

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

Compendium en Uitgewerkte Opgaven

behorende bij het college

THEORETISCHE MECHANICA

van

Prof.Dr. J.A. Alblas

Voorjaar 1970

BoblWsk

Onderafdeling der Wiskunde

Compendium

BEHORENDE BIJ HET COLLEGE THEORETISCHE MECHANICA
VAN PROF. DR. J.B. ALBLAS

VOORJAARSSEMESTER 1970



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 249

PRIJS f 1,50

Inhoudsbeschrijving
Compendium en Uitgewerkte Opgaven
Theoretische Mechanica

1. Kinematica.	blz 1.
2. Relatieve Beweging.	2.
3. Massa meetkunde.	3.
4. Massa kinematica.	4.
5. Krachten en momentenleer. Potentiële energie.	5.
6. Principe van de virtuele Arbeid. Evenwicht.	7.
7. Zwaartepunts- en momentenstelling. Vergelijkingen van Lagrange.	8.
8. Beweging in een niet-inertiale ruimte.	9.
9. Kinetische evenwicht. Lineariseren en kleine Trillingen.	12.
10. Stoten, Botsen en Fixeren	13.
11. Uitgewerkte Opgaven 1-11	15 - 51.

1. Kinematica

Een mechanisch stelsel is een verzameling elementen die materiële punten worden genoemd. Dikwijls worden de woorden stelsel en punt gebruikt terwijl mechanisch stelsel en materieel punt bedoeld worden.

Een bijzonder stelsel is de puntmassa (of het massapunt), een stelsel bestaande uit één punt.

De positie van een mechanisch stelsel in een gegeven Euclidische ruimte met gegeven oorsprong is bepaald door aan elk punt van het stelsel een radiusvector, de plaats, toe te kennen.

De plaats van een punt is in het algemeen een functie van de parameter tijd, aangeduid met t .

De beweging van een mechanisch stelsel is bepaald door aan elk materieel punt P , plaats \vec{r} , een vector \vec{v} , de snelheid van P toe te kennen.

De snelheid \vec{v} , dikwijls aangeduid met $\dot{\vec{r}}$ is gedefinieerd door:

$$\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (1)$$

Een derde belangrijke grootte is de versnelling. De versnelling van een materieel punt P , plaats \vec{r} , wordt aangeduid met \vec{a} , dikwijls met $\ddot{\vec{r}}$ en is gedefinieerd door:

$$\vec{a}(t) := \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (2)$$

Een star lichaam is een mechanisch stelsel waarvan de afstand van elk tweetal punten, de grootte van het verschil van de radiusvectoren, in de tijd constant is. Voor de beweging van een star lichaam geldt de volgende stelling:

Er bestaat een vector $\vec{\omega}$, de hoeksnelheid, zodanig dat voor elk tweetal punten A en B het volgende verband bestaat tussen hun snelheden:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}, \quad (3)$$

waarbij $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.

Een mechanisch stelsel is in rust als de snelheid van alle punten nul is. Een mechanisch stelsel transleert als de snelheid van alle punten dezelfde is. Een star lichaam roteert om een plaats als het punt dat zich op die plaats bevindt geen snelheid bezit. Met behulp van formule (3) is

de beweging van een star lichaam op te vatten als een translatie met een punt mee en een rotatie om de plaats van dat punt.

Een star lichaam roteert om een lijn (van plaatsen !) als de punten die zich op dit lijn bevinden geen snelheid bezitten.

Bij twee starre lichamen die elkaar raken, wordt de beweging dikwijls gesplitst in een beweging in het raakvlak (de tangentiële beweging) en een loodrecht daarop (de normale beweging). O.a. kunnen de volgende gevallen zich voordoen:

de lichamen rollen over elkaar : de snelheden van de raakpunten zijn gelijk;

de lichamen glijden over elkaar : de normale snelheden van de raakpunten zijn gelijk, de tangentiële niet.

2. Relatieve beweging

Laat E_1 een Euclidische ruimte met oorsprong O en E_2 een Euclidische ruimte met oorsprong o zijn. De vector \vec{Oo} wordt voorgesteld door \vec{R} .

Analoog aan de beweging van een star lichaam t.o.v. E_1 kan men spreken over de beweging van E_2 t.o.v. E_1 . Laat $\vec{\omega}$ de hoeksnelheid van dit beweging zijn en veronderstel dat E_1 in rust is en blijft.

De beweging van een mechanisch stelsel t.o.v. E_1 , de absolute beweging, kan worden gesplitst in een beweging t.o.v. E_2 , de relatieve beweging en een t.g.v. de beweging van E_2 t.o.v. E_1 , de sleeptbeweging.

Laat \vec{r} de plaats zijn van een materieel punt P in E_2 , dus $\vec{r} = \vec{oP}$.

De snelheid van P t.o.v. E_2 , de relatieve snelheid, aangeduid met \vec{v}_{rel} , is de snelheid \vec{v}_{abs} van P verminderd met de snelheid van de plaats die P in E_2 bezet, de sleept snelheid. De versnelling van P t.o.v. E_2 , de relatieve versnelling, aangeduid met \vec{a}_{rel} , is de versnelling \vec{a}_{abs} van P verminderd met de versnelling van de plaats die P in E_2 bezet, de sleept versnelling, en de coriolisversnelling.

$$\text{Met : de sleept snelheid } \vec{v}_{sl} := \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (4)$$

$$\text{de sleept versnelling } \vec{a}_{sl} := \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (5)$$

$$\text{de coriolisversnelling } \vec{a}_{cor} := 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \quad (6)$$

gelden voor bovenstaande grootheden dus de volgende betrekkingen:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{abs} - \vec{v}_{sl}, \quad (7)$$

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{abs} - \vec{a}_{sl} - \vec{a}_{cor}. \quad (8)$$

3. Massa meetkunde

In het volgende komen integralen voor van de vorm $\int_V F \rho \, dV$.

Hierin is ρ de dichtheid, V het volume dat het mechanisch stelsel inneemt en F een functie gedefinieerd op dat gebied.

Voor een driedimensionaal continu stelsel is de betekenis van de integraal duidelijk. Voor een lager dimensionaal continu stelsel, of voor een stelsel bestaande uit een eindig aantal punten, moet bovenstaande integraal worden vervangen voor een oppervlakte- of lijnintegraal, of een eindige som. B.v. voor een massapunt, ketting, staaf, schijf, plaat, schaal enz. De plaats van het zwaartepunt is gedefinieerd door:

$$\vec{r}_0 := \frac{\int_V \vec{r} \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} \quad (9)$$

De massa van het stelsel, $M := \int_V \rho \, dV$. (10)

Kiest men een orthonormale basis in de Euclidische ruimte dan is ten opzichte van een willekeurige plaats P de traagheidstensor J gedefinieerd door de matrix:

$$J = \{J_{ij}\} \quad , \quad J_{ij} := \int_V (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) \rho \, dV, \quad (11)$$

waarbij x_1 , x_2 en x_3 de componenten zijn van de afstand van P tot de plaats die een materieel punt inneemt. (Denk aan de sommatie over de dummy-index.)

Kiest men voor P de plaats van het zwaartepunt dan wordt de tensor aangeduid met J_0 en heet de centrale traagheidstensor.

Voor het verband tussen J_0 en J om P op afstand \vec{a} van het zwaartepunt geldt de stelling van Steiner:

$$J_{ij} = J_{0ij} + M(\delta_{ij} a_k a_k - a_i a_j). \quad (12)$$

Opmerking:

Het is door de symmetrie van J (immers $J_{ij} = J_{ji}$) altijd mogelijk door een draaiing van de orthonormale basis de matrix J op diagonaalvorm te

brengen. De bijbehorende coördinaatassen door P heten dan hoofdtraagheidsassen. Brengt men J_o op diagonaalvorm dan heten die assen centrale hoofdtraagheidsassen.

In dat geval is t.o.v. een x,y,z-assenkruis

$$J_{xx} = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV, \quad J_{yy} = \int_V \rho (z^2 + x^2) dV \quad \text{en} \quad J_{zz} = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV. \quad (13)$$

De grootheden J_{xx} , J_{yy} en J_{zz} zijn de (ev. centrale) hoofdtraagheidsmomenten.

4. Massa kinematica

De hoeveelheid van beweging of impuls is gedefinieerd door:

$$\vec{p} := \int_V \vec{v} \rho dV \quad (14)$$

en is, als de massa van het stelsel, $\int_V \rho dV$ constant is, voor te stellen

door: $\vec{p} = M \vec{v}_o$, waarbij \vec{v}_o de snelheid van het zwaartepunt is.

Het moment van hoeveelheid van beweging of impulsmoment om een plaats P is gedefinieerd door:

$$\vec{D}_P := \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho dV, \quad (15)$$

waarbij \vec{r} de afstand van P tot de plaats van een punt is. Kiest men voor de plaats die van het zwaartepunt dan schrijft men \vec{D}_o voor het impulsmoment om de plaats van het zwaartepunt.

Het impulsmoment om willekeurige P is voor te stellen door:

$$\vec{D}_P = \vec{D}_o + \vec{r}_o \times \vec{p}, \quad (16)$$

waarbij \vec{r}_o de afstand van P tot de plaats van het zwaartepunt is.

Voor een star lichaam geldt:

$$\vec{D}_o = J_o \vec{\omega}, \quad \text{in componenten: } D_{oi} = J_{oij} \omega_j \quad (17)$$

en om de centrale hoofdtraagheidsassen (aangeduid met x-, y- en z-as)

$$D_{ox} = J_{oxx} \omega_x, \quad D_{oy} = J_{oyy} \omega_y \quad \text{en} \quad D_{oz} = J_{ozz} \omega_z. \quad (18)$$

De kinetische energie van een mechanisch stelsel is gedefinieerd door:

$$T := \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV, \quad (19)$$

waarin v de grootte van de snelheid van een punt.

Voor een star lichaam is de kinetische energie voor te stellen door:

$$T = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{D}_O \cdot \vec{\omega}, \quad (20)$$

of met componenten:

$$T = \frac{1}{2} M v_{oi} v_{oi} + \frac{1}{2} J_{oij} \omega_i \omega_j, \quad (21)$$

en t.o.v. centrale hoofdtraagheidsassen x , y en z door:

$$T = \frac{1}{2} M (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} (J_{oxx} \omega_x^2 + J_{oyy} \omega_y^2 + J_{ozz} \omega_z^2). \quad (22)$$

De kinetische energie is dus de som van de translatie-energie t.g.v. de translatie met het zwaartepunt mee en de rotatie-energie t.g.v. de rotatie om de plaats van het zwaartepunt.

Opmerking:

Bestaat het stelsel uit meerdere delen dan is de impuls, het impulsmoment en de kinetische energie van het stelsel gelijk aan de som van deze grootheden betrokken op de afzonderlijke delen. Bedenk dat de kinetische energie niet additief is in de snelheid.

5. Krachten- en momentenleer. Potentiële energie.

Krachten en momenten worden verdeeld in belastingskrachten of -momenten en reactiekrachten en -momenten. De belastingskrachten of -momenten verrichten bij virtuele verplaatsingen arbeid, reactiekrachten of -momenten doen dit niet.

Als in een bepaald ruimtelijk gebied de kracht gegeven is als functie van de plaats, spreekt men van een krachtveld \vec{k} . Op een punt dat beweegt in dat gebied wordt arbeid verricht. Als de arbeid alleen maar afhankelijk is van het begin- en eindpunt van de door het materiële punt gevolgde weg heet het krachtveld conservatief en bestaat er een functie (scalair), de potentiaal u zodanig dat:

$$\vec{k} = - \text{grad } u. \quad (23)$$

De potentiële energie van een mechanisch stelsel dat beweegt onder invloed van een conservatief krachtveld met potentiaal u is gedefinieerd door:

$$U := \int_V u \, dV. \quad (24)$$

De potentiaal wordt geïntegreerd over de plaatsen die door punten van het stelsel worden bezet.

Hoewel het aantal punten van een mechanisch stelsel in het algemeen oneindig groot is, zal het aantal gegeneralizeerde coördinaten in het algemeen eindig zijn (definitie dictaat!).

Ondergaan deze coördinaten virtuele veranderingen, variaties, dan verandert de positie van het mechanisch stelsel waarbij virtuele arbeid wordt verricht.

Deze virtuele arbeid is voor te stellen door:

$$\delta A = \int_V \vec{k}^{(b)} \cdot \delta \vec{r} \, dV, \quad (25)$$

en in de gegeneralizeerde coördinaten door:

$$\delta A = Q_{q_k} \delta q_k. \quad (\text{sommen!}) \quad (26)$$

De coëfficiënten Q_{q_k} heten de gegeneralizeerde krachten.

Opgemerkt moet worden dat, aangezien q_k niet noodzakelijk een lengte is, de bijbehorende Q_{q_k} niet noodzakelijk de dimensie van een kracht heeft.

Als q_k een hoek is, heeft Q_{q_k} de dimensie van een moment.

Als de krachtdichtheid $\vec{k}^{(b)}$ is af te leiden van een potentiaal volgt voor de virtuele arbeid:

$$\delta A = -\delta U, \quad (27)$$

en voor de gegeneralizeerde krachten:

$$Q_{q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (28)$$

Dikwijl is een deel van δA voor te stellen door $-\delta U$. De gegeneralizeerde krachten worden dan gesplitst volgens:

$$Q_{q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + Q_{q_k}^*, \quad (29)$$

waarin $Q_{q_k}^*$ niet is af te leiden van een potentiaal maar bepaald wordt met formule (26).

6. Principe van de Virtuele Arbeid. Evenwicht.

Een stelsel krachten en momenten is in evenwicht als de resulterende kracht en het resulterende moment beide nul zijn.

In een evenwichtsstand van een stelsel geldt het principe van de virtuele arbeid:

$$\delta A = 0, \text{ dus } Q_k = 0 \text{ (} q_k \text{ willekeurig te kiezen!)} \quad (30)$$

Als A is voor te stellen door $-\delta U$ geldt in een evenwichtsstand dus:

$$\delta U = 0, \quad (31)$$

en mits U differentieerbaar is:

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \quad (32)$$

hetgeen betekent dat in een evenwichtsstand de potentiële energie van een mechanisch stelsel dat zich in een conservatief krachtveld bevindt stationair is.

De evenwichtsstand heet stabiel als de stationaire waarde van de potentiële energie een minimum is.

Als de potentiële energie als functie van de gegeneralizeerde coördinaten voldoende malen differentieerbaar is, moet in het geval van een stabiele evenwichtsstand de matrix:

$$\left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right\} \text{ positief definitief zijn.}$$

Voor een stelsel met één graad van vrijheid betekent dat:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0, \quad (33)$$

terwijl bij twee graden van vrijheid simultaan moet worden voldaan aan:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2 > 0. \end{cases} \quad (34)$$

7. Zwaartepunts- en momentenstelling. Vergelijkingen van Lagrange.

Het principe van d'Alembert stelt dat voor virtuele verplaatsingen $\delta \vec{r}$ van de punten van een mechanisch stelsel dat beweegt in een inertiale ruimte geldt:

$$\delta A := \int_V \left\{ \vec{K}^{(b)} - \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) \right\} \cdot \delta \vec{r} \, dV = 0. \quad (35)$$

Voor een puntmassa volgt hieruit:

$$K^{(b)} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}), \text{ de tweede wet van Newton.} \quad (36)$$

Voor een mechanisch stelsel volgen uit het principe van d'Alembert:

de zwaartepuntsstelling: $K^{(b)} = \dot{p}$, (37)

waarbij $\vec{K}^{(b)}$ de resultante van de belastingskrachten is, en

de momentenstelling om een willekeurige plaats P:

$$\vec{M}_P^{(b)} = \dot{D}_P, \quad (38)$$

waarbij $\vec{M}_P^{(b)}$ het resulterende moment om P van de belastingsmomenten om P is.

De momentenstelling geldt in het algemeen niet om een bewegend punt, een uitzondering hierop is het zwaartepunt, zodat om het (bewegende) zwaartepunt geldt:

$$\vec{M}_O = \dot{D}_O. \quad (39)$$

Als voor een mechanisch stelsel gegeneraliseerde coördinaten zijn aan te geven, volgen uitgaande van het principe van d'Alembert de vergelijkingen van Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \quad (40)$$

Deze vergelijkingen zijn gelijkwaardig met de zwaartepunts- en momentenstelling.

Als de gegeneraliseerde krachten (of een deel er van) zijn af te leiden van een potentiaal dan gaat (40) met de definitie van de functie van Lagrange:

$$L := T - U, \quad (41)$$

over in:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \text{ of } Q_k^*. \quad (42)$$

Voor de beweging van een mechanisch stelsel geldt nog de volgende stelling: Als van een mechanisch stelsel de potentiële energie U en kinetische energie T niet expliciet van de tijd afhangen en alle krachten en momenten die op het stelsel werken zijn af te leiden van een potentiaal, dan geldt:

$$T + U = \text{constant}, \quad (43)$$

gedurende de beweging van het stelsel.

Bovenstaande formule (43) is een integraal van de bewegingsvergelijkingen en vooral in systemen met één graad van vrijheid, mits aan de gestelde eisen is voldaan, zeer bruikbaar.

8. Beweging in een niet-inertiële ruimte

Als men geïnteresseerd is in de beweging van een mechanisch stelsel in een niet-inertiële ruimte, waarvan de beweging t.o.v. een inertiële ruimte bekend is, zal in het algemeen de volgende methode het beste zijn:

Stel met behulp van de in paragraaf 7 aangegeven stellingen de bewegingsvergelijkingen op voor de beweging t.o.v. de inertiële ruimte en pas deze daarna aan voor de beweging in de niet-inertiële ruimte. In enkele speciale gevallen heeft het zin de bewegingsvergelijkingen direct in de niet-inertiële ruimte te formuleren.

Noemt men de beweging in de inertiële ruimte de absolute beweging en die in de niet-inertiële ruimte de relatieve, dan volgt met (8) het principe van d'Alembert voor de beweging van een mechanisch stelsel in een niet-inertiële ruimte:

$$\delta A := \int_V \{ (\vec{k}^{(b)} - \rho \vec{a}_{sl} - \rho \vec{a}_{cor}) - \rho \vec{a}_{rel} \} \cdot \delta \vec{r} \, dV = 0. \quad (44)$$

Voor een puntmassa volgt:

$$\vec{k}^{(b)} - m \vec{a}_{sl} - m \vec{a}_{cor} = m \vec{a}_{rel}, \quad (45)$$

waarbij $-m \vec{a}_{sl}$ en $-m \vec{a}_{cor}$ schijnkrachten worden genoemd.

Als de beweging van de niet-inertiale ruimte een translatie is met een versnelling \vec{a}_{sl} , welke constant van richting is, en de massa van het mechanisch stelsel is constant, volgt:

$$\vec{K}^{(b)} - M \vec{a}_{sl} = M \vec{a}_{rel} . \quad (46)$$

Een veel voorkomend geval is het volgende:

Een vlak W , de niet-inertiale ruimte, roteert met constante hoeksnelheid ω om een lijn ℓ uit de inertiale ruimte. Een mechanisch stelsel beweegt in W . De massa van het stelsel is constant. Krachten loodrecht op W hebben géén invloed op de beweging van het stelsel in W .

Noem $\vec{z}_0 := Z_0 Z$, waarbij Z de plaats van het zwaartepunt in W en Z_0 de projectie van Z op ℓ is.

Uit (44) volgt:

$$\vec{K}_W^{(b)} + \vec{K}_{rot} = M \vec{a}_0 rel , \quad (47)$$

de zwaartepuntsstelling, waarbij $\vec{a}_0 rel$ de relatieve versnelling van het zwaartepunt is, $\vec{K}_W^{(b)}$ de component in W van de resulterende belastingskracht en \vec{K}_{rot} , de centrifugaalkracht, gedefinieerd door:

$$\vec{K}_{rot} = M \omega^2 \vec{z}_0 . \quad (48)$$

Opgemerkt dient te worden dat in het algemeen de drager van \vec{K}_{rot} niet door Z gaat.

Definieer, met \vec{r} de plaats in W gemeten vanuit een bepaalde plaats P van W :

$$\dot{\vec{D}}_{\perp} := \int_V \vec{r} \times \vec{a}_{rel} \rho dV, \quad (49)$$

$$\vec{M}_{\perp} := \int_V \vec{r} \times \vec{K}_W^{(b)} dV, \quad (50)$$

$$\vec{M}_{rot} := \vec{\omega} \times \int_V \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \rho dV, \quad (51)$$

waarbij $\vec{K}_W^{(b)}$ de component in W van $\vec{K}^{(b)}$ is, dan geldt de momentenstelling om een lijn door P loodrecht op het vlak W :

$$\vec{M}_{\perp}^{(b)} + \vec{M}_{rot} = \dot{\vec{D}}_{\perp} . \quad (52)$$

\vec{M}_{rot} is het moment van de centrifugaalkracht.

De zwaartepuntsstelling (47) en de momentenstelling (52) beschrijven voor dit geval de beweging van het stelsel in de niet-inertiale ruimte W . Veronderstellen we verder dat de belastingskrachtdichtheid $\vec{k}^{(b)}$ is af te leiden van een potentiaal, met de potentiële energie U_b . De vergelijkingen van Lagrange kunnen op twee verschillende wijzen worden geformuleerd, uitgaande van de definitie van Lagranges functie.

a) Voor de beweging in de inertiale ruimte geldt:

$$L = T_{\text{rel}} + T_{\text{sl}} - U_b, \quad (53)$$

$$\text{waarbij: } T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \int_V \rho v_{\text{rel}}^2 dV \quad (54)$$

$$T_{\text{sl}} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}) dV, \quad \vec{r} \text{ de plaats in } W \text{ met de oorsprong op } \ell. \quad (55)$$

b) Voor de beweging in de niet-inertiale ruimte W geldt:

$$L = T_{\text{rel}} - U_{\text{rot}} - U_b. \quad (56)$$

Aangezien de vergelijkingen van Lagrange onafhankelijk zijn van de keuze van de ruimte zal, voor dit speciale geval, moeten gelden:

$$T_{\text{sl}} = -U_{\text{rot}}. \quad (57)$$

De potentiële energie U_{rot} behoort bij de centrifugaalkracht $\vec{K}_{\text{rot}} = K_{\text{rot}} \vec{Z}_0$ en met (48) volgt inderdaad:

$$\vec{K}_{\text{rot}} = -\text{grad } U_{\text{rot}}, \text{ immers: } K_{\text{rot}} = -\frac{\partial U_{\text{rot}}}{\partial z_0}. \quad (58)$$

Indien T_{rel} en U_b niet expliciet van de tijd afhangen geldt de volgende behoudwet:

$$T_{\text{rel}} + U_{\text{rot}} + U_b = \text{constant}. \quad (59)$$

Voor de berekening van U_{rot} is het aan te bevelen gebruik te maken van de voorstelling (55) en in het geval het mechanisch stelsel een vlak star lichaam is van de voorstelling op hoofdtraagheidsassen volgens (22).

9. Kinetisch evenwicht. Lineariseren en kleine Trillingen.

Beschouw eerst alleen het in paragraaf 8 uitgewerkt speciale geval. Als de functie $U_{\text{rot}} + U_b$ in de gegeneralizeerde coördinaten welke de positie van het mechanisch stelsel in het vlak W beschrijven een stationaire waarde bezit spreekt men van kinetisch evenwicht. De bijbehorende positie van het stelsel in W heet een kinetisch evenwichtsstand. Is de stationaire waarde een minimum dan spreekt men van stabiel kinetisch evenwicht en een stabiele kinetische evenwichtsstand.

De volgende beschouwingen gelden zowel voor het bovenbeschreven speciale geval met kinetisch evenwicht als voor het in paragraaf 6 gedefinieerde evenwicht.

Formuleert men de bewegingsvergelijkingen dan kan men een evenwichtsstand karakteriseren door:

$$\{q_{10}, \dots, q_{n0}\},$$

waarbij q_{ko} , $k = 1, \dots, n$, de waarden zijn van de gegeneralizeerde coördinaten in de evenwichtsstand. De waarden q_{ko} kunnen ook worden bepaald door in de bewegingsvergelijkingen $\dot{q}_k = 0$ en $\ddot{q}_k = 0$ in te vullen. Substitueer in de bewegingsvergelijkingen de functies:

$$\delta_k(t) := q_k(t) - q_{ok}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (60)$$

dan kunnen de bewegingsvergelijkingen worden voorgesteld door:

$$A_{kl} \ddot{\delta}_l + B_{kl} \dot{\delta}_l = f_k(t, \delta, \dot{\delta}), \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (61)$$

(sommeren over l !)

waarbij de matrices A en B constant en symmetrisch zijn.

In de vraagstukken uit de bundel en examenvraagstukken doet zich altijd een van de volgende gevallen voor na verwaarlozing van tweede en hogere orde termen van δ_k en $\dot{\delta}_k$:

- a. De functies f_k zijn alleen afhankelijk van t ;
- b. De functies f_k zijn identiek nul.

Geval a. doet zich voor indien niet alle krachten $\vec{K}^{(b)}$ van een potentiaal zijn af te leiden. De oplossingen van (43) moeten dan langs de normale weg worden bepaald.

In geval b. gaat het stelsel vergelijkingen (43) over in:

$$A_{kl} \ddot{\delta}_l + B_{kl} \dot{\delta}_l = 0 \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (62)$$

Substitutie van :

$$\delta_k(t) = \delta_{ok} e^{i\omega t} \text{ levert opdat niet alle } \delta_{ok} \text{ gelijk nul zijn:}$$

$$\det \{B - \omega^2 A\} = 0. \quad (63)$$

Indien de evenwichtsstand stabiel is zullen alle wortels $\omega^2 > 0$ zijn.

De positieve getallen ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$, heten de eigenfrequenties van de kleine trillingen om de (kinetische) evenwichtsstand.

10. Stoten, Botsen en Fixeren

Naast krachten en momenten kunnen op een mechanisch stelsel stoten en stootmomenten worden uitgeoefend. Beide zijn vectoren. De tijd waarover stoten hun invloed uitoefenen is te verwaarlozen klein en zij geven aanleiding tot discontinue veranderingen in de snelheid, en dus in de impuls en het impulsmoment (niet in de geometrie). Bij botsingen tussen puntmassa's en/of starre lichamen oefenen deze lichamen op elkaar stoten uit. Is een van beide lichamen glad, dan zijn de reactiestoten gericht loodrecht op het gemeenschappelijke raakvlak in de contactpunten.

Bij fixeren van een lichaam verliezen een of meer punten van het lichaam hun snelheid.

Werkt op een mechanisch stelsel de stoot \vec{S} , dan geldt:

$$\vec{S} = \Delta \vec{p}, \quad (64)$$

waarbij $\Delta \vec{p}$ het verschil van de impuls na en voor de stoot is. Werkt op een mechanisch stelsel het stootmoment \vec{M}_P om een verder willekeurige plaats P, dan geldt:

$$\vec{M}_P = \Delta \vec{D}_P, \quad (65)$$

waarbij $\Delta \vec{D}_P$ het verschil van het impulsmoment na en voor de stoot om P is.

Bij botsingen tussen puntmassa's en/of lichamen geldt de volgende kinematische relatie:

$$V_1 - V_2 = -\lambda(v_1 - v_2), \quad (66)$$

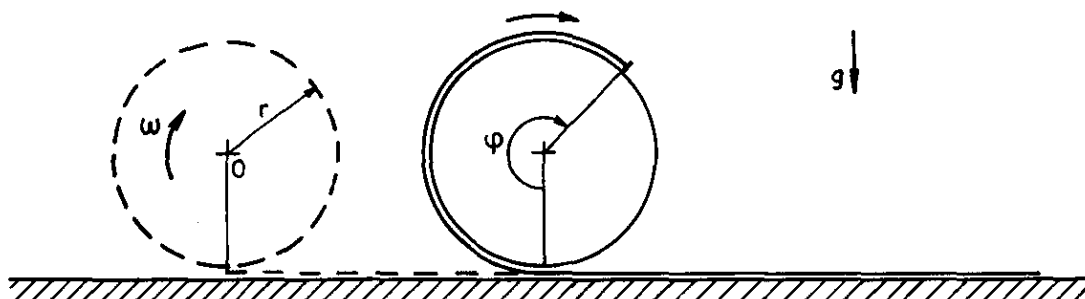
waarbij V_1 en V_2 de snelheidscomponenten na en v_1 en v_2 de overeenkomstige snelheidscomponenten voor de botsing van de contactpunten zijn, alle gemeten in de richting van de reactiestoot.

De parameter λ heet de botsings- of restitutiecoëfficiënt. Is de botsing volkomen elastisch dan geldt $\lambda = 1$, is de botsing volkomen onelastisch dan geldt $\lambda = 0$, in alle overige gevallen geldt $0 < \lambda < 1$.

De arbeid die door een stoot wordt verricht is het verschil in kinetische energie direct na en voor de stoot. Bij botsingen en bij fixaties gaat in het algemeen energie verloren; slechts bij volkomen elastische botsingen blijft de energie behouden. Men kan voor de arbeid door een stoot verricht ook schrijven:

$$A_S = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot (\vec{V} + \vec{v}), \quad (67)$$

waarbij \vec{V} de snelheid na en \vec{v} de snelheid voor de stoot is van het punt waar de stoot aangrijpt.

11. Uitgewerkte opgavenOpgave 1.

Een gestrekte homogene, oneindig lange ketting, massa ρ per lengte-eenheid, ligt op een ruw horizontaal vlak uit een inertiaalruimte. Het uiteinde van de ketting is aan het onderste punt op de omtrek van een ruwe homogene verticale schijf, massa m , straal r , middelpunt O , bevestigd. Op een bepaald ogenblik krijgt de schijf een hoeksnelheid ω en rolt in de richting van de ketting. Tijdens het rollen wordt de ketting op de schijf gewikkeld. We nemen aan dat O alleen evenwijdig aan de gestrekte ketting beweegt. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g . Gevraagd wordt de hoeksnelheid van de schijf als functie van de rolhoek φ te bepalen.

Oplossing:

a. Met behulp van de methode Lagrange.

Voer in het assenkruis O, XY zoals aangegeven in de figuur. Het stelsel, bestaande uit ketting en schijf, heeft één graad van vrijheid en we kiezen φ als de gegeneraliseerde coördinaat. De tijd t komt in de kinematische grootheden niet expliciet voor: het stelsel is skleronoom. We zoeken de kinetische energie T als functie van φ en $\dot{\varphi}$, en, zo deze bestaat, de potentiële energie U als functie van φ .

Geldt:

$$T = T_s(\text{schijf}) + T_k(\text{etting}) \quad (1.1)$$

$$(22) \Rightarrow T_s = \frac{1}{2} m (r\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (1.2)$$

De kinetische energie T_k :

De snelheid van een elementje $rd\theta$ van de ketting bedraagt:

$$(3) \Rightarrow 2r\dot{\varphi} \sin \frac{1}{2}\theta. \quad (1.3)$$

Zodat:

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^\varphi \rho r d\theta (4r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta) = \rho r^3 \dot{\varphi}^2 (\varphi - \sin \varphi) \quad (1.4)$$

Dus:

$$T = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \rho r^3 \dot{\varphi}^2 (\varphi - \sin \varphi). \quad (1.5)$$

Het stelsel beweegt onder invloed van de (uitwendige) krachten H en V , de zwaartekracht op de schijf en de ketting en de normale druk door het vlak op het nog niet opgewikkelde deel van de ketting uitgeoefend. Deze laatste belasting is in evenwicht met de zwaartekracht op dat deel uitgeoefend en beide kunnen verder buiten beschouwing worden gelaten. Bij een virtuele verandering $\delta\varphi$ leveren de krachten H en V géén bijdrage in de geleverde arbeid, zij zijn dus reactiekrachten. De resterende belasting wordt veroorzaakt door de versnelling g en deze belasting is af te leiden van een potentiaal. Aangezien het zwaartepunt van de schijf, samenvallend met O , alleen horizontaal beweegt en dus de potentiële energie van de schijf constant is, is het voldoende de potentiële energie van het opgewikkelde deel van de ketting te bepalen:

$$\text{met } dU = - \rho r d\theta g r (1 - \cos \theta), \quad (1.6)$$

voor het elementje $rd\theta$ volgt:

$$(24) \Rightarrow U = \int_0^\varphi r^2 (1 - \cos \theta) \rho g d\theta = \rho g r^2 (\varphi - \sin \varphi). \quad (1.7)$$

De vergelijking van Lagrange:

$$(42) \Rightarrow 2\rho r^3 \ddot{\varphi} (\varphi - \sin \varphi) + \frac{3}{2} m r^2 \ddot{\varphi} + \rho r^3 \dot{\varphi}^2 (1 - \cos \varphi) + \rho g r^2 (1 - \cos \varphi) = 0 \quad (1.8)$$

Vermenigvuldig met $\dot{\varphi}$ en integreer naar t :

$$T + U = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (1.9)$$

Het rechterlid, de integratie constante, is bepaald door: $\dot{\varphi} = \omega$ voor $\varphi = 0$. Er blijkt behoud van mechanische energie te zijn: het op snelheid komen van de kettingdeeltjes vindt zonder (volkomen onveerkrachtige) botsingen plaats. De snelheid van elk kettingdeeltje is een continue functie van de tijd.

We vinden tenslotte:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3m\omega^2 - 4\rho g(\varphi - \sin \varphi)}{3m + 4\rho r(\varphi - \sin \varphi)} \quad (1.10)$$

Voor $\dot{\varphi}$ moeten we kennelijk (zie figuur) de positieve wortel nemen. Wordt de zwaartekracht buiten beschouwing gelaten ($g = 0$) dan neemt φ altijd monotoon toe.

Voor $g > 0$ bestaat er een waarde φ_1 van φ met

$$4\rho g(\varphi_1 - \sin \varphi_1) = 3 m\omega^2 \quad (1.11)$$

waarvoor geldt $\dot{\varphi}(\varphi_1) = 0$.

Voor $\varphi = \varphi_1$ is de kinetische energie geheel omgezet in potentiële energie. Als $\varphi_1 \neq 2k\pi$, k geheel, keert de beweging van richting om. Als $\varphi_1 = 2k\pi$, k geheel, blijft de schijf in deze eindstand staan. In dit geval moet gelden:

$$3m\omega^2 = 8k\pi\rho gr^2. \quad (1.12)$$

Toon aan dat de bereikte eindstand een instabiele evenwichtsstand is.

b. Met behulp van de methode van het vrijmaken.

Kies hetzelfde assenkruis in de inertiale ruimte als onder a.

De componenten van de impuls zijn:

$$(3) + (14) \Rightarrow \left. \begin{aligned} p_x &= mr\dot{\varphi} + \int_0^\varphi \rho r^2 \dot{\varphi} (1 - \cos \theta) d\theta = mr\dot{\varphi} + \rho r \dot{\varphi}^2 (\varphi - \sin \varphi) \end{aligned} \right\} (1.13)$$

$$\left. \begin{aligned} p_y &= \int_0^\varphi \rho r^2 \dot{\varphi} \sin \theta d\theta = \rho r^2 \dot{\varphi} (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} p_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1.15)$$

De componenten van het impulsmoment D om O_1 zijn :

$$(15) + (16) \Rightarrow \begin{cases} D_x = D_y = 0 \\ D_z = -\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi} - \int_0^\varphi \rho r d\theta \, 2r\dot{\varphi} \sin \frac{1}{2}\theta (2r \sin \frac{1}{2}\theta - r\varphi \cos \frac{1}{2}\theta) \end{cases} \quad (1.16)$$

$$= -\frac{3}{2}mr^2\dot{\varphi} - \rho r^3\dot{\varphi} (\varphi - 2 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi). \quad (1.17)$$

De zwaartepuntsstelling:

$$(37) \Rightarrow H = mr\ddot{\varphi} + \rho r^2\ddot{\varphi}(\varphi - \sin \varphi) + \rho r^2\dot{\varphi}^2(1 - \cos \varphi), \quad (1.18)$$

$$(37) \Rightarrow V - mg - \rho r g \varphi = \rho r^2\ddot{\varphi}(1 - \cos \varphi) + \rho r^2\dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (1.19)$$

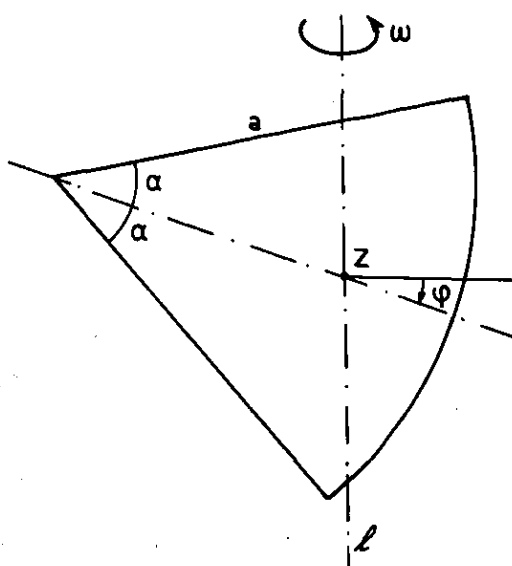
De momentenstelling voor het moment om O_1 :

$$(38) \Rightarrow -mgr\varphi - \int_0^\varphi \rho r^2 g(\varphi - \sin \theta) d\theta + Vr\dot{\varphi} = \dot{D}_z. \quad (1.20)$$

Eliminatie van V uit de beide laatste vergelijkingen geeft opnieuw de vergelijking van Lagrange.

Bereken dat aan de conditie $V \geq 0$ (welke stilzwijgend is aangenomen) voor grote waarden van ω niet meer wordt voldaan, zodat de schijf zou kunnen loslaten.

Opgave 2.



Het vlak W van een homogene plaat (massa m) in de vorm van een cirkelsector (halve tophoek α , $0 < \alpha \leq \pi$, straal a) draait met constante hoeksnelheid ω om een as ℓ welke niet beweegt in een inertiale ruimte. Het zwaartepunt Z van de plaat bevindt zich op de rotatie-as terwijl de as ℓ in het vlak W van de plaat ligt. De plaat kan t.o.v. W zonder wrijving roteren om een as door Z loodrecht op W .

Gevraagd wordt te bepalen:

1. De plaats van het zwaartepunt van de plaat t.o.v. de sector.
 2. De centrale hoofdtraagheidsmomenten van de plaat, geef de assen aan.
 3. De kinetische evenwichtsstanden, met een onderzoek van de stabiliteit, en de frekwentie van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstanden met behulp van de volgende methoden:
 - a. Lagrange in de inertiale ruimte;
 - b. Lagrange in de bewegende ruimte (W);
 - c. Vrijmaken in de bewegende ruimte (W).
1. Uit formule (9) volgt dat, aangezien de plaat homogeen is, d.w.z. de massa is gelijk verdeeld, het zwaartepunt Z op de bissectrice van de tophoek van de sector ligt. Noem de afstand AZ op die bissectrice x_0 , dan volgt met de aangegeven poolcoördinaten:

$$(9) \Rightarrow x_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r \cos \theta \rho r d\theta dr}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a \rho r d\theta dr} = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha} \quad (2.1)$$

2. Uit symmetrie overwegingen volgt direct dat de centrale hoofdtraagheidsassen de in de figuur aangegeven x -, y - en z -as zijn. Immers direct volgt met formule (11) : $J_{oxy} = J_{oyz} = J_{ozx} = 0$.

De hoofdtraagheidsassen door de top A van de sector zijn de in de figuur aangegeven x' -, y' - en z' -as (aantonen!). De centrale hoofdtraagheidsmomenten kunnen eenvoudig worden bepaald uit de hoofdtraagheidsmomenten t.o.v. A na toepassing van Steiners' stelling.

$$(11) \Rightarrow J_{x'x'} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \sin^2 \theta \rho r d\theta dr = \frac{1}{4} \rho a^4 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha), (2.2)$$

$$J_{y'y'} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \cos^2 \theta \rho r d\theta dr = \frac{1}{4} \rho a^4 (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha), (2.3)$$

$$J_{z'z'} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \rho r d\theta dr = \frac{1}{2} \rho \alpha a^4. (2.4)$$

De massa m van de plaat:

$$(10) \Rightarrow m := \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a \rho r d\theta dr = \rho \alpha a^2. (2.5)$$

De traagheidsmomenten om Z :

$$J_{Oxx} = J_{x'x'} = \frac{1}{4} m a^2 (1 - \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}) (2.6)$$

$$(12) \Rightarrow J_{Oyy} = J_{y'y'} - m x_0^2 = \frac{1}{4} m a^2 (1 + \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{16 \sin \alpha}{9 \alpha^2}) (2.7)$$

$$J_{Ozz} = J_{z'z'} - m x_0^2 = \frac{1}{2} m a^2 (1 - \frac{8 \sin^2 \alpha}{9 \alpha^2}). (2.8)$$

3. De positie van het mechanisch stelsel is volledig bepaald door de hoek φ welke in de figuur is aangegeven. Er is dus één graad van vrijheid. De hoek φ wordt als gegeneralizeerde coördinaat gekozen. Opgemerkt dient te worden dat de hoeksnelheid ω is voorgeschreven en dus ωt , de rotatiehoek om l , geen coördinaat is.

Ga na dat het probleem holonoom, rheonoom is.

De hoeksnelheid $\vec{\Omega}$ van de sector is voor te stellen door:

$$\vec{\Omega} = (\omega \sin \varphi, \omega \cos \varphi, \dot{\varphi}), (2.9)$$

betrokken op het $Zxyz$ assenkruis.

De snelheid van het zwaartepunt is nul.

a. De methode Lagrange in de inertiale ruimte.

De kinetische energie:

$$(22) \Rightarrow T = \frac{1}{2} J_{Oxx} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} J_{Oyy} \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} J_{Ozz} \dot{\psi}^2 \quad (2.10)$$

Met $Q_\varphi = 0$ volgens (26), met $\delta A = 0$,

$$(40) \Rightarrow J_{Ozz} \ddot{\varphi} - \omega^2 (J_{Oxx} - J_{Oyy}) \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (2.11)$$

De kinetische evenwichtsstanden volgen uit (2.11) na substitutie van $\ddot{\varphi} = 0$.

Zodat:

$$\varphi_{01} = 0 \quad (\varphi_0 = \pi \text{ is gelijkwaardig met } \varphi_0 = 0). \quad (2.12)$$

$$\varphi_{02} = \frac{\pi}{2} \quad (\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ is gelijkwaardig met } \varphi_0 = \frac{\pi}{2}). \quad (2.13)$$

$$\text{Met } \omega_0^2 := \frac{J_{Oyy} - J_{Oxx}}{J_{Ozz}} \omega^2 \quad (2.14)$$

gaat (2.11) over in:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (2.15)$$

$$\text{Met } \omega_0^2 = \frac{\cos \alpha - \frac{8}{9} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}{1 - \frac{8}{9} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \omega^2 \quad (2.16)$$

$$\text{volgt: } \omega_0 = 0 \text{ voor } \alpha = \pi \quad (2.17)$$

$$\omega_0 = 0 \text{ voor } \alpha = \alpha^*, \text{ waarbij } \frac{\pi}{4} < \alpha^* < \frac{\pi}{3} \quad (2.18)$$

$$\text{Voor } 0 < \alpha < \alpha^* \text{ geldt } \omega_0^2 > 0. \quad (2.19)$$

$$\text{Voor } \alpha^* < \alpha < \pi \text{ geldt } \omega_0^2 < 0. \quad (2.20)$$

Onderscheid de volgende gevallen:

i. $\varphi_{01} = 0$.

Substitueer in (2.15): $\varphi(t) = 0 + \delta_1(t)$.

Lineariseren naar δ_1 levert:

$$\ddot{\delta}_1 + \omega_0^2 \delta_1 = 0,$$

$$\text{zodat met (45) volgt: } \omega_1^2 = \omega_0^2. \quad (2.21)$$

Dus $\varphi_{01} = 0$ is een stabiele evenwichtsstand voor $0 < \alpha < \alpha^*$ en een instabiele evenwichtsstand voor $\alpha^* < \alpha < \pi$.

ii. $\varphi_{02} = \pi/2$.

Substitueer in (2.16): $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \delta_2(t)$.

Lineariseren naar δ_2 levert:

$$\ddot{\delta}_2 - \omega_0^2 \delta_2 = 0,$$

zodat met (45) volgt: $\omega_2^2 = -\omega_0^2$ (2.22)

Dus $\varphi_{02} = \pi/2$ is een stabiele evenwichtsstand voor $\alpha^* < \alpha < \pi$
en een instabiele evenwichtsstand voor $0 < \alpha < \alpha^*$.

De gevraagde eigenfrequenties om de stabiele evenwichtsstanden zijn dus:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2} \text{ en } \omega_2 = \sqrt{-\omega_0^2}.$$

Opmerking:

Met $U = 0$ en de uitdrukking (2.10) voor T volgt onmiddellijk:

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \dot{\varphi} [J_{ozz} \ddot{\varphi} + \omega^2 (J_{oxx} - J_{oyy}) \sin \varphi \cos \varphi], \quad (2.23)$$

hetgeen met (2.11) impliceert dat $T+U$ niet constant is.

Geef een interpretatie voor het rechterlid van (2.23).

b. De methode Lagrange in de bewegende ruimte.

De kinetische energie:

$$(54) \Rightarrow T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} J_{ozz} \dot{\varphi}^2 \quad (2.24)$$

De potentiële energie

$$(57), (55) \Rightarrow U_{\text{rot}} = -\frac{1}{2} J_{oxx} \omega^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} J_{oyy} \omega^2 \cos^2 \varphi \quad (2.22)$$

De vergelijking van Lagrange geeft volgens (42) weer de vergelijking (2.11).

De evenwichtsstanden:

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{dU_{\text{rot}}}{d\varphi} = -\omega^2 (J_{oxx} - J_{oyy}) \sin \varphi \cos \varphi, \quad (2.24)$$

met $\frac{dU}{d\varphi} = 0$ geeft opnieuw φ_{01} en φ_{02} volgens (2.12) en (2.13).

De stabiliteit.

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} = -\omega^2 (J_{oxx} - J_{oyy}) \cos 2\varphi \quad (2.25)$$

Zodat $\varphi_{01} = 0$ stabiel voor $J_{oyy} - J_{oxx} > 0 \Rightarrow 0 < \alpha < \alpha^*$

$\varphi_{01} = 0$ instabiel voor $\alpha^* < \alpha < \pi$

en

$$\varphi_{02} = \pi/2 \text{ stabiel voor } J_{oyy} - J_{oxx} < 0 \Rightarrow \alpha^* < \alpha < \pi$$

$$\varphi_{02} = \pi/2 \text{ instabiel voor } 0 < \alpha < \alpha^*$$

volgens (33).

c. Vrijmaken in de bewegende ruimte

De sectorvormige plaat draait zonder wrijving om de as door Z loodrecht op het vlak van de plaat, zodat krachten loodrecht op dat vlak geen invloed hebben op de beweging beschreven door φ .

Voor de rotatie φ om Z geldt:

$$(49) \Rightarrow \begin{cases} \dot{D}_{lox} = 0 & (2.24) \\ \dot{D}_{loy} = 0 & (2.25) \\ \dot{D}_{loz} = J_{ozz} \ddot{\varphi} & (2.26) \end{cases}$$

$$(50) \Rightarrow \vec{M}_l = \vec{0} \quad (2.27)$$

$$(51) \Rightarrow \begin{cases} M_{rot x} = 0 & (2.28) \\ M_{rot y} = 0 & (2.29) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_{rot z} &= \omega^2 \int_V (y \sin \varphi - x \cos \varphi)(x \sin \varphi + y \cos \varphi) \rho dx dy = \\ &= \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi \int_V \rho (y^2 - x^2) dx dy. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{Met } \int_V \rho z^2 dx dy = 0 \text{ (de plaat heeft geen dikte: } z \equiv 0), \quad (2.31)$$

volgt dus:

$$M_{rot z} = \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi (J_{oxx} - J_{oyy}). \quad (2.32)$$

Voor de componenten in z-richting volgt met (2.26), (2.27) en (2.32):

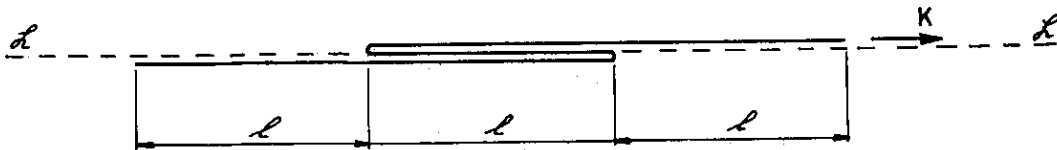
$$(52) \Rightarrow J_{ozz} \ddot{\varphi} + \omega^2 (J_{oyy} - J_{oxx}) \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

de bekende vergelijking (2.11).

Opgemerkt dient te worden dat $\vec{K}_{rot} = \vec{0}$ (immers (48) geldt met $\vec{z}_0 = \vec{0}$)

terwijl het moment van de centrifugaalkracht $\vec{M}_{rot} \neq \vec{0}$.

Opgave 3.



Op een volkomen glad horizontaal vlak uit een inertiale ruimte kan een ketting (constante massa ρ per lengte-eenheid, lengte $5l$) bewegen langs een rechte \mathcal{L} uit het vlak. De ketting bevindt zich op het tijdstip $t=0$ in rust. Vanaf $t=0$ werkt in het uiteinde A van de ketting de constante kracht K langs \mathcal{L} . Bereken de snelheid van de ketting en de verdeling van de normaalkracht in de ketting.

Oplossing: Noem de verplaatsing van het uiteinde A vanuit de oorspronkelijke stand x .

Onderscheid de volgende fasen:

- $0 \leq x < 2l$
- $x = 2l$
- $x > 2l$.

- Voor $0 \leq x < 2l$ heeft een deel van de ketting met lengte $2l + \frac{1}{2}x$ een snelheid \dot{x} . Gedurende deze fase is de massa van het bewegende deel niet constant.

De zwaartepuntstelling in de richting langs \mathcal{L} levert de bewegingsvergelijking:

$$(37) \Rightarrow K = \frac{d}{dt} \left\{ \rho \left(2l + \frac{1}{2}x \right) \dot{x} \right\},$$

ofwel:

$$K = \frac{1}{2} \rho (4l + x) \ddot{x} + \frac{1}{2} \rho \dot{x}^2. \quad (3.1)$$

De beginvoorwaarden bij deze niet-lineaire differentiaalvergelijking luiden:

$$t = 0 : x = 0 \text{ en } \dot{x} = 0. \quad (3.2)$$

Na integratie vindt men voor de snelheid \dot{x} als functie van x :

$$\dot{x}^2 = \frac{2K}{\rho} \left[1 - \frac{16l^2}{(4l + x)^2} \right], \quad \dot{x} \geq 0. \quad (3.3)$$

Terwijl voor $x \rightarrow 2l$: $\dot{x} \rightarrow v_1$ waarbij

$$v_1 = \sqrt{\frac{10K}{9\rho}}. \quad (3.4)$$

- b. Op het moment dat $x = 2l$ heeft een deel met de lengte $3l$ gemeten vanaf A van de ketting een snelheid \dot{x}_1 terwijl het overige deel de snelheid 0 heeft. Aangenomen wordt dat op dit moment op de kettingelementjes stoten plaats vinden zodanig dat na de stoot de snelheid van alle elementjes gelijk is, overeenkomstig de situatie die zich voordoet bij volkomen onelastische botsingen.

Noemen we deze overeenkomstige snelheid V_1 dan geldt met (46) en $\vec{S} = \vec{0}$ (er wordt immers geen stoot van buitenaf op de ketting uitgeoefend!):

$$(46) \Rightarrow 0 = 5\rho l V_1 - 3\rho l v_1, \quad (3.5)$$

$$\text{zodat met (3.4) volgt: } V_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{10K}{9\rho} \quad (3.6)$$

- c. Voor $x > 2l$ heeft de gehele ketting de snelheid \dot{x} en de zwaartepuntstelling levert:

$$(37) \Rightarrow K = 5\rho l \ddot{x}, \quad (3.7)$$

waaruit na integratie, met gebruikmaking van $\dot{x} = V_1$ voor $x = 2l$ volgt:

$$\dot{x}^2 = \frac{2K}{5\rho l} (x - l). \quad (3.8)$$

De normaalkracht in de ketting.

Noem de afstand van een kettingelementje tot A, gemeten langs de ketting s en de trekspanning op dat elementje N_s .

Onderscheid in fase a. de volgende gevallen:

i. $0 \leq s < 2l + \frac{1}{2}x,$

ii. $2l + \frac{1}{2}x < s \leq 5l.$

i. $(37) \Rightarrow K - N_s = \frac{d}{dt} \{ \rho s \dot{x} \} = \rho s \ddot{x} \quad (3.9)$

zodat met (3.1) en (3.3) :

$$N_s = K \left\{ 1 - \frac{32l^2 s}{(4l + x)^3} \right\}. \quad (3.10)$$

ii. Voor $2l + \frac{1}{2}x < s \leq 5l$ geldt $N_s = 0$ (nagaan!). (3.11)

Merk op dat N_s als functie van s discontinu is voor $s = 2\ell + 1/2x$ gedurende fase a.

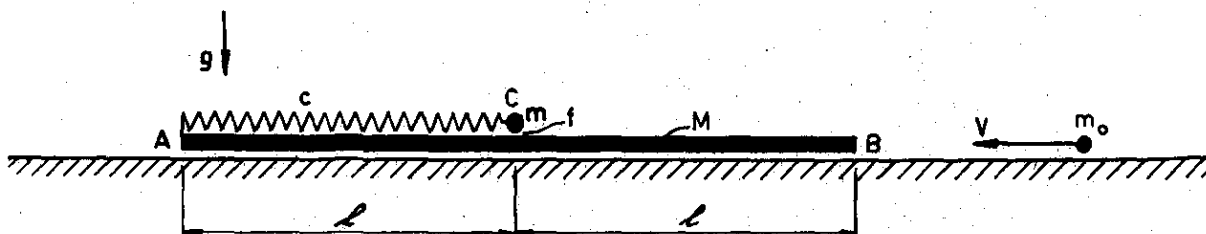
Wat is hiervoor Uw verklaring?

In geval c. volgt onmiddellijk:

$$(37) \Rightarrow K - N_s = \rho s \ddot{x}, \quad (3.12)$$

$$\text{hetgeen met (3.7) levert: } N_s = K \left[1 - \frac{s}{5\ell} \right]. \quad (3.13)$$

Opgave 4.



Een homogene balk (massa M , lengte 2ℓ) ligt op een glad horizontaal vlak uit een inertiale ruimte. Op de balk ligt een massapunt C (massa m) met het uiteinde A van de balk verbonden door middel van een massaloze lineaire veer (veerstijfheid c , ongespannen lengte ℓ). De wrijvingscoëfficiënt tussen het massapunt en de balk is f . De versnelling van de zwaartekracht is g . Op het tijdstip $t = 0$ botst een massapunt D (massa m_0) met de snelheid v_0 gericht langs de balk, tegen het uiteinde B van de balk. De botsingscoëfficiënt is λ .

Gevraagd wordt te bepalen:

1. de snelheid van de massapunten C en D en de balk AB direct na de botsing;
2. de kleinste waarde van v_0 welke nodig is opdat het massapunt C van de balk glijdt;
3. de beweging van de balk en het massapunt C voor het geval dat v_0 kleiner is dan de onder 2. gevonden waarde.

Oplossing.

Aangezien bij een botsing de geometrie van een mechanisch stelsel niet verandert zal bij de botsing van het massapunt D tegen de balk AB de invloed van de veer en de wrijving tussen het massapunt C en de balk geen rol spelen. Noch de veerkracht, noch de wrijvingskracht beide werkend op C , verrichten tijdens het botsingsproces arbeid! Direct na de botsing is de snelheid van het massapunt C gelijk aan nul. Noemen we V_0 en V_1 de snelheden in de richting BA van het massapunt D en de balk AB en bedenken we dat de stoten op de balk en het massapunt bij de botsing gelijk van grootte maar tegengesteld van richting zijn en dat er geen andere stoten werken, dan geldt:

$$(46) \Rightarrow 0 = M V_1 + m_0 V_0 - m_0 v_0. \quad (4.1)$$

Een tweede verband tussen de snelheden geeft de botsingsvergelijking:

$$(66) \Rightarrow (V_1 - V_0) = -\lambda(0 - v_0). \quad (4.2)$$

Uit (4.1) en (4.2) volgen:

$$V_1 = \frac{m_0(1+\lambda)}{M+m_0} v_0, \quad (4.3)$$

$$V_0 = \frac{m_0 - \lambda M}{M+m_0} v_0. \quad (4.4)$$

Opmerking: De grootte S van de stoot op het massapunt D in de richting BA volgt eenvoudig uit:

$$(64) \Rightarrow S = m_0(V_0 - v_0) = -\frac{(1+\lambda)M}{M+m_0} m_0 v_0. \quad (4.5)$$

2. Bij de beweging ná de botsing, dus $t > 0$, wordt verondersteld dat het massapunt D buiten beschouwing kan worden gelaten.

Met de in de figuur aangegeven coördinaten x , de verplaatsing van de balk, en y , de verplaatsing van het massapunt C , beide gemeten t.o.v. een plaats O van het gladde vlak en in de richting BA , is de positie van het mechanisch stelsel bestaande uit de puntmassa C en de balk AB volledig bepaald.

We nemen x en y als gegeneraliseerde coördinaten.

Uit de condities op $t = 0$ voor x en y en de vergelijking (4.3) volgt:

$$t = 0 : x = 0, \dot{x} = V_1; \quad (4.6)$$

$$y = 0, \dot{y} = 0. \quad (4.7)$$

Op het massapunt C werken de veerkracht F_c , de wrijving W , de normale druk N en de zwaartekracht mg .

Aangezien het massapunt C horizontaal beweegt is de versnelling in verticale richting nul, zodat:

$$(36) \Rightarrow N = mg, \quad (4.8)$$

Voor de wrijvingskracht W geldt dan:

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } \dot{y} > \dot{x} : W = -fmg \text{ in de richting } BA \\ \dot{y} < \dot{x} : W = fmg \text{ in de richting } BA \\ \dot{y} = \dot{x} : |W| \leq fmg. \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

De veerkracht F_c is in grootte evenredig met de uitrekking van de veer en zodanig dat:

$$F_c = -c(y-x), \text{ in de richting BA.} \quad (4.10)$$

Op de balk werken, in de richting BA, dezelfde krachten als op het punt C, maar tegengesteld van richting.

Toepassing van de zwaartepuntsstelling op beide delen afzonderlijk levert voor het massapunt:

$$(36) \Rightarrow m\ddot{y} = W - c(y-x), \quad (4.11)$$

en voor de balk:

$$(36) \Rightarrow M\ddot{x} = -W + c(y-x). \quad (4.12)$$

$$\text{Definieert men } \xi := x - y, \quad (4.13)$$

dan volgt met (4.11) en (4.12):

$$\ddot{\xi} + \frac{(M+m)}{Mm} c \xi = -\frac{M+m}{Mm} W \quad (4.14)$$

waarbij W volgens (4.9)

Merk op dat toepassing van (36) voor de coördinaat ξ een van (4.14) verschillende en onjuiste vergelijking oplevert. De coördinaat ξ wordt gemeten vanuit het bewegende middelpunt van de balk en dus niet in een inertiale ruimte, de balk beweegt immers versneld t.o.v. het gladde vlak, de inertiale ruimte.

Een vergelijking direct in de coördinaat ξ volgt met het begrip relatieve beweging:

$$(46) \Rightarrow m\ddot{\xi} = -F_c - \frac{M+m}{M} W - m(-\ddot{x}); \quad (4.15)$$

(4.15) levert na uitwerken opnieuw (4.14).

Met de begincondities (4.6) en (4.7) volgt voor de begincondities bij de differentiaalvergelijking (4.14):

$$t = 0 : \xi = 0, \quad \dot{\xi} = v_1. \quad (4.16)$$

Zolang $\dot{\xi} > 0$ beweegt het massapunt C t.o.v. de balk in de richting AB.

Laat $t_1 > 0$ het tijdstip zijn waarop $\dot{\xi}$ voor de eerste maal nul is.

Dan geldt voor $0 < t < t_1$:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = - \omega_0^2 \frac{fmg}{c}, \quad (4.17)$$

met de begincondities (4.16), en $\omega_0 = \sqrt{\frac{M+m}{Mm}} c$.

De oplossing luidt:

$$\xi(t) = - \frac{fmg}{c} (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{V_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (4.18)$$

zodat

$$\dot{\xi}(t) = - \frac{fmg}{c} \omega_0 \sin \omega_0 t + V_1 \cos \omega_0 t. \quad (4.19)$$

$t = t_1 \Rightarrow \dot{\xi} = 0$, zodat

$$tg \omega_0 t_1 = \frac{c V_1}{fmg \omega_0}, \quad (4.20)$$

waarbij voor $\omega_0 t_1$ de kleinste wortel moet worden genomen.

Substitueert men de waarde van $\omega_0 t_1$ uit (4.20) in (4.18) dan vindt men de waarde van ξ op $t = t_1$.

Stelt men $\xi(t_1) = l$, dan levert (4.18) met (4.3) de gevraagde waarde voor de snelheid v_0 .

3. Laat v_0 kleiner zijn dan de onder 2. gevonden waarde.

Voor de gehele beweging na de botsing gelden de vergelijkingen (4.8), (4.9) en (4.10), zodat als bewegingsvergelijking in de coördinaat ξ , (4.14) kan worden gebruikt.

Op het moment dat $t = t_1$, dus $\dot{\xi}(t_1) = 0$, doen zich de volgende mogelijkheden voor.

- het massapunt C blijft in relatieve rust ($\dot{\xi} = 0$),
- het massapunt C gaat over de balk glijden in de richting BA ($\dot{\xi} < 0$).

In geval a. geldt, overeenkomstig (4.9)

$$|W| \leq fmg. \quad (4.21)$$

De grootte van $\xi(t_1)$ ligt vast ((4.18) en (4.20)) zodat voor $\dot{\xi} = 0$ met (4.14) moet gelden

$$c \xi(t_1) \leq fmg. \quad (4.20)$$

Wordt aan (4.20) voldaan dan blijft c in rust t.o.v. de balk, zodat de beweging verder bekend is. Wordt aan (4.21) niet voldaan dan geldt

$$\ddot{\xi}(t_1) < 0, \text{ zodat voor } t > t_1 \text{ geldt } \dot{\xi} < 0, \text{ het geval b.}$$

Laat $t_2 > t_1$ het tijdstip zijn waarop voor de eerste maal na t_1 de snelheid $\dot{\xi}(t_2) = 0$.

Dan geldt met (4.14):

$$t_1 < t < t_2:$$

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \omega_0^2 \frac{fmg}{c}, \quad (4.21)$$

met de begincondities:

$$t = t_1 : \xi = \xi(t_1) \text{ en } \dot{\xi} = 0, \quad (4.22)$$

terwijl t_2 bepaald is door:

$$\dot{\xi}(t_2) = 0. \quad (4.23)$$

De oplossing van (4.21) welke voldoet aan (4.22) luidt:

$$\xi(t) = \frac{fmg}{c} - \left\{ \frac{fmg}{c} - \xi(t_1) \right\} \cos \omega_0(t - t_1), \quad (4.24)$$

$$\text{met } \dot{\xi}(t) = \omega_0 \left\{ \frac{fmg}{c} - \xi(t_1) \right\} \sin \omega_0(t - t_1). \quad (4.25)$$

Met de definitie van t_2 volgt uit (4.25):

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega_0}. \quad (4.26)$$

Substitutie van t in (4.24) levert:

$$\xi(t_2) + \xi(t_1) = 2 \frac{fmg}{c}. \quad (4.27)$$

Op het tijdstip t_2 doen zich nu dezelfde mogelijkheden voor als op het tijdstip t_1 .

Zijn t_k , $k = 1, 2, \dots$ de tijdstippen waarop voor de oplossing van de vergelijking (4.14) met de begincondities (4.16) geldt:

$$\dot{\xi}(t_k) = 0, \quad (4.28)$$

dan geldt de betrekking:

$$[\xi(t_k)] = \left[\xi(t_1) - 2(k-1) \frac{fmg}{c} \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

Het massapunt c blijft t.o.v. de balk in rust voor $t > t_n$ waarbij n de kleinste waarde voor de oplossing van:

$$[\xi(t_1) - 2(n-1) \frac{fmg}{c}] \leq \frac{fmg}{c}. \quad (4.30)$$

Voor $t > t_n$ is de snelheid van balk en massapunt gelijk, v , en, omdat de balk zonder wrijving over het vlak glijdt, tevens constant (volgens (37)).

De snelheid v is bepaald door:

$$(37) \Rightarrow \dot{\vec{p}} = 0 \quad (4.31)$$

met de beginconditie voor de component in de richting BA volgens (4.3):

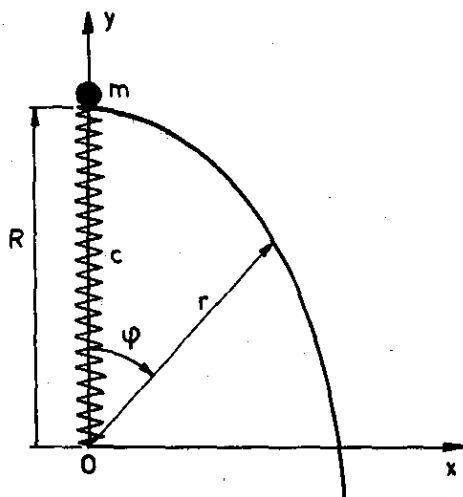
$$p(0) = \frac{m_o M}{M + m_o} (1 + \lambda) v_o, \quad (4.32)$$

zodat met

$$p(t) = (M + m) v, \quad \text{geldt;}$$

$$v = \frac{m_o M}{(M + m)(M + m_o)} (1 + \lambda) v_o. \quad (4.33)$$

Opgave 5.



Een puntmassa (massa m) kan zonder wrijving bewegen langs de buitenzijde van een vaste, vlakke, gekromde rail. De buitenzijde van de rail is gegeven door de vergelijking:

$$r(\varphi) = R e^{-\varphi}, \quad (5.1)$$

waarbij r gemeten wordt uit de plaats O (zie figuur).

De puntmassa is door middel van een massaloze lineaire veer (veerconstante c , ongespannen lengte nul) verbonden met de oorsprong O .

De massa wordt op een bepaald tijdstip ($t = 0$) zonder beginsnelheid losgelaten op de plaats $\varphi = 0$ van de rail. Bepaal de hoek φ_0 waarop het massapunt loskomt van de rail.

Noemen we t_0 het tijdstip waarop $\varphi = \varphi_0$ (voor de eerste maal), dan werkt gedurende $0 \leq t \leq t_0$ op het massapunt naast de veerkracht een normale druk N van de rail op het massapunt. De richting van N is loodrecht op de raaklijn aan de rail (er is immers geen wrijving) en naar buiten gericht (zie figuur), zolang $0 \leq t < t_0$. Op het moment dat het massapunt loskomt van de rail, geldt:

$$N = 0. \quad (5.2)$$

De veerkracht heeft de grootte cr en is naar O gericht.

De zwaartepuntsstelling levert voor de componenten in het vlak van de rail:

$$N_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}), \quad (5.3)$$

(37) \Rightarrow

$$N_r - cr = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2). \quad (5.4)$$

Met de begincondities:

$$t = 0 : \varphi = 0 \quad \dot{\varphi} = 0. \quad (5.5)$$

Terwijl uit de vorm van de rail direct volgt:

$$N_r = N_\varphi = \frac{1}{2} N\sqrt{2}. \quad (5.6)$$

Substitutie van (5.1) en (5.6) in (5.3) en (5.4) levert na aftrekken van beide vergelijkingen:

$$\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 = \frac{c}{2m}, \quad (5.7)$$

$$\text{met de conditie: } \dot{\varphi} = 0 \text{ voor } \varphi = 0. \quad (5.8)$$

De oplossing van (5.7) welke voldoet aan (5.8) geeft:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{c}{2m} (e^{2\varphi} - 1), \quad (5.9)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{c}{2m} e^{2\varphi}. \quad (5.10)$$

Substitutie van (5.9) en (5.10) in (5.3) levert voor $\varphi = \varphi_0$ (met $N(\varphi_0) = 0$) de vergelijking:

$$1 - \frac{1}{2} e^{-2\varphi_0} = 0 \text{ met de oplossing:} \\ \varphi_0 = \frac{1}{2} \log 2. \quad (5.11)$$

Hoewel deze methode ook voor andere vormen van de rail bruikbaar is, zal men in het algemeen moeilijkheden ondervinden wanneer N_r en N_φ in N moeten worden uitgedrukt.

Naast de vergelijkingen (5.3) en (5.4) kan nog een vergelijking, afhankelijk van beide genoemde, direct worden opgesteld.

Bij een virtuele verandering van de hoek φ verricht de kracht N géén arbeid (wrijvingsloos!) zodat met de kinetische energie:

$$(19) \Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \quad (5.12)$$

en de potentiële energie van de veer:

$$U = \frac{1}{2} c r^2, \quad (5.13)$$

beide niet expliciet afhankelijk van t , geldt:

$$T + U = \frac{1}{2} c R^2. \quad (5.14)$$

Het rechterlid is bepaald met gebruikmaking van (5.5).

De vergelijkingen (5.3), (5.4) en (5.14) gelden op alle tijden t waarvoor $0 \leq t \leq t_0$,

zodat op $t = t_0$:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{c}{2m}} \quad (5.15)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{c}{m} \quad (5.16)$$

zoals direct volgt na substitutie van $N_r = N_\varphi = 0$ voor $t = t_0$ in (5.3) en (5.4). Substitutie van (5.15) en (5.16) in (5.14) levert met (5.12) en (5.13) voor $\varphi = \varphi_0$ op $t = t_0$:

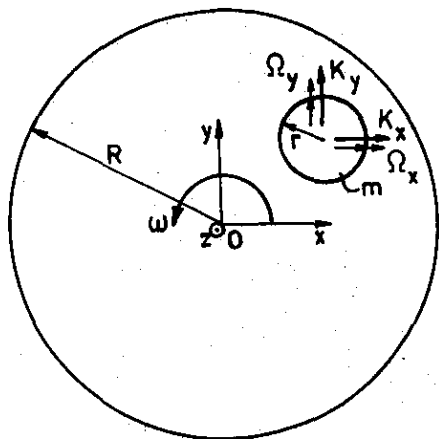
$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \log 2.$$

Bij de eerste methode worden de onbekende functies N_r , N_φ en φ van t onderzocht met behulp van de differentiaalvergelijkingen (5.3), (5.4) en (5.6) en de begincondities (5.5).

Bij de tweede methode worden de onbekende getallen $\varphi(t_0)$, $\dot{\varphi}(t_0)$ en $\ddot{\varphi}(t_0)$ opgelost uit drie algebraïsche vergelijkingen.

Bij vraagstuk 17 komt het verschil in moeilijkheden tussen beide methoden reeds duidelijk tot uitdrukking.

Opgave 6.



Een horizontale schijf kan draaien om een in een inertiale ruimte vaste verticale as door het middelpunt O . Op het vlak van de schijf ligt een homogene bol (massa m , straal r). De bol kan t.o.v. de schijf alleen maar rollen. Op het tijdstip $t = 0$ krijgt de schijf plotseling de hoeksnelheid ω en houdt deze voor $t > 0$.

Gevraagd wordt de bewegingsvergelijkingen van de bol met de begincondities op te stellen. Wat is de baan die het middelpunt M van de bol beschrijft?

Oplossing: Kies het assenkruis $Oxyz$ in de inertiale ruimte.

De coördinaten van M zijn x , y en z en laat voor $t < 0$, M in het x - z -vlak liggen op afstand x_0 van de verticale as. Op het tijdstip $t = 0$ wordt een stoot op de bol uitgeoefend aangrijpend in het raakpunt van bol en schijf. De geometrie verandert niet bij de stoot, zodat:

$$t = 0 : x(0) = x_0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = r. \quad (6.1)$$

Aangezien de bol alleen over de schijf rolt, zal gelden:

$$z(t) = r \quad t \geq 0. \quad (6.2)$$

Laat $\vec{\Omega}(t)$ de hoeksnelheid zijn van de bol, met $\vec{\Omega}_0 := \vec{\Omega}(0)$. (6.3)

De bol is homogeen, het zwaartepunt ligt dus in M .

De componenten van de centrale traagheidstensor J_0 volgen direct:

$$(13) \Rightarrow J_{0xx} = J_{0yy} = J_{0zz} = \frac{2}{5} mr^2 \quad (6.4)$$

Uit de symmetrie van de bol volgt verder:

$$(11) \Rightarrow J_{0xy} = J_{0yz} = J_{0zx} = 0. \quad (6.5)$$

De assen x , y en z zijn dus hoofdtraagheidsassen.

Noemen we de componenten van de stoot op $t = 0$ op de bol uitgeoefend S_x en S_y , dan geldt:

$$(14) + (64) \Rightarrow \begin{cases} S_x = m \dot{x}_0, \\ S_y = m \dot{y}_0, \end{cases} \quad (6.6)$$

waarbij \dot{x}_0 en \dot{y}_0 de snelheden $\dot{x}(0)$ en $\dot{y}(0)$ voorstellen, terwijl

$$(17) + (65) \Rightarrow \begin{cases} S_y r = \frac{2}{5} m r^2 \Omega_{ox}, \\ -S_x r = \frac{2}{5} m r^2 \Omega_{oy}, \end{cases} \quad (6.8)$$

waarbij Ω_{ox} en Ω_{oy} de hoeksnelheden $\Omega_x(0)$ en $\Omega_y(0)$ voorstellen. Aangezien de bol alleen kan rollen over de schijf moet gelden:

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 - \Omega_{oy} r = 0, \\ \dot{y}_0 + \Omega_{ox} r = \omega x_0. \end{cases} \quad (6.10)$$

De vergelijkingen (6.6) t/m (6.11) leveren:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= 0 \\ \dot{y}_0 &= \frac{2}{7} \omega x_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{ox} &= \frac{5}{7} \omega \frac{x_0}{r} \\ \Omega_{oy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

De formules (6.1), (6.12) en (6.13) zijn de begincondities voor de vergelijking voor $t > 0$.

Noemen we \vec{K} de kracht welke in het raakpunt met de schijf op de bol wordt uitgeoefend met de componenten K_x en K_y in x- en y-richting, dan geldt voor $t > 0$:

$$(14) + (37) \Rightarrow \begin{cases} K_x = m \ddot{x}, \\ K_y = m \ddot{y}; \end{cases} \quad (6.14)$$

terwijl

$$(17) + (39) \Rightarrow \begin{cases} K_y r = \frac{2}{5} m r^2 \dot{\Omega}_x, \\ -K_x r = \frac{2}{5} m r^2 \dot{\Omega}_y. \end{cases} \quad (6.16)$$

$$(6.17)$$

Dat de bol over de schijf rolt wordt uitgedrukt door de vergelijkingen:

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} -\omega y = \dot{x} - r \Omega_y, & (6.18) \\ \omega x = \dot{y} + r \Omega_x. & (6.19) \end{cases}$$

Differentieert men (6.18) en (6.19) naar t dan volgt na substitutie uit de vergelijkingen (6.14) t/m (6.17):

$$\ddot{x} + \frac{2}{7}\omega \dot{y} = 0, \quad (6.20)$$

$$\ddot{y} - \frac{2}{7}\omega \dot{x} = 0, \quad (6.21)$$

de bewegingsvergelijkingen voor het middelpunt van de bol.
Integratie van (6.20) en (6.21) levert met (6.12)

$$\dot{x} + \frac{2}{7}\omega y = 0, \quad (6.22)$$

$$\dot{y} - \frac{2}{7}\omega x = 0. \quad (6.23)$$

Substitutie in (6.20) en (6.21) geeft dan:

$$\ddot{x} + \frac{4}{49} \omega^2 x = 0, \quad (6.24)$$

$$\ddot{y} + \frac{4}{49} \omega^2 y = 0, \quad (6.25)$$

waaruit met (6.12) volgt:

$$x(t) = x_0 \cos \frac{2}{7} \omega t, \quad (6.26)$$

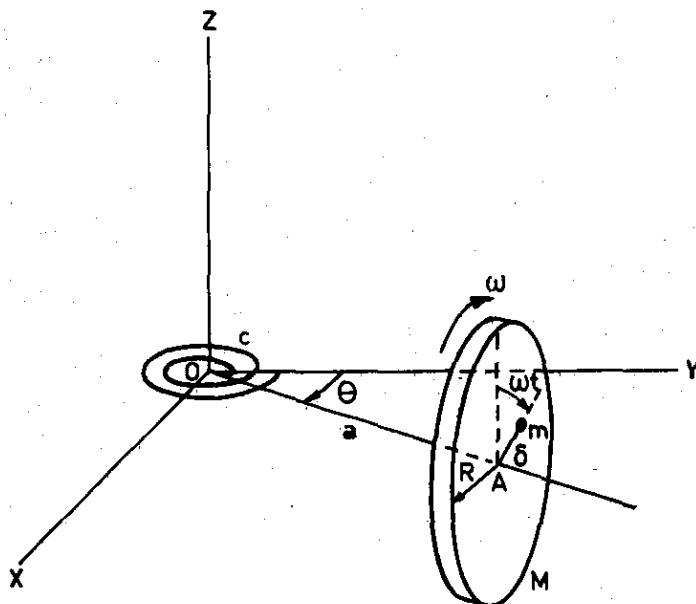
$$y(t) = x_0 \sin \frac{2}{7} \omega t. \quad (6.27)$$

Met:

$$x^2(t) + y^2(t) = x_0^2, \quad (6.28)$$

volgt eenvoudig dat de baan van het middelpunt, in de inertiale ruimte, een cirkel is met straal x_0 om de verticale as door 0.

Opgave 7.



Het hiernaast geschetste model heeft betrekking op een voorwiel (homogene schijf met massa M en straal R) van een auto. Het wiel draait met een constante hoeksnelheid om zijn as OA die als massaloos wordt opgevat. De as OA (lengte a) kan draaien om de Z -as (rotatiehoek θ). Een elastische veer oefent bij een hoekverdraaiing θ een terugstelmoment $c\theta$ uit. Onder invloed van een excentrische massa m (straal δ , $\delta \ll R$) op het wiel gaat de as OA tril-

lingen uitvoeren in het XOY -vlak (zg. "shimmy" tengevolge van onbalans). De interactie van het wiel en de grond, en de zwaartekracht mogen buiten beschouwing worden gelaten. Er is geen wrijving.

- Bereken de kinetische energie T en de potentiële energie U .
- Leid met behulp van de methode Lagrange de bewegingsvergelijking af.
- Bereken, onder verwaarlozing van de termen die $\frac{\delta^2}{R^2}$ bevatten, de hoekverdraaiing θ als functie van de tijd t .

- Kies het assenstelsel $Axyz$ zodanig dat de x -as langs OA valt, de z -as evenwijdig is aan de Z -as en de y -as in positieve zin loodrecht op de x - en z -as staat.

Het mechanisch stelsel, bestaande uit de schijf en de puntmassa, heeft een graad van vrijheid. Als gegeneralizeerde coördinaat wordt gekozen de hoek θ .

De hoeksnelheid $\vec{\Omega}$ van de schijf heeft dan de componenten:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \omega, \\ \Omega_y &= 0, \\ \Omega_z &= -\dot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

De x-, y- en z-as zijn centrale hoofdtraagheidsassen van de schijf:

$$(13) \Rightarrow \begin{cases} J_{oxx} = \frac{1}{2} MR^2, \\ J_{oyy} = \frac{1}{4} MR^2, \\ J_{ozz} = \frac{1}{4} MR^2. \end{cases} \quad (7.2)$$

Het zwaartepunt A van de schijf heeft een snelheid met de grootte $a\dot{\theta}$.
De kinetische energie T_s van de schijf bedraagt dan:

$$(22) \Rightarrow T_s = \frac{1}{2} M\dot{\theta}^2 (a^2 + \frac{1}{4} R^2) + \frac{1}{4} M\omega^2 R^2. \quad (7.3)$$

De plaatsvector van de puntmassa m heeft in het OXYZ-stelsel de componenten:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= a \sin \theta - \delta \sin \omega t \cos \theta, \\ Y_m &= a \cos \theta + \delta \sin \omega t \sin \theta, \\ Z_m &= \delta \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

De kinetische energie T_m van de puntmassa m bedraagt dan:

$$(19) \Rightarrow T_m = \frac{1}{2} m [\dot{\theta}^2 (a^2 + \delta^2 \sin^2 \omega t) + \omega^2 \delta^2 - 2\omega \delta a \dot{\theta} \cos \omega t]. \quad (7.5)$$

De gegeneraliseerde kracht is, met $\delta A = -c\theta\delta\theta$:

$$(26) \Rightarrow Q = -c\theta, \quad (7.6)$$

zodat voor de potentiële energie U kan worden genomen:

$$(28) \Rightarrow U = \frac{1}{2} c \theta^2. \quad (7.7)$$

b. De functie van Lagrange luidt:

$$L = T_s + T_m - U. \quad (7.8)$$

Substitutie van (7.8) in (42) levert:

$$(42) \Rightarrow [(M+m)a^2 + \frac{1}{4} MR^2 + m\delta^2 \sin^2 \omega t] \ddot{\theta} + m\omega^2 \delta a \sin \omega t [1 + 2 \frac{\delta \dot{\theta}}{a\omega} \cos \omega t] + c\theta = 0. \quad (7.9)$$

c. Delen door R^2 van vergelijking (7.9) levert met verwaarlozing van termen die $\frac{\delta^2}{R^2}$ bevatten:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -k^2 \omega^2 \frac{\delta}{R} \sin \omega t, \quad (7.10)$$

waarbij:

$$\omega_0^2 := \frac{4c}{4(M+m)a^2 + MR^2}, \quad (7.11)$$

en

$$k^2 := \frac{4maR}{4(M+m)a^2 + MR^2} \quad (7.12)$$

De particuliere oplossing van (7.10) luidt:

$$\theta(t) = \frac{\varepsilon}{R} \sin \omega t, \quad (7.13)$$

waarin:

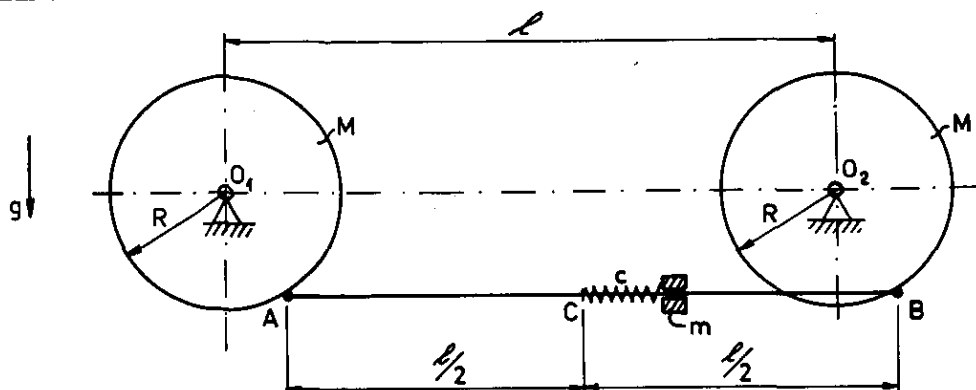
$$\varepsilon := - \frac{k^2 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \delta. \quad (7.14)$$

Voor waarden van ω^2 in de naaste omgeving van ω_0^2 wordt de amplitude van de trilling om de Z-as van de gelinearizeerde vergelijking zeer hoog.

De algemene oplossing luidt:

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - \frac{k^2 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \delta.$$

Opgave 8.



In een verticaal vlak bevinden zich twee gelijke homogene cirkelvormige schijven (straal R , massa M) met middelpunten O_1 en O_2 , beide plaatsen uit een inertiale ruimte, die op dezelfde hoogte en op een afstand l ($l > 2R$) van elkaar liggen. Elke schijf kan vrij draaien om een horizontale as door het middelpunt loodrecht op het verticale vlak. Aan de randpunten A en B van de schijven met middelpunt O_1 resp. O_2 is evenwijdig aan O_1O_2 bevestigd een massalooze staaf AB (lengte l). Bij een rotatie van de schijven blijft AB horizontaal. Langs de staaf AB kan zonder wrijving een massapunt (massa m) glijden, dat door middel van een massalooze veer (veerstijfheid c) verbonden is met het midden C van AB . De ongespannen lengte van de veer is nul. De versnelling van de zwaartekracht is g .

Gevraagd wordt:

- Bepaal de evenwichtsstanden van het systeem;
- Onderzoek de stabiliteit van deze standen;
- Bepaal de eigenfrequenties van kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstand(en).

Oplossing.

- Het aantal graden van vrijheid dat het bovenbeschreven mechanisch stelsel bezit is twee. Als gegeneraliseerde coördinaten worden gekozen de rotatiehoek φ van de schijven en de verplaatsing x van het massapunt t.o.v. de balk, zoals aangegeven in de figuur.

Voor de virtuele arbeid volgt:

$$(26) \quad \delta A = -mgR \sin \varphi \delta \varphi - cx \delta x, \quad (8.1)$$

zodat de gegeneraliseerde krachten zijn:

$$Q_\varphi = -mgR \sin \varphi, \quad (8.2)$$

$$Q_x = -cx. \quad (8.3)$$

De beide gegeneraliseerde krachten zijn af te leiden van de potentiële energie U :

$$(28) \Rightarrow U = mgR(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} cx^2. \quad (8.4)$$

De evenwichtsstanden volgen uit de voorwaarden:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgR \sin \varphi = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = cx = 0, \quad (8.6)$$

met de oplossingen:

$$\varphi_1 = 0, \quad x_1 = 0; \quad (8.7)$$

$$\text{en} \quad \varphi_2 = \pi, \quad x_2 = 0. \quad (8.8)$$

b. Voorts volgt:

$$(34) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{de stand } \varphi_1 = 0, \quad x_1 = 0 \text{ is stabiel} \\ \text{de stand } \varphi_2 = \pi, \quad x_2 = 0 \text{ is instabiel.} \end{array} \quad (8.9)$$

c. Om de eigenfrequentie van kleine trillingen om de stand $\varphi_1 = 0, x_1 = 0$ te berekenen, bepalen we eerst de bewegingsvergelijkingen, waarbij we gebruik zullen maken van de methode van Lagrange.

Kies een rechtsdraaiend rechthoekig $O_1 yz$ assenstelsel, met de y -as langs $O_1 O_2$ en de z -as door O_1 .

De kinetische energie van het massapunt met de coördinaten y en z , waarbij:

$$y = R \sin \varphi + \frac{1}{2} \ell + x,$$

$$z = R(1 - \cos \varphi),$$

volgt met:

$$(19) \Rightarrow T_m = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos \varphi + \dot{x}^2). \quad (8.10)$$

De kinetische energie van beide schijven, roterend met hoeksnelheid $\dot{\varphi}$ om vaste assen volgt onmiddellijk:

$$(22) \Rightarrow T_{s_1} = T_{s_2} = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\varphi}^2. \quad (8.11)$$

De kinetische energie van het stelsel bedraagt dan:

$$T = T_m + T_{s_1} + T_{s_2} = \frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\varphi}^2 + mR\dot{\varphi} \dot{x} \cos\varphi + \frac{1}{2} m\dot{x}^2. \quad (8.12)$$

Met $L = T - U$, waarbij U volgens (8.4), volgen de bewegingsvergelijkingen:

$$(42) \Rightarrow \begin{cases} (M+m)R^2 \ddot{\varphi} + mR\dot{x}\cos\varphi + mgR\sin\varphi = 0, & (8.13) \\ mR\ddot{\varphi}\cos\varphi + m\ddot{x} - mR\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + cx = 0. & (8.14) \end{cases}$$

Laat men in (8.13) en (8.14) afgeleiden naar de tijd weg, dan vindt men voor de evenwichtsstanden opnieuw de vergelijkingen (8.5) en (8.6).

Om de stabiele evenwichtsstand $\varphi_1 = 0$, $x_1 = 0$ wordt gesubstitueerd:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\delta}{R} e^{i\omega t} \\ x(t) &= \epsilon e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Substitutie van (8.15) in (8.13) en (8.14) levert na lineariseren naar δ en ϵ .

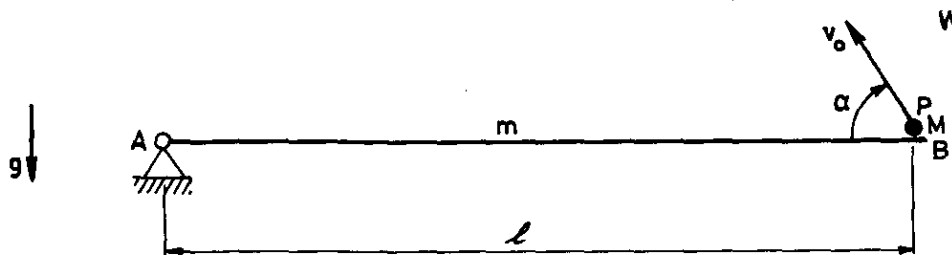
$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{m\epsilon}{R} - (M+m)\omega^2 \right\} \delta - m\omega^2 \epsilon &= 0 \\ -m\omega^2 \delta + (c - m\omega^2) \epsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Het stelsel (8.16) heeft een oplossing voor δ en ϵ niet nul voor:

$$\omega_{11}^2 = \frac{1}{2mM} \left[\left\{ \frac{m^2 g}{R} + (M+m)c \right\} + \sqrt{\left\{ \frac{m^2 g}{R} + (M+m)c \right\}^2 - 4 \frac{m^2 Mgc}{R}} \right] > 0 \quad (8.17)$$

$$\omega_{12}^2 = \frac{1}{2mM} \left[\left\{ \frac{m^2 g}{R} + (M+m)c \right\} - \sqrt{\left\{ \frac{m^2 g}{R} + (M+m)c \right\}^2 - 4 \frac{m^2 Mgc}{R}} \right] > 0. \quad (8.18)$$

De positieve wortels van (8.17) en (8.18) zijn de eigenfrequenties van de kleine trillingen om de stabiele evenwichtsstand.

Opgave 9.

De homogene staaf AB (massa m , lengte l) kan in een inertiaal verticaal vlak W draaien om het vaste punt A. Op de staaf bevindt zich in het punt B een massapunt P (massa M). Op het tijdstip $t = 0$ waarop de staaf zich in de getekende horizontale stand bevindt en waarop alles in rust is, wordt P vanaf het punt B van de staaf in W weggeschoten, zodanig dat de relatieve snelheid van P t.o.v. B gelijk is aan v_0 en een hoek α met de staaf maakt. Daarna bewegen de staaf en het massapunt onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g). Na een tijd t_1 treft P de staaf juist in het punt A.

a. Waarom blijft de impuls op $t = 0$ niet behouden?

Bereken de reactiestoot die op $t = 0$ in A optreedt.

b. Bereken t_1 .

c. Bereken het verband dat tussen de grootheden v_0 , α , l , g , m en M moet bestaan, opdat bovenbeschreven beweging optreedt.

d. Geef een vergelijking waaruit men de hoek kan bepalen waarover de staaf op het moment van treffen is gedraaid.

Oplossing.

Bij de oplossing worden twee fasen onderscheiden:

1. De botsing op $t = 0$;

2. De beweging van staaf en punt voor $t > 0$.

De begincondities voor de beweging onder 2. zullen onder 1. worden bepaald.

Teneinde allerlei vectorële grootheden nader te kunnen beschrijven wordt een orthogonaal assenkruis in de inertiale ruimte ingevoerd als in de figuur is aangegeven.

Het stelsel bestaande uit staaf en puntmassa heeft drie graden van vrijheid, immers P beweegt in het vlak W , terwijl de staaf in W roteert om A. Als generaliseerde coördinaten worden gekozen de coördinaten x en y van P en de rotatie ϕ om de z -as vanuit de ruststand van de staaf.

1. Tijdens de botsing verandert de positie van het stelsel niet, zodat op $t = 0$ geldt:

$$x = l, y = 0 \text{ en } \varphi = 0. \quad (9.1)$$

De snelheid van P heeft op $t = 0$ de componenten \dot{x}_0 en \dot{y}_0 in x- en y-richting terwijl de staaf de hoeksnelheid $\dot{\varphi}_0$ bezit in z-richting.

Ontbindt men de snelheid van het punt B op $t = 0$ in x- en y-richting dan volgt uit de gegevens:

$$(7) \Rightarrow \begin{cases} -v_0 \cos \alpha = \dot{x}_0 - 0, & (9.2) \\ v_0 \sin \alpha = \dot{y}_0 + l\dot{\varphi}_0. & (9.3) \end{cases}$$

Bij het wegschieten worden op het punt P en in B gelijke maar tegengesteld gerichte stoten uitgeoefend, terwijl in A een reactiestoot optreedt. Het moment van al deze stoten om het punt A is nul, zodat:

(15), (18) en (65)

$$\Rightarrow \Delta D_{Az} = M\dot{y}_0 l - \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}_0 = 0, \quad (9.4)$$

waarbij $\frac{1}{3} ml^2$ staat voor J_{Azz} , een hoofdtraagheidsmoment van de balk, bepaald volgens (13).

Uit de vergelijkingen (9.2), (9.3) en (9.4) volgt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= -v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_0 &= \frac{m}{(m+3M)} v_0 \sin \alpha \\ \dot{\varphi}_0 &= \frac{3M}{(m+3M)} \frac{v_0}{l} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

De vergelijkingen (9.1) en (9.5) geven de begincondities voor de beweging voor $t > 0$ aan.

De beantwoording van vraag a. luidt:

Bij botsingen tussen starre lichamen en/of puntmassa's blijft de impuls alleen dan behouden als deze stelsels vrij kunnen bewegen. Bij het wegschieten (de inverse van de botsing) van het punt P van de staaf wordt de beweging van de staaf belemmerd, immers het punt A blijft gedwongen in rust, zodat in A een reactiestoot zal optreden.

Noemt men de componenten van de reactiestoot in A S_x en S_y dan gelden de volgende vergelijkingen:

$$(46) \Rightarrow \begin{cases} S_x = \Delta P_x, \\ S_y = \Delta P_y, \end{cases}$$

waarbij P_x en P_y de componenten van de impuls van het stelsel zijn.

(De stoten op P en in B op de balk zijn gelijk en tegengesteld gericht!)

Voor $t < 0$ is het stelsel in rust, dus:

$$(14) \Rightarrow S_x = M\dot{x}_0, \quad (9.6)$$

$$(14) \text{ en } (18) \Rightarrow S_y = M\dot{y}_0 - m \frac{1}{2} l \dot{\phi}_0, \quad (9.7)$$

waarbij de tweede term in (9.7) de impuls van de staaf in y-richting is.

Met (9.5) volgt:

$$S_x = -M v_0 \cos \alpha, \quad (9.8)$$

$$S_y = -\frac{mM}{2(m+3M)} v_0 \sin \alpha \quad (9.9)$$

2. Bij de beweging voor $t > 0$ wordt verondersteld dat de staaf en het massapunt elkaar niet eerder treffen dan wanneer P in A aankomt, zodat gedurende de tijd $0 < t < t_1$ de beide stelsels onafhankelijk van elkaar onder invloed van de zwaartekracht bewegen.

Voor het massapunt geldt:

$$(36) \Rightarrow \begin{cases} 0 = M\ddot{x}, \\ \end{cases} \quad (9.10)$$

$$\begin{cases} -Mg = m\ddot{y}, \end{cases} \quad (9.11)$$

terwijl voor de staaf geldt de momentenstelling om A:

$$(38) \Rightarrow \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\phi} = \frac{1}{2} m g l \cos \varphi. \quad (9.12)$$

Uit (9.10) volgt na integratie met (9.1) en (9.5):

$$x(t) = l - v_0 t \cos \alpha, \quad (9.13)$$

terwijl uit (9.11) met (9.1) en (9.5) volgt:

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{m}{(m+3M)} v_0 t \sin \alpha. \quad (9.14)$$

- b. Het tijdstip t_1 wordt bereikt als P de y-as treft, dus als $x(t_1) = 0$, zodat met (9.13) volgt:

$$t_1 = \frac{l}{v_0 \cos \alpha} \quad (9.15)$$

- c. P treft op t_1 de y-as in de oorsprong A als $y(t_1) = 0$, zodat met (9.14) en (9.15) de gevraagde voorwaarde luidt:

$$v_0^2 \sin 2\alpha = \frac{(m+3M)}{m} gl \quad (9.16)$$

- d. De hoek $\varphi(t_1)$ waarover de staaf is gedraaid op t_1 : integratie van (9.12) levert:

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = 3 \frac{g}{l} \sin \varphi, \quad (9.17)$$

zodat met (9.1) voor (t) de integraalvergelijking:

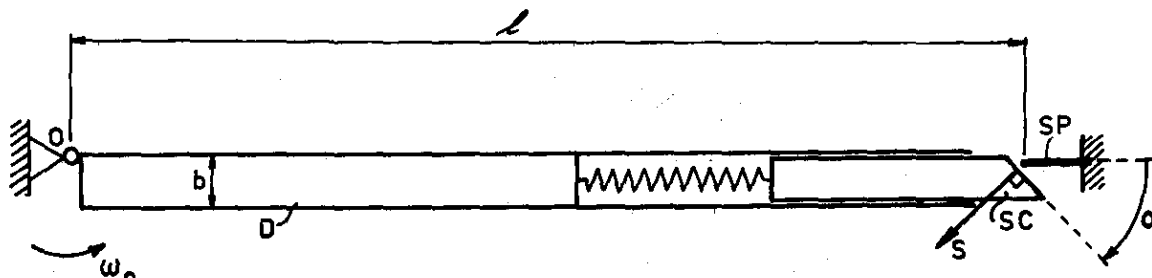
$$\varphi(t_1) = \int_0^{t_1} \sqrt{3 \frac{g}{l} \sin \varphi(t) + \dot{\varphi}_0^2} dt \quad (9.18)$$

kan worden gegeven, met $\dot{\varphi}_0$ volgens (9.5).

Noemt men $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, dan kan met (9.15) en (9.17) ook de volgende vergelijking worden gegeven:

$$\frac{l}{v_0 \cos \alpha} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{3 \frac{g}{l} \sin \varphi + \dot{\varphi}_0^2}} \quad (9.19)$$

Opgave 10.



In bovenstaande schets stelt D een deur voor en SC is de zogenaamde schoot. Deze laatste wordt, als de deur wordt dichtgegooid, door de sluitplaat SP tegen de veerdruk in D geschoven en springt achter SP gekomen weer terug. We beschouwen hierna uitsluitend de botsing tussen SC en SP, waarmee het dichtvallen inzet, en niet het verdere verloop. Neem aan dat de stoot S, die SP op SC uitoefent, loodrecht staat op het vlak van SC, dat de botsing volkomen onveerkrachtig is en dat noch in O, noch bij de beweging van SC in D wrijving optreedt. Vóór de botsing is de hoeksnelheid van D gelijk aan ω_0 .

a. Bereken S, de hoeksnelheid ω van D na de botsing en de snelheid V van SC t.o.v. D na de botsing.

b. Bewijs dat V maximaal is als $\text{tg } \alpha = \sqrt{\frac{ml^2}{J}}$,

waarin: l = lengte van D,

m = massa van SC

en J = massa-traagheidsmoment van D om het punt O.

N.B. Verwaarloos de dikte b ten opzichte van de breedte l .

Oplossing.

Op het moment dat de schoot SC tegen de sluitplaat SP botst gelden de volgende vergelijkingen:

$$(14) \text{ en } (64) \Rightarrow S \sin \alpha = mV, \quad (10.1)$$

waarin V de snelheid van de schoot in de richting van O is;

$$(18) \text{ en } (65) \Rightarrow -S l \cos \alpha = J(\omega - \omega_0), \quad (10.2)$$

waarin ω de hoeksnelheid van de deur, onmiddellijk na de botsing is;

terwijl de kinematische relatie voor de volkomen onelastische botsing levert:

$$(7) \text{ en } (66) \Rightarrow V \sin \alpha - l \omega \cos \alpha = 0. \quad (10.3)$$

a. Uit nevenstaande vergelijkingen volgen:

$$S = \frac{J}{J \operatorname{tg} \alpha + m \ell^2 \operatorname{cotg} \alpha} \frac{m \omega_0 \ell}{\sin \alpha}, \quad (10.4)$$

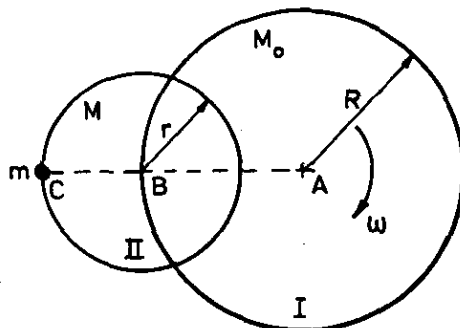
$$V = \frac{J}{J \operatorname{tg} \alpha + m \ell^2 \operatorname{cotg} \alpha} \omega_0 \ell, \quad (10.5)$$

en
$$\omega = \frac{J \operatorname{tg} \alpha}{J \operatorname{tg} \alpha + m \ell^2 \operatorname{cotg} \alpha} \omega_0. \quad (10.6)$$

b. Als men V_1 volgens (10.5), opvat als functie van $\operatorname{tg} \alpha$, dan volgt direct dat de maximale waarde voor V wordt bereikt voor

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{m \ell^2}{J}}. \quad (10.7)$$

Opgave 11.



De homogene schijf I (straal R , massa M_0) draait aanvankelijk met constante hoeksnelheid ω om een as loodrecht op de schijf door het middelpunt A . De homogene schijf II (straal r , massa M) is, draaibaar om zijn middelpunt B , in B op de omtrek van de schijf I bevestigd. De schijven kunnen t.o.v. elkaar roteren in hun gemeenschappelijke vlak. Op de omtrek van schijf II is in het punt C een massapunt (massa m) bevestigd. Het stelsel beweegt zodanig dat de twee schijven aanvankelijk t.o.v. elkaar in rust zijn, terwijl C op het verlengde van AB ligt. De invloeden van wrijving kunnen worden verwaarloosd. Op een bepaald moment wordt schijf I vastgezet.

Bereken:

- de stoot die in B op schijf II wordt uitgeoefend;
- de hoeksnelheid van schijf II onmiddellijk na het vastzetten;
- het energieverlies t.g.v. de fixatie.

- Noem de stoten die in B werken op het stelsel bestaande uit schijf II en het massapunt S_x en S_y (zie figuur) en noem Ω de hoeksnelheid van schijf II na de fixatie.

Aangezien alle stoten die op dit stelsel werken door B gaan, is het stootmoment om B nul, zodat:

$$(14) \text{ en } (.64) \Rightarrow S_x = 0, \quad (11.1)$$

$$(14) \text{ en } (.64) \Rightarrow S_y = -mr\Omega - [-MR\omega - m(R+r)\omega], \quad (11.2)$$

$$(16), (18) \text{ en } (.65) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} M r^2 \Omega + m r^2 \Omega - \left[\frac{1}{2} M r^2 \omega + m r (R+r) \omega \right]. \quad (11.3)$$

Uit deze drie vergelijkingen volgt:

$$S_x = 0, \quad (11.4)$$

$$S_y = \frac{M+3m}{M+2m} M R \omega, \quad (11.5)$$

b.
$$\Omega = \frac{Mr + 2m(R+r)}{(M+2m)r} \omega. \quad (11.6)$$

c. De kinetische energie voor de fixatie is:

$$T_v = \frac{1}{4} M_o R^2 \omega^2 + \frac{1}{4} M(r^2 + 2 R^2) \omega^2 + \frac{1}{2} m(R+r)^2 \omega^2, \quad (11.7)$$

en na de fixatie:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{4} M r^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \\ &= \frac{[Mr + rm(R+r)]^2}{4(M+2m)} \omega^2. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Met (11.7) en (11.8) volgt dat het energieverlies $-\Delta T = T_v - T_n$, gelijk is aan:

$$-\Delta T = \frac{1}{4} M_o R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{M+3m}{M+2m} M R^2 \omega^2. \quad (11.9)$$

De arbeid door de stoot verricht op schijf II en het massapunt:

$$(67) \Rightarrow \Delta T_1 := -\frac{1}{2} S_y \omega R, \quad (11.10)$$

terwijl de arbeid door de stoot op schijf I verricht, direct volgt uit het verschil in kinetische energie na en voor de botsing van schijf I:

$$\Delta T_2 := -\frac{1}{4} M_o R^2 \omega^2. \quad (11.11)$$

Met $-\Delta T = -\Delta T_1 - \Delta T_2$ volgt met (11.5) uit (11.10) en (11.11) opnieuw de voorstelling (11.9) voor het energieverlies.