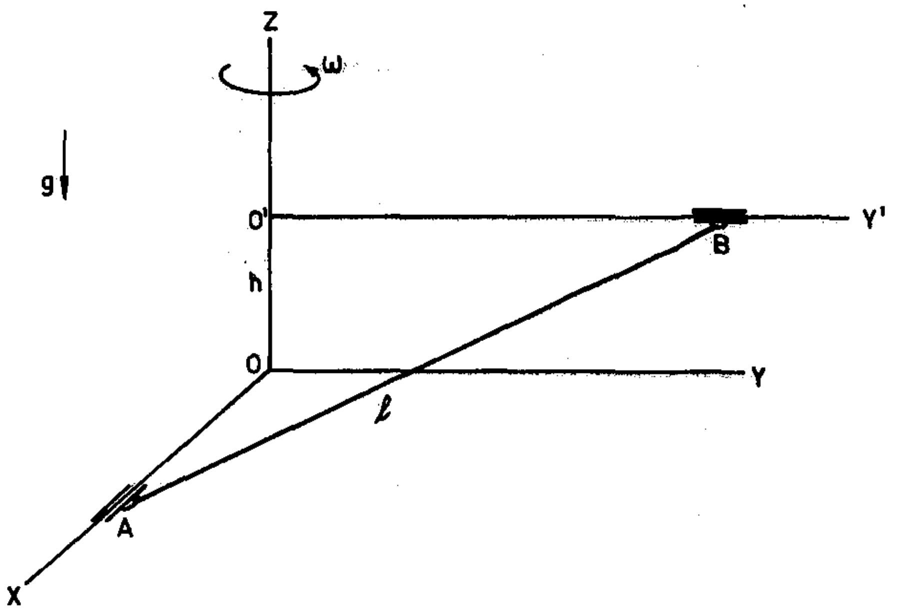
1.



Een homogene schijf (massa m, straal r) kan zonder wrijving draaien om een horizontale as door het middelpunt M en loodrecht op het vlak van de schijf. Langs de omtrek van de schijf is een homogene ketting (massa per lengte-eenheid ρ, lengte $2\pi r$) gewikkeld. Een uiteinde van de ketting is aan de schijf bevestigd, het andere uiteinde is vrij en bevindt zich op de horizontaal door M. Op een zeker moment krijgt het vrije uiteinde van de ketting een snelheid v vertikaal naar beneden waarna de ketting van de schijf afrolt onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g). Gedurende de beweging komen de elementen van de ketting niet los van de schijf tot de horizontaal door M wordt bereikt.

Gevraagd wordt de hoeksnelheid van de schijf als functie van de draaiingshoek te berekenen. Geef een uitdrukking, in de vorm van een bepaalde integraal, voor de tijd welke benodigd is opdat de gehele ketting is afgerold.

2.



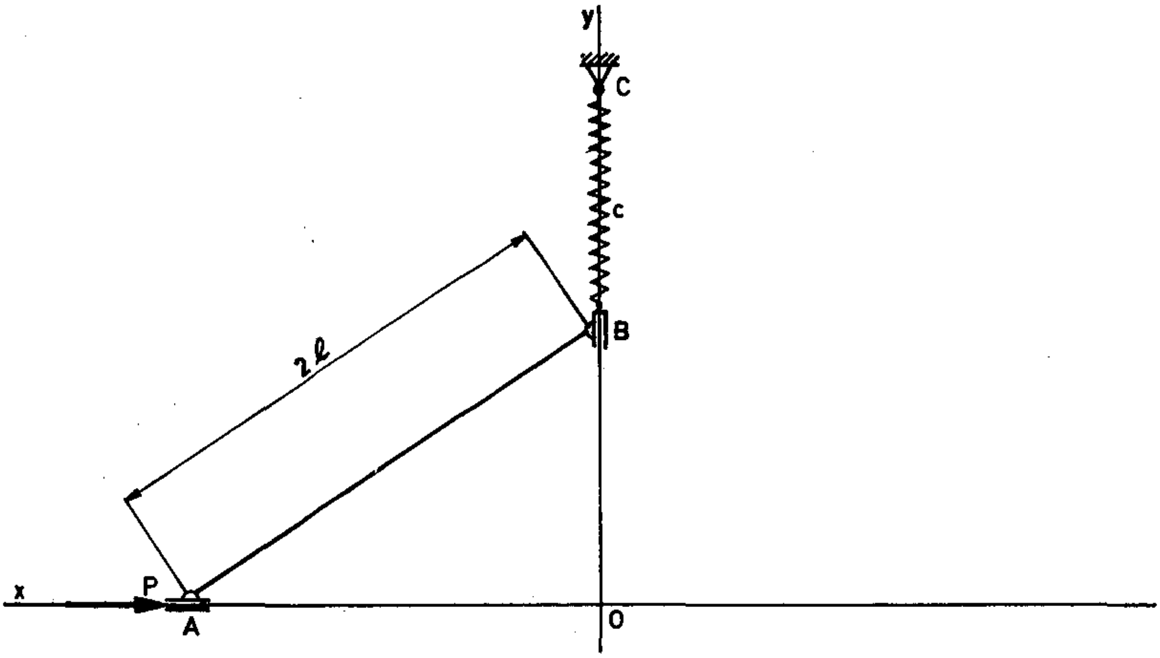
De beide uiteinden van de homogene staaf AB (lengte ℓ, massa m) kunnen zonder wrijving bewegen langs de elkaar loodrecht kruisende rechten OX en O'Y' (afstand h, $\ell > h$). De beide rechten draaien met constante hoeksnelheid ω om de Z-as. De zwaartekracht (versnelling g) werkt in de richting van de negatieve Z-as.

a. Hoeveel gegeneraliseerde coördinaten heeft dit systeem? Geef aan welke U kiest.

b. Bereken uitdrukkingen voor de kinetische energie T en de potentiële energie U.

c. Bewijs dat kinetisch evenwicht in iedere stand van de staaf mogelijk is.

3.



In een horizontaal vlak ligt een vast assenkruis Oxy. De uiteinden A en B van een homogene staaf (lengte 2ℓ, massa m) kunnen zonder wrijving bewegen langs resp. de gehele x- en y-as. Op de y-as ligt een vast punt C, dat via een massaloze veer (veerstijfheid c, ongespannen veerlengte OC, $OC > 2\ell$) verbonden is met B. Op het punt A van de staaf werkt een constante kracht P, gericht langs de x-as.

a. Bepaal de evenwichtsstanden van de staaf.

b. Onderzoek de stabiliteit van deze evenwichtsstanden, afhankelijk van de grootte van P.

c. Bepaal de frequentie van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstanden.

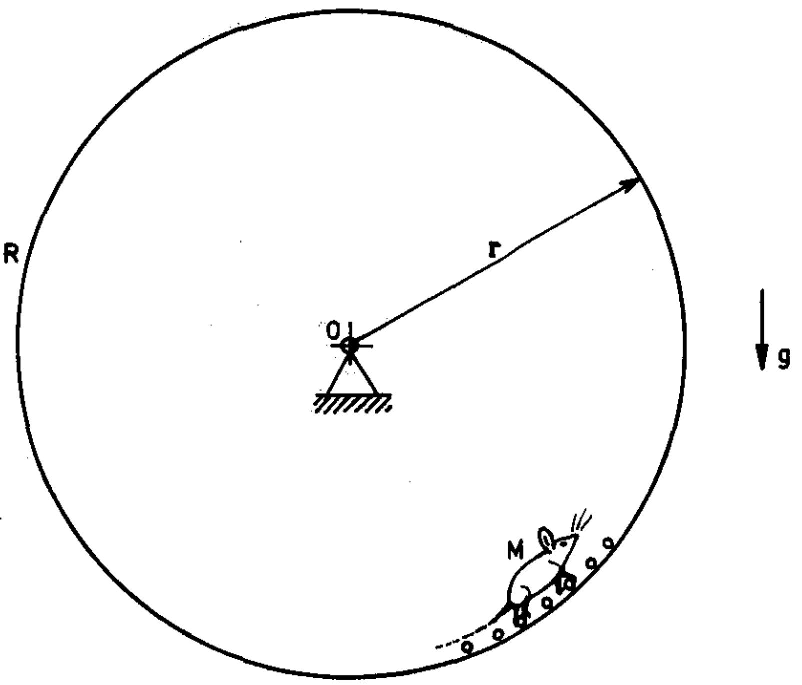
TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op maandag 6 januari 1969, 9.00 - 12.00 uur.

N.B. I: Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

N.B. II: Van de volgende vier vraagstukken moet de combinatie 1,2,3 of 1,2,4 of 1,3,4 gemaakt worden.

1.



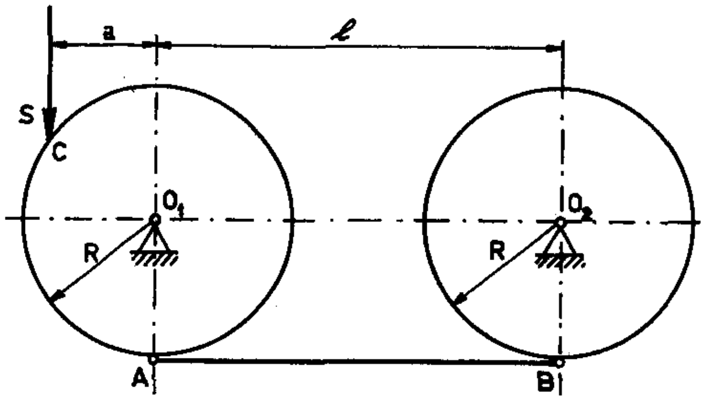
Bovenstaande figuur stelt voor een muizenrad R, langs welks omtrek een muis M op eigen kracht loopt. Het rad wordt opgevat als een homogene cirkelvormige schijf (straal r), in een verticaal vlak zonder wrijving draaibaar om het vaste middelpunt O (massatraagheidsmoment om de draaiingsas door O is I). De muis wordt beschouwd als een puntmassa (massa m), die niet van de omtrek van de schijf kan vallen. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g. Op het tijdstip t = 0 is het geheel in rust en de muis begint vanuit het laagste punt omhoog te lopen. Neem aan dat de kracht K, die de muis hierbij in tangentiële richting op het rad uitoefent, constant is.
Stel de bewegingsvergelijkingen en de beginvoorwaarden op.

2. Beschouw opnieuw het systeem van vraagstuk 1.
   a) Bewijs dat kinetisch evenwicht, waarbij de positie van de muis in de ruimte niet verandert, mogelijk is als $\frac{|K|}{mg} \leq 1$.

b) Onderzoek de stabiliteit van de standen van kinetisch evenwicht door middel van kleine trillingen.

c) Onderzoek de beweging van de muis voor het geval dat $\frac{|K|}{mg} > 1$.

3.



In een horizontaal vlak liggen twee gelijke homogene cirkelvormige schijven (straal R, massa M) met vaste middelpunten O_1 en O_2, welke op een afstand ℓ ($\ell > 2R$) van elkaar liggen. Elke schijf kan vrij draaien om een verticale as door zijn middelpunt. Aan de randpunten A, van schijf O_1, en B, van schijf O_2, is scharnierend bevestigd een homogene staaf AB (massa m, lengte ℓ). De staaf AB is evenwijdig aan O_1O_2, terwijl AO_1 en BO_2 loodrecht op O_1O_2 staan. Op het randpunt C van de schijf O_1 werkt een stoot S. De richting van S is loodrecht op O_1O_2 en het aangrijpingspunt C ligt een afstand a links van O_1.

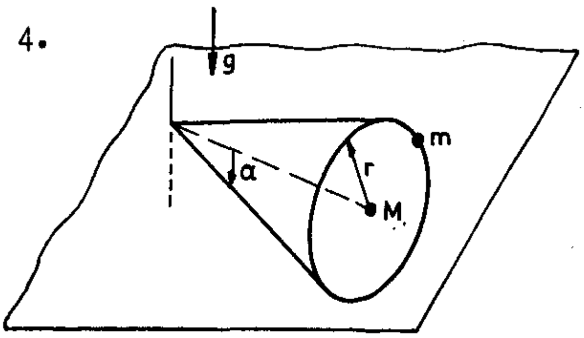
a) Geef alle stoten aan, die op de drie afzonderlijke lichamen kunnen werken.

b) Welke stoten zijn nul en waarom?

c) Bereken de snelheden van de drie lichamen direct na de stoot.

d) Hoe groot is de door de stoot verrichte arbeid?

4.



Een massaloze omwentelingskegel, tophoek 2α, straal van het grondvlak r, rolt over een vast horizontaal vlak. In het grondvlak zijn twee massa's vast aan de kegel bevestigd, de massa M op de as van de kegel, de massa m op de kegelmantel. De versnelling van de zwaartekracht is g.

a) Leidt de bewegingsvergelijking af.

b) Bepaal de evenwichtsstanden.

c) Onderzoek de stabiliteit van die standen.

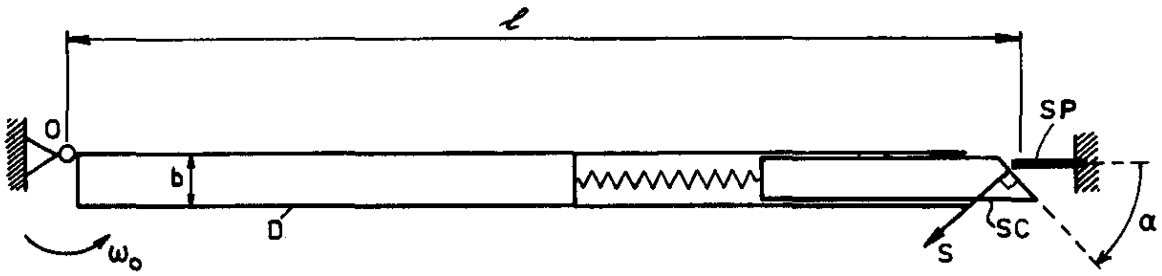
d) Geef de frequentie van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstanden.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica W IV, WSK IV,
op zaterdag 19 april 1969 van 9.00 - 12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen te worden gemaakt en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

1)



In bovenstaande schets stelt D een deur voor en SC is de zogenaamde schoot. Deze laatste wordt, indien de deur wordt dichtgegooid, door de sluitplaat SP tegen de veerdruk in in D geschoven en springt achter SP gekomen weer terug. We beschouwen hierna uitsluitend de botsing tussen SC en SP, waarmee het dichtvallen inzet, en niet het verdere verloop. Neem aan dat de stoot S, die SP op SC uitoefent, loodrecht staat op het vlak van SC, dat de botsing volkomen onveerkrachtig is en dat noch in O, noch bij de beweging van SC in D wrijving optreedt. Vóór de botsing is de hoeksnelheid van D gelijk aan ω_0.

a. Bereken S, de hoeksnelheid ω van D na de botsing en de snelheid V van SC ten opzichte van D na de botsing.

b. Bewijs, dat V maximaal is als

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{m\ell^2}{J}} ,$$

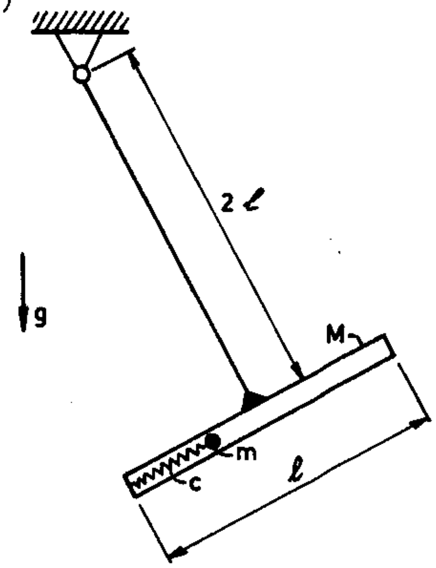
waarin ℓ = lengte van D

m = massa van SC

en J = massa-traagheidsmoment van D en SC om het punt O.

N.B. Verwaarloos de dikte b ten opzichte van ℓ.

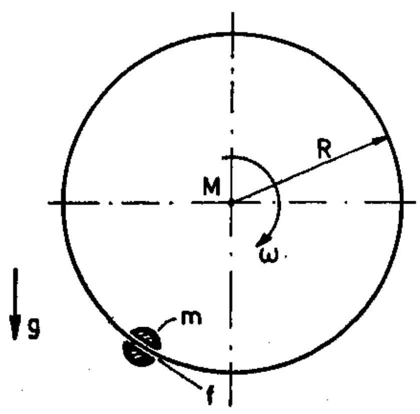
2)



Een homogene afgesloten buis (massa M, lengte ℓ) is in het midden loodrecht vastgelast op een massaloze staaf welke is opgehangen aan een vast punt.
De staaf kan zonder wrijving roteren om het vaste punt in een verticaal vlak, dat samenvalt met het vlak van de buis en de staaf.
In de buis kan een massapunt (massa m) zonder wrijving glijden. De massa is door een massaloze veer (veerconstante c, ongespannen veerlengte $\frac{1}{2}\ell$) verbonden met een uiteinde van de buis. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt de evenwichtsstanden van het systeem en de frequenties van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstand(en) te bepalen.
Aangenomen mag worden dat gedurende de beweging het massapunt niet in aanraking komt met de uiteinden van de buis.

3)



In een verticaal vlak bevindt zich een cirkel, straal R, waarlangs een massapunt, massa m, kan bewegen. De wrijvingscoëfficiënt tussen de massa en de cirkel bedraagt f. De cirkel roteert met een constante hoeksnelheid ω om een as door zijn middelpunt M en loodrecht op het vlak van de cirkel. Op het tijdstip t = 0 bevindt het massapunt zich verticaal onder M en is in rust ten opzichte van de cirkel. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Hoe groot moet ω minstens zijn, opdat het massapunt ten opzichte van de cirkel in rust blijft.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

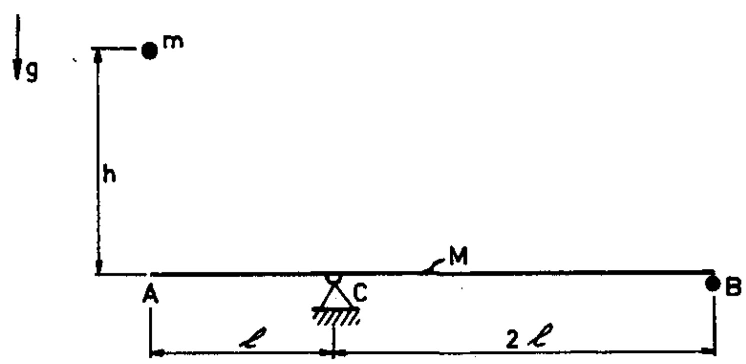
Examen/Tentamen Theoretische Mechanica, WIV, WSK IV, op maandag 2 juni 1969, 9.00 - 12.00 uur.

N.B.a. Elke opgave dient op een apart stel bladen te worden gemaakt en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

N.B.b. Van de vier gestelde opgaven moeten er niet meer dan drie worden gemaakt. De keuze is vrij.

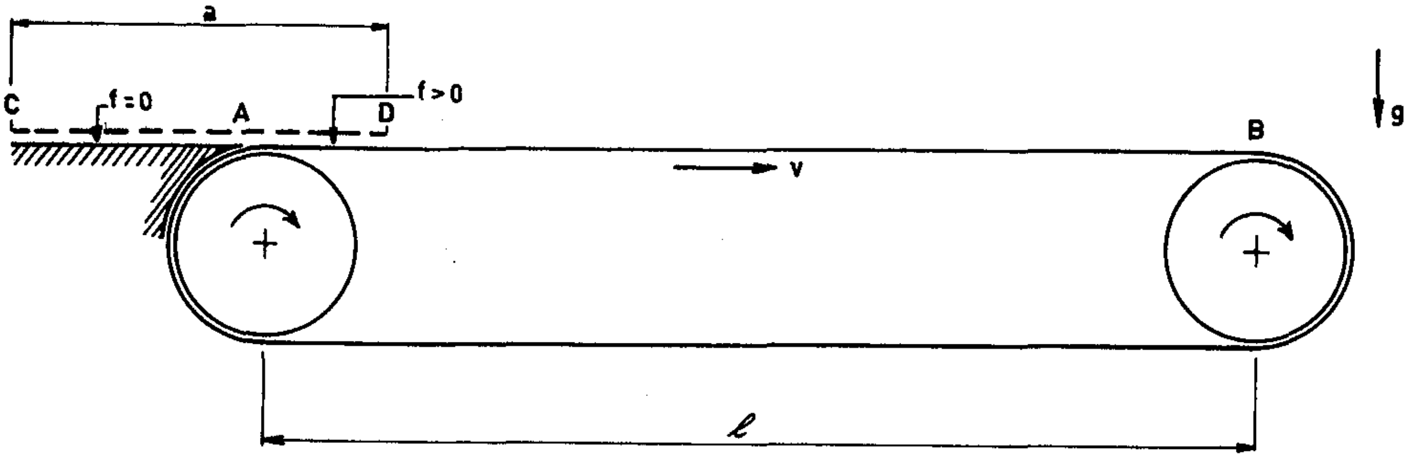
1. a) Leid voor een star lichaam de momentenstelling af met betrekking tot een vast punt.
   b) Leid uit het voorgaande dezelfde stelling af doch nu betrokken op het zwaartepunt van het beschouwde lichaam.
   b) Formuleer de momentenstelling indien als referentiepunt een willekeurig punt van het bewegende lichaam wordt gekozen.

2.



Een massapunt (massa m) valt onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g) van een hoogte h op het uiteinde A van een balk. De balk is homogeen (massa M, lengte 3ℓ) en zonder wrijving scharnierend bevestigd in het punt C (afstand AC is ℓ). De balk ligt aanvankelijk horizontaal, waarbij het uiteinde B op een vaste pen rust. De botsingscoëfficiënt tussen puntmassa en balk is λ. Gevraagd wordt de hoogte h te bepalen opdat na de botsing het uiteinde B juist verticaal boven C tot rust komt.

3.



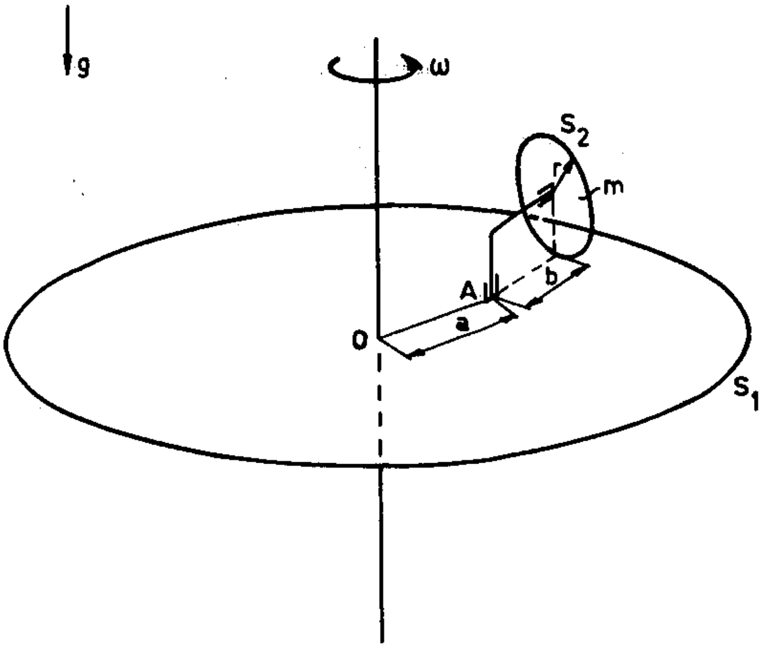
Zoals hierboven is geschetst beweegt een horizontale transportband zonder eind zich met een constante snelheid v van A naar B (afstand AB is ℓ). Een gestrekte ketting CD (massa m, lengte a, $a \ll \ell$) wordt door de band vanaf een horizontaal vlak bij A meegesleurd. Het deel CA van de ketting, dat zich nog op dit horizontale vlak bevindt, beweegt hierover zonder wrijving ($f = 0$), terwijl tussen het al op de band zijnde deel AD en de band een wrijvingscoëfficiënt $f > 0$ heerst. Aanvankelijk is de ketting in rust en bevindt D zich op een te verwaarlozen afstand rechts van A op de band. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.

a) Neem aan $v \leq \sqrt{fga}$. Bewijs, dat de snelheid van de ketting op het moment dat C in A aankomt, gelijk is aan v.

b) Hoe groot is die snelheid als $v > \sqrt{fga}$?

c) Hoever is in geval b) het punt C voorbij A gekomen op het moment, dat de ketting voor het eerst de snelheid v heeft bereikt?

4.



Een ruwe schijf, S_1, draait met de constante hoeksnelheid ω om een verticale as, loodrecht op het vlak van S_1, door het middelpunt O. Een tweede, homogene, schijf, S_2 (massa m, straal r), rolt over S_1. Tijdens de beweging blijft het vlak van S_2 verticaal, terwijl de afstand van S_2 tot het punt A van S_1 (afstand AO is a) constant is (b).
Bepaal de bewegingsvergelijking van S_2, de stabiele evenwichtsstand en de frequentie van kleine trillingen om die stand.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 11 oktober 1969, 9.00 - 12.00 uur.

N.B.I. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

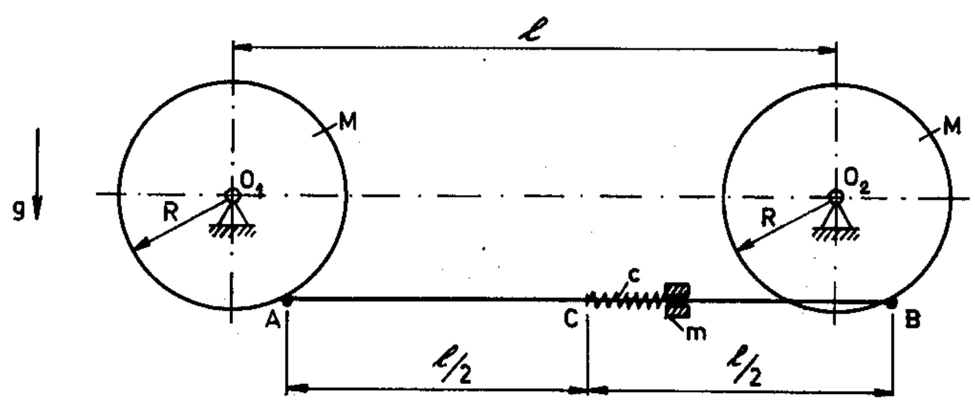
N.B.II. Van de vier gestelde opgaven mogen er niet meer dan drie worden ingeleverd. De keuze is vrij.

1. a) Leid af de algemene uitdrukking voor de kinetische energie van een star lichaam:

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j \;.$$

b) Beschouw een 2-dimensionaal lichaam L dat kan bewegen in een verticaal vlak V. Dit vlak V roteert met een constante hoeksnelheid Ω om een verticale as. Geef aan het verschil in de uitdrukkingen voor T èn U in het stilstaande (inertiale) en in het meedraaiende assenstelsel.
Op welke wijze mogen de vergelijkingen van Lagrange in deze stelsels worden toegepast en in welk geldt T + U = constant.

2.



In een verticaal vlak bevinden zich twee gelijke homogene cirkelvormige schijven (straal R, massa M) met vaste middelpunten O_1 en O_2, die op dezelfde hoogte en op een afstand ℓ ($\ell > 2R$) van elkaar liggen. Elke schijf kan vrij draaien om een horizontale as door zijn middelpunt. Aan de randpunten A en B van respectievelijk schijf O_1 en O_2 is evenwijdig aan O_1O_2 scharnierend bevestigd een massaloze staaf AB (lengte ℓ). Langs de staaf AB kan zonder wrijving een massapunt m glijden, dat door middel van een massaloze veer (veerstijfheid c) verbonden is met het midden C van AB. De ongespannen veerlengte is nul en de versnelling van de zwaartekracht is g.

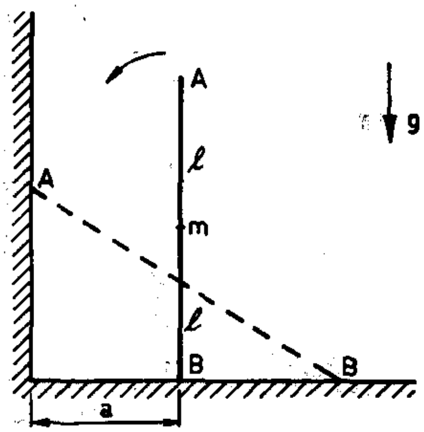
Gevraagd wordt:

a) de evenwichtsstanden van dit systeem te bepalen,

b) de stabiliteit van deze standen te onderzoeken, en

c) de eigenfrequenties van de stabiele evenwichtsstand(en) te bepalen.

3.



Een ladder, op te vatten als een homogene staaf AB met lengte 2ℓ en massa m, staat loodrecht op de grond op een afstand a ($a \leq \ell$) van een muur opgesteld. Vanuit deze stand valt de ladder, bewegend in een vlak loodrecht op de snijlijn muur-grondvlak, zonder beginsnelheid met het uiteinde A tegen de muur. De botsing bij A is volkomen veerkrachtig en het uiteinde B blijft bij de botsing in contact met de grond. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g. Zowel de muur als de grond zijn wrijvingsloos.

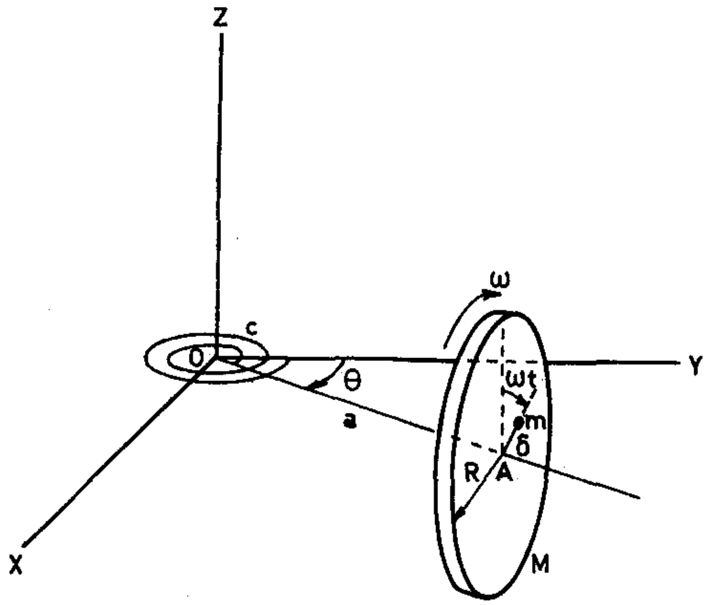
a) Bereken de stand van en de snelheidsverdeling over de ladder vlak vóór de botsing.

b) Bereken de stoten die in A en B op de ladder worden uitgeoefend.

c) Bereken de snelheidsverdeling over de ladder vlak ná de botsing.

d) Toon aan, dat voor $a = \frac{1}{3}\ell\sqrt{3}$ de hoeksnelheid van de ladder ná de botsing nul is.

4.



Het hierboven geschetste model heeft betrekking op een voorwiel (homogene schijf met massa M en straal R) van een auto. Het wiel draait met een constante hoeksnelheid ω om zijn as OA die als massaloos wordt opgevat. De as OA (lengte a) kan draaien om de Z-as (rotatiehoek θ). Een elastische veer oefent bij een hoekverdraaiing θ een terugstelmoment $c\theta$ uit. Onder invloed van een excentrische massa m (straal δ, $\delta \ll R$) op het wiel gaat de as OA trillingen uitvoeren in het XOY-vlak (zg. "shimmy" tengevolge van onbalans). De interactie van het wiel en de grond, en de zwaartekracht mogen buiten beschouwing worden gelaten. Er is geen wrijving.

a) Bereken de kinetische energie T en de potentiële energie U.

b) Leid met behulp van de methode Lagrange de bewegingsvergelijking af.

c) Bereken, onder verwaarlozing van de termen die $\frac{\delta^2}{R^2}$ bevatten, de hoekverdraaiing θ als functie van de tijd t.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica, W IV, WSK IV, op maandag 5 januari 1970, 9.00 - 12.00 uur.

N.B.1. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven

N.B.2. Van de vier gestelde opgaven mogen er niet meer dan drie worden ingeleverd. De keuze is vrij.

N.B.3. De beoordeling van het ingeleverde werk berust op de volgende normering: het maximaal aantal punten is het cijfer, geplaatst tussen rechte haken achter ieder onderdeel.

1. Theorievraag

a) Leid af, dat het impulsmoment $\underline{D}_0$ van een star lichaam genomen ten opzichte van het zwaartepunt Z volgt uit de formule

$$D_{oi} = I_{ij}\,\omega_j ,$$

en interpreteer de componenten die in deze formule voorkomen. [4]

b) Leid af, dat het impulsmoment $\underline{D}$ van een star lichaam betrokken op een willekeurig punt P volgt uit de formule

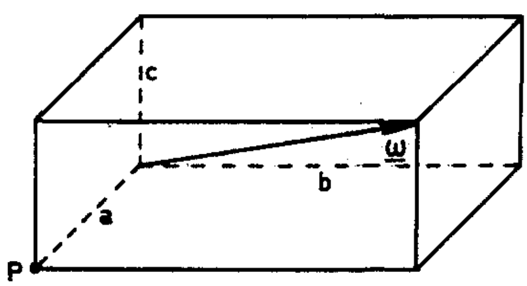
$$\underline{D} = \underline{D}_0 + \underline{r} \times m\underline{v}_z ,$$

waarin $\underline{r}$ = de radiusvector van P naar Z,

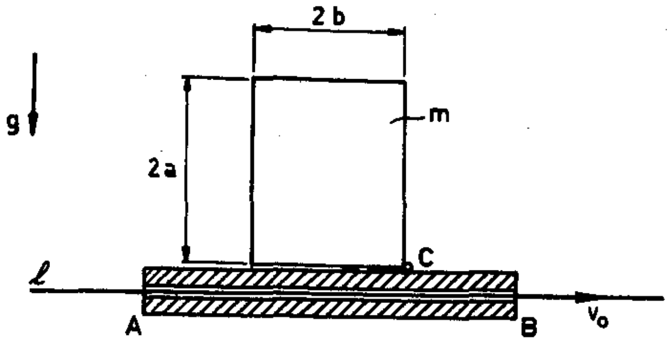
m = de massa van het lichaam,

en $\underline{v}_z$ = de zwaartepuntssnelheid. [3]

c) Pas a) en b) toe op het volgende homogene, rechthoekige parallellopipedum (dichtheid ρ), dat met de hoeksnelheid ω om een lichaamsdiagonaal draait, waarbij het antwoord moet worden uitgedrukt in ρ, b, c en ω. [3]



2.



Een balk AB beweegt met een snelheid v_0 langs een vaste horizontale rechte ℓ. Op de balk ligt een homogeen rechthoekig blok, massa m, hoogte 2a, breedte 2b en even dik als de balk, dat in het punt C met de balk is verbonden. Het blok, dat zonder wrijving kan roteren om een horizontale as door C loodrecht op ℓ, is in rust ten opzichte van de balk. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Op zeker moment wordt de balk plotseling gefixeerd.

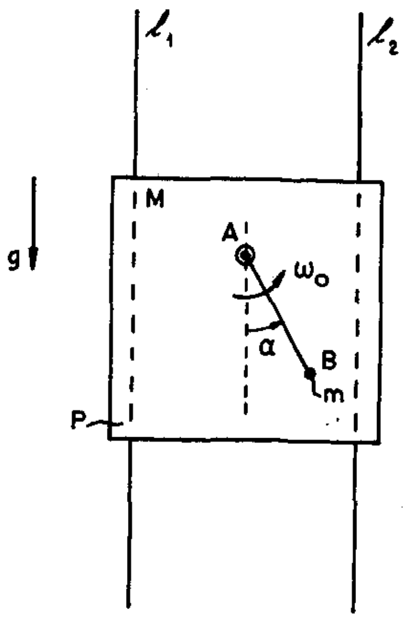
Gevraagd wordt:

i) de hoeksnelheid van het blok onmiddellijk na de fixatie te berekenen, [4]

ii) hoe groot v_0 minstens moet zijn, opdat het blok zal kantelen, [4]

iii) de stoot in het punt C te berekenen. [2]

3.



In nevenstaande figuur stelt P een lift, massa M, voor die, geleid door de vaste, verticale rechten ℓ_1 en ℓ_2, valt onder invloed van de zwaartekracht. Tussen de lift en elk van de geleidingen werkt een constante wrijvingskracht W. Een slinger, bestaande uit een massaloze staaf AB en een puntmassa m in B, kan zonder wrijving draaien om een horizontale as door een punt A van de lift.
Op het tijdstip t = 0, waarop de staaf AB een hoek α met de verticaal door A maakt en een hoeksnelheid ω_0 heeft, wordt de lift zonder beginsnelheid losgelaten. De versnelling

van de zwaartekracht is g.

i) Stel de bewegingsvergelijkingen op en [6]

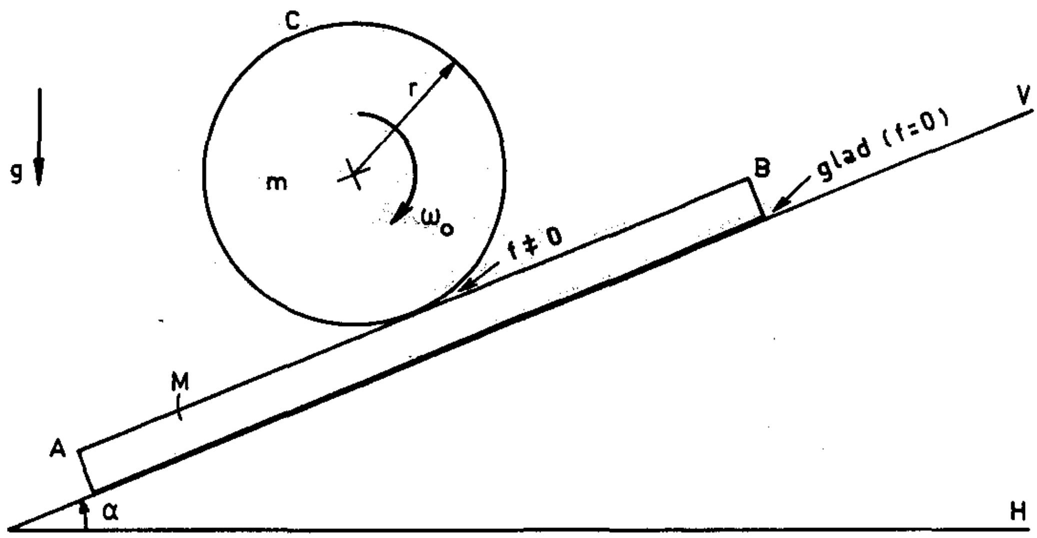
ii) bepaal hieruit de hoeksnelheid van de staaf AB als functie van de hoek die AB maakt met de verticaal door A. [2]

iii) Beschrijf de beweging voor het speciale geval dat W = 0. Beschouw in het bijzonder de gevallen:

a) $\omega_0 = 0$, [1]

b) $\omega_0 \neq 0$ en $m \ll M$. [1]

4.



Een overal even dikke staaf AB (massa M) kan glijden langs een glad hellend vlak V met hellingshoek α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. Op de in rust zijnde staaf wordt een draaiende bol (massa m, straal r, hoeksnelheid ω_0, géén translatiesnelheid) geplaatst, zodanig dat de resulterende bewegingen van staaf en bol plaats vinden in een vlak loodrecht op de snijlijn van V en het horizontale vlak H. De wrijvingscoëfficiënt tussen bol en staaf bedraagt f. De versnelling van de zwaartekracht is g. De staaf is zo lang dat de bol niet voortijdig van de staaf afglijdt.

a) Gedurende welke tijd glijdt de bol over de staaf? [4]

b) Over welke afstand verplaatst de bol zich hierbij ten opzichte van de staaf? [1]

c) Voor welke waarde van α blijft het zwaartepunt van de bol hierbij in rust? [1]

d) Bewijs, dat de bol na de fase a) over de staaf gaat rollen. [2]

e) Bewijs, dat de wrijvingskracht tussen de bol en staaf tijdens de fase d) gelijk is aan nul. [2]

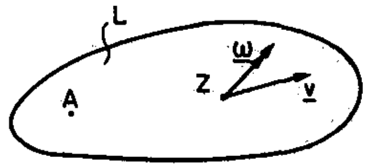
TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica, W IV, WSK IV, op zaterdag 18 april 1970, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elke opgave dient op een apart stel bladen te worden gemaakt en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievragen: kort beantwoorden.

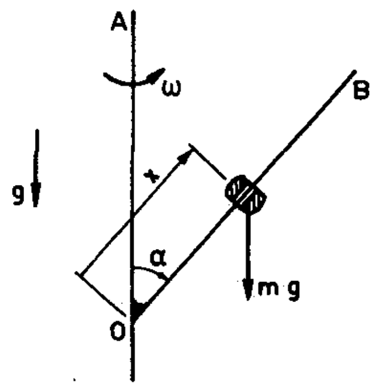
1.1.



Beschouw een lichaam L met een willekeurige snelheidsverdeling. Een punt A van L wordt gefixeerd. Ga na of de volgende grootheden wel of niet veranderen door de fixatie en geef een korte toelichting.

a) De impuls van L.
b) Het impulsmoment van L om A.
c) Het impulsmoment van L om zijn zwaartepunt Z (Z valt niet samen met A).
d) De kinetische energie T van L. [5]

1.2.



Een staaf OB maakt een vaste hoek α met de verticaal OA en roteert met een hoeksnelheid ω om deze verticaal. Een massapunt m beweegt zonder wrijving langs OB.
Beschouw de volgende uitdrukkingen voor de kinetische energie (T) en de potentiële energie (U) van m:

a) $T_1 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{2} m\dot{x}^2$,

$U_1 = mgx \cos\alpha$.

b) $T_2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{2} m\dot{x}^2$,

$U_2 = mgx \cos\alpha - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \sin^2\alpha$.

c) $T_3 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$,

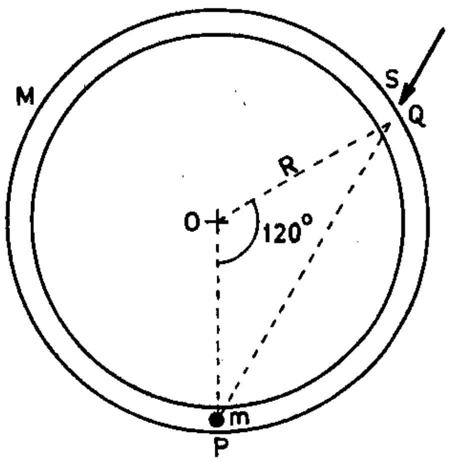
$U_3 = mgx \cos\alpha - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \sin^2\alpha$.

i) Welke van deze combinaties is fout?

ii) Welke van deze combinaties geldt in een inertiaal systeem en welke in een met OAB meedraaiend systeem?

iii) Voor welke van deze combinaties geldt: T + U = constant ? [5]

2.



Een homogene cirkelvormige buis (massa M, straal R) kan zonder wrijving glijden over een plat vlak. Een massapunt P (massa m) kan zonder wrijving in de buis schuiven. Op een moment waarop zowel de buis als P zich in rust bevinden, wordt op punt Q van de buis een stoot S uitgeoefend in de richting van P ($\angle$ QOP = 120°).

Bereken:

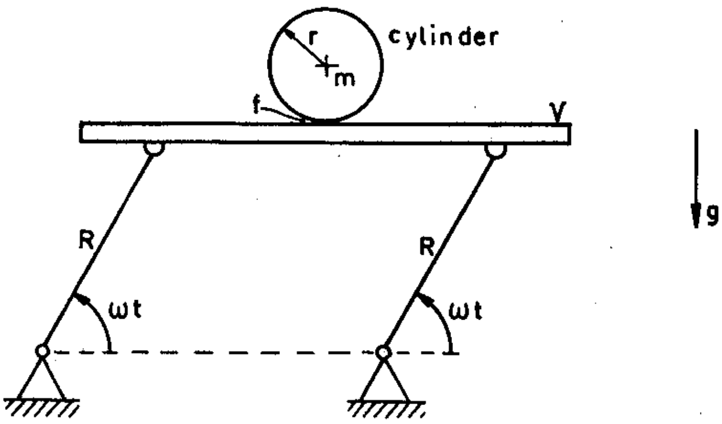
a) De snelheid van P na de stoot. [3]

b) De snelheid van Q na de stoot. [3]

c) De hoeksnelheid van de buis na de stoot. [2]

d) De kinetische energie van het systeem na de stoot. [2]

3.



Een homogene cylinder (massa m, straal r) kan bewegen over een horizontaal vlak V (wrijvingscoëfficiënt f). Het vlak ondergaat een gedwongen beweging waarbij ieder punt van V in een verticaal vlak een cirkel (straal R) doorloopt met een hoeksnelheid ω ($\omega > 0$). De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.

a) Toon aan dat een bewegingstoestand waarbij de cylinder ten opzichte van V in rust blijft, niet mogelijk is. [2]

b) Neem aan dat de cylinder over V rolt en leid hieruit af dat ω aan de volgende conditie moet voldoen:

$$\omega^2 \le \frac{fg}{\left(\frac{I}{3}\,\left|\cos\,\omega t\right| + f\,\sin\,\omega t\right)R} \qquad \text{voor } 0 \le \omega t \le 2\pi\ . \qquad [7]$$

c) Bereken uit b) de kritieke waarde van ω die nog juist toelaatbaar is en bereken op welk punt van de baan van V bij de kritieke waarde van ω glijden dreigt op te treden. [1]

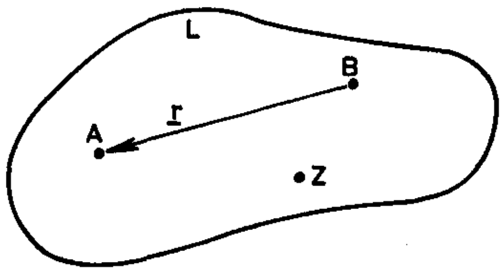
TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op maandag 1 juni 1970, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievragen: kort beantwoorden.

1.1.



A en B zijn twee willekeurige punten van een star lichaam L met massa m, Z is het zwaartepunt. De snelheden van de drie punten zijn respectievelijk $\underline{v}_A$, $\underline{v}_B$ en $\underline{v}_Z$. De radiusvector van B naar A is $\underline{r}$. De impulsmomenten in de punten A en B zijn $\underline{D}_A$ en $\underline{D}_B$.

Precies één van de volgende gelijkheden is voor elke snelheidsverdeling goed:

I $\quad \underline{D}_B = \underline{D}_A + \underline{r} \times m\underline{v}_A$,

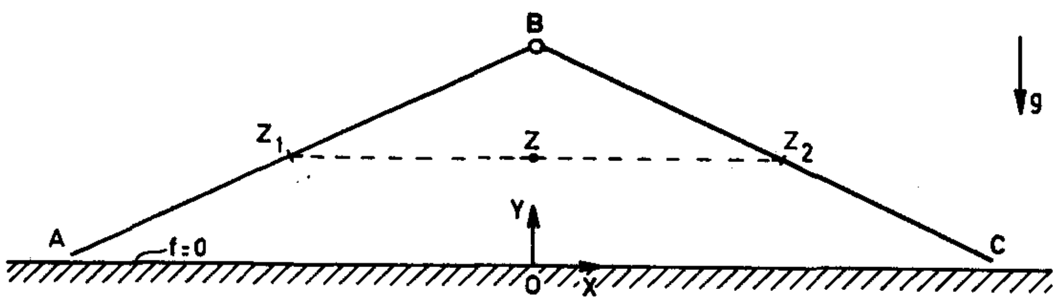
II $\quad \underline{D}_B = \underline{D}_A + \underline{r} \times m\underline{v}_B$,

III $\quad \underline{D}_B = \underline{D}_A + \underline{r} \times m\underline{v}_Z$.

a) Welke is die goede gelijkheid? Motiveer Uw antwoord. [4]

b) Geldt de bedoelde gelijkheid ook als L niet een star lichaam, doch een willekeurig systeem van puntmassa's en starre lichamen is? [1]

1.2.

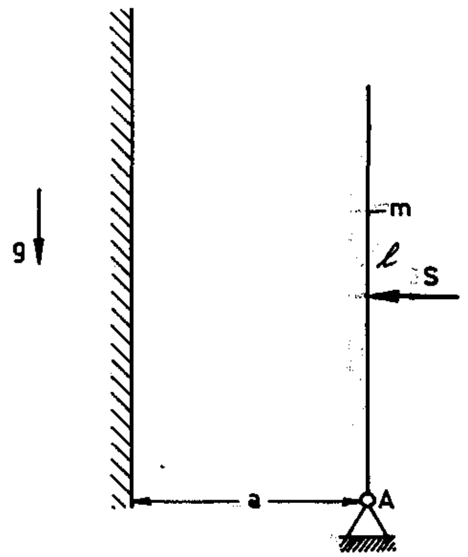


De staven AB en BC, in B scharnierend aan elkaar verbonden, kunnen bewegen in een verticaal vlak onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g). De uiteinden A en C bewegen daarbij over een horizontaal vlak. Er is geen wrijving.

Ga na welke van de volgende grootheden behouden wordt (antwoord met ja of nee):

a) de component van de impuls in de X-richting van staaf AB. [1]
b) de component van de impuls in de Y-richting van staaf AB. [1]
c) de component van de impuls in de X-richting van het gehele systeem [1]
d) de component van de impuls in de Y-richting van het gehele systeem [1]
e) de kinetische energie van het gehele systeem, de potentiële energie en de som van beide. [1]

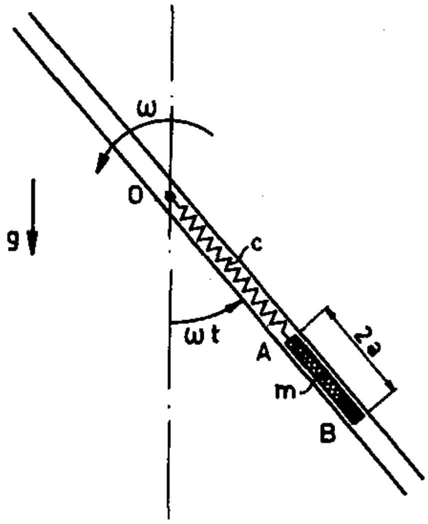
2.



Een homogene staaf (lengte ℓ, massa m) kan in een verticaal vlak zonder wrijving roteren om het vaste punt A. A ligt op een afstand a ($a < \ell$) van een gladde verticale wand. In het zwaartepunt wordt op de staaf, wanneer deze in rust verticaal boven A staat, een horizontale stoot S uitgeoefend in de richting van de muur. De staaf gaat roteren en botst tegen de muur (botsingscoëfficiënt λ). De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.

Gevraagd wordt:

1) De hoeksnelheid van de staaf direct na de stoot. [3]
2) De hoeksnelheid van de staaf juist voor en juist na de botsing met de muur. [4]
3) De grootte van S opdat de staaf juist in de verticale stand weer tot rust komt. [3]

3. 

Een homogene staaf AB (massa m, lengte 2a) kan zonder wrijving glijden in een rechte buis. Het uiteinde A van de staaf is door middel van een massaloze veer (veerconstante c, ongespannen veerlengte nul) verbonden met het vaste punt O van de buis. Het systeem is op het tijdstip $t = 0$ in rust, waarbij de staaf AB zich verticaal onder O bevindt. De versnelling van de zwaartekracht is g.

a) Bepaal voor $t = 0$ de afstand OA. [2]

Op het tijdstip $t = 0$ begint de buis met een constante hoeksnelheid ω ($\omega > 0$) te roteren om een vaste horizontale as door O.

b) Stel de bewegingsvergelijking voor de staaf op. [5]

c) Neem aan dat voor de hoeksnelheid ω geldt

$$\omega < \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{en} \quad \omega \neq \sqrt{\frac{c}{2m}},$$

en bepaal onder deze condities, met behulp van de bij a) gevonden beginvoorwaarden, uit b) de positie van de staaf als functie van de tijd. [2]

d) Toon aan, dat als niet aan de onder c) genoemde condities is voldaan, de verplaatsing van de staaf AB ten opzichte van O onbegrensd toeneemt. [1]

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

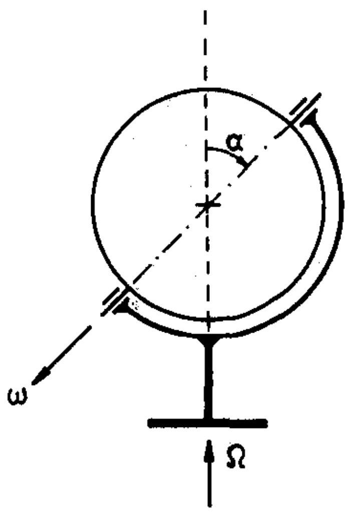
Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 10 oktober 1970, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

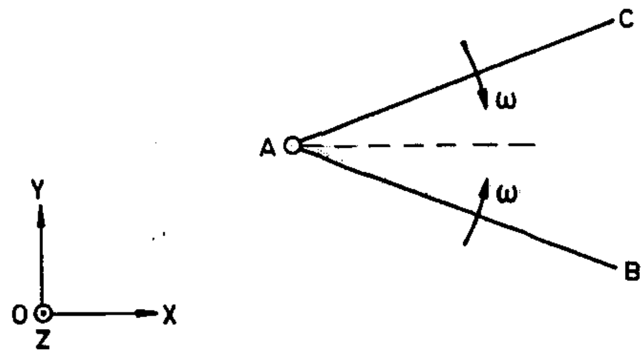
1. Theorievragen: kort beantwoorden.

a)



Aan het voetstuk van een stilstaande globe geeft men plotseling een hoeksnelheid Ω (zie schets). Met welke hoeksnelheid ω gaat de bol draaien ten opzichte van het voetstuk? Ga na of Uw antwoord in overeenstemming is met hetgeen U verwacht voor $\alpha = 0$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (zie schets). [4]

b)



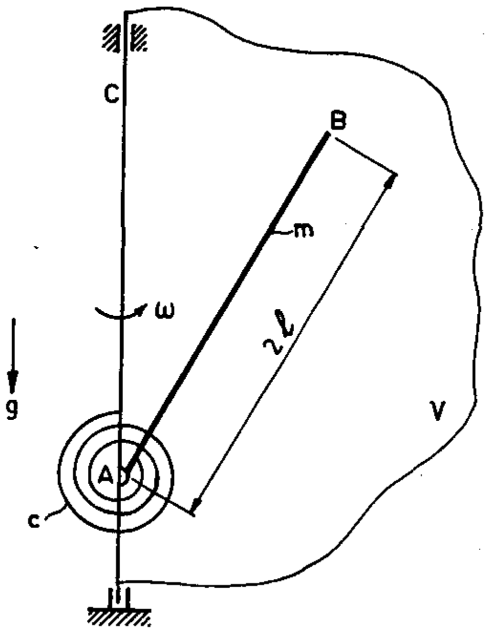
Beschouw de onderling identieke staven AB en AC, in A scharnierend verbonden. De staven kunnen vrij bewegen in een horizontaal vlak (botsingsverschijnselen behoeven niet te worden bekeken). Er is geen wrijving.

Van de beweging is gegeven dat de hoeksnelheden van AB en AC gelijk en tegengesteld zijn (zie schets). Een inertiaal assenkruis OXYZ is zo gekozen dat de Z-as loodrecht op het vlak van de beweging staat en de X-as loodrecht staat op BC.

Beantwoord de volgende vragen met ja of nee.

1) Is de X-component van de impuls van het gehele systeem constant? [1]
2) Is de Y-component van de impuls van het gehele systeem constant? [1]
3) Is de X-component van de impuls van AB constant? [1]
4) Is de Y-component van de impuls van AB constant? [1]
5) Is de energie van het gehele systeem constant? [1]
6) Is de energie van AB constant? [1]

2.



Een homogene staaf AB, massa m, lengte 2ℓ, kan in een plat vlak V draaien om het punt A. Het vlak zelf wentelt met de constante hoeksnelheid ω om de verticale rechte AC uit V.

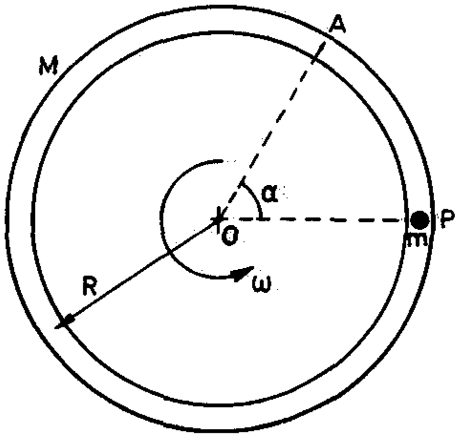
Op de staaf wordt in A een moment uitgeoefend evenredig, maar tegengesteld gericht, aan de hoekverdraaiing van AB vanuit AC en hij is voorts onderhevig aan de zwaartekracht, versnelling g. De evenredigheidsconstante bedraagt c.

a) Bewijs dat een stabiele evenwichtsstand waarbij de hoek BAC nul is alleen mogelijk is als $c > mgl$. [4]

b) Bepaal, als $c > mgl$, voor welke waarden van ω deze stand een stabiele evenwichtsstand is. [3]

c) Bepaal voor die waarden van ω de frequentie van kleine trillingen om die stand. [3]

3.



Een homogene, cirkelvormige buis (massa M, straal R) kan vrij bewegen over een glad horizontaal vlak. Een massapunt P (massa m) kan zonder wrijving in de buis schuiven. De buis roteert met een hoeksnelheid ω, loodrecht op het horizontale vlak, om zijn middelpunt O, waarbij het massapunt P in absolute rust is. Op zeker moment wordt het punt A van de buis gefixeerd ($\angle$ AOP = α).

Bereken:

a) De stoot, in grootte en richting, welke P ten gevolge van de fixatie op de buis uitoefent. [4]

b) De hoeksnelheid van de buis na de fixatie. [3]

c) De snelheid van P na de fixatie. [3]

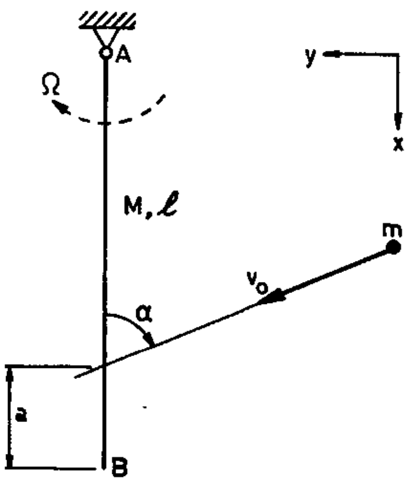
TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op maandag 11 januari 1971, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.

Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievraag: kort beantwoorden.



Een massapunt m, dat zich met snelheid v_0 in een horizontaal vlak H beweegt, treft een in rust zijnde homogene, gladde staaf AB, massa m, lengte ℓ, welke in H kan draaien om het vaste punt A. De botsingscoëfficiënt is λ, met $\lambda < 1$.
Dit botsingsvraagstuk heeft de volgende drie onbekenden:
de snelheid van m na de botsing in x- en y-richting: V_x en V_y, en de hoeksnelheid van de staaf na de botsing: Ω.

Beschouw de volgende vergelijkingen:

1) $\frac{1}{2}M\ell\Omega + mV_y = mv_0 \sin\alpha$,

2) $mV_x - mv_0 \cos\alpha = 0$,

3) $\frac{1}{6} M\ell^2\Omega^2 + \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2) = \frac{1}{2}mv_0^2$,

4) $V_y - \frac{1}{2}\Omega\ell = -\lambda v_0$,

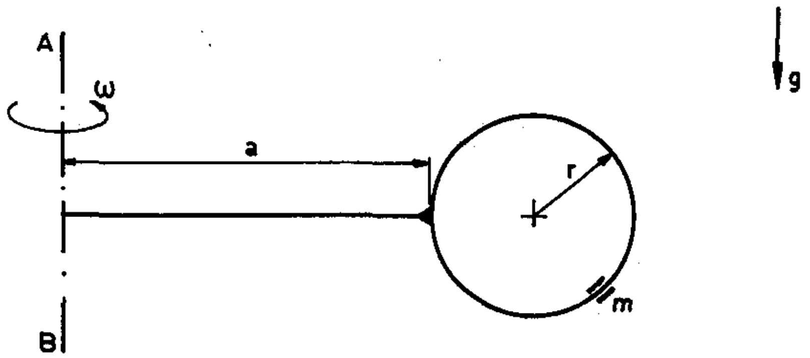
5) $V_y - \Omega(\ell - a) = -\lambda v_0 \sin\alpha$,

6) $\frac{1}{3} M\ell^2\Omega + m(\ell - a)V_y - m(\ell - a)v_0 \sin\alpha = 0$.

a) Van bovenstaande zes vergelijkingen zijn er drie principieel fout. Geef de nummers van deze vergelijkingen. [6]

b) Geef in woorden weer wat de drie goede vergelijkingen voorstellen. [4]

2.



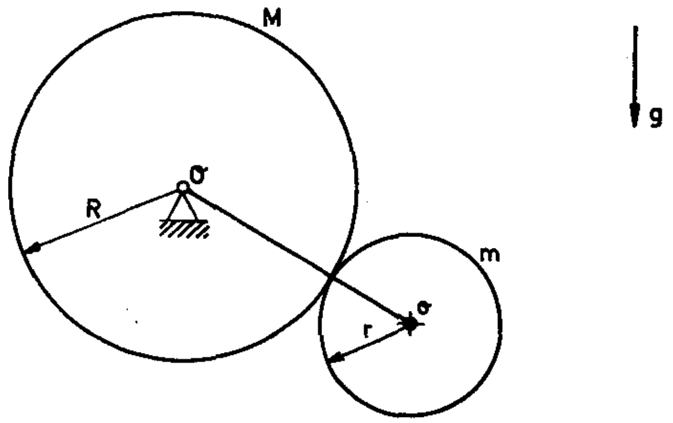
Een cirkelvormige hoepel (straal r) draait met een constante hoeksnelheid ω om een vaste verticale as AB die in het vlak van de hoepel ligt. De afstand hoepel - as is a. Een massapunt m kan langs de omtrek van de hoepel bewegen. De versnelling van de zwaartekracht is g. Er is geen wrijving.

a) Bepaal de stand(en) van kinetisch evenwicht. [4]

b) Onderzoek deze stand(en) op stabiliteit. [3]

c) Bepaal de frequentie(s) van de kleine trillingen om de stabiele stand(en). [3]

3.



Van twee met elkaar in aangrijping zijnde tandwielen (op te vatten als homogene schijven met massa's M, respectievelijk m, en met stralen R, respectievelijk r) is één draaibaar om zijn vaste middelpunt $\mathcal{O}$. Het middelpunt σ van het andere wiel is door middel van een massaloze staaf $\mathcal{O}\sigma$ verbonden met het punt $\mathcal{O}$. Het geheel beweegt zonder wrijving in een verticaal vlak onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g).

a) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem? [1]

b) Formuleer de kinematische relatie die uitdrukt dat de tandwielen over elkaar rollen. [1]

c) Leid een uitdrukking af voor de kinetische energie. [2]

d) Leid een uitdrukking af voor de potentiële energie. [1]

e) Stel de vergelijkingen van Lagrange op. [2]

f) Bereken de periode van de vrije trilling waarbij in de uiterste standen de lijn $\mathcal{O}\sigma$ horizontaal is. [2]

g) Bereken het aantal onbekenden waarmee men geconfronteerd wordt, indien men de bewegingsvergelijkingen niet met behulp van de methode van Lagrange, doch met die van het vrijmaken wil opstellen. [1]

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica, W IV, WSK IV, zaterdag 17 april 1971, 9.00 - 12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen te worden gemaakt en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

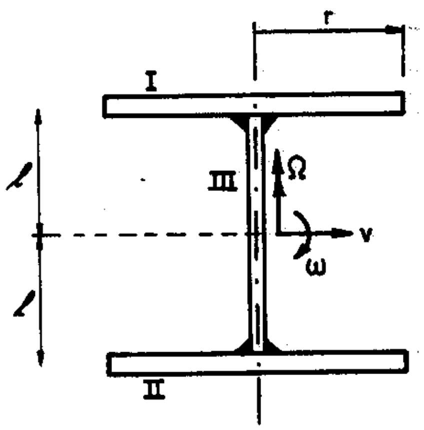
1. Theorievraag

1.1. Leid af dat tussen de snelheden $\underline{v}_A$, respectievelijk $\underline{v}_B$ van de punten A en B van een star lichaam L de volgende relatie bestaat

$$\underline{v}_B - \underline{v}_A = \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB} \, , \qquad [5]$$

waarin $\underline{\omega}$ de hoeksnelheidsvector van het starre lichaam en $\underline{r}_{AB}$ het verschil van de radiusvectoren van de punten B en A is.

1.2.

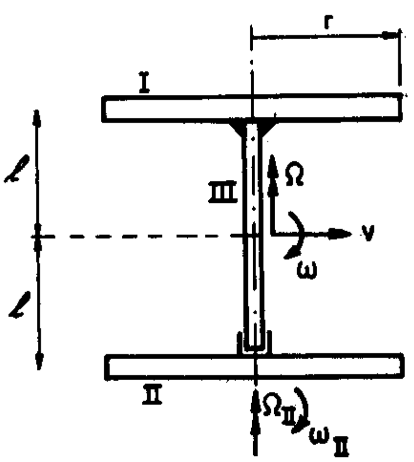


Neem aan dat L bestaat uit een tweetal starre, cirkelvormige schijven (I,II) vast bevestigd op een eveneens starre as (III) en dat het rolt over een horizontaal vlak (zie schets). De translatiesnelheid van het midden van de as is v, en ω en Ω zijn de componenten van de hoeksnelheid. Bewijs met 1.1.:

a) $\omega = 0$, [1]

b) $v = \Omega r$. [1]

1.3.



Neem nu aan dat, in tegenstelling tot 1.2., de schijf II los om as III draaibaar is, terwijl I en III nog steeds vast met elkaar zijn verbonden. Het systeem rolt eveneens over een horizontaal vlak.

Bewijs:

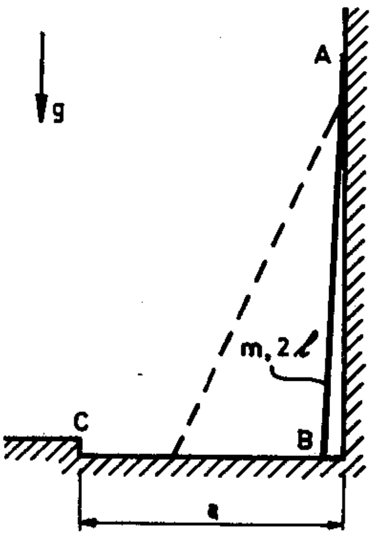
c) $\omega_{II} = \omega,$ [1]

d) $2v = (\Omega + \Omega_{II})r,$ [1]

e) $2\omega\ell = (\Omega - \Omega_{II})r.$ [1]

Voor de betekenis van de in deze uitdrukkingen voorkomende symbolen wordt verwezen naar de figuur.

2.

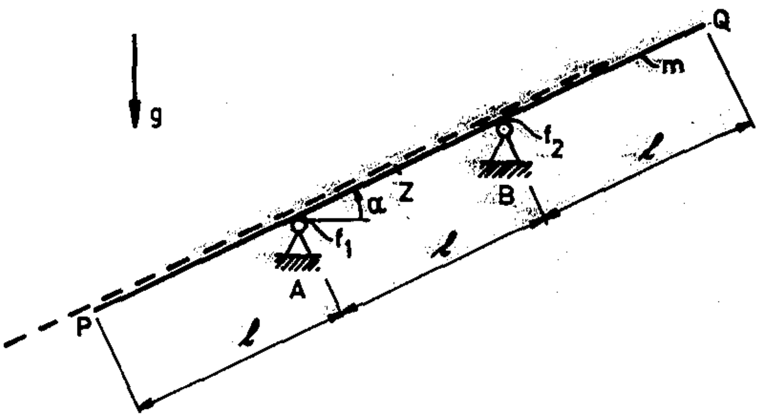


Een ladder, op te vatten als een homogene staaf AB met lengte 2ℓ en massa m, staat in een enigszins schuine stand tegen een verticale muur. De hoek die de ladder maakt met de verticaal mag als te verwaarlozen klein worden beschouwd. Vanuit deze stand gaat de ladder zonder beginsnelheid bewegen onder invloed van de zwaartekracht, versnelling g, in een verticaal vlak loodrecht op de snijlijn muur-grondvlak. Zowel de muur als het grondvlak zijn wrijvingsloos. Op het grondvlak bevindt zich op een afstand a ($a < 2\ell$) van de muur een vaste rand C. De botsing is volkomen onelastisch.

a) Bereken de snelheidsverdeling van de ladder vlak vóór de botsing met C. [3]

b) Bewijs dat het punt B van de ladder bij de botsing voor geen enkele waarde van a loskomt van het grondvlak, door te bewijzen dat door de ladder op het grondvlak een verticale, naar beneden gerichte reactiestoot wordt uitgeoefend. [3]

c) Stel de voorwaarde op waaraan a moet voldoen, opdat het punt A van de ladder in contact blijft met de muur. [4]

3\. 

Een homogene staaf PQ, massa m, lengte 3ℓ, rust op twee vaste horizontale evenwijdige pennen A en B, op afstand ℓ van elkaar. De hoek welke de lijn AB maakt met het horizontale vlak is α. Het zwaartepunt Z van de staaf bevindt zich in het midden van het lijnstuk AB. Op zeker moment laat men de staaf PQ los, waarna deze langs AB zal glijden, tot het zwaartepunt Z de pen A bereikt.

De wrijvingscoëfficiënt tussen de staaf en de pennen bedraagt in A f_1 en in B f_2. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd:

i) Stel een voorwaarde op voor f_1 en f_2 opdat inderdaad beweging zal optreden; [3]

ii) Stel een voorwaarde op voor f_1 en f_2 opdat de staaf juist tot rust komt wanneer het punt Z de pen A bereikt; [3]

Als f_1 en f_2 voldoende klein zijn bepaal dan:

iii) de snelheid waarmee het punt Z de pen A passeert; [2]

iv) de bewegingsvergelijkingen voor de beweging van de staaf direct nadat het punt Z de pen A gepasseerd is. [2]

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op vrijdag 28 mei 1971, 14.00-17.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan een zijde te worden beschreven.
Van de beide theorievraagstukken 1a en 1b mag er slechts één, naar keuze, worden gemaakt.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievraag.

a) i) Beschouw de integraal $I(y) = \int_a^b f(y(x),y'(x),x)dx$.

Bepaal de Eulerse vergelijking bij $I(y)$; dat is de vergelijking waaraan $y(x)$ moet voldoen opdat $I(y)$ stationair is. [4]

ii) Wat is het verband tussen de Eulerse vergelijkingen en de vergelijking van Lagrange? [3]

iii) Pas de beantwoording van i) toe op het volgende probleem:

Een homogene ketting, massa m, lengte ℓ, hangt tussen twee punten A en B op afstand $a < \ell$ van elkaar. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.

Bepaal de vorm van de kromme waarin de ketting hangt als functie van de coördinaten van A en B. [3]

b) i) Laat A de op een star lichaam verrichte arbeid gedurende een bepaald tijdsinterval zijn en ΔT de toename van de kinetische energie over dat interval.

Bewijs de betrekking:

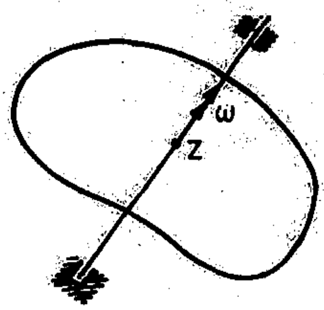
$$A = \Delta T. \qquad [4]$$

ii) Bewijs, uitgaande van de algemene uitdrukking voor de kinetische energie T, de betrekkingen

$$P_x = \frac{\partial T}{\partial v_{0x}}, \quad D_x = \frac{\partial T}{\partial \omega_x},$$

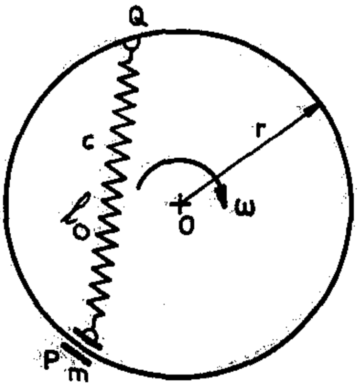
waarin P_x, v_{0x}, D_x en ω_x de x-componenten zijn van resp. de impuls, de snelheid van het zwaartepunt, het impulsmoment en de hoeksnelheid. [4]

iii)



Bereken de impuls van een star lichaam dat met een hoeksnelheid ω draait om een in de ruimte vaste as door het zwaartepunt Z van het lichaam. [2]

2.



Een cirkelvormige hoepel (straal r) is draaibaar om een vaste verticale as door zijn vaste middelpunt 0 en loodrecht op het vlak van de hoepel. Een massapunt P (massa m), zonder wrijving langs de hoepel verschuifbaar, is door middel van een massaloze veer (stijfheid c, ongespannen veerlengte ℓ_0) verbonden met het punt Q van de hoepel. Het gehele systeem is aanvankelijk in rust. Plotseling gaat de hoepel met een voorgeschreven constante hoeksnelheid ω draaien.

a) Hoeveel graden van vrijheid heeft het systeem? [2]

b) Leid af een uitdrukking voor de kinetische energie. [1]

c) Leid af een uitdrukking voor de potentiële energie. [1]

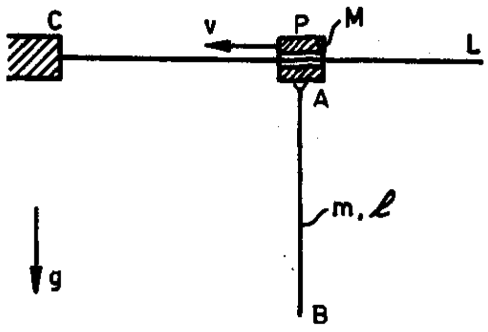
d) Leid af een uitdrukking voor de gegeneraliseerde kracht. [1]

e) Stel de vergelijking(en) van Lagrange en de bijbehorende beginvoorwaarde(n) op. [2]

f) Bereken de stabiele stand(en) van "kinetische evenwicht" waarbij P met de hoepel meebeweegt. Beschouw hierbij de gevallen $\ell_0 < 2r$, $\ell_0 = 2r$ en $\ell_0 > 2r$. [2]

g) Bereken de frequentie van de kleine trillingen om die stand(en) voor het geval $\ell_0 \leq 2r$. [1]

3.



Een massapunt P, massa M, kan zonder wrijving glijden langs een horizontale rechte L. Aan P is scharnierend bevestigd een homogene staaf AB, lengte ℓ, massa m. Het stelsel beweegt met een uniforme snelheid v, waarbij AB verticaal onder P hangt. Op L bevindt zich een vaste aanslag C. De botsing tussen P en C is volkomen onelastisch. De versnelling van de zwaartekracht is g.

i) Bepaal de hoeksnelheid van de staaf AB onmiddellijk na de botsing. [3]

ii) Bereken de stoot die het massapunt P op de aanslag C uitoefent. [2]

iii) Hoe groot moet v zijn, opdat de staaf AB na de botsing juist horizontaal komt? [3]

iv) Bewijs dat, als v groter of gelijk is aan de bij iii) gevonden waarde, P gedurende de opgaande beweging van AB na de botsing niet los komt van C. [2]

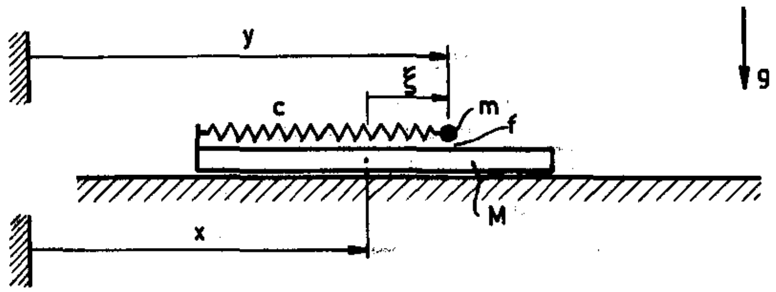
TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica, W IV, WSK IV, op zaterdag 9 oktober 1971, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen te worden gemaakt en de bladen dienen slechts aan één zijde beschreven te worden.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievraag

1.1.



ξ: uitrekking veer.

Een balk met massa M beweegt over een glad horizontaal vlak. Op de balk beweegt een massapunt m, dat via een veer c verbonden is met de balk. De wrijvingscoëfficiënt tussen m en de balk is f, de versnelling van de zwaartekracht g.
Beschouw de volgende vergelijkingen

1) $M\ddot{x} = c\xi - mgf$, $\dot{\xi} = \dot{y} - \dot{x} > 0$,

2) $M\ddot{x} = c\xi + mgf$, $\dot{\xi} = \dot{y} - \dot{x} > 0$,

3) $m\ddot{\xi} + c\xi = 0$,

4) $m\ddot{\xi} = - c\xi - mgf$, $\dot{\xi} = \dot{y} - \dot{x} > 0$,

5) $m\ddot{y} = - c\xi - mgf$, $\dot{\xi} = \dot{y} - \dot{x} > 0$,

6) $m\ddot{y} = - c\xi + mgf$, $\dot{\xi} = \dot{y} - \dot{x} < 0$.

a) Van bovenstaande zes vergelijkingen zijn er drie principieel fout. Geef de nummers van deze vergelijkingen. [2]

b) Geef in woorden weer wat de drie goede vergelijkingen voorstellen. [2]

1.2. Beantwoord de volgende vragen met ja of neen.

1) Kan in een inertiaalsysteem een centrifugaalkracht bestaan? [1]

2) Is een centrifugaalkracht altijd conservatief? [1]

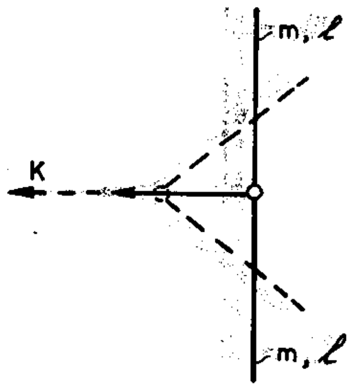
3) Grijpt de resulterende centrifugaalkracht altijd aan in het zwaartepunt van een lichaam? [1]

4) Is het impulsmoment van een translerend star lichaam om ieder punt gelijk aan nul? [1]

5) Heeft de impulsmomentvector van een lichaam altijd dezelfde richting als de hoeksnelheidsvector? [1]

6) Beperken we ons bij het zoeken naar een zwak extremum van een functionaal tot functies die naburig zijn van de orde nul? [1]

2.



Twee homogene staven, beide massa m, lengte ℓ, zijn verbonden door een wrijvingsloos scharnier. Zij kunnen zonder wrijving bewegen in een horizontaal vlak V.

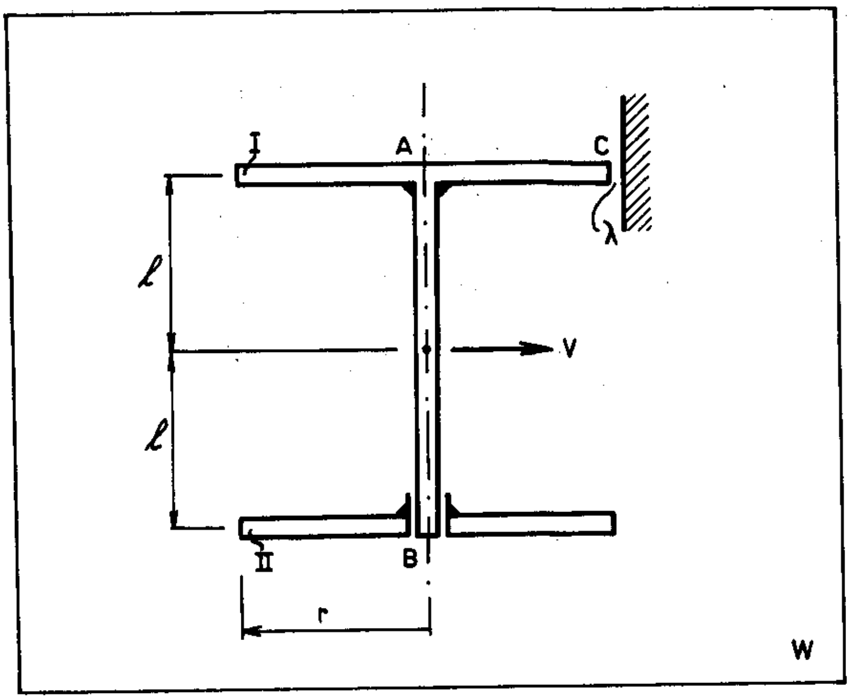
Aanvankelijk liggen de staven in elkaars verlengde. Op zeker moment grijpt een kracht K aan, werkend in het vlak V en loodrecht op de staven. De kracht K is constant van grootte en richting. Onder invloed van K gaan de beide staven bewegen.

Gevraagd wordt te bepalen:

i) De hoeksnelheden van de staven wanneer de hoek tussen beide gelijk nul wordt; [6]

ii) De reactiekracht in het scharnier als functie van de hoek tussen de staven. [4]

3.



Van een massaloze as AB (lengte 2ℓ) is het uiteinde A vast verbonden met een homogene, dunne schijf I (massa M, straal r, AB $\perp$ vlak van I). Ter plaatse van B is een aan I identieke schijf II zonder wrijving om de as draaibaar. Het geheel rolt over een horizontaal vlak W zodanig dat AB transleert met een uniforme snelheid V. Het punt C van schijf I (afstand C tot W is r) botst tegen een verticaal, glad en vast obstakel waardoor een stoot gericht volgens de lijn CA op I wordt uitgeoefend. De botsingscoëfficiënt is λ. Na de stoot rollen I en II opnieuw over W.

Bereken de volgende grootheden:

a) De translatie- en hoeksnelheid van I en II; [4]

b) De reactiestoten in de raakpunten van I en II met W, en in punt B; [3]

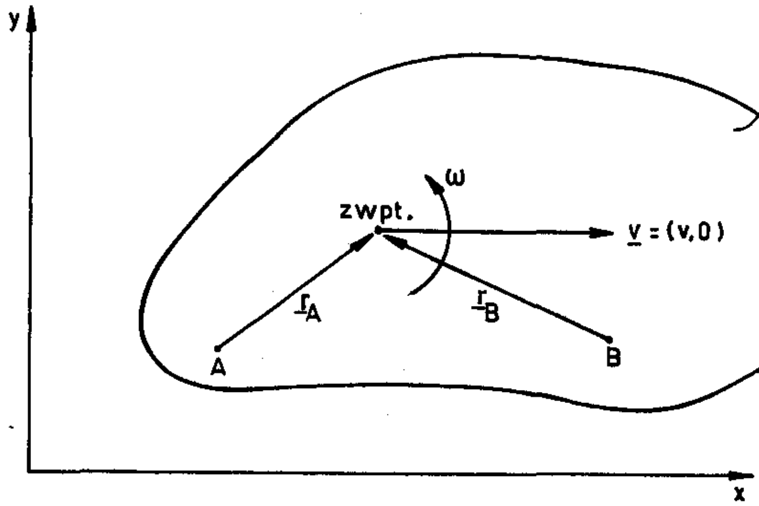
c) Het reactiestootmoment in B. [3]

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op 10 januari 1972, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievraag.



Gegeven een vlak lichaam L dat beweegt in het x-y-vlak met zwaartepuntssnelheid $\underline{v}$ ($\underline{v}$ ∥ x-as) en hoeksnelheid $\underline{\omega}$ ($\underline{\omega}$ ⊥ x-y-vlak). A en B zijn twee willekeurige punten van L. Beantwoordt voor dit stelsel de volgende vragen.

i) Geef de definitie van impulsmoment. [2]

ii) Bewijs, uitgaande van deze definitie, dat

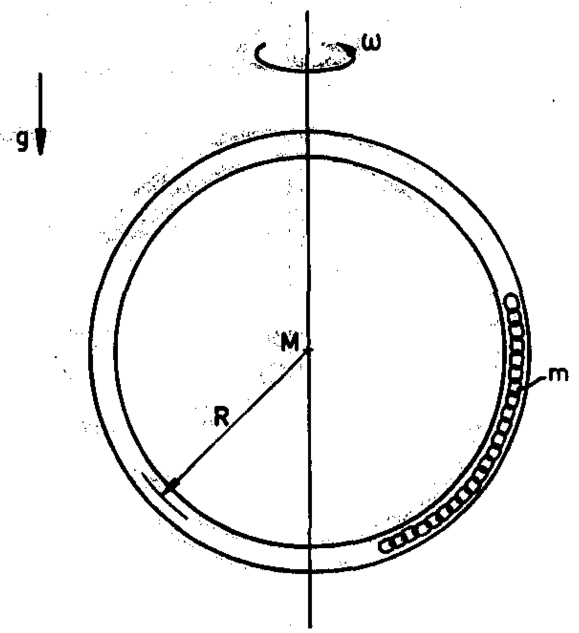
$$\underline{D}_A - \underline{D}_B = m(\underline{r}_A - \underline{r}_B) \times \underline{v} \ . \qquad [4]$$

($\underline{r}_A$ en $\underline{r}_B$ volgens figuur, m: massa van L).

iii) Bepaal de meetkundige plaats van die punten A waarvoor

$$\underline{D}_A = \underline{0} \ . \qquad [4]$$

2.



Een cirkelvormige buis, straal R, roteert met constante hoeksnelheid ω om een verticale as door een middellijn van de buis. In de buis kan zonder wrijving een homogene ketting, lengte $\frac{\pi}{2}$ R en massa m, glijden. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt:

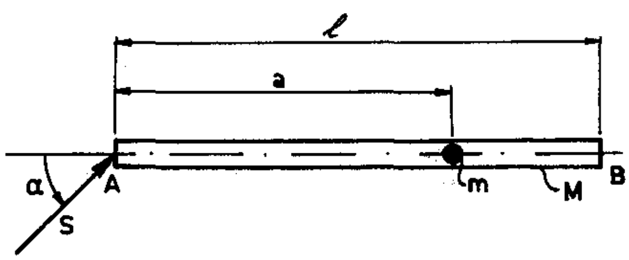
i) Leidt de bewegingsvergelijking af. [5]

ii) Bepaal de kinetische evenwichtsstanden. [2]

iii) Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtsstanden. [1]

iv) Bepaal de frequentie van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstanden. [2]

3.



Een gesloten homogene gladde buis AB kan zonder wrijving glijden over een horizontaal vlak H. In de buis bevindt zich een puntmassa m, op een afstand $a < \ell$ van A, welke zonder wrijving in de buis kan bewegen. Het uiteinde A van de buis wordt getroffen door een in H gelegen stoot S welke onder een hoek α met de lijn AB aangrijpt.

Gevraagd wordt:

i) de snelheid van het zwaartepunt van de buis, [4]

ii) de hoeksnelheid van de buis en [3]

iii) de snelheid van het massapunt [3]

direct na de stoot te bepalen.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op 15 april 1972, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan een zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

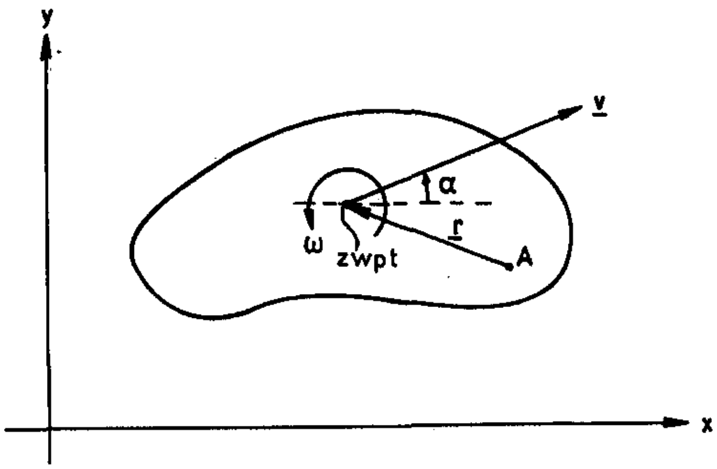
□÷□

1. Theorievraag.

i) Geef de definitie van een stoot.
Wat is de dimensie van een stoot? [2]

ii) Leid, uitgaande van de zwaartepunts- en momentenstelling, vergelijkingen af voor de verandering van de impuls en het impulsmoment gedurende een stootproces. [3]

iii)



Een platte schijf beweegt met willekeurige snelheidsverdeling in het xy-vlak. Op zeker moment wordt het punt A van de schijf gefixeerd.

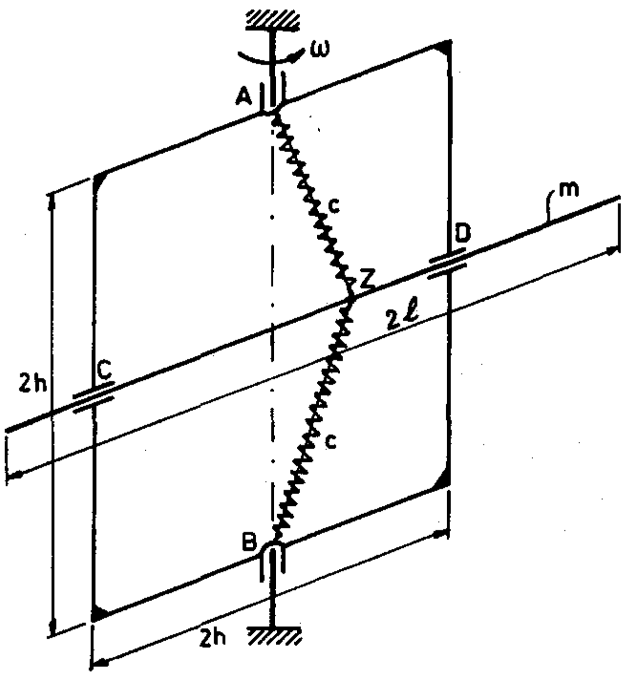
a) Hoe verandert het impulsmoment om A ten gevolge van de fixatie? [2]

b) Bereken het energieverlies ten gevolge van de fixatie als functie van de snelheidsverdeling voor de fixatie en de plaats van A. [3]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 15 april 1972. (W IV, WSK IV)

□÷□

2.

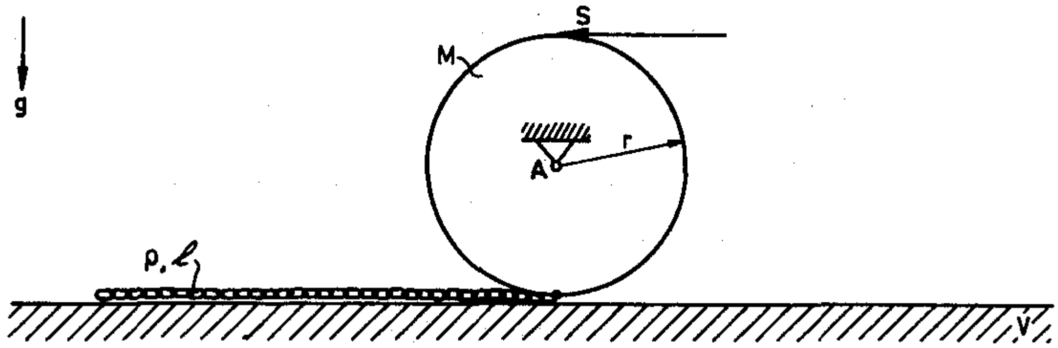


Een starre raamconstructie in de vorm van een vierkant, zijde 2h, draait met constante hoeksnelheid ω om de verbindingslijn van de middens A en B van twee overstaande zijden.

Een homogene starre staaf, massa m, lengte 2ℓ, $\ell >> h$, kan zonder wrijving glijden langs de verbindingslijn van de middens C en D van de beide overige zijden. Het zwaartepunt Z van de staaf is met twee veren, veerstijfheid c, ongespannen lengte 0, verbonden met de punten A en B.

Gevraagd wordt de kinetische evenwichtsstanden van de staaf te bepalen. [3]
Wanneer zijn deze standen stabiel? [3]
Bepaal de frequentie van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstanden. [4]

3.



Een gestrekte homogene ketting, lengte ℓ, massa per lengteeenheid ρ, ligt op een ruw horizontaal vlak V, wrijvingscoëfficiënt f.

Het uiteinde van de ketting is aan het onderste punt op de omtrek van een homogene, verticale schijf, massa M, straal r, middelpunt A, bevestigd.

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 15 april 1972. (W IV, WSK IV)

De schijf kan zonder wrijving draaien om een vaste as door A, loodrecht op het vlak van de schijf. Het onderste punt van de schijf bevindt zich op een te verwaarlozen afstand van V. Op een bepaald tijdstip wordt op het bovenste punt van de schijf een horizontale stoot S uitgeoefend, waardoor de ketting op de schijf wordt gewikkeld.
De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt:

i) De hoeksnelheid van de schijf direct na de stoot, [3]

ii) De hoeksnelheid van de schijf als functie van de hoek waarover de schijf verdraaid is, voor de ketting helemaal opgerold is, [5]

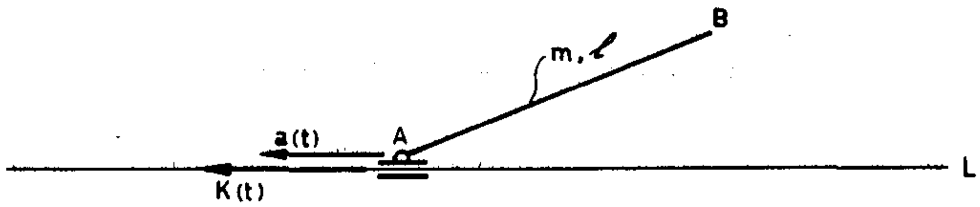
iii) De grootte van S waarvoor de ketting helemaal op de schijf wordt gewikkeld. [2]

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op 29 mei 1972, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan een zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievraag.



In een horizontaal vlak bevindt zich een staaf AB, massa m, lengte ℓ, waarvan het ene uiteinde A langs een rechte L beweegt. De staaf kan vrij draaien om A in het horizontale vlak. Er is nergens wrijving. Het punt A heeft een versnelling a(t) onder invloed van een op A werkende kracht K(t), beide gericht langs L.

a) Beschouw de versnelling a(t) van A als voorgeschreven en geef een kort geargumenteerd antwoord op de volgende vragen.

   i) Hoeveel gegeneraliseerde coördinaten heeft dit systeem? [1]

   ii) Bepaal de gegeneraliseerde krachten. [1]

   iii) Is K(t) een reactie- of een belastingskracht? [1]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op 29 mei 1972.

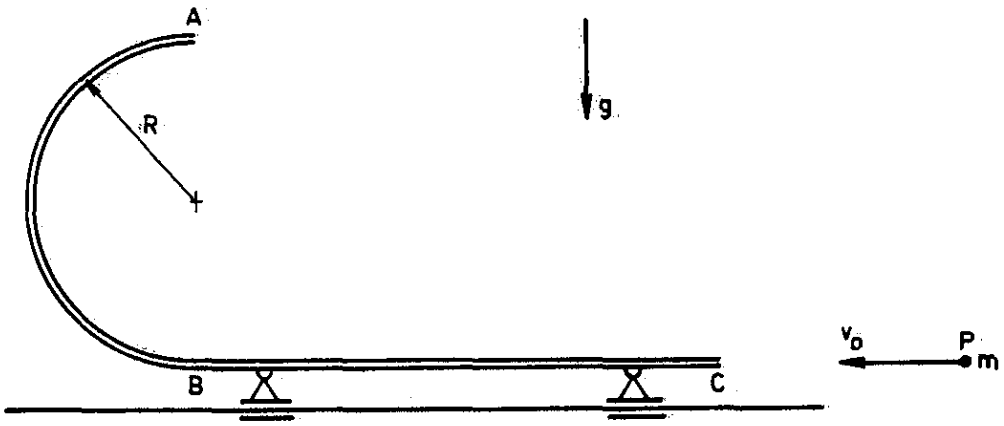
o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

iv) Geldt hier: $T + U$ = constant? [1]

v) Geldt om het punt A: $\underline{M} = \dot{\underline{D}}$? [1]

b) Laat in plaats van $a(t)$ de kracht $K(t)$ zijn voorgeschreven en beantwoord dezelfde vragen als onder a).

2.



Een buis, massa M, lengte ℓ, te verwaarlozen diameter, is over het deel AB gebogen in een halve cirkel, straal R ($\pi R < \ell$) en over het deel BC recht. Het rechte deel raakt aan de cirkelboog. De buis kan zonder wrijving transleren langs een horizontale rechte. Aanvankelijk is de buis in rust. Op zeker ogenblik wordt een massapunt P, massa m, in de buis geschoten met snelheid v_0, gericht langs CB. Het punt P beweegt zonder wrijving in de buis. De versnelling van de zwaartekracht is g.

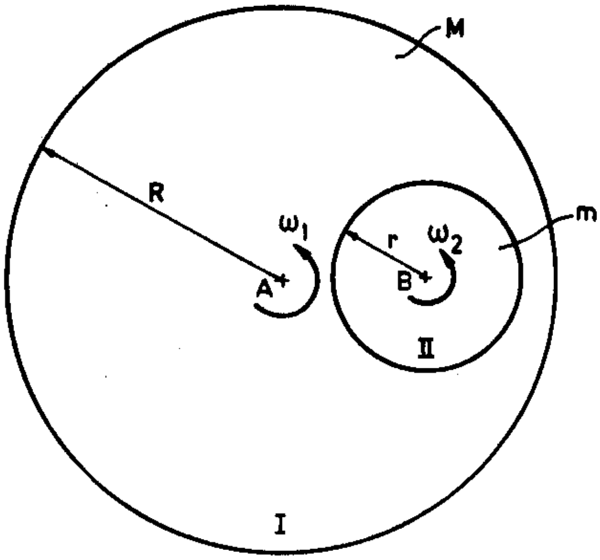
i) Stel de bewegingsvergelijkingen voor de beweging van punt en buis op en geef de begincondities. [7]

ii) Stel de voorwaarde op waaraan v_0 moet voldoen opdat P de buis in A verlaat. [3]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op 29 mei 1972.

o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

3.



Een homogene schijf I, massa M, straal R, draait in een horizontaal vlak om zijn middelpunt A.

Het middelpunt B van een homogene schijf II, massa m, straal r, is vast verbonden met schijf I.

Schijf II beweegt in hetzelfde horizontale vlak als schijf I en kan draaien om B.

De afstand AB = a.

De absolute hoeksnelheden van I en II zijn respectievelijk ω_1 en ω_2.

Op een bepaald moment wordt schijf II gefixeerd t.o.v. schijf I, waarna beide schijven met dezelfde hoeksnelheid verder roteren.

Gevraagd wordt:

i) Bereken de hoeksnelheid van het systeem direct na de fixatie. [5]

ii) Bepaal de stoten en het stootmoment in B die t.g.v. de fixatie op schijf II werken. [3]

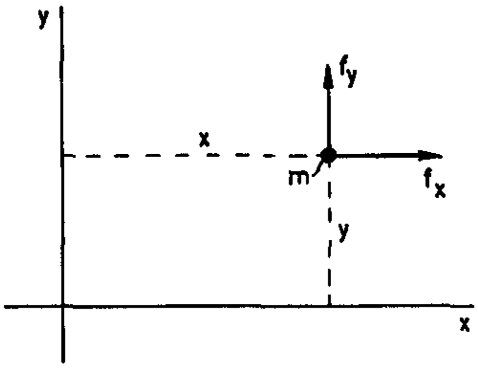
iii) Bereken de verandering van de kinetische energie van het systeem. [2]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 7 oktober 1972, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts *aan één zijde* te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van de 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ

1. Theorievraag.



Een massapunt, massa m, kan vrij bewegen in het x-y-vlak. Op het massapunt werken in x- resp. y-richting de volgende krachten

$$f_x = ax + by$$
$$f_y = cx + dy \qquad (ad - bc \neq 0) \ ,$$

waarin x en y de coördinaten van het massapunt voorstellen en a, b, c en d constanten zijn.

i) Aan welke conditie(s) moeten de coëfficiënten a, b, c en d voldoen, opdat bovenstaand krachtenveld conservatief is? [1]

Neem bij de volgende drie vragen aan dat aan de conditie(s) bij i) voldaan is.

ii) Bepaal de potentiële energie U. [2]

iii) Bepaal met behulp van deze U de evenwichtsstand(en). [1]

iv) Onderzoek met behulp van deze U de stabiliteit van de evenwichtsstand(en). [2]

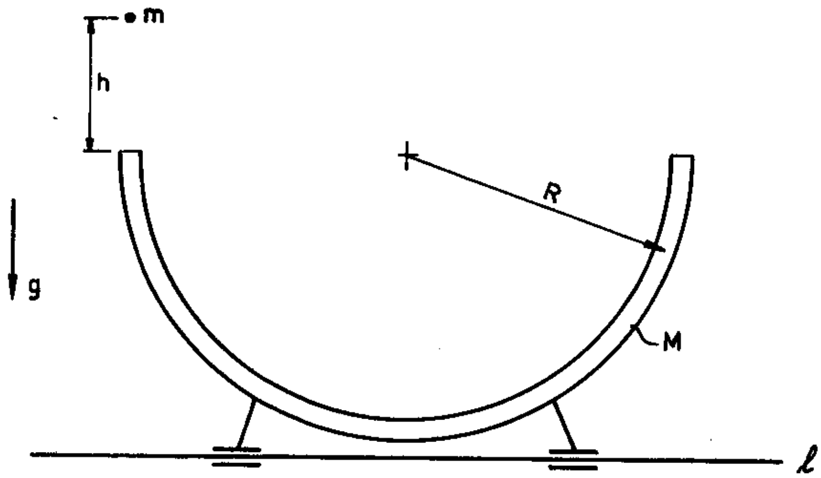
Examen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 7 oktober 1972.
Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ

Neem bij de volgende twee vragen aan dat aan de conditie(s) bij i) niet voldaan is.

v) Hoe kunt u nu de evenwichtsstand(en) bepalen? [1]

vi) Neem $a = d = 0$ en bewijs dat er geen stabiele evenwichtsstand bestaat. [2]

2. Een buis in de vorm van een halve cirkel kan zonder wrijving glijden langs een vaste horizontale rechte ℓ. De diameter van de buis is te verwaarlozen, de straal van de cirkel is R en de buis heeft massa M.
Een massapunt met massa m bevindt zich zonder snelheid op hoogte h loodrecht boven het linker uiteinde van de buis. Op zeker moment valt het massapunt onder invloed van de zwaartekracht in de buis. Er is geen wrijving tussen buis en massapunt. De versnelling van de zwaartekracht is g.



Gevraagd wordt:

i) De bewegingsvergelijking(en) van het systeem. [5]

ii) De snelheid van de buis als functie van de plaats van het massapunt in de buis. [2]

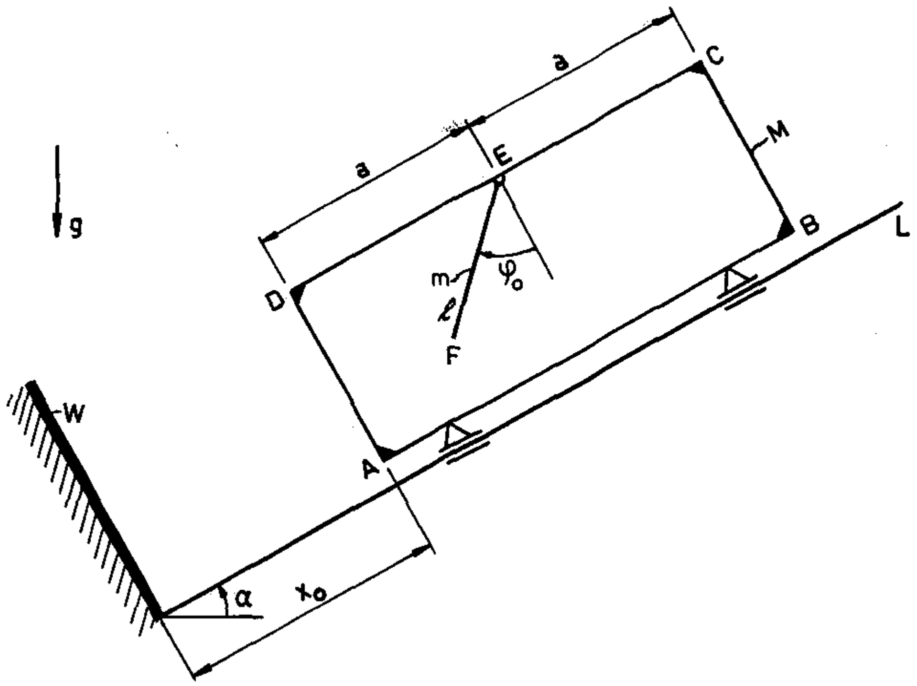
iii) De snelheid van het massapunt in het laagste punt van de buis. [2]

iv) De snelheid van het massapunt bij het verlaten van de buis ter rechter zijde. [1]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 7 oktober 1972.

Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ

3.



Een starre rechthoek ABCD, massa M, lengte AB gelijk 2a, kan zonder wrijving in een verticaal vlak glijden langs de halfrechte L, die een hoek α met het horizontale vlak maakt, zodanig dat AB evenwijdig blijft aan L. In het midden E van CD is een homogene staaf EF, massa m, lengte ℓ ($\ell < a$) scharnierend bevestigd. De staaf kan zonder wrijving om E draaien in het vlak van de rechthoek. Aan het einde van de halfrechte L bevindt zich een starre vlakke wand W loodrecht op L. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.
Op zeker moment, de afstand van AD tot W is dan x_0 en de hoek tussen de staaf EF en de zijde CB is dan φ_0, gaat de rechthoek onder invloed van de zwaartekracht vanuit rust glijden langs L.
Gevraagd wordt:

i) Hoe groot moet φ_0 zijn opdat gedurende deze beweging de hoek tussen EF en CB constant blijft? [3]

Z.O.Z.

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op zaterdag 7 oktober 1972.
Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ↑Δ

De rechthoek botst na enige tijd tegen de wand W; de botsing is volkomen on-elastisch.
Gevraagd wordt:

ii) Te bewijzen dat na de botsing gedurende de opwaartse beweging van de staaf de rechthoek in rust blijft. [3]

iii) Te bepalen de afstand x_0, opdat na de botsing de staaf juist de zijde CD zal raken. [4]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op maandag 8 januari 1973, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van de 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ

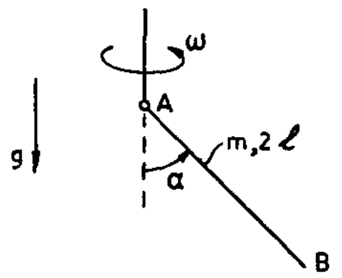
I. Theorievraag.

i) Wat verstaat U onder een kinetische evenwichtsstand? [2]

ii) Geef twee methoden waarmee U een kinetische evenwichtsstand kunt bepalen. [1]

iii) Geef twee methoden waarmee U de stabiliteit van een kinetische evenwichtsstand kunt onderzoeken. [1]

Beschouw het volgende voorbeeld:



Een staaf AB, massa m, lengte 2ℓ, wordt gedwongen te roteren om een verticale as met constante hoeksnelheid ω. De staaf kan in A scharnieren om een meedraaiende horizontale as. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt:

iv) Welke van de volgende vier uitdrukkingen is minimaal in iedere stabiele evenwichtsstand (voor α: zie figuur):

$$U_1 = - mg\ell \cos\alpha ,$$

$$U_2 = - mg\ell \cos\alpha + \frac{2}{3} m\omega^2\ell^2 \sin^2\alpha ,$$

$$U_3 = - mg\ell \cos\alpha - \frac{2}{3} m\omega^2\ell^2 \sin^2\alpha ,$$

$$U_4 = - mg\ell \cos\alpha - \frac{1}{2} m\omega^2\ell^2 (\frac{1}{3} + \sin^2\alpha) \;?$$ [2]

v) Hoeveel kinetische evenwichtsstanden heeft dit probleem? (Dit aantal is afhankelijk van ω.) [2]

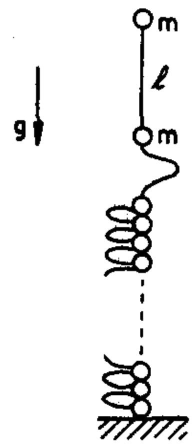
vi) De stabiliteit van de stand α = 0 te onderzoeken. [2]

Zie blz. 2

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op maandag 8 januari 1973.

Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ++Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ++Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ

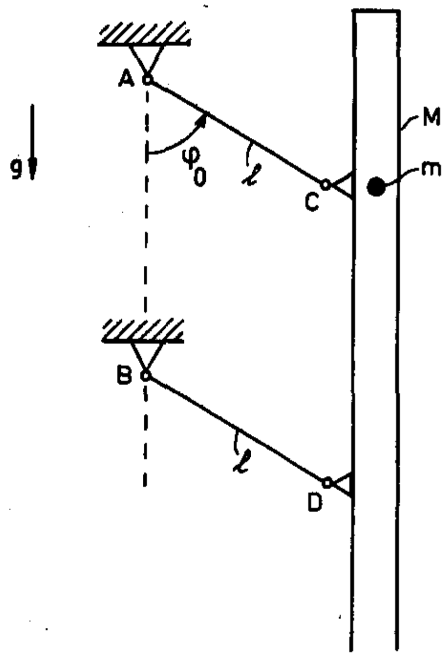
2.



Een aantal van n massapunten (alle massa m) onderling verbonden door massaloze onrekbare koorden (alle lengte ℓ) vormt een keten.
De massapunten liggen aanvankelijk verticaal boven elkaar. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.
Op zeker ogenblik krijgt het bovenste massapunt een verticale naar boven gerichte snelheid ter grootte $\sqrt{11g\ell}$.
De botsingen (op de momenten dat de koorden juist spannen) zijn volkomen onelastisch.
Gevraagd wordt te bepalen:

i) hoeveel massapunten in beweging komen; [4]
ii) welke hoogte het bovenste massapunt bereikt; [3]
iii) het totale energieverlies wegens de botsingen. [3]

3.



Twee massaloze staven ter lengte ℓ zijn scharnierend verbonden met twee vaste punten A en B. In C en D is een buis met massa M en te verwaarlozen diameter scharnierend verbonden met de beide staven en wel zodanig dat de buis steeds een verticale stand inneemt. In de buis kan een massapunt, massa m, wrijvingsloos bewegen. Alle scharnieren zijn wrijvingsloos.
Op zeker moment, als het systeem zich nog in rust bevindt, AC staat dan onder de hoek φ_0 met de verticaal, het massapunt bevindt zich ter hoogte C, begint het systeem te bewegen onder invloed van de zwaartekracht. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Zie blz. 3

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op maandag 8 januari 1973.

Gevraagd wordt:

i) Stel de bewegingsvergelijkingen op. [5]

ii) Bepaal de verticale snelheid van het massapunt en de verticale afstand die het massapunt aflegt. [1]

iii) Bepaal de hoeksnelheid van AC als functie van de hoek. [2]

iv) Zij φ_0 klein ($|\varphi_0| << 1$). Bepaal dan de frequentie van kleine trillingen om de laagste stand. [2]

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

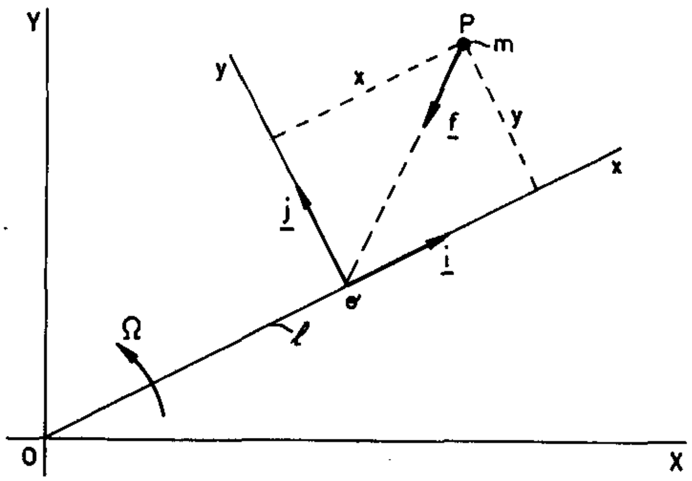
Onderafdeling der Wiskunde

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV)
op zaterdag 7 april 1973, 9.00 - 12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd.
De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

-.-

1. Theorievraag.



Gegeven een assenkruis σxy dat beweegt in het vlak van een inertiaalstelsel OXY. De afstand $O\sigma$ is ℓ, de x-as ligt in het verlengde van $O\sigma$, de y-as staat loodrecht op $O\sigma$ en het systeem σxy roteert met een hoeksnelheid Ω om O.
Verder zijn $\underline{i}$ en $\underline{j}$ eenheidsvectoren langs resp. de x- en de y-as.
In het vlak beweegt een massapunt P, massa m, dat door het punt σ wordt aangetrokken met een kracht $\underline{f}$.

i) Bepaal de componenten langs $\underline{i}$ en $\underline{j}$ van de positievector van P ten opzichte van O (uitgedrukt in ℓ, x en y). [1]

ii) Bewijs de volgende relaties

$$\frac{d}{dt}\,\underline{i} = \Omega\underline{j}\ , \quad \frac{d}{dt}\,\underline{j} = -\Omega\underline{i}\ . \qquad [2]$$

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV)
op zaterdag 7 april 1973.

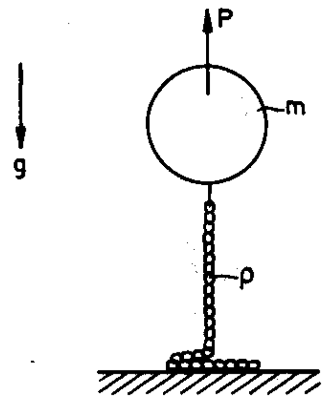
-.-

iii) Bepaal van P de relatieve snelheid en de sleepsnelheid. [2]

iv) Bepaal van P de relatieve versnelling, de sleepversnelling en de coriolisversnelling. [3]

v) Geef de bewegingsvergelijkingen van P ten opzichte van oxy. [2]

2.



Een ketting, lengte ℓ en massa per lengte eenheid ρ, is bevestigd aan een ballon met massa m.
De liftkracht van de ballon is P ($P > mg$).
De ketting ligt geheel op de grond en de ballon is in rust.
Op $t = 0$ wordt de ballon losgelaten en begint te stijgen.
De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt:

i) Stel de bewegingsvergelijking van het systeem op voor stijgen zolang de ketting nog niet geheel in beweging is. [4]

ii) Bepaal de snelheid als functie van de afgelegde weg in geval i). [2]

iii) Voor welke waarden van P komt de ketting geheel los en geef voor dit geval de bewegingsvergelijking direct nadat de ketting geheel los is. [2]

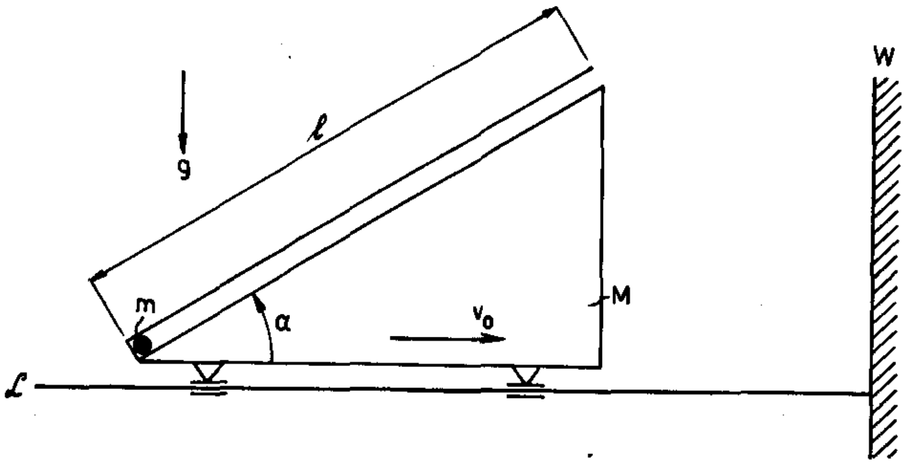
iv) Bepaal de maximale hoogte die de ballon bereikt in het geval dat de ketting niet geheel los komt. [2]

123.

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV)
op zaterdag 7 april 1973.

-.-

3.



Een karretje, massa M, beweegt zonder wrijving langs een horizontale rechte $\mathcal{L}$ met snelheid v_0 in de richting van een starre wand W loodrecht op $\mathcal{L}$. Aan het karretje is, onder een hoek α $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ een gladde massaloze buis bevestigd, lengte ℓ, waarin zich een puntmassa m bevindt die in rust is t.o.v. het karretje. Op zeker ogenblik botst het karretje tegen de muur. De botsingscoëfficiënt is λ. De versnelling van de zwaartekracht is g.

i) Bepaal de snelheden van het karretje en de puntmassa juist na de botsing. [4]

ii) Bepaal de bewegingsvergelijkingen na de botsing. [4]

iii) Hoe groot moet v_0 worden gekozen opdat na de botsing de puntmassa de buis juist zal verlaten? [2]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica, (W IV, WSK IV) op zaterdag 26 mei 1973, 9.00 - 12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd.
De verdeling van de 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ

1. Theorievraag.

i) Hoe luidt het principe van de virtuele arbeid? [1]

ii) Hoe luidt het principe van d'Alembert? [1]

iii) Leid voor een vrij massapunt uit het principe van de virtuele arbeid de eerste wet van Newton af, en [1]

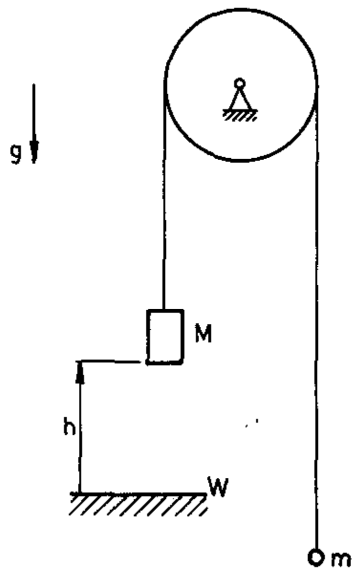
iv) uit het principe van d'Alembert de tweede wet van Newton. [1]

v) Geef in het kort aan hoe voor een vrij lichaam uit het principe van d'Alembert de zwaartepuntsstelling en [2]

vi) de momentenstelling kunnen worden afgeleid. [2]

vii) Bij een niet-vrij lichaam is de totale kracht de som van belastingskrachten en reactiekrachten. Kunnen de reactiekrachten uit bovenstaande principes worden geëlimineerd en zo ja: hoe? [2]

2.



Een katrol kan zonder wrijving in een verticaal vlak draaien om een vast punt. Om de katrol is een voldoende lang, massaloos, onrekbaar en volkomen buigzaam koord geslagen.

Aan de beide uiteinden van het koord zijn de massa's M en m (M > m) bevestigd. De massa M bevindt zich op een hoogte h boven een vlak W.

De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.

Z.O.Z.

Examen/tentamen Theoretische Mechanica, (W IV, WSK IV) op zaterdag 26 mei 1973.

Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ

Op zeker ogenblik laat men het stelsel los. De massa M botst volkomen onelastisch met W. De massa m beweegt aanvankelijk naar boven, maar valt daarna weer terug. De botsing tussen m en M (via het koord) is volkomen onelastisch.

Gevraagd wordt te bepalen:

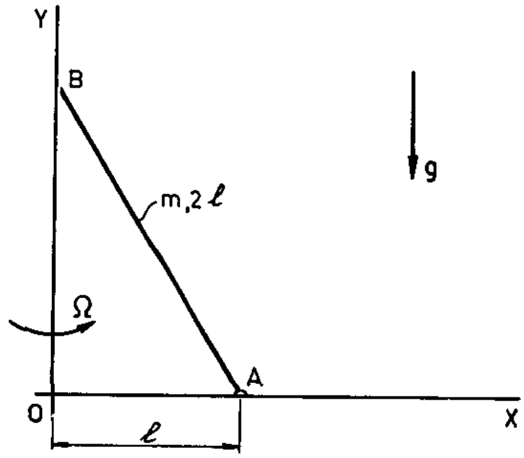
i) De stoot tussen M en W; [2]

ii) De hoogte die m na de eerste botsing bereikt; [2]

iii) De stoot tussen m en M; [3]

iv) De hoogte die M na de tweede botsing boven W bereikt. [3]

3.



In een rechthoekig assenstelsel OXY, met de Y-as verticaal, bevindt zich een staaf AB, massa m, lengte 2ℓ. De staaf is in het punt A zonder wrijving scharnierend verbonden met de X-as, afstand OA is ℓ, en het punt B rust vrij tegen de Y-as. De versnelling van de zwaartekracht is g.
Op zeker tijdstip begint het systeem te roteren om de Y-as met hoeksnelheid Ω.

i) Aan welke conditie moet Ω voldoen opdat het punt B van de staaf loskomt van de Y-as? [4]

Stel dat voldaan is aan bovenstaande conditie en beantwoord de volgende twee vragen:

ii) Wat is de bewegingsvergelijking van de staaf? [3]

iii) Bereikt de staaf de verticaal door A, en:

a) zo ja, met welke snelheid,

b) zo neen, wat is dan de maximale afstand die B van de Y-as komt? [3]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 6 oktober 1973, 9.00-12.00 uur.

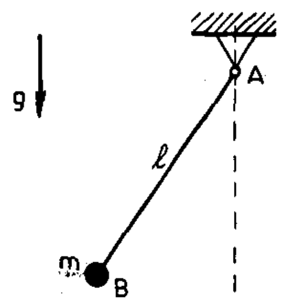
N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+

1. THEORIEVRAAG.

i) Wat is een eenzijdige verbinding? [1]

Beschouw het volgende voorbeeld:



Gegeven een slinger bestaande uit een massapunt B, massa m, dat via een massaloos, onrekbaar, volkomen buigzaam koord, lengte ℓ, is verbonden met een vast punt A. Het punt B beweegt onder invloed van de zwaartekracht in een verticaal vlak.
Beantwoord de volgende vragen:

ii) Geef de verbindingsrelatie. Dit is bij de slinger een ongelijkheid waaraan de afstand $\overline{AB}$ moet voldoen. [1]

iii) Bij een eenzijdige verbinding zijn altijd twee verschillende bewegingen mogelijk. Geef deze mogelijkheden aan met het bijbehorende aantal graden van vrijheid. [1]

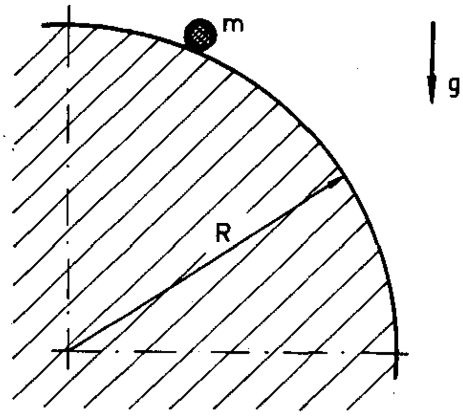
iv) Bij elk van de in iii) beschreven bewegingen hoort een dynamische voorwaarde, dit is een voorwaarde waaraan de reactiekrachten moeten voldoen. Geef deze voorwaarden. [1]

Zie blz. 2

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 6 oktober 1973.
Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ

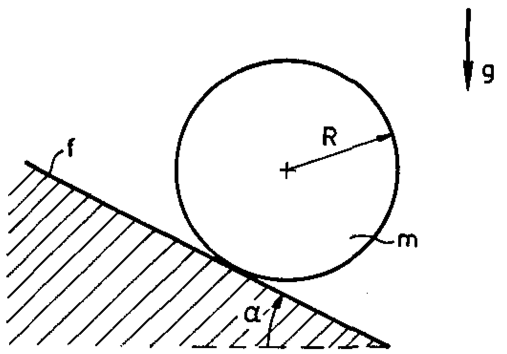
Beantwoord de vragen ii) tot en met iv) ook voor de volgende voorbeelden:

a)



Een massapunt beweegt aanvankelijk langs een cirkelvormige goot onder invloed van de zwaartekracht. Er is geen wrijving. [1],[1],[1]

b)



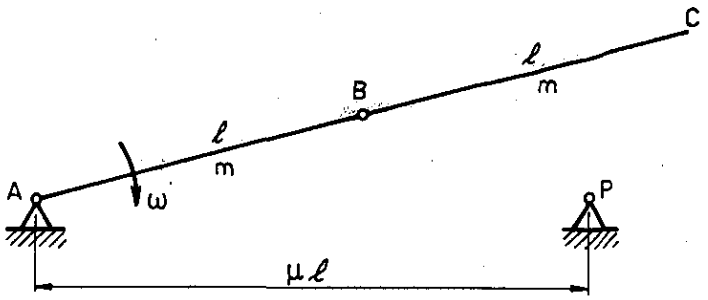
Een cirkelvormige schijf beweegt langs een hellend vlak onder invloed van de zwaartekracht. De wrijvingscoëfficiënt tussen schijf en hellend vlak is f. De schijf blijft in contact met het hellend vlak. Bij dit voorbeeld moet bij vraag ii) een conditie voor de wrijvingskracht W gegeven worden. [1],[1],[1]

Zie blz. 3

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 6 oktober 1973.

Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ†Δ

2.



Twee homogene staven AB en BC, beide lengte ℓ en massa m, zijn in B scharnierend met elkaar verbonden. De staven roteren met hoeksnelheid ω om het vaste punt A, waarbij BC in het verlengde van AB ligt. Op zeker ogenblik botst de staaf BC volkomen onelastisch tegen de vaste aanslag P op een afstand $\mu\ell$ van A. Gevraagd wordt:

i) Stel de vergelijkingen op waaruit de hoeksnelheden van de beide staven en de stoten die in A, B en P optreden kunnen worden bepaald. [6]

ii) Bepaal de waarde van μ waarvoor fixatie optreedt. [2]

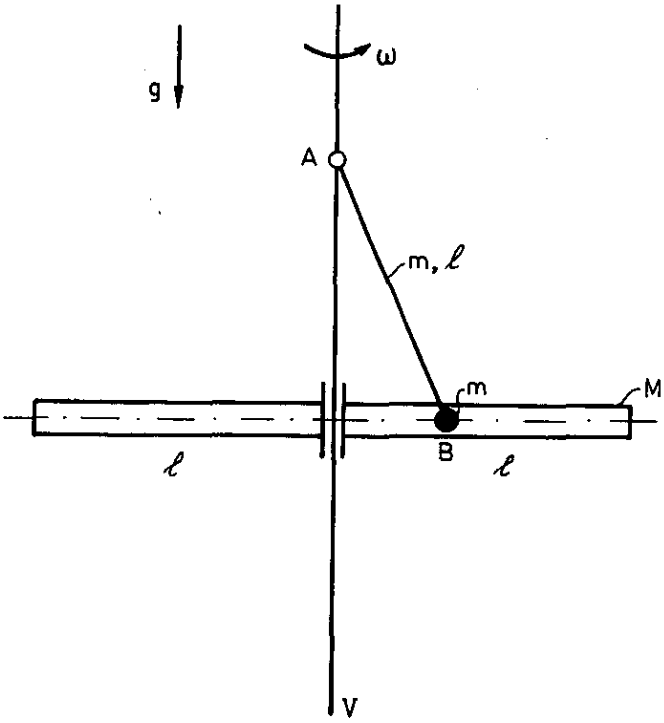
iii) Voor welke waarde van μ is de reactiestoot in B gelijk aan nul? [2]

Zie blz. 4

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 6 oktober 1973.

Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ+Δ

3.



Een homogene staaf AB met massa m en lengte ℓ scharniert om het vaste punt A. Aan het uiteinde B van de staaf bevindt zich een massapunt met massa m dat in een homogene horizontale buis met massa M en lengte 2ℓ kan bewegen. De verticale as V gaat door A en het zwaartepunt van de buis. De buis kan glijden langs V. Er treedt nergens wrijving op. Het systeem roteert met constante hoeksnelheid ω om V. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Gevraagd wordt:

i) Stel de bewegingsvergelijking op. [4]

ii) Bepaal de evenwichtsstanden. [3]

iii) Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtsstanden en geeft de frequentie van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstanden. [3]

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op 7 januari 1974, 14.00-17.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan een zijde te worden beschreven.
Elk correct vraagstuk wordt met tien punten gehonoreerd. De verdeling van deze tien punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievraag.
Beschouw het volgende probleem: twee vrije, gladde lichamen botsen tegen elkaar.
Gevraagd wordt (definieer steeds volledig de door U gebruikte grootheden)

i) Wat zijn de onbekenden van dit probleem en welke zijn de algemene vergelijkingen daarvoor? [2]

ii) Wat houdt het gegeven: "de lichamen zijn glad" in? [2]

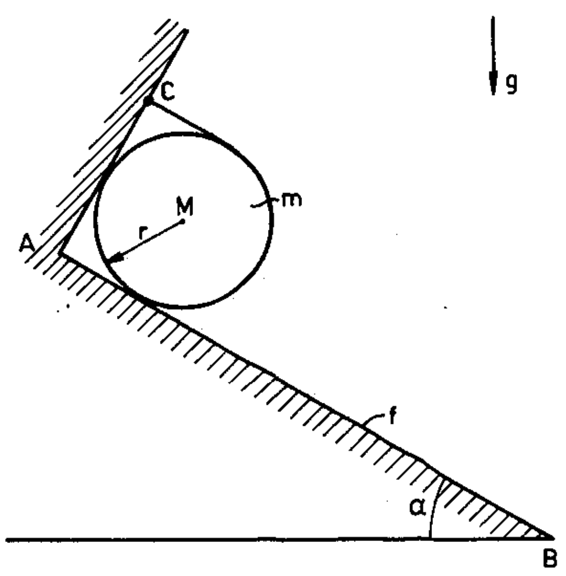
iii) Welke extra onbekende(n) krijgt U indien de lichamen niet glad, maar volkomen ruw zouden zijn? [2]

Beschouw in plaats van twee lichamen twee massapunten die langs een rechte bewegen, en bewijs

iv) Indien de botsingscoëfficiënt λ gelijk aan één is, is het energieverlies door de botsing gelijk aan nul. [2]

v) Indien de botsingscoëfficiënt λ gelijk aan nul is, is het energieverlies door de botsing maximaal. [2]

2.



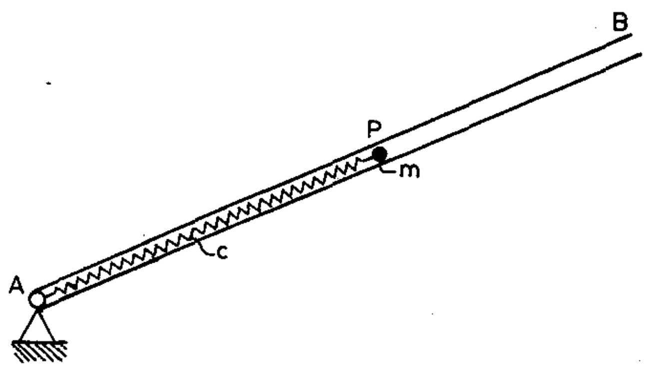
Zie blz. 2.

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op 7 januari 1974.

Een homogene cirkelvormige schijf met middelpunt M, massa m en straal r raakt in rust de gladde wand AC op het hellend vlak AB (hellingshoek α). Om de schijf is een massaloos koord gewikkeld dat in C aan de wand AC bevestigd is, AC = 2r, hoek BAC is $\pi/2$.
Op zeker tijdstip laat men de schijf los en begint de schijf onder invloed van de zwaartekracht langs AB te bewegen. De wrijvingscoëfficiënt tussen de schijf en AB is f. De versnelling van de zwaartekracht is g.
Gevraagd:

i) Bepaal de maximale waarde van f waarbij de schijf na loslaten begint te bewegen. [3]
ii) Bepaal de spankracht in het koord tijdens de beweging. [3]
iii) Stel beginvoorwaarden op voor de beweging. [1]
iv) Bepaal de door M afgelegde weg als functie van de tijd. [3]

3.



Een massaloze buis AB kan zonder wrijving draaien om het uiteinde A in een horizontaal vlak. In de buis kan een massapunt P, massa m, wrijvingsloos glijden. Het massapunt is verbonden met het punt A door een massaloze veer, veerconstante c, ongespannen veerlengte nul.
Aanvankelijk draait de buis met de constante hoeksnelheid $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, terwijl het massapunt zich op de constante afstand $r_0 > 0$ van A bevindt.

1. Bewijs dat elke waarde van r_0 bij een kinetische evenwichtsstand behoort. [2]

Zie blz. 3.

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op 7 januari 1974.

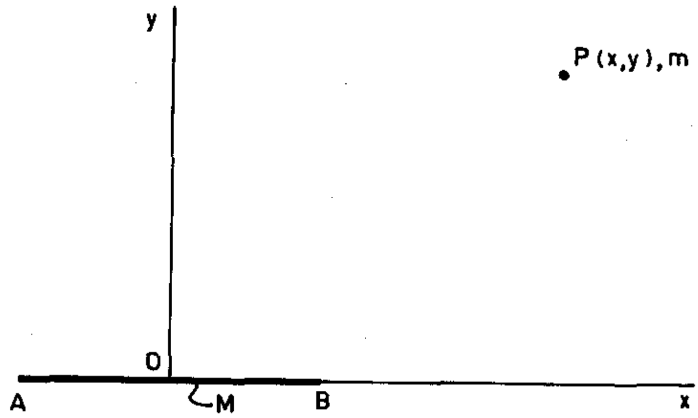
Op zeker ogenblik wordt de hoeksnelheid van de buis door een verticaal stootmoment M in A vergroot. De buis is voldoende lang zodat gedurende de daarna volgende beweging het punt P in de buis blijft.
Gevraagd wordt te bepalen:

2. de verandering van de hoeksnelheid van de buis door het stootmoment; [2]
3. de bewegingsvergelijkingen nadat het stootmoment is opgetreden; [4]
4. de grootste en de kleinste afstand van P tot A. [2]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 6 april 1974, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct vraagstuk wordt met tien punten gehonoreerd.
De verdeling van deze tien punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

1. Theorievraag.



Een homogene staaf AB, massa M, lengte ℓ, oefent op een massapunt P, massa m, een kracht uit volgens de gravitatiewet van Newton ($\vec{K} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$).
In het vlak, waarin de staaf en het massapunt zich bevinden, wordt een orthogonaal assenkruis aangebracht, zodanig dat de oorsprong samenvalt met het middelpunt van de staaf en de x-as langs de staaf ligt.
Gevraagd wordt te bepalen:

i) de potentiaal van de gravitatie; [4]

ii) de kracht die door de staaf op het massapunt wordt uitgeoefend. [4]

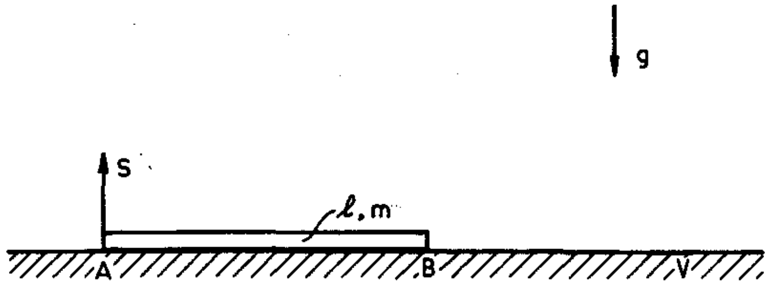
Beantwoord met een korte motivering de volgende vraag:

iii) Valt de kracht op P langs de lijn OP? [2]

Zie blz. 2.

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 6 april 1974.

2.



Een homogene staaf AB (massa m, lengte ℓ) ligt in rust op een glad horizontaal vlak V. Op zeker tijdstip ondervindt de staaf in A een vertikale stoot ter grootte S. De vertikale snelheid van B ten gevolge van de stoot S is nul (m.a.w. de botsing in B is volkomen onelastisch). De versnelling van de zwaartekracht is g.

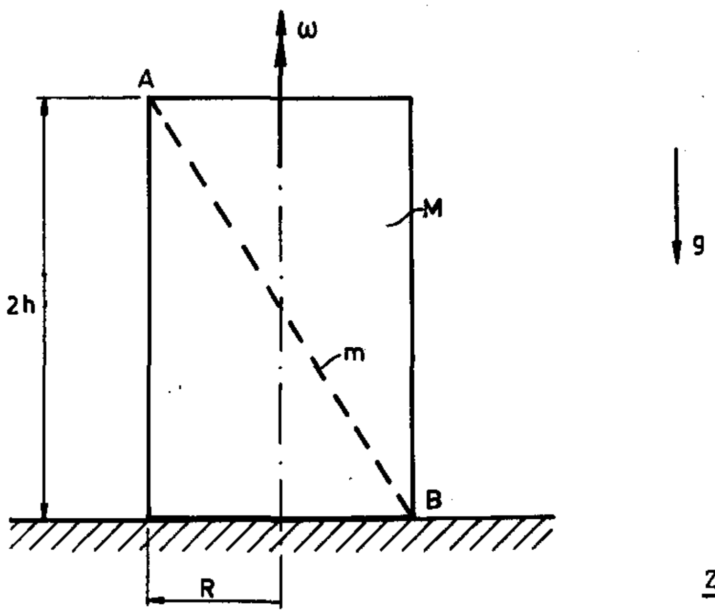
Gevraagd:

i) Bereken de snelheden en de hoeksnelheid van de staaf direct na de stoot. [4]

ii) Bereken de reactiestoot in B. [3]

iii) Stel de bewegingsvergelijkingen op voor de staaf nadat de stoot is opgetreden en onderzoek of de staaf aanvankelijk in contact blijft met het vlak V. [3]

3.



Zie blz. 3.

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 6 april 1974.

Een homogene cirkelcylinder, massa M, straal R, hoogte 2h, staat met de as vertikaal op een glad horizontaal vlak. Binnen de cylinder bevindt zich een homogene staaf AB, massa m. De punten A en B liggen op de mantel van de cylinder met A in het boven- en B in het ondervlak en wel zodanig dat de staaf en de cylinderas in een vlak liggen. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Aanvankelijk roteert de cylinder met een hoeksnelheid ω om zijn as. Aangenomen mag worden dat de cylinderas vertikaal blijft.

i) Bewijs dat het zwaartepunt van het systeem in rust blijft. [2]

ii) Bewijs dat de hoeksnelheid constant is. [2]

iii) Bereken de reactiekracht van de vloer op de cylinder. [2]

iv) Bepaal het aangrijpingspunt van de bij iii) genoemde reactiekracht. [2]

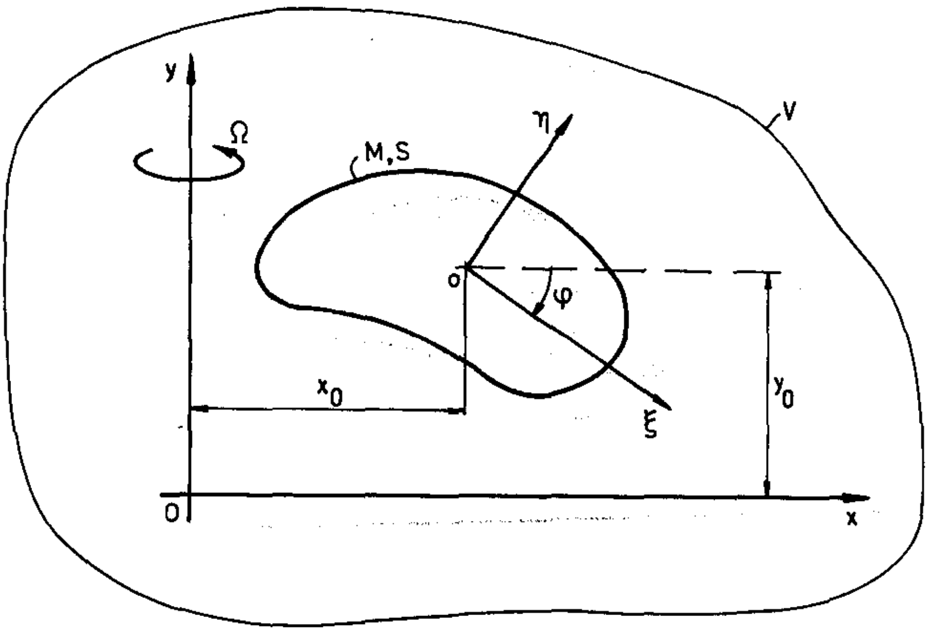
v) Bereken de maximale waarde van ω waarvoor de cylinder niet kantelt. [2]

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 25 mei 1974, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

1. Theorievraag.



Een vlak V draait met constante hoeksnelheid Ω om een vaste as. In V kan een schijf, massa M, oppervlak S, bewegen. Oxy is een assenstelsel met de y-as langs de draaiingsas en oξη een stelsel van centrale hoofdtraagheidsassen van de schijf, beide gelegen in V.
Bij Uw antwoorden op de volgende vragen moeten de grootheden in de in de figuur aangegeven coördinaten x_0, y_0 en φ, en in de traagheidsmomenten van de schijf ten opzichte van het oξη-stelsel worden uitgedrukt.

i) Geef het verband tussen de (x,y)- en (ξ,η)-coördinaten. [1]

ii) Hoe groot is, bij stilzetten van de rotatie Ω, de totale centrifugaalkracht op de schijf? [3]

iii) Bepaal de afstand van o tot de werklijn van deze centrifugaalkracht. [2]

Zie blz. 2

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 25 mei 1974.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

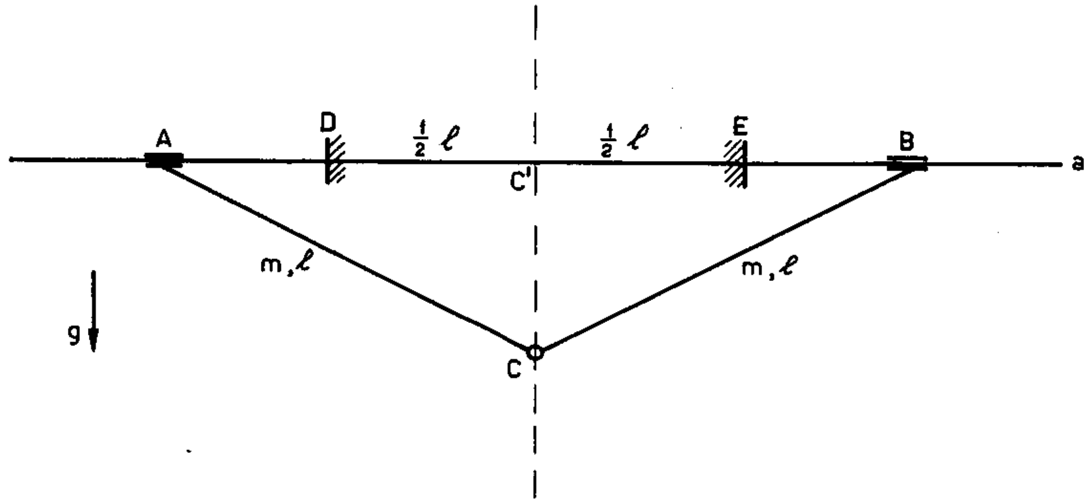
iv) Bereken, uitgaande van de verdeling van de centrifugaalkracht over de schijf, de totale centrifugaalpotentiaal (U_c). [2]

v) Toon aan dat hier geldt

$$U_c = - T_{rot} ,$$

waarin T_{rot} de kinetische energie van de schijf is, indien deze in rust is ten opzichte van V. [2]

2.



Twee homogene staven AC en BC (beide lengte ℓ en massa m) kunnen in A en B zonder wrijving glijden langs een horizontale geleiding a. In C zijn de staven door een wrijvingsloos scharnier verbonden.
De staven bevinden zich oorspronkelijk in horizontale stand (C en C' vallen dan samen).
In D zowel als in E bevindt zich een vaste aanslag.
DC' = EC' = $\frac{1}{2}\ell$.
Op zeker moment beginnen de staven te bewegen onder invloed van de zwaartekracht. De versnelling van de zwaartekracht is g. De botsingscoëfficiënt is bij E en D gelijk aan λ.
Gevraagd wordt:

i) Bereken de hoeksnelheid van de staven direct voor de botsing en de snelheid van B direct voor de botsing. [4]

ii) Bereken de hoeksnelheid van de staven en de snelheid van B direct na de botsing. [3]

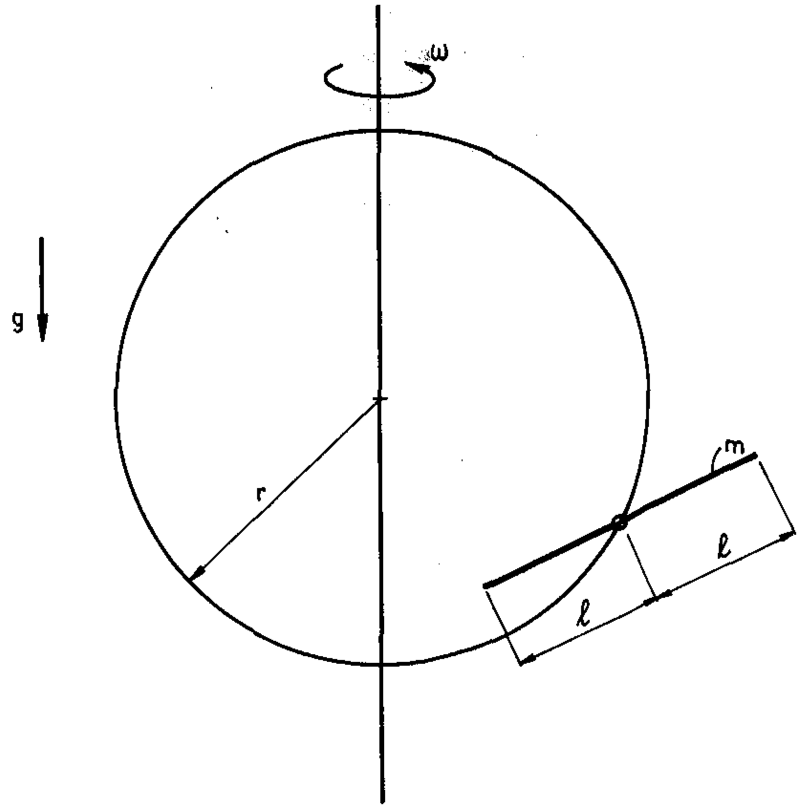
iii) Bereken de reactiestoten in C en B. [3]

Zie blz. 3

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 25 mei 1974.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

3.



Een cirkel draait met constante hoeksnelheid ω om een middellijn, die steeds verticaal staat. Het zwaartepunt van een homogene staaf, massa m, lengte 2ℓ, kan zonder wrijving glijden langs de omtrek van de cirkel. De staaf kan zonder wrijving roteren om zijn zwaartepunt in het vlak van de cirkel. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Beantwoord de volgende vragen:

i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem en welke gegeneraliseerde coördinaten kiest U? [1]

ii) Hoe groot is de potentiële energie van de staaf? [1]

iii) Hoe groot is de kinetische energie van de staaf? [2]

iv) Hoe luiden de bewegingsvergelijkingen? [2]

v) Welke zijn de evenwichtsstanden en welke van die standen zijn stabiel? [2]

vi) Hoe groot zijn de frequenties van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstanden? [2]

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

Examen/tentamen Theoretische Mechanica (W IV, WSK IV) op zaterdag 5 oktober 1974, 9.00-12.00 uur.

N.B. Elk vraagstuk dient op een apart stel bladen gemaakt te worden en de bladen dienen slechts aan één zijde te worden beschreven.
Elk correct opgelost vraagstuk wordt met 10 punten gehonoreerd. De verdeling van deze 10 punten over de onderdelen is tussen vierkante haken achter elk onderdeel aangegeven.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

1. Theorievraag.

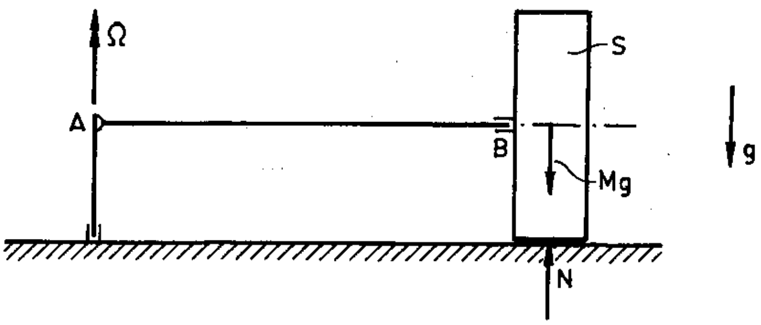
Beschouw een bewegend lichaam dat een hoeksnelheid $\vec{\omega}$ heeft ten opzichte van een vast assenkruis OXYZ. Laat oxyz een assenkruis zijn dat vastzit aan het lichaam. Het lichaam heeft een impulsmoment $\vec{D}$ ten opzichte van O. Voor de tijdsafgeleide van $\vec{D}$ geldt de volgende relatie:

$$\dot{\vec{D}} = \left(\frac{d\vec{D}}{dt}\right)_{rel} + (\vec{\omega} \times \vec{D}) .$$

i) Geef de betekenis van de in bovenstaande vergelijking voorkomende termen. [2]

ii) Bewijs deze vergelijking. [4]

iii) Voorbeeld:



In bovenstaande figuur is S een homogene, ronde schijf, massa M, in zijn middelpunt scharnierend bevestigd aan een massaloze staaf AB, welke laatste met een constante hoeksnelheid Ω roteert om een verticale as door A. De schijf S staat steeds verticaal en rolt over een horizontaal vlak.

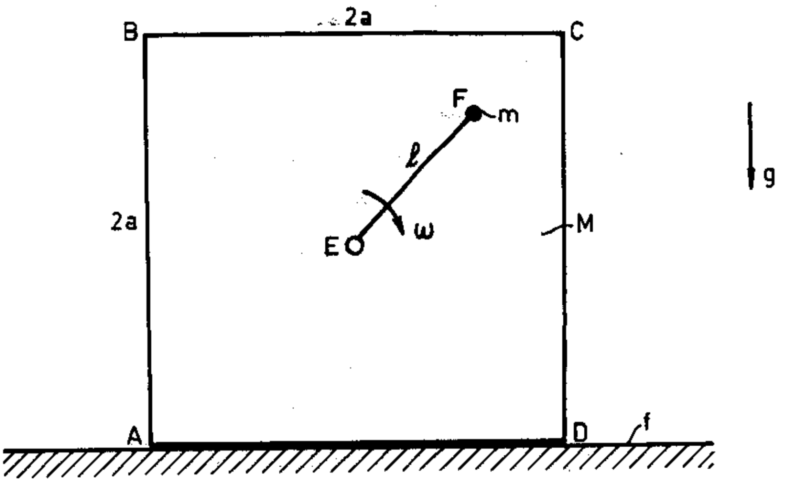
Geef, kort geargumenteerd en met gebruikmaking van bovenstaande vergelijking, antwoord op de vraag:

Zie blz. 2

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 5 oktober 1974.
T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

Is de normaalkracht N, door de schijf op het horizontale vlak uitgeoefend, kleiner dan, gelijk aan of groter dan het gewicht van de schijf: Mg. [4]

2.



Een homogene, vierkante plaat ABCD, massa M, hoogte en breedte 2a, staat loodrecht op een ruw horizontaal vlak, wrijvingscoëfficiënt f. In het middelpunt E van de plaat is scharnierend bevestigd een massaloze staaf EF, lengte ℓ, met in zijn eindpunt F een massapunt, massa m. De staaf roteert met constante hoeksnelheid ω om E in het vlak van de plaat. De versnelling van de zwaartekracht is g. De plaat kan alleen bewegen in het vlak van tekening.

i) De reactie van het horizontale vlak op de plaat wordt gekenmerkt door drie reactiegrootheden. Welke zijn deze? [2]

ii) De hoeksnelheid ω is zodanig dat de plaat niet gaat bewegen. Geef de vergelijkingen waaruit de condities volgen waaraan ω in dit geval moet voldoen.

N.B. Er zijn drie condities, namelijk condities opdat de plaat:

a) niet loskomt,

b) niet gaat glijden,

c) niet gaat kantelen. [5]

iii) Bewijs, dat bij toenemende hoeksnelheid de plaat eerder gaat glijden dan loslaten. [1]

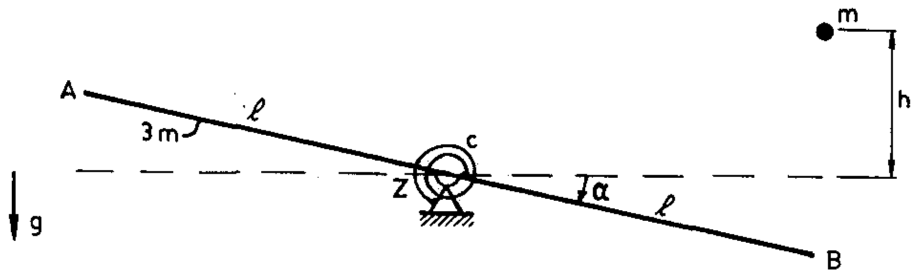
Zie blz. 3

Examen/tentamen Theoretische Mechanica op 5 oktober 1974.

T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T↓T

iv) Neem M >> m. Voor welke waarde van f treedt dan eerder kantelen op dan glijden? [2]

3.



Een homogene staaf AB, massa 3m, lengte 2ℓ, kan, onder invloed van een torsieveer, veerstijfheid c, roteren in een verticaal vlak om zijn middelpunt Z. De veer is ongespannen als de staaf horizontaal ligt. Op zeker ogenblik laat men van een hoogte h boven de horizontaal door Z een puntmassa, massa m, vallen. De versnelling van de zwaartekracht is g. Op hetzelfde ogenblik laat men de staaf vanuit rust los uit die stand waarbij AB een hoek α met de horizontaal maakt en B onder Z ligt. Na verloop van tijd wordt de staaf in B getroffen door het massapunt. Na de botsing bewegen massapunt en staaf aanvankelijk weer onafhankelijk van elkaar maar treffen elkaar opnieuw. Juist voor de tweede botsing hebben zowel het massapunt als de staaf dezelfde posities en snelheden als juist voor de eerste botsing.

Beantwoord de volgende vragen:

i) Hoe groot moet h worden gekozen? [3]

ii) Waarom moet de botsing tussen puntmassa en staaf volkomen elastisch zijn? [3]

iii) Hoe groot moet de hoek α worden gekozen? [4]

6-4-1968

1. a) Evenwichtsstand: $x_e = \frac{m\ell\omega^2}{2(c - m\omega^2)}$ (x is de uitrekking van de veer).

   b) Stabiel als: $c - m\omega^2 > 0$.

   c) Frequentie: $\sqrt{\frac{c - m\omega^2}{m}}$.

2. a) Reactiestoten in A, werkend op de balk:
   horizontaal, naar links gericht: $Mv_0 \cos\alpha$,
   verticaal, naar beneden gericht: $\frac{mMv_0 \sin\alpha}{(6M + 2m)}$.

   b) $t_1 = \frac{\ell}{v_0 \cos\alpha}$.

   c) $\frac{g\ell}{2v_0 \cos\alpha} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{(3M + m)}$.

   d) Noem hoek van treffen ϕ_1, dan geldt:

$$\int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{3g}{\ell}\sin\phi + \left(\frac{Mv_0 \sin\alpha}{M\ell + \frac{1}{3}m\ell}\right)^2}} .$$

3. i) Statische uitdrukking: $\frac{Mg}{2c}\,\mathrm{cotan}\,\alpha$.

   ii) - (bewijs)

   iii) $h \geq \frac{\ell(M + m)}{gm^2}\{c\ell(1 - \cos\alpha)^2 - \frac{Mg}{\sin\alpha}(1 - \cos\alpha) - mg\sin\alpha\}$.

8-6-1968

1. a) $\alpha = \arccos\frac{10}{17}$.

   b) Hoeksnelheid bij loslaten: $\sqrt{\frac{10g}{17a}}$.

   c) Wrijvingscoëfficiënt moet oneindig groot zijn.

2. Toename energie: $\pi P\ell$,

   toename hoeksnelheid: $\sqrt{\frac{12\pi P\ell}{m(6R^2 - \ell^2)}}$.

3. x-as loodrecht op de wand, naar links; y-as: richting $\vec{AB}$.
Snelheden na botsing:

i) $v_x = -\lambda V \sin\alpha\ ,\quad v_y = V\cos\alpha\ ,\quad \omega = \Omega\ .$

ii) $v_x = -\lambda V \sin\alpha\ ,\quad v_y = \frac{2}{3}V\cos\alpha + \frac{1}{3}\Omega r\ ,\quad \omega = \frac{v_y}{r}\ .$

12-10-1968

1. $$\dot\phi = \sqrt{\frac{(4\pi\rho r + m)v^2 - 4\rho g r^2(1-\cos\phi) + 2\rho g r^2\phi^2}{4\pi\rho r^3 + mr^2}}$$

$$\text{tijd} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot\phi}\ .$$

2. a) Eén. Noem de hoek die de projectie van AB op het x-y-vlak maakt met de x-as: ϕ.
b) Beschouw de absolute beweging. Dan is:

$$T = \frac{1}{8}m(\ell^2 - h^2)[(\omega + \dot\phi)^2 + \frac{1}{3}(\omega - \dot\phi)^2]\ .$$

$$U = \tfrac{1}{2}mgh \qquad (\text{nulvlak} = \text{x-y-vlak}).$$

c) – (bewijs).

3. Noem hoek OAB: θ (in stand van figuur).
a) Evenwichtsstanden: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_{3,4} = \pm \arccos(\frac{P}{2c\ell})$ (alleen mogelijk als $|P| \le 2c\ell$).
b) Als $P > 0$, dan:

θ_1 : stabiel, als $P < 2c\ell$,
θ_2 : altijd stabiel,
$\theta_{3,4}$: altijd instabiel.

c) Frequentie van kleine trillingen om $\theta = \theta_1$:

$$\sqrt{\frac{3(4c\ell - 2P)}{4m\ell}} \qquad (P < 2c\ell)\ .$$

Idem om $\theta = \theta_2$:

$$\sqrt{\frac{3(4c\ell + P)}{4m\ell}}\ .$$

6-1-1969

1. Noem draaiingshoek van rad: θ (rechtsom) en hoek van OM met verticaal: ϕ (linksom).
Bewegingsvergelijkingen: $I\ddot{\theta} = Kr$; $mr\ddot{\phi} = K - mg \sin \phi$.
Beginvoorwaarden: $t = 0 : \phi = \dot{\phi} = \theta = \dot{\theta} = 0$.

2. a) - (bewijs).

b) Evenwichtsstand: $\phi_0 = \arcsin(\frac{|K|}{mg})$: $0 < K < mg \Rightarrow$ stabiel als $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$,
instabiel als $\frac{\pi}{2} < \phi_0 < \pi$,
$K = mg \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}$ instabiel.

c) $$\dot{\phi}^2 = \frac{2K}{mr}\phi - \frac{2g}{R}(1 - \cos\phi) , \qquad \theta = \frac{Kr}{2I}t^2 .$$

3. a) -
b) -
c) Hoeksnelheid schijven: $\omega = \dfrac{aS}{(M + m)R^2}$,
horizontale snelheid van AB: ωR.

d) $A = \dfrac{a^2S^2}{2(M + m)R^2}$.

4. a) Noem de hoek tussen Mm en de straal van M naar het onderste punt van de grondcirkel van de kegel: ϕ, dan geldt:

$$[Mr^2 \cos^4\alpha + mr^2 \cos^2\alpha\{\cos^2\alpha(1 - \cos\phi)^2 + \sin^2\phi\}]\ddot{\phi} -$$

$$- m\dot{\phi}r^2\{\cos^2\alpha(1 - \cos\phi)\sin\phi + \sin\phi\cos\phi\} + mgr\cos\alpha\sin\phi = 0 .$$

b) Evenwichtsstanden: $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$.

c) ϕ_1: stabiel; ϕ_2: instabiel.

d) Eigenfrequentie: $\sqrt{\dfrac{mg}{Mr\cos^3\alpha}}$.

19-4-1969

1\. a)

$$S = \frac{M\ell I\omega \cos\alpha}{(m\ell^2 \cos^2\alpha + I \sin^2\alpha)} \; .$$

$$\omega = \frac{I\omega_0 \sin^2\alpha}{(m\ell^2 \cos^2\alpha + I \sin^2\alpha)} \; .$$

$$V = \frac{I\ell\omega_0 \sin\alpha \cos\alpha}{(m\ell^2 \cos^2\alpha + I \sin^2\alpha)} \; .$$

2\. Noem de hoek tussen staaf en verticaal: ϕ en de indrukking van de veer: x.

Evenwichtsstanden: $\phi_1 = 0,\ x_1 = 0$ (stabiel)

$\phi_2 = \pi,\ x_2 = 0$ (instabiel).

Eigenfrequenties (om $\phi_1 = 0,\ x_1 = 0$): wortels van

$$\frac{49}{12}\, mM\ell^2\omega^4 + [2mg\ell(M-m) + 4mc\ell^2 + \frac{49}{12} Mc\ell^2]\omega^2 + m^2g^2 - 2cg\ell(M+m) = 0 \; .$$

3\.

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{fR}\sqrt{1 + f^2}} \; .$$

2-6-1969

2\.

$$h = \frac{(m + M)^2\ell}{2m^2(1 + \lambda)^2} \; .$$

3\. b) Snelheid: $\sqrt{fga}$.

c) Afstand: $-\frac{a}{2} + \frac{v^2}{2fg}$.

4\. Noem hoekverdraaiing van S_2 om as $\perp S_2$: ϕ.

Bewegingsvergelijking: $\ddot{\phi} + \frac{4ab\omega^2}{(r^2 + 6b^2)} \sin\phi = 0$.

Evenwichtsstanden: $\phi_1 = 0$ (stabiel), $\phi_2 = \pi$ (instabiel).

Frequentie: $\sqrt{\frac{4ab}{(r^2 + 6b^2)}}\ \omega$.

11-10-1969

2. Noem hoek tussen O_1A (of O_2B) en de verticaal door O_1 (of O_2): θ en de uitrekking van de veer: x.

   a) Evenwichtsstanden: $\theta_1 = 0$, $x_1 = 0$; $\theta_2 = \pi$, $x_2 = 0$.

   b) (θ_1, x_1) stabiel; (θ_2, x_2) instabiel.

   c) Frequenties: wortels van:

$$mMR^2\omega^4 - [m^2gR + (M + m)cR^2]\omega^2 + mgcR = 0 \ .$$

3. Breng assenkruis OXY aan (OX: horizontaal):

   a) De coördinaten van het zwaartepunt van de staaf:

$$x_z = a \ , \quad y_z = \sqrt{\ell^2 - a^2} \ .$$

   De snelheid van het zwaartepunt

$$\dot{x}_z = 0 \ , \quad \dot{y}_z = - a\sqrt{\frac{2g}{\ell} \cdot \frac{1 - \sin\alpha}{\frac{1}{3} + \cos^2\alpha}} \qquad \text{met } \cos\alpha = \frac{a}{\ell} \ .$$

   De hoeksnelheid $\dot{\phi}_0$ bedraagt

$$\sqrt{\frac{2g}{\ell} \cdot \frac{1 - \sin\alpha}{\frac{1}{3} + \cos^2\alpha}} = - \frac{\dot{y}_z}{a} \ .$$

   b) In A: $S_A = \frac{3}{4}\, m\dot{\phi}_0\ell \sin\alpha(\frac{5}{3} + \cos 2\alpha)$ ($\perp$ wand, naar rechts).

   In B: $S_B = \frac{3}{4}\, m\dot{\phi}_0\ell \cos\alpha(1 - \cos 2\alpha)$ ($\perp$ grond, naar boven).

   c) De snelheid van het zwaartepunt

$$\dot{x}_z = \tfrac{3}{4}\, \dot{\phi}_0\ell \cos\alpha(\tfrac{5}{3} + \cos 2\alpha) \ , \quad \dot{y}_1 = - \tfrac{3}{4}\, \dot{\phi}_0\ell \cos\alpha(\tfrac{1}{3} + \cos 2\alpha) \ ,$$

   de hoeksnelheid

$$\dot{\phi}_1 = - \tfrac{3}{4}\, \dot{\phi}_0(\tfrac{1}{3} + \cos 2\alpha) \ .$$

   d) $a = \frac{1}{3}\,\ell\sqrt{3} \rightarrow \cos 2\alpha = - \frac{1}{3} \rightarrow \dot{\phi}_1 = 0$.

4. a) $T = \frac{1}{2} Ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} MR^2\omega^2 + \frac{1}{8} MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(a^2 + \delta^2 \sin^2\omega t)\dot{\theta}^2 +$

$- ma\delta\omega\dot{\theta} \cos \omega t + \frac{1}{2} m\delta^2\omega^2 .$

$U = \frac{1}{2} c\theta^2 .$

b) $[M(a^2 + \frac{1}{4} R^2) + m(a^2 + \delta^2 \sin^2\omega t)]\ddot{\theta} + 2m\delta^2\omega\dot{\theta} \sin \omega t \cos \omega t +$

$+ ma\delta\omega^2 \sin \omega t + c\theta = 0 .$

c) $\theta = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t - \dfrac{\alpha}{(\Omega^2 - \omega^2)} \sin \omega t ,$ (A en B constanten)

met

$$\Omega^2 = \frac{c}{[(m + M)a^2 + \frac{1}{4} MR^2]} ,$$

$$\alpha = \frac{ma\delta\omega^2}{[(m + M)a^2 + \frac{1}{4} MR^2]} .$$

"Shimmy" treedt op als $\omega = \Omega$.

<u>5-1-1970</u>

2. i) Hoeksnelheid: $\dfrac{3a}{4(a^2 + b^2)} v_0 .$

ii) $$v_0 \geq \sqrt{\frac{8g(a^2 + b^2)}{3ma^2} (\sqrt{a^2 + b^2} - a)} .$$

iii) Stoten in C, werkend op het blok:

horizontaal, naar links gericht: $\dfrac{m(a^2 + 4b^2)}{4(a^2 + b^2)} v_0 ,$

verticaal, naar boven gericht: $\dfrac{3ab}{4(a^2 + b^2)} v_0 .$

3. Noem de verticale verplaatsing van de lift naar beneden: x, en de hoek tussen de slinger en de verticaal: ϕ.

i) $(M + m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\phi} \sin \phi - m\ell\dot{\phi}^2 \cos \phi = (M + m)g - 2W ,$

$\ddot{x} \sin \phi = \ell\ddot{\phi} + g \sin \phi .$

Op $t = 0$: $x = \dot{x} = 0, \phi = \alpha, \dot{\phi} = \omega_0$.

ii) $$\dot\phi = \pm\sqrt{\frac{4W(\cos\phi - \cos\alpha) + \ell\omega_0^2(M + m\cos^2\alpha)}{(M + m\cos^2\phi)\ell}}\ .$$

iii) a) $\phi = \alpha$, voor alle t.

b) $\dot\phi = \omega_0$, voor alle t.

4. a) $$\frac{2Mr\omega_0}{(7M + 2m)fg\cos\alpha}\ .$$

b) $$\frac{M(M + m)}{2fg\cos\alpha}\left(\frac{2r\omega_0}{7M + 2m}\right)^2 .$$

c) $\alpha = \arctan f$.

18-4-1970

1.1. a) Wel, b) Niet, c) Wel, d) Wel.

1.2. i) b., ii) a., resp. c., iii) c.

2. Neem de y-as langs OP en de y-as loodrecht hierop en naar links gericht.

a) $$V_{P_x} = \frac{S\sqrt{3}}{2(M+m)}\ ,\ V_{P_y} = 0.$$

b) $$V_{Q_x} = \frac{(3M+m)}{4M(M+m)}S\sqrt{3},\ V_{Q_y} = \frac{S}{4M}\ .$$

c) $$\Omega = \frac{S}{2MR}\ .$$

d) $$T = \frac{(5M^2 + 7mM + 2m^2)S^2}{8M(M+m)^2}\ .$$

3. c) $$\omega^2 = \frac{3fg}{R\sqrt{1+gf^2}}\ ,\quad \tan(\omega t) = 3f.$$

1-6-1970

1.1. a) III, b) Ja.

1.2. a) Nee, b) Nee, c) Ja, d) Nee,
e) T: Nee, U: Nee, T+U: Ja.

2. 1) $$\frac{3S}{2m\ell}\ .$$

2) $$\omega_{voor} = \sqrt{\frac{9S^2}{4m^2\ell^2} + \frac{3g}{\ell^2}(\ell - \sqrt{\ell^2 - a^2})}, \quad \omega_{na} = -\lambda\omega_{voor} .$$

3) $$S = \frac{2m}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{3}\,g(1 - \lambda^2)(\ell - \sqrt{\ell^2 - a^2})} .$$

3. Stel OA = x.

a) $$x = \frac{mg}{c} .$$

b) $$\ddot{x} + (\frac{c}{m} - \omega^2)x = a\omega^2 + g \cos \omega t.$$

c) $$x = \frac{mg}{c} + \frac{m\omega^2 a}{(c - m\omega^2)}(1 - \cos \Omega t) + \frac{mg}{(c - 2m\omega^2)}(\cos \Omega t - \cos \omega t),$$

met

$$\Omega := \frac{c}{m} - \omega^2 .$$

10-10-1970

1. a) $$\omega = \Omega \cos \alpha.$$

b) 1) Ja, 2) Ja, 3) Ja, 4) Nee, 5) Ja, 6) Ja.

2. b) $$\omega^2 < \frac{3(c - mg\ell)}{4m\ell^2} .$$

c) $$\sqrt{\frac{3(c - mg\ell)}{4m\ell^2} - \omega^2} .$$

3. a) $$S = \frac{mMR\omega \sin \alpha}{(2M+m \sin^2\alpha)} ,$$ (richting: PO).

b) $$\Omega = \frac{M\omega}{(2M + m \sin^2\alpha)} .$$

c) $$V = \frac{MR\omega \sin \alpha}{(2M + m \sin^2\alpha)} ,$$ (richting: OP).

11-1-1971

1. a) 1), 3), 4).

   b) 2) impulsbehoud van m in x-richting (tengevolge van het glad zijn van de staaf werkt de stoot op m in y-richting);

   5) kinematische relatie; (restitutie-vergelijking)

   6) behoud van impulsmoment om A van het gehele systeem.

2. Noem de hoek tussen de horizontaal door het middelpunt M van de ring en de lijn Mm: θ(in getekende stand: $0 < \theta < \pi/2$).

   a) Evenwichtsstanden θ_1 en θ_2 volgen uit

$$\omega^2(a+r)\sin\theta - g\cos\theta + \omega^2 r\cos\theta\sin\theta = 0,$$

$$(0 \le \theta_1 \le \pi/2;\ \pi \le \theta_2 \le 3\pi/2)\ .$$

   b) Evenwichtsstanden stabiel als voor $\theta = \theta_{1,2}$:

$$m\omega^2 r(a + r + r\cos\theta)\cos\theta - m\omega^2 r\sin^2\theta + mgr\sin\theta > 0.$$

   c) Frequenties van de kleine trillingen volgen uit:

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{\sin\theta_{1,2}}\left(\frac{g}{r\omega^2} - \sin^2\theta_{1,2}\right)},$$

   waarbij $\theta_{1,2}$ de wortels zijn van a) die ook aan de ongelijkheid b) voldoen.

3. a) 2.

   Noem: de hoek tussen de horizontaal door 0 en 0o: φ, de absolute hoekverdraaiing van M: θ,
   idem van m: ψ,
   alle rechtsom positief genomen.

   b) $$r\dot\psi = (R + r)\dot\varphi - R\dot\theta\ .$$

   c) $$T = \frac{1}{4}MR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m(R + r)^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{4}m\,[(R + r)\dot\varphi - R\dot\theta]^2.$$

   d) $$U = -\,mg(R + r)\sin\varphi.$$

e) $(M + m)R^2\ddot{\theta} - m(R + r)R\ddot{\varphi} = 0, - mR\ddot{\theta} + 3m(R + r)\ddot{\varphi} = 2mg\cos\varphi.$

f) $T = \sqrt{\dfrac{(3M + 2m)(R + r)}{4(M + m)g}}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}$

g) 7.

17-4-1971

2\. a) $\dot{\varphi} = \sqrt{\dfrac{3}{2}\, g\left(1 - \dfrac{\sqrt{4\ell^2 - a^2}}{2\ell}\right)}$ vlak voor de botsing.

c) $\frac{2}{3}\,\ell\sqrt{3} \le a \le 2\ell$.

28-5-1971

1\. a) iii) $y = \mu \cosh \frac{x}{\nu}$, μ en ν constant.

b) iii) $\underline{\dot{p}} = \underline{0}$.

2\. a) 1 (bv. hoek φ)

b) $T = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi} - \omega)^2$

c) $U = \frac{1}{2}c(2r\sin\frac{1}{2}\varphi - \ell_0)^2$

d) $Q_k = -\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = -c[2r\sin\frac{1}{2}\varphi - \ell_0]\cos\frac{1}{2}\varphi$

e) $mr^2\ddot{\varphi} + cr(2r\sin\frac{1}{2}\varphi - \ell_0)\cos\frac{1}{2}\varphi = 0$

$\varphi(0) = 2\arcsin\dfrac{\ell_0}{2r}$, $\dot{\varphi}(0) = \omega$

f) $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 2\arcsin\dfrac{\ell_0}{2r}$

φ_1 altijd stabiel, φ_2 stabiel voor $\ell_0 < 2r$

g) $\omega_0^2 = \frac{c}{m}\cos\frac{1}{2}\varphi_2 = \frac{c}{m}\sqrt{1 - \dfrac{\ell_0^2}{4r^2}}$.

3. i) $w = \frac{3}{2}\ \frac{v}{\ell}$

ii) $S = (M + \frac{1}{4}m)v$

iii) $v = \frac{2}{3}\sqrt{3g\ell}$.

9-10-1971

1.1. a) 1, 3, 4 .

1.2. 1) nee
2) ja
3) nee
4) nee
5) nee
6) nee .

2. i) $\dot{\varphi}(\varphi = 0) = -\sqrt{\frac{3K}{2m\ell}}$

ii) $N = -K \operatorname{tg} \varphi \left[1 - \frac{1}{(1 + 3\cos^2\varphi)^2}\right]$.

10-1-1972

1. iii) $\underline{r}_A = \frac{1}{m}\frac{\underline{D}z \times \underline{v}}{(\underline{v},\underline{v})} + \lambda\underline{v}$.

2. i) $\ddot{\varphi} + \frac{2}{\pi}\frac{g}{R}(\sin\varphi + \cos\varphi) - \frac{1}{\pi}\omega^2\cos 2\varphi = 0$.

ii) $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 \in (0, \frac{\pi}{4})$, $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$.

iii) φ_1 stabiel als $\omega^2 < \frac{g}{R}\sqrt{2}$

φ_2 stabiel als $\frac{d^2U}{d\varphi^2} > 0$

φ_3 instabiel .

iv) $\omega_1^2 = \frac{2}{\pi}\,[\frac{g}{R}\sqrt{2} - \omega^2]$

$\omega_2^2 = \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\,[\{\sin(\varphi_2 + \varepsilon) + \cos(\varphi_2 + \varepsilon)\}\,\frac{g}{R} - \omega^2\tfrac{1}{2}\cos(2\varphi_2 + 2\varepsilon)]$.

3. i) $v_{hor} = \frac{S\cos\alpha}{M}$ $\quad v_{vert} = \frac{-mv + S\sin\alpha}{M}$ (voor v zie iii))

ii) $\frac{1}{12}M\ell^2\omega = S\sin\alpha\,.\,\tfrac{1}{2}\ell + mv(a - \tfrac{1}{2}\ell)$

iii) $v = \frac{S\sin\alpha\,(4\ell - 6a)}{M\ell^2 + m(4\ell^2 + 12a^2 - 12a\ell)}$.

<u>15-4-1972</u>

1. i) $\underline{S} = \lim_{\Delta t\to 0}\int_t^{t+\Delta t}\underline{K}(\tau)d\tau$

$[M\ L\ T^{-1}]$

iii) a) $\underline{D}_A$ verandert niet.

b) $-\Delta T = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}J_0\omega^2 - \tfrac{1}{2}J\Omega^2$.

2. Bew. vergl.: $\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2[x^2 + \frac{1}{3}\ell^2] + c[x^2 + h^2] = $ constant.

i) $x = 0$

ii) stabiel als $\omega^2 < \frac{2c}{m}$

iii) $\omega_0 = \sqrt{\frac{2c - m\omega^2}{m}}$

3. i) $\omega = \frac{S}{\tfrac{1}{2}Mr + \rho\ell r}$

ii) $\dot{\varphi}^2 = \omega^2 + \rho g r\,\frac{fr\varphi^2 - 2f\ell\varphi - 2r(\varphi - \sin\varphi)}{\tfrac{1}{2}Mr^2 + \rho\ell r^2}$

iii) $$S^2 \geq 2\rho g\ell\,[\frac{f\ell}{2r} + (1 - \frac{\sin \ell/r}{\ell/r})][\tfrac{1}{2}Mr + \rho\ell r]\ .$$

29-5-1972

1. a) i) 1 (hoek φ)

ii) $K_\varphi = 0$

iii) reactiekracht

iv) nee

v) vaste ruimte: nee

b) i) 2 (φ en x)

ii) $K_x = K(t)$; $K_\varphi = 0$

iii) belastingskracht

iv) nee

v) vaste ruimte: nee.

2. i) $T + U =$ const.: $\tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m[\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi] + mgR(1 - \cos\varphi) =$

$$= \tfrac{1}{2}mv_0^2\ .$$

$p_x =$ const.: $M\dot{x} + m(\dot{x} + R\dot{\varphi}\cos\varphi) = mv_0$

Beginvoorw.: $\varphi(0) = x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{R}$.

ii) $v_0^2 \geq 4gR\,\frac{M + m}{M}$.

3. i) $$\omega = \frac{\tfrac{1}{2}MR^2\omega_1 + ma^2\omega_1 + \tfrac{1}{2}mr^2\omega_2}{\tfrac{1}{2}MR^2 + ma^2 + \tfrac{1}{2}mr^2}$$

ii) $S_{hor} = 0$

$S_{vert} = ma(\omega - \omega_1)$ (voor ω zie i))

$M = \tfrac{1}{2}mr^2(\omega - \omega_2)$

iii) $\Delta T = (\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}ma^2 + \frac{1}{4}mr^2)\omega^2 - \frac{1}{4}MR^2\omega_1^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega_1^2 - \frac{1}{4}mr^2\omega_2^2$.

<u>7-10-1972</u>

1. i) $b = c$

   ii) $U = -\frac{1}{2}ax^2 - bxy - \frac{1}{2}dy^2$

   iii) $x = y = 0$

   iv) $a < 0,\ d < 0,\ b^2 - ad < 0$

   v) $x = y = 0$ (uit $\ddot{x} = \dot{x} = \ddot{y} = \dot{y} = 0$) .

2. i) $M\dot{x} + m(\dot{x} - R\dot{\theta}\sin\theta) = 0$

   $\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2R\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + R^2\dot{\theta}^2) - mgR\sin\theta = mgh$.

   ii) $\dot{x} = \sqrt{\dfrac{2m^2g(h + R\sin\theta)}{(M + m)(M + m\cos^2\theta)}} \cdot \sin\theta$

   iii) $v_\ell = -\sqrt{\dfrac{2Mg(h + R)}{m + M}}$

   iv) $v_{hor} = 0\ ,\quad v_{vert} = -\sqrt{2gh}$.

3. i) $\varphi_0 = 0$

   iii) $x_0 = \dfrac{2}{3}\,\ell\,\dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha}$.

<u>8-1-1973</u>

2. i) 3

   ii) $\dfrac{37}{18}\,\ell$

   iii) $\dfrac{7}{3}\,mg\ell$.

3. i) Noem: φ hoek tussen verticaal en AC, en x afstand van C tot m.

   $(M + m)\ell^2\ddot{\varphi} - m\ell\ddot{x}\sin\varphi = -(M + m)g\ell\sin\varphi$,

   $m\ddot{x} - m\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi = mg$.

ii) Verticale snelheid: gt,
Verticale verplaatsing: $\frac{1}{2}gt^2$.

iii) $$\dot{\phi} = \pm\sqrt{\frac{2Mg(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{M\ell + m\ell\cos^2\varphi}}\ .$$

iv) $$\sqrt{\frac{Mg}{(M + m)\ell}}\ .$$

7-4-1973

2\. i) Noem x afstand van hoogste punt van ketting tot horizontale vlak.

$$(m + \rho x)\ddot{x} + \rho\dot{x}^2 = P - mg - \rho gx\ .$$

ii) $$\dot{x} = \frac{1}{(m + \rho x)}\sqrt{2(P - mg)mx + \rho(P - 2mg)x^2 - \frac{2}{3}\rho^2 gx^3}\ .$$

iii) $$P > \frac{2g(m^2 + m\rho\ell + \frac{1}{3}\rho^2\ell^2)}{(2m + \rho\ell)}\ ,$$

$$(m + \rho\ell)\ddot{x} = P - (m + \rho\ell)g\ .$$

iv) Maximale hoogte h uit

$$h^2 - \frac{3(P - 2mg)}{2\rho g}h - \frac{3m(P - mg)}{\rho^2 g} = 0\ .$$

3\. i) Snelheid kar: λv_0.
Snelheid m relatief t.o.v. kar: $(1 + \lambda)v_0\cos\alpha$.

ii) Noem: x afstand kar tot wand en ξ afstand m tot beginpunt buis (N.B. ξ: niet-inertiaal).

$$(M + m)\dot{x} - m\dot{\xi}\cos\alpha = [(M + m\sin^2\alpha)\lambda - m\cos^2\alpha]v_0\ ,$$

$$\tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\xi}^2 - 2\dot{x}\dot{\xi}\cos\alpha) + mg\xi\sin\alpha =$$

$$= \tfrac{1}{2}[(M + m)\lambda^2 - 2\lambda(1 + \lambda)m\cos\alpha + (1 + \lambda)^2 m\cos^2\alpha]v_0^2\ .$$

iii) $$v_0 = \sqrt{\frac{mg\ell\sin\alpha}{\frac{1}{2}(M+m)\lambda^2 - \frac{1}{2}(M+m)\{\lambda - \frac{m}{(M+m)}(1+\lambda)\cos^2\alpha\}^2 - m\lambda(1+\lambda)\cos^2\alpha + \frac{1}{2}m(1+\lambda)^2\cos^2\alpha}}$$

28-6-1973

2. i) $M\sqrt{\frac{2(M-m)}{(M+m)}gh}$.

ii) $\frac{2M}{(M+m)}h$, (= hoogte vanaf beginpunt) .

iii) $\frac{Mm}{(M+m)}\sqrt{\frac{2(M-m)}{(M+m)}gh}$.

iv) $\frac{m^2}{(M+m)^2}h$.

3. i) $\Omega^2 \geq \frac{g}{\ell}\sqrt{3}$.

ii) φ is hoek OAB:

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} - m\ell^2\Omega^2\sin\varphi(1-\frac{4}{3}\cos\varphi) = -mg\ell\cos\varphi .$$

iii) a) $\dot{\phi} = \sqrt{\frac{1}{2}\Omega^2 - \frac{3g}{4\ell}(2-\sqrt{3})}$.

6-10-1973

2. ii) $\mu = \frac{16}{11}$.

iii) $\mu = \frac{5}{3}$.

3. i) Noem φ hoek tussen V en AB:

$$\{(\frac{1}{2}M\ell^2 + \frac{1}{6}m\ell^2)\sin^2\varphi + \frac{1}{2}m\ell^2\}\dot{\varphi}^2 +$$

$$-(2M\ell^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\omega^2\sin^2\varphi)\omega^2 - (M+\frac{3}{2}m)g\ell\cos\varphi = 0 .$$

ii) $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi$.

$\varphi_3 = \arccos[\frac{3(2M+3m)}{8m}\cdot\frac{g}{\omega^2\ell}]$, <u>mits</u> $\omega^2 \geq \frac{3(2M+3m)g}{8m\ell}$.

iii) φ_1: stabiel als $\omega^2 < \frac{3(2M + 3m)g}{8m\ell}$,

eigenfreq.: $\sqrt{\frac{(M + \frac{3}{2}m)g\ell - \frac{4}{3}m\omega^2\ell^2}{m\ell^2}}$,

φ_2: instabiel,

φ_3: stabiel als $\omega^2 > \frac{3(2M + 3m)g}{8m\ell}$,

eigenfreq.: $\sqrt{\frac{\frac{4}{3}m\omega^2\ell A}{(M\ell^2 + \frac{1}{3}m\ell^2)A + \frac{16}{9}m^3\omega^4\ell^4}}$,

met

$$A = \frac{16}{9}m^2\omega^4\ell^2 - (M + \frac{3}{2}m)^2 g^2\ell^2 .$$

7-1-1974

2. i) $\frac{1}{2}\tan\alpha$.

ii) $\frac{1}{3}mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

iii) $x_M = r$, $\dot{x}_M = \varphi = \dot{\phi} = 0$, ($x$ langs helling) .

iv) $x_M = \frac{1}{3}g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)t^2$.

3. ii) $\frac{M}{mr_0^2}$.

iii) Noem: $\dot{\phi}$ hoeksnelheid buis en r afstand AP.

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -cr, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 .$$

iv) $r_{max} = r_0\sqrt{\frac{\omega_1^2}{c}}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{M}{mr_0^2}}$,

$r_{min} = r_0$.

6-4-1974

2\. i) Verticale snelheid zwaartepunt: $\frac{3S}{2m}$.

Hoeksnelheid: $\frac{3S}{m\ell}$.

ii) $\frac{1}{2}S$.

iii) Staaf blijft aanvankelijk in contact. Zwaartepunt beweegt zuiver verticaal. Noem φ hoek staaf met vlak:

$$\tfrac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{1}{3}\,m\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = -mg\ell \ .$$

3\. iii) $N = (M + m)g$.

iv) $\frac{mh\omega^2 R}{3(m + M)g}$.

v) $\frac{3(m + M)g}{mh}$.

25-6-1974

2\. i) Hoeksnelheid: $\sqrt{\frac{3g}{2\ell}\sqrt{3}}$.

Snelheid B: $\sqrt{\frac{9}{8}\,g\ell\sqrt{3}}$.

ii) Hoeksnelheid: $-\lambda\sqrt{\frac{3g}{2\ell}\sqrt{3}}$.

Snelheid B: $-\lambda\sqrt{\frac{9}{8}\,g\ell\sqrt{3}}$.

iii) Reactiestoten in B:

horizontaal: $\frac{\sqrt{3}}{18}\,m\ell(1 + \lambda)\sqrt{\frac{3g}{2\ell}\sqrt{3}}$,

verticaal: $\frac{1}{4}\,m\ell(1 + \lambda)\sqrt{\frac{3g}{2\ell}\sqrt{3}}$.

Reactiestoten in C:

horizontaal: $\frac{\sqrt{3}}{36}\,m\ell(1 + \lambda)\sqrt{\frac{3g}{2\ell}\sqrt{3}}$,

verticaal: 0 .

3\. i) 2.

φ: hoek tussen verticaal en straal naar middelpunt staaf.

θ: hoek tussen verticaal en staaf.

ii) $-mgr \cos \varphi$.

iii) $\frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mr^2\omega^2\sin^2\varphi + \frac{1}{6} m\ell^2\omega^2\sin^2\theta + \frac{1}{6} m\ell^2\dot{\theta}^2$.

iv) $mr^2\ddot{\varphi} - mr^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + mgr\sin\varphi = 0$,

$\frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3} m\ell^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = 0$.

v) en

vi) $\varphi = 0$, $\theta = 0$: instabiel,

$\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$: stabiel voor $\omega^2 < g/r$, anders instabiel,

eigenfreq.: $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{r} - \omega^2}$, $\omega_2 = \omega$.

$\varphi = \pi$, en $\theta = 0$ of $\theta = \pi/2$: instabiel.

als $\omega^2 > g/r$:

$\varphi = \arccos(g/r\omega^2)$, $\theta = 0$: instabiel,

$\varphi = \arccos(g/r\omega^2)$, $\theta = \pi/2$: stabiel,

eigenfreq.:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{r^2\omega^2}}\ ,\ \omega_2 = \omega\ .$$

5-10-1974

2\. ii) niet loskomen:

$m\omega^2\ell\cos\varphi \le (M + m)g$, voor alle φ uit $0 \le \varphi \le 2\pi$,

niet glijden:

$$\frac{|m\omega^2\ell\sin\varphi|}{|(M + m)g - m\omega^2\ell\cos\varphi|} \le f\ ,\quad \text{voor alle } \varphi \text{ uit } 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

niet kantelen:

$$\frac{|(mg\ell + m\omega^2 a\ell)\sin\varphi|}{|a(M+m)g - m\omega^2 a\ell\cos\varphi|} \le 1 , \quad \text{voor alle } \varphi \text{ uit } 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

iii) $\omega^2_{\text{glijd.}} = \frac{(M+m)g}{m\ell} \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} < \omega^2_{\text{los}} = \frac{(M+m)g}{m\ell}$.

iv) $f > 1$.

3\. i) $h = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{mg\ell^2}{c}$.

iii) $\alpha = \frac{\pi mg\ell}{2c}$.