

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

SATELLIET MECHANICA

Syllabus naar het College van

Prof. Dr. J.B. Alblas



Bilal Mag
Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Satelliet Mechanica

Syllabus naar het college van prof. dr. J.B. Alblas

Inhoudsopgave

I.	<u>Inleiding</u>	
	I.1. Classificatie	1
	I.2. Eulervergelijkingen en transversaliteitscondities	3
	I.3. De Hamiltoniaan	7
	I.4. De Weierstrass-Erdmann hoekcondities	9
	I.5. De Legendre-conditie en het principe van Pontryagin	11
	I.6. Resumé voor het autonome Mayer-probleem	12
II.	<u>Optimalisering van satellietbanen</u>	
	II.1. Inleiding	14
	II.2. Verticale vlucht van raket in vacuüm	15
	II.3. Twee-dimensionale vlucht in vacuüm	22
	II.4. Goddard-probleem	30
III.	<u>Beweging van raketten</u>	
	III.1. De voortstuwing	38
	III.2. De stabiliteit van een niet-spinnende raket	39
	III.3. De spinnende raket	41
IV.	<u>Meertrapsraketten</u>	
	IV.1. Inleiding, de eentrapsraket	46
	IV.2. Optimale brandstofverdeling bij meertrapsraketten	50
V.	<u>Satellieten in hun baan</u>	
	V.1. De atmosfeer	54
	V.2. Het mechanische model	56
	V.3. Het lanceren van de satelliet	60
	LITERATUUR	68

I. Inleiding in de optimalisering

We zullen in dit hoofdstuk een overzicht geven van een aantal resultaten van de variatierekening toegepast op de optimalisering van satellietbanen. We geven geen uitgebreide afleidingen van de gebruikte stellingen; hiervoor zij verwezen naar [1] en [2]. Voor een overzichtsartikel zie [3], terwijl in [4] een aantal analoge problemen als in dit hoofdstuk worden behandeld.

I.1. Classificatie

Bij de optimaliseringsproblemen die in dit college worden behandeld zijn steeds nevencondities gesteld. In het algemeen krijgen we het volgende probleem: extremaliseer een functionaal waarbij de oplossing gebonden is aan een stelsel (differentiaal)vergelijkingen.

We onderscheiden de volgende klassen van problemen:

i) Bolza-probleem.

Stel we hebben n onbekende toestandsvariabelen $x_j(t)$, ($j = 1, 2, \dots, n$) en m onbekende regelparameters $u_j(t)$, ($j = 1, 2, \dots, m$). De toestandsvariabelen zijn functies van de tijd t die voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$(1.1) \quad \dot{x}_j = f_j(t, \underline{x}, \underline{u}), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

terwijl de regelfuncties begrensd zijn door condities van de vorm

$$(1.2) \quad U_j(\underline{u}) < K_j, \quad j = 1, 2, \dots, p \leq m.$$

Verder gelden de randvoorwaarden

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \omega_j(t_i, \underline{x}(t_i)) &= 0, \quad j = 1, \dots, M, \\ \omega_j(t_f, \underline{x}(t_f)) &= 0, \quad j = M+1, \dots, N, \quad N \leq 2n + 2 \end{aligned}$$

waarin t_i en t_f de begin- resp. de eindtijd van het probleem zijn.

Door Valentine is een methode bedacht om van de ongelijkheden (1.2) over te gaan op gelijkheden. We voeren hiertoe nieuwe, reële variabelen α_j , ($j = 1, \dots, p$) in, door

$$(1.4) \quad K_j - U_j(\underline{u}) - \alpha_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Door te voldoen aan (1.4) is triviaal voldaan aan (1.2). De α_j 's worden sluikparameters genoemd (Engels: slack-variable, Duits: Schlupfvariable).

Bij twee grenzen

$$(1.5) \quad L_j < U_j(\underline{u}) < K_j,$$

vervangen we deze ongelijkheid door

$$(1.6) \quad [U_j(\underline{u}) - L_j][K_j - U_j(\underline{u})] - \alpha_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

We kunnen nu de $(n + p)$ -dimensionale vector $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{u}, \underline{\alpha})$ invoeren door

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \varphi_j &:= \dot{x}_j - f_j(t, \underline{x}, \underline{u}) = 0, \quad \text{voor } j = 1, \dots, n, \\ \varphi_{n+j} &:= K_j - U_j(\underline{u}) - \alpha_j^2 = 0, \quad \text{voor } j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Definieer een functionaal $\tilde{\Psi}$ door

$$(1.8) \quad \tilde{\Psi}(\underline{x}, \underline{u}) := G(t, \underline{x}, \underline{u}) \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \Phi(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{u}) dt, \quad \Phi \in C^2(t_i, t_f).$$

Het probleem is nu het volgende: zoek die $\{\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\alpha}(t)\}$ waarvoor $\tilde{\Psi}$ extremaal is, onder de nevencondities

$$(1.9) \quad \varphi_j = 0, \quad j = 1, \dots, n+p.$$

ii) Lagrange-probleem.

Het Lagrange-probleem is gelijk aan het Bolza-probleem met $G \equiv 0$ in (1.8).

iii) Mayer-probleem.

Hier is $\Phi \equiv 0$ in (1.8).

De verschillende klassen kunnen door eenvoudige transformaties in elkaar worden overgevoerd (zie bijv. [7]). De meeste vraagstukken uit de satellietmechanica behoren tot de Mayer-problemen.

Indien Φ en φ de tijd t niet expliciet bevatten spreken we van autonome processen.

I.2. Eulervergelijkingen en transversaliteitscondities

We hebben in de vorige paragraaf gezien dat het probleem bestaat uit het bepalen van extrema onder nevencondities. We zullen hiervoor gebruiken de multiplicatorenmethode van Lagrange (zie [7], I.7 of [5], I.9). Deze methode gaat als volgt: stel we zoeken het minimum van $L(\underline{x})$ onder de nevencondities

$$\chi_j(\underline{x}) = 0 ; \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

dit is gelijkwaardig met het zoeken van de extrema van:

$$L(\underline{x}) + \lambda_j \chi_j(\underline{x}) , \quad j = 1, 2, \dots, n .$$

De functies λ_j worden de multiplicatoren van Lagrange genoemd.

Definieer

$$(1.10) \quad F(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{u}, \underline{\alpha}) := \Phi(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{u}) + \lambda_j(t) \varphi_j(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{u}, \underline{\alpha}) , \quad (j = 1, \dots, n+p)$$

dan bestaat het Bolza-probleem uit het bepalen van de extrema van

$$(1.11) \quad \Psi(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\alpha}) = G(t, \underline{x}, \underline{u}) \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} F(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{u}, \underline{\alpha}) dt .$$

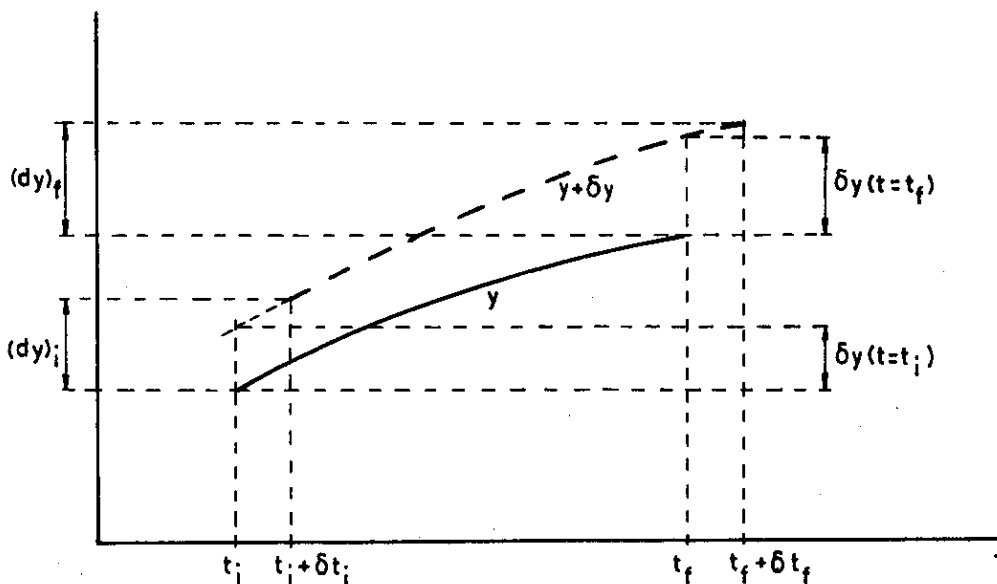
We voeren twee $(n + m + p)$ -dimensionale vectoren \underline{y} en \underline{v} in door

$$(1.12) \quad \underline{y} = (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \alpha_1, \dots, \alpha_p) ,$$
$$\underline{v} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0) .$$

De te extremaliseren functionaal kan dan worden geschreven als

$$(1.13) \quad \Psi(\underline{y}) = G(t, \underline{y}) \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} F(t, \underline{y}, \dot{\underline{y}}) dt .$$

Stel dat $\underline{y} = \underline{y}(t)$ de optimale kromme is. We zullen deze kromme gaan vergelijken met een naburige kromme: $\underline{y} + \delta \underline{y}$, die niet dezelfde begin- en eindpunten behoeft te hebben. Wel nemen we aan dat van deze naburige kromme niet alleen de \underline{x} maar ook de $\dot{\underline{x}}$ in de buurt van de waarde behorende bij de optimale kromme ligt (dit betekent dat we ons beperken tot zwakke variaties).



Als we de functionaal Ψ behorende bij de optimale kromme vergelijken met die behorende bij een naburige kromme dan moet gelden (want $\Psi(\underline{y})$ is extremaal)

$$(1.14) \quad d\Psi(\underline{y}) := \Psi(\underline{y} + \delta \underline{y}) - \Psi(\underline{y}) = 0 .$$

Met (1.13) leidt dit tot (voor zwakke variaties)

$$(1.15) \quad G(t, \underline{y} + \delta \underline{y}) \Big|_{t_i + \delta t_i}^{t_f + \delta t_f} - G(t, \underline{x}) \Big|_{t_i}^{t_f} + \\ + \int_{t_i + \delta t_i}^{t_f + \delta t_f} F(t, \underline{y} + \delta \underline{y}, \underline{v} + \delta \underline{v}) dt - \int_{t_i}^{t_f} F(t, \underline{y}, \underline{v}) dt = 0 .$$

We definiëren

$$(1.16) \quad dG \Big|_i^f := G(t, \underline{y} + \delta \underline{y}) \Big|_{t_i + \delta t_i}^{t_f + \delta t_f} - G(t, \underline{y}) \Big|_{t_i}^{t_f} = \left[\frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial y_k} dy_k \right]_i^f ,$$

waarbij $(dy)_f$ en $(dt)_f$ zijn gedefinieerd door (zie ook bovenstaande figuur)

$$(1.17) \quad (dy)_f := (\underline{y} + \delta \underline{y})(t = t_f + \delta t_f) - \underline{y}(t = t_f) , \\ (dt)_f := \delta t_f .$$

Op analoge wijze worden $(dy)_i$ en $(dt)_i$ gedefinieerd.

In (1.16) zijn alle tweede en hogere orde termen verwaarloosd.

Verder is

$$(1.18) \quad \int_{t_i + \delta t_i}^{t_f + \delta t_f} F(t, \underline{y} + \delta \underline{y}, \underline{v} + \delta \underline{v}) dt = \int_{t_i}^{t_f} F(t, \underline{y}, \underline{v}) dt + [F(t, \underline{y}, \underline{v})]_{t_i}^{t_f} + \\ + \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial F}{\partial v_k} \delta v_k \right\} dt .$$

Uit de definitie van \underline{y} volgens (1.12)² volgt direct dat

$$(1.19) \quad \frac{\partial F}{\partial v_k} \delta v_k = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_k = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \frac{d}{dt} (\delta x_k) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \delta x_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right) \delta x_k .$$

Hiermee gaat (1.18) over in

$$(1.20) \quad \int_{t_i + \delta t_i}^{t_f + \delta t_f} F(t, \underline{y} + \delta \underline{y}, \underline{v} + \delta \underline{v}) dt = \int_{t_i}^{t_f} F(t, \underline{y}, \underline{v}) dt + \\ + [F \delta t + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \delta x_k]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} [\frac{\partial F}{\partial y_k} \delta y_k - \frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}) \delta x_k] dt .$$

Nu is echter

$$(1.21) \quad \delta \underline{x}(t = t_f) \neq (d\underline{x})_f ,$$

immers, volgens (1.55) is

$$(d\underline{x})_f = \underline{x}(t_f + \delta t_f) + \delta \underline{x}(t_f) - \underline{x}(t_f) = \dot{\underline{x}}(t_f) \delta t_f + \delta \underline{x}(t_f) .$$

Hiermee kunnen we (1.20) herschrijven en na dit gesubstitueerd te hebben in (1.15) komen we tenslotte tot

$$(1.22) \quad \int_{t_i}^{t_f} [\frac{\partial F}{\partial y_k} \delta y_k - \frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}) \delta x_k] dt + \\ + [dG + (F - \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}) dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} dx_k]_i^f = 0 .$$

Uit het feit dat (1.22) moet gelden voor elke willekeurige variatie volgen de volgende twee stelsels van vergelijkingen (welke noodzakelijke condities zijn voor het extremaal zijn van ψ)

i) (met de definitie van \underline{y} volgen (1.12)¹)

$$\frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}) - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 , \quad k = 1, \dots, n , \\ (1.23) \quad \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0 , \quad k = 1, \dots, m , \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 0 , \quad k = 1, \dots, p .$$

Deze vergelijkingen worden de Euler-vergelijkingen genoemd.

ii)

$$(1.24) \quad [dG + (F - \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k})dt + \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k]_i^f = 0 .$$

Deze vergelijking wordt de transversaliteitsconditie genoemd. Aan deze conditie moet samen met de randvoorwaarden voor het Bolza-probleem (1.3) worden voldaan.

Bekijken we bijvoorbeeld alleen de termen met dx_1 :

$$(1.25) \quad [(\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1})dx_1]_i^f = 0 ,$$

en nemen we aan dat $x_1(t_i)$ is voorgeschreven en $x_1(t_f)$ vrij is. Dan is

$$(dx_1)_i = 0 , (dx_1)_f \neq 0 .$$

Aan de i-kant is dan triviaal voldaan aan (1.25), terwijl de f-kant de randvoorwaarde

$$(\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1})_f = 0 ,$$

geeft.

I.3. De Hamiltoniaan

We gaan uit van de Euler-vergelijkingen voor de toestandsvariabelen \underline{x} ((1.23)¹)

$$\frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}) - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 , \quad k = 1, \dots, n .$$

Uit deze vergelijkingen volgt

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} (F - \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}) = \frac{\partial F}{\partial t} ,$$

want

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(F - \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right) &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \ddot{x}_k - \ddot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} - \dot{x}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} - \dot{x}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\} = \frac{\partial F}{\partial t} . \end{aligned}$$

Definiëren we de Hamiltoniaan H door

$$(1.27) \quad H := \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} - F ,$$

dan gaat (1.26) over in

$$(1.28) \quad \frac{dH}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Voor de belangrijke klasse van autonome systemen, hiervoor is

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 ,$$

geldt dus

$$(1.29) \quad \frac{dH}{dt} = 0 , \Rightarrow H = C = \text{constant} .$$

Dus voor autonome systemen is de Hamiltoniaan constant.

We beschouwen een Mayer-probleem. In dat geval wordt (1.10)

$$(1.30) \quad F = \lambda_j \varphi_j , \quad j = 1, \dots, n+p .$$

Hieruit volgt dat

$$(1.31) \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} = \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \dot{x}_k} .$$

Uit de definitie van φ_j volgens (1.7) volgt

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \dot{x}_k} = \delta_{jk} , \quad j, k = 1, \dots, n ,$$

(1.32)

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \dot{x}_k} = 0 , \quad k = 1, \dots, n, j = n, \dots, n+p .$$

Hiermee gaat (1.31) over in

$$(1.33) \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Differentiëren naar t van (1.33) leidt met (1.23)¹ tot

$$(1.34) \quad \dot{\lambda}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right) = \frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Uit de definitie van H : (1.27) en uit (1.33) volgt

$$(1.35) \quad F = -H + \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} = -H + \lambda_k \dot{x}_k,$$

waaruit direct is af te leiden

$$(1.36) \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

en

$$(1.37) \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} = \dot{x}_k,$$

want

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = \dot{x}_k - f_k = 0.$$

Uit (1.34) en (1.36) vinden we de volgende belangrijke betrekkingen

$$(1.38) \quad \dot{\lambda}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Let op dat deze relaties in deze vorm alleen zijn afgeleid voor een Mayer-probleem.

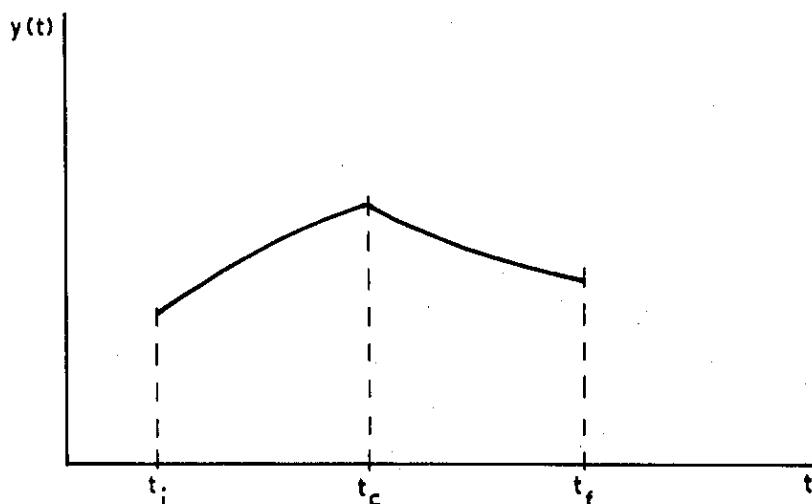
I.4. De Weierstrass-Erdmann hoekcondities

De Euler-vergelijkingen (1.23) bezitten een eerste integraal die er als volgt uitziet

$$(1.39) \quad \frac{\partial F(t, \underline{y}, \underline{v})}{\partial \dot{x}_k} = \int_{t_i}^t \frac{\partial F(\tau, \underline{y}, \underline{v})}{\partial x_k} d\tau + c_k.$$

De Euler-vergelijkingen gelden alleen voor banen $\underline{y}(t) \in C^2(t_i, t_f)$; de geïntegreerde vorm (1.39) echter geldt voor $\underline{y}(t) \in C^0(t_i, t_f)$.

We beschouwen nu een $\underline{y}(t)$ die op het traject (t_i, t_f) niet overal continu differentieerbaar is, bijvoorbeeld



Aangezien $F(\underline{y}, \dot{\underline{y}}, t)$ continu-differentieerbaar naar zijn argumenten is en $\underline{y}(t) \in C^0(t_i, t_f)$ is $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}$ begrensd. Hiermee vinden we, door (1.39) toe te passen voor een punt vlak vóór en een vlak ná het discontinuïteitspunt t_c dat

$$(1.40) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\right)_- = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

In (1.40) betekent

$$(1.41) \quad (.)_+ = \lim_{t \uparrow t_c} (.), \quad (.)_- = \lim_{t \downarrow t_c} (.) .$$

Vergelijking (1.40) heet de eerste Weierstrass-Erdmann-hoekconditie.

Voor het bepalen van de tweede conditie gaan we uit van (1.26), welke we integreren over een klein traject om t_c :

$$(1.42) \quad \int_{t_c - \delta}^{t_c + \delta} \frac{d}{dt} \left(F - \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right) dt = \int_{t_c - \delta}^{t_c + \delta} \frac{\partial F}{\partial t} dt .$$

Laten we $\delta \rightarrow 0$ dan gaat het rechterlid van (1.42) naar nul, want $\frac{\partial F}{\partial t}$ is begrensd, en krijgen we

$$(1.43) \quad (F - \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k})_+ = (F - \dot{x}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k})_- .$$

Dit is de tweede Weierstrass-Erdmann-hoekconditie.

Met de definitie van de Hamiltoniaan (1.27) kunnen we (1.43) ook schrijven als

$$(1.44) \quad (H)_+ = (H)_- .$$

I.5. De Legendre-conditie en het principe van Pontryagin

We hebben tot nu toe alleen relaties afgeleid voor het extremaal zijn van de functionaal Ψ . We zullen in deze paragraaf een tweetal noodzakelijke condities geven voor het minimaal zijn van Ψ . We geven deze voorwaarden zonder bewijs; voor de bewijzen wordt verwezen naar de literatuur, bijv. [5] en [2].

Deze twee condities zijn:

i) de Legendre-conditie.

$$(1.45) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_j \delta \dot{x}_k \geq 0, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

ii) het principe van Pontryagin

$$(1.46) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_j \partial \eta_j} \delta \eta_j \delta \eta_k \geq 0, \quad j, k = 1, \dots, m+p,$$

met

$$\underline{\eta} := (u_1, \dots, u_m, \alpha_1, \dots, \alpha_p) .$$

Beperken we ons tot een Mayer-probleem, dan is volgens (1.35)

$$F = -H + \lambda_k \dot{x}_k,$$

dan gaat (1.46) over in

$$(1.47) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \delta \eta_j \delta \eta_k \leq 0 .$$

Deze condities gelden alle voor zwakke variaties.

I.6. Resumé voor het autonome Mayer-probleem

Omdat in het volgende hoofdstuk een aantal vraagstukken wordt behandeld behorende tot de klasse van de autonome Mayer-problemen zullen we in deze paragraaf een overzicht geven van de belangrijkste vergelijkingen voor deze klasse.

Een Mayer-probleem heeft de volgende $(2n + m + 2p)$ onbekenden:

$$\begin{aligned} x_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad u_j \quad (j = 1, \dots, m), \quad \alpha_j \quad (j = 1, \dots, p), \\ \lambda_j \quad (j = 1, \dots, n+p) . \end{aligned}$$

Hiervoor hebben we de volgende vergelijkingen

$$(1.7) \quad \varphi_j = \dot{x}_j - f_j(t, \underline{x}, \underline{u}) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\varphi_{n+j} = K_j - U_j(\underline{u}) - \alpha_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, p .$$

$$(1.38) \quad \dot{\lambda}_j = - \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

(komt in plaats van de Euler-vergelijking (1.23)¹).

$$(1.48) \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

(volgen uit (1.23)^{2,3} met (1.35)).

Dit zijn in totaal $(2n + m + 2p)$ vergelijkingen.

Hierbij horen de volgende randvoorwaarden:

$$(1.3) \quad \omega_j(t_i, \underline{x}(t_i)) = 0, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$\omega_j(t_f, \underline{x}(t_f)) = 0, \quad j = M+1, \dots, N, \quad N \leq 2n + 2,$$

en

$$(1.49) \quad [dG - C dt + \lambda_k dx_k]_i^f = 0, \quad (k = 1, \dots, n)$$

(uit (1.24), (1.27), (1.29) en (1.33)).

Dit stelsel geeft $(2n + 2)$ randvoorwaarden voor de $2n$ eerste-orde differentiaalvergelijkingen (1.7)¹ en (1.38) en voor C en $(t_f - t_i)$.

Verder hebben we de discontinuïteitscondities

$$(1.50) \quad (\lambda_k)_+ = (\lambda_k)_-, \quad k = 1, \dots, n,$$

(uit (1.40) met (1.33)), en

$$(1.44) \quad (H)_+ = (H)_-.$$

Tenslotte krijgen we nog de minimumcondities

$$(1.45) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_j \delta \dot{x}_k \geq 0, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

en

$$(1.47) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \delta \eta_j \delta \eta_k \leq 0, \quad j, k = 1, \dots, m+p,$$

$$(\underline{\eta} := (u_1, \dots, u_n, \alpha_1, \dots, \alpha_p)).$$

We zullen deze resultaten in het volgende hoofdstuk gaan toepassen op een aantal vraagstukken betreffende het optimaliseren van satellietbanen.

II. Optimalisering van satellietbanen

II.1. Inleiding

We zullen in dit hoofdstuk een aantal problemen behandelen die betrekking hebben op de optimalisering van satellietbanen. Deze vraagstukken blijken steeds te behoren tot de klasse van de autonome Mayer-problemen. (Zie ook [8].)

Voor de aandrijfkracht T van de raket geldt de volgende relatie (welke we in hoofdstuk III zullen afleiden)

$$(2.1) \quad T = - c \dot{m} ,$$

waarin m de massa van de raket is en \dot{m} dus de uitgestoten massa per tijdseenheid ($\dot{m} \leq 0$). Verder nemen we aan dat c een positieve constante is.

In plaats van T zullen we steeds de variabele β gebruiken, gedefinieerd door

$$(2.2) \quad \beta := \frac{T}{c} = - \dot{m} \quad (\geq 0) .$$

De aandrijfkracht T is begrensd, dat wil zeggen

$$(2.3) \quad 0 \leq T \leq T_{\max} ,$$

of, uitgedrukt in β

$$(2.4) \quad 0 \leq \beta \leq \beta_m ,$$

waarin β_m een positieve constante is.

We zullen deze ongelijkheid vervangen door een gelijkheid door invoering van de sluikparameter α :

$$(2.5) \quad \beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2 = 0 .$$

We veronderstellen verder dat de massa m en de snelheid \underline{v} van de raket continue functies van de tijd zijn, maar dat \dot{m} en $\dot{\underline{v}}$ discontinu mogen zijn.

II.2. Verticale vlucht van raket in vacuum

We beschouwen de verticale vlucht van een raket in vacuum (geen luchtweerstand). We passen verder de vereenvoudiging toe dat we de zwaartekracht constant nemen (gravitatieconstante: g).

We noemen de hoogte van de raket h , de snelheid v en de massa m .

We willen het volgende probleem oplossen:

gevraagd die strategie, waarbij de raket zijn optimale hoogte bereikt, als op het gegeven begintijdstip t_i de hoogte: $h_i = 0$, de snelheid: $v_i = 0$ en de massa: m_i gegeven zijn en op het nog onbekende eindtijdstip t_f de eind-snelheid: $v_f = 0$ en de eindmassa: m_f gegeven zijn.

Dit betekent dat we moeten minimaliseren de functionaal

$$(2.6) \quad \tilde{\Psi} = G \Big|_i^f = -h \Big|_i^f = -h_f .$$

We moeten deze functionaal minimaliseren onder de conditie dat voldaan is aan de volgende bewegingsvergelijkingen

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &:= \dot{h} - v = 0, && \text{(definitie van } v) \\ \varphi_2 &:= \dot{v} + g - \frac{\beta c}{m} = 0, && \text{(K = m.a: verticaal)} \\ \varphi_3 &:= \dot{m} + \beta = 0, && \text{((2.2))} \\ \varphi_4 &:= \beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2 = 0, && \text{((2.5))} . \end{aligned}$$

In dit vraagstuk zijn h , v en m de toestandsvariabelen ($n = 3$), β een regelparameter ($m = 1$) en α een sluikparameter ($p = 1$).

Volgens (1.30) is

$$(2.8) \quad F = \sum_{j=1}^4 \lambda_j \varphi_j = \lambda_1 (\dot{h} - v) + \lambda_2 (\dot{v} + g - \frac{\beta c}{m}) + \\ + \lambda_3 (\dot{m} + \beta) + \lambda_4 [\beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2] .$$

Hieruit volgt voor de Hamiltoniaan (1.27)

$$(2.9) \quad H = -F + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = \lambda_1 v + \lambda_2 \left(\frac{\beta c}{m} - g \right) + \\ - \lambda_3 \beta - \lambda_4 [\beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2] = \\ = \lambda_1 v - \lambda_2 g + K\beta - \lambda_4 [\beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2] ,$$

met

$$(2.10) \quad K := \lambda_2 \frac{c}{m} - \lambda_3 : \text{stuurfunctie.}$$

Met de Hamilton-vergelijkingen (1.38) (of met de Eulerse vergelijkingen (1.23)¹) krijgen we

$$\dot{\lambda}_1 = - \frac{\partial H}{\partial h} = 0 , \Rightarrow \lambda_1 = c_1 , \\ (2.11) \quad \dot{\lambda}_2 = - \frac{\partial H}{\partial v} = - \lambda_1 , \Rightarrow \lambda_2 = - c_1 t + c_2 , \\ \dot{\lambda}_3 = - \frac{\partial H}{\partial m} = \frac{c\beta}{m} \lambda_2 .$$

Verder geldt volgens (1.48)

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 ,$$

waaruit volgen

$$K - \lambda_4 (\beta_m - 2\beta) = 0 , \\ (2.12) \quad 2\alpha\lambda_4 = 0 .$$

We hebben hier te doen met een autonoom probleem, zodat ((1.29))

$$H = C = \text{constant}$$

waaruit met (2.9) en (2.7)⁴ volgt

$$(2.13) \quad H = \lambda_1 v - \lambda_2 g + K\beta = C .$$

De transversaliteitsconditie (1.49) luidt hier

$$(2.14) \quad (-dh - C dt + \lambda_1 dh + \lambda_2 dv + \lambda_3 dm) \Big|_i^f = 0 .$$

Gegeven zijn: t_i, h_i, v_i, m_i, v_f en m_f , dus

$$(2.15) \quad dt_i = dh_i = dv_i = dm_i = dv_f = dm_f = 0 ,$$

waarmee (2.14) vereenvoudigt tot

$$(2.16) \quad (\lambda_{1f} - 1)dh_f - C dt_f = 0 .$$

Aangezien (2.16) moet gelden voor willekeurige dh_f en dt_f moet

$$(2.17) \quad C = 0 \text{ en } \lambda_{1f} = 1 ,$$

welke laatste vergelijking met (2.11)¹ leidt tot

$$(2.18) \quad \lambda_1 = 1 .$$

Voordat we nu verder gaan berekenen we eerst uit (2.10) met behulp van (2.11) en (2.18)

$$(2.19) \quad \dot{K} = \dot{\lambda}_2 \frac{c}{m} - \lambda_2 \frac{c\dot{m}}{m^2} - \dot{\lambda}_3 = -\frac{c}{m} .$$

Aangezien c en m positief zijn, volgt hieruit dat \dot{K} altijd kleiner dan nul is.

Uit (2.12)² volgt

$$(2.20) \quad \lambda_4 = 0 \text{ óf } \alpha = 0 .$$

We zullen aantonen dat $\lambda_4 = 0$ niet mogelijk is, want: stel $\lambda_4 = 0$, dan volgt uit (2.12)¹: $K = 0$ en hieruit weer $\dot{K} = 0$, wat in tegenspraak is met (2.19).

Blijft dus over

$$(2.21) \quad \alpha = 0 .$$

Volgens (2.7)⁴ is dan

$$(2.22) \quad \beta = 0 \text{ óf } \beta = \beta_m ,$$

wat betekent dat de motor óf helemaal buiten werking is ($\beta = 0$) of helemaal op volle kracht werkt ($\beta = \beta_m$).

We moeten natuurlijk met $\beta = \beta_m$ beginnen, maar na enige tijd zouden we eventueel kunnen overgaan op $\beta = 0$ en daarna weer op $\beta = \beta_m$ etc. We krijgen dus sprongen in de regelparameter β ; we spreken dan van een bang-bang-probleem. De stukken tussen de sprongen heten takken. Voor de overgang van de ene tak naar de andere gelden de Weierstrass-Erdmann-hoekcondities (1.50) en (1.44):

$$(2.23) \quad (\lambda_1)_+ - (\lambda_1)_- = (\lambda_2)_+ - (\lambda_2)_- = (\lambda_3)_+ - (\lambda_3)_- = 0 ,$$

en

$$(2.24) \quad (H)_+ - (H)_- = 0 .$$

Uit (2.24) volgt met (2.13) en (2.17)¹

$$(2.25) \quad (H)_+ = (H)_- = 0 .$$

Beschouw de stuurfunctie

$$K = \lambda_2 \frac{c}{m} - \lambda_3 .$$

Aangezien λ_2 , λ_3 , c en m continu zijn, is ook K continu en volgens (2.19) is K dan een continue, monotoon dalende functie van t .

De Legendre-conditie (1.45)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_j \delta \dot{x}_k \geq 0 , \quad (j, k = 1, 2, 3) ,$$

geeft geen informatie omdat F lineair in \dot{h} , \dot{v} en \dot{m} is.

Het principe van Pontryagin (1.47) luidt hier

$$(2.26) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} (\delta \beta)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} (\delta \alpha)^2 \leq 0 , \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} \equiv 0 \right) ,$$

wat met

$$(2.27) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} = 2\lambda_4 , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} = 2\lambda_4 ,$$

en

$$(2.28) \quad \lambda_4 = \frac{K}{\beta_m - 2\beta} ,$$

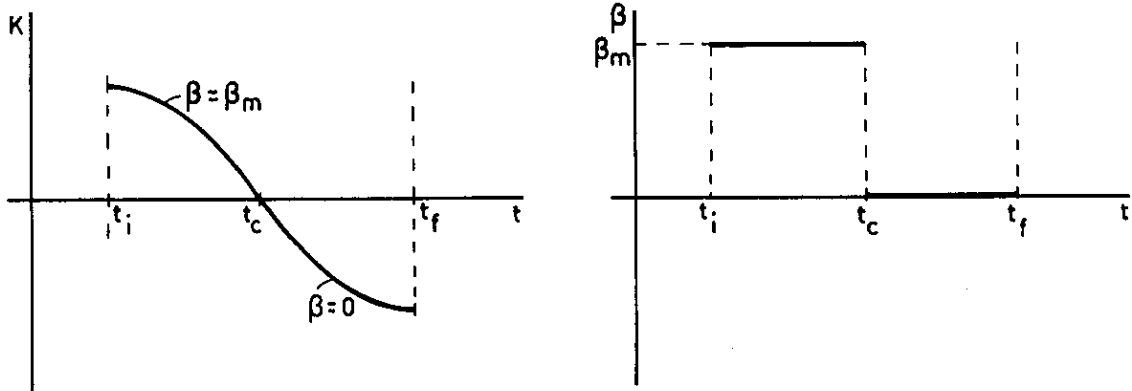
overgaat in

$$(2.29) \quad \frac{K}{(2\beta - \beta_m)} [(\delta\alpha)^2 + (\delta\beta)^2] \geq 0 .$$

Uit (2.29) kunnen we de volgende conclusie trekken

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \beta = 0 & \iff K \leq 0 , \\ \beta = \beta_m & \iff K \geq 0 . \end{aligned}$$

Met (2.30) is te bewijzen dat het optimale proces uit twee takken bestaat. Dit gaat als volgt: We beginnen met $\beta = \beta_m$; in dat geval is $K \geq 0$. Maar K is een continue, dalende functie dus op zeker moment ($t = t_c$) zal $K = 0$ worden. Voor $t > t_c$ wordt $K < 0$ en dus $\beta = 0$.



We kunnen nu de optimale hoogte gaan berekenen.

Voor $t_i \leq t < t_c$ geldt:

$$(2.31) \quad \dot{m} = -\beta_m .$$

Verder is

$$(2.32) \quad \begin{aligned} m &= m_i , & \text{voor } t &= t_i , & \text{(gegeven) ,} \\ m &= m_f , & \text{voor } t &= t_c , & \text{(gegeven) ,} \end{aligned}$$

want na t_c is er geen verbranding meer.

Uit (2.31) en (2.32)² krijgen we

$$(2.33) \quad m(t) = m_f - \beta_m (t - t_c), \quad t_i \leq t \leq t_c.$$

Met (2.32)¹ volgt hieruit

$$(2.34) \quad t_c = t_i + \frac{(m_i - m_f)}{\beta_m},$$

waarmee (2.33) overgaat in

$$(2.35) \quad m(t) = m_i - \beta_m (t - t_i), \quad t_i \leq t \leq t_c.$$

Hiermee wordt (2.19)

$$(2.36) \quad \dot{K}(t) = -\frac{c}{m(t)} = -\frac{c}{m_i - \beta_m (t - t_i)}.$$

Integratie van (2.36) van t tot t_c , waarbij we bedenken dat $K(t_c) = 0$, levert

$$(2.37) \quad K(t) = \frac{c}{\beta_m} \log\left(\frac{m(t)}{m_f}\right), \quad t_i \leq t \leq t_c.$$

Voor $t_c < t \leq t_f$ hebben we

$$(2.38) \quad \beta = \dot{m} = 0 \Rightarrow m = m_f, \quad t_c \leq t \leq t_f,$$

waaruit met (2.19) volgt

$$K(t) = -\frac{c}{m_f} (t - t_c), \quad t_c \leq t \leq t_f.$$

Uit (2.7)² volgt met (2.35) en met $v(t_i) = 0$ dat voor $t_i \leq t \leq t_c$ de snelheid $v(t)$ moet voldoen aan

$$(2.39) \quad v(t) = -c \log\left(\frac{m(t)}{m_i}\right) - g(t - t_i), \quad t_i \leq t \leq t_c.$$

Voor $t_c < t < t_f$ werkt er geen aandrijfkracht meer; er geldt dan

$$(2.40) \quad \dot{v}(t) = -g,$$

waaruit volgt

$$(2.41) \quad v(t) = -g(t - t_c) + v(t_c) = -g(t - t_i) - c \log\left(\frac{m_f}{m_i}\right), \quad t_c \leq t \leq t_f.$$

Het eindpunt t_f van de beweging vinden we uit de conditie $v(t_f) = 0$, wat geeft

$$(2.42) \quad t_f = -\frac{c}{g} \log\left(\frac{m_f}{m_i}\right) + t_i.$$

Opmerking: Opdat de raket aan het begin van de beweging los komt, is het noodzakelijk dat

$$(2.43) \quad c\beta_m > m_i g.$$

Uit deze conditie volgt (met $m_f < m_i$)

$$v(t_c) > 0 \quad \text{en} \quad t_f > t_c.$$

Uit (2.39) en (2.41) kunnen we de maximale hoogte berekenen. Als we invoeren de dimensieloze grootheden

$$(2.44) \quad \eta_f := \frac{gh_f}{c^2}, \quad \tau_i := \frac{c\beta_m}{gm_i}, \quad \rho := \frac{m_i - m_f}{m_i},$$

dan vinden we

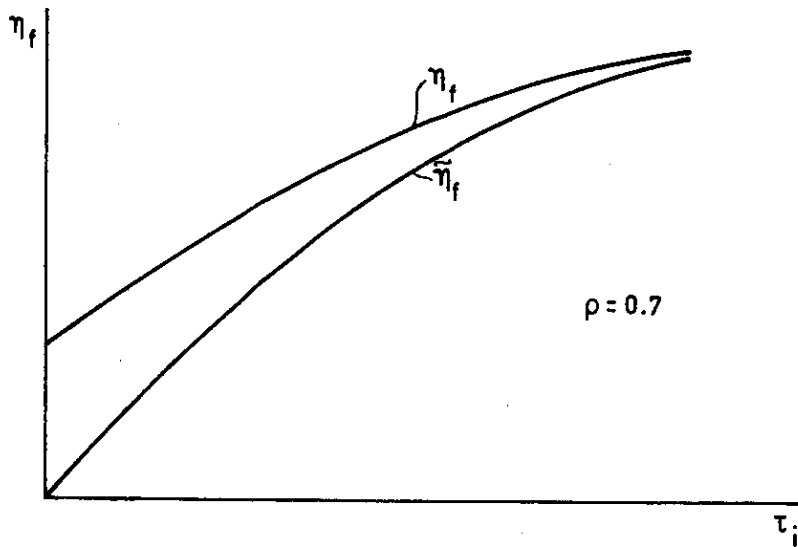
$$(2.45) \quad \eta_f = \frac{1}{2} \log^2(1 - \rho) + \frac{1}{\tau_i} [\rho + \log(1 - \rho)].$$

We zullen deze optimale hoogte vergelijken met de hoogte die we bereiken met het programma: $\beta(t) = A m(t)$, (A : constant), totdat de brandstof op is ($m(t) = m_f$) en daarna: $\beta = 0$.

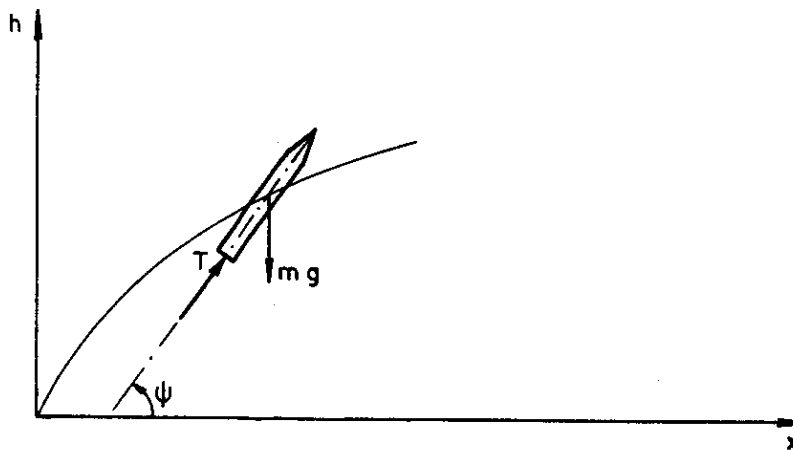
We krijgen dan

$$(2.46) \quad \tilde{\eta}_f = \frac{\tau_i - 1}{2\tau_i} \log^2(1 - \rho).$$

Als we (2.45) en (2.46) in grafiek uitzetten krijgen we



II.3. Twee-dimensionale vlucht in vacuüm



We beschouwen hetzelfde probleem als in de vorige paragraaf (dus geen luchtweerstand en constante zwaartekracht) maar nu in twee dimensies.

We hebben dan vijf toestandsvariabelen: de hoogte h , de horizontale verplaatsing x , de horizontale en verticale snelheden u en v en de massa m , twee regelparameters: de aandrijfparameter β en de hoek ψ die de aandrijfkracht T ,

welke we in de richting van de as van de raket veronderstellen, met de horizontaal maakt, en een sluikparameter α volgens (2.5). Hoe de hoek ψ geregeld kan worden laten we hier buiten beschouwing.

We willen de volgende functionaal minimaliseren

$$(2.47) \quad \tilde{\Psi} = G(t, x, h, u, v, m) \Big|_i^f,$$

waarbij we G op dit moment niet nader specificeren.

We moeten $\tilde{\Psi}$ optimaliseren onder de volgende zes nevencondities

$$(2.48) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &:= \dot{x} - u = 0, && \text{(definitie van } u \text{)}, \\ \varphi_2 &:= \dot{h} - v = 0, && \text{(definitie van } v \text{)}, \\ \varphi_3 &:= \dot{u} - \frac{c\beta}{m} \cos \psi = 0, && \text{(K = ma: horizontaal)}, \\ \varphi_4 &:= \dot{v} + g - \frac{c\beta}{m} \sin \psi = 0, && \text{(K = ma: verticaal)}, \\ \varphi_5 &:= \dot{m} + \beta = 0, && \text{((2.2))}, \\ \varphi_6 &:= \beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2 = 0, && \text{((2.5))}. \end{aligned}$$

Met (1.30) krijgen we

$$(2.49) \quad F = \lambda_1(\dot{x} - u) + \lambda_2(\dot{h} - v) + \lambda_3\left(\dot{u} - \frac{c\beta}{m} \cos \psi\right) + \\ + \lambda_4\left(\dot{v} + g - \frac{c\beta}{m} \sin \psi\right) + \lambda_5(\dot{m} + \beta) + \lambda_6[\beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2],$$

en hiermee uit (1.27)

$$(2.50) \quad H = \lambda_1 u + \lambda_2 v - \lambda_4 g + \beta K_\beta - \lambda_6[\beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2],$$

met

$$(2.51) \quad K_\beta := \frac{c}{m} (\lambda_3 \cos \psi + \lambda_4 \sin \psi) - \lambda_5 = \frac{c}{m} K_\psi - \lambda_5,$$

waarbij

$$(2.52) \quad K_\psi := \lambda_3 \cos \psi + \lambda_4 \sin \psi.$$

Omdat we een autonoom probleem hebben moet H constant zijn, wat leidt tot

$$(2.53) \quad \lambda_1 u + \lambda_2 v - \lambda_4 g + \beta K_\beta = C .$$

De Hamiltonvergelijkingen (1.38) geven

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 , \Rightarrow \lambda_1 = c_1 , \\ \dot{\lambda}_2 &= - \frac{\partial H}{\partial h} = 0 , \Rightarrow \lambda_2 = c_2 , \\ (2.54) \quad \dot{\lambda}_3 &= - \frac{\partial H}{\partial u} = - \lambda_1 , \Rightarrow \lambda_3 = c_3 - c_1 t , \\ \dot{\lambda}_4 &= - \frac{\partial H}{\partial v} = - \lambda_2 , \Rightarrow \lambda_4 = c_4 - c_2 t , \\ \dot{\lambda}_5 &= - \frac{\partial H}{\partial m} = \frac{c\beta}{m^2} K_\psi , \end{aligned}$$

en de vergelijkingen (1.48)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \beta} &= K_\beta - \lambda_6 (\beta_m - 2\beta) = 0 , \\ (2.55) \quad \frac{\partial H}{\partial \psi} &= \frac{c\beta}{m} (\lambda_3 \sin \psi - \lambda_4 \cos \psi) = 0 , \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= 2\alpha \lambda_6 = 0 . \end{aligned}$$

De transversaliteitsconditie (1.49) luidt hier

$$\begin{aligned} (2.56) \quad [& (\frac{\partial G}{\partial t} - C) dt + (\frac{\partial G}{\partial x} + \lambda_1) dx + (\frac{\partial G}{\partial h} + \lambda_2) dh + (\frac{\partial G}{\partial u} + \lambda_3) du + \\ & + (\frac{\partial G}{\partial v} + \lambda_4) dv + (\frac{\partial G}{\partial m} + \lambda_5) dm]_i^f = 0 . \end{aligned}$$

We kunnen uit deze vergelijkingen de volgende algemene conclusie trekken (onafhankelijk van een specifieke uitdrukking voor G):

Uit (2.55)³ volgt

$$\alpha = 0 \quad \text{of} \quad \lambda_6 = 0 .$$

We zullen bewijzen dat $\alpha = 0$ moet gelden, wat betekent dat $\beta = 0$ of $\beta = \beta_m$.

We onderscheiden hiertoe $\beta = 0$ en $\beta \neq 0$. Als $\beta = 0$ dan is triviaal $\alpha = 0$ (volgens (2.48)⁶).

Als $\beta \neq 0$ volgt uit (2.55)²

$$(2.57) \quad \tan \psi = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} = \frac{c_4 - c_2 t}{c_3 - c_1 t},$$

waarbij gebruik gemaakt is van (2.54)^{3,4}.

Als over een eindig traject $\lambda_6 = 0$ dan is volgens (2.55)¹

$$K_\beta = 0,$$

en dus ook

$$(2.58) \quad \dot{K}_\beta = 0.$$

Uit de definitie (2.51) volgt met (2.52), (2.48)⁵, (2.54)^{3,4,5} en (2.55)² dat

$$(2.59) \quad \begin{aligned} \dot{K}_\beta &= \frac{c\beta}{m} K_\psi + \frac{c}{m} [-\lambda_1 \cos \psi - \lambda_2 \sin \psi + \dot{\psi} (-\lambda_3 \sin \psi + \lambda_4 \cos \psi)] + \\ &- \frac{c\beta}{m} K_\psi = -\frac{c}{m} (\lambda_1 \cos \psi + \lambda_2 \sin \psi). \end{aligned}$$

Volgens (2.57) is

$$(2.60) \quad \sin \psi = \frac{+\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}, \quad \cos \psi = \frac{+\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}},$$

waarmee, samen met (2.54)¹⁻⁴, (2.59) te herleiden is tot

$$(2.61) \quad \begin{aligned} \dot{K}_\beta &= -\frac{c}{m} \frac{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} = \\ &= -\frac{c}{m} \frac{c_1 c_3 + c_2 c_4 - (c_1^2 + c_2^2)t}{\sqrt{c_3^2 + c_2^2 - 2(c_1 c_3 + c_2 c_4)t + (c_1^2 + c_2^2)t^2}}. \end{aligned}$$

We zullen ons beperken tot problemen waarbij steeds minstens één van de twee getallen (c_1, c_2) ongelijk aan nul is. In dat geval kan volgens (2.61) nooit gelden dat over een eindig traject $\dot{K}_\beta = 0$. Dus is ook $K_\beta \neq 0$ en dus $\lambda_6 \neq 0$. Volgens (2.55)³ moet dan $\alpha = 0$ zijn. We hebben dus ook hier weer een bang-bang-probleem: $\beta = 0$ óf $\beta = \beta_m$.

We hebben hierboven afgeleid dat

$$(2.62) \quad \tan \psi = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} ,$$

voor $\beta \neq 0$. Als $\beta = 0$ wordt genomen, blijken de vergelijkingen (2.48) - (2.55) onafhankelijk van ψ te worden. Het optimum-probleem hangt dan niet meer van ψ af, wat inhoudt dat we ψ vrij mogen kiezen. We nemen ψ nu zodanig dat (2.62) ook geldt voor $\beta = 0$. Dit is in overeenstemming met de continuïteitseisen voor ψ en $\dot{\psi}$.

We gaan nu een paar speciale problemen bekijken:

- 1) Neem alle $t_i = u_i = \dots = 0$, (behalve $m_i =$ gegeven), en neem

$$(2.63) \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial v} = 0 .$$

We kunnen dan bijvoorbeeld x , h of t of een combinatie van deze variabelen optimaliseren.

Verder laten we u_f en v_f vrij, wat met (2.56) en (2.63) leidt tot

$$(2.64) \quad \lambda_{3f} = \lambda_{4f} = 0 .$$

Uit (2.54)^{3,4} volgt dan

$$(2.65) \quad c_3 = c_1 t_f , \quad c_4 = c_2 t_f$$

waarmee (2.57) overgaat in

$$(2.66) \quad \tan \psi = \frac{c_2(t - t_f)}{c_1(t - t_f)} = \frac{c_2}{c_1} = \text{constant} .$$

Dus in dit probleem is in de optimale baan de hoek ψ constant.

2) Neem weer alle $t_i = u_i = \dots = 0$, en stel

$$(2.67) \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial v} = 0 ,$$

en laat t_f , u_f en v_f vrij.

Onder deze voorwaarden volgt uit (2.56)

$$(2.68) \quad c = \lambda_{3f} = \lambda_{4f} = 0 .$$

We veronderstellen dat de eindtoestand bereikt wordt onder $\beta = 0$. In dat geval volgt uit (2.53) met behulp van (2.68)

$$[\lambda_1 u + \lambda_2 v]_f = 0 ,$$

of

$$(2.69) \quad \frac{u_f}{v_f} = - \frac{\lambda_{2f}}{\lambda_{1f}} = - \frac{c_2}{c_1} .$$

Aangezien dit probleem behoort tot de onder 1) behandelde klasse geldt hier ook (2.66), welke met (2.69) overgaat in

$$(2.70) \quad \tan \psi = \frac{c_2}{c_1} = - \frac{u_f}{v_f} = \text{constant} .$$

Dus bij dit probleem staat de raket in zijn optimale baan altijd loodrecht op zijn eindsnelheid.

3) Neem weer alle $t_i = u_i = \dots = 0$, en stel

$$(2.71) \quad \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial x} = 0 ,$$

en laat x_f en v_f vrij.

Dan volgt uit (2.56)

$$(2.72) \quad \lambda_{1f} = 0 \quad \text{en} \quad \lambda_{4f} = 0 .$$

Met (2.54)^{1,4} geeft dit

$$(2.73) \quad c_1 = 0 , \quad c_4 = c_2 t_i ,$$

waarmee (2.57) overgaat in

$$(2.74) \quad \tan \psi = \frac{c_2 t_f}{c_3} \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) = (\tan \psi)_i \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) .$$

Het principe van Pontryagin luidt hier

$$(2.75) \quad \frac{2K_\beta}{(2\beta - \beta_m)} [(\delta\alpha)^2 + (\delta\beta)^2] + \frac{c\beta}{m} K_\psi (\delta\psi)^2 \geq 0 ,$$

waaruit we concluderen

$$(2.76) \quad \begin{aligned} K_\beta \geq 0 &\Leftrightarrow \beta = \beta_m , \\ K_\beta \leq 0 &\Leftrightarrow \beta = 0 , \end{aligned}$$

en

$$(2.77) \quad K_\psi \geq 0 .$$

Uit deze laatste ongelijkheid volgt dat in de relaties (2.60) het plusteken moet gelden, immers met (2.60) vinden we voor K_ψ volgens (2.52)

$$K_\psi = \lambda_3 \frac{+\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} + \lambda_4 \frac{+\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} = \pm \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} ,$$

zodat alleen met het plusteken aan (2.77) kan worden voldaan.

Vraagstuk:

Kies:

$$G = -x ,$$

en neem $t_i = x_i = h_i = u_i = v_i = h_f = 0$, en verder nog m_i en m_f gegeven, terwijl: t_f , x_f , u_f en v_f vrij zijn.

Het probleem is dus hoe kunnen we een maximale horizontale afstand bereiken op het moment dat de raket weer in het vlak $h = 0$ aankomt.

Bewijs dat hier geldt

- i) er zijn twee takken,
- ii) de optimale strategie begint met $\beta = \beta_m$ en gaat over in $\beta = 0$,
- iii) de hoek ψ is constant.

Als

$$\xi_f := \frac{g}{c} x_f, \quad \tau_i := \frac{c\beta}{gm_i}, \quad \rho := \frac{m_i - m_f}{m_i},$$

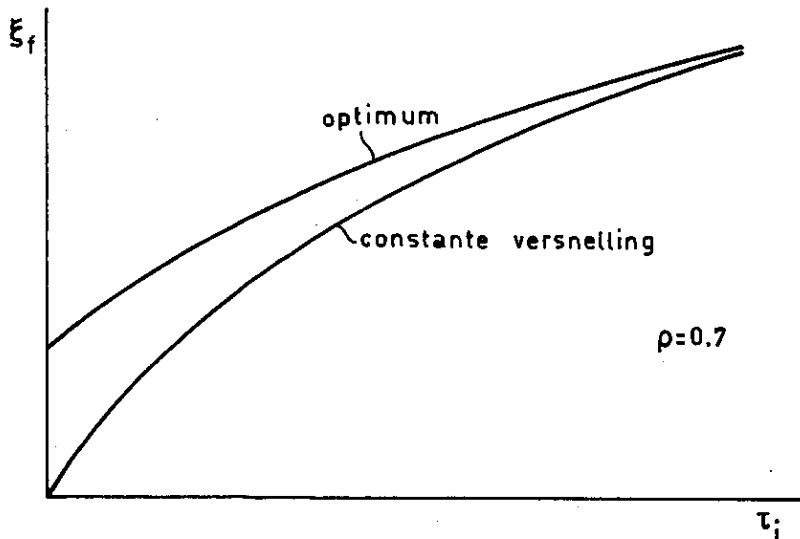
leidt dan af dat in de optimale baan voor ψ en ξ_f de volgende relaties gelden

$$\frac{2 \sin^3 \psi}{2 \sin^3 \psi - 1} + \frac{\tau_i \log^2(1 - \rho)}{\rho + \log(1 - \rho)} = 0,$$

en

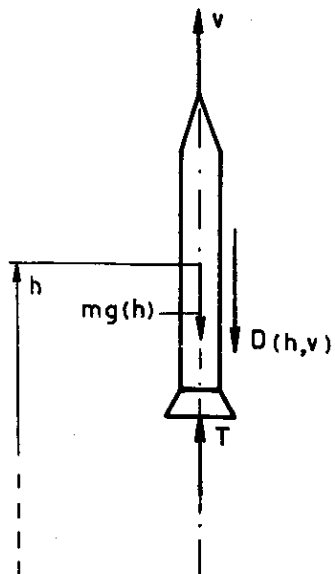
$$\xi_f = \frac{\cos \psi}{2 \sin^3 \psi} \log^2(1 - \rho).$$

We zetten in onderstaande grafiek de optimale ξ_f als functie van τ_i voor $\rho = 0,7$ uit, en vergelijken deze met de waarde die we krijgen als we de raket een constante versnelling ($\beta = pm$, p : constant) geven.



II.4. Goddard-probleem

We zullen in deze paragraaf een analoog probleem behandelen als in II.2, maar nu met luchtweerstand en variabele zwaartekracht.



Door de luchtweerstand wordt op de raket een kracht $D(h,v)$ uitgeoefend, tegengesteld gericht aan de snelheid van de raket, welke voldoet aan de volgende eigenschappen (we nemen steeds $v \geq 0$ en $h \geq 0$)

- (2.78)
- i) $D(h,0) = 0$,
 - ii) $D(h,v) \geq 0$, $(v \geq 0)$,
 - iii) $D(h_1,v) > D(h_2,v)$, als $h_2 > h_1$,
 - iv) $-D(h,-v) = D(h,v)$,
 - v) $D(h,v) \in C^2$,
 - vi) $D(h,v_1) \geq D(h,v_2)$, als $v_1 \geq v_2$.

We zoeken die strategie waarbij de raket de maximale hoogte bereikt; we moeten dus de functionaal

$$(2.79) \quad \tilde{\Psi} = -h_f , \quad (h_i = 0) ,$$

minimaliseren.

Hierbij moet worden voldaan aan de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &:= \dot{h} - v = 0, \\
 \varphi_2 &:= \dot{v} + g(h) - \frac{1}{m} [\beta c - D(h,v)] = 0, \\
 \varphi_3 &:= \dot{m} + \beta = 0, \\
 \varphi_4 &:= \beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.80}$$

Voor de Hamiltoniaan krijgen we op de gebruikelijke manier

$$H = \lambda_1 v - \lambda_2 \left(g + \frac{D}{m} \right) + K\beta - \lambda_4 [\beta(\beta_m - \beta) - \alpha^2],
 \tag{2.81}$$

met de stuurfunctie K gedefinieerd door

$$K := \frac{c}{m} \lambda_2 - \lambda_3.
 \tag{2.82}$$

We hebben een autonoom probleem zodat $H = C$ of

$$\lambda_1 v - \lambda_2 \left(g + \frac{D}{m} \right) + K\beta = C.
 \tag{2.83}$$

De Hamilton-vergelijkingen (1.38) luiden hier

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial h} = \lambda_2 \left(\frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial h} + \frac{\partial g}{\partial h} \right), \\
 \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_1 + \frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial v} \lambda_2, \\
 \dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{m} (\beta c - D) \lambda_2,
 \end{aligned}
 \tag{2.84}$$

terwijl (1.48) geeft

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial \beta} &= K - \lambda_4 (\beta_m - 2\beta) = 0, \\
 \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= 2\alpha \lambda_4 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.85}$$

Als we aannemen dat $t_i, h_i = 0, v_i = 0, m_i$ en m_f gegeven zijn en t_f, h_f en v_f vrij, dan wordt de transversaliteitsconditie (1.49)

$$[-C dt + (\lambda_1 - 1)dh + \lambda_2 dv]^f = 0,
 \tag{2.86}$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} C &= 0, \\ (2.87) \quad \lambda_{1f} &= 1, \\ \lambda_{2f} &= 0. \end{aligned}$$

Met de eerste van deze relaties gaat (2.83) over in

$$(2.88) \quad \lambda_1 v - \lambda_2 \left(g + \frac{D}{m} \right) + K\beta = 0.$$

Uit de Weierstrass-Erdmann-hoekcondities volgt dat λ_1 , λ_2 en λ_3 continu zijn. Verder nemen we steeds h , v en m continu en groter of gelijk nul.

Noodzakelijk voor een minimum van $\tilde{\Psi}$ is dat voldaan wordt aan het principe van Pontryagin, wat hier leidt tot

$$(2.89) \quad \frac{2K}{(2\beta - \beta_m)} [(\delta\alpha)^2 + (\delta\beta)^2] \geq 0.$$

Uit (2.84)^{1,2}, (2.87) en uit de continuïteit van λ_1 en λ_2 volgt

$$(2.90) \quad \lambda_2(t) > 0 \quad \text{voor } t_i \leq t < t_f.$$

We kunnen dit als volgt bewijzen:

Definieer

$$\begin{aligned} (2.91) \quad A(m, h, v) &:= -\frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial h} - \frac{dg}{dh}, \\ B(m, h, v) &:= \frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial v}. \end{aligned}$$

Uit de eigenschappen van $D(h, v)$ en uit het feit dat $g(h)$ afneemt met toenemende h volgt dat

$$(2.92) \quad A(m, h, v) > 0 \quad \text{en} \quad B(m, h, v) \geq 0 \quad \text{voor } v \geq 0.$$

We kunnen hiermee (2.84)^{1,2} schrijven als

$$\begin{aligned} (2.93) \quad \dot{\lambda}_1 &= -A\lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 + B\lambda_2. \end{aligned}$$

In het punt $t = t_f$ geldt

$$(2.94) \quad \lambda_1(t_f) = 1, \quad \lambda_2(t_f) = 0,$$

waaruit met (2.93) volgt:

$$(2.95) \quad \dot{\lambda}_1(t_f) = 0, \quad \dot{\lambda}_2(t_f) = -1 < 0.$$

Dus direct links van t_f is $\lambda_2(t) > 0$.

Laten we aannemen dat $\lambda_2(t)$ negatief kan worden en laat τ het dichtst bij t_f gelegen punt zijn waarop $\lambda_2(t)$ nul wordt. Dus moet

$$(2.96) \quad \lambda_2(\tau) = 0, \quad \dot{\lambda}_2(\tau) \geq 0.$$

Uit (2.93)² volgt dan

$$(2.97) \quad \dot{\lambda}_2(\tau) = -\lambda_1(\tau) \geq 0 \Rightarrow \lambda_1(\tau) \leq 0.$$

Echter op het interval $\tau \leq t \leq t_f$ is $\lambda_2 \geq 0$, zodat volgens (2.93)¹

$$(2.98) \quad \dot{\lambda}_1 \leq 0 \quad \text{voor } \tau \leq t \leq t_f,$$

waaruit volgt

$$(2.99) \quad \lambda_1(\tau) \geq \lambda_1(t_f) = 1.$$

Dit is in tegenspraak met (2.97), waarmee (2.90) bewezen is.

Aan vergelijking (2.85)² is op twee manieren te voldoen, namelijk door

1) (2.100) $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$ of $\beta = \beta_m$,

2) $\lambda_4 = 0$.

Stel dat over een bepaald traject $\lambda_4 = 0$. Dan is volgens (2.85)¹ over dat traject $K = 0$ en dus ook $\dot{K} = 0$.

Uit de definitie van K volgt met (2.84)

$$(2.101) \quad \dot{K} = -\frac{c}{m} \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{m} \left(c \frac{\partial D}{\partial v} + D \right).$$

Elimineren we hieruit λ_1 met behulp van (2.88) dan krijgen we

$$(2.102) \quad \dot{K} = \frac{c\beta}{mv} K + \lambda_2 \omega(h,v,m) , \quad \text{voor } v > 0 ,$$

met

$$(2.103) \quad \omega(h,v,m) := \frac{c}{m^2 v} [-mg - D + v(\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{D}{c})] .$$

Uit (2.102) blijkt dat als $K = \dot{K} = 0$ over een bepaald traject $\lambda_2 \omega = 0$ moet zijn, wat betekent dat

$$(2.104) \quad \omega(h,v,m) = 0 ,$$

omdat λ_2 niet over een bepaald traject nul kan zijn volgens (2.90).

Vergelijking (2.104) komt overeen met

$$(2.105) \quad m = M(h,v) := \frac{v}{g} \frac{\partial D}{\partial v} + \frac{D}{g} \left(\frac{v}{c} - 1 \right) .$$

Het is duidelijk dat aan deze relatie niet altijd kan worden voldaan. Nemen we bijvoorbeeld geen luchtweerstand aan ($D = 0$) dan is deze relatie in tegenspraak met de eis: $m > 0$. Dus is $\lambda_4 = 0$ onmogelijk en blijft alleen $\alpha = 0$ over, zodat we in dat geval een bang-bang-probleem krijgen. Deze conclusie komt overeen met de resultaten van II.2.

Uit het bovenstaande, samen met (2.89), kunnen we de volgende conclusie trekken

$$K > 0 \Rightarrow \beta = \beta_m ,$$

$$(2.106) \quad K < 0 \Rightarrow \beta = 0 ,$$

$$K = 0 \Rightarrow 0 \leq \beta \leq \beta_m .$$

We zullen bewijzen, dat een optimale strategie moet beginnen met $\beta = \beta_m$.

Stel eerst

$$\beta = 0 \quad \text{op} \quad t = t_i .$$

Vergelijking (2.80)² geeft in dit geval met (2.78)¹

$$\dot{v}(t_i) = -g(0) < 0 .$$

Met $v(0) = 0$ zou dit betekenen dat de snelheid negatief zou worden, wat onmogelijk is. Dus moet $\beta(0) > 0$.

Stel vervolgens

$$0 < \beta < \beta_m \quad \text{voor } t = t_i .$$

Dan moet volgens (2.105) met (2.78)¹

$$m(t_i) = m_i = \left[\frac{v}{g} \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{D}{g} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \right]_{v=v_i=0} = 0 ,$$

en dit kan niet want $m_i > 0$.

Dus moet

$$\beta = \beta_m \quad \text{voor } t = t_i .$$

De optimale strategie zal dus beginnen met maximale verbranding, maar zal na enige tijd over gaan op gedeeltelijke verbranding ($0 < \beta < \beta_m$) of helemaal geen verbranding meer. Het is echter moeilijk om hier nader op in te gaan voor algemene $g(h)$ en $D(h,v)$. We zullen daarom hier de optimale strategie beschrijven voor het gespecificeerde model

$$(2.107) \quad \begin{aligned} g(h) &= g = \text{constant} , \\ D(h,v) &= av^2 e^{-\alpha h} , \quad a > 0, \alpha > 0, v \geq 0, h \geq 0 . \end{aligned}$$

We zullen bewijzen dat voor dit geval de begintak $\beta = \beta_m$ alleen dan over kan gaan in $\beta = 0$ als de brandstof volledig is opgebruikt ($m = m_f$).

Stel $\beta = \beta_m$ gaat over in $\beta = 0$ voor $t = t_1$.

Omdat c , m , λ_2 en λ_3 continu zijn, volgt uit de definitie van K volgens (2.82) dat K continu is. Uit (2.88) volgt, omdat λ_1 , λ_2 , v , g , D en m continu zijn, dat

$$(2.108) \quad (K\beta)_+ = (K\beta)_-$$

wat met $(\beta)_+ = 0$ en $(\beta)_- = \beta_m$ en de continuïteit van K leidt tot

$$(2.109) \quad (K)_+ = (K)_- = K(t_1) = 0 .$$

Uit (2.102) volgt hiermee dat \dot{K} continu is en dat

$$(2.110) \quad \dot{K}(t_1) = \lambda_2(t_1)\omega_1 \quad \text{met } \omega_1 := \omega(t_1) .$$

Volgens (2.106) is $K \geq 0$ voor $t_i \leq t < t_1$ en $K \leq 0$ voor $t > t_1$, zodat $\dot{K}(t_1) \leq 0$ moet zijn. Aangezien $\lambda_2(t_1) > 0$ voor $t_1 \neq t_f$ is dus

$$(2.111) \quad \omega_1 \leq 0 .$$

Met de aannamen voor $g(h)$ en $D(h,v)$ krijgen we voor $\omega(h,v,m)$

$$(2.112) \quad \omega(h,v,m) = -\frac{cg}{mv} + \frac{1}{2} acv \left(1 + \frac{v}{c}\right) e^{-ah} .$$

Hieruit krijgen we voor $t > t_1$ met $m = m(t_1) = m_1 = \text{constant}$ en $\dot{h} = v$

$$(2.113) \quad \dot{\omega}(h,v,m) = \left[\frac{cg}{mv} + \frac{1}{2} ac \left(1 + \frac{2v}{c}\right) e^{-ah} \right] \dot{v} - \frac{1}{2} aacv^2 \left(1 + \frac{v}{c}\right) e^{-ah} ,$$

en dit is kleiner dan nul, want volgens (2.80)² is voor $\beta = 0$

$$(2.114) \quad \dot{v} = -g - \frac{D}{m} < 0 .$$

Dus voor ω geldt

$$(2.115) \quad \begin{aligned} \omega &\leq 0 && \text{voor } t = t_1 , \\ \dot{\omega} &< 0 && \text{voor } t > t_1 , \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$(2.116) \quad \omega < 0 \quad \text{voor } t > t_1 .$$

Met (2.109) en (2.102) zien we dat dan voor $K(t)$ geldt

$$(2.117) \quad \begin{aligned} K(t_1) &= 0 , \\ \dot{K}(t) &< 0 && \text{voor } t > t_1 , \end{aligned}$$

waaruit

$$(2.118) \quad K(t) < 0 \quad \text{voor } t > t_1 .$$

Hiermee is bewezen dat als $\beta = 0$ wordt op een gebied na t_1 dan blijft $\beta = 0$ voor alle t uit $t_1 \leq t \leq t_f$. Dus geldt ook

$$(2.119) \quad m(t_f) = m_1 ,$$

en aangezien $m(t_f) = m_f$ is dit alleen mogelijk als $m(t_1) = m_f$, dus als op het tijdstip t_1 alle brandstof is opgebruikt.

Dus bij de overgang van de begintak $\beta = \beta_m$ op de andere tak hebben we twee mogelijkheden:

- i) $\beta = 0$ als $m(t_1) = m_f$,
- ii) $0 \leq \beta \leq \beta_m$ met $K = 0$ als $m(t_1) < m_f$.

De laatste tak kan als alle brandstof is opgebruikt weer overgaan in de tak $\beta = 0$.

We stoppen hier de behandeling van dit probleem. Voor nadere informatie zij verwezen naar [2], pp. 456-466.

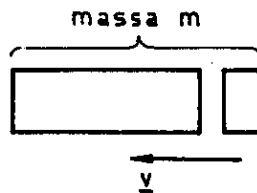
III. Beweging van raketten. (Zie [5], [6] en [7])

III.1. De voortstuwing

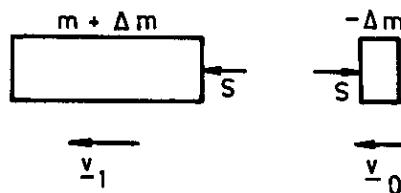
De voortstuwing van een raket wordt veroorzaakt door de uitstroming van de verbrandingsgassen. Het uitstromende gas levert de voortstuwingskracht T . Om enig begrip te krijgen van de werking van de voortstuwing beschouwen we eerst het volgende probleem.

Neem een massa m met snelheid \underline{v} waarvan door een stoot S een gedeelte Δm wordt afgescheiden.

Vóór de stoot:



Ná de stoot:



De verandering van impuls is

$$(3.1) \quad \Delta \underline{p} = \underline{p}_{\text{na}} - \underline{p}_{\text{voor}} = \{(m + \Delta m)\underline{v}_1 - \Delta m \cdot \underline{v}_0\} - m\underline{v} .$$

Stellen we $\underline{v}_1 = \underline{v} + \Delta \underline{v}$ en verwaarlozen we tweede orde termen dan geldt

$$\Delta \underline{p} = m\Delta \underline{v} + \Delta m(\underline{v} - \underline{v}_0)$$

of

$$(3.2) \quad \dot{\underline{p}} = m\dot{\underline{v}} + \dot{m}(\underline{v} - \underline{v}_0) .$$

We beschouwen nu weer de raket en passen de eerste wet van Newton toe ($\underline{K} = \dot{\underline{p}}$). Dan volgt

$$(3.3) \quad \underline{K} = m\dot{\underline{v}} + \dot{m}(\underline{v} - \underline{v}_0) .$$

De kracht \underline{K} bevat de luchtweerstand en de gravitatie.

We definiëren de relatieve snelheid \underline{u} van de raket t.o.v. het gas:

$$(3.4) \quad \underline{u} := \underline{v} - \underline{v}_0 ,$$

en de voortstuwingskracht \underline{T} van het uitstromende gas:

$$(3.5) \quad \underline{T} := - \dot{m}\underline{u} \quad (\dot{m} < 0) .$$

Met deze definities gaat (3.3) over in

$$(3.6) \quad \underline{K} + \underline{T} = m\dot{\underline{v}} .$$

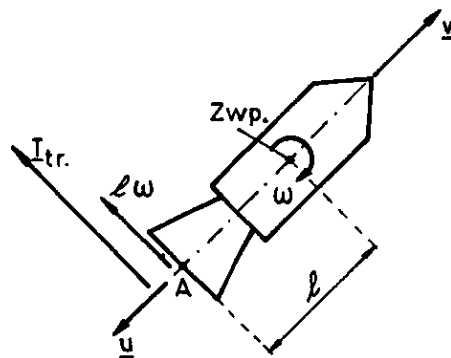
Zij A het oppervlak van de uitlaat, p_0 de druk op grote afstand van de uitlaat en p de druk, dan zien we dat door de overdruk in de buurt van de uitlaat nog een kracht K_1 ontstaat:

$$K_1 = (p - p_0)A .$$

Deze kracht kunnen we nog opgenomen denken in \underline{K} , maar ze wordt meestal verwaarloosd.

III.2. De stabiliteit van een niet-spinnende raket

We beschouwen een raket met snelheid \underline{v} in de langsrichting en een rotatie ω loodrecht op het vlak van de tekening



Door de massaverandering ontstaat een transversale kracht:

$$(3.7) \quad T_{\text{transv.}} = - \dot{m} l \omega .$$

Stellen we het traagheidsmoment loodrecht op het vlak van de tekening

$$(3.8) \quad J = m k^2$$

dan geldt

$$(3.9) \quad \dot{J} = \dot{m} k^2 + 2 m k \dot{k} .$$

We zullen aannemen dat \dot{k} te verwaarlozen klein is.

De momentenstelling om het zwaartepunt geeft dan

$$(3.10) \quad M = \frac{d}{dt} (J\omega) - \dot{m} l \omega . l .$$

Met (3.9) volgt dan

$$(3.11) \quad M = J \dot{\omega} - \omega \dot{m} (l^2 - k^2) .$$

We nemen aan dat er geen uitwendig moment werkt, dus $M = 0$.

Dan gaat (3.11) over in

$$(3.12) \quad m k^2 \dot{\omega} = \dot{m} \omega (l^2 - k^2) .$$

Separatie van variabelen levert

$$(3.13) \quad \frac{d\omega}{\omega} = \frac{dm}{m} \left(\frac{l^2}{k^2} - 1 \right)$$

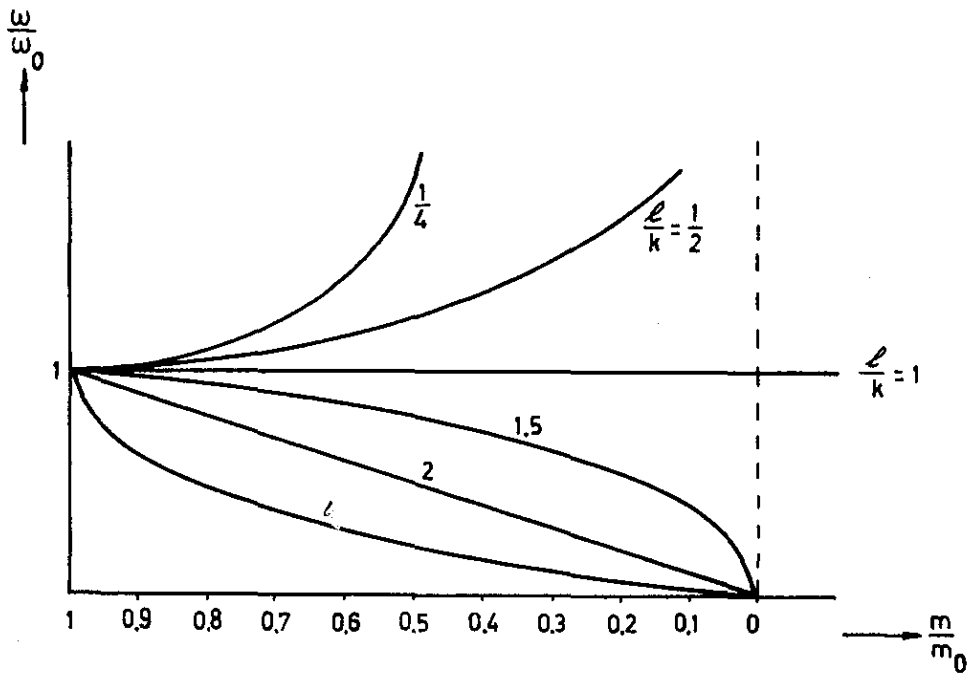
met als oplossing

$$(3.14) \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\left(\frac{l^2}{k^2} - 1 \right)} ,$$

waarbij ω_0 en m_0 de beginhoeksnelheid resp. de beginmassa zijn.

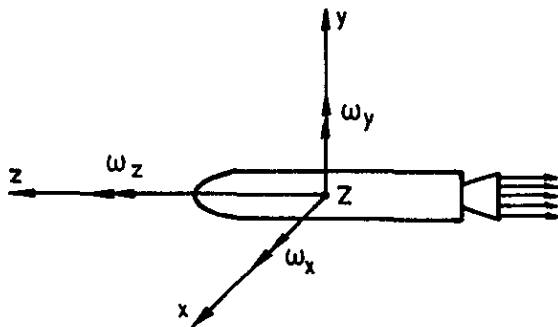
Uit (3.14) zien we dat er stabilisatie optreedt als $\frac{l}{k} > 1$.

We zetten in grafiek $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$ uit tegen $\left(\frac{m}{m_0} \right)$ voor verschillende waarden van $\left(\frac{l}{k} \right)$.



III.3. De spinnende raket

De hoeksnelheid ω_z heet "spin".



Voor het impulsmoment geldt

$$(3.15) \quad (\dot{\underline{D}})_{\text{abs}} = (\dot{\underline{D}})_{\text{rel}} + \underline{\omega} \times (\underline{D})_{\text{rel}} + \text{impulsmomentverandering van het gas.}$$

Langs de hoofdassen x, y en z geldt

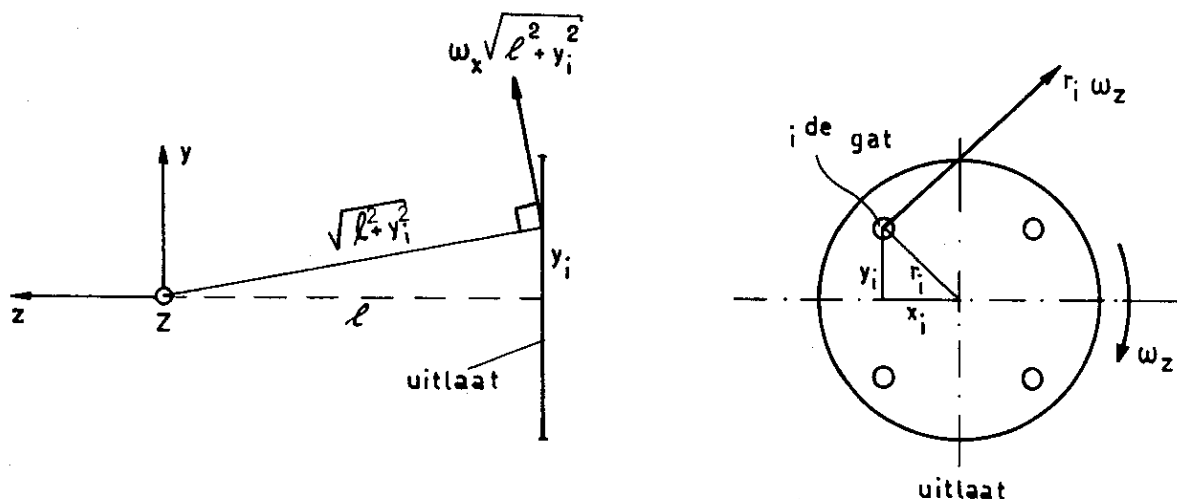
$$(3.16) \quad (\dot{D}_x)_{rel} = J_x \dot{\omega}_x, \quad (\dot{D}_y)_{rel} = J_y \dot{\omega}_y, \quad (\dot{D}_z)_{rel} = J_z \dot{\omega}_z,$$

In de x-richting vinden we

$$(3.17) \quad (\dot{D}_x)_{rel} + (\underline{\omega} \times \underline{D}_{rel})_x = J_x \dot{\omega}_x + \dot{J}_x \omega_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z.$$

Bij beschouwing van de restterm uit (3.15) veronderstellen we dat de afmetingen van de gaten waar het gas uitstroomt klein zijn.

We beschouwen de situatie die in de volgende figuur is weergegeven.



De massaverandering door het i^{de} gat is \dot{m}_i .

De impulsverandering van de raket is: $-\dot{m}_i r_i \omega_z$.

De impulsmomentverandering wordt dan: $-\dot{m}_i r_i^2 \omega_z$.

De totale impulsmomentverandering vinden we door te sommeren over alle gaten waardoor gas uitstroomt:

$$(3.18) \quad -\omega_z \sum_i \dot{m}_i r_i^2 = -\omega_z \dot{m} \rho^2,$$

waarin

$$(3.19) \quad \rho^2 := \frac{\sum_i \dot{m}_i r_i^2}{\sum_i \dot{m}_i} \quad \text{en} \quad \sum_i \dot{m}_i =: \dot{m} .$$

De impulsmomentverandering t.g.v. de rotatie ω_x is

$$(3.20) \quad - \sum_i \omega_x (\ell^2 + y_i^2) \dot{m}_i = - \dot{m} \omega_x (\ell^2 + \frac{1}{2} \rho^2) ,$$

en t.g.v. de rotatie ω_y

$$(3.21) \quad - \sum_i \omega_y (\ell^2 + x_i^2) \dot{m}_i = - \dot{m} (\ell^2 + \frac{1}{2} \rho^2) \omega_y .$$

Substitutie van (3.17), (3.18), (3.20) en (3.21) in de momentenstelling $\underline{M} = \underline{\dot{D}}$ levert

$$(3.22) \quad \begin{aligned} M_x &= J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z - \dot{m} (\ell^2 + \frac{1}{2} \rho^2) \omega_x + \dot{J}_x \omega_x \\ M_y &= J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z - \dot{m} (\ell^2 + \frac{1}{2} \rho^2) \omega_y + \dot{J}_y \omega_y \\ M_z &= J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y - \dot{m} \rho^2 \omega_z + \dot{J}_z \omega_z . \end{aligned}$$

Gebruiken we de relaties

$$(3.23) \quad J_x = m k_x^2 \quad \text{en} \quad \dot{J}_x = \dot{m} k_x^2 + m \frac{d}{dt} (k_x^2)$$

en analoge relaties voor y en z, dan gaat (3.22) over in

$$(3.24) \quad \begin{aligned} M_x &= J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z - [\dot{m} (\ell^2 + \frac{1}{2} \rho^2 - k_x^2) - m \frac{d}{dt} k_x^2] \omega_x , \\ M_y &= J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z - [\dot{m} (\ell^2 + \frac{1}{2} \rho^2 - k_y^2) - m \frac{d}{dt} k_y^2] \omega_y , \\ M_z &= J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y - [\dot{m} (\rho^2 - k_z^2) - m \frac{d}{dt} k_z^2] \omega_z . \end{aligned}$$

Beschouwen we het speciale geval waarin de uitwendige momenten nul zijn en de raket symmetrisch is, dus

$$\begin{aligned} M_x &= M_y = M_z = 0 , \\ k_x &= k_y = k , \\ J_x &= J_y = J , \end{aligned}$$

met voor de spin aan het begin: $\omega_z(t_i) = n$ en verwaarlozen we de verandering van k_x , k_y en k_z dan volgt uit (3.24)

$$(3.25) \quad \int \frac{d\omega_z}{\omega_z} = \left(\frac{\rho^2}{k_z^2} - 1 \right) \int \frac{dm}{m} .$$

Als we aannemen dat de massa lineair met de tijd afneemt: $m = m_0 - m't$, ($m' = \text{constant}$), dan heeft (3.25) de oplossing

$$(3.26) \quad \frac{\omega_z}{n} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\frac{\rho^2}{k_z^2} - 1} ,$$

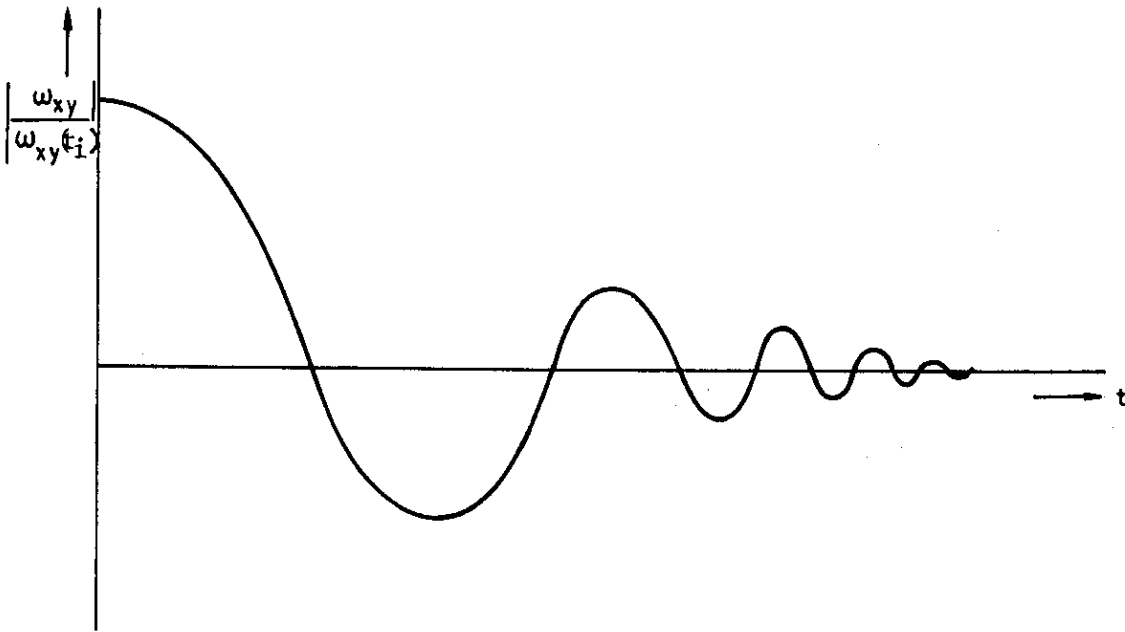
stellen we $\omega_{xy} = \omega_x + i\omega_y$ dan reduceren de eerste twee vergelijkingen van (3.24) tot

$$(3.27) \quad \int \frac{d\omega_{xy}}{\omega_{xy}} = \frac{\ell^2 + \frac{1}{2}\rho^2 - k^2}{k^2} \int \frac{dm}{m} - i \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) n \int \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\frac{\rho^2}{k_z^2} - 1} dt ,$$

met als oplossing

$$(3.28) \quad \frac{\omega_{xy}}{\omega_{xy}(t_i)} = \left(\frac{m_0 - m't}{m_0} \right)^{\frac{\ell^2 + \frac{1}{2}\rho^2 - k^2}{k^2}} \cdot \exp\left\{ -i n \frac{m_0}{m'} \frac{k_z^2}{\rho^2} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{m'}{m_0} t \right)^{\frac{\rho^2}{k_z^2}} \right] \right\} .$$

In de volgende grafiek zien we dat de amplitude van ω_{xy} afneemt, terwijl de frequentie toeneemt.



Voor meer algemene bewegingsvergelijkingen voor een raket, zie [8].

IV. Meertrapsraketten. (Zie [6])

IV.1. Inleiding, de eentrapsraket

De bewegingsvergelijking voor de verticale beweging van een raket met snelheid v en thrust T is

$$(4.1) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{T}{m} + \frac{F}{m} - g ,$$

waarin F de luchtweerstand (drag) is, die we verder zullen verwaarlozen en waarin voor de zwaartekracht g geldt

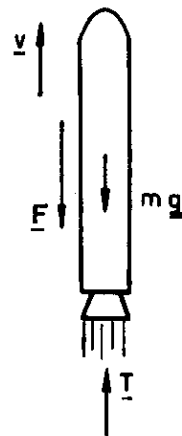
$$(4.2) \quad g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$$

met

g_0 = gravitatie op aarde

R = straal van de aarde ($\pm 6378,163$ km)

h = hoogte.



Ter vereenvoudiging van de berekeningen zullen we voor de zwaartekracht $g = g_0$ nemen.

De fouten ten gevolge van deze twee verwaarlozingen liggen in de orde van 15%.

Stellen we

$$(4.3) \quad T = -u \frac{dm}{dt} , \quad u = \text{uitstootsnelheid van de gassen, welke we constant nemen,}$$

dan gaat (4.1) over in

$$(4.4) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{u}{m} \frac{dm}{dt} - g ,$$

hetgeen na integratie wordt

$$(4.5) \quad v - v_0 = u \log \frac{m_0}{m} - gt ;$$

waarin v_0 de beginsnelheid is.

Substitueren we voor de tijd waarop alle brandstof juist op is t_{b0} (burnout) en voor de bijbehorende massa m_{b0} dan is de maximaal bereikbare snelheid bij verticale vlucht van de raket

$$(4.6) \quad v_{b0} - v_0 = u \log \frac{m_0}{m_{b0}} - g t_{b0} .$$

Voor de massa geldt de relatie

$$(4.7) \quad m_{b0} = m_0 - m_{\text{fluid}} \quad (m_{\text{fl}} = \text{massa van brandstof})$$

waarbij voor een goede constructie moet gelden

$$m_{\text{fl}} \sim 90\% \text{ van } m_0 .$$

We voeren een karakteristieke maat voor de brandstof in, de zgn. specifieke impuls I

$$(4.8) \quad I := \int_0^{t_1} |T| dt ,$$

waarin t_1 de tijd nodig voor het opbranden van één gewichtseenheid brandstof is.

Substitutie van (4.3) in de specifieke impuls geeft

$$(4.8) \quad I = \int_0^{t_1} u \frac{dm}{dt} dt = \int_0^{\frac{1}{g_0}} u dm = \frac{u}{g_0} .$$

De waarde van I ligt praktisch tussen 200 en 400 seconden. We voeren een parameter R in die een maat is voor de beginversnelling van de raket door

$$(4.9) \quad R = \left(\frac{T}{m_0 g_0} \right)_{t=0} = \frac{m_0 g_0 + m_0 a_0}{m_0 g_0} = 1 + \frac{a_0}{g_0} ,$$

met a_0 is de beginversnelling.

Uitgaande van een constante afname van de massa door verbranding van de brandstof, T is dan constant, vinden we voor de totale tijd waarin de raket wordt voorgestuwd uit (4.3), (4.8) en (4.9)

$$\int_0^{t_{b0}} dt = - \int_{m_0}^{m_{b0}} \frac{u}{T} dm$$

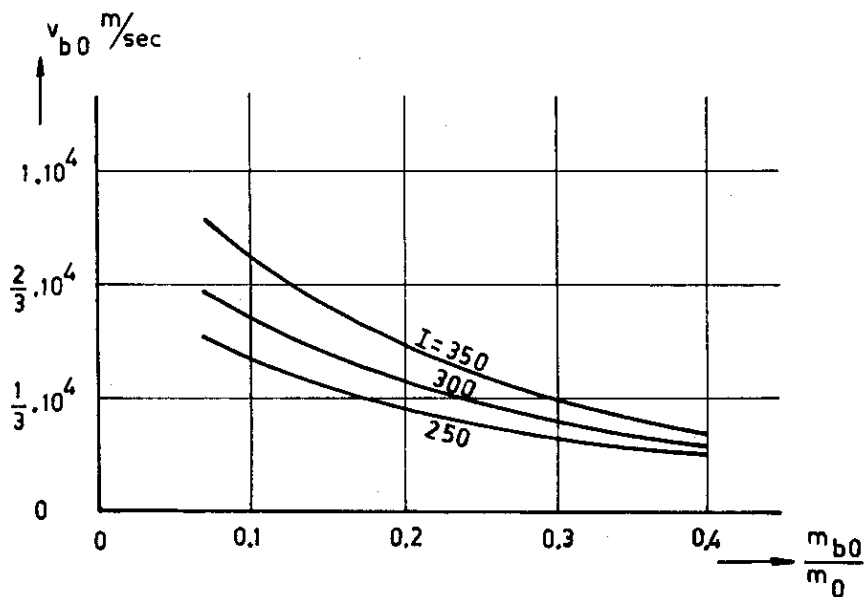
of

$$(4.10) \quad t_{b0} = \frac{u}{T} (m_0 - m_{b0}) = \frac{g_0 I}{T} (m_0 - m_{b0}) = \frac{I}{R} \left(1 - \frac{m_{b0}}{m_0}\right).$$

Voor de maximale snelheid v_{b0} volgt dan

$$(4.11) \quad v_{b0} - v_0 = g_0 I \left[\log \frac{m_0}{m_{b0}} - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{m_{b0}}{m_0}\right) \right].$$

Nemen we $v_0 = 0$, $R = 2$ dan kunnen we de volgende grafiek maken



Als $I = 300$ en $\frac{m_0}{m_{b0}} \approx 10$ dan vinden we voor de maximale snelheid

$$v_{b0} \approx 6,5 \text{ km/sec.}$$

Aangezien de snelheid die nodig is om een satelliet te lanceren in de buurt van 7,5 km/sec ligt, waarmee dan nog slechts een lage baan wordt bereikt, zien we hieruit dat het met de bestaande brandstoffen, raketconstructies etc. niet mogelijk is met een eentrapsraket een satelliet in een baan te brengen.

De totale hoogte die een raket bereikt bestaat uit de hoogte die bereikt wordt tussen $t = 0$ en $t = t_{b0}$ vermeerderd met de hoogte die nog bereikt wordt tussen $t = t_{b0}$ en het tijdstip waarop de snelheid nul wordt.

In formule:

$$(4.12) \quad h_{\text{tot}} = h_{b0} + h_c .$$

Hiervoor geldt:

$$(4.13) \quad h_{b0} = \int_0^{t_{b0}} v \, dt .$$

Met (4.5) en de veronderstellingen dat de verandering van g verwaarloosbaar is en

$$(4.14) \quad dt = \frac{dm}{\dot{m}} \quad \text{en} \quad -\dot{m} = \frac{m_0 - m_{b0}}{t_{b0}} = \text{constant}$$

vinden we

$$(4.15) \quad h_{b0} = u t_{b0} \left[1 - \frac{1}{\frac{m_0}{m_{b0}} - 1} \log \frac{m_0}{m_{b0}} \right] + v_0 t_{b0} - \frac{1}{2} g t_{b0}^2 =$$

$$= g \frac{I^2}{R} \left(-\frac{m_{b0}}{m_0} \right) \left[1 - \frac{1}{\frac{m_0}{m_{b0}} - 1} \log \frac{m_0}{m_{b0}} \right] + v_0 \frac{I}{R} \left(1 - \frac{m_{b0}}{m_0} \right) +$$

$$- \frac{1}{2} g \frac{I^2}{R^2} \left(1 - \frac{m_{b0}}{m_0} \right)^2 .$$

In het algemeen is de hoogte h_{b0} zo groot dat we nu rekening moeten houden met de verandering van de zwaartekracht. Daartoe gebruiken we (4.2) en $T + U = \text{constant}$.

Dan is

$$(4.16) \quad \frac{1}{2} v_{b0}^2 = g_0 \int_{h_{b0}}^{h_{b0}+h_c} \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 dh,$$

en daaruit volgt

$$(4.17) \quad h_c = \frac{v_{b0}^2}{2g_0} \frac{(R + h_{b0})^2}{R^2 - \frac{v_{b0}^2}{2g_0} (R + h_{b0})},$$

v_{b0} en h_{totaal} zijn functies van R , I en $\frac{m_0}{m_{b0}}$.

Om bv. v_{b0} te optimaliseren moeten we

$$(4.18) \quad \frac{\partial v_{b0}}{\partial R} = \frac{\partial v_{b0}}{\partial I} = \frac{\partial v_{b0}}{\partial (m_0/m_{b0})} = 0$$

nemen.

IV.2. Optimale brandstofverdeling bij meertrapsraketten

We stellen voor de i -de trap van een meertrapsraket

$$(4.19) \quad \mu_i := \left(\frac{m_0}{m_{b0}}\right)_i.$$

We nemen de beginsnelheid van de raket $v_0 = 0$.

Dan is

$$v_{b0\ 1} = u_1 \log \mu_1 = v_1 \quad (= \text{beginsnelheid van } 2^e \text{ trap})$$

$$v_{b0\ 2} = v_1 + u_2 \log \mu_2 = v_2 \quad \text{etc.}$$

Voor de snelheid van de m -de trap vinden we

$$(4.20) \quad v_m = \sum_{i=1}^N u_i \log \mu_i.$$

Stellen we verder

m_{0i} = massa van de i^{de} t/m de laatste trap ,

m_{fi} = massa van de brandstof van de i^{de} trap ,

m_{si} = massa van de lege i^{de} trap ,

dan is

$$\begin{aligned}
 m_{01} &= m_{02} + m_{f1} + m_{s1} \\
 m_{02} &= m_{03} + m_{f2} + m_{s2} \\
 &\vdots \\
 m_{0N} &= m_p \quad (\text{massa van de laatste trap}) .
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

We noemen de te lanceren massa P (payload).

We willen de verhouding $\frac{m_{01}}{P}$ zo gunstig mogelijk maken, dus minimaliseren.

Er geldt

$$\frac{m_{01}}{P} = \frac{m_{01}}{m_{01} - m_{f1} - m_{s1}} \cdot \frac{m_{02}}{m_{02} - m_{f2} - m_{s2}} \cdots \frac{m_{0N}}{P} .
 \tag{4.22}$$

Uit (4.19) volgt

$$\mu_i = \frac{m_{0i}}{m_{0i} - m_{fi}} .
 \tag{4.23}$$

We definiëren:

$$\beta_i := \frac{m_{si}}{m_{fi} + m_{si}} ,
 \tag{4.24}$$

waarmee (4.22) overgaat in

$$\frac{m_{01}}{P} = \frac{\mu_1(1 - \beta_1)}{1 - \mu_1\beta_1} \cdot \frac{\mu_2(1 - \beta_2)}{1 - \mu_2\beta_2} \cdots = \prod_{k=1}^N \frac{\mu_k(1 - \beta_k)}{1 - \mu_k\beta_k} .
 \tag{4.25}$$

Aangezien het gemakkelijker is een som te minimaliseren dan een product, nemen we in (4.25) de logaritme

$$\log \frac{m_{01}}{P} = \sum_{k=1}^N [\log \mu_k + \log(1 - \beta_k) - \log(1 - \mu_k\beta_k)] .
 \tag{4.26}$$

Met de methode van de Lagrange multiplicatoren kunnen we de beperking (4.20) verwerken in (4.26). Dit geeft

$$(4.27) \quad \log \frac{m_{01}}{P} = \sum_{k=1}^N \{ \log \mu_k + \log(1 - \beta_k) - \log(1 - \mu_k \beta_k) + \lambda(u_k \log \mu_k - \frac{v_m}{N}) \} .$$

Differentiëren van (4.27) naar μ_i levert de optimale waarden van μ_i . We krijgen de N vergelijkingen

$$(4.28) \quad \frac{1}{\mu_i} + \frac{\beta_i}{1 - \mu_i \beta_i} + \lambda \frac{u_i}{\mu_i} = 0 ,$$

met als oplossing

$$(4.30) \quad \mu_i = \frac{1 + \lambda u_i}{\lambda u_i \beta_i} .$$

Substitutie van (4.30) in (4.20) levert een vergelijking voor λ :

$$(4.31) \quad v_m = \sum_{i=1}^N u_i \log \left(\frac{1 + \lambda u_i}{\lambda u_i \beta_i} \right) ,$$

waaruit λ op numerieke wijze te bepalen is.

Voorbeeld: We beschouwen als voorbeeld het niet erg praktische voorbeeld dat alle u_i 's gelijk aan u zijn.

Dan geeft (4.31):

$$\frac{v_m}{u} = N \log \left(\frac{1 + \lambda u}{\lambda u} \right) - \sum_{i=1}^N \log \beta_i ,$$

of

$$(4.32) \quad \frac{1 + \lambda u}{\lambda u} = \exp \left[\frac{1}{N} \left(\frac{v_m}{u} + \sum_{i=1}^N \log \beta_i \right) \right] .$$

Met (4.30) krijgen we dan

$$(4.33) \quad \mu_i = \frac{1}{\beta_i} \exp\left[\frac{1}{N} \left(\frac{v_m}{u} + \sum_{i=1}^N \log \beta_i \right)\right].$$

Nemen we ook alle β_i 's gelijk, dan gaat (4.33) over in

$$(4.34) \quad \mu_i = \exp\left[\frac{v_m}{Nu}\right].$$

Deze μ_i kan te groot worden (> 9); in dat geval moeten we N groter nemen (d.w.z. meer trappen).

V. Satellieten in hun baan. (Zie [5], [6])

Voor bestudering van de baan die een satelliet beschrijft beschouwen we de satelliet als een puntmassa.

We zullen eerst enige gegevens vastleggen:

Straal van de aarde $R = 6378,163$ km (gemiddeld)

Massa van de aarde $M_{\oplus} = 5,976 \cdot 10^{27}$ gr.

Massa van de maan $M_{\text{)} = 0,0123 M_{\oplus}$

Massa van de zon $M_{\odot} = 332500 M_{\oplus}$

Afstand aarde-maan $d_{\oplus\text{)}} = 384.405$ km (gemiddeld)

Afstand aarde-zon $d_{\oplus\odot} = 149,5 \cdot 10^6$ km (gemiddeld)

De gravitatie constante $G = 6,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{gr. sec}^2}$

De kracht waarmee twee massa's M en m elkaar aantrekken is volgens Newton

$$(5.1) \quad k = G \frac{Mm}{r^2} \quad (r = \text{afstand zwaartepunten})$$

Voor een massa m op het aardoppervlak geldt

$$m g_0 = G \frac{M_{\oplus} m}{R^2}$$

of

$$(5.2) \quad G M_{\oplus} = g_0 R^2$$

V.1. De atmosfeer

Langdurig draaiende satellieten zitten op een hoogte boven 150 km. Boven ± 1000 km is de atmosferische weerstand zo gering dat we rekening moeten gaan houden met de stralingsdruk van de zon, die dan belangrijker wordt. We zullen een beschrijving geven van de verschillende lagen waarin de atmosfeer wordt verdeeld.

1. Homosfeer (beneden 85 km)

Onderverdeeld in

a) troposfeer (beneden 10 km)

Hier geldt de ideale gaswet $p = \rho RT$

Voor de temperatuur geldt $T = T_0 - 0,0065h$

T_0 = temp. aardoppervlak

h = hoogte in meters

T = temp. in C°

b) tropopauze (10 - 12 km)

De temperatuur is hier constant.

c) stratosfeer (tot \pm 50 km)

De temperatuur T neemt toe tot $270^\circ K$

d) mesosfeer (tot \pm 85 km)

De temperatuur T neemt af tot $150^\circ K$

e) mesopauze

2. Heterosfeer

Onderverdeeld in

a) thermosfeer (tot \pm 300 km)

De temperatuur stijgt tot tussen 1500° en $2000^\circ K$.

In dit gebied dissocieert zuurstof.

b) ionosfeer (tot \pm 500 km)

De electronendichtheid is ongeveer 10^6 cm^{-3} .

c) exosfeer (boven 500 km).

Voor de dichtheid wordt wel aangenomen

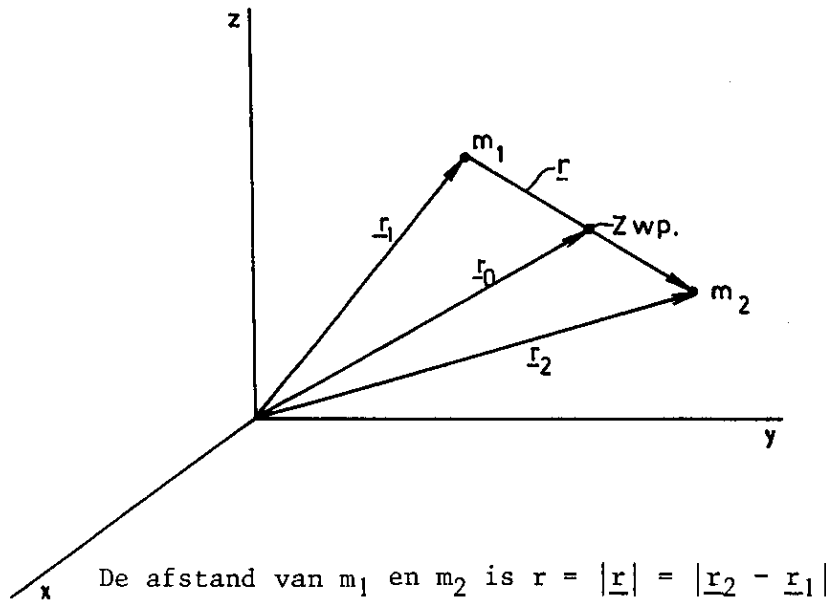
$$(5.3) \quad \rho \sim e^{-h/H},$$

waarbij satellieten ons inzicht hebben verschaft over H en dus over de samenstelling van de atmosfeer.

M.a.w. de dichtheid ρ is berekend door de beweging van satellieten te bestuderen.

V.2. Het mechanische model

We beschouwen twee massapunten die onder invloed van de wederzijdse aantrekkingskracht bewegen.



De bewegingsvergelijkingen zijn

$$(5.4) \quad m_1 \ddot{\underline{x}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) ,$$

$$(5.5) \quad m_2 \ddot{\underline{x}}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) .$$

De afstand van m_1 resp. m_2 tot het zwaartepunt is $\frac{m_2}{m_1 + m_2} r$ resp. $\frac{m_1}{m_1 + m_2} r$, zodat geldt

$$(5.6) \quad \underline{r}_1 = \underline{r}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r} ,$$

$$(5.7) \quad \underline{r}_2 = \underline{r}_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r} .$$

Aftrekken van (5.4) en (5.5) levert

$$(5.8) \quad \ddot{\underline{r}} + G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \underline{r} = 0 .$$

Dit resultaat passen we toe op het systeem van aarde en satelliet

$$(5.9) \quad \ddot{\underline{r}} + G \frac{M_{\oplus}}{r^3} \underline{r} = 0 ,$$

waarbij de massa van de satelliet verwaarloosd is.

Stel $K = G M_{\oplus}$, dan gaat (5.9) over in

$$(5.10) \quad \ddot{\underline{r}} + \frac{K}{r^3} \underline{r} = 0 .$$

(5.10) is de bewegingsvergelijking van een satelliet t.o.v. een "ideale" (homogeen, rond) aarde.

We maken gebruik van

$$\begin{aligned} \underline{r} &= r \underline{e}_1 \\ \dot{\underline{e}}_1 &= \dot{\theta} \underline{e}_2 \quad \text{en} \quad \dot{\underline{e}}_2 = -\dot{\theta} \underline{e}_1 \end{aligned}$$

om (5.10) uit te schrijven in componenten:

$$(5.11) \quad \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{K}{r^2}$$

$$(5.12) \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0 .$$

Vergelijking (5.12) die uitdrukt dat het impulsmoment van de satelliet constant is levert ons

$$(5.13) \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} ,$$

met

$$h = \frac{|\underline{D}|}{m} \quad \text{en} \quad \underline{D} = \underline{r} \times m\dot{\underline{v}} \quad (\text{impulsmoment}) .$$

Substitutie van (5.13) in (5.11) geeft een bewegingsvergelijking voor de baan:

$$(5.14) \quad \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{K}{r^2} .$$

Om de baan te bepalen passen we in (5.14) de substitutie

$$u = \frac{1}{r} , \quad \text{met } u = u(\theta)$$

toe.

Hiermee is

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} = -h \frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} ,$$

waarmee (5.14) overgaat in

$$(5.15) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{h^2}$$

met oplossing

$$(5.16) \quad u = \frac{K}{h^2} + C \cos(\theta - \theta_0)$$

met C en θ_0 nog te bepalen.

θ_0 is afhankelijk van de nultoestand; neem daarom $\theta_0 = 0$. Dan wordt u maximaal voor $\theta = 0$ en dus r minimaal. Deze minimale r heet het "perihelium". De constante C bepalen we uit energiebeschouwingen.

We voeren in de potentiële energie per massaeneheid

$$(5.17) \quad U(r) = -K \int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{K}{r}$$

en de totale energie E per massaeneheid

$$(5.18) \quad E = \frac{v^2}{2} - \frac{K}{r} ,$$

met

$$(5.19) \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] .$$

Met (5.16) t/m (5.19) vinden we

$$(5.20) \quad C = \frac{K^2}{h^4} \left(1 + \frac{2Eh^2}{K^2} \right) .$$

Vergelijking (5.16) kan hiermee geschreven worden als

$$(5.21) \quad u = \frac{K}{h^2} (1 + e \cos \theta)$$

waarin

$$(5.22) \quad e = \frac{Ch^2}{K} = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{K^2}} .$$

Voor de radiusvector vinden we dan

$$(5.23) \quad r = \frac{h^2/K}{1 + e \cos \theta} ,$$

hetgeen de poolvorm voor een kegelsnede is.

Deze uitdrukking voor een kegelsnede is voor

$e > 1$: hyperbool

$e = 1$: parabool

$0 < e < 1$: ellips

$e = 0$: cirkel.

In het geval van de hyperbool is $E > 0$, dus de kinetische energie is groter dan de potentiële energie.

Voor de parabool is $E = 0$.

Voor de ellips is $E < 0$.

We beschouwen het geval van de ellips nader:

Voor een stukje van de ellips geldt:

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi ,$$

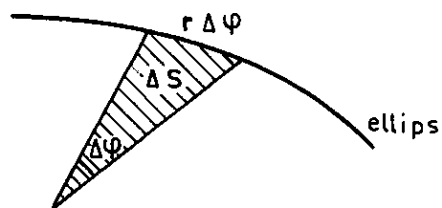
dus

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} h , \quad (\text{zie (5.13)}) .$$

De snelheid waarmee dit oppervlakte elementje doorlopen wordt is dus $h/2$.

Volgens de 3^e wet van Kepler is de omlooptijd voor een ellips:

$$(5.24) \quad T = \frac{\text{oppervlak ellips}}{\text{snelheid waarmee opp. doorlopen wordt}} = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h} .$$



Voor een ellips geldt

$$(5.25) \quad \begin{aligned} b &= a\sqrt{1 - e^2} \\ h &= \sqrt{Ka(1 - e^2)}, \end{aligned}$$

waarmee de omlooptijd voor een ellips overgaat in

$$(5.26) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} a^{3/2}.$$

Uit (6.22) leiden we nog af dat

$$e^2 - 1 = \frac{2Eh^2}{K^2}$$

en dus

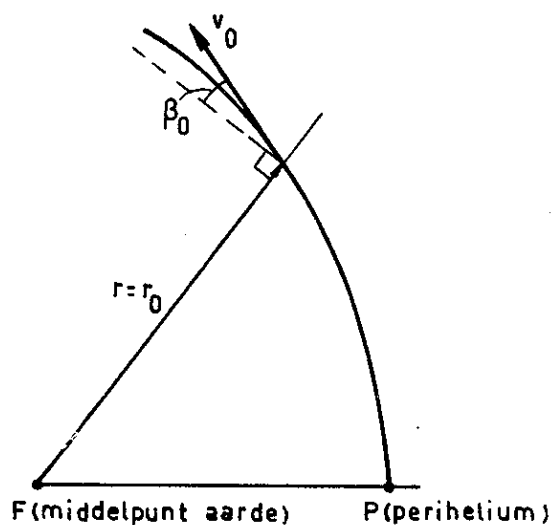
$$(5.27) \quad E = \frac{K^2}{2h^2} (e^2 - 1) = \frac{K^2}{2Ka(1 - e^2)} (e^2 - 1) = -\frac{K}{2a} < 0,$$

waaruit blijkt dat de totale energie die een satelliet in een ellipsbaan heeft negatief is.

V.3. Het lanceren van de satelliet

Stel dat de beginvoorwaarden op het moment dat de brandstof van de raket op is zijn:

$$\begin{aligned} r &= r_0 \\ v &= v_0 \\ \beta &= \beta_0 \end{aligned}$$



Dan is

$$(5.28) \quad h = r_0 v_0 \cos \beta_0 \quad (\text{impulsmoment per massa eenheid})$$

en

$$(5.29) \quad \frac{1}{r_0} = \frac{K}{h^2} (1 + e \cos \theta_0) \quad (\text{uit (6.23)}) .$$

(5.28) in (5.29) substitueren levert

$$(5.30) \quad 1 + e \cos \theta_0 = \frac{r_0 v_0^2}{K} \cos^2 \beta_0 .$$

Ook geldt

$$(5.31) \quad \dot{r}_0 = v_0 \sin \beta_0 = -h \left(\frac{du}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} = \frac{Ke \sin \theta_0}{r_0 v_0 \cos \beta_0} .$$

Uit (5.30) en (5.31) zijn e en θ_0 te bepalen.

We vinden voor e en θ_0

$$(5.32) \quad \tan \theta_0 = \frac{\frac{r_0 v_0^2}{K} \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\frac{r_0 v_0^2}{K} \cos^2 \beta_0 - 1}$$

en

$$(5.33) \quad e^2 = \left(\frac{r_0 v_0^2}{K} - 1 \right)^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0 .$$

Voor de totale energie vinden we uit (5.18)

$$(5.34) \quad \frac{E r_0}{K} = \frac{1}{2} \frac{r_0 v_0^2}{K} - 1 .$$

De baan die een satelliet gaat beschrijven is

a) een cirkel voor $e = 0$: dan is $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ en $\frac{r_0 v_0^2}{K} = 1$. (Zie (5.33)).

b) een hyperbool of ellips voor $e > 1$ resp. $e = 1$.

Voor $\beta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ en $e = 1$ vinden we de ontsnappingssnelheid uit (5.33):

$$(5.35) \quad v_0 = \sqrt{\frac{2K}{r_0}} .$$

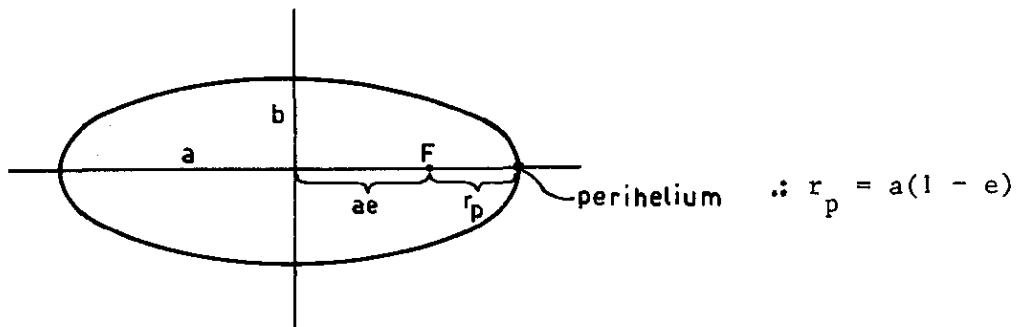
c) een ellips voor $e < 1$: dan is

$$r_0 v_0^2 < 2K = 2GM_{\oplus} = 2R^2 g_0 .$$

Voor een ellips geldt dus de eis

$$(5.36) \quad \frac{v_0^2}{2g_0 R} < \frac{R}{r_0} .$$

Willen we dat de ellipsbaan de aarde niet raakt dan moet de kortste afstand van de ellips tot zijn brandpunt (het perihelium) groter zijn dan de aardstraal, immers het middelpunt van de aarde is een brandpunt van de ellips.



Dan moet

$$(5.37) \quad a(1 - e) > R .$$

Uit (5.25) zien we dat $h^2 = r_p K(1 + e)$ waarmee (5.37) overgaat in

$$(5.38) \quad h^2 > KR(1 + e)$$

of met (5.28)

$$(5.39) \quad r_0^2 v_0^2 \cos^2 \beta_0 > KR(1 + e)$$

waaruit volgt

$$(5.40) \quad \cos^2 \beta_0 > \frac{R^2}{r_0^2} \left[1 + \frac{2Rg_0}{v_0^2} \left(\frac{r_0 - R}{r_0} \right) \right] .$$

Als v_0 te klein is, is het rechterlid van (5.40) te groot en raakt de ellips de aarde wel.

Als het rechterlid kleiner dan 1 is en β_0 goed gekozen is, is het wel mogelijk dat de satellietbaan een gesloten ellips is. Een noodzakelijke conditie hiervoor is

$$(5.41) \quad \frac{v_0^2}{2g_0R} > \frac{R^2}{r_0(r_0 + R)} .$$

Uit (5.36) en (5.41) blijkt dat voor een hele ellipsbaan zeker geldt

$$(5.42) \quad \frac{R^2}{r_0(r_0 + R)} < \frac{v_0^2}{2g_0R} < \frac{R}{r_0} .$$

Noemen we de grootste hoogte van een satelliet in een ellipsbaan H_{\max} en de kleinste H_{\min} dan geldt voor de lange as van de ellips

$$(5.43) \quad 2a = 2R + H_{\max} + H_{\min} .$$

Voor de omlooptijd geldt dan

$$(5.44) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} a^{3/2} = T_0 \left(1 + \frac{H_{\max} + H_{\min}}{2R}\right)^{3/2}$$

met

$$(5.45) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 84 \text{ min, } 21 \text{ sec.}$$

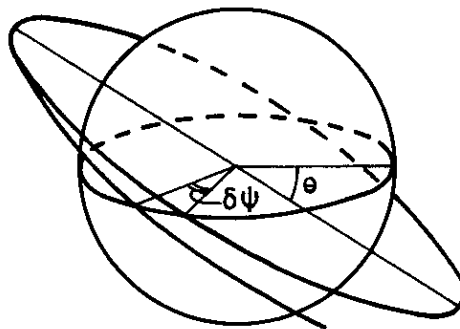
Als $T = 24$ uur staat de satelliet stil en dan vinden we uit (5.44)

$$H_{\max} \approx H_{\min} \approx 36.000 \text{ km} .$$

Het is mogelijk satellieten uit een baan naar een andere baan over te brengen. Dit gebeurt via de zgn. "Hohmann-transfer ellips".

Door de niet rondheid van de aarde ontstaat er per omwenteling een afwijking

$$(5.46) \quad \delta\psi = 0.0121 \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cos \theta .$$

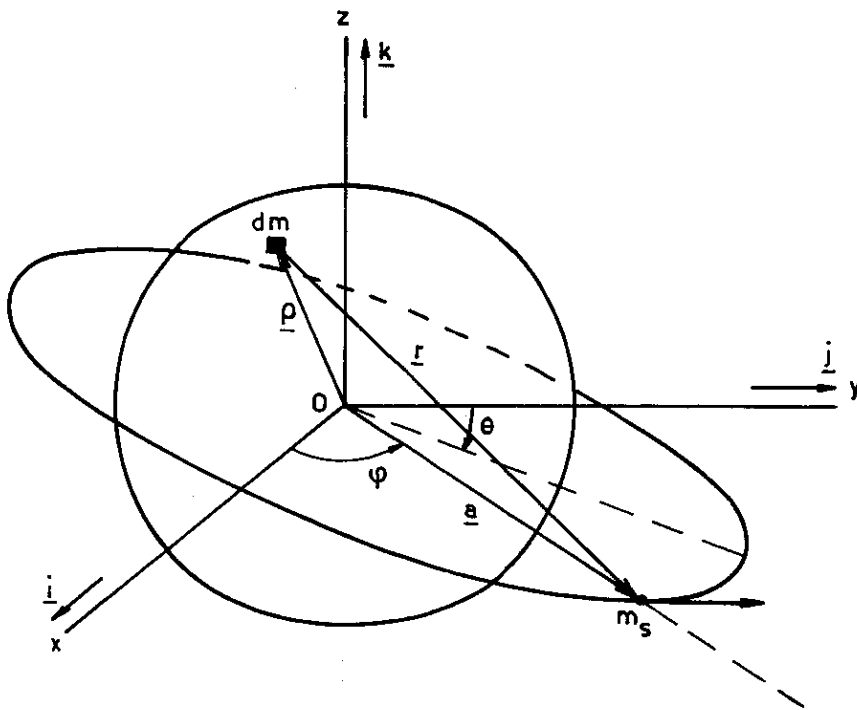


Uit de potentiaaltheorie weten we dat de potentiaal buiten een lichaam slechts afhankelijk is van de totale massa (of lading) en van de vorm van het oppervlak van het lichaam, dus niet van de inwendige massa- of ladingsverdeling. Het potentiaalveld van de aarde is echter geen potentiaalveld van een bol, omdat de aarde afgeplat is aan de polen.

Deze afplatting kunnen we in rekening brengen door toepassing van storingsrekening.

De bewegingsvergelijking van een satelliet wordt dan

$$(5.47) \quad \ddot{\underline{r}} - \frac{K}{r^3} \underline{r} = \underline{f} \quad (\underline{f} \text{ is de storing}) .$$



Eenheidsvectoren zijn \underline{i} , \underline{j} en \underline{k} resp. in x , y en z richting.

De aantrekkingskracht tussen het massaelement dm en de satelliet m_s is

$$(5.48) \quad d\underline{F} = - \frac{K}{m} \frac{m_s dm}{r^3} \underline{r} .$$

Verder geldt

$$(5.49) \quad \underline{r} = \underline{a} - \underline{\rho} = a \cos \varphi \underline{i} + (a \sin \varphi \cos \theta) \underline{j} - (a \sin \varphi \sin \theta) \underline{k} + \\ - (x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k})$$

waarin x , y , z de componenten van $\underline{\rho}$ zijn.

Het moment dat de satelliet van het massaelementje dm ondervindt is

$$(5.50) \quad d\mathbf{M} = \underline{\rho} \times d\underline{F}$$

waarvoor geldt

$$(5.51) \quad d\mathbf{M} = \frac{aKm_s dm}{mr^3} [(y \sin \varphi \sin \theta + z \sin \varphi \cos \theta)\underline{i} + \\ - (x \sin \varphi \sin \theta + z \cos \varphi)\underline{j} - (x \sin \varphi \cos \theta - y \cos \varphi)\underline{k}] .$$

Door reeksontwikkeling van $\frac{1}{r^3}$, in de veronderstelling $\frac{\rho}{a} \ll 1$, vinden we in eerste benadering

$$(5.52) \quad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} [1 + \frac{3}{a} (x \cos \varphi + y \sin \varphi \cos \theta - z \sin \varphi \sin \theta)] .$$

Door substitutie van (5.52) in (5.51) en integratie van de aldus ontstane momentenvergelijking vinden we voor de componenten van het moment

$$(5.53) \quad M_x = \frac{3Km_s}{ma^3} (C - A) \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \\ M_y = - \frac{3Km_s}{ma^3} (C - A) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ M_z = 0$$

waarin C en A de traagheidsmomenten t.o.v. de z -as resp. de x -as zijn:

$$(5.54) \quad C = \int (x^2 + y^2) dm \quad A = \int (x^2 + z^2) dm .$$

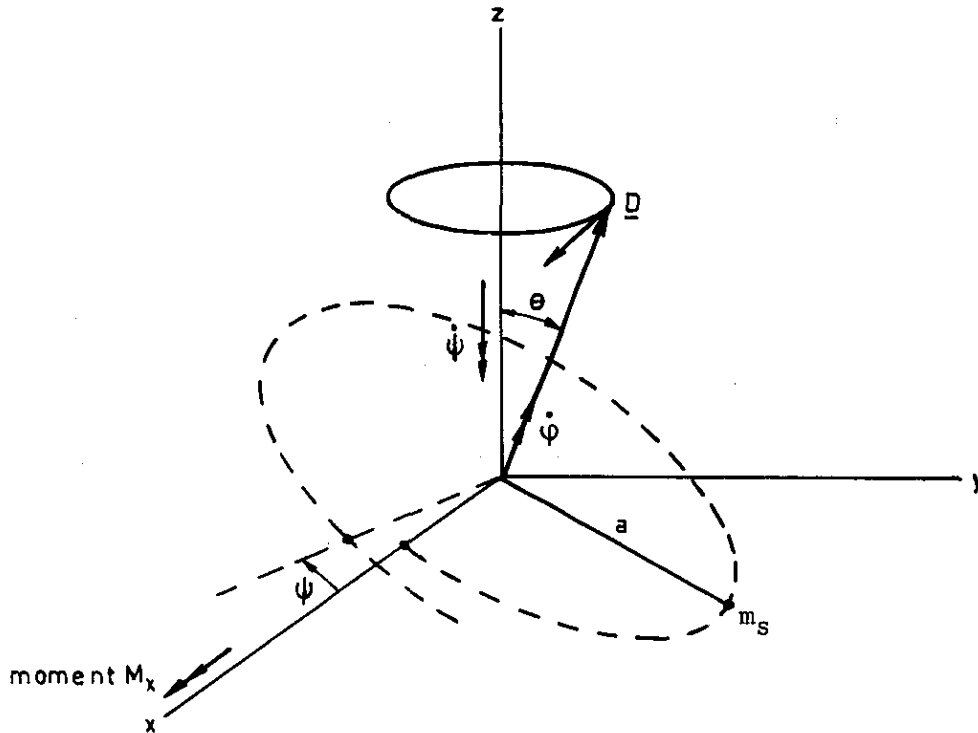
Uit (5.53) zien we dat M_y en M_z gemiddeld nul zijn, echter M_x niet. M_x varieert als $\sin^2 \varphi$ als de satelliet zijn baan doorloopt en is dus tekenvast.

Om de precessie van het vlak van de satellietbaan te bepalen beschouwen we:

$$(5.55) \quad M_x = (\underline{w} \times \underline{D})_x = w_y D_z - w_z D_y = -w_z D_y$$

waarin \underline{D} het impulsmoment is.

We noemen de hoek waarover het snijpunt van de baan met het equatorvlak na één omwenteling verschoven is ψ , (de precessiehoek).



Voor het impulsmoment geldt:

$$(5.56) \quad |\underline{D}| = m_s a^2 \dot{\phi}$$

en dus

$$(5.57) \quad D_y = m_s a^2 \dot{\phi} \sin \theta .$$

Voor de hoeksnelheid om de z-as geldt

$$(5.58) \quad \omega_z = -\dot{\psi} .$$

Hiermee gaat (5.55) over in

$$(5.59) \quad M_x = \dot{\psi} m_s a^2 \dot{\phi} \sin \theta ,$$

hetgeen met (5.53.1) geeft

$$(5.60) \quad \dot{\psi} = \frac{3K}{5ma \dot{\phi}} (C - A) \cos \theta \sin^2 \phi .$$

Gebruikmakend van $C = \frac{2}{5} mR^2$ (traagheidsmoment van een bol) gaat (5.60) over in

$$(5.61) \quad \dot{\psi} = \frac{6}{5a^3} \frac{K}{\dot{\phi}} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left(\frac{C-A}{C}\right) \cos \theta \sin^2 \phi .$$

Omdat

$$\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{K}}{a^{3/2}}$$

is

$$(5.62) \quad \psi = \int \dot{\psi} dt = \frac{6\pi}{5} \frac{C-A}{C} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cos \theta .$$

Voor de aarde is $\frac{C-A}{C} = 0,0032$, waaruit we vinden dat

$$(5.63) \quad \psi = 0.0121 \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cos \theta .$$

LITERATUUR

- [1] Hestenes, M.R., Calculus of variations and optimal control theory.
- [2] Lee, E.B. and Markus, L., Foundations of optimal control theory.
- [3] Leitmann, G., Optimization techniques, H. 4, The calculations of variations in applied aerodynamics and flight mechanics, door A. Miele.
- [4] Lawden, D.F., Optimal trajectories for space navigation.
- [5] Thomson, W.T., Introduction to space dynamics.
- [6] Ball, K.J. and Osborne, G.F., Space vehicle dynamics.
- [7] Rosser, J.B., Newton, R.R. and Gross, G.L., Mathematical theory of rocket flight.
- [8] Jarmolov, K., Dynamics of a spinning rocket with varying inertia and applied moment, J. Appl. Phys. 28, 308-313, (1957).

Voor verdere literatuur zie o.a.:

Rosser, J.B. (ed.), Space mathematics, part 1, 2 and 3, Volume 5, Lectures in applied mathematics.

Dynamics of Satellites, Iutam Symposium Paris 1962.

Dynamics of Satellites, idem, Praag 1969.

The Russian literature of satellites, I, International Physical Index, Inc., New York, 1958.

Space Technology, ed. H. Seifert, Londen 1959, en tijdschriften als bijvoorbeeld: AIAA.