TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

THEORETISCHE MECHANICA

Syllabus van het College van

Prof. Dr. J.B. Alblas

Gegeven in het Voorjaarssemester 1978

Syllabus verzorgd door

W.J.J. Kuijpers

Jaf/TU

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Theoretische mechanica

Syllabus van het college gegeven in het
voorjaarssemester 1978 door prof.dr. J.B. Alblas

Dictaatnr. 2.214   Prijs *f* 6,-

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

THEORETISCHE MECHANICA

Syllabus van het college gegeven door prof.dr. J.B. Alblas
in het voorjaarssemester 1978. Syllabus verzorgd
door W.J.J. Kuijpers

voorjaarssemester 1979

Inhoudsopgave

1. Mechanische Stelsels

a. Het Doel van de Mechanica

In de Mechanica wordt bestudeerd het gedrag van mechanische stelsels onder de invloed van krachten en momenten die daarop worden uitgeoefend.

Het gedrag van een mechanisch stelsel is van tweeerlei aard:
een mechanisch stelsel kan bewegen en het kan vervormen.
Twee fundamentele grootheden, die de weerstand tegen de invloeden die op een mechanisch stelsel worden uitgeoefend karakteriseren zijn:
de massa, de bewegingsweerstand
de stijfheid, de vervormingsweerstand.

Omdat in het algemeen de bestudering van het gedrag van een mechanisch stelsel te ingewikkeld is, verdelen we de mechanica in twee delen:

1. de Theoretische Mechanica, waarin alleen de beweging van een mechanisch stelsel wordt bestudeerd;
2. de Toegepaste Mechanica, waarin de nadruk wordt gelegd op de bestudering van de vervorming van een mechanisch stelsel.

In dit college zullen we ons beperken tot de theoretische mechanica. Daartoe veronderstellen we dat de stijfheid van de lichamen waaruit een mechanisch stelsel bestaat, zo groot is dat de vervorming van de lichamen kan worden verwaarloosd ten opzichte van de verplaatsingen. Dergelijke lichamen zullen we star noemen.
De beschouwde lichamen hebben wel massa, dus weerstand tegen beweging.

b. Mechanische Stelsels

Onder een mechanisch stelsel zullen we in principe verstaan een eindig aantal materiële lichamen.
Een materieel lichaam wordt gekarakteriseerd door de volgende eigenschappen:

- het bezet op elk ogenblik op een continue manier een deel van de ruimte die ons omringt;
- er kan een scalaire grootheid, de massa, aan worden toegekend.

Een dergelijk materieel lichaam noemen we ook wel een continu lichaam.
Naast de continue lichamen beschouwen we ook mathematische abstracties als:

de puntmassa, een lichaam zonder ruimtelijke uitgestrektheid, maar voorzien van een eindige massa
de staaf , een lichaam met een één-dimensionale uitgestrektheid, voorzien van een eindige massa
de schijf , een lichaam met een twéé-dimensionale uitgestrektheid voorzien van een eindige massa.

De lichamen waaruit een mechanisch stelsel bestaat kunnen in het algemeen in de ruimte bewegen. Is een lichaam tijdens de beweging niet aan bewegingsbeperkingen onderhevig, dan is het een vrij lichaam. In het algemeen is een lichaam niet vrij maar beperkt in zijn beweging. De beperkingen in de beweging van een lichaam zijn van meetkundige aard en worden niet tot het mechanisch stelsel gerekend.
Voorbeelden van bewegingsbeperkingen zijn:

- een punt van een lichaam kan gekoppeld zijn aan een vast obstakel;
- lichamen kunnen aan elkaar of aan vaste obstakels gekoppeld zijn door vervormbare elementen (b.v. veren) of niet-vervormbare elementen (b.v. starre staven).

c. De positiebepaling

Voor de positiebepaling en de beschrijving van de beweging van een lichaam zullen we steeds gebruik maken van een drie-dimensionale Euclidische ruimte, aangeduid met $\mathbb{R}^3$.
Zoals uit het voorgaande blijkt vatten we een lichaam steeds op als een grootheid met een meetkundige inhoud, het volume, en een materiële inhoud, de massa. De elementen waaruit een lichaam als verzameling bestaat zullen we (materiële) deeltjes noemen. We veronderstellen voorts dat elk lichaam op elk ogenblik kan worden afgebeeld op de genoemde Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$ op een bijectieve wijze. De positie van een element is dan bepaald door de plaatsvector van het punt waarop het element is afgebeeld. Dus: zij $\mathcal{B}$ een lichaam en P een element van dat lichaam dan bestaat er op elk ogenblik t een afbeelding in $\mathbb{R}^3$ z.d.d. voor alle elementen P in $\mathcal{B}$ de positie $\underline{x}$ van P in $\mathbb{R}^3$ bepaald is door de relatie:

$$\underline{x} = \underline{\chi}(P,t) \qquad (1.1)$$

Het beeld van het lichaam $\mathcal{B}$ onder de afbeelding $\underline{\chi}$ geven we in het algemeen aan met V (een van de tijd afhankelijk gebied in $\mathbb{R}^3$) en noemen we een configuratie.
Vergelijking (1.1) is een parametervoorstelling van de baan van het deeltje P. In plaats van de voorstelling (1.1) zullen we in het volgende werken met een ander argument voor de afbeelding.
Noemen we $\underline{X}$ de positie van P op zeker vast ogenblik, het referentiemoment, dan kunnen we voor de positie $\underline{x}$ op elk willekeurig ogenblik schrijven:

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X},t)$$

waarbij ook $\underline{\varphi}$ een bijectie is voor alle t, zodat ook bestaat de bijectieve afbeelding $\underline{\psi}$ z.d.d.

$$\underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x},t) \tag{1.3}$$

Het continue karakter van een lichaam wordt uitgedrukt door de voorwaarde dat op elk ogenblik t de afbeeldingen $\underline{\chi}$, $\underline{\varphi}$ en $\underline{\psi}$ continue functies zijn respectievelijk van de argumenten P, $\underline{X}$ en $\underline{x}$.
De lichamen die in dit college een rol spelen zijn alle star. Een definitie van het star zijn van een continu lichaam met behulp van het voorgaande is nu:

een continu lichaam heet star indien gedurende de beweging van het lichaam de afstand tussen twee willekeurige elementen niet veranderd.
Laten P en Q twee deeltjes van een star lichaam zijn met referentiepositie $\underline{X}$ en $\underline{Y}$, dan geldt voor alle t:

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| = \|\underline{X} - \underline{Y}\| \tag{1.4}$$

Theorema: Voor een star lichaam kan de beweging (1.2) en (1.3) altijd worden voorgesteld door:

$$\underline{x} = \mathcal{R}(t)\ \underline{X} + \underline{c}(t), \tag{1.5}$$

waarin, voor alle t, $\mathcal{R}(t)$ een orthogonale afbeelding is, met de eigenschap: det $\mathcal{R}(t) = 1$.

Uit (1.2) en (1.5) volgt dat kennelijk geldt:

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X},t) = \mathcal{R}(t)\ \underline{X} + \underline{c}(t), \tag{1.6}$$

waaruit blijkt dat de afbeelding $\underline{\varphi}$ in het algemeen niet lineair is.
Het bewijs van bovenstaand theorema, verloopt in een aantal stappen.
Om het schrijfwerk wat te vereenvoudigen, voegen we aan het starre lichaam $\mathcal{B}$ toe het deeltje O, dat in de referentieconfiguratie $\underline{o}$ als plaatsvector heeft. Het deeltje O behoeft geen materieel element te zijn maar het beweegt star mee met het lichaam $\mathcal{B}$.
Definieer de afbeelding $\underline{f}$ door:

$$\underline{f}(\underline{X},t) = \underline{\varphi}(\underline{X},t) - \underline{\varphi}(\underline{o},t) \tag{1.7}$$

waarin $\underline{\varphi}(\underline{o},t)$ de baan is van het star met $\mathcal{B}$ meebewegende deeltje O.
Eenvoudig volgt:

$$\underline{f}(\underline{o},t) = \underline{o} \tag{1.8}$$

Omdat: $\|\underline{f}(\underline{X},t) - \underline{f}(\underline{Y},t)\| = \|\underline{\varphi}(\underline{X},t) - \underline{\varphi}(\underline{Y},t)\| = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \|\underline{X} - \underline{Y}\|$ (1.9)

voor alle $\underline{X}$ en $\underline{Y}$ en voor alle t, volgt

$$\|\underline{f}(\underline{X},t)\| = \|\underline{X}\| \text{ , voor alle } \underline{X} \text{ en } t, \tag{1.10}$$

Dus $\underline{f}$ is een orthogonale afbeelding.

Met:

$$\begin{aligned}2(\underline{f}(\underline{X},t), \underline{f}(\underline{Y},t)) &= \|\underline{f}(\underline{X},t)\|^2 + \|\underline{f}(\underline{Y},t)\|^2 - \|\underline{f}(\underline{X},t) - \underline{f}(\underline{Y},t)\|^2 \\ &= \|\underline{X}\|^2 + \|\underline{Y}\|^2 - \|\underline{X} - \underline{Y}\|^2 \\ &= 2(\underline{X},\underline{Y})\end{aligned}$$

volgt:

Voor alle $\underline{X}$ en $\underline{Y}$ uit B en voor alle t geldt

$$(\underline{f}(\underline{X},t), \underline{f}(\underline{Y},t)) = (\underline{X},\underline{Y}) \tag{1.11}$$

Bedenken we verder dat, met gebruikmaking van 1.9, 1.10 en 1.11 voor alle $\underline{X}$ en $\underline{Y}$, voor alle t en voor alle $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$: geldt:

$$\begin{aligned}&\|\underline{f}(\alpha\underline{X} + \beta\underline{Y},t) - \alpha\,\underline{f}(\underline{X},t) - \beta\,\underline{f}(\underline{Y},t)\|^2 \\ &= \|\underline{f}(\alpha\underline{X} + \beta\underline{Y},t)\|^2 + \alpha^2\|\underline{f}(\underline{X},t)\|^2 + \beta^2\|\underline{f}(\underline{Y},t)\|^2 + 2\alpha\beta(\underline{f}(\underline{X},t),\underline{f}(\underline{Y},t)) \\ &\quad - 2\alpha(\underline{f}(\alpha\underline{X} + \beta\underline{Y},t), \underline{f}(\underline{X},t)) - 2\beta(\underline{f}(\alpha\underline{X} + \beta\underline{Y},t), \underline{f}(\underline{Y},t)) \\ &= \|\alpha\underline{X} + \beta\underline{Y}\|^2 + \alpha^2\|\underline{X}\|^2 + \beta^2\|\underline{Y}\|^2 + 2\alpha\beta(\underline{X},\underline{Y}) \\ &\quad - 2\alpha(\alpha\underline{X} + \beta\underline{Y}, \underline{X}) - 2\beta(\alpha\underline{X} + \beta\underline{Y}, \underline{Y}) \\ &= 0\end{aligned}$$

zodat volgt:

$$\underline{f}(\alpha\underline{X} + \beta\underline{Y},t) = \alpha\,\underline{f}(\underline{X},t) + \beta\,f(\underline{Y},t) \tag{1.12}$$

Dus is $\underline{f}$ een lineaire afbeelding.

In het dictaat Wiskunde 20 is aangetoond dat een lineaire orthogonale afbeelding kan worden voorgesteld door:

$$\underline{f}(\underline{X},t) = \mathcal{R}(t)\,\underline{X} \quad \text{voor alle } t. \tag{1.13}$$

Hierin is $\mathcal{R}(t)$ een lineaire orthogonale afbeelding met det $\mathcal{R} = \pm 1$.
Bij de beweging van een star lichaam $\mathcal{B}$ zullen geen spiegelingen optreden.
Dit betekent dat wanneer in de referentieconfiguratie $(\underline{X},\underline{Y} \times \underline{Z})$ voor drie niet op een lijn liggende punten een bepaald teken heeft, ook $(\underline{f}(\underline{X},t), \underline{f}(\underline{Y},t) \times \underline{f}(\underline{Z},t)$ dit teken heeft.

Nu geldt:

$$(\underline{f}(\underline{X},t),\ \underline{f}(\underline{Y},t) \times \underline{f}(\underline{Z},t) = \det(\underline{f}(\underline{X},t),\ \underline{f}(\underline{Y},t),\ \underline{f}(\underline{Z},t))$$

$$= \det(\mathcal{R}(t)\underline{X},\ \mathcal{R}(t)\underline{Y},\ \mathcal{R}(t)\underline{Z})$$

$$= \det \mathcal{R}(t)\ \det(\underline{X},\underline{Y},\underline{Z})$$

$$= \det \mathcal{R}(t)\ (\underline{X},\underline{Y} \times \underline{Z})$$

zodat $\det \mathcal{R}(t) > 0$ is. Omdat $\det \mathcal{R}(t) = \pm 1$, volgt:

$$\det \mathcal{R}(t) = 1 \tag{1.14}$$

Ter afronding van het bewijs definiëren we

$$\underline{c}(t) = \underline{\varphi}(\underline{0},t), \tag{1.15}$$

zodat met (1.7), (1.13), (1.14) en (1.15) het gestelde uit het theorema volgt.

Omdat een lineaire orthogonale afbeelding $\mathcal{R}$ waarvoor (1.14) geldt kan worden opgevat als een draaiing, kunnen we het resultaat (1.6) van het theorema in woorden als volgt omschrijven:

de beweging van een star lichaam kan worden opgevat als een rotatie, uitgedrukt door $\mathcal{R}(t)$ en een translatie over $\underline{c}(t)$, de beweging van de oorsprong.

d. Massa, massadichtheid

Zoals in b reeds is aangegeven wordt aan elk continu lichaam een scalaire grootheid, de massa toegevoegd. Wanneer we een lichaam met een zekere meetkundige inhoud in twee stukken verdelen, die beide op een continue wijze een ruimte deel bezetten, dan kunnen we aan beide delen opnieuw een meetkundige inhoud toekennen. Op dezelfde wijze kunnen we aan beide delen ook een materiële inhoud, de massa van de delen toekennen.

Laat B een continu lichaam zijn met volume V. Zoals we aan elk deel $b \subset B$ een volume $v(b)$ kunnen toevoegen, zo kunnen we er ook een massa $m(b)$ aan toevoegen.

Deze functie heeft de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} &\text{i) als } v(b) \neq 0 \text{ dan is } m(b) \geq 0; \\ &\text{ii) als } v(b) = 0, \text{ dan is } m(b) = 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Als de delen $b_1, b_2, \ldots,$ van B zodanig zijn dat $\bigcup_{i=1}^{\infty} b_i = B$ én $b_i \cap b_j = \emptyset$ voor $i \neq j$ dan geldt voor alle dergelijke verdelingen:

$$\text{iii) } m(B) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} b_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(b_i). \tag{1.17}$$

Een stelling uit de Wiskunde (zie collegedictaat Maattheorie en Lebesque-integratie) leert dat er dan een functie ρ, de massadichtheid bestaat, z.d.d., voor alle $b \subset \mathcal{B}$ geldt:

$$m(b) = \int_{v(b)} \rho(X)\,dV.$$

Noemen we $v(t)$ het volume door b bezet op zeker ogenblik dan kunnen we de massa in $v(t)$ bevat, dus $m(b)$ ook, met een wat slordige notatie voor ρ, voorstellen door:

$$m(b) = \int_{V(t)} \rho(\underline{x},t)\,dv.$$

Dit geldt voor elk deel $b \subset \mathcal{B}$, dus ook voor $\mathcal{B}$ zelf:

$$m(\mathcal{B}) = \int_{V(t)} \rho(\underline{x},t)\,dV.$$

De functie ρ heet de massadichtheid, de massa per volume-eenheid.
Omdat we naast de continue lichaam ook enige wiskundige abstracties in onze beschouwingen willen betrekken definiëren we nog de begrippen vlakdichtheid, lijndichtheid en puntmassa.

Vlakdichtheid ρ_{vl}:

$$m(\mathcal{B}) = \int_S \rho_{vl}\,dS = \int_S dS \int_{\ell(S)} \rho\,d\ell \tag{1.19}$$

Lijndichtheid ρ_ℓ:

$$m(\mathcal{B}) = \int \rho_\ell\,d\ell = \int d\ell \int_{S(\ell)} \rho\,dS \tag{1.20}$$

Voor de puntmassa, eveneens een mathematische abstractie dat buiten het model van continue lichamen valt, zou men kunnen werken met het concept van de Dirac-deltafunctie. (zie pag. 46)
Formeel kunnen we dan schrijven voor de massa $m(P)$ van een puntmassa P op de plaats $\underline{x}_0$:

$$m(P) = \int_V \rho(\underline{x} - \underline{x}_0,t)\,dV \tag{1.21}$$

Voor elk gebied V dat $\underline{x}_0$ bevat, waarbij:

$$\rho(\underline{x} - \underline{x}_0,t) = m(P)\;\delta(\underline{x} - \underline{x}_0) \tag{1.22}$$

Met bovengenoemde definities kunnen we dan voor de totale massa van een mechanisch stelsel bestaande uit continue lichamen en wiskundige abstracties als puntmassa's, staven en schijven formuleren:

$$m = \int_V \rho\;dV \tag{1.23}$$

waarbij $V \subset \mathbb{R}^3$ een gebied is dat alle materiële delen van het mechanisch stelsel bevat.

e. Het massamiddelpunt

In (1.23) hebben we een wat abstracte uitdrukking gegeven voor de massa van een mechanisch stelsel:

$$m = \int_V \rho \, dV \tag{1.23}$$

De integraal is een gewone Riemann-integraal als het mechanisch stelsel uitsluitend bestaat uit een continu lichaam. Veronderstellen we dat het mechanisch stelsel bestaat uit meerdere continue lichamen of wiskundige abstracties als puntmassa's, staven en schijven bevat, dan moeten we de integraal in een andere zin opvatten. Vatten we voorkomende integralen steeds in deze algemenere betekenis op, dan kunnen we definiëren de positie van het massamiddelpunt, aangeduid met $\underline{x}_0$ door:

$$m \, \underline{x}_0 = \int_V \rho \, \underline{x} \, dV \tag{1.24}$$

Beweegt een mechanisch stelsel star, de onderlinge afstand tussen elk tweetal deeltjes van het stelsel is constant, dan kunnen we als het massamiddelpunt definiëren het punt dat star met het stelsel meebeweegt en als referentiepositie $\underline{X}_0$ heeft, gedefinieerd door:

$$m \, \underline{X}_0 = \int_V \rho \, \underline{X} \, dV \tag{1.25}$$

Hadden we voor de bewegende oorsprong bij een star stelsel het massamiddelpunt gekozen, dan gaat (1.25) over in:

$$\int_V \rho \, \underline{X} \, dV = \underline{0} \tag{1.26}$$

Met (1.5), (1.24) en (1.25) vinden we voor de positie van het in 1.25 gedefinieerde massamiddelpunt van een star stelsel:

$$m \, \underline{x}_0 = \int_V \rho \, \underline{x} \, dV = \int_V \rho[\mathcal{R}(t)\underline{X} + \underline{x}(t)]dV$$

$$= \mathcal{R}(t) \int_V \rho \, \underline{X} \, dV + \underline{c}(t) \int_V \rho \, dV = m \, \underline{c}(t) \tag{1.27}$$

Het massamiddelpunt valt niet alleen in de referentiepositie, maar voortdurend samen met de bewegende oorsprong: het is dus eenduidig bepaald. In de natuurkunde wordt voor massamiddelpunt meestal het woord zwaartepunt gebruikt.

f. Graden van vrijheid

In §c hebben we voor de positiebepaling van de deeltjes van een continu lichaam gebruik gemaakt van een drie-dimensionale Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$. Ook voor de positiebepaling van niet tot het model behorende grootheden als de puntmassa, de staaf en de schijf gebruiken we deze ruimte.

De positie van een puntmassa die vrij, dat wil zeggen zonder bewegingsbeperkingen van meetkundige aard, in $\mathbb{R}^3$ kan bewegen is een vector. Ontbinden we deze vector op een basis van $\mathbb{R}^3$, dan kunnen de componenten van de positievector worden opgevat als drie onafhankelijk van elkaar veranderlijke grootheden die de plaats waar het massapunt zich bevindt éénduidig bepalen. We zeggen wel: de vrije puntmassa heeft in $\mathbb{R}^3$ drie graden van vrijheid.

Opgave: bepaal het aantal graden van vrijheid van de vrije staaf, de vrije schijf en het vrije starre lichaam in $\mathbb{R}^3$.

Wanneer het massamiddelpunt onderhevig is aan bewegingsbeperkingen van meetkundige aard spreken we van verbindingen of constraints. Deze bewegingsbeperkingen kunnen verschillende karakters hebben: soms moeten we de bewegingsbeperkingen formuleren met ongelijkheden, we spreken dan van eenzijdige verbindingen, in andere gevallen kunnen de bewegingsbeperkingen met gelijkheden worden geformuleerd, we spreken dan van twee-zijdige verbindingen (zie 1.29).

Op dezelfde wijze als bij massapunten kunnen verbindingen in een mechanisch stelsel aanleiding zijn tot een vermindering van het aantal mogelijke bewegingen, het aantal graden van vrijheid. Als de verbindingen alle een bewegingsbeperking veroorzaken spreken we van onafhankelijke verbindingen.

Het aantal graden van vrijheid van een mechanisch stelsel, dat onderhevig is aan bewegingsbeperkingen definiëren we nu als het aantal graden van vrijheid van het stelsel wanneer alle elementen vrij zijn, verminderd met het aantal onafhankelijke tweezijdige verbindigen in het stelsel.

In het volgende gaan we eerst nog wat nader in op de positiebepaling en het aantal graden van vrijheid van een star lichaam. Een starre beweging, d.i. de beweging die een star lichaam uitvoert, is volgens (1.5) bepaald door

$$\underline{x} = \mathcal{R}(t)\,\underline{X} + \underline{c}(t)$$

Voor de positie $\underline{x}$ van een element met referentiepositie $\underline{X}$. De vector $\underline{c}$ is de positie van de bewegende oorsprong en $\mathcal{R}$ is een orthogonale afbeelding met det $\mathcal{R} = 1$.
In Wiskunde 20 is afgeleid dat een dergelijke orthogonale afbeelding een draaiing is om een lijn door de oorsprong. Is $\underline{e}$ een richtingsvector van die lijn met $\|\underline{e}\| = 1$ en φ de draaiingshoek in positieve zin gemeten, dan kunnen we schrijven

$$\mathcal{R}\,\underline{X} = (\underline{e},\underline{X})\underline{e} + \sin\varphi\ \underline{e}\times\underline{X} - \cos\varphi\ \underline{e}\times(\underline{e}\times\underline{X}) \qquad (1.28)$$

De orthogonale afbeelding $\mathcal{R}$ is dus bepaald door drie grootheden: twee componenten van $\underline{e}$ en de draaiingshoek φ.
Kennen we de componenten van $\underline{c}$, de richtingsvector $\underline{e}$ ($\|\underline{e}\| = 1$) en de draaiingshoek φ dan is de positie $\underline{x}$ van elk element van een star lichaam, getypeerd door de referentiepositie $\underline{X}$, bekend.
Een vrij star lichaam heeft dus zes graden van vrijheid.

De onafhankelijke verbindingsrelaties in een mechanisch stelsel zijn dikwijls van de vorm:

$$f_k(\underline{x}^{(1)},\ldots,\underline{x}^{(p)},t) = 0 \qquad k = 1,\ldots,m \qquad (1.29)$$

waarin $\underline{x}^{(i)}$, $u = 1,\ldots,p$, de plaatsvectoren zijn van die deeltjes welke in hun beweging worden beperkt door verbindingen.
Omdat in de uitdrukkingen 1.29 alleen de plaatsvectoren en geen tijdsafgeleiden voorkomen heten deze verbindingsrelaties <u>holonoom</u>.
In het algemeen proberen we de verbindingsrelaties expliciet te formuleren.
We zullen daarom invoeren het begrip <u>gegeneraliseerde coördinaat</u>.
Als een mechanisch stelsel n graden van vrijheid bezit, noemen we een set grootheden $q_1, q_2, \ldots$ gegeneraliseerde coördinaten, als ze voldoen aan de volgende voorwaarden:

i) ze zijn in aantal gelijk aan het aantal graden van vrijheid, en onafhankelijk van elkaar;
ii) ze bepalen de positie van elk deeltje van het mechanisch stelsel éénduidig;
iii) ze voldoen automatisch aan de verbindingsvoorwaarden.

Als de verbindingsrelaties in een mechanisch stelsel holonoom zijn, kan de positie $\underline{x}$ van elk deeltje X van het mechanisch stelsel worden opgevat als een functie van de gegeneraliseerde coördinaten en de tijd:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\ldots q_n,t) \tag{1.30}$$

Vaak kunnen we voor de gegeneraliseerde coördinaten nemen de componenten van de plaatsvectoren van een of meer deeltjes van het mechanisch stelsel.

Bij een beweging van het mechanisch stelsel veranderen in het algemeen de gegeneraliseerde coördinaten:

$$q_k = q_k(t) \quad k = 1,\ldots,n \tag{1.31}$$

De gegeneraliseerde coördinaten zijn dus eigenlijk de principiële onbekenden van een mechanisch stelsel; zijn de functies (1.31)bekend, dan is de positie van elk deeltje op elk ogenblik bekend.

Opmerking: Zoals uit (1.30) blijkt behoeft de positie van een deeltje niet constant te zijn als de gegeneraliseerde coördinaten niet veranderen. Dit is een gevolg van het feit dat we ook een gedwongen of voorgeschreven beweging van een element van een mechanisch stelsel moeten opvatten als een beperking van de vrije beweging van dat stelsel.
De vrije beweging wordt volledig bepaald door de verandering van de gegeneraliseerde coördinaten volgens (1.31).
De gedwongen beweging wordt bepaald door de expliciete afhankelijkheid van de tijd van de plaatsvectoren.

g. Virtuele verplaatsingen

Naast de positiebepaling voor elementen van een mechanisch stelsel speelt in de mechanica een belangrijke rol de beschrijving van zeer kleine, infinitesimale, positieveranderingen.

We beschouwen de positie $\underline{x}$ van een deeltje X van een mechanisch stelsel. Wanneer het systeem van positiebeschrijvingen holonoom is kunnen we, op een wat slordige manier schrijven:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\ldots,q_n,t), \tag{1.32}$$

waarin $q_1,\ldots,q_n$ de gegeneraliseerde coördinaten zijn en t de tijd is. Bij een beweging geldt:

$$q_k = q_k(t),\ k = 1,\ldots,n, \tag{1.33}$$

waarbij de functies q_k, $k = 1,\ldots,n$ de bij die beweging behorende

functies van de tijd t zijn.
In het volgende zullen we veronderstellen dat allerlei functies zoveel malen continu differentieerbaar zijn naar de variabelen als voor onze beschouwingen nodig is.

Vergelijken we de posities van X op de tijdstippen t en t + h, dan is de positieverandering van t tot t + h:

$$\underline{x}(t + h) - \underline{x}(t);$$

een lineaire benadering voor deze positieverandering is:

$$\underline{v}h,$$

waarin $\underline{v} = \dot{\underline{x}}$ de snelheid van X is.

$$\underline{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \qquad (1.34)$$

In de natuurkunde schrijft men bij voorkeur dt voor h, als deze "klein" bedoeld is, en $d\underline{x}$ voor "de lineaire benadering van $\underline{x}(t + h) - \underline{x}(t)$", zodat we kunnen schrijven:

$$d\underline{x} = \underline{v}\, dt, \qquad (1.35)$$

waarbij $\underline{v}$ volgens (1.34). De grootte van dt wordt omschreven als infinitesimaal, waarmee bedoeld wordt zoiets als: "onmeetbaar klein". Wat nauwkeuriger:

$$\|\underline{x}(t + dt) - \underline{x}(t) - \dot{\underline{x}}\, dt\| = o(dt), \text{ voor } dt \to 0.$$

We noemen $d\underline{x}$ de infinitesimale verplaatsing gedurende de infinitesimale tijd dt behorende bij de beweging van X beschreven door (1.32) en (1.33).

Een mechanisch stelsel kan, uitgaande van een vaste referentie-configuratie in het algemeen meerdere bewegingen uitvoeren, afhankelijk van de invloed die op het stelsel wordt uitgeoefend. De verschillende (holonome) bewegingen worden gekarakteriseerd door verschillende functies $q_k(t)$ voor vaste k.
Op zeker tijdstip t behoren bij die verschillende bewegingen ook verschillende posities van het deeltje X.
We definiëren nu de virtuele (denkbeeldige) verplaatsing $\delta\underline{x}$ van X behorende bij de virtuele veranderingen δq_k, k = 1,...,n van de gegeneraliseerde coördinaten door:

$$\delta \underline{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta \underline{x}}{\delta q_k} \delta q_k \tag{1.37}$$

Zowel $\delta \underline{x}$ als δq_k, $k = 1,\ldots,n$, zijn daarbij op te vatten als infinitesimale grootheden.
Op het tijdstip t waarop we bovenstaande veranderingen betrekken geldt dus:

$$\| \underline{x}(q_1 + \delta q_1,\ldots,q_n + \delta q_n,t) - \underline{x}(q_1,\ldots,q_n,t) - \delta \underline{x} \| = o(\max_k \| \delta q_k \|)$$

$$\text{als } \max_k \| \delta q_k \| \to 0 \tag{1.38}$$

De set virtuele veranderingen is vrij te kiezen, immers aan de bewegingsbeperkingen in het systeem is voldaan. De virtuele verplaatsing $\delta \underline{x}$ daarentegen is door de relaties (1.32) en (1.37) beperkt: het is een verplaatsing van X vanuit de positie $\underline{x}$ waarbij aan de verbindingsrelaties in het stelsel automatisch is voldaan. Het zijn vooral de virtuele veranderingen δq_k die, door hun onafhankelijkheid, een belangrijke rol spelen in latere beschouwingen.
In het laatste onderdeel van deze paragraaf willen we nog wat aandacht besteden aan de voorstellingen: (1.32), (1.33) en (1.34).

Wanneer we de positie $\underline{x}$ van een element X van een mechanisch stelsel opvatten als een functie van de gegeneraliseerde coördinaten en de tijd, dan kunnen we de verandering van de positie per tijdseenheid, de snelheid volgens (1.34) opvatten als een functie van:

- de afgeleiden van de gegeneraliseerde coördinaten naar de tijd
- de gegeneraliseerde coördinaten en de tijd.

We schrijven wat slordig:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\ldots,q_n,t) \tag{1.32}$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}}\ (\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,q_1,\ldots,q_n,t), \tag{1.39}$$

waarbij in (1.39) de uitdrukking (1.34) in bovenstaande zin is weergegeven.
Voor de functies in (1.32) en (1.39) geldt:

1. $$\frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\ , \quad k = 1,\ldots,n \tag{1.40}$$

het bewijs volgt onmiddellijk uit (1.34) en (1.32)

2. $\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial q_k}$, $k = 1,\ldots,n$, bij een beweging beschreven door (1.33)

immers:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial q_k \partial q_\ell}\dot{q}_\ell + \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial q_k \partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial q_k} .$$

De beide relaties (1.40) en (1.41) zullen bij de afleiding van de bewegingsvergelijkingen van Lagrange een belangrijke rol spelen. Door de beschrijving volgens (1.32) is aan de verbindingsvoorwaarden of bewegingsbeperkingen die aan het mechanisch stelsel zijn opgelegd voor het holonome geval automatisch voldaan. Wanneer de bewegingsbeperkingen zodanig zijn dat alleen onderlinge positieverschillen van de elementen van het mechanisch stelsel een rol spelen, dan zal het duidelijk zijn dat de twee volgende speciale virtuele verplaatsingsvelden kunnen voorkomen:

1. $\delta\underline{x}$ heeft dezelfde waarde, zeg $\delta\underline{x}_0$, voor alle elementen X van het mechanisch stelsel. (1.42)

2. $\delta\underline{x} = \underline{e} \times \underline{x}\,\delta\varphi$, waarbij $\underline{x}$ de positie is van het element X van het mechanisch stelsel, $\underline{e}$ een overigens willekeurige eenheidsvector en $\delta\varphi$ een infinitesimale hoekverdraaiing. (zie ook vgl.(1.24)). (1.43)

Geval 1. komt overeen met een infinitesimale starre translatie over $\delta\underline{x}_0$ van het mechanisch stelsel,

geval 2. komt overeen met een infinitesimale starre rotatie van het mechanisch stelsel om de lijn door de oorsprong 0 met richting $\underline{e}$ over de hoek $\delta\varphi$.

De beide genoemde velden van virtuele verplaatsingen spelen een belangrijke rol bij de afleiding van de zwaartepuntsstelling en de momentenstelling uit het principe van d'Alembert.
Hoewel de genoemde voorwaarde voor de bewegingsbeperkingen een sterke beperking lijkt, valt dit dankzij een reeds aan Euler bekend principe nogal mee. Het bedoelde principe is "de methode van het vrijmaken". Zeer in het kort komt deze methode op het volgende neer: laat de bewegingsbeperkingen die een virtueel verplaatsingsveld volgens 1 én 2 verhinderen

aanvankelijk weg, laat, ter compensatie, op de betreffende elementen van het stelsel krachten en momenten werken, en kies deze grootheden zodanig dat de beweging van het stelsel aan de eerder weggelaten beperkingen voldoet. We komen later terug op dit principe.

2. Algemene Kinematica

In dit hoofdstuk willen we nader ingaan op de beweging van een mechanisch stelsel. Voor de positiebepaling is in 1.c een Euclidische ruimte ingevoerd. De oorsprong en de standaardbasis van deze ruimte zullen we als ons vaste (niet bewegende) referentieframe kiezen. De beweging van een mechanisch stelsel kan dan worden opgevat als de positieverandering in de tijd van de elementen van het mechanisch stelsel ten opzichte van dit frame. Dikwijls zullen we deze beweging de absolute beweging noemen.

a. Kinematica van het punt

Bij een beweging van een punt (een puntmassa of een ander materieel deeltje van een mechanisch stelsel), is de positievector afhankelijk van de parameter t, de tijd.

$$\underline{x} = \underline{x}(t) \tag{2.1}$$

De snelheid $\underline{v}$ is gedefinieerd door:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} := \frac{d\underline{x}}{dt}(t) \tag{2.2}$$

en de versnelling $\underline{a}$ door:

$$\underline{a} = \ddot{\underline{x}} := \frac{d^2\underline{x}}{dt^2}(t) \tag{2.3}$$

b. Kinematica van het starre lichaam

Voor de beschrijving van de beweging van het starre lichaam gaan we uit van de relatie (1.5):

$$\underline{x}(t) = \mathcal{R}(t)\ \underline{X} + \underline{c}(t)$$

De snelheid van een deeltje met referentiepositie $\underline{X}$ is dan:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \dot{\mathcal{R}}(t)\ \underline{X} + \dot{\underline{c}}(t)$$

De, van de tijd afhankelijke, lineaire afbeelding $\mathcal{R}(t)$ is rechtstreeks orthogonaal.
Definiëren we de aan $\mathcal{R}$ toegevoegde lineaire afbeelding $\mathcal{R}^T$ door de relatie:

$$(\mathcal{R}^T\ \underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{R}\ \underline{y}) \quad \text{voor alle } \underline{x},\ \underline{y} \in \mathbb{R}^3$$

dan voldoet $\mathbb{R}^T$ aan de volgende eigenschappen (Wiskunde 30):

i $\quad \mathcal{R}^T$ is lineair en orthogonaal, det $\mathcal{R}^T = 1$;

ii $\quad \mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{R}^T = I$, $(\mathcal{R}^T)^T = \mathcal{R}$;

iii $\quad$ de matrix van $\mathcal{R}^T$ op de standaardbasis is de getransponeerde van de matrix van $\mathcal{R}$ op die basis.

We schrijven (1.5) in de vorm

$$\underline{X} = \mathcal{R}^T (\underline{x} - \underline{c}) \tag{2.5}$$

Substitutie van (2.5) in (2.4) levert:

$$\underline{v} = \underline{\dot{x}} = \dot{\mathcal{R}}(t)\ \mathcal{R}^T(t)\ (\underline{x} - \underline{c}) + \underline{\dot{c}} \tag{2.6}$$

De snelheidsverdeling van een star lichaam is dus geschreven in de vorm van een vectorveld.

Definiëren we de lineaire afbeelding Ω door:

$$\Omega = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T \tag{2.7}$$

dan geldt:

Ω is een anti-symmetrische lineaire afbeelding $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Bewijs: differentiëren we de beide leden in de vergelijking $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = I$, dan vinden we:

$$0 = \dot{I} = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T + \mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T \tag{2.8}$$

ofwel: $\Omega + \Omega^T = 0 \qquad (2.9)$

De matrix van Ω betrokken op de standaardbasis is scheefsymmetrisch en dus te schrijven in de vorm (wiskunde 30):

$$\text{matrix } \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Definiëren we de vector $\underline{\omega}$ door $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ als kolom van $\underline{\omega}$ op de standaardbasis te nemen, dan volgt eenvoudig:

i) $\quad \Omega\,\underline{\omega} = \underline{0} \qquad (2.11)$

ii) $\quad \Omega\,\underline{x} = \underline{\omega} \times \underline{x}$, voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \qquad (2.12)$

Voor de snelheidsverdeling van een star lichaam hebben we daarmee gevonden:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{c}) + \dot{\underline{c}} \tag{2.13}$$

De vector $\underline{\omega}$ noemen we de <u>hoeksnelheidsvector</u>. (Deze vector is onafhankelijk van de oriëntatie van de basis en heet daarom wel een <u>axiale</u> vector). De vector $\underline{\omega}$ is onafhankelijk van de keuze van de bewegende oorsprong: hadden we voor de bewegende oorsprong een ander punt genomen, b.v. met positie $\underline{d}$ en snelheid $\dot{\underline{d}}$, dan hadden we voor (2.13) gevonden:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \underline{\omega}_1 \times (\underline{x} - \underline{d}) + \dot{\underline{d}} \tag{2.14}$$

waarbij $\underline{\omega}_1$ de bij $\underline{d}$ horende hoeksnelheidsvector is.
We hebben echter ook:

$$\dot{\underline{d}} = \underline{\omega} \times (\underline{d} - \underline{c}) + \dot{\underline{c}} \tag{2.15}$$

Uit (2.13), (2.14) en (2.15) volgt dan:

$$(\underline{\omega} - \underline{\omega}_1) \times \underline{x} = (\underline{\omega} - \underline{\omega}_1) \times \underline{d}\ ,\ \text{voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.16}$$

zodat eenvoudig volgt: $\underline{\omega} = \underline{\omega}_1$.
De hoeksnelheid is dus onafhankelijk van de keuze van de bewegende oorsprong en van de keuze van de bewegende basis; het is een vector die behoort bij de beweging van het starre lichaam.

Zijn X en Y twee deeltjes van een star lichaam met, momentane, posities $\underline{x}$ en $\underline{y}$, dan geldt voor de snelheid van die twee deeltjes:

$$\underline{v}_x - \underline{v}_y = \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{y}} = \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{y}) \tag{2.17}$$

De hoeksnelheid $\underline{\omega}$ van een star lichaam hangt in het algemeen van de tijd af, zodat i.h.a.: $\dot{\underline{\omega}} \neq \underline{0}$.
Differentiëren we de vgl. (2.13) naar de tijd, dan vinden we voor de versnelling van een deeltje van een star lichaam:

$$\underline{a} = \ddot{\underline{x}} = \dot{\underline{\omega}} \times (\underline{x} - \underline{c}) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{c})) + \ddot{\underline{c}}. \tag{2.18}$$

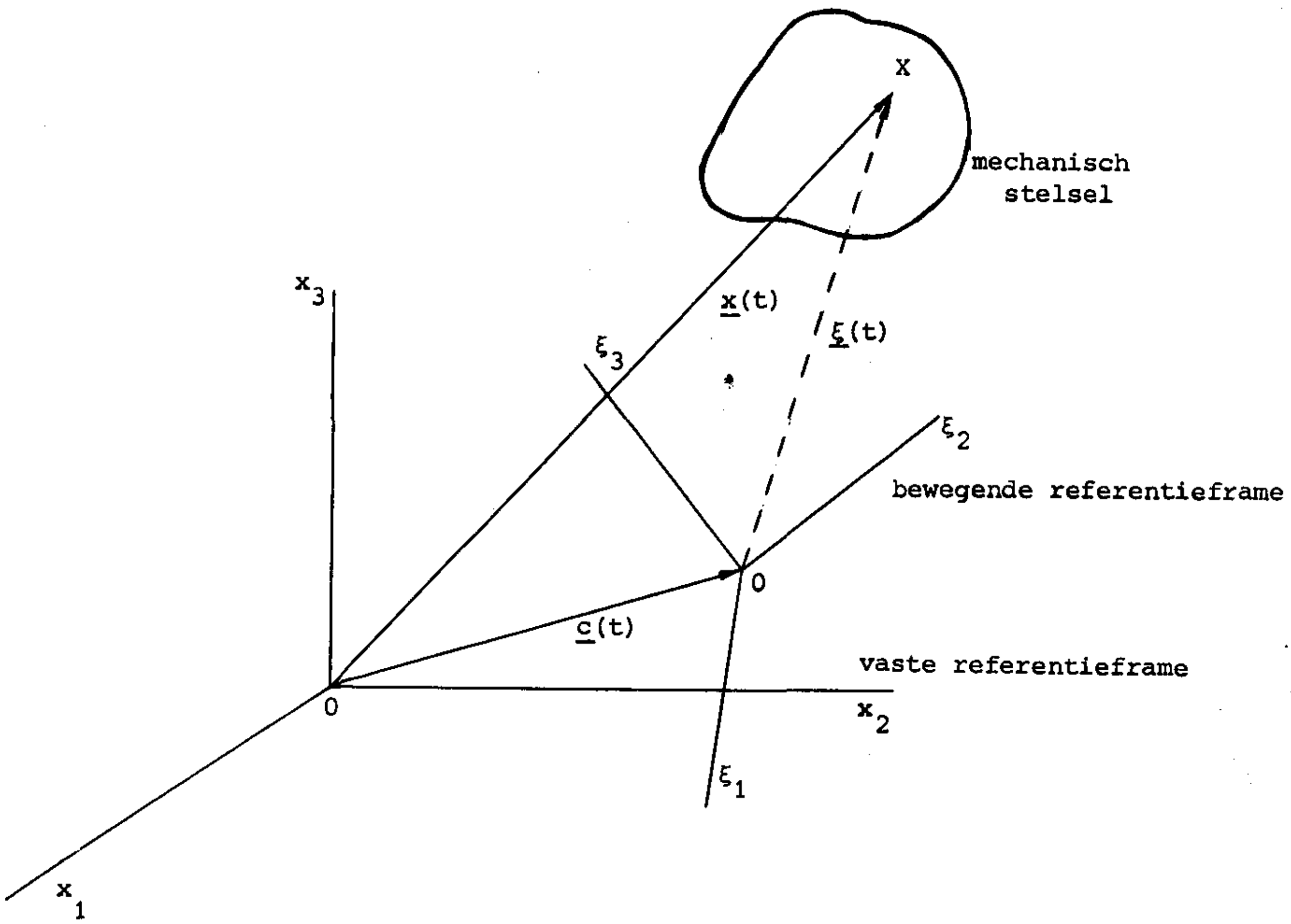
Voor het verschil van de versnellingen van twee deeltjes X en Y vinden we door differentiëren van (2.17):

$$\underline{a}_x - \underline{a}_y = \ddot{\underline{x}} - \ddot{\underline{y}} = \dot{\underline{\omega}} \times (\underline{x} - \underline{y}) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{y})) \tag{2.19}$$

c. Relatieve Beweging

In deze paragraaf gaan we nader in op de wijze waarop de beweging van een mechanisch stelsel kan worden beschreven, als de beweging van het stelsel t.o.v. een gegeven, bewegend referentieframe bekend is.
De beweging van het stelsel t.o.v. het vaste referentie zullen we de absolute beweging noemen en die t.o.v. het bewegende referentieframe de relatieve beweging. De beweging van het bewegende frame t.o.v. het vaste noemen we de sleepbeweging.

De positie van een deeltje X gemeten vanuit het vaste frame duiden we aan met $\underline{x}$, de positie van de oorsprong van het bewegende frame noemen we $\underline{c}$, en de positie van X gemeten vanuit het bewegende frame is $\underline{\xi}$. Omdat het bewegende frame nu niet star met het stelsel meebeweegt zal $\underline{\xi}$ i.h.a. van de tijd t afhangen



De beide positievectoren $\underline{x}$ en $\underline{\xi}$ kunnen, als elementen van verschillende vectorruimtes niet zonder meer met elkaar worden vergeleken. Evenals voor de beweging van een star lichaam zal de relatie zijn van de vorm:

$$\underline{x}(t) = \mathcal{R}(t)\ \underline{\xi}(t) + \underline{c}(t), \tag{2.20}$$

waarin $\mathcal{R}(t)$ opnieuw een lineaire orthogonale afbeelding is met det $\mathcal{R}(t) = 1$ voor alle t.
Op dezelfde wijze als in §b, kunnen we de hoeksnelheid $\underline{\omega}$ definiëren z.d.d.

$$\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T\underline{x} = \underline{\omega} \times \underline{x} \quad , \text{ voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.21}$$

De vectoren $\underline{c}$ en $\underline{\omega}$ beschrijven resp. de translatie en de rotatie van het bewegende t.o.v. het vaste frame.
We noemen $\underline{\omega}$ de <u>hoeksnelheid van de sleepbeweging</u>.

Voor de snelheidsverdeling vinden we:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} = \dot{\mathcal{R}}\underline{\xi} + \mathcal{R}\dot{\underline{\xi}} + \dot{\underline{c}} &= \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T(\underline{x} - \underline{c}) + \dot{\underline{c}} + \mathcal{R}\dot{\underline{\xi}} \\ &= \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{c}) + \dot{\underline{c}} + \mathcal{R}\dot{\underline{\xi}}\end{aligned} \tag{2.22}$$

We definiëren:

$$\underline{v}_{abs} = \dot{\underline{x}} \text{ , de } \underline{\text{absolute snelheid}}, \tag{2.23}$$

$$\underline{v}_{sl} = \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{c}) + \dot{\underline{c}}, \text{ de } \underline{\text{sleepsnelheid}}, \tag{2.24}$$

$$\underline{v}_{rel} = \mathcal{R}\dot{\underline{\xi}} \text{ , de } \underline{\text{relatieve snelheid}}. \tag{2.25}$$

zodat (2.22) kan worden geschreven in de vorm:

$$\underline{v}_{abs} = \underline{v}_{sl} + \underline{v}_{rel} \qquad \text{voor alle X.} \tag{2.26}$$

De snelheid $\underline{v}_{sl}$ van het deeltje X is te interpreteren als de snelheid die X heeft t.g.v. de beweging van het bewegende frame.
De snelheid $\underline{v}_{rel}$ is de snelheid van X t.o.v. het bewegende frame en betrokken op het vaste referentieframe.

Voor de versnellingsverdeling vinden we nogmaals differentiëren:

$$\ddot{\underline{x}} = \dot{\underline{\omega}} \times (\underline{x} - \underline{c}) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{c})) + \ddot{\underline{c}} + 2\underline{\omega} \times \mathcal{R}\dot{\underline{\xi}} + \mathcal{R}\ddot{\underline{\xi}} \tag{2.27}$$

We definiëren

$$\underline{a}_{abs} = \ddot{\underline{x}} \text{ , de } \underline{\text{absolute versnelling}}, \tag{2.28}$$

$$\underline{a}_{sl} = \dot{\underline{\omega}} \times (\underline{x} - \underline{c}) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{c})) + \ddot{\underline{c}}, \text{ } \underline{\text{de sleepversnelling}}, \tag{2.29}$$

$$\underline{a}_{cor} = 2\underline{\omega} \times \mathcal{R}\dot{\underline{\xi}} = 2\underline{\omega} \times \underline{v}_{rel}, \text{ de } \underline{\text{Coriolosversnelling}}, \tag{2.30}$$

$$\underline{a}_{rel} = \mathcal{R}\ddot{\underline{\xi}}, \text{ de } \underline{\text{relatieve versnelling}}. \tag{2.31}$$

zodat (2.27) geschreven kan worden in de vorm:

$$\underline{a}_{abs} = \underline{a}_{sl} + \underline{a}_{cor} + \underline{a}_{rel} \qquad (2.32)$$

De componenten $\underline{a}_{sl}$ en $\underline{a}_{rel}$ hebben analoge natuurkundige interpretaties als $\underline{v}_{sl}$ en $\underline{v}_{rel}$, de component $\underline{a}_{cor}$ is minder eenvoudig te interpreteren.

In het voorgaande hebben we aandacht besteed aan de absolute en relatieve verandering van de snelheids- en versnellingsvector. Het zal nuttig blijken te zijn ook voor andere vectoren een dergelijke beschrijving mogelijk te maken.

Laat $\underline{q}$ een in de tijd veranderlijke vector zijn betrokken op een vaste ruimte, beschreven door een vaste oorsprong en een vaste standaardbasis. We kunnen $\underline{q}$ opvatten als het beeld van een vector $\underline{\eta}$ die betrokken is op een bewegende ruimte, beschreven door een bewegende oorsprong en een bewegende basis.

De relatie tussen $\underline{q}$ en $\underline{\eta}$ is dan van de volgende vorm:

$$\underline{q} = R\,\underline{\eta}\,, \qquad (2.33)$$

waarin $R(t)$ weer de orthogonale afbeelding van 2.20 is.

Na differentiëren volgt:

$$\dot{\underline{q}} = \dot{R}\underline{\eta} + R\dot{\underline{\eta}} \qquad (2.34)$$

De relatieve verandering van $\underline{q}$ per tijdseenheid, aangeduid met $\dot{\underline{q}}_{rel}$, definiëren we door de relatie:

$$\dot{\underline{q}}_{rel} = R\,\dot{\underline{\eta}} \qquad (2.35)$$

Met 2.21 en 2.35 kunnen we 2.34 schrijven in de volgende vorm:

$$\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}_{rel} + \underline{\omega} \times \underline{q}, \qquad (2.36)$$

waarvoor we $\underline{\omega} \times \underline{q}$ wel $\dot{\underline{q}}_{s\ell}$ noemen.

Als in bovenstaande de vector $\underline{\eta}$ onveranderlijk is, dus $\dot{\underline{\eta}} = \underline{0}$, dan volgt: $\dot{\underline{q}}_{rel} = \underline{0}$. Zo geldt voor een vector $\underline{e}$ van de basis van de bewegende ruimte:

$$\dot{\underline{e}} = \underline{\omega} \times \underline{e} \qquad (2.37)$$

3. Massakinematica

In dit hoofdstuk worden enige grootheden gedefinieerd die in de gehele mechanica een zeer belangrijke rol spelen. Omdat deze grootheden zowel van de beweging van een mechanisch stelsel als van de massaverdeling over dit stelsel afhangen noemen we ze massa-kinematische grootheden. Tenzij anders vermeld worden voorkomende integralen opgevat in de zin zoals aangeduid in formule 1.23 betreffende de massa van een mechanisch stelsel. Ook hier wordt een mechanisch stelsel opgevat als een verzameling continue lichamen en/of wiskundige abstracties als het massapunt, de staaf en de schijf.

a. De hoeveelheid van beweging, de impuls

De hoeveelheid van beweging van een mechanisch stelsel, de impuls, aangeduid met $\underline{p}$ wordt gedefinieerd door:

$$\underline{p} = \int_V \rho\, \underline{v}\, dV. \tag{3.1}$$

Hierin is $V \subset \mathbb{R}^3$ een ruimtelijk gebied dat alle elementen van het mechanisch stelsel bevat, ρ de massadichtheid en $\underline{v}$ de snelheid van een deeltje.

Voor een massapunt met massa m en snelheid $\underline{v}$ wordt deze uitdrukking:

$$\underline{p} = m\, \underline{v} \tag{3.2}$$

Voor een star lichaam $\mathcal{B}$ dat momentaan het ruimtelijke gebied V bezet, waarvan $\underline{\omega}$ de hoeksnelheid is en $\underline{x}_0$ en $\underline{v}_0$ resp. de positie en de snelheid van het massamiddelpunt zijn, vinden we, met gebruikmaking van 2.17

$$\underline{p} = \int_V \rho\underline{v}\, dV = \int_V \rho[\underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_0)]dV$$

$$= \underline{v}_0 \int_V \rho dV + \underline{\omega} \times \int_V \rho(\underline{x} - \underline{x}_0)dV \tag{3.3}$$

Noemen we m de massa van $\mathcal{B}$ en gebruiken we (1.23) en (1.24) dan vinden we voor de impuls van een star lichaam:

$$\underline{p} = m\, \underline{v}_0 \tag{3.4}$$

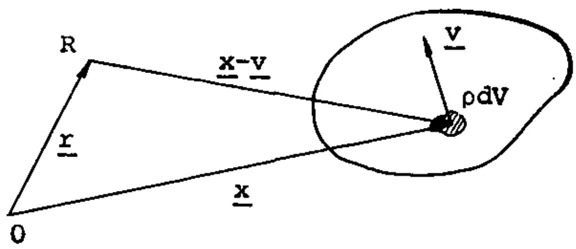
Merk op dat $\underline{p}$ kennelijk niet afhangt van $\underline{\omega}$.

b. Het moment van hoeveelheid van beweging, het impulsmoment

Laat $R \in \mathbb{R}^3$ een overigens willekeurig (eventueel) bewegend punt zijn met positie $\underline{r}(t)$. Het moment van hoeveelheid van beweging, het impulsmoment, van een mechanisch stelsel betrokken op R, aangeduid met $\underline{D}_R$ wordt gedefinieerd door:

$$\underline{D}_R = \int_V \rho(\underline{x}-\underline{r}) \times \underline{v}\, dV \tag{3.5}$$

$\underline{D}_R$ is dus niet expliciet afhankelijk van de snelheid van R.



Zoals uit de definitie blijkt is het impulsmoment niet alleen afhankelijk van de massa- en de snelheidsverdeling, zoals de impuls, maar ook van de positie van het punt waarop het impulsmoment is betrokken. Zijn A en B twee punten als R met posities $\underline{a}$ en $\underline{b}$ dan geldt voor de impulsmomenten betrokken op A en B en gebruikmakend van de definitie van de impuls $\underline{p}$:

$$\underline{D}_A - \underline{D}_B = \int_V \rho(\underline{x} - \underline{a}) \times \underline{v}\, dV - \int_V \rho(\underline{x} - \underline{b}) \times \underline{v}\, dV = \underline{p} \times (\underline{a} - \underline{b}) \tag{3.6}$$

Voor een massapunt, massa m, dat t.o.v. R de positie $\underline{x} - \underline{r}$ heeft en beweegt met de snelheid $\underline{v}$ wordt de uitdrukking (3.5):

$$\underline{D}_R = (\underline{x} - \underline{r}) \times \underline{p} \tag{3.7}$$

In de rest van deze paragraaf willen we het impulsmoment voor een star lichaam wat nader uitwerken. We gaan niet nader in op de wiskundige abstracties als de staaf en de schijf maar volstaan met de opmerking dat deze mechanische stelsels op analoge wijze als het starre lichaam kunnen worden behandeld.

Laat $\mathcal{B}$ een star lichaam zijn dat momentaan het ruimtelijke gebied V bezet. De massa van $\mathcal{B}$ is m en de massadichtheid ρ.

Zodat:

$$m = \int_V \rho dV \tag{1.18}$$

We nemen aan dat $\mathcal{B}$ beweegt met de hoeksnelheid $\underline{\omega}$ en zwaartepunts-snelheid $\underline{v}_0$; de positie van het massamiddelpunt Z noemen we $\underline{x}_0$, zodat met (1.24) geldt:

$$\int_V \rho(\underline{x} - \underline{x}_0)dV = \underline{0} \tag{1.28}$$

De snelheidsverdeling over de deeltjes van $\mathcal{B}$ luidt, volgens (2.17)

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_0) \tag{3.8}$$

Teneinde het schrijfwerk wat te vereenvoudigen zullen we de positie van een deeltje $X \in \mathcal{B}$ t.o.v. het massamiddelpunt Z van $\mathcal{B}$ aangeven met $\underline{y}$, zodat:

$$\underline{y} := \underline{x} - \underline{x}_0 \quad \text{en} \quad \int_V \rho\underline{y}dV = \underline{0} \tag{3.9}$$

waarmee (3.8) overgaat in:

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{y} \tag{3.10}$$

Het impulsmoment van $\mathcal{B}$ betrokken op het massamiddelpunt Z van $\mathcal{B}$ zullen we aangeven met $\underline{D}_0$.
Voor $\underline{D}_0$ vinden we:

$$\underline{D}_0 = \int_V \rho(\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{v}\, dV = \int_V \rho\, \underline{y} \times [\underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{y}]dV$$

$$= (\int_V \rho\underline{y}dV) \times \underline{v}_0 + \int_V \rho\, \underline{y} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})dV$$

De eerste term in het rechterlid is $\underline{0}$, zodat we vinden:

$$\underline{D}_0 = \int_V \rho\, \underline{y} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})dV \tag{3.11}$$

Voeren we de integratie over V uit, dan volgt dat $\underline{D}_0$ alleen van $\underline{\omega}$ afhankelijk is.

Opgave: laat zien dat $\underline{D}_0$ lineair afhankelijk is van $\underline{\omega}$.

Op grond van de lineaire afhankelijkheid van $\underline{D}_0$ van $\underline{\omega}$ bestaat er een lineaire afbeelding, aangeduid met J_0 z.d.d.

$$\underline{D}_0 = J_0\,\underline{\omega} \tag{3.12}$$

De lineaire afbeelding J_0 heet de centrale traagheidstensor (centraal omdat J_0 betrokken is op het massamiddelpunt)

Opmerking: $\underline{D}_0$ hangt kennelijk niet af van de snelheid $\underline{v}_0$ van het massamiddelpunt.
Evenals $\underline{p}$ een maat voor de translatie van een materieel lichaam is, zo is $\underline{D}_0$ een maat voor de rotatie van een materieel lichaam.

In de inleiding is opgemerkt dat de massa van een mechanisch stelsel een maat is voor de bewegingsweerstand van dat stelsel. Voor een star lichaam kunnen we het volgende stellen:
de massa van het lichaam is een maat voor de weerstand tegen translatie en traagheidstensor is een maat voor de weerstand tegen rotatie.

Opgave: laat met behulp van (3.11) en (3.12) zien dat de centrale traagheidstensor een symmetrische afbeelding is; dus toon aan:

$$\forall_{\underline{\omega}_1,\underline{\omega}_2 \in \mathbb{R}^3} \text{ geldt: } (\underline{\omega}_1, J_0\underline{\omega}_2) = (\underline{\omega}_2, J_0\underline{\omega}_1) \tag{3.13}$$

Stelling: De centrale traagheidstensor J_0 is een positief-definiete afbeelding, d.w.z.

$$\forall_{\underline{\omega} \in \mathbb{R}^3} \text{ geldt: } (\underline{\omega}, J_0\underline{\omega}) > 0 \text{ als } \underline{\omega} \neq \underline{0} \tag{3.14}$$

Bewijs:
$$(\underline{\omega}, J_0\underline{\omega}) = (\underline{\omega}, \int_V \rho\, \underline{y} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})dV)$$

$$= \int_V \rho(\underline{\omega}, y \times (\underline{\omega} \times \underline{y}))dV$$

$$= \int_F \rho(\underline{\omega} \times \underline{y}, \underline{\omega} \times \underline{y})dV$$

Nu is voor geen enkele $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ over het gehele lichaam $\mathcal{B}$, dus voor alle $\underline{y}$, $\underline{\omega} \times \underline{y} = \underline{0}$, dus inderdaad

$(\underline{\omega}, J_0\underline{\omega}) > 0$ als $\underline{\omega} \neq \underline{0}$

Opmerking: In het voorgaande is er van uitgegaan dat $\mathcal{B}$ een ruimtelijke, dus drie-dimensionale uitgestrektheid heeft. Is $\mathcal{B}$ een van de mathematische abstracties als staaf of punt dan kunnen we voor J_0 slechts zeggen dat bij niet-negatief is. Ga een en ander na!
Teneinde in praktische problemen berekeningen te kunnen uitvoeren gaan we nog wat nader in op de representaties van verschillende vectoren en van de traagheidstensor op verschillende stelsels van basisvectoren.

We voeren in een met het lichaam $\mathcal{B}$ meebewegend orthogonaal rechts assenstelsel, waarvan we de oorsprong in het massamiddelpunt Z kiezen. De drie eenheidsvectoren $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ en $\underline{e}_3$ langs de coördinaatassen vormen een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^3$, waarvoor geldt: $(\underline{e}_1, \underline{e}_2 \times \underline{e}_3) = 1$.
De kolommen van $\underline{\omega}$, $\underline{D}_0$ en $\underline{y}$ op deze basis noemen we $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$, $[D_{01}, D_{02}, D_{03}]^T$ en $[y_1, y_2, y_3]^T$ respectievelijk.
De matrix van J_0 betrokken op deze basis duiden we aan met I_0, het element in de k^{de} rij, en de ℓ^{de} kolom noemen we $I_{ok\ell}$.
Met wiskunde 30 volgt dan:

$$I_{ok\ell} = (\underline{e}_k, J_0\underline{e}_\ell) = (\underline{e}_k, \int_V \rho[\underline{y} \times (\underline{e}_\ell \times \underline{y})]dV)$$

$$= \int_V \rho[(\underline{y},\underline{y})(\underline{e}_k,\underline{e}_\ell) - (\underline{y},\underline{e}_k)(\underline{y},\underline{e}_\ell)]dV \qquad k,\ell = 1,2,3 \tag{3.15}$$

Voeren we in het Kronecker-symbool $\delta_{k\ell}$ gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} \delta_{k\ell} &= 1 \quad k = \ell \\ &= 0 \quad k \neq \ell \;\; k,\ell = 1,2,3 \end{aligned} \tag{3.16}$$

(dus $\delta_{k\ell}$ is het element van de matrix van de identieke afbeelding betrokken op een orthonormale basis) dan kunnen we (3.15) schrijven in de vorm:

$$I_{ok\ell} = \int_V \rho[(\underline{y},\underline{y})\delta_{k\ell} - y_k y_\ell]dV \tag{3.17}$$

In de literatuur wordt algemeen gebruik gemaakt van de z.g. index- of tensornotatie. Allerlei grootheden worden dan scalair en basisafhankelijk genoteerd.

Een van de afspraken die bij deze notatie wordt gebruikt is de volgende:

komt in een uitdrukking in één term een zekere index precies tweemaal voor, dan wordt tenzij anders is vermeld, automatisch over die index gesommeerd (Einstein-conventie).

Met deze afspraak kunnen we b.v. schrijven:

$$(\underline{y},\underline{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_k y_k \text{ in } \mathbb{R}^3$$

Eenvoudig volgt:

$$y_k y_k = y_\ell y_\ell ,$$

de index waarover wordt gesommeerd is een z.g. dummy-index die door elke andere index kan worden vervangen.

In index-notatie krijgt de wat inkonsekwente vorm (3.17) de gedaante:

$$I_{ok\ell} = \int_V \rho[y_i y_i \delta_{k\ell} - y_k y_\ell]dV \tag{3.18}$$

De relatie (3.12) kunnen we dan noteren in de vorm:

$$D_{ok} = I_{ok\ell}\omega_\ell \qquad , \; k = 1,2,3 \tag{3.19}$$

waarbij dus over ℓ wordt gesommeerd.

De symmetrie van de centrale traagheidstensor volgt natuurlijk onmiddellijk uit (3.18); op een orthonormale basis is de matrix I_0 van J_0 symmetrisch.

Omdat J_0 een symmetrische lineaire afbeelding is van $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$, bestaat er een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van J_0. (Wsk. 30).

De matrix van J_0 op deze basis is een diagonaalmatrix. De elementen op deze diagonaal zijn de eigenwaarden van J_0 en heten de <u>centrale hoofdtraagheidsmomenten</u>.

Omdat J_0 tevens positief is zijn de hoofdtraagheidsmomenten positief, noemen we ze J_{0I}, J_{0II} en J_{0III} dan kunnen ze worden geordend volgens:

$$0 < J_{0I} \leq J_{0II} \leq J_{0III} \tag{3.20}$$

Hadden we voor de orthonormale basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ juist de basis van eigenvectoren genomen, dan was (3.19) overgegaan in:

$$\begin{aligned} D_{01} &= J_{0I}\omega_1 \\ D_{02} &= J_{0II}\omega_2 \\ D_{03} &= J_{0III}\omega_3 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Omdat J_0 positief definiet is, is het oppervlak:

$(\underline{\omega}, J_0\underline{\omega}) = 1$ een ellipsoide, het oppervlak wordt

genoemd de <u>centrale traagheidsellipsoide</u>.
De hoofdassen van deze ellipsoide vallen juist langs de lijnen door het massamiddelpunt waarvan de richtingen de eigenvectoren van J_0 zijn.
Zoals onmiddellijk volgt uit (3.18) kunnen de elementen van de matrix J_0 waarvoor geldt $k = \ell$ worden geïnterpreteerd als de momenten van de massaverdeling om de coördinaatassen.
De grootheden $-I_{ok\ell}$, $k \neq \ell$ heten in de literatuur wel de centrifugaal momenten, ze zijn wat moeilijker te interpreteren.

In de natuurkunde gebruikt men wel het begrip:

traagheidsmoment om een lijn.

Op soortgelijke wijze als de diagonaalelementen van I_0 zouden we het traagheidsmoment I_o om een lijn ℓ met richting $\underline{e}$ ($\|\underline{e}\| = 1$) door het massamiddelpunt definiëren als:

$$I_{o\ell} = \int_V \rho\, r^2\, dV \tag{3.22}$$

waarin r de afstand van een deeltje tot de lijn ℓ is.
Eenvoudig volgt: $r = \|\underline{e} \times \underline{x}\|$, zodat (3.22) overgaat in:

$$I_{o\ell} = \int_V \rho(\underline{e} \times \underline{x}, \underline{e} \times \underline{x})dV = (\underline{e}, \int_V \rho\, \underline{x} \times (\underline{e} \times \underline{x})dV)$$

ofwel:

$$I_{o\ell} = (\underline{e}, J_0\underline{e}) \tag{3.23}$$

In het voorgaande hebben we onze beschouwingen steeds betrokken op het massamiddelpunt van een star lichaam. Het zal nuttig blijken te zijn ook t.o.v. andere punten van het starre lichaam een traagheidstensor te definiëren.

Laat A, positievector $\underline{a}$, een punt zijn dat star met het starre lichaam $\mathcal{B}$ meebeweegt. Als voorheen heeft $\mathcal{B}$ de massa m, de massadichtheid ρ, roteert met hoeksnelheid $\underline{\omega}$ en transleert met zwaartepuntssnelheid $\underline{v}_0$.
Voor de snelheid van A geldt dan:

$$\underline{v}_a = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{a} - \underline{x}_0) \tag{3.24}$$

Het impulsmoment van $\mathcal{B}$ betrokken op A kunnen we berekenen met behulp van (3.6).

Een wat andere methode, uitgaande van de definitie, is de volgende:

$$\underline{D}_A = \int_V \rho(\underline{x} - \underline{a}) \times \underline{v}\, dV = \int_V \rho(\underline{x} - \underline{a}) \times [\underline{v}_a + \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{a})]dV \tag{3.25}$$

Analoog aan (3.11) en (3.12) zouden we de traagheidstensor J_A betrokken op A definiëren door de relatie:

$$J_A\underline{\omega} = \int_V \rho(\underline{x} - \underline{a}) \times (\underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{a}))dV \quad , \quad \forall_{\underline{\omega}\in \mathbb{R}^3} \tag{3.26}$$

schrijven we: $\underline{x} - \underline{a} = \underline{x} - \underline{x}_0 + \underline{x}_0 - \underline{a}$ en definiëren we de symmetrische en niet-negatieve lineaire (nagaan!) afbeelding A door:

$$A\underline{\omega} = m(\underline{x}_0 - \underline{a}) \times (\underline{\omega} \times (\underline{x}_0 - \underline{a})) \quad , \quad \forall_{\underline{\omega}\in \mathbb{R}^3} \tag{3.27}$$

dan volgt, met (1.18) en (1.28) uit (3.26):

$$J_A\underline{\omega} = J_0\underline{\omega} + A\underline{\omega} \quad , \quad \forall_{\underline{\omega}\in \mathbb{R}^3} \tag{3.28}$$

waaruit weer eenvoudig volgt de Stelling van Steiner:

$$J_A = J_0 + A \tag{3.29}$$

Ook J_A is een symmetrische positief-definiete afbeelding die lineair is. Bepalen we de diagonaalmatrix van J_A op een orthonormale basis van eigenvectoren van J_A dan heten de diagonaalelementen de hoofdtraagheidsmomenten in A, ze zijn weer alle positief.

Vraag: Zijn de hoofdrichtingen van J_A i.h.a. gelijk aan die van J_0?

Het traagheidsmoment $I_{A\ell}$ om een lijn ℓ met richting $\underline{e}$ ($\|\underline{e}\| = 1$) door A is nu:

$$J_{A\ell} = (\underline{e}, J_A\underline{e}) \tag{3.30}$$

Als het punt A géén snelheid heeft ($\underline{v}_a = \underline{0}$) volgt uit (3.25) onmiddellijk:

$$\underline{D}_A = J_A\,\underline{\omega} \tag{3.31}$$

Opgave: Bewijs voor het geval $\underline{v}_a \neq \underline{0}$, i.h.a. dus, dat geldt:

$$\underline{D}_A = J_A\,\underline{\omega} + m\,(\underline{x}_0 - \underline{a}) \times \underline{v}_a \tag{3.32}$$

en leid (3.6) af voor twee punten A en B die star met het lichaam $\mathcal{B}$ meebewegen.

c. De kinetische energie

De bewegingsenergie van een mechanisch stelsel, de kinetische energie, aangeduid met T wordt gedefinieerd door:

$$T = \tfrac{1}{2} \int_V \rho (\underline{v}, \underline{v}) dV, \tag{3.33}$$

hierin is V opnieuw een ruimtelijk gebied dat alle elementen van het mechanisch stelsel bavat, ρ de massadichtheid en $\underline{v}$ de snelheid van een deeltje.

Voor een massapunt, massa m, snelheid $\underline{v}$, gaat (3.33) over in:

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 \text{ waarbij } v = \| \underline{v} \| \tag{3.34}$$

Voor een star lichaam $\mathcal{B}$, massa m, dat beweegt met zwaartepuntssnelheid $\underline{v}_0$ en hoeksnelheid $\underline{\omega}$ geldt, met gebruikmaking van (3.8)

$$T = \tfrac{1}{2} \int_V \rho (\underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{y}, \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{y}) dV \tag{3.35}$$

waarin $\underline{y}$ opnieuw de positie van een deeltje X t.o.v. het massamiddelpunt Z is.

Gebruiken we (1.18) en (1.24) dan kunnen we voor (3.35) schrijven:

$$T = \tfrac{1}{2} m (\underline{v}, \underline{v}_0) + \tfrac{1}{2} \int_V \rho (\underline{\omega} \times \underline{y}, \underline{\omega} \times \underline{y}) dV \tag{3.36}$$

Bedenken we dat $(\underline{\omega} \times \underline{y}, \underline{\omega} \times \underline{y}) = (\underline{\omega}, \underline{y} \times (\underline{\omega} \times \underline{y}))$, dan gaat (3.36) over in:

$$T = \tfrac{1}{2} m (\underline{v}_0, \underline{v}_0) + \tfrac{1}{2} (\underline{\omega}, J_0 \underline{\omega}) \tag{3.37}$$

Met de uitdrukkingen voor de impuls $\underline{p}$ en het impulsmoment $\underline{D}_0$ betrokken op het massamiddelpunt, kunnen we voor de kinetische energie T van een star lichaam $\mathcal{B}$ schrijven:

$$T = \tfrac{1}{2} (\underline{v}_0, \underline{p}) + \tfrac{1}{2} (\underline{\omega}, \underline{D}_0) \tag{3.38}$$

De eerste term in het rechterlid hangt uitsluitend van de snelheid van het massamiddelpunt en van de massa af en heet wel

de translatieenergie,

de tweede term hangt uitsluitend van de hoeksnelheid en van de rotatieweerstand af en heet wel

de rotatie-energie.

Opgave: bewijs dat voor een star lichaam $\mathcal{B}$, massa m, hoeksnelheid $\underline{\omega}$ dat beweegt z.d.d. $A \in \mathcal{B}$, gedurende de beweging in rust is (dus $\underline{v}_a = \underline{0}$, voortdurend), geldt:

$$T = \tfrac{1}{2}(\underline{J}_A\underline{\omega},\underline{\omega}) = \tfrac{1}{2}(\underline{D}_A,\underline{\omega}) \tag{3.39}$$

Voor berekeningen is het nuttig (3.34) en (3.37) in index-notatie ter beschikking te hebben:

voor een punt: $T = \tfrac{1}{2}\, m\, v_k v_k$ (3.40)

voor een star lichaam: $T = \tfrac{1}{2}\, m\, v_{ok} v_{ok} + \tfrac{1}{2}\, I_{ok\ell}\,\omega_k \omega_\ell$ (3.41)

In beide uitdrukkingen zijn k en ℓ dummy-indices waarover gesommeerd moet worden, het rechterlid van 3.40 bestaat dus in het algemeen uit drie termen en het rechterlid van 3.41 in het algemeen uit twaalf termen.

4. Krachtenleer

a. Inleiding

Naast de kinematische en massakinematische grootheden zijn in de mechanica dynamische grootheden als krachten en momenten belangrijk. Krachten en momenten zijn de invloeden op de beweging van een mechanische stelsel tengevolge waarvan deze beweging plaats vindt.
We kunnen krachten op verschillende manieren van elkaar onderscheiden, zo zouden we kunnen spreken van afstandskrachten, zoals de gravitatie, electrische- en magnetische krachten of van contactkrachten zoals de wrijving. Samen noemen we deze krachten wel natuurkundige krachten in tegenstelling tot krachten die veroorzaakt worden door bewegingsbeperkingen en dikwijls van meetkundige aard zijn. Deze meetkundige krachten zijn in het algemeen onbekenden van een probleem in de mechanica.
In het algemeen zullen we ons niet al te druk maken over een indeling van krachten of momenten omdat we veeleer geïnteresseerd zijn in de invloed die zij op de beweging hebben.

b. Krachten en momenten

Krachten en momenten worden steeds voorgesteld door vectoren. Gaan we er van uit dat alleen krachten en momenten de beweging van een stelsel beïnvloeden, dan doen we reeds nu een belangrijke uitspraak: de verandering van de beweging is vectorieel.
Hoewel dus krachten en momenten beide vectoren zijn, is hun aard verschillend, we komen daar nog op terug in §d.
Van de momenten willen we nog het volgende opmerken:

we onderscheiden twee soorten van momenten en wel

1. koppels van krachten
2. intrinsieke momenten.

Stellen we een kracht voor door $\underline{K}$ en grijpt deze kracht aan op een deeltje X met positie $\underline{x}$ dan is het moment van $\underline{K}$ om de oorsprong aangeduid met $\underline{M}$, een koppel, gedefinieerd door:

$$\underline{M} = \underline{x} \times \underline{K} \tag{4.1}$$

Intrinsieke momenten komen in de natuur wel voor maar worden in dit college niet in de beschouwingen betrokken.

c. Krachtdichtheden

In een lichaam $\mathcal{B}$ dat een ruimtelijk gebied V bezet kan op een deeltje, met positie $\underline{x}$, een kracht aangrijpen welke we de krachtdichtheid $\underline{k}$ noemen. De kracht $\underline{K}$ werken op het lichaam $\mathcal{B}$ definiëren we door de relatie:

$$(\underline{K},\underline{e}) = \int_V (\underline{k},\underline{e})\,dV \quad \text{voor alle } \underline{e}, \tag{4.2}$$

of, wat slordig: $\underline{K} = \int_V \underline{k}\, dV$

Het moment $\underline{M}$ op $\mathcal{B}$, betrokkken op de oorsprong 0, wordt gedefinieerd door de relatie:

$$(\underline{M},\underline{e}) = \int_V (\underline{k},\underline{e} \times \underline{x})\,dV \quad \text{voor alle } \underline{e}, \tag{4.3}$$

of, wat slordig:

$$\underline{M} = \int_V \underline{x} \times \underline{k}\, dV$$

De virtuële krachtdichtheid $\underline{k}$ wordt dus opgevat als een primaire grootheid, waarbij de vectoren $\underline{K}$ en $\underline{M}$ worden gedefinieerd.
Bij de integratie over het gebied V bezet door deeltjes van een mechanisch stelsel, wordt de integratie opgevat als in die voor de massadichtheid.
Op dezelfde wijze als in §1.d. kunnen we dan ook weer spreken over:

volumekrachtdichtheid	(zoals voor een lichaam)
oppervlaktekrachtdichtheid	(schijf)
lijnkrachtdichtheid	(staaf)
puntkrachtdichtheid	(punt)

in het laatste geval is de kracht gelijk aan de dichtheid.

d. Gebonden en vrije vectoren

Formeel onderscheiden we vectoren van elkaar op de volgende

1. Gebonden vectoren: dit zijn vectoren met één vast aangrijpingspunt. Twee vectoren die in de normale zin gelijk zijn, kunnen nu van elkaar verschillen als hun aangrijpingspunten verschillen.
2. Glijdende vectoren: dit zijn vectoren waarvan de aangrijpingspunten op een lijn in de richting van de vector liggen. Twee vectoren die in de normale zin gelijk zijn, zijn nu verschillend als de verbindingslijn van de aangrijpingspunten niet de richting van de vectoren heeft.

3. Vrije vectoren: dit zijn vectoren waarvan het aangrijpingspunt niet belangrijk is, het zijn de reeds bekende vectoren.

Opmerking: de vectoren van een vectorveld zoals gedefinieerd in Wiskunde 40 zijn dus gebonden vectoren.

In de mechanica vatten we vrijwel alle vectoren als gebonden vectoren op. Dit geldt voor de snelheid en de versnelling van een deeltje en ook voor de krachtdichtheid op een deeltje. Al deze vectoren zijn dus bepaald door: hun grootte, hun richting en de plaats van het aangrijpingspunt; zes scalaire grootheden.

De vectoren: impuls van een stelsel en kracht op een stelsel daarentegen zijn vrije vectoren, ze worden beide bepaald door drie scalaire grootheden. De vectoren: impulsmoment van een stelsel en moment op een stelsel zijn beide afhankelijk van de positie van het punt ten opzichte waarvan zij zijn gedefinieerd. Beide zijn dus op te vatten als elementen van een vectorveld. Op de bijzondere meetkundige structuur van deze velden gaan we hier niet nader in.

e. Krachtvelden en arbeid

In de Natuurkunde komt het dikwijls voor dat de kracht die op een deeltje werkt een functie is van de positie van dat deeltje alleen. We kunnen de kracht dan opvatten als een vectorveld in $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{K} = \underline{K}(\underline{x}) \tag{4.4}$$

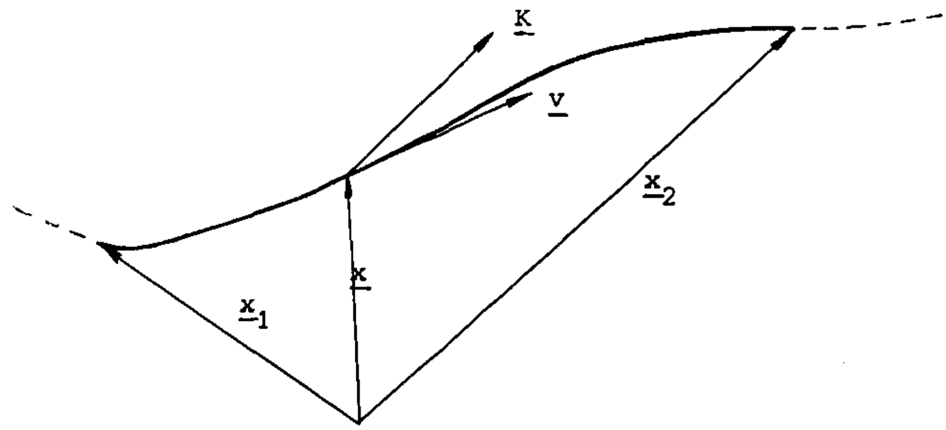
Een dergelijk krachtveld heet conservatief als we kunnen schrijven:

$$\underline{K} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U, \tag{4.5}$$

waarbij U een scalarveld is, dat we de potentiaal van het krachtveld noemen.

Als een massapunt X beweegt onder invloed van het krachtveld $\underline{K}(\underline{x})$, waarbij $\underline{x}$ de positie en $\underline{v} = \dot{\underline{x}}$ de snelheid van X is, dan definiëren we de arbeid die door het krachtveld $\underline{K}$ wordt verricht bij een beweging van X van $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ naar $\underline{x}_2 = \underline{x}(t_2)$ door:

$$A = \int_{\underline{x}_1}^{\underline{x}_2} (\underline{K}, d\underline{x}) = \int_{t_1}^{t_2} (\underline{K}, \underline{v})\, dt \tag{4.6}$$



Het zal duidelijk zijn dat A volgens (4.6) afhankelijk is van de tussen $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ gevolgde weg.
Is $\underline{K}$ echter een conservatief veld volgens (4.5) dan geldt:

$$A = - \int_{t_1}^{t_2} (\text{grad } U, \dot{\underline{x}})dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{U} \, dt = U(\underline{x}_1) - U(\underline{x}_2) \qquad (4.7)$$

dus onafhankelijk van de gevolgde weg.
Nemen we $\underline{x}_2 = \underline{x}_1$ dan volgt voor elke kringloop in een conservatief krachtveld:

$$\oint (\underline{K}, d\underline{x}) = - \oint dU = 0 \qquad (4.8)$$

onder zekere omstandigheden (Wisk. 40) is dit equivalent met:

$$\text{rot } \underline{K} = \underline{0} \qquad (4.9)$$

Bij een lichaam met ruimtelijke uitgestrektheid vervangen we de kracht door de krachtdichtheid als veldgrootheid, dit doen we ook met de potentiaal die we vervangen door een potentiaal-dichtheid u, zodat we i.p.v. (4.5) krijgen voor het conservatieve geval:

$$\underline{k}(\underline{x}) = - \text{grad } u(\underline{x}) \qquad (4.10)$$

De potentiële energie U van het lichaam wordt gedefinieerd door:

$$U = \int_V u \, dV \qquad (4.11)$$

waarin V weer het door het lichaam bezette ruimtelijke gebied is.
Voor de arbeid door het conservatieve krachtveld verricht bij een beweging van het lichaam, verkrijgen we nu:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\underline{k},\underline{v})\,dV = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\text{grad } u,\dot{\underline{x}})\,dV$$

$$= - \int_V dV \int_{t_1}^{t_2} (\text{grad } u,\dot{\underline{x}})\,dt = - \int_V dV \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}\,dt = - \int_V [u(\underline{x}(t_2))-u(\underline{x}(t_1))]\,dV$$

$$= U_1 - U_2 \,, \tag{4.12}$$

waarbij U_1 en U_2 de potentiële energieën van het lichaam zijn in de begintoestand op t_1 en de eindtoestand op t_2.

Bovenstaande beschouwingen kunnen we uitbreiden tot het algemene geval van een mechanisch stelsel bestaande uit starre lichamen (eventueel mathematische abstracties) waarbij we weer gebruik zullen maken van de gegeneraliseerde coördinaten.
We beschouwen een mechanisch stelsel bestaande uit p starre lichamen: $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p$. Het aantal onafhankelijke verbindingsvoorwaarden voor het stelsel is m, het aantal graden van vrijheid n, zodat:

$$n = 6p - m \tag{4.13}$$

Opmerking: als tot het stelsel ook nog mathematische abstracties als puntmassa's, staven en schijven behoren, kan op analoge wijze als in (4.13) een verband worden opgesteld tussen het aantal graden van vrijheid n, het aantal "lichamen" p en het aantal onafhankelijke verbindingsvoorwaarden m.

Het volume van het lichaam $\mathcal{B}_k$ duiden we aan met V_k en het volume van het mechanisch stelsel met V zodat:

$$V = \bigcup_{k=1}^{p} V_k \,, \tag{4.14}$$

waarbij verondersteld is: $V_k \cap V_\ell = \emptyset$ als $k \neq \ell$.
Verder nemen we aan dat het stelsel <u>holonoom</u> is, zodat we n gegeneraliseerde coördinaten $q_1,\ldots,q_n$ kunnen aangeven, en dat van alle deeltjes van het stelsel de positie <u>niet expliciet van de tijd t afhangt</u>

Dan geldt:

$$\forall_{\underline{x}\in V} : \underline{x} = \underline{x}(q_1,\ldots,q_n) \tag{4.15}$$

en bij een beweging:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1(t),\ldots\ldots,q_n(t)) \tag{4.16}$$

zodat we voor de snelheid vinden:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\,\dot{q}_k = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\,\dot{q}_k \tag{4.17}$$

(denk aan de sommatieafspraak!)

De krachtdichtheid, een vectorveld gedefinieerd over V, kunnen we met (4.15) als een vectorveld definiëren over de gegeneraliseerde coördinaten. Met de gebruikelijke slordige notatie van functiesymbolen schrijven we dan:

$$\underline{k} = \underline{k}(\underline{x}) = \underline{k}(\underline{x}(q_1,q_2,\ldots,q_n)) = \underline{k}(q_1,\ldots,q_n) \tag{4.18}$$

Bij een beweging van het mechanisch stelsel is de arbeid verricht tussen twee tijdstippen t_1 en t_2 door het krachtveld:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\underline{k},\dot{\underline{x}})\,dV = \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_k dt \int_V (\underline{k},\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k})\,dV \tag{4.19}$$

We definiëren de gegeneraliseerde kracht, aangeduid met het symbool Q_k door:

$$Q_k := \int_V (\underline{k},\frac{\partial x}{\partial q_k})\,dV \tag{4.20}$$

Voor de arbeid volgens (4.19) vinden we dan met (4.20):

$$A = \int_{t_1}^{t_2} Q_k\,\dot{q}_k\,dt = \int_1^2 Q_k\,dq_k \tag{4.21}$$

waarbij 1 en 2 weer betrekking hebben op de begintoestand op het tijdstip t_1 en de eindtoestand op het tijdstip t_2.

In het geval dat de krachtdichtheid $\underline{k}(\underline{x})$ weer conservatief is en een potentiaaldichtheid bezit die niet expliciet van de tijd afhangt kunnen we de potentiële energie van het stelsel definiëren door:

$$U = \sum_{k=1}^{p} \int_{V_k} u \, dV = \int_V u \, dV \tag{4.22}$$

waarbij we U kunnen opvatten als een functie over de gegeneraliseerde coördinaten: $q_1, \ldots, q_n$.

Uit (4.22) volgt met de kettingregel voor samengestelde functies

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \int_V u \, dV = \int_V \frac{\partial u}{\partial q_k} dV = \int_V (\text{grad } u, \frac{\partial x}{\partial q_k}) dV \tag{4.23}$$

met $\underline{k}$ = - grad u, volgt dan:

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = - \int_V (\underline{k}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) dV = - Q_k \tag{4.24}$$

Voor een conservatief stelsel geldt dus voor de gegeneraliseerde krachten

$$Q_k = - \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{4.25}$$

Substitutie in (4.21) levert opnieuw:

$$A = U_1 - U_2 \tag{4.26}$$

de verrichte arbeid is de afname van de potentiële energie.

f. Vermogen

In de vorige paragraaf hebben we uitdrukkingen gegeven voor de arbeid verricht door een kracht op een massapunt (4.6) en voor de arbeid verricht op een uitgestrekt lichaam (4.12) of een stelsel (4.19) door een krachtdichtheid.

In deze paragraaf zullen we invoeren het begrip vermogen, aangeduid met het symbool P, door de volgende definities:

voor een massapunt dat beweegt met snelheid $\underline{v} = \underline{\dot{x}}$ o.i.v. de krachtdichtheid $\underline{k}$ is het vermogen:

$$P = (\underline{K}, \underline{v}) \tag{4.27}$$

voor een lichaam met ruimtelijke uitgestrektheid of voor een stelsel van dergelijke lichamen, bewegende o.i.v. de krachtdichtheid $\underline{k}$ is het vermogen:

$$P = \int_V (\underline{k}, \underline{v})\, dV \qquad (4.28)$$

In beide gevallen is P een functie van de tijd .
De formules (4.6), (4.12) en (4.19) kunnen in eerste instantie worden samengevat tot:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt \qquad (4.29)$$

Het vermogen is dus op te vatten als de arbeid die per tijdseenheid wordt verricht.
De uitdrukking (4.27) is, in tegenstelling tot (4.28), eenvoudig.
Voor een star lichaam is (4.28) nog verder te vereenvoudigen.

Zij $\mathcal{B}$ een star lichaam waarop werken:

de kracht: $\underline{K} = \int_V \underline{k}\, dV$

het moment: $M_0 = \int_V (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{k}\, dV$, betrokken op het massa middelpunt.

De snelheidsverdeling voor de deeltjes van $\mathcal{B}$:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_0).$$

Substitutie van dit laatste in (4.28) levert:

$$P = \int_V (\underline{k}, \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_0))\, dV = (\underline{K}, \underline{v}_0) + (\underline{M}_0, \underline{\omega}) \qquad (4.30)$$

Hiermede hebben we ook het vermogen op een star lichaam in een eenvoudig te interpreteren vorm verkregen.

In het geval dat het mechanisch stelsel met gegeneraliseerde coördinaten wordt beschreven verkrijgen we voor het vermogen (zie 4.21) in het geval dat de positievectoren niet expliciet van de tijd afhangen:

$$P = Q_k\, \dot{q}_k \qquad (4.31)$$

Beweegt een mechanisch stelsel in een conservatief krachtveld, waarbij de potentiaal en daarmede de potentiële energie U niet expliciet van de tijd afhangt dan vinden we (nagaan!)

$$P = -\dot{U} \tag{4.32}$$

g. Virtuele arbeid, gegeneraliseerde krachten en reactiekrachten

In deze paragraaf definiëren we de arbeid door een kracht of krachtveld verricht bij virtuele verplaatsingen. Deze arbeid noemen we de virtuele arbeid. Daarnaast komen we terug op de reeds in (4.20) ingevoerde gegeneraliseerde krachten.

Teneinde het schrijfwerk te vereenvoudigen, zullen we opnieuw de sommatieafspraak hanteren.

Als inleiding beschouwen we weer het massapunt dat, eventueel onderhevig aan bewegingsbeperkingen beweegt in een krachtveld in $\mathbb{R}^3$.

Zij X een massapunt, positie $\underline{x}$, onderhevig aan de kracht $\underline{K}$.

We vatten de positie $\underline{x}$ op als functie van de gegeneraliseerde coördinaten $q_1,\ldots,q_n$ (n = 1,2 of 3) en de tijd t; we beschouwen dus een holonoom systeem. De virtuele verplaatsing $\delta\underline{x}$ is gedefinieerd volgens definitie (1.37).

De virtuele arbeid door de kracht $\underline{K}$ verricht bij de virtuele verplaatsing $\delta\underline{x}$, aangeduid met δA, wordt gedefinieerd door:

$$\delta A = (\underline{K}, \delta\underline{x}) \tag{4.33}$$

zodat met (1.37) volgt:

$$\delta A = (\underline{K}, \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})\,\delta q_k \tag{4.34}$$

De gegeneraliseerde kracht Q_k definiëren we door:

$$Q_k = (\underline{K}, \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k}) \quad k = 1,\ldots,n, \tag{4.35}$$

zodat:

$$\delta A = Q_k\,\delta q_k \tag{4.36}$$

Is de kracht $\underline{K}$ conservatief, en hangt de potentiaal U niet expliciet van de snelheid $\dot{\underline{x}}$ af, dan kunnen we dus schrijven

$$\underline{K} = -\,\text{grad}\;U(\underline{x},t) \tag{4.37}$$

zodat:

$$Q_k = (- \text{grad } U, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) = - \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{4.38}$$

waarbij we dus U weer opvatten als functie van $q_1,\ldots,q_n$ en de tijd t.
Voor de virtuele arbeid geldt dan:

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k = - \delta U, \tag{4.39}$$

als we U op dezelfde wijze interpreteren als $\delta \underline{x}$ in (1.37). Een, overigens zeer belangrijke, opmerking willen we nog maken over de definitie (4.35) en de uitdrukking (4.36).

Als een massapunt beweegt, kunnen we de kracht die er op werkt dikwijls opvatten als de som van een aantal krachten, we komen daar later nog op terug, in de vorm:

$$\underline{K} = \sum_{\ell=1}^{m} \underline{K}_\ell \tag{4.40}$$

Substitutie in (4.35) levert:

$$Q_k = \sum_{\ell=1}^{m} (\underline{K}_\ell, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) \tag{4.41}$$

We noemen nu de kracht $\underline{K}_\ell$, $\ell \in (1,\ldots,m)$, een <u>reactiekracht</u> als geldt:

$$(\underline{K}_\ell, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) = 0 \quad , \text{ voor } \underline{\text{alle}} \ k \in (1,\ldots,n) \tag{4.42}$$

Is $\underline{K}_\ell$ geen reactiekracht, dan noemen we hem een <u>belastingkracht</u>.
Let wel dat voor zekere ℓ aan <u>alle</u> n voorwaarden (4.42) moet worden voldaan om te besluiten dat $\underline{K}_\ell$ een reactiekracht is.
Het is met (4.36) duidelijk dat de reactiekrachten géén bijdrage leveren in de virtuele arbeid.
We zouden kunnen zeggen:

<u>reactiekrachten zijn die krachten welke bij geen enkele virtuele verplaatsing virtuele arbeid verrichten,</u> terwijl <u>belastingkrachten zijn die krachten die bij minstens één virtuele verplaatsing virtuele arbeid verrichten.</u>

Als we, meer algemeen, een mechanisch stelsel beschouwen (daaronder begrepen ook staven en schijven e.d.) dan kunnen we door de kracht in bovenstaande te vervangen door de krachtdichtheid soortgelijke beschouwingen houden.
De positie van een element X van het stelsel dat een ruimtelijk gebied $V \subset \mathbb{R}^3$ bezet geven we aan met $\underline{x}$ en de krachtdichtheid met $\underline{k}(\underline{x})$.
Zijn de verbindingsvoorwaarden weer holonoom dan geldt:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\ldots,q_n,t)$$

en
$$\delta\underline{x} = \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k}\,\delta q_k \tag{1.37}$$

De virtuele arbeid wordt nu gedefinieerd door:

$$\delta A = \int_V (\underline{k},\delta\underline{x})\,dV \tag{4.43}$$

Substitutie van $\delta\underline{x}$ geeft:

$$\delta A = \int_V (\underline{k},\frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})\,dV\ \delta q_k \tag{4.44}$$

Definiëren we, als in 4.20, de gegeneraliseerde kracht Q_k volgens:

$$Q_k = \int_V (\underline{k},\frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})\,dV \tag{4.45}$$

dan verkrijgen we voor de virtuele arbeid opnieuw de uitdrukking:

$$\delta A = Q_k\ \delta q_k \tag{4.46}$$

Is het krachtveld conservatief, potentiaal u, en is U de potentiële energie van het stelsel; volgens

$$U = \int_V u\ dV \tag{4.47}$$

die bij veronderstelling opnieuw alleen een functie over $q_1,\ldots,q_n$ en t is, dan geldt:

$$Q_k = \int_V (\underline{k},\frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})\,dV = -\int_V (\text{grad } u,\frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})\,dV = -\int_V (\frac{\partial u}{\partial q_k})\,dV$$

$$= - \frac{\partial}{\partial q_k} \int\limits_V u \; dV = - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad , \tag{4.48}$$

en in dat geval volgt voor de virtuele arbeid opnieuw:

$$\delta A = - \delta U \tag{4.49}$$

voor een conservatief krachtveld.

Ook in dit geval zullen we de krachtdichtheid dikwijls kunnen schrijven in de vorm:

$$\underline{k} = \sum_{\ell=1}^{m} \underline{k}_\ell \tag{4.50}$$

Substitutie in (4.45) levert:

$$Q_k = \sum_{\ell=1}^{m} \int\limits_V (\underline{k}_\ell , \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) \, dV \tag{4.51}$$

We noemen de krachtdichtheid $\underline{k}_\ell$, $\ell \in (1,\ldots,m)$, een <u>reactiekrachtdichtheid</u> als geldt:

$$\int\limits_V (\underline{k}_\ell , \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) \, dV = 0 \quad , \quad \text{voor } \underline{\text{alle}} \; k \in (1,\ldots,n) \tag{4.52}$$

Is $\underline{k}_\ell$ geen reactiekrachtdichtheid, dan noemen we hem een <u>belastingkrachtdichtheid</u>.

Het is opnieuw duidelijk dat een reactiekrachtdichtheid geen virtuele arbeid kan verrichten.

De belangrijke onderstreepte zin van pagina 40, geldt ook hier voor de krachtdichtheden.

Ter afsluiting van deze paragraaf keren we nog eenmaal terug naar de begrippen: arbeid, vermogen en virtuele arbeid.

Voor een massapunt X, met positie $\underline{x}$ volgens (1.32) en snelheid $\underline{v}$ volgens (1.34) kunnen we een infinitesimale bijdrage in de arbeid, aangegeven met dA gedurende de infinitesimale tijd dt van de kracht $\underline{K}$ op het massapunt voorstellen door:

$$dA = P \, dt = (\underline{K}, \underline{v}) \, dt = (\underline{K}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) \dot{q}_k \, dt + (\underline{K}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}) \, dt$$

ofwel:

$$dA = Q_k \, d\, q_k + (\underline{K}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial t})dt \tag{4.53}$$

Ook in het eerste deel van het rechterlid van (4.53) komen de reactiekrachten volgens (4.52) niet voor, echter in de term $(\underline{K}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial t})$ kunnen we wel degelijk een bijdrage van deze krachten verwachten, die dus wel "gewone" arbeid kunnen verrichten (Werk zelf e.e.a. uit voor reactiekrachtdichtheden).

5. Puntmechanica

a. De wetten van Newton

In het vak Inleiding in de Mechanica zijn de wetten van Newton uitvoerig ter sprake gekomen we zullen hier dan ook volstaan met een korte herhaling.

Gepostuleerd wordt dat er een Euclidische ruimte, de zg. invertiaalruimte is waarin geldt voor de beweging van

een massapunt, massa m, positie $\underline{x}$ (gemeten vanuit de oorsprong van een inertiaalruimte) dat beweegt eventueel onder invloed van een kracht $\underline{K}$:

1. De snelheid van het massapunt is constant als het niet in zijn beweging wordt beïnvloed:

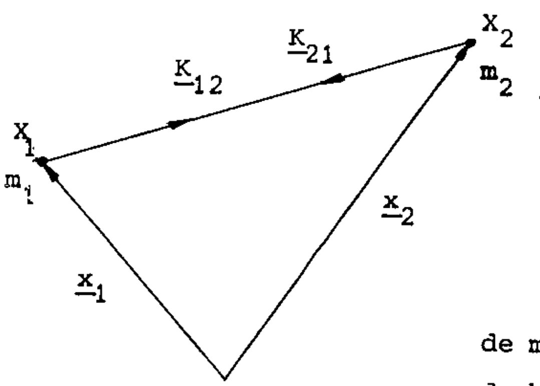
$$\dot{\underline{x}} = \underline{c}, \text{ constant, als } \underline{K} = \underline{0}$$

2. Beweegt het massapunt onder invloed van de kracht $\underline{K}$, dan geldt:

$$\dot{\underline{p}} = \underline{K}\ , \text{ waarbij } \underline{p} = m\,\dot{\underline{x}}$$

3. Wanneer twee massapunten krachten op elkaar uitoefenen (denk aan gravitatiekrachten of krachten welke worden geleid door een massaloos koord), dan zijn deze krachten in grootte gelijk, in richting tegengesteld, waarbij de richting valt langs de verbindingslijn van de twee punten.

Toelichting op de derde wet:



de massapunten X_1 en X_2 oefenen op elkaar de krachten $\underline{K}_{12}$ (door X_2 op X_1) en $\underline{K}_{21}$ (door X_1 op X_2) uit, dan:

$$\underline{K}_{12} + \underline{K}_{21} = \underline{0}$$

$$\underline{x}_1 \times \underline{K}_{12} + \underline{x}_2 \times \underline{K}_{21} = \underline{0}$$

Opmerking: bovengenoemde formulering is niet die welke Newton aan zijn postulaten gaf.

b. Algemene relaties, behoudwetten

Uit de tweede wet van Newton volgt onmiddellijk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{K}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\underline{p}}\, dt = \underline{p}(t_2) - \underline{p}(t_1)$$

In het geval dat voortdurend geldt $\underline{K} = \underline{0}$, volgt: $\underline{p} = \underline{c}$, constant.
Wanneer op een massapunt geen kracht werkt is de impuls constant.

Het impulsmoment van een massapunt betrokken op de oorsprong 0 is gedefinieerd door:

$$\underline{D} = \underline{x} \times \underline{p}\ ,\ \text{waarin } \underline{p} = m\,\dot{\underline{x}}$$

Na differentiatie volgt:

$$\dot{\underline{D}} = \underline{x} \times \dot{\underline{p}} + \dot{\underline{x}} \times \underline{p} = \underline{x} \times \dot{\underline{p}}$$

Het moment $\underline{M}$ van de kracht $\underline{K}$ betrokken op de oorsprong is gedefinieerd door: $\underline{M} = \underline{x} \times \underline{K}$.
Met de tweede wet van Newton volgt onmiddellijk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{M}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{x} \times \underline{K}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{x} \times \dot{\underline{p}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\underline{D}}\, dt = \underline{D}(t_2) - \underline{D}(t_1).$$

Als voortdurend geldt dat $\underline{K} = \underline{0}$ volgt: $\underline{D} = \underline{d}$, constant.
Wanneer op een massapunt geen kracht werkt is het impulsmoment, betrokken op de oorsprong, constant.

Vraag: wat kunt U zeggen, voor het geval dat de kracht voortdurend nul is, over het impulsmoment betrokken op een ander punt dan de oorsprong.

Voor de kinetische energie T van een massapunt geldt:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}}),$$

met de tweede wet van Newton volgt onmiddellijk:

$$\dot{T} = (m\ddot{\underline{x}},\dot{\underline{x}}) = (\underline{K},\dot{\underline{x}}),$$

zodat met

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (\underline{K},\dot{\underline{x}})dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{T}\, dt = T_2 - T_1$$

is afgeleid:

wanneer op een massapunt een kracht $\underline{K}$ werkt, dan is de door deze kracht verrichte arbeid gelijk aan de toename van de kinetische energie; geldt voortdurend $\underline{K} = \underline{0}$, dan is de kinetische energie constant.

Werkt op een massapunt een conservatieve kracht $\underline{K}$ met potentiaal $\underline{U}$, dan is afgeleid: $(\underline{K}, \dot{\underline{x}}) = - \dot{U}$,

Substitutie in (5.1) leidt tot de relatie: $U_1 - U_2 = T_2 - T_1$, welke we schrijven in de vorm:

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \tag{5.2}$$

De uitdrukking T + U heet de <u>mechanische energie</u>.
Afgeleid is:

beweegt een massapunt in een conservatief krachtveld, dan is de mechanische energie constant.

c. <u>Stoten</u>

In het college Inleiding in de Mechanica is reeds aandacht besteed aan het onderwerp stoten op massapunten. In het kort willen we hier nog enige aandacht besteden aan dit onderwerp.
Als inleiding het volgende:

bij stoten en botsingen wordt in de Natuurkunde het concept: "de delta-functie van Dirac" gebruikt. Deze deltafunctie, aangeduid met δ, is geen functie zoals we die in de wiskunde hebben leren kennen maar een gegeneraliseerde functie of distributie. De theorie van deze distributies is zeer omvangrijk en leent zich niet voor een behandeling in dit college. We zullen hier volstaan met een elementaire (heuristische) benadering, zoals dat ook is gedaan in de colleges

multivariabele systemen (prof. Hautus)
integraal transformaties voor E (prof. Boersma)

Een elementaire benadering van de delta-functie is de volgende:

beschouw de verzameling h_α: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$h_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \text{ voor } |t| < \frac{1}{2}\alpha \\ 0 \text{ voor } |t| > \alpha \end{cases} \tag{5.3}$$

waarbij de parameter α positief is.

Min of meer impliciet definiëren we de δ-functie dan door de beide volgende regels:

1. Zij φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie dan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \varphi(t)dt = \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(t)\varphi(t)dt \tag{5.4}$$

2. Twee functies a(t) en b(t) heten gelijk, ook al bevatten zij eventueel delta-functies, als voor elke continue functie φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} b(t)\varphi(t)dt, \tag{5.5}$$

als de integralen bestaan.

Op grond van (5.4) zegt men wel: $\delta(t) = \text{"}\lim_{\alpha \downarrow 0} h_\alpha(t)\text{"}$ (5.6)

De deltafunctie heeft de volgende eigenschappen:

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{5.7}$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\varphi(t)dt = \varphi(t_0) \text{ voor continue } \varphi. \tag{5.8}$$

3. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\ \delta(t)$, voor reëele $a \neq 0$, oa.: $\delta(t) = \delta(-t)$ (5.9)

Opmerking: in de theorie van de distributies wordt (5.4) gebruikt om deze grootheden te definiëren.

Zie de collegedictaten Wiskunde 40 en Integraaltransformaties (waaruit bovenstaande is overgenomen).

Keren we terug naar het onderwerp stoten:

Een kracht $\underline{K}(t)$ welke op een massapunt, massa m, werkt en van de vorm:

$$\underline{K}(t) = \underline{S}\,\delta(t - t_0) \tag{5.10}$$

is, waarbij we $\underline{S}$ de stoot noemen, heeft de volgende eigenschap:

laat t_1 en t_2 twee tijdstippen zijn z.d.d. $t_0 \in (t_1, t_2)$, dan geldt voor de impuls $\underline{p}$ van het massapunt:

$$\underline{p}(t_2) - \underline{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\underline{p}}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{K}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{S}\,\delta(t - t_0)\,dt = \underline{S} \tag{5.11}$$

Definiëren we nu: $\Delta\underline{p}(t_0) = \lim\limits_{t_2 \downarrow t_0} \underline{p}(t_2) - \lim\limits_{t_1 \uparrow t_0} \underline{p}(t_1)$ (5.12)

dan volgt eenvoudig:

$$\Delta\underline{p}(t_0) = \underline{S} \tag{5.13}$$

Wanneer op een massapunt een kracht werkt volgens (5.10) zeggen we:

op het massapunt wordt een stoot uitgeoefend.

Afgeleid is:

wanneer op een massapunt een (eindige) stoot wordt uitgeoefend, dan veroorzaakt deze een discontinuïteit in de impuls; deze discontinuïteit is een eindige sprong gelijk aan de stoot.

Definiëren we de tijdstippen t_1 en t_2 als boven dan geldt voor de positie van het massapunt

$$\underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\underline{x}}(t)\,dt = \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} \underline{p}(t)\,dt \tag{5.14}$$

Is het massapunt onderhevig aan een eindige stoot volgens (5.10) dan is $\underline{p}$ integreerbaar en we vinden:

$$\Delta\underline{x}(t_0) := \lim_{t_2 \downarrow t_0} \underline{x}(t_2) - \lim_{t_1 \uparrow t_0} \underline{x}(t_1) = \frac{1}{m} \lim_{\substack{t_2 \downarrow t_0 \\ t_1 \uparrow t_0}} \int_{t_1}^{t_2} \underline{p}(t)\,dt = \underline{0} \tag{5.15}$$

Samenvattend kunnen we zeggen:

de snelheid van een massapunt is een discontinue functie van de tijd als op dat massapunt een stoot wordt uitgeoefend, de positie van het massapunt daarentegen is een continue functie van de tijd; eindige krachtwerkingen hebben géén invloed op de impulsverandering tijdens stoten.

d. Botsingen van punten

Evenals aan stoten is ook aan de botsing van massapunten in het college Inleiding Mechanica reeds aandacht besteed. We volstaan hier met een kort overzicht:

Wanneer twee massapunten botsen, nemen we aan, geïnspireerd door de derde Wet van Newton dat de stoten die de beide massapunten op elkaar uitoefenen gelijk in grootte en tegengesteld van richting zijn. Bewegen de massapunten verder vrij , dus zijn ze niet in hun beweging beperkt, dan zijn de onderling uitgeoefende stoten ook de enige stoten die op de massapunten werken. Noemen we de massapunten X_1 en X_2, massa m_1 resp. m_2 en zijn $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ de snelheden juist vóór en $\underline{V}_1$ en $\underline{V}_2$ juist ná de botsing, dan geldt dus met (5.13):

$$m_1(\underline{V}_1 - \underline{v}_1) = -m_2(\underline{V}_2 - \underline{v}_2) \qquad (5.16)$$

waaruit:

$$m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 = m_1\underline{V}_1 + m_2\underline{V}_2 \,, \qquad (5.17)$$

dus:

bij de botsing van vrij bewegende massapunten blijft de impuls behouden.

In deze paragraaf zullen we ons verder beperken tot botsingen tussen massapunten die zowel voor als na de botsing langs een (dezelfde) rechte lijn bewegen. We kunnen dan ook de snelheden scalair geven zodat b.v. (5.17) wordt:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \qquad (5.18)$$

Zijn de massa's en de snelheden van beide punten **vóór de** botsing bekend, dan is (5.18) een vergelijking voor de beide snelheden na de botsing. Een tweede vergelijking voor die snelheden verkrijgen we door de aard van de botsing te beschrijven. We voeren daartoe in het begrip: botsingscoëfficiënt, aangeduid met λ, een parameter met waarden in $[0,1]$.

De bedoelde relatie luidt dan:

$$V_2 - V_1 = - \lambda(v_2 - v_1) \tag{5.19}$$

Voor $\lambda = 0$ geldt $V_2 = V_1$, we noemen de botsing dan: volkomen onelastisch.
Voor $\lambda = 1$ volgt met (5.18) eenvoudig:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \tag{5.20}$$

een relatie die tot uitdrukking brengt dat de kinetische energieën voor en na de botsing gelijk zijn; we noemen een dergelijke botsing dan ook: volkomen elastisch.
In het algemeen vinden we met (5.18) en (5.19):

$$V_1 = \frac{(m_1 - \lambda m_2) v_1 + (1 + \lambda) m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{5.21}$$

$$V_2 = \frac{(m_2 - \lambda m_1) v_2 + (1 + \lambda) m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{5.22}$$

Het energieverlies tijdens de botsing, aangeduid met $-\Delta T$ is dan:

$$-\Delta T = T_{voor} - T_{na} = \frac{1}{2}(1 - \lambda^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \tag{5.23}$$

e. Vrije en gedwongen beweging. Relatieve beweging

De beweging van een punt X in $\mathbb{R}^3$ onder invloed van de kracht $\underline{K}$, waarbij het punt niet onderhevig is aan bewegingsbeperkingen, dus vrij beweegt, wordt beheerst door de differentiaalvergelijking:

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{K}(\dot{\underline{x}}, \underline{x}, t) \tag{5.24}$$

De kracht $\underline{K}$ is hierbij een voorgeschreven, bekende functie van de variabelen tijd t, snelheid $\dot{\underline{x}}$ en positie $\underline{x}$ van het punt X.
Wordt de beweging van X door bewegingsbeperkingen verhinderd dan moet bovendien voldaan worden aan vergelijkingen van de vorm:

$$f_k(\dot{\underline{x}}, \underline{x}, t) = 0 \quad k = 1 \text{ of } k = 1 \text{ én } 2. \tag{5.25}$$

In dat geval schrijven we (5.24) in de vorm:

$$m\underline{\ddot{x}} = \underline{K}(\underline{\dot{x}},\underline{x},t) + \underline{R}(\underline{\dot{x}},\underline{x},t) \qquad (5.26)$$

waarin $\underline{K}$ het voorgeschreven, bekende deel van de kracht is en $\underline{R}$ dat deel van de kracht dat veroorzaakt wordt door de bewegingsbeperkingen. Dikwijls wordt $\underline{R}$ de reactiekracht genoemd, maar we zullen dit woord voorbehouden aan de in §4g gedefinieerde kracht en het niet in dit verband gebruiken.

Het invoeren van de kracht $\underline{R}$ is een voorbeeld van het reeds eerder beschreven principe van het vrijmaken, dat in dit geval neerkomt op het volgende:

> ga niet uit van de vergelijkingen (5.24) en (5.25) doch van (5.26) en bepaal daarbij $\underline{R}$ zodanig dat aan (5.25) wordt voldaan.

In het volgende veronderstellen we dat de functies f_k volgens (5.25) niet expliciet van de snelheid $\underline{\dot{x}}$ afhangen. We zullen de gevallen k = 1 en k = 1 of 2 afzonderlijk behandelen.

Is k = 1, dan wordt (5.25) van de vorm:

$$f(\underline{x},t) = 0, \qquad (5.27)$$

waarbij f z.d.d. (5.27) de vergelijking van een (veranderlijk) oppervlak in $\mathbb{R}^3$ voorstelt. We veronderstellen dat dit oppervlak steeds oriënteerbaar is met $\underline{n}$ als naar buiten gerichte eenheidsnormaal vector.

We noemen de verbindingsrelatie (5.27) eenzijdig als het inproduct $(\underline{R},\underline{n})$ definiet is. Bijvoorbeeld geldt voor $\underline{R} \neq \underline{0}$ voortdurend $(\underline{R},\underline{n}) \geq 0$, dus is het inproduct semi-definiet positief. Is de verbinding niet eenzijdig, dan heet hij tweezijdig.

Is het oppervlak volgens (5.27) glad, dan geldt

$$\underline{R} \times \underline{n} = \underline{0}, \text{ dus } \underline{R} = R(t)\underline{n}, \qquad (5.28)$$

waarbij R(t) bij een eenzijdige verbinding dus niet-negatief of niet-positief is als functie van t.

Is het oppervlak volgens (5.27) niet glad, dan ontbinden we $\underline{R}$ volgens:

$$\underline{R} = \underline{N} + \underline{W} \qquad (5.29)$$

waarin:

$$\underline{N} = (\underline{R},\underline{n})\underline{n} \text{ , de normaalkracht is, en} \qquad (5.30)$$

$$\underline{W} = \underline{R} - \underline{W} \text{ , de tangentiaalkracht.} \qquad (5.31)$$

In het geval dat het punt over het oppervlak beweegt o.i.v. droge (of Coulombse) wrijving, veronderstellen we het volgende verband tussen $\underline{W}$ en $\underline{N}$:

- beweegt het punt t.o.v. het oppervlak, dan geldt $|\underline{W}| = f|\underline{N}|$, waarbij de richting van $\underline{W}$ tegengesteld is aan de relatieve bewegingsrichting; (5.32)
- beweegt het punt niet t.o.v. het oppervlak, dan moet voldaan worden aan de relatie:

$$|\underline{W}| \leq f|\underline{N}| \,, \qquad f \geq 0 \tag{5.33}$$

de parameter f heet de <u>wrijvingscoëfficiënt</u>.

Is het aantal vergelijkingen (5.25) twee, k = 2, dan veronderstellen we (5.25) van de vorm:

$$\begin{aligned} f_1(\underline{x},t) &= 0 \\ f_2(\underline{x},t) &= 0, \end{aligned} \tag{5.34}$$

f_1 en f_2 z.d.d. (5.34) de vergelijking is van een (bewegende) <u>ruimtekromme</u>. De eenheidsraakvector aan deze kromme noemen we $\underline{t}$.
Is de kromme <u>glad</u>, dan geldt:

$$(\underline{R},\underline{t}) = 0 \tag{5.35}$$

Is de kromme niet glad, dan ontbinden we $\underline{R}$ opnieuw volgens (5.29), maar nu:

$$\underline{W} = (\underline{R},\underline{t})\underline{t} \tag{5.36}$$

$$\underline{N} = \underline{R} - \underline{W} \tag{5.37}$$

We noemen $\underline{N}$ en $\underline{W}$ opnieuw de normaal- en de tangentiaalkracht.
Is de kromme glad, dan geldt dus:

$$\underline{W} = \underline{0}, \tag{5.38}$$

is de kromme niet glad, maar beweegt het punt langs de kromme o.i.v. droge wrijving, dan gelden tussen $\underline{N}$ en $\underline{W}$ dezelfde relaties als in (5.32) en (5.33) zijn gegeven.

Opgave: laat zien dat in de gevallen van droge wrijving steeds voldoende vergelijkingen voor de onbekenden zijn geformuleerd.

Het laatste deel van deze paragraaf wordt besteed aan het principe van het stilzetten voor een massapunt.

We beschouwen nogmaals de bewegingsvergelijking voor een massapunt:

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{K}(\dot{\underline{x}},\underline{x},t)$$

waarin $\underline{K}$ een bekende functie is van de verschillende argumenten.
Wanneer we de beweging van het punt X opvatten als een samenstelling van relatieve- en sleepbeweging, dan kunnen we volgens vgl. (2.32) de versnelling in het rechterlid opvatten als de som van drie termen:

$$\ddot{\underline{x}} = \underline{a}_{abs} = \underline{a}_{rel} + \underline{a}_{s\ell} + \underline{a}_{cor}.$$

Als absolute beweging van X nemen we dus de beweging t.o.v. een inertiale ruimte, waarin de relatie (5.24) geldt. Dikwijls zijn we niet in de absolute maar in de relatieve beweging geïnteresseerd en we schrijven dan (5.24) met (3.32) in de vorm:

$$m\,\underline{a}_{rel} = \underline{K} - m\underline{a}_{s\ell} - m\,\underline{a}_{cor} \qquad (5.39)$$

Omdat de versneld bewegende ruimte in het algemeen geen inertiale ruimte is, geldt voor de relatieve versnelling <u>niet</u> een relatie van de vorm (5.24), maar moeten we (5.39) gebruiken.
We definiëren nu twee z.g. <u>schijnkrachten</u> volgens:

$$\underline{K}_{s\ell} = -\,m\,\underline{a}_{s\ell}\ , \quad \underline{\text{de sleepkracht}} \qquad (5.40)$$

en

$$\underline{K}_{cor} = -\,m\,\underline{a}_{cor},\ \underline{\text{de corioliskracht,}} \qquad (5.41)$$

zodat we (5.39) kunnen schrijven in de vorm:

$$m\,\underline{a}_{rel} = \underline{K} + \underline{K}_{s\ell} + \underline{K}_{cor} \qquad (5.42)$$

Een vergelijking voor $\underline{a}_{rel}$ wel van de vorm (5.24), maar niet met de kracht $\underline{K}$ maar met de som van de gegeven en de schijnkrachten.
Het is alsof we de beweging van de bewegende ruimte hebben stilgezet maar als compensatie hebben we de schijnkrachten ingevoerd. We noemen dit het <u>principe van het stilzetten</u>.
Is de beweging van de bewegende ruimte een rotatie met constante hoeksnelheid $\underline{\omega}_{s\ell}$ om een (vaste) as door de oorsprong van de inertiale, absolute ruimte, dan geldt met (2.29):

$$\underline{a}_{s\ell} = \underline{\omega}_{s\ell} \times (\underline{\omega}_{s\ell} \times \underline{x}), \qquad (5.43)$$

waarin $\underline{x}$ de positie van het punt X is.
Voor de sleepkracht volgens (5.40) vinden we:

$$\underline{K}_{s\ell} = -m\ \underline{a}_{s\ell} = -m\ \underline{\omega}_{s\ell} \times (\underline{\omega}_{s\ell} \times \underline{x}), \qquad (5.44)$$

gericht loodrecht op de draaiingsas en in grootte evenredig met de afstand van X tot de draaiingsas (Nagaan!)
De kracht $\underline{K}_{s\ell}$ volgens (5.44) heet wel de centrifugaalkracht.
Let wel: de centrifugaalkracht is een schijnkracht.

f. De vergelijkingen van Lagrange voor een massapunt

We gaan uit van de vrije beweging van een massapunt X in een inertiale ruimte. Laat X de massa m, de positie $\underline{x}$ en de snelheid $\underline{v} = \dot{\underline{x}}$ hebben en bewegen onder invloed van de kracht $\underline{K}$.
De kinetische energie T van het massapunt is:

$$T = \frac{1}{2}m\ \|\underline{v}\|^2 = \frac{1}{2}m\ (\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}}) = T(\dot{\underline{x}}) \qquad (5.45)$$

We definiëren de vector $\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}$ als de vector die op de standaardbasis de kolom $(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3})^T$ bezit.

De bewegingsvergelijking $\underline{K} = m\ \ddot{\underline{x}}$ kunnen we daarmede schrijven in de vorm:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}} = \underline{K} \qquad (5.46)$$

Als de beweging niet vrij is doch onderhevig aan bewegingsbeperkingen dan kunnen we het principe van het vrijmaken toepassen. We voeren een, nog onbekende, kracht $\underline{R}$ in en schrijven (5.46) in de vorm:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}} = \underline{K} + \underline{R} \qquad (5.47)$$

De kracht $\underline{R}$ bepalen we zodanig dat op elk tijdstip aan de bewegingsbeperkingen wordt voldaan.
Van de bewegingsbeperkingen zullen we steeds veronderstellen dat deze holonoom zijn. Afhankelijk van het aantal (onafhankelijke) bewegingsbeperkingen zijn dus steeds gegeneraliseerde coördinaten aan te geven. Zijn er geen bewegingsbeperkingen dan is aantal gegeneraliseerde coördinaten dus drie en zouden we de cartesische coördinaten x_1,x_2 en x_3 als gegeneraliseerde coördinaten mogen nemen. Dikwijls is het echter nuttig met deze cartesische coördinaten doch met andere zoals cylinder- of bolcoördinaten te werken.

In alle gevallen zal gelden dat de positievector kan worden opgevat als een functie van de gegeneraliseerde coördinaten $q_1,\dots,q_n$ en de tijd t:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\dots,q_n,t) \quad n = 1,2, \text{ of } 3 \tag{5.48}$$

Afhankelijk van n drukt (5.48) uit dat het punt X beweegt langs een (bewegende) ruimtekromme, over een (bewegend) oppervlak of in de ruimte. Voor de snelheid $\underline{v}$ van X vinden we als in (1.34)

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}, \text{ k sommeren van 1 tot en met n.} \tag{5.49}$$

Substitueren we (5.49) in (5.45), dan vatten we de kinetische energie op als een functie over de grootheden $(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,q_1,\dots,q_n,t)$.
We noteren dit als:

$$T = T(\dot{\underline{x}}) = T(\dot{\underline{x}}(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,q_1,\dots,q_n,t)) = T^*(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,q_1,\dots,q_n,t)$$

De functie $T^*: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ heeft de volgende eigenschappen:

1. $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_k} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial q_k}\right), \quad k = 1,\dots,n \tag{5.50}$$

2. $$\frac{\partial T^*}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial q_k}\right), \quad k = 1,\dots,n \tag{5.51}$$

Bewijs van 1): $\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial \dot{q}_k}\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial \dot{q}_k}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial \dot{q}_k}\right)$

(gebruik(1.40)) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_k} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\right)$

(gebruik (1.41)) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_k} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial q_k}\right)$

Eigenschap 2) volgt direct uit de definitie van T .

Uit de eigenschappen 1 en 2 volgt direct:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T^*}{\partial q_k} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{x}}}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\right), \quad k = 1,\dots,n$$

Substitueren we (5.47) in het rechterlid van deze uitdrukking, dan vinden we:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T^*}{\partial q_k} = \left(\underline{K} + \underline{R}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\right) \quad k = 1,\dots,n , \ n = 1,2 \text{ of } 3 \tag{5.52}$$

Omdat in het hier beschouwde probleem de kracht op het massapunt X gelijk is aan $\underline{K} + \underline{R}$, zouden we, met de definitie (4.35) voor de gegeneraliseerde krachten in dit geval vinden:

$$Q_K = (\underline{K} + \underline{R}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) \quad , \quad k = 1,\ldots,n \quad , \quad n = 1,2 \text{ of } 3 \tag{5.53}$$

De ingevoerde kracht $\underline{R}$ wordt dikwijls een reactiekracht genoemd, bedoeld is dan een kracht als reactie op de bewegingsbeperkingen. Omdat wij een andere definitie van reactiekracht hebben gebruikt zullen we wat nader ingaan op (5.53).
We kunnen steeds de ingevoerde kracht $\underline{R}$ ontbinden volgens:

$$\underline{R} = \underline{R}_t + \underline{R}_n \tag{5.54}$$

waarin $\underline{R}_n$ zo wordt gekozen dat voortdurend geldt:

$$(\underline{R}_n, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) = 0 \quad , \quad k = 1,\ldots,n$$

De kracht $\underline{R}_n$ is dus steeds een reactiekracht volgens de definitie §4.g. Voor $n < 3$ drukt (5.54) uit dat $\underline{R}_n$ die component is van $\underline{R}$ welke steeds loodrecht gericht is op de bewegende ruimtekromme of op het bewegende oppervlak waarlangs of waarover het massapunt beweegt. Deze normale component is dus steeds een reactiekracht en komt in de bewegingsvergelijkingen (5.52) niet voor.
De tangentiale component $\underline{R}_t$ van de ingevoerde kracht is in het algemeen een belastingskracht. In veel problemen zal de ruimtekromme of het oppervlak waarlangs of waarover X beweegt glad zijn hetgeen betekent dat gesteld wordt dat $\underline{R}_t = \underline{0}$. In dat geval is dus de kracht $\underline{R}$ een reactiekracht.
In het geval dat geen bewegingsbeperkingen aanwezig zijn, dus $n = 3$ geldt $\underline{R} = \underline{0}$, er wordt geen kracht ingevoerd. In dat geval hebben de vergelijkingen (5.52) de vorm:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T^*}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1,2,3 \tag{5.55}$$

waarbij $Q_k = (\underline{K}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k})$.

Vergelijking (5.55) is de transformatie op algemene kromlijnige coördinaten van de vergelijking (5.46) of van de vergelijking $\underline{K} = m\,\underline{\ddot{x}}$.

De vorm (5.55) van de bewegingsvergelijking is invariant voor coördinaten transformaties. Immers nemen we een andere set van coördinaten en definiëren de kinetische energie en de gegeneraliseerde krachten bij die coördinaten, dan verkrijgen we weer de bewegingsvergelijkingen in de vorm (5.55).

Wanneer de kracht $\underline{K}$ een conservatieve kracht is, bestaat er een potentiële energie $U = U(\underline{x})$ zodanig dat

$$\underline{K} = -\operatorname{grad} U(\underline{x}) \tag{5.56}$$

Definiëren we de functie van Lagrange $\mathcal{L}$ door de relatie:

$$\mathcal{L}(\underline{\dot{x}},\underline{x}) = T(\underline{\dot{x}}) - U(\underline{x}) \tag{5.57}$$

dan gaat voor het conservatieve porbleem de vergelijking (5.46) over in:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{\dot{x}}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{x}} = \underline{0} \tag{5.58}$$

Voor een massapunt onderhevig aan bewegingsbeperkingen, of voor het geval dat een coördinatentransformatie werd toegepast definiëren we de potentiële energie als een functie over de gegeneraliseerde coördinaten. We beperken ons tot het probleem waarbij nergens een expliciete afhankelijkheid van de tijd optreedt. We kunnen dan schrijven:

$$U = U(\underline{x}) = U(\underline{x}(q_1,\dots,q_n)) = U^*(q_1,\dots,q_n).$$

Met de relatie (5.56) volgt:

$$(\underline{K},\frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k}) = (-\operatorname{grad} U, \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k}) = -\frac{\partial U^*}{\partial q_k} \tag{5.59}$$

Definiëren we de functie van Lagrange $\mathcal{L}^*$ door:

$$\mathcal{L}^*(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n, q_1,\dots,q_n) = T^*(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n, q_1,\dots,q_n) - U^*(q_1,\dots,q_n)$$

dan gaat voor het conservatieve probleem de vergelijking (5.47) over in:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial q_k} = (\underline{R}, \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k}) \qquad k = 1,\dots,n \quad , n = 1,2 \text{ of } 3 \tag{5.60}$$

Is de ingevoerde kracht $\underline{R}$ een reactiekracht volgens de definitie van §4.g of zijn er geen bewegingsbeperkingen, dus $\underline{R} = \underline{0}$, dan is het rechterlid van vergelijking (5.60) nul.

Ter afsluiting van deze paragraaf maken we nog enige opmerkingen.

1. Met de definitie van reactiekrachten volgens §4.g volgt dat in alle beschouwde gevallen de reactiekrachten niet voorkomen in de vergelijkingen van Lagrange (volgens 5.52 en 5.60).

2. De kracht $\underline{R}$ die is ingevoerd als de kracht die op het massapunt werkt tengevolge van de bewegingsbeperkingen waaraan het massapunt onderhevig is, is in het algemeen geen reactiekracht.

3. De kracht $\underline{R}$ is in het algemeen, dus wanneer niet meer bekend is over de aard van de bewegingsbeperkingen, niet te bepalen, evenmin als de beweging van het massapunt. Is daarentegen de kracht $\underline{K}$ gegeven en zijn bij de ingevoerde kracht $\underline{R}$ de grootheden:

$$(\underline{R}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) \quad , \quad k = 1,\ldots,n \quad , \quad n = 1,2 \text{ of } 3$$

te bepalen dan is met de vergelijkingen (5.52) of (5.60) de beweging van het massapunt bekend en kunnen we $\underline{R}$ berekenen uit de relatie:

$$\underline{R} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \underline{\dot{x}}} - \underline{K} = m\,\underline{\ddot{x}} - \underline{K} \tag{5.61}$$

6. Systemen van massapunten

a. De basiswetten.

Hoewel massapunten in de Natuur niet voorkomen, zullen we, evenals in het vorige hoofdstuk, de nodige aandacht besteden aan deze wiskundige abstracties. Zij spelen binnen de modelvorming van mechanicaprocessen in de natuur een zeer eigen en belangrijke rol.

We onderscheiden drie systemen van puntmassa's:

1. Een systeem van massapunten, welke elkaar wel door krachten kunnen beïnvloeden, maar niet onderhevig zijn aan bewegingsbeperkingen. Het stelsel bestaat dus uit een (eindig) aantal vrije massapunten. Typische voorbeelden zijn wel de klassieke modelvormingen van planetenstelsels, of van planeten en hun manen, die bestaan uit vrij t.o.v. elkaar bewegende planeten welke elkaar onderling beïnvloeden door gravitatiekrachten.
2. Een systeem van massapunten welke elkaar door krachten kunnen beïnvloeden maar tevens onderhevig zijn aan bewegingsbeperkingen. Een typisch voorbeeld is de halter, bestaande uit twee puntmassa's, onderling verbonden door een koord of een massaloze starre staaf.
3. Het starre lichaam, opgevat als een verzameling van massapunten, die star t.o.v. elkaar bewegen en continu verdeeld zijn over een (veranderlijk) ruimtelijk gebied. Op deze wijze werd in klassieke beschouwingen het starre lichaam behandeld.

We zullen in dit hoofdstuk de gevallen 1 en 2 gezamenlijk behandelen, en aan geval 3 slechts weinig aandacht besteden, omdat we het starre lichaam apart en op een wat minder klassieke manier willen behandelen. Veel van de resultaten afgeleid voor 1 en 2 zullen echter ook blijken te gelden voor het starre lichaam.

We beschouwen een stelsel van massapunten, aangeduid met $X^{(k)}$, massa $m^{(k)}$, positie $\underline{x}^{(k)}$ en snelheid $\dot{\underline{x}}^{(k)}$, $k = 1,\ldots,m$.

De kracht die op het punt $X^{(k)}$ wordt uitgeoefend schrijven we als een som van de volgende vorm:

$$\underline{K}^{(k)} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq k}}^{m} \underline{K}^{(k,\ell)} \;, \quad k = 1,\ldots,m. \tag{6.1}$$

In deze uitdrukking heet $\underline{K}^{(k)}$ de <u>uitwendige kracht</u> op het punt $X^{(k)}$ en $\underline{K}^{(k,\ell)}$ de <u>inwendige kracht</u> op het punt $X^{(k)}$, veroorzaakt door het punt $X^{(\ell)}$. Ook de som over ℓ van de krachten $\underline{K}^{(k,\ell)}$ noemen we wel de

inwendige kracht op het punt $x^{(k)}$.
We vatten de kracht op het punt $x^{(k)}$ dus op als een som van krachten veroorzaakt door invloeden afkomstig van buiten het systeem van m massapunten (de uitwendige kracht) en een som van krachten afkomstig van invloeden van binnen het systeem van m massapunten (de inwendige kracht(en)).
Voor de inwendige krachten $\underline{K}^{(k,\ell)}$ geldt de derde Wet van Newton, zodat o.a.:

$$\underline{K}^{(k,\ell)} + \underline{K}^{(\ell,k)} = \underline{0} \quad k \neq \ell \tag{6.2}$$

Om het schrijfwerk wat te vereenvoudigen definiëren we:

$$\underline{K}^{(k,k)} = \underline{0}\,, \quad k = 1,\ldots,m, \text{ (niet sommeren!)} \tag{6.3}$$

De bewegingsvergelijking voor het punt $x^{(k)}$ is nu:

$$m^{(k)}\,\ddot{\underline{x}}^{(k)} = \underline{K}^{(k)} + \sum_{\ell=1}^{m} \underline{K}^{(k,\ell)} \tag{6.4}$$

Sommeren we deze vergelijkingen over k, en maken daarbij gebruik van de relatie:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} \underline{K}^{(k,\ell)} = \underline{0}, \quad \text{(nagaan!)} \tag{6.5}$$

dan vinden we:

$$\sum_{k=1}^{m} m^{(k)}\ddot{\underline{x}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \underline{K}^{(k)}\,, \tag{6.6}$$

waarin dus het rechterlid de som is van de uitwendige krachten die op het systeem van m massapunten worden uitgeoefend.
De totale massa van het systeem, aangeduid met m is:

$$m = \sum_{k=1}^{m} m^{(k)}\,, \quad \text{(zie 1.23)} \tag{6.7}$$

de positie van het massamiddelpunt $\underline{x}_0$ is bepaald door:

$$m\,\underline{x}_0 = \sum_{k=1}^{m} m^{(k)}\underline{x}^{(k)} \quad \text{(zie 1.28)} \tag{6.8}$$

en de impuls $\underline{p}$ van het systeem door:

$$\underline{p} = \sum_{k=1}^{m} m^{(k)} \, \dot{\underline{x}}^{(k)} \qquad \text{(zie 3.1)} \tag{6.9}$$

Noemen we $\underline{K}$, gedefinieerd door:

$$\underline{K} = \sum_{k=1}^{m} \underline{K}^{(k)} \, , \tag{6.10}$$

de <u>resulterende uitwendige kracht</u> op het systeem, dan kunnen we (6.6) schrijven in de vorm:

$$\dot{\underline{p}} = m \, \ddot{\underline{x}}_0 = \underline{K} \tag{6.11}$$

In woorden: het massamiddelpunt van een stelsel massapunten beweegt als een massapunt, waarvan de massa gelijk is aan de totale massa van het systeem, onder invloed van de resulterende uitwendige kracht.

De boven afgeleide stelling heet de <u>zwaartepuntsstelling</u> voor een systeem van massapunten.

Een tweede belangrijke stelling kunnen we op de volgende wijze afleiden: Beschouw nogmaals vergelijking (6.4). Voorvermenigvuldigen met $\underline{x}^{(k)}$ levert:

$$\underline{x}^{(k)} \times m^{(k)} \, \ddot{\underline{x}}^{(k)} = \underline{x}^{(k)} \times \underline{K}^{(k)} + \underline{x}^{(k)} \times \sum_{\ell=1}^{m} \underline{K}^{(k,\ell)} \tag{6.12}$$

Een tweede gevolg van de derde Wet van Newton is:

$$\underline{x}^{(k)} \times \underline{K}^{(k,\ell)} + \underline{x}^{(\ell)} \times \underline{K}^{(k,\ell)} = \underline{0} \qquad \text{(zie §5.a)} \tag{6.13}$$

Sommeren we de vergelijkingen (6.12) over k en maken gebruik van de relatie:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} \underline{x}^{(k)} \times \underline{K}^{(k,\ell)} = \underline{0} \, , \quad \text{(nagaan!)} \tag{6.14}$$

dan vinden we:

$$\sum_{k=1}^{m} \underline{x}^{(k)} \times m^{(k)} \, \ddot{\underline{x}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \underline{x}^{(k)} \times \underline{K}^{(k)} \tag{6.15}$$

Het impulsmoment $\underline{D}$, betrokken op de oorsprong, van een stelsel massapunten is:

$$\underline{D} = \sum_{k=1}^{m} \underline{x}^{(k)} \times m^{(k)} \, \underline{\dot{x}}^{(k)} \quad , \text{ (zie 3.5)}, \tag{6.16}$$

waaruit eenvoudig volgt:

$$\underline{\dot{D}} = \sum_{k=1}^{m} \underline{\dot{x}}^{(k)} \times m^{(k)} \, \underline{\dot{x}}^{(k)} + \sum_{k=1}^{m} \underline{x}^{(k)} \times m^{(k)} \, \underline{\ddot{x}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \underline{x}^{(k)} \times m^{(k)} \, \underline{\ddot{x}}^{(k)} \tag{6.17}$$

Het moment $\underline{M}$, betrokken op de oorsprong, van een stelsel krachten is:

$$\underline{M} = \sum_{k=1}^{m} \underline{x}^{(k)} \times \underline{K}^{(k)} \quad , \text{ (zie 4.1)}, \tag{6.18}$$

We noemen dit moment wel het resulterende moment betrokken op de oorsprong van de uitwendige krachten, of kortweg: het <u>resulterende moment</u>.
Met (6.17) en (6.18) kunnen we (6.16) schrijven in de vorm:

$$\underline{\dot{D}} = \underline{M} \tag{6.19}$$

In woorden: de verandering per tijdseenheid van het impulsmoment is gelijk aan het resulterende moment.

Hadden we voor de bepaling van het impulsmoment en het resulterende moment niet de oorsprong, maar een willekeurig punt R met (veranderlijke) positie $\underline{r}(t)$ genomen, dan:

$$\underline{D}_R = \sum_{k=1}^{m} (\underline{x}^{(k)} - \underline{r}) \times m^{(k)} \, \underline{\dot{x}}^{(k)} = \underline{D} - \underline{r} \times \underline{p} \quad , \text{ (zie 3.6)} \tag{6.20}$$

Op dezelfde wijze:

$$\underline{M}_R = \sum_{k=1}^{m} (\underline{x}^{(k)} - \underline{r}) \times \underline{K}^{(k)} = \underline{M} - \underline{r} \times \underline{K} \tag{6.21}$$

waarbij $\underline{K}$ volgens (6.10).

We vinden:

$$\underline{\dot{D}}_R - \underline{M}_R = \underline{\dot{D}} - \underline{\dot{r}} \times \underline{p} - \underline{r} \times \underline{\dot{p}} - \underline{M} + \underline{r} \times \underline{K} = -\underline{\dot{r}} \times m \, \underline{\dot{x}}_0 \tag{6.22}$$

In het algemeen is de verandering per tijdseenheid van het impulsmoment om een punt <u>niet</u> gelijk aan het moment van de uitwendige krachten betrokken op dat punt.
Drie belangrijke uitzonderingen zijn:

1. Het punt R is in rust: $\dot{\underline{r}} = \underline{0}$
2. Het punt R valt samen met het massamiddelpunt: $\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{x}}_0$
3. Het punt R beweegt in dezelfde richting als het massamiddelpunt: $\dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{x}}_0 = \underline{0}$.

De zwaartepuntsstelling en de momentenstelling zijn afgeleid zowel voor geval 1 als voor geval 2. Voor geval 1 is dat zonder meer duidelijk, voor geval 2 volgt dit uit de volgende beschouwing:

we vervangen de verbindingen die in het systeem aanwezig zijn door krachten en momenten in te voeren met het principe van het vrijmaken; we nemen dan de som van deze krachten en de som van de koppels en de momenten op in de resulterende kracht en het resulterende moment en gebruiken dan met de opnieuw gedefinieerde resulterende kracht en het resulterende moment de afgeleide stellingen.

De beide stellingen leveren twee (vector)vergelijkingen voor de beweging van het systeem van massapunten; ze zijn in het algemeen dan ook niet voldoende om de beweging van het systeem te beschrijven. Alleen voor geval 3, een star lichaam, waarvan de beweging wordt beschreven door de snelheid van het massamiddelpunt en de hoeksnelheid zouden de vergelijkingen juist voldoende zijn. We zullen echter, in het volgende hoofdstuk, het starre lichaam apart behandelen. Beweegt het systeem van massapunten als een star stelsel, b.v. een starre halter dan geven de beide vergelijkingen (6.11) en (6.19) voldoende informatie voor de beweging van het starre stelsel.

b. Het principe van d'Alembert voor massapunten

Het principe van d'Alembert is in de mechanica een postulaat, dat met zeer veel succes kan worden gebruikt. Het principe kan als uitgangspunt worden genomen in plaats van de wetten van Newton.

In deze paragraaf zullen we het principe van d'Alembert beschrijven voor een systeem van massapunten.

We beschouwen een systeem van m massapunten $X^{(k)}$, $k = 1,\ldots,m$, massa $m^{(k)}$, positie $\underline{x}^{(k)}$. We veronderstellen dat het systeem n graden van vrijheid heeft, met $q_1,\ldots,q_n$ als gegeneraliseerde coördinaten. De kracht op het punt $X^{(k)}$ duiden we aan met $\underline{K}_t^{(k)}$, de totale kracht op $X^{(k)}$, welke we volgens (6.1) zouden kunnen schrijven als:

$$\underline{K}_t^{(k)} = \underline{K}^{(k)} + \sum_{\ell=1}^{m} \underline{K}^{(k,\ell)} \tag{6.23}$$

De kracht $\underline{K}_t^{(k)}$ kan ook worden opgevat als de vorm van de belastingkracht $\underline{K}_b^{(k)}$ en de reactiekracht $\underline{K}_r^{(k)}$ zoals beschreven in §4.g. Noemen we $\delta\,\underline{x}^{(k)}$ de virtuele verplaatsing van $X^{(k)}$, gedefinieerd volgens (1.37) dan geldt dus per definitie:

$$(\underline{K}_r^{(k)}, \delta\,\underline{x}^{(k)}) = 0\ ,\ k = 1,\ldots,m \qquad \text{(zie 4.42)} \tag{6.24}$$

voor $\delta\,\underline{x}^{(k)}$ volgens (1.37)

terwijl $$\sum_{k=1}^{m} (\underline{K}_r^{(k)}, \delta\,\underline{x}_0) = 0, \qquad \text{(zie (1.42))} \tag{6.24^1}$$

en $$\sum_{K=1}^{m} (\underline{x}^{(k)} \times \underline{K}_r^{(k)}, \underline{e} \times \underline{x}^{(k)})\delta\varphi = 0. \qquad \text{(zie (1.43))} \tag{6.24^2}$$

Het principe van d'Alembert postuleert nu voor het bovenbeschreven systeem van massapunten:

$$\sum_{k=1}^{m} (\underline{K}_b^{(k)} - m^{(k)}\,\ddot{\underline{x}}^{(k)}, \delta\,\underline{x}^{(k)}) = 0 \tag{6.25}$$

voor alle virtuele verplaatsingen $\delta\,\underline{x}^{(k)}$, $k = 1,\ldots,m$.
Deze virtuele verplaastingen kunnen samenhangen met de n van elkaar onafhankelijke veranderingen δq_ℓ , $\ell = 1,\ldots,n$, volgens (1.37) zodat:

$$\delta\,\underline{x}^{(k)} = \frac{\partial \underline{x}^{(k)}}{\partial q_\ell}\,\delta\,q_\ell \tag{6.26}$$

Omdat de virtuele veranderingen δq_ℓ , $\ell = 1,\ldots,n$, onafhankelijk van elkaar zijn, verkrijgen we met (6.25) een stelsel van n vergelijkingen van de vorm:

$$\sum_{k=1}^{m} (\underline{K}_b^{(k)} - m^{(k)}\,\ddot{\underline{x}}^{(k)}, \frac{\partial \underline{x}^{(k)}}{\partial q_\ell}) = 0,\ \ell = 1,\ldots,n \tag{6.27}$$

c. De vergelijkingen van Lagrange voor een systeem van massapunten

Beschouwen we nogmaals het systeem van m massapunten beschreven in de vorige paragraaf.
De kinetische energie T van het stelsel is:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} m^{(k)} \ (\underline{\dot{x}}^{(k)}, \underline{\dot{x}}^{(k)}) \tag{6.28}$$

Definiëren we $T^{(k)}$ als de kinetische energie van het punt $X^{(k)}$, dan geldt dus:

$$T = \sum_{k=1}^{m} T^{(k)} \quad , \quad T^{(k)} = \frac{1}{2} m^{(k)} \ (\underline{\dot{x}}^{(k)}, \underline{\dot{x}}^{(k)}) \tag{6.29}$$

Op dezelfde wijze als in §5.f kunnen we voor $T^{(k)}$, opgevat als functie van de variabelen $(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n, q_1,\ldots,q_n,t)$, bij een beweging afleiden:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(k)}}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\ell} = (\underline{K}_b^{(k)}, \frac{\partial \underline{x}^{(k)}}{\partial q_\ell}) \quad , \ \ell = 1,\ldots,n, \tag{6.30}$$

waarbij de aanduiding * is weggelaten.
In dit geval verkrijgen we voor de gegeneraliseerde kracht Q_ℓ:

$$Q_\ell = \sum_{k=1}^{m} (\underline{K}_b^{(k)}, \frac{\partial \underline{x}^{(k)}}{\partial q_\ell}) \quad , \quad \ell = 1,\ldots,n \tag{6.31}$$

Na sommatie over k en gebruikmaking van (6.28) en (6.29): volgt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial T}{\partial q_\ell} = Q_\ell \quad , \ \ell = 1,\ldots,n \tag{6.32}$$

de vergelijkingen van Lagrange voor een systeem van massapunten.
Zijn de belastingkrachten konservatief, dan geldt, met $\mathcal{L} = T - U$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\ell} = 0, \ \ell = 1,\ldots,n \tag{6.33}$$

Bovenstaande afleiding is zoals in §5.f gebaseerd op de Wetten van Newton voor de puntmechanica.

Opgave: 1. Laat zien hoe uit het principe van d'Alembert volgens (6.25) de zwaartepuntsstelling (6.11) en de momentenstelling (6.19) volgen; gebruik daarbij (1.42) en (1.43).

Opgave: 2. Laat zien hoe uit het principe van d'Alembert voor het holonome geval volgens (6.27) de vergelijkingen van Lagrange volgens (6.32) volgen; gebruik daarbij (6.28) en (6.29).

7. Het starre lichaam en het systeem van starre lichamen

a. Het principe van d'Alembert

De bewegingsvergelijkingen van een star lichaam, of een systeem van starre lichamen, zullen we afleiden uitgaande van het principe van d'Alembert. Het principe van d'Alembert is als uitgangspunt te vergelijken met het stelsel wetten van Newton, de axioma's van de puntmechanica. Het principe is echter ruimer geldig en kan ook gebruik worden voor stelsels waarvan de elementen een ruimtelijke uitgestrektheid bezitten, met een min of meer continue massaverdeling.

We gaan uit een mechanisch stelsel $\mathcal{L}$. We veronderstellen de massa over $\mathcal{L}$ verdeeld zodat we een massadichtheid, aangegeven met ρ kunnen definiëren als in §1.d. De invloed op de beweging van het stelsel zullen we evenals de massa verdeeld nemen.
In dit college beperken we ons tot het geval dat deze verdeelde invloed kan worden uitgedrukt in een krachtdichtheid $\underline{k}$. Zij X een element (punt) van $\mathcal{L}$ met positie $\underline{x}$, dan is de krachtdichtheid in het algemeen een functie over $\underline{x} \in V$, waarin V het ruimtelijk gebied is dat door elementen van $\mathcal{L}$ wordt bezet. De krachtdichtheid zullen we, als in §4.g, opvatten als een som:

$$\underline{k} = \underline{k}^{(b)} + \underline{k}^{(r)} \,, \tag{7.1}$$

waarin:

$\underline{k}^{(b)}$ de belastingkrachtdichtheid en
$\underline{k}^{(r)}$ de reactiekrachtdichtheid is.

Voor de reactiekrachtdichtheid geldt, per definitie,:

$$\int_V (\underline{k}^{(r)}, \delta\underline{x})\, dV = \underline{0} \quad , \text{ voor alle } \delta\underline{x} \tag{7.2}$$

Opgave: laat zien dat voor een <u>vrij stelsel</u> $\mathcal{L}$, waarvoor dus de virtuele verplaatsingen (1.42) en (1.43) mogelijk zijn, geldt:

1) $$\int_V \underline{k}^{(r)} dV = \underline{0} \tag{7.3}$$

2) $$\int_V \underline{x} \times \underline{k}^{(r)} dV = \underline{0} \tag{7.4}$$

Het principe van d'Alembert kunnen we nu voor het stelsel $\mathcal{L}$ op de volgende wijze formuleren:

$$\int_V (\underline{k}^{(b)} - \frac{d}{dt} \rho \dot{\underline{x}}, \delta \underline{x}) dV = 0 \;, \quad \text{voor alle } \delta\underline{x} \tag{7.5}$$

waarbij $\dot{\underline{x}}$ de snelheid van X is, dus $\underline{x}$ wordt gemeten vanuit een vaste oorsprong.

Nemen we voor het stelsel $\mathcal{L}$ een star lichaam $\mathcal{B}$, dan volgt, met de definitie, eenvoudig dat de massadichtheid ρ een, in de tijd, constante is. Voor een star lichaam luidt het principe van d'Alembert dan ook:

$$\int_V (\underline{k}^{(b)} - \rho \, \ddot{\underline{x}}, \delta\underline{x}) dV = 0 \;, \quad \text{voor alle } \delta\underline{x} \tag{7.6}$$

We herinneren er nog aan dat voor een star lichaam $\mathcal{B}$, dat beweegt met hoeksnelheid $\underline{\omega}$ en massamiddelpuntssnelheid $\underline{v}_0$, waarbij $\underline{x}_0$ de positie van het massamiddelpunt is, de snelheidsverdeling is:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_0) \tag{7.7}$$

definiëren we, als voorheen,:

$$\underline{y} = \underline{x} - \underline{x}_0, \tag{7.8}$$

en bedenken we dat $\underline{v}_0 = \dot{\underline{x}}_0$, dan volgt met (7.7) dus:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{\omega} \times \underline{y}$$

Voor de versnellingsverdeling over $\mathcal{B}$ vinden we:

$$\ddot{\underline{x}} = \ddot{\underline{x}}_0 + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{y} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y}); \tag{7.9}$$

omdat $\underline{y}$ de positie van X t.o.v. het massamiddelpunt is geldt nog:

$$\int_V \rho \, \underline{y} \, dV = \underline{0} \tag{7.10}$$

De formules (7.7) t/m (7.10) zijn alle in eerder behandelde hoofdstukken aan de orde geweest.

b. De zwaartepuntsstelling voor het starre lichaam

We beschouwen een star lichaam $\mathcal{B}$ als in paragraaf a. Uitgaande van de formulering van het principe van d'Alembert volgens (7.6) verkrijgen we in het geval dat $\mathcal{B}$ eén vrij (of vrijgemaakt!) star lichaam is, met de variatie $\delta\underline{x} = \delta\underline{x}_0$ volgens (1.42), dus een virtuele verplaatsing uniform over $\mathcal{B}$:

$$(\int_V (\underline{k}^{(b)} - \rho\ddot{\underline{x}})dV,\ \delta\underline{x}_0) = 0\ ,\ \text{voor alle } \delta\underline{x}_0. \tag{7.11}$$

(Men zou b.v. voor $\delta\underline{x}_0$ drie onderling onafhankelijke verplaatsingen van het massamiddelpunt kunnen nemen).

Uit (7.11) volgt onmiddellijk:

$$\int_V \underline{k}^{(b)}dV = \int_V \rho\ddot{\underline{x}}\ dV \tag{7.12}$$

Definiëren we:

$$\underline{K}^{(b)} = \int_V \underline{k}^{(b)}dV,\ \text{de resulterende belastingkracht,} \tag{7.13}$$

en gebruiken we (7.9) en (7.10) om het rechterlid van (7.12) te herschrijven:

$$\int_V \rho\ddot{\underline{x}}dV = \int_V \rho\{\ddot{\underline{x}}_0 + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{y} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})\}dV = m\ddot{\underline{x}}_0, \tag{7.14}$$

waarin m de massa van B is, dan kunnen we (7.12) schrijven in de vorm:

$$\underline{K}^{(b)} = m\ \ddot{\underline{x}}_0 \tag{7.15}$$

Deze relatie noemen we de zwaartepuntsstelling. Zij drukt uit dat het massamiddelpunt van een star lichaam o.i.v. de resulterende belastingkracht beweegt als een massapunt waarvan de massa die van het lichaam is.

Met (3.4) volgt voor de impuls $\underline{p}$ van het starre lichaam $\mathcal{B}$ uit (7.5).

$$\underline{K}^{(b)} = \dot{\underline{p}} \tag{7.16}$$

c. De momentenstelling voor het starre lichaam

We beschouwen opnieuw een star lichaam $\mathcal{B}$ als in paragraaf a. In het geval dat $\mathcal{B}$ vrij (of vrijgemaakt) is, kunnen we voor de virtuele verplaatsing $\delta\underline{x}$ nemen die volgens (1.43). Substitutie in het principe van d'Alembert levert met (7.6):

$$\int_V (\underline{k}^{(b)} - \rho\ddot{\underline{x}},\ \underline{e} \times \underline{x})\,dV\ \delta\varphi = 0 \quad \text{, voor alle } \underline{e} \text{ en } \delta\varphi\ . \tag{7.17}$$

Eenvoudig volgt uit (7.17) (neem voor $\underline{e}$ achtereenvolgens drie onafhankelijke eenheidsvectoren):

$$\int_V \underline{x} \times \underline{k}^{(b)}\,dV = \int_V \rho\underline{x} \times \ddot{\underline{x}}\,dV \tag{7.18}$$

We definiëren het moment van de belastingkrachtdichtheid om 0 door:

$$\underline{M}^{(b)} = \int_V \underline{x} \times \underline{k}^{(b)}\,dV \tag{7.19}$$

Voor het rechterlid van (7.18) kunnen we met (3.12) schrijven:

$$\int_V \rho\underline{x} \times \ddot{\underline{x}}\,dV = J_0\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0\underline{\omega} + \underline{x}_0 \times m\ddot{\underline{x}}_0 \quad \text{(zie het bewijs na (7.22))} \tag{7.20}$$

zodat we voor (7.28), met gebruikmaking van (7.15) kunnen schrijven:

$$\underline{M}^{(b)} - \underline{x}_0 \times \underline{K}^{(b)} = J_0\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0\underline{\omega} \tag{7.21}$$

Het linkerlid van (7.21) is juist de uitdrukking voor het moment van de belastingkrachtdichtheid betrokken op het massamiddelpunt, aangeduid met $\underline{M}_0^{(b)}$, immers:

$$\underline{M}_0^{(b)} = \int_V (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{k}^{(b)}\,dV = \int_V \underline{x} \times \underline{k}^{(b)}\,dV - \underline{x}_0 \times \int_V \underline{k}^{(b)}\,dV, \tag{7.21}$$

$$= \underline{M}^{(b)} - \underline{x}_0 \times \underline{K}^{(b)}$$

zodat we hebben afgeleid:

$$\underline{M}_0^{(b)} = J_0\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0\underline{\omega}, \quad \underline{\text{de momentenstelling}}.$$

Bewijs van (7.20):

$$\int_V \rho \underline{x} \times \underline{\ddot{x}} dV = \int_V (\underline{x}_0 + \underline{y}) \times \{\underline{\ddot{x}}_0 + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{y} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})\} \rho dV$$

$$= \underline{x}_0 \times \underline{\ddot{x}}_0 \int_V \rho dV + \underline{x}_0 \times (\underline{\dot{\omega}} \times \int_V \rho \underline{y} dV) + \underline{x}_0 \times (\underline{\omega} \times \int_V \rho \underline{y} dV))$$

$$- \underline{\ddot{x}}_0 \times \int_V \rho \underline{y} dV + \int_V \rho \underline{y} \times (\underline{\dot{\omega}} \times \underline{y}) dV + \int_V \rho \underline{y} \times (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})) dV$$

$$= \underline{x}_0 \times m\, \underline{\ddot{x}}_0 + J_0 \underline{\dot{\omega}} + \int_V \rho\, \underline{y} \times (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})) dV$$

bedenken we:

$$\underline{y} \times (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})) = (\underline{\omega}, \underline{y})\ \underline{y} \times \underline{\omega} - (\underline{\omega}, \underline{\omega})\ \underline{y} \times \underline{y}$$

én:

$$\underline{\omega} \times (\underline{y} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})) = (\underline{y}, \underline{y})\ \underline{\omega} \times \omega - (\underline{y}, \underline{\omega})\ \underline{\omega} \times \underline{y}$$

zodat:

$$\underline{y} \times (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y})) = \underline{\omega} \times (\underline{y} \times (\underline{\omega} \times \underline{y}))$$

dan volgt:

$$\int_V \rho \underline{x} \times \underline{\ddot{x}}\, dV = \underline{x}_0 \times m\, \underline{\ddot{x}}_0 + J_0 \underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0 \underline{\omega}$$

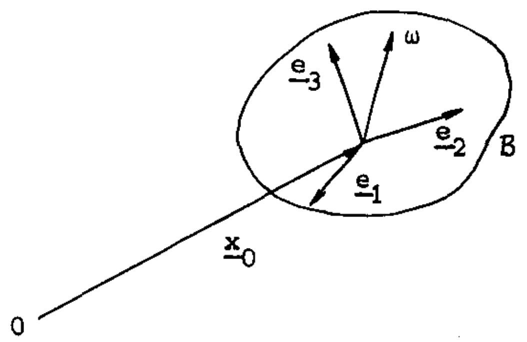
Evenals we in (7.16) een verband hebben gelegd tussen de resulterende belastingkracht en de verandering per tijdseenheid van de impuls, willen we met (7.22) een verband leggen tussen het resulterende belastingmoment betrokken op het massamiddelpunt $\underline{M}_0^{(b)}$ en de verandering per tijdseenheid van het impulsmoment betrokken op het massamiddelpunt $\underline{\dot{D}}_0$.
We bewijzen daartoe:

met $\quad \underline{D}_0 = J_0 \underline{\omega}$ volgt

$$\underline{\dot{D}}_0 = J_0 \underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0 \underline{\omega} \tag{7.23}$$

Bewijs van (7.23).

We ontbinden $\underline{D}_0$ op een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$, $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, bestaande uit vectoren met het massamiddelpunt als oorsprong en meebewegend met het lichaam $\mathcal{B}$, dus $\underline{e}_k = \underline{e}_k(t)$, $k = 1,2,3$.



Vatten we $\underline{x}_0 + \underline{e}_k$ op als de positie van een element van B, dan is de snelheid van dat punt $\dot{\underline{x}}_0 + \dot{\underline{e}}_k$. Met (2.17) volgt dan:

$$\dot{\underline{x}}_0 = \dot{\underline{e}}_k = \dot{\underline{x}}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{x}_0 + \underline{e}_k - \underline{x}_0)$$

zodat:

$$\dot{\underline{e}}_k = \underline{\omega} \times \underline{e}_k \quad , \quad k = 1,2,3. \tag{7.24}$$

Ontbinden we $\underline{D}_0$ op de basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ dan verkrijgen we:

$$\underline{D}_0 = (\underline{D}_0, \underline{e}_k)\underline{e}_k = D_{0k}\underline{e}_k = I_{0k\ell}\omega_\ell \, \underline{e}_k \quad \text{(met (3.19)} \tag{7.25}$$

Met de definitie (3.18) volgt eenvoudig dat de massatraagheidsgrootheden $I_{ok\ell}$, betrokken op een met het lichaam meebewegende basis, evenals de massa van het lichaam, constant zijn, zodat bij differentiatie van (7.25) volgt:

$$\dot{\underline{D}}_0 = I_{0k\ell}\dot{\omega}_\ell\underline{e}_k + \underline{\omega} \times I_{0k\ell}\omega_\ell\underline{e}_k \tag{7.26}$$

Bedenken we nog:

$$\dot{\underline{\omega}} = \frac{d}{dt}\,\omega_\ell\underline{e}_\ell = \dot{\omega}_\ell\underline{e}_\ell + \omega_\ell\dot{\underline{e}}_\ell = \dot{\omega}_\ell\underline{e}_\ell + \underline{\omega} \times \omega_\ell\underline{e}_\ell = \dot{\omega}_\ell\underline{e}_\ell,$$

dan volgt, door (7.25) (terug) te gebruiken, met (7.26):

$$\dot{\underline{D}}_0 = J_0\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0\underline{\omega} \tag{7.23}$$

Naar analogie van de ontbinding van de absolute snelheid van een punt in relatieve- en sleepsnelheid, schrijven we (7.23) wel in de vorm:

$$\dot{\underline{D}}_0 = \dot{\underline{D}}_{0rel} + \underline{\omega} \times \underline{D}_0 \tag{7.27}$$

$\dot{\underline{D}}_{0rel}$ is dan de verandering per tijdseenheid van $\underline{D}_0$ t.o.v. de bewegende basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, die ontstaat door de verandering van de componenten van de hoeksnelheid $\underline{\omega}$ betrokken op die basis.

Substitueren we (7.23) in (7.22), dan verkrijgen we:

$$\underline{M}_0^{(b)} = \dot{\underline{D}}_0^{(b)} \tag{7.28}$$

Het resulterende belastingmoment betrokken op het massamiddelpunt is gelijk aan de verandering per tijdseenheid van het impulsmoment betrokken op dat punt.

Evenals we dat gedaan hebben voor een stelsel van massapunten, willen we ook voor het starre lichaam een relatie afleiden voor het resulterende belastingsmoment en het impulsmoment, beide betrokken op een willekeurig, eventueel bewegend, punt.

Zij $R \in \mathbb{R}^3$ een punt met positie $\underline{r}$ en snelheid $\dot{\underline{r}}$.

Het resulterende belastingsmoment $\underline{M}_r^{(b)}$, betrokken op R is:

$$\underline{M}_R^{(b)} = \int_V (\underline{x} - \underline{r}) \times \underline{k}^{(b)} dV = \int_V (\underline{x} - \underline{x}_0 + \underline{x}_0 - \underline{r}) \times \underline{k}^{(b)} dV$$

$$= \underline{M}_0^{(b)} + (\underline{x}_0 - \underline{r}) \times \underline{K}^{(b)}, \tag{7.29}$$

het impulsmoment $\underline{D}_R$ betrokken op R is, volgens (3.6):

$$\underline{D}_R = \underline{D}_0 + (\underline{x}_0 - \underline{r}) \times \underline{p}, \tag{7.30}$$

waaruit door differentiatie volgt:

$$\dot{\underline{D}}_R = \dot{\underline{D}}_0 + (\underline{x}_0 - \underline{r}) \times \dot{\underline{p}} + \dot{\underline{x}}_0 \times \underline{p} - \dot{\underline{r}} \times \underline{p}$$

$$= \underline{M}_0^{(b)} + (\underline{x}_0 - \underline{r}) \times \underline{K}^{(b)} - m\dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{x}}_0 \tag{7.31}$$

volgens: (7.16), (7.28) en (3.4)

De relatie (7.31) en (7.29) kunnen we daarmede schrijven in de vorm:

$$\dot{\underline{D}}_R - \underline{M}_R^{(b)} = - m\, \dot{\underline{r}} \times \underline{p} \tag{7.32}$$

analoog met (6.22).

Ook nu weer geldt:

in het algemeen is de verandering per tijdseenheid van het impulsmoment niet gelijk aan het resulterende belastingmoment, drie belangrijke uitzonderingen zijn:

1. het punt R is een vast punt: $\dot{\underline{r}} = \underline{0}$
2. het punt R valt voortdurend samen met massamiddelpunt: $\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{x}}_0$
3. het punt R beweegt in dezelfde richting als het massamiddelpunt: $\dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{x}}_0 = \underline{0}$

Ter afsluiting van deze paragraaf merken we het volgende op:

Zoals uit 1.e blijkt is de beweging van een star lichaam op te vatten als een samengestelde beweging bestaande uit een translatie en een rotatie. De translatie is bepaald door de beweging van het massamiddelpunt, waarvoor de snelheid van dat punt karakteristiek is; de rotatie is de beweging t.o.v. het massamiddelpunt met de hoeksnelheid als karakteristieke grootheid.

De zwaartepuntsstelling en de momentenstelling geven ons twee differentiaalvergelijkingen voor deze twee grootheden, zodat de beweging van het starre lichaam daarmede volledig is bepaald.

d. Het systeem van starre lichamen. Vrijmaken

Als een mechanisch stelsel uit meerdere starre lichamen bestaat, is de beweging van elk lichaam bepaald door de zwaartepuntsstelling en de momentenstelling voor elk lichaam afzonderlijk te gebruiken. Het probleem is echter dat dan de resulterende kracht en het resulterende moment op elk lichaam door de i.h.a. aanwezige verbindingsrelaties onbekend zijn. Een methode om deze moeilijkheid het hoofd te bieden levert ons weer het principe van het vrijmaken.

Voor een star lichaam, opgevat als deel van een mechanisch stelsel, komt deze methode op het volgende neer:

We houden aanvankelijk géén rekening met de bewegingsbeperkingen die aan het lichaam zijn opgelegd, maar voeren krachten en momenten in die door de bewegingsbeperkingen worden veroorzaakt. Voor deze grootheden gebruiken we opnieuw de relatie: "Actie ie Reactie" voor de onderlinge beïnvloeding van twee lichamen. De ingevoerde krachten en momenten nemen we op in de resulterende kracht en het resulterende moment betrokken b.v. op het massamiddelpunt van het lichaam. De beweging van het starre lichaam is nu bepaald door de zwaartepuntsstelling en de momentenstelling. Aan deze beweging leggen we dan de voorwaarde op dat hij in overeenstemming is met de bewegingsbeperkingen.

Een typisch voorbeeld van deze methode beschrijven we in de volgende paragraaf.

We gaan in het volgende wat nader de zwaartepuntsstelling en de momentenstelling in.

De relaties

$$\underline{K}^{(b)} = m\,\ddot{\underline{x}}_0 = \dot{\underline{p}} \tag{7.33}$$

en

$$\underline{M}_0^{(b)} = J_0\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0\underline{\omega} = \dot{\underline{D}}_0 \tag{7.34}$$

zijn afgeleid voor een vrij star lichaam, dat dus niet aan bewegingsbeperkingen onderhevig is. Deze situatie doet zich dus o.a. voor bij de bovenbeschreven methode ná het vrijmaken.

Het zal duidelijk zijn dat <u>elke</u> infinitesimale verplaatsing van een vrij lichaam tevens een virtuele verplaatsing van dat lichaam is.

Dit betekent dan ook dat geldt:

$$\underline{K}^{(b)} = \int_V \underline{k}^{(b)}dV = \int_V (\underline{k}^{(b)} + \underline{k}^{(r)})dV = \int_V \underline{k}\,dV =: \underline{K} \text{ \underline{de kracht op } } \mathcal{B} \tag{7.35}$$

omdat in dit geval: $\int_V \underline{k}^{(r)}dV = \underline{0}$, zoals volgt uit (7.3), en:

$$\underline{M}_0^{(b)} = \int_V (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{k}^{(b)}dV = \int_V (\underline{x} - \underline{x}_0) \times (\underline{k}^{(b)} + \underline{k}^{(r)})dV = \underline{M}_0 \tag{7.36}$$

waarin $\underline{M}_0$ het <u>moment betrokken op het massamiddelpunt</u> dat werkt op $\mathcal{B}$ is immers:

$$\int_V (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{k}^{(r)}dV = \underline{0}, \text{ zoals volgt uit (7.2) en (7.3).}$$

Omdat we bij de methode van het vrijmaken aanvankelijk de bewegingsbeperkingen veronachtzamen moeten we bij het opstellen van de bewegingsbeperkingen in de zwaartepuntsstelling werken met $\underline{K}$ (op te vatten als de som van de oorspronkelijke belastingkracht op het lichaam en de resulterende van de ingevoerde krachten) en in de momentenstelling met $\underline{M}_0$

(op te vatten als de som van het oorspronkelijke belastingmoment op het lichaam en het resulterende moment van de ingevoerde koppels en momenten).
Dus:

> de ingevoerde krachten en momenten zijn, voor het gehele systeem van starre lichamen, reactiegrootheden, maar bij de beschrijving van de beweging van elk lichaam afzonderlijk moeten ze worden opgevat als belastinggrootheden.

e. Rotatie van een star lichaam om een vast punt

We beschouwen een star lichaam $\mathcal{B}$, dat vrij kan roteren om een vast punt dat óf tot $\mathcal{B}$ behoort, óf star met $\mathcal{B}$ is verbonden. Voor de positiebepaling van $\mathcal{B}$ kiezen we de oorsprong 0 in het vaste punt.
Ten gevolge van de bewegingsbeperking die $\mathcal{B}$ in 0 ondervindt is het aantal graden van vrijheid drie. De beweging van $\mathcal{B}$ wordt volledig beschreven door de hoeksnelheid $\underline{\omega}$ van het lichaam; voor de snelheid van een deeltje $X \in \mathcal{B}$, met positie $\underline{x}$ geldt voor de snelheid $\dot{\underline{x}}$:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\omega} \times \underline{x} \qquad (7.33)$$

We veronderstellen dat de invloed door de bewegingsbeperking kan worden voorgesteld door een kracht die in 0 op $\mathcal{B}$ aangrijpt.
Het moment in 0 op B uitgeoefend is dus voor te stellen door:

$$\underline{M} = \underline{M}^{(b)}, \qquad (7.34)$$

het resulterende belastingmoment, b.v. het moment om 0 veroorzaakt door het gewicht van het starre lichaam.
De bewegingsvergelijking van $\mathcal{B}$ luidt:

$$\underline{M} = \dot{\underline{D}} \quad \text{(zie 7.32)} \qquad (7.35)$$

Geven we de positie van het massamiddelpunt weer aan het $\underline{x}_0$ en bedenken we dat $\dot{\underline{x}}_0$ voldoet aan (7.33) en $\underline{D}$ aan (3.6), dan volgt:

$$\underline{D} = \underline{D}_0 + \underline{x}_0 \times \underline{p} = J_0\underline{\omega} + m\,\underline{x}_0 \times (\underline{\omega} \times \underline{x}_0) \qquad (7.36)$$

zodat:

$$\underline{D} = J\underline{\omega}, \quad \text{(stelling van Steiner)} \qquad (7.37)$$

waarbij J de traagheidstensor van B betrokken op 0 is.
Opgave:

Toon aan dat:

$$\underline{\dot{D}} = J\,\underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times J\,\underline{\omega} \tag{7.38}$$

De bewegingsvergelijking van B kunnen we dus schrijven in de vorm:

$$\underline{M} = J\,\underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times J\,\underline{\omega} \tag{7.39}$$

We kiezen een orthonormale basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ voor $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van de symmetrische positieve lineaire afbeelding J. De eigenwaarden van J geven we aan met I_k, $k = 1,2,3$, z.d.d. $0 < I_1 \le I_2 \le I_3$, en:

$$J\,\underline{e}_k = I_k\,\underline{e}_k \quad \text{(niet sommeren!)}\ k = 1,2,3. \tag{7.40}$$

De vectoren $\underline{M}$, $\underline{\omega}$ en $\underline{\dot{\omega}}$ ontbinden we op de basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ en noemen de componenten: M_k, ω_k en $\dot{\omega}_k$ (zie pagina 69), $k = 1,2,3$.

Substitutie in de vergelijking (7.39) levert:

$$\underline{M} = M_k \underline{e}_k = (\underline{M}, \underline{e}_k)\underline{e}_k = (J\underline{\dot{\omega}}, \underline{e}_k)\underline{e}_k + (\underline{\omega} \times J\underline{\omega}, \underline{e}_k)\underline{e}_k$$

ofwel: $M_k = (\underline{\dot{\omega}}, J\underline{e}_k) + (\underline{\omega} \times J\underline{\omega}, \underline{e}_k)$,

Schrijven we deze vergelijkingen uit en gebruiken daarbij (7.40), dan vinden we:

$$\begin{aligned} M_1 &= J_1\,\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\,\omega_3\,\omega_2 \\ M_2 &= J_2\,\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\,\omega_1\,\omega_3 \\ M_3 &= J_3\,\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\,\omega_2\,\omega_1 \end{aligned} \tag{7.41}$$

De vergelijkingen (7.41) zijn de beroemde Eulerse tolvergelijkingen.

Opmerking: Het zal duidelijk zijn dat de rotatie van een star lichaam altijd in de vorm (7.41) kan worden geschreven, de betreffende grootheden $\underline{M}$ en J worden in (7.41) dan vervangen door $\underline{M}_0$ en J_0.

Opgave: Probeer zelf eens de vergelijkingen te formuleren betrokken op het massamiddelpunt. Voer de kracht $\underline{R}$ in O in en breng deze bij $\underline{M}_0$ in rekening. Bedenk dat de snelheid van het massamiddelpunt aan (7.33) voldoet en gebruik de zwaartepuntsstelling om $\underline{R}$ te bepalen. De hoeksnelheid $\underline{\omega}$ mag nu bekend worden verondersteld, hij is bepaald door (7.39) of (7.41).

f. Arbeid bij de beweging van een star lichaam

We beschouwen een star lichaam $\mathcal{B}$ dat beweegt onder invloed van de krachtdichtheid $\underline{k}$. De positiebepaling van de deeltjes van $\mathcal{B}$ omschrijven we op de gebruikelijke manier. De resulterende kracht $\underline{k}$ en het resulterende moment $\underline{M}_0$ betrokken op het massamiddelpunt zijn:

$$\underline{K} = \int_V \underline{k}\, dV \tag{7.42}$$

$$\underline{M}_0 = \int_V (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{k}\, dV \tag{7.43}$$

De arbeid per tijdseenheid door de krachtdichtheid $\underline{k}$ verricht, het aan $\mathcal{B}$ toegevoegde vermogen P, is volgens (4.30):

$$P = (\underline{K},\underline{v}_0) + (\underline{M}_0,\underline{\omega}) \tag{7.44}$$

Met de zwaartepuntsstelling en de momentenstelling kunnen we hiervoor schrijven:

$$P = (\dot{\underline{p}},\underline{v}_0) + (\dot{\underline{D}}_0,\underline{\omega}) = m(\underline{v}_0,\dot{\underline{v}}_0) + (\underline{\omega},J_0\dot{\underline{\omega}}) \tag{7.45}$$

De kinetische energie T van het starre lichaam $\mathcal{B}$ is volgens (3.37) te schrijven in de vorm:

$$T = \frac{1}{2}\, m(\underline{v}_0,\underline{v}_0) + \frac{1}{2}(\underline{\omega},J_0\underline{\omega}) \tag{7.46}$$

Differentiëren we deze uitdrukking naar de tijd t, dan:

$$\dot{T} = \frac{1}{2}m\{(\dot{\underline{v}}_0,\underline{v}_0) + (\underline{v}_0,\dot{\underline{v}}_0)\} + \frac{1}{2}\,\{(\dot{\underline{\omega}},J_0\underline{\omega}) + (\underline{\omega},J_0\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0\underline{\omega})\},$$

waarin (7.20) is gebruikt, zodat:

$$\dot{T} = m(\underline{v}_0,\dot{\underline{v}}_0) + (\underline{\omega},J_0\dot{\underline{\omega}}) \quad (J_0 \text{ symmetrisch!}) \tag{7.47}$$

Vergelijken we (7.45) en (7.47), dan concluderen we:

$$P = \dot{T} \tag{7.48}$$

Het aan het lichaam toegevoerde vermogen van de krachtdichtheid $\underline{k}$ is gelijk aan de verandering van de kinetische energie van het lichaam per tijdseenheid.

Vatten we P en T bij de beweging op als functies van de tijd t, dan volgt met (4.29) en (7.48):

$$A(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = T(t_2) - T(t_1) \tag{7.49}$$

De arbeid door de krachtdichtheid $\underline{k}$ verricht is gelijk aan de verandering van de kinetische energie.

g. De vergelijkingen van Lagrange voor een systeem van starre lichamen

We gaan uit van een systeem van starre lichamen $\mathcal{B}_k$, $k = 1,\ldots,m$. Het volume door elk lichaam bezet duiden we aan met V_k, $k = 1,\ldots,m$, waarbij we opnieuw veronderstellen: $V_k \cap V_\ell = \emptyset$, $k \neq \ell$.

De vereniging $V = \bigcup_{k=1}^{m} V_k$ noemen we het volume van het systeem.

Bewegen alle lichamen uit het systeem vrij en onafhankelijk van elkaar in de ruimte, dan is het aantal graden van vrijheid 6m. Worden de lichamen daarentegen in hun beweging belemmerd dan is het aantal graden van vrijheid minder. De bewegingsvergelijkingen van Lagrange, in aantal gelijk aan het aantal graden van vrijheid, zullen dus een minder omvangrijk stelsel vergelijkingen leveren dan verkregen wordt wanneer de lichamen alle worden vrijgemaakt. We veronderstellen dat er p onafhankelijke holonome verbindingsrelaties zijn, zodat het aantal graden van vrijheid n voldoet aan:

$$n = 6m - p \tag{7.50}$$

De gegeneraliseerde coördinaten die we kiezen zullen we weer q_k, $k = 1,\ldots,n$, noemen. Omdat de verbindingsrelaties holonoom zijn kunnen we voor elk deeltje X van het systeem, de positie $\underline{x}$ schrijven in de vorm:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\ldots,q_n,t) \tag{7.51}$$

en de snelheid

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}\,. \tag{7.52}$$

De virtuele verplaatsing $\delta\underline{x}$ van X stellen we met de virtuele veranderingen δq_k, $k = 1,\ldots,n$, van de gegeneraliseerde coördinaten weer voor door:

$$\delta\underline{x} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\delta q_k. \tag{7.53}$$

Als er geen verbindingsrelaties met elementen buiten het systeem zijn (denk aan een zon met zijn planeten), kunnen ook virtuele verplaatsingen volgens (1.42) en (1.43) voorkomen.

We veronderstellen dat de beweging van het systeem plaats vindt onder invloed van een krachtdichtheid $\underline{k}$.
We vatten deze krachtdichtheid weer op als de som van een reactiekrachtdichtheid $\underline{k}^{(r)}$ en een belastingkrachtdichtheid $\underline{k}^{(b)}$, waarbij

$$\int_V (\underline{k}^{(r)}, \delta\underline{x})\, dV = 0 \text{ , voor alle } \delta x. \tag{7.54}$$

De gegeneraliseerde krachten Q_k definiëren we weer door:

$$Q_k = \int_V (\underline{k}^{(b)}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k})\, dV, \tag{7.55}$$

zodat we voor de virtuele arbeid δA, gedefinieerd door:

$$\delta A = \int_V (\underline{k}, \delta\underline{x})\, dV, \tag{7.56}$$

weer kunnen schrijven:

$$\delta A = Q_k \delta q_k \tag{7.57}$$

De kinetische energie T van het systeem, gedefinieerd door:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}})\, dV \tag{7.58}$$

kunnen we na substitutie van (7.53) weer opvatten als een functie over 2n + 1 variabelen:

$$T = T(\dot{q}_1, \ldots \dot{q}_n, q_1, \ldots q_n, t) \tag{7.59}$$

en bij een beweging is de kinetische energie weer op te vatten als een functie van de tijd t na substitutie van de relaties $q_k = q_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$.

We zouden op analoge wijze als in §5.f voor een massapunt en als in §6.c voor een systeem van massapunten de vergelijkingen van Lagrange kunnen afleiden voor een systeem van starre lichamen.
We geven de voorkeur aan een andere manier, waarbij we uitgaan van het principe van d'Alembert. Dit principe formuleren we op dezelfde wijze als

voor één star lichaam volgens (7.6):

$$\int_V (\underline{k}^{(b)} - \rho\underline{\ddot{x}}, \delta\underline{x})\, dV = 0 \quad \text{voor alle } \delta\underline{x} \tag{7.60}$$

Substitutie van $\delta\underline{x}$ volgens (7.53) en bedenkende dat de virtuële veranderingen δq_k onafhankelijk van elkaar zijn, levert met gebruikmaking van (7.55):

$$\int_V \rho(\underline{\ddot{x}}, \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})\, dV = Q_k,\ k = 1,\ldots,n. \tag{7.61}$$

Het linkerlid herschrijven we op de gebruikelijke manier:

$$\begin{aligned}(\underline{\ddot{x}}, \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k}) &= \frac{d}{dt}(\underline{\dot{x}}, \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k}) - (\underline{\dot{x}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})\\ &= \frac{d}{dt}(\underline{\dot{x}}, \frac{\partial\underline{\dot{x}}}{\partial\dot{q}_k}) - (\underline{\dot{x}}, \frac{\partial\underline{\dot{x}}}{\partial q_k}) \quad \text{volgens (1.40) en (1.41)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(\underline{\dot{x}},\underline{\dot{x}}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_k}(\underline{\dot{x}},\underline{\dot{x}})\end{aligned} \tag{7.62}$$

Hoewel de integratie in (7.61) plaats vindt over een veranderlijk gebied (in de tijd) is de waarde van deze integraal bepaald door de waarde van $(\underline{\ddot{x}}, \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})$ als functie van de tijd, of met (7.62) door de waarde van $(\underline{\dot{x}},\underline{\dot{x}})$ als functie van de tijd.
Dat betekent dat we de differentiatie naar t evenals die naar $\dot{q}_k$ en q_k, $k = 1,\ldots,n$, voorkomend in (7.62) mogen verwisselen met de integratie voorkomend in (7.61), zodat met (7.62):

$$\int_V \rho(\underline{\ddot{x}},\frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k})\, dV = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\int_V \rho(\underline{\dot{x}},\underline{\dot{x}})\, dV - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_k}\int_V \rho(\underline{\dot{x}},\underline{\dot{x}})\, dV \tag{7.63}$$

Voorbeelden van deze verwisseling hebben we reeds leren kennen bij de afleiding van de zwaartepuntsstelling en de momentenstelling voor één star lichaam.
Met de definitie van de kinetische energie T volgen dan eenvoudig de volgende relaties:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k\ ,\ k = 1,\ldots,n,$$

de vergelijkingen van Lagrange.
Is de belastingkrachtdichtheid conservatief en U de potentiële energie

van het systeem dan volgt weer met $\mathcal{L} = T - U$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1,\dots,n. \tag{7.65}$$

h. Stoten en botsingen voor starre lichamen

We beschouwen een vrij star lichaam $\mathcal{B}$. De resulterende kracht en het resulterende moment, betrokken op het massamiddelpunt, zijn van de vorm:

$$\underline{K}(t) = \underline{S}\;\delta(t - t_0) \tag{7.61}$$

$$\underline{M}_0(t) = \underline{M}_{0S}\;\delta(t - t_0), \tag{7.62}$$

waarin δ de in §5.c beschreven Dirac-deltafunctie is.
De verandering van de impuls en het impulsmoment, betrokken op het massamiddelpunt, gedurende het interval (t_1,t_2), $t_1 < t_0 < t_2$, kunnen we bepalen met de zwaartepuntsstelling en de momentenstelling:

$$\underline{p}(t_2) - \underline{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{K}(t)\,dt = \underline{S} \tag{7.63}$$

$$\underline{D}_0(t_2) - \underline{D}_0(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}_0(t)\,dt = \underline{M}_{0S} \tag{7.64}$$

We definiëren de veranderingen $\Delta\underline{p}(t_0)$ en $\Delta\underline{D}_0(t_0)$ op de volgende wijze:

$$\Delta\underline{p}(t_0) = \lim_{t_2 \downarrow t_0} \underline{p}(t_2) - \lim_{t_1 \uparrow t_0} \underline{p}(t_1) \tag{7.75}$$

$$\Delta\underline{D}_0(t_0) = \lim_{t_2 \downarrow t_0} \underline{D}_0(t_2) - \lim_{t_1 \uparrow t_0} \underline{D}_0(t_1) \tag{7.66}$$

Uit bovenstaande vergelijkingen volgt dan eenvoudig:

$$\Delta\underline{p}(t_0) = \underline{S} \tag{7.67}$$

$$\Delta\underline{D}_0(t_0) = \underline{M}_{0S} \tag{7.68}$$

We noemen de beide laatste vergelijkingen de zwaartepuntsstelling, resp. de momentenstelling voor stoten.
De impuls en het impulsmoment veranderen dus sprongsgewijs o.i.v. de stoot

en het stootmoment die volgens (7.61) en (7.62) op het lichaam worden uitgeoefend.
Op dezelfde wijze als in §5.c voor massapunten is aangetoond, kunnen we ook hier afleiden dat de punten van het starre lichamen o.i.v. stoten en stootmomenten i.h.a. een discontinuïteit in de vorm van een sprong in de snelheid bezitten, maar de positie van die punten is, door de begrensdheid van die sprong in de snelheid een continue functie van de tijd.
Dit heeft een belangrijk gevolg:
Hadden we het stootmoment en het impulsmoment niet betrokken op het massamiddelpunt, maar op een punt $R \in \mathbb{R}^3$, met veranderlijke positie $\underline{r}$, dan zouden we, met (7.32) hebben gevonden:

$$\Delta\underline{D}_R(t_0) - \underline{M}_{RS} = - \lim_{\substack{t_1 \uparrow t_0 \\ t_2 \downarrow t_0}} \int_{t_1}^{t_2} m\, \dot{\underline{r}} \times \underline{v}_0 dt, \tag{7.69}$$

waarbij:

$$\underline{M}_{RS} = \underline{M}_{0S} + (\underline{x}_0 - \underline{r}) \times \underline{S} \quad \text{(Zie 7.29)} \tag{7.70}$$

Als het punt R met begrensde snelheid beweegt, volgt eenvoudig, door de begrensdheid van de sprong in $\underline{v}_0$, dat het rechterlid van (7.69) gelijk is aan nul.
Daarmede:

$$\Delta\underline{D}_R(t_0) = \underline{M}_{RS}, \tag{7.71}$$

onafhankelijk van de bewegingsrichting van R.
De momentenstelling voor stoten geldt dus om elk punt ook als het met willekeurige (begrensde) snelheid beweegt.

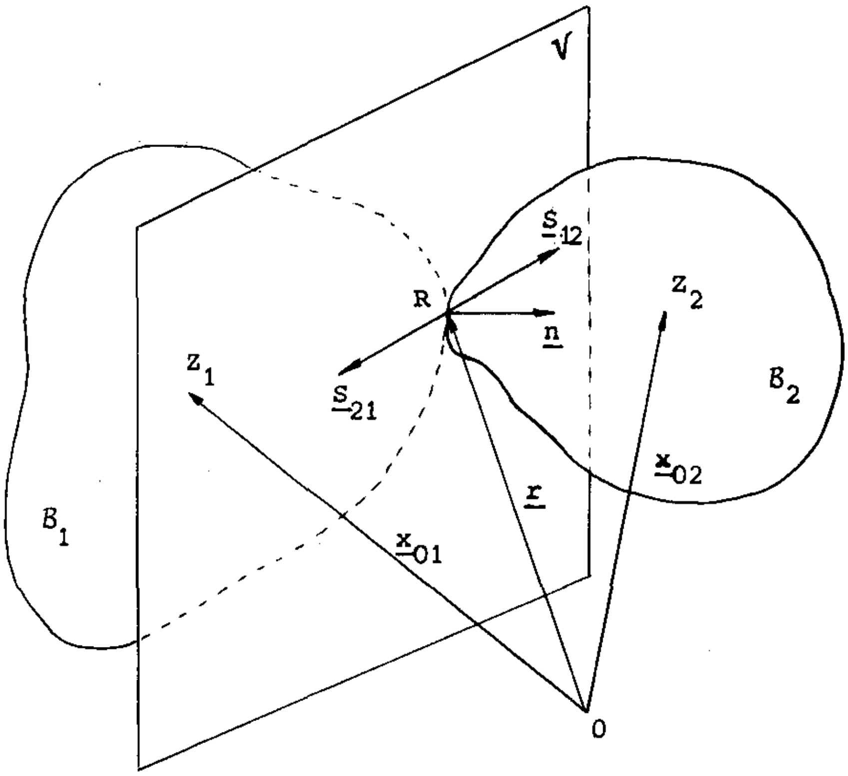
Wanneer twee vrije starre lichamen $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ op elkaar botsen, zal de invloed die de beide lichamen op elkaar uitoefenen van de vorm (7.61) en (7.62) zijn. Het tijdstip t_0 is dan het moment van botsen. Zijn de lichamen niet vrij doch aan bewegingsbeperkingen onderhevig, dan zouden in de punten van de lichamen waarvan de beweging wordt belemmerd eveneens stoten en stootmomenten kunnen optreden.
Op dezelfde wijze als voor krachten en momenten kunnen we de lichamen vrij maken en daarna aan de impuls en impulsmomentveranderingen zodanige voorwaarden opleggen, dat aan de bewegingsbeperkingen wordt voldaan.
We zullen ons in deze paragraaf verder beperken tot het volgende

belangrijke geval.

Twee vrije starre lichamen B_1 en B_2 botsen op elkaar en treffen elkaar daarbij in één punt aangeduid met R, positie $\underline{r}$. Van de lichamen veronderstellen we verder dat hun vorm zodanig is dat juist één vlak V met normaal $\underline{n}$, $\|\underline{n}\| = 1$, door R is aan te geven z.d.d.:

$$\begin{aligned} &\forall_{x \in B_1} : (\underline{x} - \underline{r}, \underline{n}) < 0 \quad \underline{x} \neq \underline{r} \\ &\forall_{x \in B_2} : (\underline{x} - \underline{r}, \underline{n}) > 0 \quad \underline{x} \neq \underline{r} \end{aligned} \tag{7.72}$$

dikwijls zal V het gemeenschappelijk raakvlak in R aan beide lichamen zijn.



De stoot in R door lichamen B_1 op lichaam B_2 uitgeoefend noemen we $\underline{S}_{12}$ en de stoot door B_2 op B_1 noemen we $\underline{S}_{21}$. We veronderstellen dat ook hier de wet "Actie is Reactie" geldt, zodat:

$$\underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \underline{0} \tag{7.73}$$

Opmerking: We volstaan met een onderlinge beïnvloeding door de stoten $\underline{S}_{12}$ en $\underline{S}_{21}$ omdat er sprake is van puntcontact.
Treffen de lichamen elkaar zodanig dat zij op het moment van botsen een lijndeel of vlakdeel gemeen hebben, dan zouden ook stootmomenten in rekening moeten worden gebracht.

Teneinde het schrijfwerk te verminderen maken we de volgende afspraak:

we voorzien allerlei grootheden van een index, zeg k, met waarden 1 of 2, waarbij k = 1 betrekking heeft op lichaam $\mathcal{B}_1$ en k = 2 op lichaam $\mathcal{B}_2$.

De zwaartepuntsstelling en de momentenstelling voor stoten leveren ons de volgende vergelijkingen:

$$\Delta \underline{p}_1(t_0) = \underline{S}_{21} \qquad (7.74)$$

$$\Delta \underline{p}_2(t_0) = \underline{S}_{12} \qquad (7.75)$$

$$\Delta \underline{D}_{01}(t_0) = (\underline{r} - \underline{x}_{01}) \times \underline{S}_{21} \quad \text{óf} \quad \Delta \underline{D}_{R1} = \underline{0} \qquad (7.76)$$

$$\Delta \underline{D}_{01}(t_0) = (\underline{r} - \underline{x}_{02}) \times \underline{S}_{12} \quad \text{óf} \quad \Delta \underline{D}_{R2} = \underline{0}, \qquad (7.77)$$

waarbij $\underline{x}_{01}$ en $\underline{x}_{02}$ de posities van de massamiddelpunten van de lichamen $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ op het moment van botsen zijn.

We moeten het volgende opmerken:

met (7.73) volgt uit (7.74) en (7.75):

$$\Delta \underline{p}_2(t_0) + \Delta \underline{p}_2(t_0) = \underline{0} \quad \text{voor } \underline{\text{vrije}} \text{ lichamen} \qquad (7.78)$$

<u>echter</u>:

$$\Delta \underline{D}_{01}(t_0) + \Delta \underline{D}_{02}(t_0) \neq \underline{0} \quad \text{i.h.a.}, \qquad (7.79)$$

<u>wel</u> geldt:

$$\Delta \underline{D}_{R1}(t_0) + \Delta \underline{D}_{R2}(t_0) = \underline{0} \quad \text{voor } \underline{\text{vrije}} \text{ lichamen} \qquad (7.80)$$

De impulsveranderingen $\Delta \underline{p}_k(t_0)$ en de impulsmomentveranderingen $\Delta \underline{D}_{0k}(t_0)$ kunnen we uitdrukken in de veranderingen van de snelheden van de massamiddelpunten en van de hoeksnelheden van beide lichamen.

We definiëren:

$$\underline{v}_{0k}(t_0) = \lim_{t_1 \uparrow t_0} \underline{v}_{0k}(t_1) \qquad k = 1,2 \qquad (7.81)$$

$$\underline{V}_{0k}(t_0) = \lim_{t_2 \downarrow t_0} \underline{v}_{0k}(t_2) \ , \ k = 1,2 \ , \qquad (7.82)$$

in woorden: $\underline{v}_{0k}(t_0)$ en $\underline{V}_{0k}(t_0)$ zijn de snelheden van de massamiddelpunten juist vóór resp. juist ná de botsing.

Verder:

$$\underline{\omega}_k(t_0) = \lim_{t_1 \uparrow t_0} \underline{\omega}_k(t_1) \ , \ k = 1,2 \qquad (7.83)$$

$$\underline{\Omega}_k(t_0) = \lim_{t_2 \downarrow t_0} \underline{\omega}_k(t_2) \quad , \; k = 1,2 \tag{7.84}$$

in woorden: $\underline{\omega}_k(t_0)$ en $\underline{\Omega}_k(t_0)$ zijn de hoeksnelheden juist vóór resp. juist ná de botsing.

Laten we verder (om schrijfwerk te besparen) het argument t_0 weg dan geldt dus:

$$\Delta \underline{p}_k = m_k(\underline{V}_{0k} - \underline{v}_{0k}) \quad \text{(niet sommeren!)}, \; k = 1,2 \tag{7.85}$$

Omdat de posities van de beide bij de botsing betrokken lichamen continu in de tijd zijn, kunnen we voor de verandering van het impulsmoment schrijven:

$$\Delta \underline{D}_{0k} = J_{0k}(\underline{\Omega}_k - \underline{\omega}_k) \quad \text{(niet sommeren!)}, \; k = 1,2 \tag{7.86}$$

Opgave: bewijs de laatste vergelijking, bedenk daarbij dat voor de eenheidsvectoren $\underline{e}_k$, $k = 1,2,3$ volgens §c geldt:

$$\Delta \underline{e}_k = \underline{0}, \; k = 1,2,3 \quad \text{tijdens de botsing.}$$

Substitutie van een en ander in de betreffende vergelijkingen geeft het volgende algebraïsche stelsel van vectorvergelijkingen:

$$\underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \underline{0} \tag{7.87}$$

$$m_1(\underline{V}_{01} - \underline{v}_{01}) = \underline{S}_{21} \tag{7.88}$$

$$m_2(\underline{V}_{02} - \underline{v}_{02}) = \underline{S}_{12} \tag{7.89}$$

$$J_{01}(\underline{\Omega}_1 - \underline{\omega}_1) = (\underline{x}_{01} - \underline{r}) \times \underline{S}_{21} \tag{7.90}$$

$$J_{02}(\underline{\Omega}_1 - \underline{\omega}_2) = (\underline{x}_{02} - \underline{r}) \times \underline{S}_{21} \tag{7.91}$$

Een stelsel van vijf vergelijkingen met zes onbekenden, als we veronderstellen dat de posities en de snelheidsverdelingen van de beide lichamen juist voor de botsing bekend zijn.
Dat dit stelsel niet voldoende is om de onbekenden te bepalen is niet verwonderlijk immers er is nog geen enkel gegeven betreffende de aard van de botsing verwerkt.
Alvorens hier nader op in te gaan willen we nog de volgende belangrijke opmerking maken:

als de lichamen tijdens de botsing niet vrij zijn moeten naast de beide stoten $\underline{S}_{12}$ en $\underline{S}_{21}$ ook de stoot $\underline{S}_k$, $k = 1,2$ op $\mathcal{B}_k$ en het stootmoment $\underline{M}_{0k}$, k = 1,2 in rekening worden gebracht. Deze stoten en -momenten kunnen dus afkomstig zijn van bewegingsbeperkingen waaraan de lichamen zijn onderworpen. In dat geval zullen de vergelijkingen (7.78) (impulsbehoud) en (7.80) (behoud van impulsmoment) niet meer gelden.

De vergelijkingen (7.87) t/m (7.91) luiden dan:

$$\underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \underline{0} \tag{7.87*}$$

$$m_1(\underline{V}_{01} - \underline{v}_{01}) = \underline{S}_{21} + \underline{S}_1 \tag{7.88*}$$

$$m_2(\underline{V}_{02} - \underline{v}_{02}) = \underline{S}_{12} + \underline{S}_2 \tag{7.89*}$$

$$J_{01}(\underline{\Omega}_1 - \underline{\omega}_1) = (\underline{x}_{01} - \underline{r}) \times \underline{S}_{21} + \underline{M}_{0S1} \tag{7.90*}$$

$$J_{02}(\underline{\Omega}_2 - \underline{\omega}_2) = (\underline{x}_{02} - \underline{r}) \times \underline{S}_{12} + \underline{M}_{0S2} \tag{7.91*}$$

Keren we nu terug tot ons probleem.

Het punt R waar de beide lichamen elkaar treffen tijdens de botsing, kunnen we opvatten als een punt van lichaam B_1 of van lichaam B_2.

We definiëren:

$\underline{v}_k$ is de snelheid van R opgevat als punt van B_k juist vóór de botsing, zodat:

$$\underline{v}_k = \underline{v}_{0k} + \underline{\omega}_k \times (\underline{r} - \underline{x}_{0k}),\ k = 1,2. \tag{7.92}$$

$\underline{V}_k$ is de snelheid van R opgevat als punt van B_k juist ná de botsing, zodat:

$$\underline{V}_k = \underline{V}_{0k} + \underline{\Omega}_k \times (\underline{r} - \underline{x}_{0k}),\ k = 1,2. \tag{7.93}$$

Evenals bij massapunten zullen we voor botsingen tussen twee starre lichamen de volgende botsingsrelatie, geldend voor de snelheden van het punt waar de twee lichamen elkaar treffen, gebruiken:

$$(\underline{V}_2,\underline{n}) - (\underline{V}_1,\underline{n}) = -\lambda\,\{(\underline{v}_2,\underline{n}) - (\underline{v}_1,\underline{n})\}, \tag{7.94}$$

waarin $\lambda \in [0,1]$.

Opnieuw spreken we van een volledig elastische botsing als $\lambda = 1$ en van een volledig onelastische botsing als $\lambda = 0$. De waarde van λ wordt bepaald door de eigenschappen van het materiaal waaruit de lichamen bestaan.

Een tweede relatie die tijdens de botsing van belang is verkrijgen we wanneer de aard van de oppervlakken van de beide lichamen bekend is

Is één van beide, of zijn beide, oppervlakken glad, dan veronderstellen we dat geldt:

$$\underline{S}_{12} = S\,\underline{n}$$
$$\underline{S}_{21} = -\,S\,\underline{n} \qquad (7.95)$$

De stoten die de beide lichamen op elkaar uitoefenen staan loodrecht op het scheidingsvlak (of gemeenschappelijk raakvlak) V.
De vergelijkingen (7.94) en (7.95) leveren ons dan de ontbrekende relaties om met de vergelijkingen (7.88) t/m (7.91) de stoten tijdens de botsing en de snelheidsverdelingen van de beide lichamen juist ná de botsing te kunnen bepalen.
Zijn daarentegen beide lichamen ruw dan wordt de beschouwing gecompliceerder. Om een en ander niet nodeloos ingewikkeld te maken, veronderstellen we het volgende:

de beide oppervlakken zijn ruw in een richting $\underline{t}$, $(\underline{t},\underline{n}) = 0$ in V en minstens één van beide is glad in de richting $\underline{t} \times \underline{n}$.

Met dit gegeven kunnen we de stoten $\underline{S}_{12}$ en $\underline{S}_{21}$ voorstellen door:

$$\underline{S}_{12} = S_n\,\underline{n} + W\,\underline{t}$$
$$\underline{S}_{21} = -\,S_n\,\underline{n} - W\,\underline{t}\ , \qquad (7.96)$$

waarin S_n de <u>normale stoot</u> is en W de <u>tangentiale</u> of <u>wrijvingsstoot</u>.
Merk op dat voor botsing noodzakelijk is: $S_n > 0$, omdat $\underline{n}$ op $\mathcal{B}_1$ naar buiten gericht is.
Is f de wrijvingscoëfficiënt in de richting $\underline{t}$, dan zal gelden:

$$|W| \leq f\,S_n \qquad (7.97)$$

Er zijn nu twee mogelijkheden te onderzoeken:

1. $|W| < f\,S_n$, maar dan: $(\underline{V}_1,\underline{t}) = (\underline{V}_2,\underline{t})$ (7.98)
2. $|W| = f\,S_n$. maar dan: $(\underline{V}_1,\underline{t}) \neq (\underline{V}_2,\underline{t})$, terwijl:

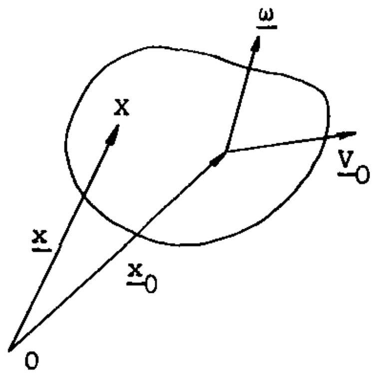
$$W \cdot \{(\underline{V}_2,\underline{t}) - (\underline{V}_1,\underline{t})\} < 0 \text{ is.} \qquad (7.99)$$

In beide gevallen hebben we opnieuw voldoende vergelijkingen om de onbekenden te kunnen bepalen, waarbij duidelijk is dat slechts één van de gevallen 1 of 2 zich kan voordoen.
Als de wrijvingscoëfficiënt $f \to \infty$ behoeven we de laatste beperking niet te maken, in dat geval zijn, ná de botsing, de snelheidscomponenten van R opgevat als punt van $\mathcal{B}_1$ en van $\mathcal{B}_2$, in de richting van vlak V gelijk.

i. Fixatie van starre lichamen

We spreken van fixatie van een deeltje van een star lichaam als op het bewegende lichamen stoten en stootmomenten worden uitgeoefend zodanig dat onmiddellijk daarna het betreffende deeltje de snelheid nul heeft. In deze paragraaf zullen we niet ingaan op het meer algemene fixatieprobleem voor een star lichaam, doch ons beperken tot het volgende illustratieve voorbeeld.

We beschouwen een vrij bewegend star lichaam $\mathcal{B}$ dat tot het tijdstip t_0 de snelheid $\underline{v}_0$ van het massamiddelpunt en de hoeksnelheid $\underline{\omega}$ heeft. X is een deeltje van $\mathcal{B}$ dat op t_0 de positie $\underline{x}$ heeft. Op het tijdstip t_0 wordt de stoot $\underline{S}$ en het stootmoment $\underline{M}_{0S}$, betrokken op het massamiddelpunt, uitgeoefend.



We noemen $\underline{V}_0$ de snelheid van het massamiddelpunt en $\underline{\Omega}$ de hoeksnelheid onmiddellijk na t_0. De stoot $\underline{S}$ en het stootmoment $\underline{M}_{0S}$ zijn z.d.d. onmiddellijk na de botsing de snelheid van X gelijk is aan nul.

Voor de onbekenden $\underline{V}_0$, $\underline{\Omega}$, $\underline{S}$ en $\underline{M}_{0S}$ gelden de volgende betrekkingen:

$$\underline{S} = m(\underline{V}_0 - \underline{v}_0), \qquad (7.100)$$

$$\underline{M}_{0S} = J_0(\underline{\Omega} - \underline{\omega}), \qquad (7.101)$$

$$\underline{V}_x := \underline{V}_0 + \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_0) = \underline{0}. \qquad (7.102)$$

Een stelsel van drie vergelijkingen voor vier onbekenden, zodat we de onbekenden niet eenduidig kunnen bepalen. Dit laatste is wel te verwachten, omdat het lichaam na de fixatie kennelijk om de positie $\underline{x}$ van X roteert, en daarvoor zijn vele mogelijkheden. We vragen ons nu af of het mogelijk is de fixatie van X te bereiken door één stoot $\underline{S}$ in X op $\mathcal{B}$ uit te oefenen. In dat geval verkrijgen we als vierde vergelijking:

$$\underline{M}_{0S} = (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{S} \qquad (7.103)$$

Om de onbekenden te bepalen zullen we een wat andere weg behandelen. We voeren, met de stelling van Steiner, de traagheidstensor J betrokken op X in. Deze lineaire afbeelding is positief definiet, niet singulier en dus inverteerbaar.

Passen we de momentenstelling voor stoten betrokken op X toe, en bedenken we dat het stootmoment betrokken op X gelijk is aan nul, dan geldt:

$$\Delta \underline{D}_X(t_0) = \underline{0} \tag{7.104}$$

of uitgeschreven:

$$J\,\underline{\Omega} = J_0\,\underline{\omega} + (\underline{x}_0 - \underline{x}) \times m\,\underline{v}_0, \tag{7.105}$$

Een vergelijking voor $\underline{\Omega}$ alleen, waarmee na substitutie in (7.102) de snelheid $\underline{V}_0$ kan worden bepaald. Substitueren we $\underline{V}_0$ in (7.100) dan vinden we de stoot $\underline{S}$ in X op $\mathcal{B}$ uitgeoefend.

Opgave: leid verg. (7.105) af uit de verg.(7.100) t/m (7.103).

Opmerking 1. Zouden we meer punten van het lichaam $\mathcal{B}$ op hetzelfde ogenblik willen fixeren, dan kunnen we dit realiseren door stoten in die punten op $\mathcal{B}$ uit te oefenen. Het zal echter in het algemeen niet mogelijk zijn deze stoten, zoals in het boven beschreven geval eenduidig te bepalen.

Opmerking 2. Willen we een niet vrij bewegend lichaam fixeren dan voeren we door de bewegingsbeperkingen aanvankelijk niet mee te nemen op de gebruikelijke wijze stoten en stootmomenten in. We gebruiken dan de zwaartepuntsstelling en de momentenstelling voor de resulterende stoot en het resulterende stootmoment. Daarna verlangen we weer dat de snelheidsverdeling aan de bewegingsbeperkingen voldoet.

f. Energieverandering bij stoten

Als op een mechanisch stelsel stoten en stootmomenten worden uitgeoefend zal de energieverandering gelijk zijn aan de verandering van de kinetische energie, aangeduid met T. De reden daarvoor is dat wanneer op een mechanisch stelsel stoten en stootmomenten worden uitgeoefend, wel de snelheden van de deeltjes sprongen vertonen, maar de posities van de deeltjes zijn continue functies van de tijd en veranderen dus niet tijdens de stoten zodat ook de potentiële energie niet sprongsgewijs verandert.
Expliciete uitdrukkingen voor een massapunt en een star lichaam kunnen we eenvoudig afleiden.

Voor een massapunt onderhevig aan een stoot $\underline{S}$ en bewegende met de snelheden $\underline{v}$ en $\underline{V}$ juist voor en juist na de stoot geldt:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(\underline{V},\underline{V}) - \frac{1}{2}m(\underline{v},\underline{v})$$

$$= \frac{1}{2}(m\underline{V} - m\underline{v},\ \underline{V} + \underline{v}) = \frac{1}{2}(\underline{S},\underline{V} + \underline{v}) \tag{7.106}$$

Voor een star lichaam onderhevig aan de stoot $\underline{S}$ en het stootmoment $\underline{M}_{0S}$, betrokken op het massamiddelpunt, met de snelheden $\underline{v}_0$ en $\underline{V}_0$ van het massamiddelpunt, juist voor en juist ná de botsing en de overeenkomstige hoeksnelheden $\underline{\omega}$ en $\underline{\Omega}$ geldt:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\,m(\underline{V}_0,\underline{V}_0) + \frac{1}{2}(J_0\underline{\Omega},\underline{\Omega}) - \frac{1}{2}\,m(\underline{v}_0,\underline{v}_0) - \frac{1}{2}(J_0\underline{\omega},\underline{\omega})$$

$$= \frac{1}{2}(m\underline{V}_0 - m\underline{v}_0,\ \underline{V}_0 + \underline{v}_0) + \frac{1}{2}(J_0\underline{\Omega} - J_0\underline{\omega},\ \underline{\Omega} + \underline{\omega})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{S},\ \underline{V}_0 + \underline{v}_0) + \frac{1}{2}(\underline{M}_{0S},\ \underline{\Omega} + \underline{\omega}) \tag{7.107}$$

Opgave: laat zien dat de energieverandering bij de fixatie van één punt X van een star lichaam, zoals beschreven in de vorige paragraaf voldoet aan de vgl.:

$$\Delta T = \frac{1}{2}(\underline{S},\underline{v}), \tag{7.108}$$

hierin is $\underline{S}$ de stoot in X en $\underline{v}$ de snelheid van X juist vóór de stoot.

k. De stootvergelijkingen volgens Lagrange

We gaan uit van de bewegingsvergelijkingen van Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1,\dots,n \tag{7.109}$$

De positie van een element kan weer worden voorgesteld door:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\dots,q_n,t) \tag{7.110}$$

en de snelheid door:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \tag{7.111}$$

Voor de kinetische energie T geldt: $T = \frac{1}{2}\int_V \rho(\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}})\,dV$.

Bij stoten op het mechanisch stelsel zal weliswaar de kinetische energie sprongsgewijs veranderen, maar steeds begrensd zijn. Eenvoudig volgt dat de grootheden $\frac{\partial T}{\partial q_k}$, k = 1,...,n , eveneens begrensd zijn, zodat:

$$\lim_{\substack{t_1 \uparrow t_0 \\ t_2 \downarrow t_0}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial q_k} dt = 0 \text{ , } k = 1,\ldots,n. \tag{7.112}$$

We definiëren de sprong in de gegeneraliseerde impuls door:

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}(t_0) = \lim_{t_2 \downarrow t_0} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}(t_2) - \lim_{t_1 \uparrow t_0} \frac{\partial T}{\partial q_k}(t_1) \text{, } k = 1,\ldots,n. \tag{7.113}$$

De gegeneraliseerde krachten Q_k zijn gedefinieerd door:

$$Q_k = \int_V (\underline{k}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) dV \text{ , waarbij } \underline{k} \text{ de krachtdichtheid is.}$$

We veronderstellen dat de krachtdichtheid van de volgende vorm is:

$$\underline{k}(\underline{x}) = \underline{s}(\underline{x}) \ \delta(t - t_0), \tag{7.114}$$

waarin we $\underline{s}$ de stootdichtheid zouden kunnen noemen.
We definiëren de gegeneraliseerde stoten, aangeduid met Q_{Sk}, k = 1,...,n, door:

$$Q_{Sk} = \int_V (\underline{s}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) dV \tag{7.115}$$

zodat, voor $t_0 \in (t_1,t_2)$ geldt:

$$\int_{t_1}^{t_2} Q_k dt = Q_{Sk} \text{ , } k = 1,\ldots,n \tag{7.116}$$

Integreren we de vergelijkingen (7.109) naar t van t_1 tot t_2, waarbij $t_0 \in (t_1,t_2)$ dan geldt, na de gebruikelijke limietovergangen met gebruikmaking van (7.112), (7.113) en (7.116):

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}(t_0) = Q_{Sk} \text{ , } k = 1,\ldots,n \tag{7.117}$$

De vergelijkingen (7.117) heten de <u>stootvergelijkingen volgens Lagrange</u>.

8. Het evenwicht van een mechanisch stelsel

8.a. Inleiding

We beschouwen een mechanisch stelsel waarvan de elementen vrij kunnen bewegen of in hun beweging worden beperkt door holonome bewegingsvoorwaarden.

Het aantal graden van vrijheid van het stelsel is n en $q_1,\ldots,q_n$ vormen een set gegeneraliseerde coördinaten.

De positie van een element X is bepaald door de relatie:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\ldots,q_n,t) \tag{8.1}$$

en de snelheid van X door:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}\,, \tag{8.2}$$

een beweging van het stelsel wordt gekarakteriseerd door:

$$q_k = q_k(t)\,,\ k = 1,\ldots,n. \tag{8.3}$$

De gegeneraliseerde krachten waaraan het stelsel bij zijn beweging onderhevig is duiden we weer aan met Q_k; gedefinieerd door:

$$Q_k = \int_V (\underline{k}^{(b)}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k})\,dV\ ,\ k = 1,\ldots,n, \tag{8.4}$$

waarin V het ruimtelijk gebied door het stelsel bezet is en $\underline{k}$ de belasting krachtdichtheid is van de invloed op het stelsel.

De gegeneraliseerde krachten kunnen we opvatten als functies van de volgende vorm:

$$Q_k = Q_k(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,\ q_1,\ldots,q_n,t)\ ,\ k = 1,\ldots,n \tag{8.5}$$

De kinetische energie T van het stelsel, gedefinieerd door:

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho(\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}})\,dV\ , \tag{8.6}$$

kunnen we na substitutie van (8.2) in (8.4) opvatten als een functie van de volgende vorm:

$$T = T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,\ q_1,\ldots,q_n,t) \tag{8.7}$$

De bewegingsvergelijkingen van Lagrange voor het stelsel zijn dan:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1,\dots,n \tag{8.8}$$

Substitueren we de uitdrukkingen (8.5) en (8.7) in de vgl. (8.8) en maken we daarbij gebruik van (8.3), dan verkrijgen we een stelsel differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, dat kan worden voorgesteld op de volgende wijze:

$$F_k(\ddot{q}_1,\dots,\ddot{q}_n,\ \dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,\ q_1,\dots,q_n,t) = 0 \quad k = 1,\dots,n \tag{8.9}$$

De functies F_k worden dus opgevat als afbeeldingen $\mathbb{R}^{3n+1} \to \mathbb{R}$.

Bij elke set van waarden voor de gegeneraliseerde coördinaten $q_1,\dots,q_n$ behoort een configuratie van het mechanisch stelsel.
We noemen een configuratie een <u>evenwichtsstand bepaald door de set</u> $q_{10},\dots,q_{n0}$ als het stelsel vergelijkingen (8.9) een oplossing heeft die constant is in de tijd: $q_k(t) = q_{k0}$, $k = 1,\dots,n$, voor alle t. (8.10)
De verzameling $q_{10},\dots,q_{k0}$ is kennelijk een wortel van de vergelijkingen:

$$F_k(0,\dots,0,0,\dots,0,q_1,\dots,q_n,t) = 0 \ ,\ k = 1,\dots,n \tag{8.11}$$

In het algemeen zullen er meer wortels van de vergelijkingen (8.11) zijn, elk van die wortels karakteriseert dan een evenwichtsstand.

We noemen een evenwichtsstand een <u>statische evenwichtsstand</u> als voor <u>alle</u> deeltjes X van het mechanisch stelsel de positie:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1(t),\dots,q_n(t) = \underline{x}(q_{10},\dots,q_{n0})$$

onafhankelijk is van de tijd t.
We noemen een evenwichtsstand een <u>kinetische evenwichtsstand</u> als hij geen statische evenwichtsstand is.

Het verschil tussen een statische- en een kinetische evenwichtsstand uit zich niet in de bijbehorende waarden van de gegeneraliseerde coördinaten, die zijn in beide gevallen dezelfde. In een statische evenwichtsstand is de configuratie van het mechanisch stelsel onveranderlijk in de tijd, bij een kinetische evenwichtsstand beweegt minstens één element van het stelsel.
In de volgende paragrafen zullen we enige speciale gevallen nader onderzoeken.

b. Het statisch evenwicht van een vrij massapunt

Een punt P kan vrij, dus niet gehinderd door bewegingsbeperkingen, bewegen. De positie van P geven we aan met $\underline{x}$, de massa van P is m en de kracht die op P werkt noemen we $\underline{K}$.
Voor de gegeneraliseerde coördinaten van P kunnen we de coördinaten van de positievector $\underline{x}$ betrokken op een orthonormale basis van de ruimte waarin P beweegt nemen:

$$\underline{x} = \underline{x}(x,y,z) \tag{8.12}$$

De tijd komt niet expliciet voor in (8.12) zodat we P als een skleronoom systeem opvatten.
Met bovenstaande gaan de vergelijkingen (8.9) over in:

$$m\ddot{\underline{x}} - \underline{K} = 0, \tag{8.13}$$

zodat in een evenwichtsstand geldt, volgens (8.10):

$$\underline{K} = \underline{0} \tag{8.14}$$

Omdat het systeem skleronoom is volgt dat deze evenwichtsstand een statische evenwichtsstand is.
Voor de virtuele arbeid geldt:

$$\delta A = (\underline{k}, \delta\underline{x}),$$

zodat in een evenwichtsstand geldt:

$$\delta A = 0 \tag{8.15}$$

In een statische evenwichtsstand voor een vrij massapunt is de virtuele arbeid gelijk aan nul.

Als de kracht $\underline{K}$ conservatief is, zodat er een potentiaal U bestaat zodanig dat:

$$\underline{K} = -\operatorname{grad} U,$$

volgt voor een evenwichtsstand:

$$\operatorname{grad} U = 0 \tag{8.16}$$

In een statische evenwichtsstand voor een vrij massapunt, dat beweegt in een conservatief krachtveld, is de potentiële energie stationnair.

c. Het statisch evenwicht van een vrij star lichaam

We gaan uit van een vrij star lichaam $\mathcal{B}$, dat, dus zonder beperkingen, kan bewegen. De positie van $\mathcal{B}$ is bepaald door de positie $\underline{x}_0$ van het massamiddelpunt en de draaiingshoek φ om een lijn ℓ door het massamiddelpunt. Het aantal graden van vrijheid is zes. Drukken we de positie $\underline{x}$ van een element X van $\mathcal{B}$ uit in de gegeneraliseerde coördinaten volgens (8.1), dan komt voor geen enkele X de tijd in die uitdrukking expliciet voor. Het vrije starre lichaam is een skleronoom stelsel.
Is K-de resulterende kracht op $\mathcal{B}$ en $\underline{M}_0$ het resulterende moment op $\mathcal{B}$ betrokken op het massamiddelpunt, dan zijn de bewegingsvergelijkingen volgens (8.9):

$$m\,\dot{\underline{v}}_0 - \underline{K} = \underline{0} \tag{8.17}$$

$$J_0\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times J_0\underline{\omega} - \underline{M}_0 = \underline{0} \tag{8.18}$$

Voor een evenwichtsstand geldt dan volgens (8.10):

$$\underline{K} = \underline{0} \tag{8.19}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{0} \tag{8.20}$$

(bedenk dat $\underline{\omega}$, de hoeksnelheid, een grootheid is die samen met $\underline{v}_0$ de positieverandering per tijdseenheid beschrijft en dus, evenals $\underline{v}_0$ in een evenwichtsstand de waarde nul heeft).
Omdat het systeem skleronoom is volgt dat een evenwichtsstand tevens een statische evenwichtsstand is.
We kunnen voor het vinden van de evenwichtsstand ook direct uitgaan van het principe van d'Alembert voor een star lichaam, immers (8.17) en (8.18) volgen direct uit dat principe toegepast op een vrij lichaam.
Dus:

$$\int_V (\underline{k} - \rho\,\ddot{\underline{x}},\ \delta\underline{x})\,dV = \underline{0} \quad \text{voor alle} \quad \delta\underline{x} \tag{8.21}$$

Voor een evenwichtstoestand zal gelden:

$$\delta A = \int_V (\underline{k}, \delta\underline{x}) = 0 \tag{8.22}$$

In een statische evenwichtsstand geldt voor een vrij star lichaam voor de virtuele arbeid: $\delta A = 0$ (8.23

Is het krachtveld conservatief en noemen we U de potentiële energie van het lichaam dan volgt:

$$\delta U = - \delta A = 0 \qquad (8.24)$$

Omdat het systeem skleronoom is zal de potentiële energie niet expliciet van de tijd afhangen zodat uit (8.24) volgt:

in een statische evenwichtstoestand is de potentiële energie U van een star lichaam dat vrij beweegt in een conservatief krachtveld stationnair.

d. Het evenwicht voor een skleronoom systeem

Als een mechanisch stelsel skleronoom is, betekent dat voor de positievectoren van alle deeltjes van het stelsel dat de tijd t niet expliciet voorkomt in de uitdrukkingen (8.1) die dus overgaan in:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\dots,q_n) \qquad (8.25)$$

Voor de snelheden verkrijgen we dan:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad (8.26)$$

Substitutie van $\dot{\underline{x}}$ in de uitdrukking (8.6) voor de kinetische energie T levert voor (8.7):

$$T = \frac{1}{2}\alpha_{k\ell}(q_1,\dots,q_n)\dot{q}_k\dot{q}_\ell \qquad (8.27)$$

waarin: $$\alpha_{k\ell} := \int_V \rho\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_\ell}\right) dV \qquad (8.28)$$

Substitueren we: $\dot{q}_k = 0$, $\ddot{q}_k = 0$, $k = 1,\dots,n$, in de linkerleden van de vergelijkingen van Lagrange (8.8) dan verkrijgen we eenvoudig:

$$Q_k = 0, \; k = 1,\dots,n \qquad (8.29)$$

in een toestand van evenwicht.
De vergelijkingen (8.29) zijn een expliciete formulering van de vgl. (8.11) voor een skleronoom systeem.
De evenwichtsstanden bepaald door (8.28) zijn tevens statische evenwichtsstanden, omdat de tijd niet expliciet voorkomt.

Evenals voor een star lichaam, hadden we uit kunnen gaan van het principe van d'Alembert:

$$\int_V (\underline{k} - \frac{d}{dt}\rho\underline{v}, \delta\underline{x})\,dV = 0 \text{ voor alle } \delta\underline{x} \tag{8.30}$$

Substitueren we: $\delta\underline{x} = \frac{\partial\underline{x}}{\partial q_k}\delta q_k$, dan gaat op de bekende wijze (8.30) over in:

$$(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k)\,\delta q_k = 0, \tag{8.31}$$

zodat: $\delta A = Q_k\ \delta q_k = 0$ (8.32)

in een evenwichtsstand van een skleronoom systeem.
In het geval dat de belastingkrachten conservatief zijn, is er een potentiële energie U z.d.d.:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad k = 1,\dots,n \tag{8.33}$$

Omdat ook U niet expliciet van de tijd afhangt geldt dus opnieuw:

> voor een conservatief skleronoom systeem is in een toestand van evenwicht noodzakelijk de potentiële energie van het systeem stationnair; de evenwichtsstand is een statische.

Met nadruk wordt er op gewezen dat allerlei uitspraken in het voorgaande steeds betrekking hebben op skleronome systemen.

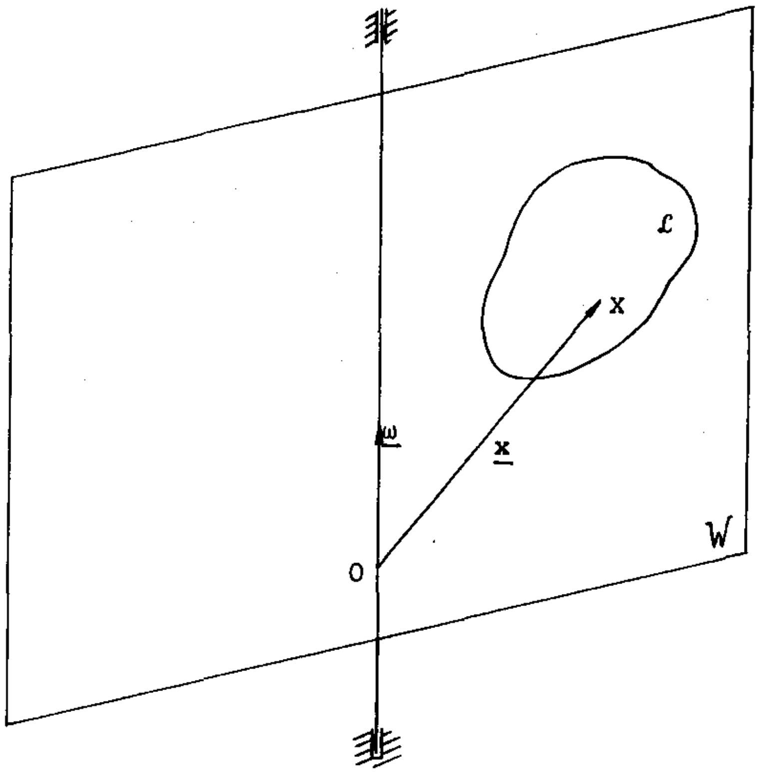
e. <u>Het evenwicht voor een speciaal rheonoom systeem</u>

We noemen een mechanisch stelsel rheonoom als de uitdrukking (8.1) voor minstens een deeltje X van het stelsel de tijd expliciet bevat.
Het rheonoom zijn van een stelsel drukt uit dat de beweging van het stelsel (ten dele) gedwongen is.
We beschouwen in deze paragraaf het volgende rheonome systeem

> Een mechanisch stelsel is zodanig dat alle deeltjes bewegen in een vlak W. Het vlak W roteert met voorgeschreven constante hoeksnelheid om een vaste lijn in W.

We nemen aan dat het aantal graden van vrijheid voor de beweging van het stelsel (in W) gelijk is aan n, en $q_1,\dots,q_n$ noemen we weer de gegeneraliseerde coördinaten.
De hoeksnelheid waarmee W roteert noemen we $\underline{\omega}$, waarbij $\dot{\underline{\omega}} = \underline{0}$.
Voor de positiebeschrijving van de elementen van het stelsel, kiezen we

de oorsprong op de draaiingsas (die dus de richting van $\underline{\omega}$ heeft).



Voor de positie van een element $X \in \mathcal{L}$ geldt:

$$\underline{x} = \underline{x}(q_1,\dots,q_n,t) \text{ en } \underline{v} = \dot{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}\,.$$

De beweging van $\mathcal{L}$ is op te vatten als een samengestelde beweging:

- de beweging van het stelsel $\mathcal{L}$ t.o.v. het vlak W: de relatieve beweging
- de beweging van het vlak W: de sleepbeweging.

Zouden we de snelheid $\underline{v}$ van X schrijven in de vorm:

$$\underline{v} = \underline{v}_{s\ell} + \underline{v}_{rel} \tag{8.34}$$

dan volgt:

$$\underline{v}_{s\ell} = \underline{\omega} \times \underline{x}\,, \text{ onafhankelijk van } \dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n \tag{8.35}$$

Is de beweging van $\mathcal{L}$ in W een vrije beweging, dan volgt:

$$\underline{v}_{s\ell} = \underline{\omega} \times \underline{x} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \tag{8.36}$$

en

$$\underline{v}_{rel} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{8.37}$$

We merken hierbij op dat $\underline{v}_{s\ell}$ is gericht loodrecht op W en $\underline{v}_{rel}$ is in W zodat geldt:

$$(\underline{v}_{rel}, \underline{v}_{s\ell}) = (\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k) = 0 \tag{8.38}$$

Het systeem is rheonoom door het niet nul zijn van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$.
We zullen verder aannemen dat de positie van $\underline{x}$ gemeten in W niet expliciet van t afhangt.

Zouden we de versnellingscomponenten van X uitrekenen, dan geldt:

$$\underline{a}_{rel} = \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial q_k \partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell + \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} \ddot{q}_k \tag{8.39}$$

$$\underline{a}_{s\ell} = \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t^2} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}) \tag{8.40}$$

$$\underline{a}_{cor} = 2\,\underline{\omega} \times \underline{v}_{rel} = 2\,\underline{\omega} \times (\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k) \tag{8.41}$$

We merken op: $\underline{a}_{rel}$ én $\underline{a}_{s\ell}$ zijn beide vectoren in W, terwijl
$\underline{a}_{cor}$ een vector loodrecht op W is.

De kinetische energie kunnen we met gebruikmaking van (8.38) schrijven volgens:

$$T = T_{rel} + T_{rot}, \tag{8.42}$$

waarin:

$$T_{rel} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\underline{v}_{rel}, \underline{v}_{rel}) dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_\ell}) dV \, \dot{q}_k \dot{q}_\ell \tag{8.43}$$

en

$$T_{s\ell} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\underline{v}_{s\ell}, \underline{v}_{s\ell}) dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}) dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \rho (\underline{\omega} \times \underline{x}, \underline{\omega} \times \underline{x}) dV \tag{8.44}$$

We merken op: $T_{s\ell}$ hangt niet expliciet van $\dot{q}_k$, $k = 1,\ldots,n$ af.

Substitueren we T in de bewegingsvergelijkingen van Lagrange en stellen dan weer: $\ddot{q}_k = 0$ en $\dot{q}_k = 0$, $k = 1,\ldots,n$, dan vinden we voor de vergelijkingen waaruit de evenwichtsstanden kunnen worden bepaald (8.11):

$$- \frac{\partial T_{s\ell}}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1,\dots,n \tag{8.45}$$

Hierin zijn de gegeneraliseerde krachten Q_k bepaald door (8.4).
We merken op:

$$\delta A = Q_k \; \delta q_k = - \frac{\partial T_{rel}}{\partial q_k} \delta q_k \neq 0 \tag{8.46}$$

in de evenwichtstoestand.
Zijn de belastingkrachten af te leiden van een potentiële energie dan geldt dus:

$$\delta A = - \delta U \neq 0, \tag{8.47}$$

de potentiële energie van de belastingkrachten is <u>niet</u> stationnair.

In het voorgaande hebben we het mechanisch stelsel beschouwd als gezien door een waarnemer die het stelsel $\mathcal{L}$ in W ziet bewegen, maar ook W ziet roteren.

We passen in het volgende op bovenstaand probleem de methode van het stilzetten toe, waarbij we ons als een met W meebewegende waarnemer opstellen. Voor de in te voeren schijnkrachtdichtheden maken we gebruik van de relaties (8.40) en (8.41) en vinden:

$$\underline{k}_{s\ell} = - \rho \, \underline{a}_{s\ell} = - \rho \, \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}), \tag{8.48}$$

een krachtdichtheid in W, gericht van de draaiingsas af, en genaamd de centrifugaalkrachtdichtheid, terwijl

$$\underline{k}_{cor} = - 2 \rho \, \underline{\omega} \times \underline{v}_{rel} \tag{8.49}$$

een krachtdichtheid die loodrecht op W gericht is.
Eenvoudig volgt:

$$\int_V (\underline{k}_{cor}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) \, dV = 0, \tag{8.50}$$

zodat $\underline{k}_{cor}$ een reactiekrachtdichtheid is.
Voor de meebewegende waarnemer beweegt het stelsel met een kinetische energie T_{rel} volgens (8.43) onder invloed van de gegeneraliseerde krachten Q_k^*, gedefinieerd door:

$$Q_k^* = Q_k + \int_V (\underline{k}_{s\ell}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) dV \tag{8.51}$$

De bewegingsvergelijkingen van Lagrange worden nu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rel}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_{rel}}{\partial q_k} = Q_k^* \ , \ k = 1,\ldots,n \tag{8.52}$$

Substitutie van $\ddot{q}_k = 0$ en $\dot{q}_k = 0$, $k = 1,\ldots,n$, levert voor de evenwichtsstanden de vergelijkingen:

$$Q_k^* = 0 \quad k = 1,\ldots,n \tag{8.53}$$

Deze vergelijkingen zijn natuurlijk dezelfde als (8.45) immers

$$- \frac{\partial T_{s\ell}}{\partial q_k} = \int_V \rho (\underline{\omega} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}, \underline{\omega} \times \underline{x}) dV \quad \text{vgl. (8.44)}$$

$$= - \int_V \rho (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}), \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) dV = - \int_V (\underline{k}_{s\ell}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) dV, \tag{8.54}$$

maar ze hebben een andere betekenis.
Immers na stilzetten zou de virtuele arbeid zijn:

$$\delta A^* = Q_k^* \delta q_k = 0, \tag{8.55}$$

in evenwicht is de (aangepaste) virtuele arbeid gelijk nul.
Definiëren we de functie U_{rot} door:

$$U_{rot} = - T_{s\ell}, \tag{8.56}$$

dan volgt met gebruikmaking van (8.54) eenvoudig:

$$\int_V (\underline{k}_{s\ell}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}) dV = - \frac{\partial U_{rot}}{\partial q_k} \quad k = 1,\ldots,n \tag{8.57}$$

Waren de gegeneraliseerde krachten Q_k, $k = 1,\ldots,n$, conservatief en was U de potentiële energie van het <u>niet</u> stilgezette probleem, dan kunnen we met de definitie:

$$U^* = U + U_{rot} \ , \text{ de potentiële energie } \underline{\text{na}} \text{ stilzetten,} \tag{8.58}$$

voor de gegeneraliseerde krachten, na stilzetten, schrijven:

$$Q_k^* = -\frac{\partial U^*}{\partial q_k}, \ k = 1,\ldots,n \qquad (8.59)$$

Met (8.55) volgt eenvoudig:

$$\delta U^* = 0 \text{ in evenwicht} \qquad (8.60)$$

De gedefinieerde potentiële energie voor het stilgezette probleem is stationnair in een evenwichtsstand.

We besluiten deze paragraaf met twee opmerkingen

1. De functie van Lagrange, wel de kinetische potentiaal genaamd, is gedefinieerd als het verschil van kinetische- en potentiële energie $L = T - U$

   Voor het bovenstaand behandelde probleem geldt:

   $$L^* = T^* - U^* = T - U = L,$$

   zodat we constateren:

   de functie van Lagrange heeft voor en na stilzetten dezelfde waarden

2. De tweede opmerking is bedoeld om een samenvattend geheel te verkrijgen voor de paragrafen b t/m e:

   de evenwichtsstanden worden op twee manieren bepaald

   a) substitueer $\ddot{q}_k = \dot{q}_k = 0$, $k = 1,\ldots,n$, in de bewegingsvergelijkingen en bepaal de verzamelingen: $\{q_{10},\ldots,q_{n0}\}$ die de evenwichtsstanden bepalen;

   b) indien een potentiële energie is aan te geven, eventueel in de zin zoals beschreven in het voorbeeld van §e, kunnen de evenwichtsstanden worden bepaald uit de vergelijkingen:

   $$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1,\ldots,n$$

   of, bij stilzetten:

   $$Q_k^* = -\frac{\partial U^*}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1,\ldots,n.$$

f. Stabiliteit van het conservatieve evenwicht

We gaan als in §a. uit van een holonoom mechanisch stelsel, waarvan de bewegingsvergelijkingen volgens Lagrange luiden:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad , \; k = 1,\ldots,n \tag{8.61}$$

We beperken ons tot conservatieve systemen, zodat er een potentiële energie U bestaat waarmee de gegeneraliseerde krachten Q_k samenhangen volgens:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad , \; k = 1,\ldots,n \tag{8.62}$$

De functie U, veronderstellen we, hangt niet expliciet van de tijd t af:

$$U = U(q_1,\ldots,q_n) \tag{8.63}$$

We beschouwen voorts alleen die problemen waarin de kinetische energie T van de volgende vorm is:

$$T = \frac{1}{2}\,\alpha_{k\ell}(q_1,\ldots,q_n)\dot{q}_k\dot{q}_\ell + f(q_1,\ldots,q_n) \quad , \; \alpha_{k\ell} = \alpha_{\ell k} \tag{8.64}$$

waarbij de functies $\alpha_{k\ell}$, $k,\ell = 1,\ldots,n$ en f alle voldoende malen differentieerbaar worden verondersteld.
Tot de te behandelen problemen behoren dus zowel de algemene skleronome systemen, maar ook speciale rheonome systemen zoals behandeld in §e, waarbij f dan staat voor de kinetische energie van de sleepbeweging.

Om de volgende beschouwingen wat doorzichtiger te houden zullen we de notatie wat compacter maken, daarbij geleid door het volgende:

de configuratie van een mechanisch stelsel, waarvan (8.61) de bewegingsvergelijkingen zijn wordt bepaald door de verzameling $\{q_1,\ldots,q_n\}$, de verandering per tijdseenheid van die configuratie, de configuratiesnelheid, door: $\{\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n\}$. We vatten de configuratie op als een punt in $\mathbb{R}^n$ met positie $\underline{q}$, zodat:

$$\underline{q} = [q_1,q_2,\ldots,q_n]^T \tag{8.65}$$

Een beweging van het mechanisch stelsel komt dan overeen met een baan in $\mathbb{R}^n$ met parametervoorstelling:

$$\underline{q} = \underline{q}(t) \tag{8.66}$$

De snelheid langs deze baan:

$$\dot{\underline{q}} = [\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n]^T \tag{8.67}$$

kunnen we dan de configuratie snelheid noemen.
In deze opvatting zijn de kinetische energie T en de potentiële energie U functies zodanig dat: $T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$U: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

die we noteren als:

$$T = T(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) \tag{8.68}$$

en

$$U = U(\underline{q}) \tag{8.69}$$

In plaats van de functies T en U zullen we werken met de functies T^* en U^* gedefinieerd door:

$$T^* = T^*(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) = T(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) - f(\underline{q}) \tag{8.70}$$

$$U^* = U^*(\underline{q}) = U(\underline{q}) - f(\underline{q}) \tag{8.71}$$

De functie T^* kunnen we voorstellen, met (8.64), door:

$$T^* = \frac{1}{2}(\dot{\underline{q}}, A(q)\dot{\underline{q}}) \tag{8.72}$$

De van $\underline{q}$ afhankelijke lineaire afbeelding A heeft op de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ als matrix: $[\alpha_{k\ell}(\underline{q})]$
De lineaire afbeelding A is symmetrisch en positief definiet, waarbij dit laatste volgt uit:

$$T(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) > 0 \quad \text{voor } \dot{\underline{q}} \neq \underline{0} \text{ en voor alle } \underline{q}.$$

De vergelijkingen van Lagrange volgens (8.61) kunnen met gebruikmaking van (8.62) en de definities van T^* en U^* worden geschreven in de vorm:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\underline{q}}} - \frac{\partial T^*}{\partial \underline{q}} = -\frac{\partial U^*}{\partial \underline{q}} \tag{8.73}$$

De evenwichtsstanden worden bepaald door in deze vergelijkingen te substitueren: $\dot{\underline{q}} = \underline{0}$ en $\ddot{\underline{q}} = \underline{0}$
Eenvoudig volgt met de definitie van T^* dat de evenwichtsstanden in dit geval worden bepaald door de vergelijking:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \underline{q}} = \text{grad } U^* = \underline{0} \tag{8.74}$$

Een wortel van deze vergelijking, een evenwichtsstand, duiden we aan met $\underline{q}_0$.

We zullen de volgende stelling bewijzen:

Voor T^* en U^* volgens (8.70) en (8.71) (T^* en U^* hangen dus niet expliciet van de tijd af) volgt uit de vergelijking van Lagrange (8.73) de relatie:

$$T^* + U^* = \text{constant} \tag{8.75}$$

Bewijs:

- voor de functie T^* kunnen we het volgende opmerken:
  T^* is homogeen kwadratisch in $\dot{\underline{q}}$, zodat geldt:

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\underline{q}}}, \dot{\underline{q}}\right) = 2T^* \quad \text{(nagaan!)} \tag{8.76}$$

- vermenigvuldig beide leden van de vergelijking (8.74) met $\dot{\underline{q}}$:

$$\left(\dot{\underline{q}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\underline{q}}}\right) - \left(\dot{\underline{q}}, \frac{\partial T^*}{\partial \underline{q}}\right) = -\left(\dot{\underline{q}}, \frac{\partial U^*}{\partial \underline{q}}\right)$$

ofwel: $$\frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{q}}, \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\underline{q}}}\right) - \left\{\left(\ddot{\underline{q}}, \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\underline{q}}}\right) + \left(\dot{\underline{q}}, \frac{\partial T^*}{\partial \underline{q}}\right)\right\} = -\left(\dot{\underline{q}}, \frac{\partial U^*}{\partial \underline{q}}\right) \tag{8.77}$$

bedenk: $\dot{T}^* = \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\underline{q}}}, \ddot{\underline{q}}\right) + \left(\frac{\partial T^*}{\partial \underline{q}}, \dot{\underline{q}}\right)$ volgens (8.70)

en $\dot{U}^* = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \underline{q}}, \dot{\underline{q}}\right)$ volgens (8.71)

Substitutie van deze beide relaties en van (8.76) in (8.77) levert dan de vergelijking:

$$\dot{T}^* + \dot{U}^* = 0, \tag{8.78}$$

waaruit door integratie onmiddellijk (8.75) volgt.

Voor problemen waarin de functie $f = 0$ drukt (8.75) het behoud van mechanische energie voor een conservatief, holonoom, skleronoom systeem uit. De componenten van de vector $\underline{q}$ zullen in het algemeen verschillende natuurkundige dimensies hebben. Dit geldt natuurlijk ook voor de componenten van $\dot{\underline{q}}$, terwijl op grond van hun definitie overeenkomstige componenten van $\underline{q}$ en $\dot{\underline{q}}$ zeker verschillende dimensies bezitten. We zullen nu veronderstellen dat we alle grootheden hebben uitgedrukt in een natuurkundig eenhedenstelsel. We beschouwen dan verder alleen de numerieke waarden van de componenten van $\underline{q}$ en $\dot{\underline{q}}$ die dus gewone reeële getallen zijn. Ook de overige grootheden zoals T^* en U^* zullen we verder alleen scalair beschouwen zonder hun natuurkundige dimensie.

Voor het onderzoek van de stabiliteit van een evenwichtsstand $\underline{q}_0$, te bepalen met de vergelijking:

$$\text{grad } U^*(\underline{q}) = \underline{0}$$

gebruiken we de definitie van stabiliteit volgens Lijapunov:

de evenwichtsstand $\underline{q}_0$ heet <u>stabiel</u> als voor alle $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $t > t_0$ en voor alle bewegingen $\underline{q}(t)$ die voldoen aan:

$$\|\underline{q}(t_0) - \underline{q}_0\| < \delta \quad \text{én} \quad \|\dot{\underline{q}}(t_0)\| < \delta$$

geldt:

$$\|\underline{q}(t) - \underline{q}_0\| < \varepsilon \quad \text{én} \quad \|\dot{\underline{q}}(t)\| < \varepsilon$$

We beschouwen een mechanisch stelsel waarvan de functie U^* in $\underline{q}_0$ een geïsoleerd lokaal minimum heeft in de volgende betekenis:

voor zekere $R > 0$ en zekere continue, positieve, monotoon stijgende functie β: $[0,R] \to \mathbb{R}^+$, met $\beta(0) = 0$, geldt voor alle $\underline{q}$ die voldoen aan $\|\underline{q} - \underline{q}_0\| < R$ dat

$$U^*(q) - U^*(q_0) \geq \beta(\|\underline{q} - \underline{q}_0\|) \tag{8.79}$$

Omdat T^* continu en positief definiet is volgens (8.72) geldt voor T^* iets dergelijks, dus:

voor zekere $R > 0$ bestaat er een continue, positieve, monotoon stijgende functie α: $[0,R] \to \mathbb{R}^+$, met $\alpha(0) = 0$, z.d.d. voor alle $\dot{\underline{q}}$ en $\underline{q}$ die voldoen aan $\|\dot{\underline{q}}\| < R$ én $\|\underline{q} - \underline{q}_0\| < R$ dat

$$T^*(\dot{\underline{q}},\underline{q}) \geq \alpha(\|\dot{\underline{q}}\|) \tag{8.80}$$

De beide waarden van R in bovenstaande definities mogen gelijk worden genomen in het volgende.

We formuleren nu de volgende stelling:

Als U^* in q_0 een lokaal minimum heeft in de zin van (8.79) dan is de evenwichtsstand q_0 stabiel.

Bewijs: laat t_0, $R > 0$ en $\varepsilon > 0$ zijn gegeven.
Omdat T^* en U^* beide continu zijn en $T^*(0,q_0) = 0$ is er een $\delta = \delta(t_0,\varepsilon,R)$ zodanig dat voor alle $\dot{\underline{q}}(t_0)$ en $\underline{q}(t_0)$ die voldoen aan:

$$\|\dot{\underline{q}}(t_0)\| < \delta \text{ én } \|\underline{q}(t_0) - \underline{q}_0\| < \delta$$

geldt:

$$T^*(\dot{\underline{q}}(t_0),\underline{q}(t_0)) + U^*(\underline{q}(t_0)) - U^*(\underline{q}_0) < \min(\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon))$$

Voor zekere $t > t_0$ geldt dan met gebruikmaking van (8.73) en (8.75):

$$\alpha(\|\dot{\underline{q}}(t)\|) + \beta(\|\underline{q}(t) - \underline{q}_0\|) \le T^*(\dot{\underline{q}}(t),\underline{q}(t)) + U^*(\underline{q}(t)) - U^*(\underline{q}_0)$$

$$= T^*(\dot{\underline{q}}(t_0),\underline{q}(t_0)) + U^*(\underline{q}(t_0)) - U^*(\underline{q}_0) < \min(\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)) \qquad (8.81)$$

Uit (8.81) volgt eenvoudig, α en β niet-negatief,

$$\alpha(\|\dot{\underline{q}}(t)\|) < \alpha(\varepsilon) \qquad (8.82)$$

$$\beta(\|\underline{q}(t) - \underline{q}_0\|) < \beta(\varepsilon)$$

waaruit op grond van de monotonie van α en β volgt:

$$\|\dot{\underline{q}}(t)\| < \varepsilon \text{ én } \|\underline{q}(t) - \underline{q}_0\| < \varepsilon \qquad (8.83)$$

Nemen we $\delta \in (0,R)$ klein genoeg, dan wordt de "rand" van het gebied nimmer bereikt en is (8.83) geldig voor alle $t \ge t_0$.

g. Kleine trillingen om een stabiele evenwichtsstand

We beschouwen opnieuw het probleem zoals beschreven in de vorige paragraaf, met bewegingsvergelijkingen volgens (8.73). De functie T^* kan worden voorgesteld door:

$$T^* = \frac{1}{2}(\dot{\underline{q}},\mathcal{A}(\underline{q})\dot{\underline{q}}) \qquad (8.84)$$

waarbij we veronderstellen dat $\mathcal{A}(\underline{q})$ continu differentieerbaar is in $\underline{q}$.
Van de functie $U^*(\underline{q})$ veronderstellen we dat hij tweemaal continu differentieerbaar is in een omgeving van de evenwichtsstand $\underline{q}_0$, een wortel van de vergelijking grad $U^*(\underline{q}) = \underline{0}$.
We definiëren de functies $\beta_{k\ell}$, $k,\ell = 1,\dots,n$ door:

$$\beta_{k\ell} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial q_k \partial q_\ell} \qquad (8.85)$$

We definiëren $\mathcal{B}(\underline{q})$ als de symmetrische lineaire afbeelding met $B = [\beta_{k\ell}]$ als matrix betrokken op de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$.

Een beweging $\underline{q}(t)$ "in de buurt van de evenwichtsstand $\underline{q}_0$" stellen we voor door:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0 + \varepsilon\, \underline{\eta}(t) \tag{8.86}$$

We veronderstellen dat $\underline{\eta}$ continu differentieerbaar is en van ε veronderstellen we: $0 < \varepsilon << 1$.
Zouden we $\underline{q}(t)$ volgens (8.86) substitueren in de bewegingsvergelijking (8.73), dan gaat deze over in een tweede orde differentiaalvergelijking voor $\underline{\eta}$ met ε als (kleine) parameter.
Op grond van de continue differentieerbaarheid van de verschillende grootheden zullen we een goede benadering (zeker voor kleine t) voor de functie $\varepsilon\, \underline{\eta}(t)$ als oplossing van deze differentiaalvergelijking vinden wanneer we alle termen lineair naar ε benaderen.
We schrijven verder $\delta(t)$ voor de benaderingsoplossing $\varepsilon\, \underline{\eta}(t) = \underline{q}(t) - \underline{q}_0$.
Eenvoudig volgt dat $\underline{\delta}(t)$ een oplossing is van de lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten en van de tweede orde

$$A(\underline{q}_0)\, \underline{\ddot{\delta}} + B(\underline{q}_0)\underline{\delta} = \underline{0}\,, \tag{8.87}$$

bij verwaarlozing van tweede en hogere orde termen in ε.

Van de begincondities $\underline{\delta}(t_0)$ en $\underline{\dot{\delta}}(t_0)$ op zeker ogenblik t_0 zullen we veronderstellen:

$$\|\underline{\delta}(t_0)\| < \delta \text{ en } \|\underline{\dot{\delta}}(t_0)\| < \delta \quad \text{voor zekere positieve } \delta << 1. \tag{8.88}$$

De karakteristieke vergelijking van (8.87) is:

$$\det[\lambda A + B] = 0 \tag{8.89}$$

De lineaire afbeelding A is positief definiet. Als de functie U naar beneden begrens is volgens (8.79) volgt dat de lineaire afbeelding dan niet-negatief is. We veronderstellen verder dat hij positief-definiet is. Op grond van de symmetrie van A en B zijn dan alle eigenwaarden λ_k, $k = 1,\ldots,n$, van de vergelijking (8.89) reëel.
Omdat A en B beide positief definiet zijn, zijn deze eigenwaarden tevens negatief. We veronderstellen dat ze onderling verschillend zijn en gerangschikt kunnen worden volgens:

$$0 < -\lambda_1 < -\lambda_2 < \ldots$$

en definiëren:

$$\omega_k = \sqrt{-\lambda_k}\,,\ k = 1,\ldots,n \tag{8.90}$$

De getallen ω_k zijn positief en, bij veronderstelling, onderling verschillend. Ze heten de eigenfrequenties van kleine trillingen om een stabiele evenwichtsstand. De oplossingen van (8.87) kunnen we voorstellen door:

$$\underline{\delta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \{\underline{a}_k \cos \omega_k t + \underline{b}_k \sin \omega_k t\} \;, \tag{8.91}$$

waarbij $\underline{a}_k$ en $\underline{b}_k$ voldoen aan de vergelijking:

$$\lambda_k A\underline{x} + B\underline{x} = \underline{0} \;\;, \; \underline{x} \neq \underline{0} \tag{8.92}$$

en, op grond van de stabiliteit, voor zekere kleine $\varepsilon > 0$, aan de relaties:

$$\sum_{k=1}^{n} |\underline{a}_k| < \varepsilon \qquad \sum_{k=1}^{n} \omega_k |\underline{b}_k| < \varepsilon \tag{8.93}$$

Afgeleid is de volgende stelling:

> in een (kleine) omgeving van een stabiele evenwichtsstand is de oplossing van het gelinearizeerde probleem met eigenfrequenties ω_k, $k = 1,\ldots,n$, $\omega_k \neq \omega_\ell$ voor $k \neq \ell$, onder zekere extra voorwaarden een samengestelde trilling volgens (8.91).

We gebruiken deze stelling dikwijls in de volgende vorm:

> heeft het gelinearizeerde probleem in een omgeving van de evenwichtsstand verschillende eigenwaarden, maar geen oplossing van de vorm (8.91), dan is de evenwichtsstand instabiel.

We gaan niet in op de gevallen dat een tweetal eigenfrequenties gelijk is. Hoewel de oplossing van het gelinearizeerde probleem opnieuw expliciet kan worden weergegeven als in (8.91).

9. Enkele eerste integralen en de vergelijkingen van Hamilton

In dit hoofdstuk willen we aandacht besteden aan enkele grootheden, functies van de gegeneraliseerde coördinaten, die bij de beweging van een mechanisch stelsel constant zijn. Dergelijke grootheden noemen we integralen van de beweging. In het tweede deel worden de vergelijkingen van Hamilton afgeleid. Deze vergelijkingen geven technisch niet meer informatie dan de vergelijkingen van Lagrange ze zijn echter van belang in een verdere ontwikkeling van de Theoretische Mechanica en in de Quantummechanica.

a. Lineaire integralen

Beschouw de vergelijkingen van Lagrange voor een holonoom systeem

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \ , \ k = 1,\ldots,n \tag{9.1}$$

Als voor zekere $m \in \{1,\ldots,n\}$ geldt:

$$\frac{\partial T}{\partial q_m} = 0 \text{ én } Q_m = 0 \tag{9.2}$$

volgt met (9.1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = \text{constant} \tag{9.3}$$

Omdat de uitdrukking voor de kinetische energie de grootheden $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n$, kwadratisch bevat, komen deze grootheden in het linkerlid van (9.3) lineair voor.

b. Algemene integralen

Beschouw de uitdrukking van de kinetische energie T volgens:

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho(\underline{v},\underline{v})\,dV \tag{9.4}$$

waarin: $\underline{x} = \underline{x}(q_1,\ldots,q_n,t)$ (9.5)

en $$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \tag{9.6}$$

Substitutie van (9.6) in (9.4) levert in T een uitdrukking die we opvatten als een som van drie termen:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \tag{9.7}$$

waarbij:

$$T_0 = \frac{1}{2}\int_V \rho(\frac{\partial \underline{x}}{\partial t},\frac{\partial \underline{x}}{\partial t})\, dV \tag{9.8}$$

$$T_1 = \int_V \rho(\frac{\partial \underline{x}}{\partial t},\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k})\, dV\ \dot{q}_k \tag{9.9}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_V \rho(\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k},\frac{\partial \underline{x}}{\partial q})\, dV\ \dot{q}_k\dot{q}_\ell \tag{9.10}$$

We merken op dat voor een skleronoom systeem, dus wanneer:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \underline{0} \tag{9.11}$$

voor alle deeltjes van het stelsel,

$$T_0 = T_1 = 0 \tag{9.12}$$

We vermenigvuldigen de k-de vergelijking van Lagrange met de bijbehorende $\dot{q}_k$ en sommeren over k:

$$(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k})\dot{q}_k = Q_k\ \dot{q}_k \tag{9.13}$$

Hiervoor kunnen we schrijven:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\ \dot{q}_k) - (\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\ \ddot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}\ \dot{q}_k) = Q_k\ \dot{q}_k \tag{9.14}$$

Substitutie van (9.4) en gebruikmakend van de definities (9.8), (9.9) en (9.10) levert:

$$\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_2) - \frac{d}{dt}(T_0 + T_1 + T_2) = Q_k\dot{q}_k - \frac{\partial}{\partial t}(T_0 + T_1 + T_2) \tag{9.15}$$

ofwel:

$$\dot{T}_2 - \dot{T}_0 = Q_k\dot{q}_k - \frac{\partial T}{\partial t}\ . \tag{9.16}$$

Als een functie V bestaat zodanig dat:

$$\dot{V} = Q_k \dot{q}_k - \frac{\partial T}{\partial t} \tag{9.17}$$

onstaat de integraal:

$$T_2 - T_0 = V + \text{constante} \tag{9.18}$$

Deze integraal heet de integraal van Painlevé.

Twee bijzondere gevallen van bovenstaande zijn:

A: De functie V kan worden geschreven als:

$$V = - U(q_1,\ldots,q_n) \tag{9.19}$$

terwijl:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{9.20}$$

In dat geval verkrijgen we:

$$T_2 - T_0 + U = \text{constant} \tag{9.21}$$

(Denk aan het probleem van §8.e.!)

B: Het systeem is skleronoom en de gegeneraliseerde krachten Q_k voldoen aan:

$$Q_k = - \frac{\partial U}{\partial q_k} \text{ , } U = U(q_1,\ldots,q_n) \tag{9.22}$$

dan:

$$\begin{aligned} V &= - U(q_1,\ldots.,q_n) \\ T_1 &= T_2 = 0 \end{aligned} \tag{9.23}$$

In dat geval geldt: $T = T_2$ en met (9.18) volgt dan:

$$T + U = \text{constant}$$

Behoud van mechanische energie.

Het is nuttig bij het maken van vraagstukken na te gaan of er bewegingsintegralen zijn. Als er bewegingsintegralen zijn heeft men de mogelijkheid om de tweede orde differentiaalvergelijkingen althans ten dele te integreren tot eerste orde differentiaalvergelijkingen.

c. De vergelijkingen van Hamilton

In deze paragraaf willen we aandacht besteden aan de transformatie van de bewegingsvergelijkingen van Lagrange, een stelsel van n differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, tot de vergelijkingen van Hamilton, een stelsel van 2n differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Een dergelijke transformatie is natuurlijk op vele manieren mogelijk maar de transformatie naar de Hamilton-vergelijkingen laat zeer aantrekkelijke natuurkundige interpretaties toe.
We zullen ons beperken tot een holonoom conservatief systeem. Deze beperking is niet noodzakelijk, ook het niet-holonome, rheonome, nietconservatieve probleem kan zowel volgens Lagrange als volgens Hamilton worden behandeld.
We doen bovenstaande keuze om nodeloze complicaties te vermijden.

We gaan uit van de bewegingsvergelijkingen van Lagrange, waarin de gegeneraliseerde krachten Q_k samenhangen met een potentiële energie

$$U = U(q_1,\dots,q_n,t) \tag{9.24}$$

volgens:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad , \quad k = 1,\dots,n \tag{9.25}$$

We definiëren de functie $\mathcal{L}$ van Lagrange, de kinetische potentiaal, volgens

$$\mathcal{L} = T - U, \tag{9.26}$$

waarbij we $\mathcal{L}$ opvatten als een functie van de vorm:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,q_1,\dots,q_n,t) \tag{9.27}$$

De vergelijkingen van Lagrange luiden dan:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad , \quad k = 1,\dots,n \tag{9.28}$$

We definiëren de gegeneraliseerde impuls p_k volgens:

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \quad , \quad k = 1,\ldots,n \quad , \mathcal{L} \text{ volgens } (9.27) \tag{9.29}$$

De gegeneraliseerde impuls kunnen we dus opvatten als een functie van de vorm:

$$p_k = p_k\,(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,q_1,\ldots,q_n,t) \quad , \quad k = 1,\ldots,n \tag{9.30}$$

In veel gevallen is het mogelijk deze functies zodanig te inverteren dat we uit (9.25) de volgende relaties kunnen afleiden:

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(p_1,\ldots,p_n,\ q_1,\ldots,q_n,t) \quad , \quad k = 1,\ldots,n \tag{9.31}$$

Substitutie van (9.31) in (9.27) levert ons een voorstelling van de functie van Lagrange die we op de volgende wijze kunnen opvatten:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^*(p_1,\ldots,p_n,\ q_1,\ldots,q_n,t) \tag{9.32}$$

We merken op dat $\mathcal{L}^*$ staat voor een andere functie dan $\mathcal{L}$ uit het rechterlid van (9.27), de waarden van $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}^*$ zijn echter gelijk:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,q_1,\ldots,q_n,t) = \mathcal{L}^*(p_1(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,q_1,\ldots,q_n,t)\ldots p_n,q_1,\ldots,q_n,t) \tag{9.33}$$

De functie van Hamilton is gedefinieerd door de Legendre-transformatie volgens:

$$H(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n,t) = p_k\dot{q}_k(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n,t) - \mathcal{L}^*(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n,t) \tag{9.34}$$

waarvoor we kortweg schrijven:

$$H = p_k\dot{q}_k - \mathcal{L},\ \dot{q}_k \text{ volgens } (9.31) \text{ en } \mathcal{L} \text{ volgens } (9.32) \tag{9.35}$$

De bewegingsvergelijkingen van Lagrange gaan dan over in:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \quad , \quad k = 1,\ldots,n \tag{9.36}$$

waarin:

$\mathcal{L}$ volgens (9.27) en daarna substitutie van (9.31).

Tussen de functies van Lagrange, volgens 9.27, en van Hamilton bestaan de volgende relaties:

1) $\dfrac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad , \quad k = 1,\ldots,n,$ (9.37)

2) $\dfrac{\partial H}{\partial q_k} = - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = - \dot{p}_k \quad , \quad k = 1,\ldots,n,$ (9.38)

3) $\dfrac{\partial H}{\partial t} = - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\ .$ (9.39)

De vergelijkingen (9.37) en (9.38) vormen de bewegingsvergelijkingen volgens Hamilton. Zij heten ook wel de kanonieke vergelijkingen.

Bewijs van 1):

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + p_\ell \frac{\partial q_\ell}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial p_k} \quad , \quad \mathcal{L}^* \text{ volgens (9.32)}$$

$$= \dot{q}_k + p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_k} \quad , \quad \mathcal{L} \text{ volgens (9.27) en } \dot{q}_\ell \text{ volgens (9.31)}$$

$$= \dot{q}_k + p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_k} - p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_k}$$

$$= \dot{q}_k \quad , \quad k = 1,\ldots,n$$

Bewijs van 2):

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_k} \qquad \mathcal{L}^* \text{ volgens (9.32) en } \dot{q}_\ell \text{ volgens (9.31)}$$

$$= p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \qquad \mathcal{L} \text{ volgens (9.27)}$$

$$= p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial q_k} - p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$$= - \dot{p}_k \ , \ k = 1,\ldots,n \qquad \text{(met 9.36)}$$

Bewijs van 3):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad \text{gebruik (9.37) en (9.38)}$$

$$= \frac{dH}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \qquad , \mathcal{L} \text{ volgens (9.27)}$$

$$= \dot{q}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \qquad \text{gebruik (9.28)}$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad .$$