

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# **TOEGEPASTE MECHANICA**

Syllabus van het College van

**Prof. Dr. J.B. Alblas**

**Gegeven in het Najaarssemester 1967**

## Inhoudsopgave

### I. Deformaties

I.1.	Verplaatsingen	2
I.2.	Deformaties	3
I.3.	De compatibiliteitsvergelijkingen	8
I.4.	De hoofdrichtingen en invarianten	14
I.5.	Kromlijnige coördinaten	18

### II. Spanningsleer

II.1.	De spanningstensor	28
II.2.	Hoofdspanningen en hoofdrichtingen	30

### III. Dynamica van het elastische lichaam

III.1.	De impulsstelling	32
III.2.	De momentenstelling	38

### IV. Het verband tussen spanningen en deformaties

IV.1.	De wet van Hooke	41
IV.2.	De elasticiteitsconstanten	43
IV.3.	De vergelijkingen van Navier	44
IV.4.	De randcondities	45

### V. Energie - beschouwingen

V.1.	Elastische energie	47
V.2.	Reciprociteitsstelling van Betti en toelaatbare stelsels	50
V.3.	Stelling van Castigliano	56

### VI. Torsie van cilindrische staven

VI.1.	Exacte oplossing	58
VI.2.	Benaderingsoplossingen	65

### VII. Buiging van cilindrische staven

VII.1.	Buiging door een moment. Exacte theorie	70
VII.2.	Buiging door een dwarskracht. Benaderingstheorie	72
VII.3.	Stelling van Castigliano	81
VII.4.	Doelstellingen van de technische mechanica	89

VIII. Elasto-dynamica. Lineaire theorie

VIII.1. Bewegingsvergelijkingen	91
VIII.2. Principe van Hamilton	93
VIII.3. Trilvormen	96
VIII.4. De methode van Rayleigh voor de approximatieve berekening der eigenfrequenties	99

Voor het verkrijgen van een betere benadering kunnen we proberen

$$W(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + \alpha \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right), \quad (\alpha > 0), \quad (8.68)$$

welke geeft

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{\rho S \ell^4} \frac{(1 + 81\alpha^2)}{(1 + \alpha^2)} + \frac{2c}{\rho S \ell} \frac{(1 - 2\alpha + \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)}. \quad (8.69)$$

De beste waarde uit deze klasse vinden we voor die waarde van  $\alpha$  waarvoor de uitdrukking (8.69) minimaal is. De waarde van  $\alpha$  is

$$\alpha = \frac{40}{\gamma} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{1600}} \right), \quad \gamma = \frac{2c\ell^3}{\pi^4 EI}, \quad (8.70)$$

en voor niet te grote waarden van  $c$  wordt dit

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{80}, \quad (8.71)$$

een getal dat voor  $\gamma < 1$  een  $\omega^2$  geeft welke weinig zal verschillen van (8.67). Dus voor niet te stijve veren is (8.67) een redelijke benadering voor de grondfrequentie.

## Inleiding

In dit college zullen de deformaties van continue lichamen bestudeerd worden. De grondlegger van dit deel van de mechanica is Cauchy (+ 1824).

We noemen een lichaam deformeerbaar, indien het onder invloed van uitwendige krachten van vorm kan veranderen. Een deformeerbaar lichaam heeft oneindig veel graden van vrijheid, wat aanleiding geeft tot partiële differentiaalvergelijkingen. Dit in tegenstelling tot het college "Theoretische Mechanica", waarin de bewegingen van starre lichamen worden behandeld. Deze lichamen hebben slechts een eindig aantal graden van vrijheid, zodat ze beschreven kunnen worden door gewone differentiaalvergelijkingen.

We kunnen dit college splitsen in twee delen, nl.

- i) Een inleiding in de lineaire elasticiteitstheorie (I t/m V).

Hierbij betekent

- a) lineair: we beperken ons tot zeer kleine deformaties,
- b) elastisch: het lichaam keert na opheffing van de werking van de uitwendige krachten naar zijn oorspronkelijke onvervormde toestand terug.

- ii) Een inleiding in de sterkteleer (VI t/m VIII).

In deze hoofdstukken worden approximatieve berekeningen gegeven, speciaal voor de torsie, buiging en trillingen van balken.

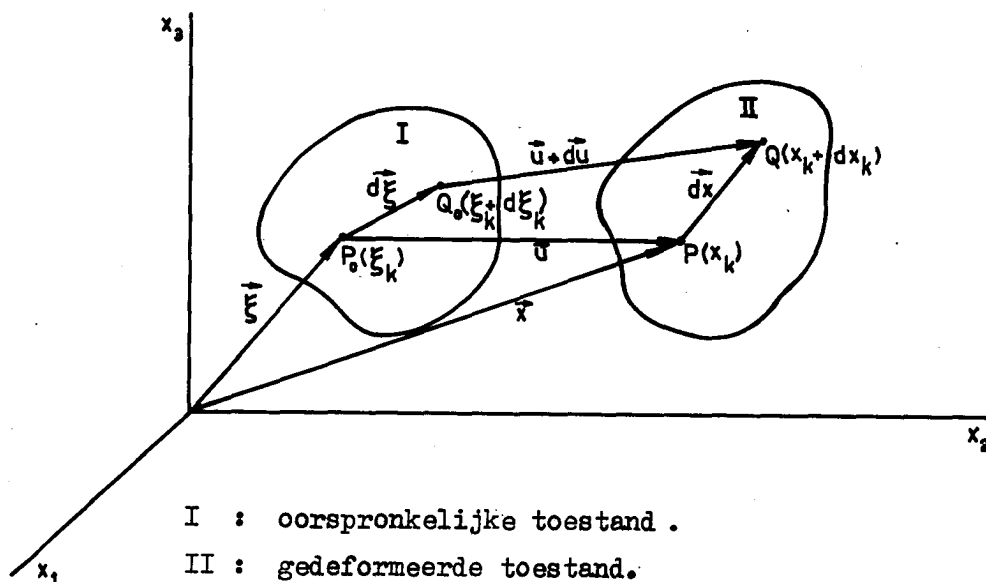
## I. Deformaties.

### I.1. Verplaatsingen.

We beschouwen continue, deformeerbare lichamen. Een lichaam heet deformeerbaar, indien het onder invloed van uitwendige krachten van vorm kan veranderen. Bij de vervorming zal ieder punt van het lichaam een verplaatsing ondergaan, welke een vector is met drie componenten:  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$  en  $u_3 = w$ . We zullen zowel de  $u_1, u_2, u_3$  notatie als de  $u, v, w$  notatie gebruiken. In het algemeen zijn  $u, v$  en  $w$  van plaats tot plaats verschillend, dus:

$$u_i = u_i(x_k) \quad . \quad (1.01)$$

Formule (1.01) drukt uit, dat er een verplaatsingsveld is. We nemen aan dat  $u_i$  een continu-differentieerbare functie van  $x_k$  is. De verplaatsingen bestaan in het algemeen uit een translatie en een rotatie als star lichaam plus een locale verplaatsing.



We gaan nu kijken naar een lichaam, dat gedeformeerd wordt van toestand I naar II (zie figuur). We beschouwen een punt  $P_0$  van dit lichaam, welk punt in toestand I de coördinaten:  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  (in het cartesische stelsel  $x_1, x_2, x_3$ ) heeft. Na deformatie (II) gaat dit over in P met coördinaten:  $x_1, x_2, x_3$ . Er bestaat dus een afbeelding:

$$x_k = x_k(\xi_l) \quad . \quad (1.02)$$

Deze afbeelding moet voldoen aan de volgende twee topologische eisen:

1. Twee punten die voor de deformatie oneindig dicht bij elkaar liggen, blijven ook na de deformatie oneindig dicht bij elkaar (d.w.z. we laten geen scheuren in het lichaam toe).
2. Een punt dat op de rand (resp. in het inwendige) ligt, blijft ook na de deformatie op de rand (in het inwendige) liggen.

De verplaatsing van P definiëren we als:

$$u_i := x_i - \xi_i \quad . \quad (1.03)$$

We gaan nu kijken naar een punt Q, dat op een infinitesimale afstand van  $P_0$  ligt. De coördinaten van Q zijn:  $\xi_k + d\xi_k$  vóór de deformatie en:  $x_k + dx_k$  na de deformatie. Het is duidelijk, dat een lijnstukje  $P_0 Q_0$  met een eindige lengte, dat voor de deformatie recht is, door de deformatie krom kan worden.

Nu geldt:

$$d\xi_i = dx_i - du_i = dx_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = dx_i - u_{i,j} dx_j \quad , \quad *) \quad (1.04)$$

waarbij:  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad .$

We hebben hier  $u_i$  beschouwd als functie van  $x_k$ . We kunnen  $u_i$  echter ook beschouwen als functie van  $\xi_k$  immers:

$$u_i(x_k) = u_i[x_k(\xi_k)] \quad .$$

Indien we alle grootheden uitdrukken in  $\xi_k$  spreken we van Lagrange-systeem, idem bij  $x_k$  van Euler-systeem. In de lineaire theorie, waartoe wij ons in dit college zullen beperken, is er echter geen verschil tussen beide systemen.

We noemen de lengte van het lijnstukje  $P_0 Q_0$ :  $d\ell_0$  en van PQ:  $d\ell$ . Dan geldt:

$$d\ell_0^2 = d\xi_i d\xi_i \quad , \quad (i=1,2,3) \quad , \quad (1.05)$$

$$d\ell^2 = dx_i dx_i \quad . \quad (1.06)$$

## I.2. De deformaties.

We beschouwen:  $\frac{1}{2}(d\ell^2 - d\ell_0^2)$  .

Met (1.04), (1.05) en (1.06) krijgen we hiervoor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(d\ell^2 - d\ell_0^2) &= \frac{1}{2}(dx_i dx_i - d\xi_i d\xi_i) = \\ &= \frac{1}{2}[dx_i dx_i - (dx_i - u_{i,j} dx_j)(dx_i - u_{i,k} dx_k)] = \end{aligned}$$

\*) Sommeren over gelijke indices

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [u_{i,k} dx_i dx_k + u_{i,j} dx_j dx_i - u_{i,j} u_{i,k} dx_j dx_k] = \\
&= \frac{1}{2} [u_{j,k} dx_j dx_k + u_{k,j} dx_j dx_k - u_{i,j} u_{i,k} dx_j dx_k] = \\
&= \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j} - u_{i,j} u_{i,k}) dx_j dx_k \quad . \quad (1.07)
\end{aligned}$$

We definiëren nu de deformatietensor  $e_{ij}$  door:

$$\frac{1}{2} (dl^2 - dl_0^2) = e_{ij} dx_i dx_j \quad . \quad (1.08)$$

Vergelijken van (1.07) en (1.08) geeft:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad . \quad (1.09)$$

We zullen ons in dit college steeds beperken tot zeer kleine (wiskundig: infinitesimale) deformaties. Dan is het mogelijk de tweede graads termen in (1.09) te schrappen, zodat we krijgen

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (1.10)$$

De niet-lineaire theorie, die we krijgen indien we de laatste term van (1.09) niet verwaarlozen, wordt behandeld in het college: continuums-mechanica.

De tensor  $e_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) heeft eigenlijk 9 componenten, maar aangezien (zoals direct volgt uit (1.09))  $e_{ij} = e_{ji}$ , blijven er maar 6 verschillende over.

In de techniek worden gebruikt de notaties:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} ; \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned} \quad . \quad (1.11)$$

Vergelijken van (1.10) en (1.11) geeft:

$$\varepsilon_x = e_{11} , \quad \gamma_{xy} = 2e_{12} \quad . \quad \text{etc.} \quad (1.12)$$

Uit (1.08) volgt dat  $e_{ij}$  een tensor is van de tweede orde. Immers:  $\frac{1}{2} (dl^2 - dl_0^2)$  is invariant tegenover orthogonale coördinaten-transformaties:

$$\bar{x}_i = l_{ij} x_j \quad , \quad (\text{rotatie van het assenkruis}) \quad . \quad (1.13)$$

$l_{ij}$  is de richtingscosinus tussen  $\bar{x}_i$  en  $x_j$ . In het algemeen is:  $l_{ij} \neq l_{ji}$ .



Verder geldt:

$$l_{ij} l_{ik} = \delta_{jk} \quad , \quad l_{ki} l_{ji} = \delta_{jk} \quad . \quad (1.14)$$

$\delta_{jk}$ : Kronecker-delta .

Omdat  $(dl^2 - dl_0^2)$  invariant is, geldt:

$$e_{kl} dx_k dx_l = \bar{e}_{kl} d\bar{x}_k d\bar{x}_l \quad . \quad (1.15)$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{kl} d\bar{x}_k d\bar{x}_l &= \bar{e}_{kl} l_{kj} dx_j l_{li} dx_i = \\ &= l_{il} l_{jk} \bar{e}_{ji} dx_k dx_l \quad . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Dus:

$$e_{kl} = l_{il} l_{jk} \bar{e}_{ij} \quad (1.17)$$

Door formule (1.17) te vermenigvuldigen met  $l_{pk}$  en  $l_{ql}$  vinden we (met (1.14)):

$$e_{kl} l_{pk} l_{ql} = l_{il} l_{ql} l_{jk} l_{pk} \bar{e}_{ij} = \delta_{iq} \delta_{jp} \bar{e}_{ij} = \bar{e}_{pq} \quad .$$

Dus:

$$\bar{e}_{ij} = l_{ik} l_{jl} e_{kl} \quad . \quad (1.18)$$

We hebben de deformaties volledig wiskundig formeel ingevoerd. We gaan nu de fysische betekenis ervan onderzoeken.

Indien we de punten P en Q zodanig kiezen, dat ze na de deformatie langs de  $x_1$ -as liggen (dan wordt  $dx_2 = dx_3 = 0$ ) gaat (1.08) over in:

$$\frac{1}{2} (dl^2 - dl_0^2) = e_{11} dx_1^2 \quad . \quad (1.19)$$

Nu is:  $dl = dx_1$ , zodat:

$$e_{11} = \frac{dl^2 - dl_0^2}{2dl^2} = \frac{dl - dl_0}{dl} \cdot \frac{dl + dl_0}{2dl} \quad . \quad (1.20)$$

Bij infinitesimale deformaties verschillen  $dl$  en  $dl_0$  slechts een waarde, welke klein is van een hogere orde dan  $dl_0$ . Dus mag gesteld worden:

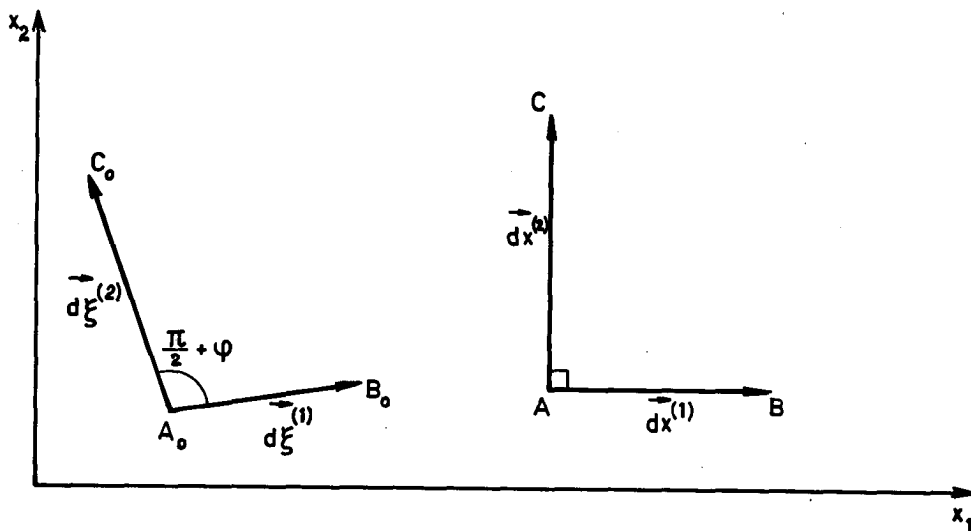
$$\frac{dl + dl_0}{2} \approx dl \approx dl_0 \quad . \quad (1.21)$$

Hiermee wordt (1.20):

$$e_{11} = \frac{dl - dl_0}{dl_0} \quad (1.22)$$

$e_{11}$  is dus de relatieve verlenging van een element van de lengte  $dl_0$  in de  $x_1$ -richting. We noemen het de rek in de  $x_1$ -richting. Op gelijke wijze blijken  $e_{22}$  en  $e_{33}$  de rekken te zijn in resp. de  $x_2$ - en de  $x_3$ -richting.

We onderzoeken nu de betekenis van  $e_{12}$ .



De vectoren  $\vec{A_0B_0}$  en  $\vec{A_0C_0}$  gaan na deformatie over in de vectoren  $\vec{AB}$  en  $\vec{AC}$ , welke evenwijdig zijn aan resp. de  $x_1$ -as en de  $x_2$ -as. Dan geldt, zoals we hiervoor hebben gezien:

$$|\vec{d\xi}^{(1)}| = \frac{|\vec{dx}^{(1)}|}{(1 + e_{11})} ; \quad |\vec{d\xi}^{(2)}| = \frac{|\vec{dx}^{(2)}|}{(1 + e_{22})} \quad (1.23)$$

Uit het scalair produkt:

$$(\vec{d\xi}^{(1)}, \vec{d\xi}^{(2)}) = d\xi_i^{(1)} d\xi_i^{(2)} = |\vec{d\xi}^{(1)}| |\vec{d\xi}^{(2)}| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \quad (1.24)$$

volgt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi = \frac{d\xi_i^{(1)} d\xi_i^{(2)}}{|\vec{d\xi}^{(1)}| |\vec{d\xi}^{(2)}|}$$

Met:  $d\xi_i = dx_i - u_{i,j} dx_j$  ,

wordt dit:

$$\sin \varphi = - \frac{(\mathrm{d}x_i^{(1)} - u_{i,j} \mathrm{d}x_j^{(1)})(\mathrm{d}x_i^{(2)} - u_{i,k} \mathrm{d}x_k^{(2)})}{|\mathrm{d}\vec{\xi}^{(1)}| |\mathrm{d}\vec{\xi}^{(2)}|} \quad (1.25)$$

Aangezien:

$$\vec{\mathrm{d}x}^{(1)} = (\mathrm{d}x_1, 0, 0) \quad \text{en} \quad \vec{\mathrm{d}x}^{(2)} = (0, \mathrm{d}x_2, 0)$$

krijgen we met (1.23) als we de termen van de orde  $(u_{i,j})^2$  verwaarlozen:

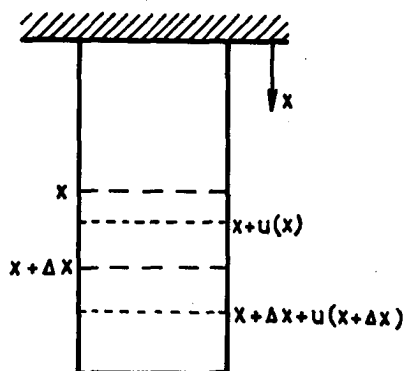
$$\sin \varphi = \frac{(u_{1,2} + u_{2,1}) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2} = (u_{1,2} + u_{2,1}) = 2e_{12} \quad (1.26)$$

Omdat de deformaties klein zijn, is ook  $|\varphi| \ll 1$ , d.w.z.:  $\sin \varphi = \varphi$ , zodat we tenslotte krijgen:

$$e_{12} = \frac{1}{2} \varphi \quad (1.27)$$

$e_{12}$  is dus een maat voor de vermindering van de hoek tussen twee vectoren. We noemen  $e_{12}$  de afschuiving. Soortgelijke beschouwingen gelden voor  $e_{23}$  en  $e_{31}$ .

Aansluiting met de technische theorie verkrijgen we indien we een eenvoudig blokje bekijken:

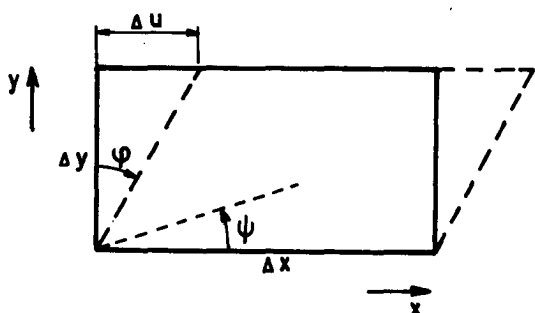


De verplaatsing in  $x$  is  $u(x)$ , die in  $x + \Delta x$  :  $u(x + \Delta x)$ . De lengte van het elementje  $\mathrm{d}x$  wordt dus:

$$\begin{aligned} [x + \Delta x + u(x + \Delta x)] - [x + u(x)] &= \\ = \Delta x + u(x + \Delta x) - u(x) & \quad (1.28) \end{aligned}$$

De relatieve lengteverandering wordt dus:

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} =: \epsilon_x \quad (1.29)$$



Bij de afschuiving hebben we:

$$\tan \varphi = \varphi = \frac{\partial u}{\partial y}$$

en algemeen:

$$\psi + \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} =: \gamma_{xy} \quad (1.30)$$

Dus:

$$\gamma_{xy} = 2e_{12} \quad . \quad (1.31)$$

We voeren naast de  $e_{ij}$  de rotaties  $\omega_{ij}$  in volgens:

$$\omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad . \quad (1.32)$$

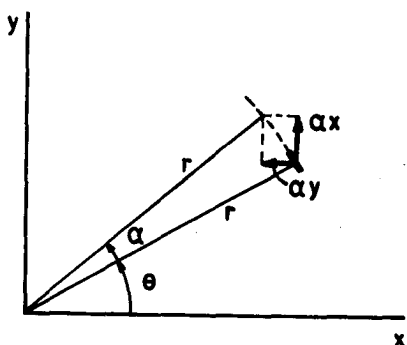
Uit (1.10) en (1.32) volgt:

$$e_{ij} + \omega_{ij} = u_{i,j} \quad . \quad (1.33)$$

De fysieke betekenis van de rotaties  $\omega_{ij}$  is te zien uit de formule:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad .$$

Dit is de infinitesimale draaiingshoek van een element om de z-as, in de negatieve z-richting:



Bij een draaiing van het element  $(r, \theta)$  over de boog  $ra$  is:

$$u = -\alpha y, \quad v = +\alpha x \quad ,$$

waaruit volgt:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}(-\alpha - \alpha) = -\alpha \quad . \quad (1.34)$$

### 1.3. De Compatibiliteitsvergelijkingen.

We gaan uit van een verplaatsingsveld  $(u, v, w)$ , dat voldoende differentieerbaar is. Dan volgt direct uit de definitie van  $e_{xy}$  dat:

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

of

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \quad . \quad (1.35)$$

Door de cyclische verwisseling:

$$x, y, z \rightarrow y, z, x \rightarrow z, x, y$$

krijgen we nog twee andere vergelijkingen van dit type.

Een ander type van vergelijkingen is:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) \quad (\text{cyclisch}) \quad (1.36)$$

Door substitutie van (1.10) zien we dat ook aan deze vergelijkingen triviaal voldaan is.

We noemen de zes bovenstaande vergelijkingen de: Compatibiliteitsvergelijkingen.

Stel  $e_{ij}$  (6 stuks) is gegeven.

Deze 6  $e_{ij}$ 's zijn de afgeleiden van 3  $u_i$ 's. Dus in het algemeen zal het niet mogelijk zijn, om uit de 6  $e_{ij}$ 's de 3  $u_i$ 's te bepalen.

Nu geldt echter:

De compatibiliteitsvergelijkingen zijn de noodzakelijke en voldoende voorwaarden, opdat uit een gegeven deformatie de verplaatsingen zijn te bepalen.

Bewijs:

a) Noodzakelijk: triviaal, volgt direct uit de definitie van  $e_{ij}$  (1.10).

b) Voldoende:

Stel: gegeven 6  $e_{kl}$ 's die voldoen aan compatibiliteitsvergelijkingen.

Gevraagd: bestaan de  $u_i$ 's?

We beperken ons tot enkelvoudig samenhangende gebieden.

We schrijven eerst de compatibiliteitsvergelijkingen in de indexnotatie:

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad (i,j,k,l=1,2,3). \quad (1.37)$$

Dit zijn 81 vergelijkingen maar de meesten zijn niet onafhankelijk of geven identiek:  $0 = 0$  (bijv.:  $i = j = k = l = 1$ ).

Er blijven nog juist 6 onafhankelijke vergelijkingen over, welke overeenkomen met (1.35) en (1.36).

We voeren in:

$$a_i^{jk} := e_{ij,k} - e_{ik,j} \quad (1.38)$$

Dan wordt (1.37):

$$a_{i,l}^{jk} = a_{l,i}^{jk} \quad (1.39)$$

We beschouwen  $a_i^{jk}$  als de  $i^e$ -component van de vector  $\vec{a}^{jk}$ , en we gebruiken de stelling uit de potentiaaltheorie:

Indien van een vector  $\vec{A}$  geldt:

$$A_{i,j} = A_{j,i} \quad ,$$

is:

$$\text{rot } \vec{A} = 0 \quad ,$$

en dan bestaat er een  $\varphi$ , zodanig dat:

$$\vec{A} = \text{grad } \varphi \quad , \quad (\varphi : \text{skalair}) \quad .$$

Dus volgt uit (1.39) dat er een  $b_{jk}$  bestaat:

$$\vec{a}^{jk} = \text{grad } b_{jk} \tag{1.40}$$

of:

$$a_i^{jk} = b_{jk,i} \quad . \tag{1.41}$$

Uit (1.41) en (1.38) volgt:

$$b_{jk,i} = e_{ij,k} - e_{ik,j} \quad . \tag{1.42}$$

Met (1.42) zien we direct dat:

$$b_{jk,i} = - b_{kj,i} \quad . \tag{1.43}$$

Door de verwisseling:  $j,k,i \rightarrow i,j,k$  in (1.42) krijgen we:

$$b_{ij,k} = e_{ki,j} - e_{kj,i} \quad . \tag{1.44}$$

(1.42) en (1.44) optellen geeft:

$$b_{jk,i} + b_{ij,k} = e_{ij,k} - e_{kj,i}$$

of, met (1.43):

$$b_{jk,i} + e_{jk,i} = b_{ji,k} + e_{ji,k} \quad . \tag{1.45}$$

Definieer:

$$c_{j,k} := b_{jk} + e_{jk} \quad . \tag{1.46}$$

(1.45) wordt dan:

$$c_{j,ki} = c_{j,ik} \quad . \tag{1.47}$$

We waren uitgegaan van gegeven  $e_{ij}$  en we hebben bewezen dat  $b_{jk}$  bestaat. Uit (1.46) en (1.47) volgt dan dat  $c_j$  bestaat.

Uit (1.43) volgt dat:

$$b_{jk} = -b_{kj} \quad , \quad (1.48)$$

op een constante na, welke we nul kiezen.

Uit (1.46) krijgen we dan:

$$c_{k,j} = b_{kj} + e_{kj} = -b_{jk} + e_{kj} \quad . \quad (1.49)$$

(1.49) en (1.46) optellen geeft:

$$2e_{kj} = c_{k,j} + c_{j,k} \quad . \quad (1.50)$$

We nemen nu  $c_k = u_k$ . We hebben dan dus bewezen dat er een vectorveld  $u$  bestaat, dat voldoet aan (1.50) (of (1.10)).

#### Voorbeeld

1<sup>e</sup>. Gegeven:  $e_{11} = cy^2$ ,  $e_{22} = cx^2$ , overige  $e_{ij}$ 's = 0. (1.51)

Gevraagd: zijn de verplaatsingen te bepalen.

Oplossing:

De enige compatibiliteitsvergelijking, welke met (1.51) niet de identiteit:  $0 = 0$  geeft, luidt:

$$2e_{12,12} = e_{11,22} + e_{22,11} \quad . \quad (1.52)$$

(1.51) substitueren in (1.52) geeft:

$$0 = 2c + 2c \quad .$$

Er is dus niet voldaan aan (1.52) en dus zijn uit (1.51) geen verplaatsingen te bepalen.

We kunnen dit ook op een andere manier aantonen:

Uit:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = cy^2$$

volgt:

$$u = cy^2 x + f(y, z) \quad . \quad (1.53)$$

En analoog: (uit  $e_{22}$ )

$$v = cx^2y + g(x, z) \quad .$$

Dus

$$2e_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 4cxy + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} = 0$$

of:

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = -4cxy$$

en hieraan is onmogelijk te voldoen.

2<sup>e</sup>. Zelfde vraag, maar nu met:

$$e_{11} = -cy^2, \quad e_{22} = cx^2, \quad \text{overige } e_{ij} = 0 \quad . \quad (1.54)$$

In dit geval wordt (1.52):

$$0 = -2c + 2c = 0$$

Dus uit (1.52) zijn wel verplaatsingen te bepalen.

Voor het bepalen van de verplaatsingen zullen we ons beperken tot het twee dimensionale geval:

$$e_{13} = e_{23} = e_{33} = w = 0$$

$$\text{en: } u_i = u_i(x, y), \quad (\text{onafhankelijk van } z), \quad (i=1, 2) \quad .$$

Dan volgt uit:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = -cy^2 \quad ,$$

dat:

$$u(x, y) = -cy^2x + f(y) \quad , \quad (1.55)$$

en analoog uit:

$$e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = cx^2 \quad ,$$

$$v(x, y) = cx^2y + g(x) \quad . \quad (1.56)$$

Substitutie van (1.55) en (1.56) geeft de uitdrukking voor  $e_{12}$ :

$$\begin{aligned} e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -cyx + \frac{1}{2} \frac{df}{dy} + cxy + \frac{1}{2} \frac{dg}{dx} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{df}{dy} + \frac{dg}{dx} \right) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.57)$$



(1.57) heeft als oplossing:

$$\begin{aligned} f(y) &= a + \alpha y \quad , \\ g(x) &= b - \alpha x \quad . \end{aligned} \tag{1.58}$$

Dus, met (1.55), (1.56) en (1.58):

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -cy^2x + \alpha y + a \\ v(x,y) &= cx^2y - \alpha x + b \end{aligned} \tag{1.59}$$

u en v zijn dus bepaald op een drietal constanten (a, b en  $\alpha$ ) na. Hiervan stellen a en b voor: translaties als star lichaam en  $\alpha$  een rotatie als star lichaam. Deze constanten hebben geen invloed op de deformaties.

In het algemene (3-dimensionale) geval geldt nu:

Indien aan de compatibiliteitsvergelijkingen voldaan is, kunnen we uit de deformaties  $e_{ij}$  de verplaatsingen  $u_i$  bepalen, op een zestal starre lichaamsverplaatsingen na, nl.:

- (i) drie translaties als star lichaam,
- (ii) drie rotaties als star lichaam.

#### Opmerking

In de tensoranalyse komen de compatibiliteitsvergelijkingen overeen met de eis, dat de kromming van de Riemannse ruimte, waarin onze deformaties moeten plaatsvinden, constant blijft. Dit betekent dat de krommingstensor steeds nul moet zijn. De krommingstensor (Riemann-Cristoffel - tensor) is gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} R_{prst} &:= \frac{1}{2} (\varepsilon_{pt,rs} + \varepsilon_{rs,pt} - \varepsilon_{ps,rt} - \varepsilon_{rt,ps}) + \\ &+ g^{mn} [\Gamma_{rsm} \Gamma_{ptn} - \Gamma_{rtm} \Gamma_{psn}] \quad . \end{aligned}$$

Hierbij is  $\varepsilon_{kl}$  gedefinieerd door:

$$dl^2 = \varepsilon_{kl} dz_k dz_l \quad ,$$

$z_k$  : algemene kromlijnige coördinaten van een punt na de deformatie .

en:  $g^{mn}$  door:

$$g^{mn} g_{np} = \delta_p^m = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq p \quad , \\ 1 & \text{als } m = p \quad , \end{cases}$$

en:  $\Gamma_{rsm} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{rm,s} + \varepsilon_{ms,r} - \varepsilon_{rs,m}) \quad .$

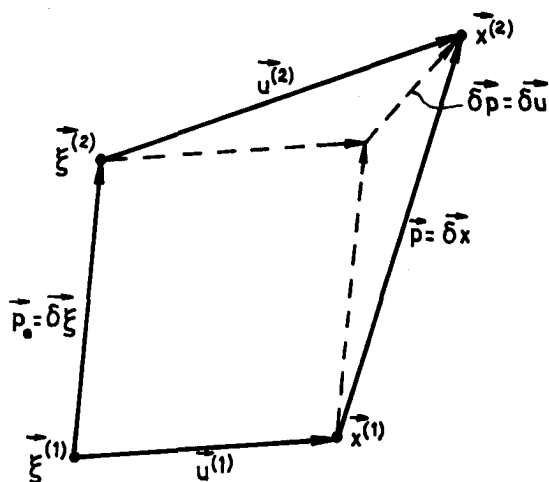
#### I.4. De hoofdrichtingen en invarianten

We beschouwen in een deformeerbaar lichaam twee punten, welke voor de deformatie aangegeven worden door de vectoren:

$$\vec{\xi}^{(1)} \quad \text{en} \quad \vec{\xi}^{(2)},$$

en na de deformatie door:

$$\vec{x}^{(1)} \quad \text{en} \quad \vec{x}^{(2)}.$$



Verder is:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(1)} - \vec{\xi}^{(1)} &= \vec{u}^{(1)} \\ \vec{x}^{(2)} - \vec{\xi}^{(2)} &= \vec{u}^{(2)} \end{aligned}, \quad (1.64)$$

en vanwege (1.62) en (1.63):

$$\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)} = \delta \vec{u}. \quad (1.65)$$

Tevens is:

$$\begin{aligned} \delta \vec{p} &= \vec{p} - \vec{p}_0 = (\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}) - (\vec{\xi}^{(2)} - \vec{\xi}^{(1)}) = \\ &= \vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)} = \delta \vec{u}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

We noemen de vector:

$$\vec{\xi}^{(2)} - \vec{\xi}^{(1)} = \vec{p}_0 \quad (1.60)$$

en:

$$\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)} = \vec{p} \quad (1.61)$$

We nemen nu aan dat de punten  $\vec{\xi}^{(1)}$  en  $\vec{\xi}^{(2)}$  infinitesimaal

dicht bij elkaar liggen, d.w.z.:

$$\vec{p}_0 = \vec{\xi}^{(2)} - \vec{\xi}^{(1)} = \delta \vec{\xi}. \quad (1.62)$$

En analoog:

$$\vec{p} = \vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)} = \delta \vec{x}. \quad (1.63)$$

Dus geldt:

$$\delta p_i = \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} p_j \quad (1.67)$$

Nu is: (1.33)

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}.$$

Dus:

$$\delta p_i = e_{ij} p_j + \omega_{ij} p_j \quad (1.68)$$

Stel nu eens  $e_{ij} = 0$ .

Dan:  $\delta p_i = \omega_{ij} p_j$ .

Vermenigvuldigen met  $p_i$ :

$$p_i \delta p_i = \omega_{ij} p_i p_j = 0,$$

want  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ .

Dus  $\omega_{ij}$  alléén geeft geen verandering van de lengte van de vector  $\vec{p}$ , alleen een starre rotatie.

We laten daarom  $\omega_{ij}$  buiten beschouwing. We krijgen dan:

$$\delta p_i = e_{ij} p_j \quad (1.69)$$

#### Definitie:

We noemen de richting van  $\vec{p}$  een hoofdrichting, indien de richting van  $\vec{p}$  bij een deformatie niet verandert, dus als:

$$\delta p_i = \lambda p_i \quad (1.70)$$

Met (1.69) krijgen we dan:

$$e_{ij} p_j = \lambda p_i \quad (1.71)$$

Dus  $\vec{p}$  is een hoofdrichting indien voldaan is aan

$$(e_{ij} - \lambda \delta_{ij}) p_j = 0 \quad (1.72)$$

We noemen  $\lambda$  de hoofdrek.

Aangezien de homogene vergelijking (1.72) oneindig veel oplossingen heeft, normeren we  $\vec{p}$  op:

$$p_i p_i = 1 \quad (1.73)$$

Vergelijking (1.72) heeft alleen een oplossing, indien de determinant:

$$|e_{ij} - \delta_{ij} \lambda| = 0 \quad (1.74)$$

Dit is een derdegraads vergelijking voor  $\lambda$ , welke drie oplossingen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  heeft, waarvan er minstens een reëel is. We zullen bewijzen dat uit het feit dat  $e_{ij} = e_{ji}$  volgt, dat alle  $\lambda$ 's reëel zijn.

Stel immers dat er twee complex toegevoegde bij zijn, bijv.  $\lambda_2$  en  $\lambda_3$ . Dus:

$$\lambda_3 = \lambda_2^* \quad , \quad (*: \text{complex toegevoegd}).$$

Dan is ook:

$$p_i^{(3)} = p_i^{(2)*} .$$

$p_i^{(k)}$  is de hoofdrichting horende bij  $\lambda_k$ .

Voor  $\lambda_2$  en  $\lambda_3$  krijgen we:

$$\begin{aligned} e_{ij} p_j^{(2)} &= \lambda_2 p_i^{(2)} \quad , \\ e_{ij} p_j^{(3)} &= \lambda_3 p_i^{(3)} \quad . \end{aligned}$$

De eerste vergelijking vermenigvuldigen met  $p_i^{(3)}$  en de tweede met  $p_i^{(2)}$  en aftrekken geeft:

$$e_{ij} [p_j^{(2)} p_i^{(3)} - p_j^{(3)} p_i^{(2)}] = (\lambda_2 - \lambda_3) p_i^{(2)} p_i^{(3)} . \quad (1.75)$$

Omdat  $e_{ij} = e_{ji}$  is het linkerlid gelijk aan nul, en daar:

$$p_i^{(2)} p_i^{(3)} = p_i^{(2)} p_i^{(2)*} \neq 0 ,$$

$$\text{moet:} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_2^* . \quad (1.76)$$

Dit is onmogelijk voor een complex getal. Dus moet  $\lambda_2$  reëel zijn.

We hebben hiermee dus bewezen, dat de drie  $\lambda$ 's reëel zijn. Bovendien geldt, dat als de drie  $\lambda_k$ 's ongelijk zijn, de  $p_i^{(k)}$ 's loodrecht op elkaar staan.

Stel:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Uit:

$$\begin{aligned} e_{ij} p_j^{(1)} &= \lambda_1 p_i^{(1)} \quad , \\ e_{ij} p_j^{(2)} &= \lambda_2 p_i^{(2)} \quad , \end{aligned} \quad (1.77)$$

volgt:

$$e_{ij} [p_j^{(1)} p_i^{(2)} - p_j^{(2)} p_i^{(1)}] = 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) p_i^{(1)} p_i^{(2)} . \quad (1.78)$$

Omdat  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  moet:

$$p_i^{(1)} p_i^{(2)} = 0 \quad , \quad (1.79)$$

waaruit de loodrechte stand volgt.

Als twee of drie  $\lambda_k$ 's gelijk zijn, kunnen we niet zonder meer tot de loodrechte stand concluderen. Aan de vergelijkingen (1.77) voldoet nu iedere lineaire combinatie van  $p_i^{(1)}$  en  $p_i^{(2)}$ :

$$p_i = p_i^{(1)} + \alpha p_i^{(2)}, \quad (1.80)$$

met  $\alpha$  reëel en willekeurig, maar zó dat:

$$p_i p_i = 1.$$

De determinant (1.74) heeft uitgeschreven de vorm:

$$\lambda^3 - \theta_1 \lambda^2 + \theta_2 \lambda - \theta_3 = 0, \quad (1.81)$$

waarin:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e_{kk} \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} e_{ijk} e_{ist} e_{js} e_{kt} \\ \theta_3 &= \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{rst} e_{ir} e_{js} e_{kt}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

of in hoofdtrekken geschreven:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \theta_2 &= \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 \\ \theta_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Aangezien de hoofdtrekken onafhankelijk zijn van de keuze van het assenstelsel, verandert (1.81) niet bij rotatie van dit stelsel. Hieruit volgt dat  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  en  $\theta_3$  onafhankelijk zijn van de keuze van het assenstelsel, dus invariant. U kunt dit ook direct bewijzen door substitutie.

De fysische betekenis van  $\theta_1$  is eenvoudig te zien. Neem een parallellepipedum met de zijden  $l_1$ ,  $l_2$  en  $l_3$  evenwijdig aan de hoofdassen. Na de deformatie worden de lengtes:  $l_1(1 + \lambda_1)$ ,  $l_2(1 + \lambda_2)$ ,  $l_3(1 + \lambda_3)$ .

De volumeverandering is dus:

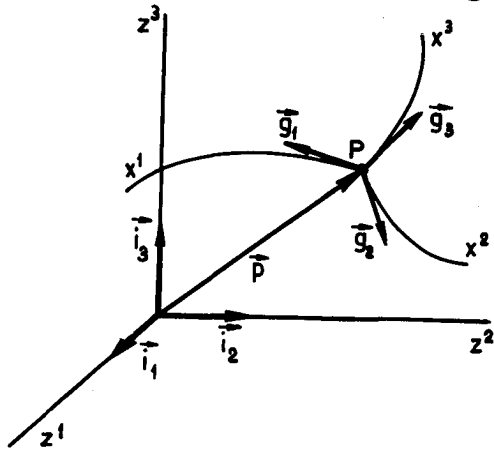
$$\begin{aligned} \Delta V &= l_1 l_2 l_3 (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - l_1 l_2 l_3 \approx \\ &\approx l_1 l_2 l_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\theta_1 = \frac{\Delta V}{V} = \underline{\text{relatieve volumeverandering}}. \quad (1.84)$$

### I.5. Kromlijnige coördinaten.

Voor de praktische oplossing van problemen is het dikwijls gemakkelijker om over te gaan van cartesische coördinaten op kromlijnige coördinaten. Om deze transformaties te kunnen uitvoeren, hebben we enige elementaire begrippen uit de tensorrekening nodig.



$z^1, z^2, z^3$ : cartesisch coördinatenstelsel.

$x^1, x^2, x^3$ : kromlijnige coördinatenstelsel (niet noodzakelijk orthogonaal).

We nemen aan dat de transformatie:

$$x^k = x^k(z^1, z^2, z^3),$$

omkeerbaar is:

$$z^k = z^k(x^1, x^2, x^3).$$

Dan moet de Jacobiaan:

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \neq 0. \quad (1.85)$$

We voeren hier een iets andere sommatie - conventie in: we zullen alleen nog sommeren over gelijke onder- en boven-indices.

$\vec{i}_k$  en  $\vec{g}_k$  zijn de basisvectoren van resp. het  $x$ - en het  $z$ -stelsel. Dus:

$$\vec{p} = z^m \vec{i}_m. \quad (1.86)$$

Dan:

$$\vec{g}_k = \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \vec{i}_m \quad (1.87)$$

(1.87) vermenigvuldigen met  $\frac{\partial x^k}{\partial z^n}$  geeft:

$$\frac{\partial x^k}{\partial z^n} \cdot \vec{g}_k = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial z^n} \vec{i}_m = \delta_n^m \vec{i}_m = \vec{i}_n.$$

Dus: 
$$\vec{i}_m = \frac{\partial x^k}{\partial z^m} \vec{g}_k. \quad (1.88)$$

We definiëren de metrische tensor  $g_{kl}$  door:

$$g_{kl} := \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial z^m}{\partial x^l} \vec{i}_m \cdot \vec{i}_n = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^m}{\partial x^l} \quad , \quad (1.89)$$

want:

$$\vec{i}_m \cdot \vec{i}_n = \delta_{mn}. \quad (1.90)$$

Dan is:

$$d\vec{p} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^k} dx^k = \vec{e}_k dx^k \quad , \quad (1.91)$$

en:

$$d\vec{p} \cdot d\vec{p} = dl^2 = g_{kl} dx^k dx^l. \quad (1.92)$$

De reciproke basisvectoren:  $\vec{g}^k$  worden gedefinieerd door:

$$\vec{g}^k \cdot \vec{e}_l = \delta_l^k \quad , \quad (1.93)$$

en de reciproke metrische tensor  $g^{kl}$ :

$$\vec{g}^k \cdot \vec{g}^l = g^{kl}. \quad (1.94)$$

Dan is:

$$\vec{g}^k = g^{kl} \vec{e}_l. \quad (1.95)$$

We beschouwen nu een willekeurige vector  $\vec{v}$ . We kunnen deze schrijven als:

$$\vec{v} = v^k \vec{e}_k = v_k \vec{g}^k. \quad (1.96)$$

Hiermee hebben we gedefinieerd:

$v^k$ : contra-variante componenten van  $\vec{v}$ .

$v_k$ : co-variante componenten van  $\vec{v}$ .

Door middel van de metrische tensor kunnen we van de ene soort op de andere overgaan. Immers:

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_l = v^k \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = v_k \vec{g}^k \cdot \vec{e}_l = v_k \delta_l^k = v_l.$$

$$\text{Dus:} \quad v_l = g_{kl} v^k. \quad (1.97)$$

Analoog:

$$v^k = g^{kl} v_l. \quad (1.98)$$

We gaan nu het ene kromlijngige coördinatenstelsel  $x^l$  transformeren in een ander  $\bar{x}^k$ .

Dan geldt:

$$\frac{\bar{dx}^{-k}}{\partial x^1} = \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^1} dx^1. \quad (1.99)$$

We krijgen hier alleen een relatie tussen differentiaal van  $x^1$ , omdat:

$\frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^1}$  van punt tot punt verschillend is. Dit in tegenstelling tot transformaties van een cartesisch stelsel in een ander cartesisch stelsel, waarvoor geldt:

$$\bar{z}_i = l_{ij} z_j \quad (l_{ij} \text{ constant}).$$

We definiëren nu een tensor als een grootte die zich transformeert volgens:

a. tensor van 1e orde:

$$\bar{v}^{-k} = \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^m} v^m, \quad (1.100)$$

b. tensor van 2e orde:

$$\bar{A}^{-kl} = \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^{-l}}{\partial x^n} A^{mn}, \quad (1.101)$$

en analoog voor hogere orde tensoren.

Voor de covariante componenten van een tensor geldt:

$$\bar{A}_{kl} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{-l}} A_{mn}, \quad (1.102)$$

en voor gemengde componenten:

$$\bar{A}^{-k}_{.l} = \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{-l}} A^m_{.n}. \quad (1.103)$$

De moeilijkheid bij kromlijnige coördinaten, t.o.v. cartesische coördinaten, is gelegen in het feit dat de basisvectoren van punt tot punt verschillend zijn. Dit komt tot uiting bij het differentieren van vectoren en tensoren.

Stel:

$$\vec{u} = u^m \vec{e}_m,$$

dan:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (u^m \vec{e}_m) = \frac{\partial u^m}{\partial x^k} \vec{e}_m + u^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^k}. \quad (1.104)$$

Cartesisch geldt:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} = \frac{\partial u^m}{\partial x^k} \vec{i}_m.$$



Nu is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^1} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial^2 z^m}{\partial x^1 \partial x^k} \vec{i}_m = \\ &= \frac{\partial^2 z^m}{\partial x^1 \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial z^m} \vec{e}_n =: \{ \begin{smallmatrix} n \\ k \ 1 \end{smallmatrix} \} \vec{e}_n. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Hierbij hebben we gedefinieerd:

$$\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \ 1 \end{smallmatrix} \} = \{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \ k \end{smallmatrix} \} := \frac{\partial^2 z^m}{\partial x^1 \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial z^m} : \text{Christoffelsymbolen van de tweede soort.} \quad (1.106)$$

Hiermee geldt dus:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} = \left[ \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ 1 \end{smallmatrix} \} u^1 \right] \vec{e}_m. \quad (1.107)$$

Definitie:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} =: u^m |_{k} \vec{e}_m, \quad (1.108)$$

met:

$$u^m |_{k} : \text{covariante afgeleide van } u^m \text{ t.o.v. } \vec{e}_m.$$

Uit (1.107) en (1.108) volgt dan:

$$\left\| u^m |_{k} = \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ 1 \end{smallmatrix} \} u^1 \right. \quad (1.109)$$

Voor het bepalen van de Christoffelsymbolen van de 2e soort is het dikwijls gemakkelijk om eerst de zg. Christoffelsymbolen van de 1e soort ( $[kl, m]$  of  $\Gamma_{mkl}$ ) te bepalen. Deze zijn gedefinieerd als:

$$[kl, m] := g_{mn} \{ \begin{smallmatrix} n \\ k \ 1 \end{smallmatrix} \}. \quad (1.110)$$

Dit kunnen we weer schrijven als:

$$\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ 1 \end{smallmatrix} \} = g^{mn} [kl, n]. \quad (1.111)$$

We zullen bewijzen dat:

$$[kl, m] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{km}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (1.112)$$

bewijs:

Volgens de definitie (1.10) en (1.89) en (1.106) is

$$[kl, m] = \frac{\partial z^p}{\partial x^m} \frac{\partial z^p}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^k \partial x^1} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial z^q} = \frac{\partial z^p}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^k \partial x^1} \cdot \frac{\partial z^p}{\partial z^q} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial z^q}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^k \partial x^l} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^l} \left[ \frac{\partial z^q}{\partial x^m} \frac{\partial z^q}{\partial x^k} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial z^q}{\partial x^k} \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^m \partial x^l} + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ \frac{\partial z^q}{\partial x^m} \frac{\partial z^q}{\partial x^l} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial z^q}{\partial x^l} \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^m \partial x^k} = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).
\end{aligned}$$

Belangrijk:

$$\frac{\partial u^m}{\partial x^k} \text{ is } \underline{\text{geen}} \text{ tensor.}$$

Dit is te zien door te transformeren van  $x_k \rightarrow \bar{x}_k$ .

Dan gaat:

$$u_k \rightarrow \bar{u}_k = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k} u^m.$$

Door:  $\frac{\partial \bar{u}^m}{\partial \bar{x}^k}$  uit te werken, blijkt dat deze zich niet als een tensor transformeert naar  $\frac{\partial u^m}{\partial x^k}$ .

Maar:

$$u^m |_{\bar{k}} \text{ is } \underline{\text{wel}} \text{ een tensor.}$$

In een cartesisch stelsel geldt voor de deformatie:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \equiv \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}), \quad (1.113)$$

want in een cartesisch stelsel is covariant differentieren hetzelfde als partieel differentieren. (de Cristoffelsymbolen zijn dan immers nul.)

Als we nu transformeren van een cartesisch stelsel op een kromlijng stelsel:

$$u_i \rightarrow \bar{u}_i, \quad e_{ij} \rightarrow \bar{e}_{ij},$$

dan geldt, omdat de  $u^m |_{\bar{k}}$  zich transformeert als een tensor:

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i|j} + \bar{u}_{j|i}). \quad (1.114)$$

Deze procedure geldt algemeen. We kunnen dus stellen:

De vergelijkingen welke in een cartesisch assenstelsel gelden, gelden ook in een kromlijng assenstelsel, mits we de partiele afgeleiden vervangen door covariante afgeleiden.

Voorbeeld: transformatie van de verplaatsingen en de deformatietensor van een cartesisch stelsel  $(z^1, z^2, z^3)$  op cilindercoördinaten  $(x^1, x^2, x^3 = r, \theta, z)$ .  
Voor een lijnelement  $ds$  geldt:

$$ds^2 = dz^i dz^i = g_{kl} dx^k dx^l = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 + (dx^3)^2 =$$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad . \quad (1.115)$$

Dus de matrix  $\|g_{kl}\|$  wordt:

$$\|g_{kl}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad . \quad (1.116)$$

Uit  $g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m$  vinden we:

$$\|g^{lm}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad . \quad (1.117)$$

Met formule (1.112) krijgen we hieruit:

$$\begin{aligned} [12,2] &= [21,2] = x^1 \quad , \\ [22,1] &= -x^1 \quad , \end{aligned} \quad (1.118)$$

alle overige  $[kl,m]$  zijn nul.

Dit geeft met (1.111):

$$\begin{aligned} \{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \} &= \{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \} = \frac{1}{x^1} \quad , \\ \{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \} &= -x^1 \quad , \end{aligned} \quad (1.119)$$

overige  $\{ \begin{matrix} k \\ 1 \end{matrix} \}$  nul.

Dit leidt dan tot het volgende resultaat:

$$\left. \begin{aligned} u^1|_1 &= \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \quad , \\ u^1|_2 &= \frac{\partial u^1}{\partial x^2} - x^1 u_2 \quad , \\ u^1|_3 &= \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \quad , \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 u^2|_1 &= \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{u^2}{x^1} , \\
 u^2|_2 &= \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{u^1}{x^1} , \\
 u^2|_3 &= \frac{\partial u^2}{\partial x^3} , \\
 u^3|_k &= \frac{\partial u^3}{\partial x^k} , \quad (k=1,2,3) .
 \end{aligned}
 \tag{1.120}$$

### Fysische Componenten

In een cartesisch stelsel hebben de coördinaten  $z^i$  en de verplaatsingen  $u^i$  beide de dimensie van een lengte (L). Dus is  $u^i_{,j}$  dimensieloos.

Bij kromlijnige coördinaten hoeven de coördinaten echter niet alleen dezelfde dimensie te hebben.

Bij cilindercoördinaten is bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
 [x^1] &= [x^3] = L , \quad ([a] := \text{dimensie van } a) \\
 [x^2] &= 1 .
 \end{aligned}$$

In dit geval zullen dus ook de dimensies van  $u^i|_k$  verschillen. Ook de dimensies van  $u^i$  hoeven niet gelijk te zijn.

De oorzaak van deze moeilijkheden is gelegen in het feit dat de basisvectoren niet altijd dimensieloos zijn, immers:

$$\vec{g}^k = \left[ \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^k} \right] = \frac{L}{[x^k]} . \tag{1.121}$$

Bij cilindercoördinaten is dus:

$$[\vec{g}^1] = [\vec{g}^3] = 1 , \quad \text{maar: } [\vec{g}^2] = L .$$

We voeren daarom in de dimensieloze eenheidsvectoren:

$$\vec{e}_k := \frac{\vec{g}^k}{\sqrt{\epsilon_{kk}}} . \tag{1.122}$$

Een streep onder een indices geeft aan dat we niet over deze indices mogen sommeren.

Het nadeel van de  $e_k$ 's is, dat zij zich niet als een vector transformeren.

We kunnen nu een vector  $\vec{u}$  ook ontbinden langs  $e_k$ . We krijgen dan:

$$\vec{u} = u^m \vec{e}_m = \sum_{m=1}^3 u^{(m)} \vec{e}_m = \sum_{m=1}^3 u^{(m)} \frac{\vec{e}^m}{\sqrt{g_{mm}}} \quad (1.123)$$

We noemen de componenten  $u^{(m)}$  de fysische componenten van de vector  $\vec{u}$ . Deze componenten hebben wél dezelfde dimensie als  $\vec{u}$ .

Uit (1.123) volgt direct:

$$u^{(k)} = u^k \sqrt{g_{kk}} \quad , \quad (1.124)$$

of

$$u^k = \frac{u^{(k)}}{\sqrt{g_{kk}}} \quad . \quad (1.125)$$

Op analoge wijze kunnen we de fysische componenten van een tensor definiëren. Voor de deformatietensor krijgen we bijvoorbeeld:

$$e^{(ij)} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \quad . \quad (1.126)$$

Als we dit toepassen op cilindercoördinaten krijgen we voor de fysische componenten van de deformatietensor (dimensie: 1):

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad , \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad , \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad , \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad , \\ e_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \quad , \\ e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad . \end{aligned} \right\} \quad (1.127)$$

Hierin zijn  $u_r$ ,  $u_\theta$  en  $u_z$  de fysische componenten (dimensie: L) van de verplaat-

singsvector  $\vec{u}$ . Het zijn dus de echte verplaatsingen in  $r$ ,  $\theta$  en  $z$ -richting.

Een praktisch belangrijk voorbeeld, is de zg. rotatie-symmetrische toestand.

In dit geval zijn:

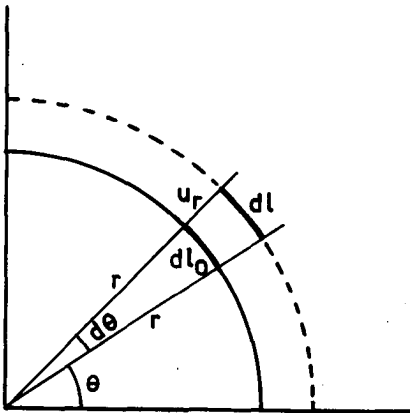
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = u_{\theta} = 0 \quad .$$

Uit (1.127) volgt dan:

$$e_{\theta z} = e_{r\theta} = 0 \quad ,$$

maar

$$e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \neq 0 \quad . \quad (1.128)$$



Deze laatste relatie is ook gemakkelijk aanschouwelijk af te leiden. We beschouwen daartoe een cirkelvormig stukje  $dl_0$ :

$$dl_0 = r d\theta \quad ,$$

welke na deformatie (rotatie-symmetrie) overgaat in:

$$dl = (r + u_r) d\theta \quad .$$

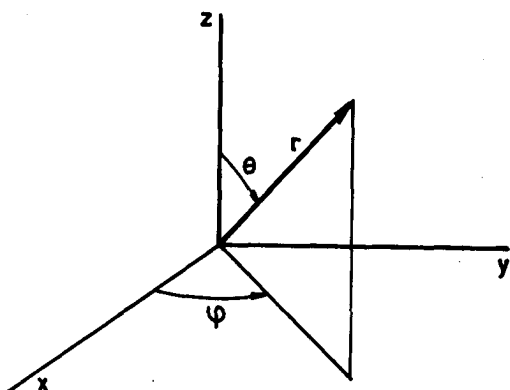
Dan is

$$\Delta l = (dl - dl_0) = u_r d\theta \quad .$$

Dus:

$$e_{\theta\theta} = \frac{\Delta l}{dl} \approx \frac{\Delta l}{r d\theta} = \frac{u_r d\theta}{r d\theta} = \frac{u_r}{r} \quad . \quad (1.129)$$

### Bolcoördinaten:



$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad ,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad ,$$

$$z = r \cos \theta \quad .$$

Dan:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad .$$

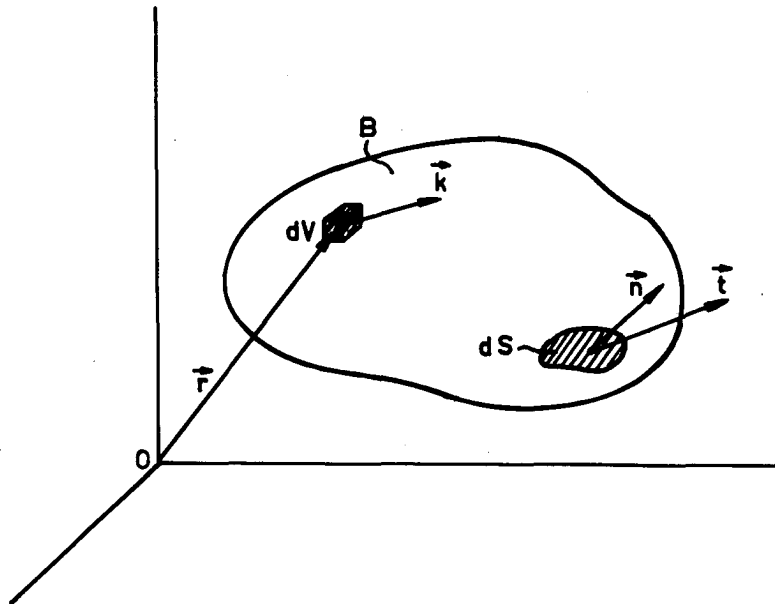
Leidt zelf af, dat voor de fysische compo-

nenten van de deformatietensor geldt:

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} , \\
 e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} , \\
 e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \cotg \theta + \frac{u_r}{r} , \\
 e_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cotg \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} , \\
 e_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} , \\
 e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} .
 \end{aligned}
 \tag{1.130}$$

## II. Spanningsleer

### II.1. De spanningstensor



Op een continu lichaam B kunnen de volgende twee soorten krachten werken:

i) Volumekrachten ( $\vec{k}$ ). Deze grijpen aan in ieder volume-element van het continuum B. De kracht op een volume-element  $dV$  is:  $\vec{k}dV$  ( $\vec{k}$  is de krachtdichtheid). De totale volumekracht werkend op B is:

$$\vec{K} = \int_V \vec{k}dV \quad , \quad (V: \text{volume van B}) \quad . \quad (2.01)$$

Voor de momentdichtheid van  $\vec{k}$  t.o.v. O krijgen we:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{k} \quad ,$$

en het totale moment om O ten gevolge van de volumekrachten is dus:

$$\vec{M} = \int_V \vec{m}dV = \int_V (\vec{r} \times \vec{k})dV \quad . \quad (2.02)$$

ii) Oppervlaktekrachten ( $\vec{t}$ ).

We noemen de kracht, welke op een oppervlakte-elementje  $dS$  van B werkt:

$$\vec{t}dS \quad , \quad (\vec{t}: \text{spanningsvector}) \quad .$$

De totale oppervlaktekracht wordt dan:

$$\vec{T} = \int_S \vec{t}dS \quad , \quad (S: \text{rand van B}) \quad . \quad (2.03)$$



Het spreekt vanzelf dat in het algemeen de spanningsvector  $\vec{t}$  en de eenheidsnormaalvector  $\vec{n}$  van het oppervlakte-element  $dS$ , welke loodrecht op  $dS$  staat en naar buiten is gericht, niet dezelfde richting hebben. Indien de componenten van  $\vec{t}$  zijn  $t_i$  en van  $\vec{n}$  :  $n_i$ , voeren we de spanningstensor  $t_{ij}$  in door:

$$t_i = t_{ij} n_j \quad . \quad (2.04)$$

Deze spanningstensor heeft negen componenten ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

We bewijzen allereerst, dat de ingevoerde  $t_{ij}$  inderdaad een tensor is. Hiertoe beschouwen we een draaiing van het cartesische assenstelsel  $x$  naar  $\bar{x}$ .

Aangezien het inwendig product:  $(\vec{t}, \vec{n}) = t_k n_k$  een skalaair is, is dit invariant t.a.v. draaiing van een cartesisch assenstelsel. Omdat  $\vec{n}$  een vector is, geldt verder:

$$\bar{n}_k = l_{ki} n_i \quad .$$

Dus krijgen we:

$$\bar{t}_{kl} \bar{n}_k \bar{n}_l = t_{ij} n_i n_j \quad , \quad (2.05)$$

en

$$\bar{t}_{kl} \bar{n}_k \bar{n}_l = \bar{t}_{kl} l_{ki} n_i l_{lj} n_j = l_{ki} l_{lj} \bar{t}_{kl} n_i n_j \quad . \quad (2.06)$$

Vergelijken van (2.05) en (2.06) geeft dan:

$$t_{ij} = l_{ki} l_{lj} \bar{t}_{kl} \quad , \quad (2.07)$$

dus  $t_{ij}$  transformeert zich als een tensor.

Vervolgens gaan we de fysische betekenis na van de in (2.04) wiskundig formeel gedefinieerde spanningstensor. Daartoe leggen we  $\vec{n}$  in de richting van de positieve  $x$ -as. Formule (2.04) wordt dan:

$$t_x = t_{xx} \quad , \quad t_y = t_{yx} \quad , \quad t_z = t_{zx} \quad . \quad (2.08)$$

Als  $\vec{n}$  in de positieve  $y$ -richting ligt zijn de spanningsvector-componenten:

$$t_x = t_{xy} \quad , \quad t_y = t_{yy} \quad , \quad t_z = t_{zy} \quad , \quad (2.09)$$

en idem in de positieve  $z$ -richting:

$$t_x = t_{xz} \quad , \quad t_y = t_{yz} \quad , \quad t_z = t_{zz} \quad . \quad (2.10)$$

Hieruit kunnen we concluderen dat  $t_{ij}$  is de spanning op het  $x_j$ -vlak (d.i. het vlak  $\perp x_j$ -as), werkend in de  $x_i$ -richting.

De componenten:  $t_{xx}$ ,  $t_{yy}$ ,  $t_{zz}$  heten normaalspanningen. In de technische literatuur worden ze dikwijls aangegeven met:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ .

De andere componenten,  $t_{xy}$  etc., heten schuifspanningen.

Let op, dat bij een eenheidsvector met negatieve componenten de richtingen van de componenten van de spanningsvector omkeren.

De door (2.04) ingevoerde spanningstensor heeft uitsluitend betrekking op het buitenoppervlak van het lichaam. We breiden onze beschouwingen nu uit. Wordt een lichaam door uitwendige krachten belast en snijdt men het lichaam denkbeeldig door, dan oefenen de twee gedeelten gelijke en tegengestelde krachten op elkaar uit. Dit geldt niet alleen voor de resulterende krachten, doch ook voor de in het snedevlak werkende spanningen, de krachten per eenheid van oppervlak, gedefinieerd door (2.04). Dus de spanningstensor kan in ieder punt van het lichaam worden gedefinieerd. (Deze abstractie is bedacht door Cauchy in 1822.)

## II.2. Hoofdspinningen en Hoofdrichtingen

De spanningstensor behoeft niet symmetrisch te zijn, maar is dit meestal wel. We beschouwen in deze paragraaf alleen symmetrische spanningstensen:

$$t_{ij} = t_{ji}.$$

We definiëren nu de hoofdspinningen, als zijnde de spanningen behorende bij de (hoofd-)richtingen, waarbij de spanningsvector loodrecht staat op het vlakje, waarop hij werkt. We hebben dan:

$$t_i = t_{ij} n_j = \lambda n_i \quad . \quad (2.11)$$

Omdat  $t_{ij} = t_{ji}$  zijn er steeds minstens drie reële hoofdrichtingen (en -spanningen), welke loodrecht op elkaar staan. Het bewijs is analoog aan dat bij de deformaties.

De hoofdspinningen zijn de oplossingen van:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad . \quad (2.12)$$

De  $I$ 's zijn de spanningsinvarianten:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= t_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad , \\ I_2 &= e_{ijk} e_{ist} t_{js} t_{kt} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \quad , \\ I_3 &= e_{ijk} e_{rst} t_{ir} t_{js} t_{kt} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad . \end{aligned} \right\} \quad . \quad (2.13)$$

$\sigma_k$  is de  $k$ -de hoofdspinning.

Voor de eerste invariant geldt:

$$-\frac{1}{3} I_1 = \text{hydrostatische druk} .$$

De tweede invariant is van belang in de plasticiteitstheorie.

### III. Dynamica van het elastische lichaam

#### III.1. De impulsstelling

De spanningen in een lichaam zijn niet onafhankelijk, er zijn betrekkingen tussen.

De totale kracht, welke op een deel van B met volume V werkt is

$$\vec{R} = \int_V \vec{k} dV + \int_S \vec{t} dS \quad . \quad (3.01)$$

De hoeveelheid van beweging (impuls) is:

$$\vec{p} = \int_V \rho \vec{v} dV \quad . \quad (3.02)$$

Hierin is  $\vec{v}$  de snelheid van een massa-elementje van V en  $\rho$  de massa-dichtheid.

Als we even aannemen dat (het bewijs van deze bewering volgt verderop):

$$\dot{\vec{p}} = \int_V \rho \dot{\vec{v}} dV \quad , \quad (3.03)$$

dan volgt uit:  $\vec{R} = \dot{\vec{p}}$ :

$$\int_V \vec{k} dV + \int_S \vec{t} dS = \int_V \rho \dot{\vec{v}} dV \quad ,$$

of

$$\int_V k_i dV + \int_S t_i dS = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad . \quad (3.04)$$

Met (2.04) en met de stelling van Gauss krijgen we:

$$\int_S t_i dS = \int_S t_{ij} n_j dS = \int_V t_{ij,j} dV \quad . \quad (3.05)$$

Aangezien (3.04) geldt voor ieder willekeurig volume V krijgen we uit (3.04) en (3.05):

$$t_{ij,j} + k_i = \rho \dot{v}_i \quad . \quad (3.06)$$

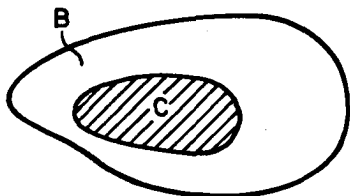
Vergelijkingen (3.06) zijn de lokale bewegingsvergelijkingen. In het geval van evenwicht is  $\dot{v}_i = 0$ . Dan geeft:

$$t_{ij,j} + k_i = 0 \quad , \quad (3.07)$$

de basisvergelijkingen van de elastostatica.

Bewijs van van (3.03)

We beschouwen een deel C van het lichaam B, dat op het tijdstip t een volume V heeft. We blijven kijken naar dit deel C. Dan zal dus tijdens de beweging de totale massa van C gelijk blijven, maar het volume van C zal door de deformatie veranderen (en dus ook  $\rho$ ).

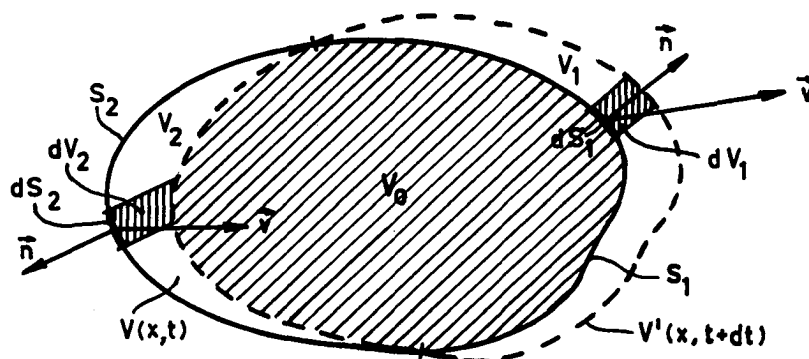


Stel:

$$I = \int_V a(x,t) dV \quad , \quad (a: \text{willekeurige grootheid}) \quad . \quad (3.08)$$

Gevraagd, wat is dan:  $\dot{I}$ , wanneer  $I$  gedefinieerd wordt op de meebewegende massa.

We beschouwen C op de tijdstippen t en (t+dt). Het volume op t is V en op (t+dt) : V'. Als dt klein is, zal ook het verschil tussen V en V' klein zijn.



Nu is:

$$dI = \dot{I} dt = \int_{V'} a(x,t+dt) dV' - \int_V a(x,t) dV \quad . \quad (3.09)$$

We noemen  $V_0$  de doorsnede van V en V' en:

$$V_1 := V' - V_0 \quad , \quad V_2 := V - V_0 \quad .$$

Dan wordt (3.09):

$$\begin{aligned} dI &= \int_{V_0} [a(x, t+dt) - a(x, t)] dV_0 + \int_{V_1} a(x, t+dt) dV_1 - \int_{V_2} a(x, t) dV_2 = \\ &= dt \int_{V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV_0 + \int_{V_1} a(x, t+dt) dV_1 - \int_{V_2} a(x, t) dV_2 \quad . \quad (3.10) \end{aligned}$$

We gaan de twee laatste integralen nog iets nader uitwerken. We beschouwen daartoe een oppervlakte-element  $dS_1$  van de gemeenschappelijke rand van  $V$  en  $V_1$  ( $= S_1$ ). We noemen  $\vec{v}$  de snelheid van  $dS_1$ . We verdelen dan  $V_1$  in volume-elementen  $dV_1$ :

$$dV_1 = (\vec{v}, \vec{n}) dS_1 dt \quad . \quad (3.11)$$

(Bedenk dat op  $S_1$ :  $\vec{v}$  en  $\vec{n}$  naar buiten gericht zijn, dus  $(\vec{v}, \vec{n}) \geq 0$ .)

Hiermee krijgen we:

$$\begin{aligned} \int_{V_1} a(x, t+dt) dV_1 &= dt \int_{S_1} a(x, t+dt) (\vec{v}, \vec{n}) dS = \\ &= dt \int_{S_1} a(x, t) (\vec{v}, \vec{n}) dt + O(dt^2) \quad . \quad (3.12) \end{aligned}$$

Hetzelfde doen we op  $S_2$  (d.i. de gemeenschappelijke rand van  $V$  en  $V_2$ ). Hier is echter:  $(\vec{v}, \vec{n}) \leq 0$  zodat:

$$dV_2 = - (\vec{v}, \vec{n}) dS_2 dt \quad (3.13)$$

en dus

$$-\int_{V_2} a(x, t) dV_2 = dt \int_{S_2} a(x, t) (\vec{v}, \vec{n}) dS \quad . \quad (3.14)$$

Door substitutie van (3.13) en (3.14) in (3.10) en met:  $S = S_1 + S_2$ , vinden we

$$dI = \dot{I} dt = dt \left[ \int_{V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV_0 + \int_S a(\vec{v}, \vec{n}) dS \right] + O(dt^2) \quad . \quad (3.15)$$

Nu is:

$$\int_{V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV_0 = \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV - \int_{V-V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV + o(dt) \quad (3.16)$$

want:

$$\left| \int_{V-V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV \right| \leq k(V-V_0) = o(dt) \quad , \quad (k = \max_{(V-V_0)} \left| \frac{\partial a}{\partial t} \right|) \quad .$$

Met de stelling van Gauss kunnen we afleiden:

$$\int_S \mathbf{a}(\vec{n}, \vec{v}) dS = \int_S a v_k n_k dS = \int_V (a v_k)_{,k} dV \quad . \quad (3.17)$$

Met (3.16) en (3.17) wordt (3.15):

$$\begin{aligned} dI &= \dot{I} dt = dt \int_V \left[ \frac{\partial a}{\partial t} + (a v_k)_{,k} \right] dV + o(dt^2) = \\ &= dt \int_V \left[ \frac{\partial a}{\partial t} + a_{,k} v_k + a v_{k,k} \right] dV + o(dt^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.18)$$

We definiëren nu de materiële afgeleide:

$$\dot{a} := \frac{\partial a}{\partial t} + a_{,k} v_k = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x_k} v_k \quad . \quad (3.19)$$

En hiermee geeft (3.18):

$$\dot{I} = \int_V [\dot{a} + a v_{k,k}] dV \quad . \quad (3.20)$$

We gaan dit toepassen op de totale massa:

$$M = \int_V \rho dV \quad .$$

Nu moet bij meebewegende massa:

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad . \quad (3.21)$$

Hiervoor geeft (3.20): ( $a = \rho$ )

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} v_k + \rho v_{k,k} = 0 \quad (3.22)$$

Dit is de zg. Continuïteitsvergelijking.

Nemen we:  $a = \rho \vec{v}$  dan geeft (3.20) en (3.02):

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V [(\rho v_i)^\cdot + \rho v_i v_{k,k}] dV = \\ &= \int_V [\rho \dot{v}_i + (\dot{\rho} + \rho v_{k,k}) v_i] dV = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad (3.23) \end{aligned}$$

Bij de laatste regel is gebruik gemaakt van (3.22).

We hebben dus gevonden:

$$\dot{p}_i = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad , \quad (3.24)$$

waarbij volgens (3.19):

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \quad (3.25)$$

Tot zover geldt alles wat we hier afgeleid hebben algemeen. In de lineaire theorie geldt echter:

$$|v_{i,k}| \ll 1 \quad .$$

En dus wordt in de lineaire theorie:

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad , \quad (3.26)$$

en:

$$\dot{p}_i = \int_V \rho \dot{v}_i dV = \int_V \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} dV \quad , \quad (3.27)$$

waarmee (3.03) bewezen is.

In algemene kromlijnige coördinaten luiden de evenwichtsvergelijkingen (3.07):

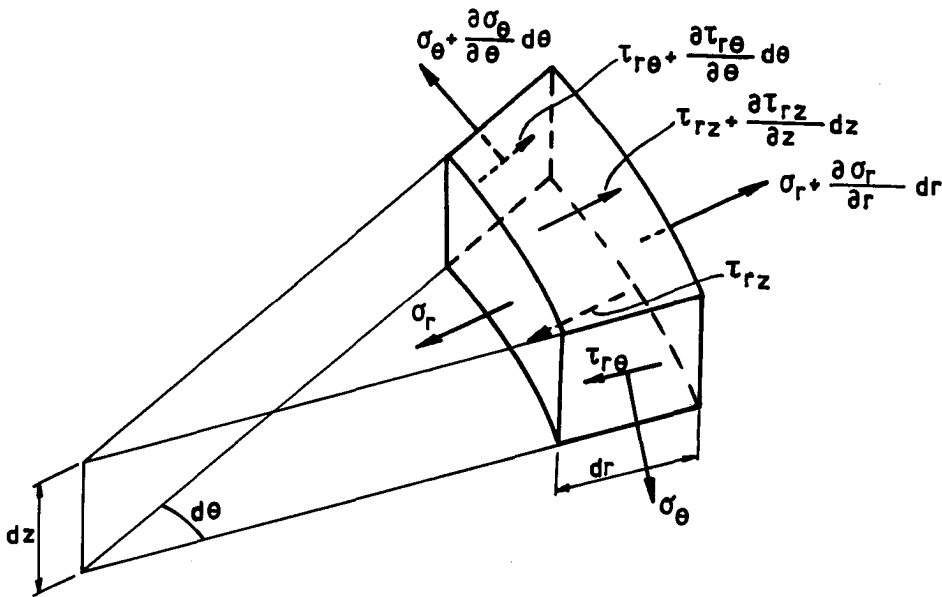
$$t_{ij|j} + k_i = 0 \quad (3.28)$$

Voor cilindercoördinaten geeft dit, bij afwezigheid van volumekrachten:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zz}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

We zullen de eerste van deze vergelijkingen ook op een aanschouwelijke manier afleiden. De andere twee gaan analoog.



We bekijken hiertoe een volumestukje  $dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$  met alleen die spanningen welke een component in de  $r$ -richting hebben. De som van alle krachten in de  $r$ -richting moet nul zijn:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - \tau_{r\theta} \cos\left(\frac{1}{2} d\theta\right) dr dz + \\ & + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) \cos\left(\frac{1}{2} d\theta\right) dr dz - \sigma_\theta \sin\left(\frac{1}{2} d\theta\right) dr dz + \\ & - \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \sin\left(\frac{1}{2} d\theta\right) dr dz - \tau_{rz} r d\theta dr + \left( \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr = 0. \end{aligned}$$

Als we deze vergelijking delen door:  $r dr d\theta dz$ , vinden we voor een infinitesimaal volume-element de eerste vergelijking van (3.29).

### III.2. De momentenstelling

We gaan uit van de fundamentele hypothese, dat voor ieder volume-element van een elastisch lichaam geldt de momentenstelling:

$$\vec{M} = \dot{\vec{D}} ,$$

om een vast punt 0. Hierin is  $\vec{M}$  het moment en  $\vec{D}$  het impulsmoment om 0 van het volume-element.

Dus:

$$\vec{D} = \int_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV ,$$

en

$$\vec{M} = \int_V (\vec{r} \times \vec{k}) dV + \int_S (\vec{r} \times \vec{t}) dS ,$$
(3.30)

waarbij:  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  is de radiusvector uit 0 van het volume-element  $dV$ .

In component-notatie krijgen we:

$$D_i = \int_V e_{ijk} x_j v_k \rho dV .$$
(3.31)

$e_{ijk}$  heeft de eigenschappen:

- a)  $e_{ijk} = 0$  als twee of drie indices onderling gelijk zijn.
- b)  $e_{ijk} = +1$  of  $-1$  als  $i, j, k$  een even resp. een oneven permutatie vormen.

Uit (3.31) volgt:

$$\begin{aligned} \dot{D}_i &= \int_V e_{ijk} v_j v_k \rho dV + \int_V e_{ijk} x_j \dot{v}_k \rho dV = \\ &= \int_V e_{ijk} x_j \dot{v}_k \rho dV , \end{aligned}$$
(3.32)

waarbij gebruikt is de in (III.1) afgeleide stelling en:

$$e_{ijk} = - e_{ikj} .$$
(3.33)

Voor het totale moment krijgen we:

$$M_i = \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_S e_{ijk} x_j t_k dS = \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_S e_{ijk} x_j t_k n_l dS .$$

Na toepassing van de formule van Gauss wordt dit

$$\begin{aligned}
 M_i &= \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_V (e_{ijk} x_j t_{kl})_{,l} dV = \\
 &= \int_V e_{ijk} x_j (k_k + t_{kl,l}) dV + \int_V e_{ijk} \delta_{jl} t_{kl} dV = \\
 &= \int_V e_{ijk} x_j \dot{\rho}^v_k dV + \int_V e_{ijk} t_{kj} dV \quad , \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van (3.06).

Dus geldt:

$$M_i = \dot{D}_i + \int_V e_{ijk} t_{kj} dV \quad . \quad (3.35)$$

Een aangezien  $M_i = \dot{D}_i$  moet:

$$\int_V e_{ijk} t_{kj} dV = 0 \quad , \quad (3.36)$$

voor ieder volumedeel, dus:

$$e_{ijk} t_{kj} = 0 \quad . \quad (3.37)$$

Met (3.33) volgt hieruit:

$$t_{kj} = t_{jk} \quad , \quad (3.38)$$

de symmetrie van de spanningstensor.

Let op, dat we in de formule voor het totale moment zg. volumemomentdichtheden  $m_k$  hebben verwaarloosd. Treden deze wel op, dan krijgen we een extra term in  $M_i$  gelijk aan:

$$\int_V m_i \rho dV \quad ,$$

en gaat (3.37) over in:

$$e_{ijk} t_{kj} + m_i = 0 \quad .$$

De spanningstensor is dan dus niet meer symmetrisch. We zullen ons in dit college echter beperken tot het geval:  $m_i = 0$ .

De formules (3.07) en (3.38) geven zes vergelijkingen voor negen onbekenden  $t_{ij}$ . Deze zijn dus in het algemeen onvoldoende om de  $t_{ij}$  te bepalen.

#### IV. Het verband tussen spanningen en deformaties

##### IV.1. De wet van Hooke

Zoals we hebben gezien zijn de evenwichts- of bewegingsvergelijkingen niet voldoende in aantal om de totale spanningstensor te bepalen. Daarom moeten we relaties zoeken tussen spanningen en deformaties, welke de aanvullende vergelijkingen opleveren. Er zijn afhankelijk van het materiaal tal van typen spanning- deformatie relaties. We zullen ons tot de eenvoudigste en tevens belangrijkste beperken: de algemene wet van Hooke.

Volgens deze wet is het verband tussen  $t_{ij}$  en  $e_{ij}$  lineair. Algemeen dus:

$$t_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad , \quad (4.01)$$

waarbij verondersteld is, dat de spanningen nul zijn als de deformaties nul zijn (dus geen restspanningen).

Het aantal componenten  $c_{ijkl}$  is  $3^4 = 81$ .

Echter uit:

$$t_{ij} = t_{ji} \quad \text{en} \quad e_{ij} = e_{ji} \quad ,$$

volgt:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad ; \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad . \quad (4.02)$$

Door deze beperkingen wordt het aantal gereduceerd tot:  $6 \times 6 = 36$ .

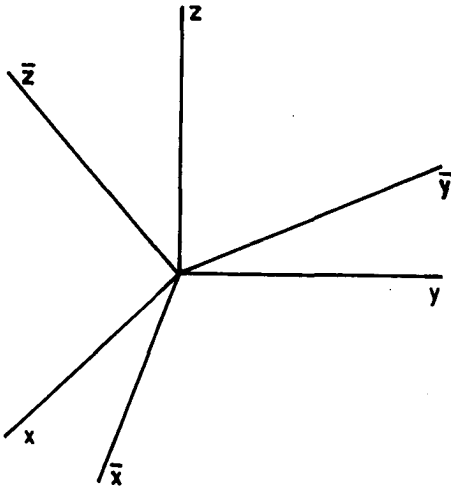
We nemen nu verder aan dat er een elastische energie bestaat. Dan blijkt:

$$e_{klmn} = e_{mnlk} \quad . \quad (4.03)$$

We komen hier verderop in het college nog op terug.

Onder voorwaarde (4.03) gaat het aantal van 36 over in 21 verschillende termen.

We beperken ons verder tot isotrope media, d.w.z. er bestaan geen voorkeurs-richtingen in het lichaam. Dus de tensor  $c_{ijkl}$  moet invariant zijn t.o.v. een starre rotatie van het assenkruis.



Bij een transformatie van

$$x_i \rightarrow \bar{x}_i ,$$

krijgen we:

$$\bar{t}_{kl} = \bar{c}_{klmn} \bar{e}_{mn} . \quad (4.04)$$

waarbij:

$$\bar{t}_{kl} = l_{ki} l_{lj} t_{ij} \text{ etc.}$$

Na enig formeel rekenwerk volgt hieruit

$$\bar{c}_{ijkl} = l_{ip} l_{jq} l_{kr} l_{ls} c_{pqrs} . \quad (4.05)$$

We noemen een vierde orde tensor  $\mathbb{T}_{ijkl}$  isotroop, indien

$$\bar{\mathbb{T}}_{klmn} = \mathbb{T}_{klmn} . \quad (4.06)$$

Een voorbeeld van een isotrope 4<sup>e</sup> orde tensor is:

$$\mathbb{T}_{ijkl}^{(1)} = \delta_{ij} \delta_{kl} , \quad (4.07)$$

want:

$$\bar{\mathbb{T}}_{ijkl}^{(1)} = l_{ip} l_{jq} l_{kr} l_{ls} \delta_{pq} \delta_{rs} = l_{ip} l_{jp} l_{kr} l_{kr} = \delta_{ij} \delta_{kl} .$$

Andere zijn:

$$\mathbb{T}_{ijkl}^{(2)} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \text{en} \quad \mathbb{T}_{ijkl}^{(3)} = \delta_{il} \delta_{kj} . \quad (4.08)$$

Nu geldt de volgende stelling:

Er bestaan slechts drie onafhankelijke isotrope 4<sup>e</sup> orde tensoren (zonder bewijs).

Maar omdat tevens:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad \text{en} \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} ,$$

kunnen we voor de isotrope tensor  $c_{ijkl}$  alleen nemen een lineaire combinatie van:

$$\delta_{ij} \delta_{kl} \quad \text{en} \quad (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) .$$

Dus:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) . \quad (4.09)$$

Als we dit substitueren in (4.01) krijgen we de isotrope vorm van de wet van Hooke:

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad . \quad (4.10)$$

De parameters  $\lambda$  en  $\mu$  zijn materiaalconstanten, die de constanten van Lamé genoemd worden.

Opmerking:

De spanning is gedefinieerd als een kracht per oppervlakte. Nu geeft het in het algemeen een verschil of men deze spanning definieert per eenheid van oorspronkelijk ( $A_0$ ) of van gedeformeerd oppervlak ( $A$ ). In de lineaire theorie is echter het verschil tussen  $A$  en  $A_0$  zeer klein, d.w.z.:

$$A = A_0 + \delta A \quad , \quad \text{met} \quad \left| \frac{\delta A}{A_0} \right| \ll 1 \quad ,$$

zodat het dan geen verschil maakt op welk oppervlak we de spanning definiëren.

Immers:

$$\frac{T}{A} = \frac{T}{(A_0 + \delta A)} = \frac{T}{A_0} \left( 1 - \frac{\delta A}{A_0} + \dots \right) \approx \frac{T}{A_0} \quad .$$

$T$ : kracht.

#### IV.2. De elasticiteitsconstanten

Naast  $\lambda$  en  $\mu$  gedefinieerd door (4.10) bestaan in de elasticiteitstheorie nog andere materiaalconstanten, zoals de elasticiteitsmodulus of Joung's modulus  $E$ , de dwarscontractiecoëfficiënt of constante van Poisson  $\nu$  en de afschuivingsmodulus  $G$ . Het spreekt vanzelf dat deze constanten niet onafhankelijk zijn en alle in elkaar kunnen worden uitgedrukt. We keren eerst vergelijking (4.10) om. We krijgen dan:

$$2\mu e_{ij} = t_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu + 3\lambda} t_{kk} \quad . \quad (4.11)$$

Bij een zuivere eenassige rek is  $t_{11} \neq 0$  en zijn alle overige spanningen nul. De elasticiteitsmodulus is nu gedefinieerd als

$$E := \frac{t_{11}}{e_{11}} \quad . \quad (4.12)$$

Uit (4.11) krijgen we dan:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad . \quad (4.13)$$

Bij deze eenassige rek is er dwarscontractie ( $e_{22}$  en  $e_{33}$  zijn niet nul). De dwarscontractiecoëfficiënt wordt nu gedefinieerd door:

$$\nu := - \frac{e_{22}}{e_{11}} = - \frac{e_{33}}{e_{11}} \quad . \quad (4.14)$$

(4.11) geeft dan weer:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad . \quad (4.15)$$

$\nu$  moet theoretisch liggen tussen de grenzen:

$$-1 < \nu < 0,5 \quad , \quad (4.16)$$

maar ligt praktisch bijna altijd tussen:

$$0 < \nu < 0,5 \quad . \quad (4.17)$$

Beschouw een zuivere afschuiving met allen  $t_{12} \neq 0$ . Dan definiëren we de afschuivingsmodulus  $G$  door:

$$G := \frac{t_{12}}{2e_{12}} \quad . \quad (4.18)$$

Uit (4.11) volgt dan:

$$G = \mu \quad . \quad (4.19)$$

Uit (4.13), (4.15) en (4.19) volgt de belangrijke relatie:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad . \quad (4.20)$$

De wet van Hooke heeft bij toepassing van  $E$ ,  $G$  en  $\nu$  de vorm:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad , \quad (\text{cyclisch}) \quad , \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad , \quad (\text{cyclisch}) \quad . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dit is de in de techniek gebruikelijke schrijfwijze van de wet van Hooke.

#### IV.3. De vergelijkingen van Navier

We bekijken alleen het geval van evenwicht en nemen aan dat er geen volumekrachten werken. We hebben dan de volgende vergelijkingen:

a) de evenwichtsvergelijkingen

$$t_{ij,j} = 0 \quad , \quad (3 \text{ vergelijkingen}) \quad , \quad (4.22)$$



b) de wet van Hooke

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad , \quad (6 \text{ vergelijkingen}) \quad , \quad (4.23)$$

c) het verband tussen verplaatsingen en deformaties

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad , \quad (6 \text{ vergelijkingen}) \quad . \quad (4.24)$$

De vergelijkingen (4.22), (4.23) en (4.24) vormen een systeem van 15 vergelijkingen met 15 onbekenden:  $u_i$  (3),  $e_{ij}$  (6),  $t_{ij}$  (6). In principe is dit systeem dus oplosbaar. Substitutie van (4.24) in (4.23) geeft:

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (4.25)$$

Dit differentiëren naar  $x_j$  geeft met (4.22):

$$\lambda u_{k,ki} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) = 0 \quad ,$$

of:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ij} = 0 \quad . \quad (4.26)$$

Anders geschreven:

$$\Delta u_i + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} u_{j,j} = 0 \quad , \quad (4.27)$$

waarbij:  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  : Laplace - operator.

We noemen (4.26), of (4.27), de vergelijkingen van Navier (of Beltrami). Het zijn drie vergelijkingen van de tweede orde voor  $u_1, u_2$  en  $u_3$ .

Deze vergelijkingen zijn sterk verwant, maar niet identiek, met de potentiaalvergelijking:

$$\Delta \varphi = 0 \quad .$$

Bij de potentiaalvergelijking onderscheiden we naar gelang de randvoorwaarden:

- a) Het Dirichlet - probleem: hierbij is aan de rand  $\varphi$  voorgeschreven.
- b) Het Neumann - probleem: hierbij is aan de rand  $\frac{d\varphi}{dn}$  voorgeschreven.

#### IV.4. De randcondities

Zoals bekend is een probleem, dat getypeerd wordt door differentiaalvergelijkingen eerst dan oplosbaar, indien aanvangs- en/of randvoorwaarden op de juiste

wijze worden gespecificeerd. De vergelijkingen van Navier hebben dus nog een aanvulling nodig om ze te kunnen oplossen. Er zijn verschillende typen randwaardeproblemen.

We onderscheiden:

- a) het randvoorwaardenprobleem van de eerste soort, waarbij over het gehele oppervlak van het lichaam de spanningen zijn voorgeschreven (verwant met Neumann - probleem),
- b) het randvoorwaardeprobleem van de tweede soort, waarbij de verplaatsingen van het oppervlak zijn gegeven (verwant met Dirichlet - probleem),
- c) het gemengde randvoorwaardeprobleem, waarbij over een deel van het oppervlak de spanningen en over het andere deel van het oppervlak de verplaatsingen zijn gegeven,
- d) het gemengd - gemengde randvoorwaardeprobleem waarbij tegelijkertijd op hetzelfde oppervlak spannings- en verplaatsingscomponenten worden voorgeschreven.

We zullen hier alleen problemen van de soort a), b) of c) beschouwen, zodat we dus steeds het oppervlak  $S$  van het lichaam kunnen splitsen in:

$$S = S_p + S_u \quad , \quad (4.28)$$

waarbij:

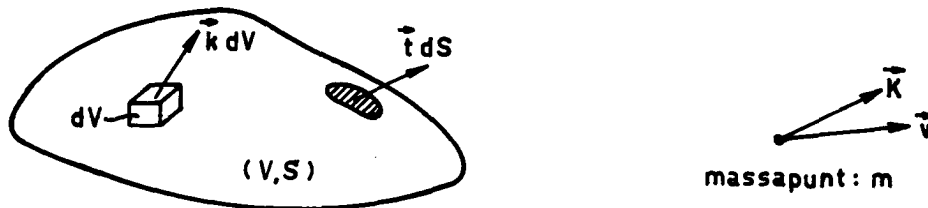
$S_p$  is dat deel van het oppervlak waar de spanningen zijn voorgeschreven (is nul voor b)) en,

$S_u$  is dat deel van  $S$  waar de verplaatsingen zijn voorgeschreven (is nul voor a)).

Het spreekt vanzelf, dat moet worden onderzocht of een gesteld probleem met randcondities oplosbaar is, m.a.w. of de oplossing existeert en zo ja, of deze eenduidig is. We gaan op deze problemen hier niet verder in.

## V. Energie-beschouwingen

### V.1. Elastische energie



De arbeid per seconde verricht door een kracht  $\vec{K}$  op een massapunt  $m$ , dat een snelheid  $\vec{v}$  heeft is

$$(\vec{K}, \vec{v}) = K_i v_i \quad .$$

Op analoge wijze is de arbeid per seconde verricht op een volume-elementje  $dV$  gelijk aan:

$$k_i \dot{u}_i dV$$

en op een oppervlakte-element  $dS$ :

$$t_i \dot{u}_i dS \quad .$$

Dus de totale arbeid per seconde verricht door de uitwendige krachten op het lichaam met volume  $V$  en oppervlak  $S$  is:

$$\dot{A} = \int_V k_i \dot{u}_i dV + \int_S t_i \dot{u}_i dS \quad . \quad (5.01)$$

We nemen nu aan dat de volgende relatie geldt (energiebalans):

$$\dot{A} = \dot{T} + \dot{W} \quad , \quad (5.02)$$

$$T = \text{kinetische energie} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad , \quad (5.03)$$

en  $W$  is gedefinieerd door:

$$\dot{W} = \dot{A} - \dot{T} \quad . \quad (5.04)$$

We noemen  $W$ : de elastische potentiële energie.

Nu geldt:

$$\int_S t_i \dot{u}_i dS = \int_S t_{ij} n_j \dot{u}_i dS = \int_V (t_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dV =$$

$$= \int_V t_{ij,j} \dot{u}_i \, dV + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV \quad . \quad (5.05)$$

Dus

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \int_V (t_{ij,j} + k_i) \dot{u}_i \, dV + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV = \\ &= \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i \, dV + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \, dV + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV = \\ &= \dot{T} + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV \quad . \quad (5.06) \end{aligned}$$

Met (5.02) krijgen we dan

$$\dot{W} = \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV \quad . \quad (5.07)$$

We kunnen  $\dot{W}$  interpreteren als de per seconde opgeslagen elastische potentiële energie.

Definieer  $W_m$  door

$$W = \int_V W_m \rho \, dV \quad . \quad (5.08)$$

$W_m$  : W per massa-eenheid .

Uit (5.07) en (5.08) volgt dus, omdat V willekeurig is:

$$\rho \dot{W}_m = t_{ij} \dot{u}_{i,j} = \frac{1}{2} (t_{ij} \dot{u}_{i,j} + t_{ji} \dot{u}_{j,i}) = t_{ij} \dot{e}_{ij} \quad , \quad (\text{want } t_{ij} = t_{ji}) \quad . \quad (5.09)$$

Beschouw

$$W_m = W_m(t_{ij}(e_{ij}), e_{ij}) = W_m(e_{ij}) =: W_m^{(e)} \quad .$$

Dan geldt

$$\dot{W}_m = \frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial e_{ij}} \dot{e}_{ij} = \frac{1}{\rho} t_{ij} \dot{e}_{ij} \quad , \quad (5.10)$$

voor alle  $e_{ij}$ . Dus moet:

$$t_{ij} = \rho \frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial e_{ij}} \quad . \quad (5.11)$$

Volgens de wet van Hooke is het verband tussen  $t_{ij}$  en  $e_{ij}$  lineair. Dus moet (vgl. (5.11))  $W_m^{(e)}$  zijn van de vorm:

$$W_m^{(e)} = \alpha + \beta_{ij} e_{ij} + \gamma_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \quad . \quad (5.12)$$

$\alpha$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ijkl}$ : constanten (dus onafhankelijk van  $e_{ij}$ ). De factor  $\alpha$  is niet interessant. Voor  $\beta_{ij}$  vinden we:

$$\frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial e_{ij}} = \beta_{ij} + 2\gamma_{ijkl} e_{kl} \quad . \quad (5.13)$$

Dus als alle deformaties nul zijn, krijgen we (uit (5.11) en (5.13)) voor de spanningen:

$$t_{ij} (e_{kl}'s = 0) = \rho \beta_{ij} \quad .$$

Aangezien we aangenomen hadden dat er geen restspanningen waren, moet dus  $\beta_{ij} = 0$ .

Met (5.11) en (5.13) krijgen we dan:

$$t_{ij} = \rho \frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial e_{ij}} = 2\rho \gamma_{ijkl} e_{kl} \quad . \quad (5.14)$$

Opmerking:  $\frac{\partial}{\partial e_{ij}} (\gamma_{ijkl} e_{ij} e_{kl}) = 2\gamma_{ijkl} e_{kl}$ , omdat de factor  $e_{kl}$  ook de waarde  $e_{ij}$  aanneemt door de sommatie over  $k$  en  $l$ .

Noem:  $c_{ijkl} = 2\rho \gamma_{ijkl}$  ,

dan volgt uit (5.14):

$$t_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad .$$

Nu is  $\gamma_{ijkl}$  constant, maar  $\rho$  is een functie van de deformatie en dus ook  $c_{ijkl}$ . Echter: het verschil tussen  $\rho$  en  $\rho_0$  (d.i. de massa-dichtheid in de begintoestand) is in de lineaire theorie infinitesimaal en dus te verwaarlozen. Dus in de lineaire theorie zijn  $\rho$  en dus  $c_{ijkl}$  onafhankelijk van de deformatie.

Uit (5.13) volgt:

$$\gamma_{ijkl} e_{kl} = \frac{1}{2\rho} t_{ij} ,$$

en hiermee wordt (5.12):

$$W_m = \frac{1}{2\rho} t_{ij} e_{ij} , \quad (\alpha = 0 \text{ genomen}) . \quad (5.15)$$

We definiëren de elastische energie per volume-eenheid  $W_s$  door

$$W_s := \rho W_m . \quad (5.16)$$

Dus, met (5.15):

$$W_s = \frac{1}{2} t_{ij} e_{ij} , \quad (5.17)$$

en totaal:

$$W = \int_V W_s \, dV = \frac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij} \, dV . \quad (5.18)$$

M.b.v. de wet van Hooke kunnen we (5.17) uitdrukken in de deformaties of in de spanningen, dus:

$$W_s \equiv W_s^{(e)}(e_{ij}) = G \left\{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk})^2 \right\} \quad (5.19)$$

$$\equiv W_s^{(t)}(t_{ij}) = \frac{1}{2E} \left\{ (1+\nu) t_{ij} t_{ij} - \nu (t_{kk})^2 \right\} . \quad (5.20)$$

Uit (5.19) volgt dat  $W_s$  positief-definiet is, want  $G > 0$  en  $\nu < 0,5$ , en alleen gelijk aan nul als alle  $e_{ij} = 0$ .

Verder geldt:

$$t_{ij} = \frac{\partial W_s^{(e)}}{\partial e_{ij}} \quad \text{en} \quad e_{ij} = \frac{\partial W_s^{(t)}}{\partial t_{ij}} . \quad (5.21)$$

## V.2. Reciprociteitsstelling van Betti en toelaatbare stelsels

Definitie: een reguliere evenwichtstoestand  $S(x)$

$$S(x) = \{ t_{ij}(x), e_{ij}(x), u_i(x) \} ,$$

is een oplossing, welke voldoet aan de vergelijkingen (4.22), (4.23) en (4.24) en welke voldoende malen differentieerbaar is ( $u_i \in C^2$ ,  $e_{ij}, t_{ij} \in C^1$ ).

Beschouw een lichaam met volume  $V$  en oppervlak  $S$ , dat op twee manieren wordt belast:

i) door volumekrachten  $k_i'$  en oppervlakte-spanningen  $t_i'$ . De hierbij behorende reguliere evenwichtstoestand is:

$$S'(x) : \{t_{ij}'(x), e_{ij}'(x), u_i'(x)\} \quad .$$

ii) idem door  $k_i''$  en  $t_i''$  met:

$$S''(x) : \{t_{ij}''(x), e_{ij}''(x), u_i''(x)\} \quad .$$

Dan geldt de:

Reciprociteitsstelling van Betti:

$$\int_V k_k' u_k'' dV + \int_S t_k' u_k'' dS = \int_V k_k'' u_k' dV + \int_S t_k'' u_k' dS \quad . \quad (5.22)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \int_V k_k' u_k'' dV + \int_S t_k' u_k'' dS &= - \int_V t_{kl, l}' u_k'' dV + \int_S u_k'' t_{kl}' n_l dS = \\ &= - \int_V t_{kl, l}' u_k'' dV + \int_V (u_k'' t_{kl}')_{, l} dV = \\ &= \int_V t_{kl}' u_{k, l}'' dV = \frac{1}{2} \int_V (t_{kl}' u_{k, l}'' + t_{lk}' u_{l, k}'') dV = \\ &= \int_V t_{kl}' e_{kl}'' dV \quad . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Analoog is

$$\int_V k_k'' u_k' dV + \int_S t_k'' u_k' dS = \int_V t_{kl}'' e_{kl}' dV \quad . \quad (5.25)$$

Tevens is:

$$\begin{aligned} t_{kl}' e_{kl}'' &= (\lambda e_{pp}' \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}') e_{kl}'' = \lambda e_{pp}' e_{kk}'' + 2\mu e_{kl}' e_{kl}'' = \\ &= (\lambda e_{kk}'' \delta_{pq} + 2\mu e_{pq}'') e_{pq}' = t_{kl}'' e_{kl}' \quad . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Definitie: De (totale) potentiële energie van  $S(x)$  is:

$$U(S) := W(S) - \int_V k_k^* u_k dV - \int_{S_p} t_k^* u_k dS \quad , \quad (5.26)$$

met:  $k_k^*$  : gegeven volumekracht ,

$t_k^*$  : voorgeschreven spanning op  $S_p$ .

Definitie: Kinematisch toelaatbare toestand:  $\bar{S}(x)$ :

d.i. een stelsel:  $\{\bar{u}_i, \bar{e}_{ij}, \bar{t}_{ij}\}$  waarvoor geldt:

- 1)  $\bar{u}_i \in C^2$  en  $\bar{e}_{ij}, \bar{t}_{ij} \in C^1$  ;
- 2)  $\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$  , (dus het verplaatsingsveld is compatibel) ;
- 3)  $\bar{t}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \bar{e}_{pp} + 2\mu \bar{e}_{ij}$  ;
- 4)  $\bar{u}_i$  voldoet aan de randvoorwaarden op  $S_u$  .

Opmerking: De met 3) gevonden spanningen  $\bar{t}_{ij}$  voldoen in het algemeen niet aan de evenwichtsvergelijkingen.

Definitie: Potentiële energie-functionaal van de kinematisch toelaatbare toestand  $\bar{S}(x)$ :

$$U(\bar{S}) := W(\bar{S}) - \int_V k_i^* \bar{u}_i \, dV - \int_{S_p} t_i^* \bar{u}_i \, dS \quad . \quad (5.27)$$

Nu geldt de:

Stelling van de minimale potentiële energie

$$U(S) = \min_{\bar{S}} U(\bar{S}) \quad . \quad (5.28)$$

Bewijs:

(We nemen aan dat er een  $S(x)$  bestaat en dat deze eenduidig is.)

Stel:  $S' = \bar{S} - S$  ( $S'$  voldoet aan voorwaarden 1), 2) en 3) maar niet aan 4)  
want:

$$u_i' = 0 \quad \text{op } S_u \quad ,$$

omdat  $u_i = \bar{u}_i$  is voorgeschreven op  $S_u$ .)

Dan

$$U(\bar{S}) - U(S) = W(\bar{S}) - W(S) - \int_V k_i^* u_i' \, dV - \int_{S_p} t_i^* u_i' \, dS \quad . \quad (5.29)$$



Nu is

$$\begin{aligned}
 2W_S(\bar{S}) &= \bar{t}_{ij} \bar{e}_{ij} = (t_{ij} + t'_{ij})(e_{ij} + e'_{ij}) = \\
 &= t_{ij} e_{ij} + t_{ij} e'_{ij} + t'_{ij} e_{ij} + t'_{ij} e'_{ij} = \\
 &= 2W_S(S) + 2t_{ij} e'_{ij} + 2W_S(S') \quad . \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Bij de laatste stap is gebruik gemaakt van vergelijking (5.25), want  $t'_{ij}$  voldoet aan de wet van Hooke.

Dus:

$$W(\bar{S}) - W(S) = \int_V t_{ij} e'_{ij} dV + W(S') \quad . \quad (5.31)$$

Verder geldt, omdat  $t_{ij}$  de exacte spanning is en dus aan de evenwichtsvergelijkingen voldoet:

$$\begin{aligned}
 \int_V t_{ij} e'_{ij} dV &= \int_V t_{ij} u'_{i,j} dV = \\
 &= \int_V (t_{ij} u'_i)_{,j} dV - \int_V t_{ij,j} u'_i dV = \\
 &= \int_S t_{ij} u'_i n_j dV + \int_V k_i^* u'_i dV = \\
 &= \int_V k_i^* u'_i dV + \int_{S_p} t_i^* u'_i dS + \int_{S_u} t_i u'_i dS = \\
 &= \int_V k_i^* u'_i dV + \int_{S_p} t_i^* u'_i dS \quad , \quad (u'_i = 0 \text{ op } S_u) \quad . \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

(5.32) substitueren in (5.31) en dit weer in (5.29) geeft:

$$U(\bar{S}) - U(S) = W(S') \quad . \quad (5.33)$$

Nu is

$$W(S') = \frac{1}{2} \int_V t'_{ij} e'_{ij} dV = G \int_V [e'_{ij} e'_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e'_{kk})^2] dV \geq 0, \quad (5.34)$$

en alleen gelijk aan nul als alle  $e'_{ij} = 0$ .

Dus:

$$U(\bar{S}) - U(S) \geq 0 \quad , \quad (5.35)$$

waarbij het gelijkteken alleen geldt als:

$$\bar{S} = S \quad .$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Definitie: Statisch toelaatbare toestand:  $\underline{S}(x)$ :

d.i. een stelsel:  $\{e_{ij}, t_{ij}\}$  waarvoor geldt

- 1)  $e_{ij}, t_{ij} \in C^1$  ;
- 2)  $t_{ij,j} + k_i = 0$  ,  $t_{ij} = t_{ji}$  ;
- 3)  $2\mu e_{ij} = t_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu + 3\lambda} t_{kk}$  ;
- 4) op  $S_p$  :  $t_{ij} n_j = t_i^*$  (= voorgeschreven) .

De in 3) gevonden deformaties:  $e_{ij}$  voldoen in het algemeen niet aan de compatibiliteitsvergelijkingen.

Definitie: Complementaire energie:  $U^*(S)$ :

$$U^*(S) := W(S) - \int_{S_u} t_i u_i^* dS \quad , \quad (5.36)$$

$u_i^*$  : voorgeschreven op  $S_u$  .

Definitie: Complementaire energie-functionaal van een statisch toelaatbare toestand  $\underline{S}(x)$ :

$$U^*(\underline{S}) = W(\underline{S}) - \int_{S_u} t_i u_i^* dS \quad .$$

$t_i$  volgt uit

$$t_{kl} n_l = t_k \quad \text{op } S_u \quad .$$

Stelling van de minimale complementaire energie:

$$U^*(S) = \min_{\underline{S}} U^*(\underline{S}) \quad . \quad (5.38)$$

Bewijs:

Stel:  $S' = \underline{S} - S$  .

Dan is:

$$U^*(\underline{S}) - U^*(S) = W(\underline{S}) - W(S) - \int_{S_u} t'_i u_i^* dS \quad (5.39)$$

met

i)  $t'_i = 0$  op  $S_p$  en

ii)  $t'_{ij,j} = 0$  ,

want  $t_{ij,j} + k_i = 0$

$$\frac{t_{ij,j} + k_i = 0}{t'_{ij,j} = 0} \quad ,$$

krijgen we, op analoge wijze aan het vorige bewijs:

$$W(\underline{S}) - W(S) = \int_V t'_{ij} e_{ij} dV + W(S') \quad , \quad (5.40)$$

en dit geeft weer:

$$U^*(\underline{S}) - U^*(S) = W(S') \geq 0 \quad , \quad (5.41)$$

en alleen gelijk nul als:  $\underline{S} = S$ , waarmee de stelling is bewezen.

Stelling:

$$U^*(S) + U(S) = 0 \quad . \quad (5.42)$$

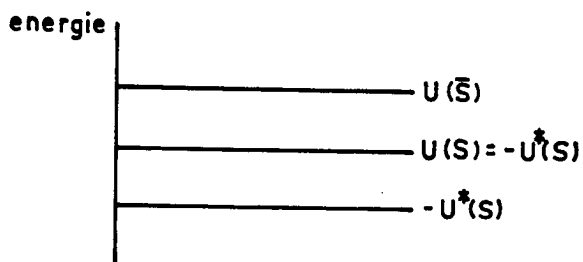
Bewijs:

$$\begin{aligned} U^*(S) + U(S) &= - \int_{S_u} t_i u_i^* dS + 2W(S) - \int_V k_i^* u_i dV - \int_{S_p} t_i^* u_i dS = \\ &= 2W(S) - \int_V k_i^* u_i dV - \int_S t_i u_i dV = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.43)$$

q.e.d.

Uit (5.28), (5.38) en (5.42) volgt dan:

$$- U^*(\underline{S}) \leq - U^*(S) = U(S) \leq U(\bar{S}) \quad . \quad (5.44)$$



We zien dus dat een kinematisch toelaatbare en een statisch toelaatbare toestand een boven- resp. benedengrens geven, waartussen de exacte oplossing moet liggen.

### V.3. Stelling van Castigliano

We weten dat (zie formule (5.38)) in de evenwichtstoestand  $U^*(\underline{S})$  minimaal is. We gaan nu de echte oplossing variëren:

$$S \Rightarrow S + \delta S = \underline{S} \quad , \quad (\underline{S} : \text{statisch toelaatbaar}) .$$

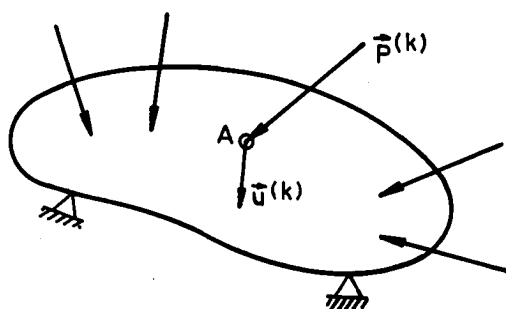
Dan is dus

$$\delta U^*(S) = 0 \quad ,$$

of

$$\delta W(S) = \delta \int_{S_u} t_i u_i^* dS \quad . \quad (5.45)$$

We gaan dit nu toepassen op een ondersteund, elastisch lichaam, dat belast wordt door puntkrachten en puntmomenten.



We bekijken een kracht  $\vec{P}^{(k)}$  werkende op een punt A van het lichaam. De verplaatsing van het punt A is:  $\vec{u}^{(k)}$ . We nemen nu  $\vec{u}^{(k)}$  constant en gaan  $\vec{P}^{(k)}$  variëren:

$$\vec{P}^{(k)} \Rightarrow \vec{P}^{(k)} + \delta \vec{P}^{(k)} \quad , \quad (\delta \vec{P}^{(k)} \text{ in richting van } \vec{P}^{(k)}) .$$

Dan is

$$\delta W(S) = \int_{S_u} u_i^{(k)} \delta t_i^{(k)} dS \quad . \quad (5.46)$$

Hierin is  $S_u$  het vlak waarop  $\vec{u}^{(k)}$  voorgeschreven, dus het vlak waarop  $\vec{P}^{(k)}$  werkt. Aangezien voor een geconcentreerde kracht dit vlak overgaat in een punt, is dus op  $S_u$  :  $\vec{u}_i^{(k)}$  constant. Dan wordt (5.46):

$$\delta W(S) = u_i^{(k)} \int_{S_u} \delta t_i^{(k)} dS = u_i^{(k)} \delta P_i^{(k)} = (\vec{u}^{(k)}, \delta \vec{P}^{(k)}) \quad . \quad (5.47)$$

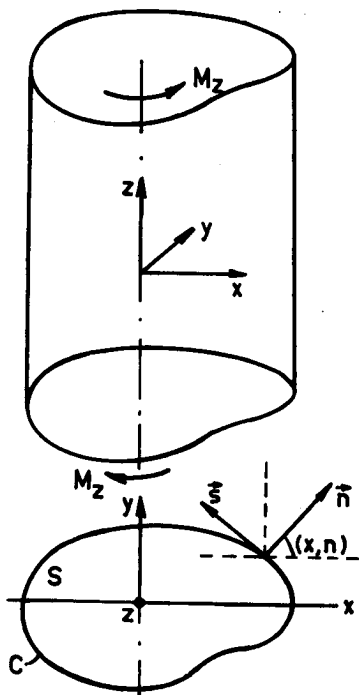
Noemen we  $u_p^{(k)}$  de component van  $\vec{u}^{(k)}$  in de richting van  $\vec{P}^{(k)}$  dan geldt dus:

$$u_P^{(k)} = \frac{\partial W(S)}{\partial P^{(k)}} \quad , \quad (P^{(k)} = |\vec{P}^{(k)}|) \quad . \quad (5.48)$$

Op analoge wijze geldt voor een puntmoment:

$$\varphi_M^{(\ell)} = \frac{\partial W(S)}{\partial M^{(\ell)}} \quad , \quad (5.49)$$

waarbij  $\varphi_M^{(\ell)}$  is de hoekverdraaiing in de richting van M van het punt waarop M werkt.

VI. Torsie van cilindrische stavenVI.1. Exacte oplossing

We beschouwen een lange cilinder, welke in zijn einddoorsnedes op torsie wordt belast. We stellen de volgende restricties aan ons probleem:

- i) de cilindermantel is onbelast,
- ii) de schuifspanningen in de einddoorsnedes zijn "goed" verdeeld. (We komen hierop later terug.)

We bekijken een doorsnede (S,C) met de eenheidsvectoren  $\vec{n}$  en  $\vec{s}$  normaal op resp. tangentiaal aan de rand C.

We noemen  $(x,n) = (n,x)$  de hoek tussen de positieve x-as en de  $\vec{n}$ -richting, en definiëren analoog  $(x,s)$ ,  $(y,n)$  en  $(y,s)$ .

Dan gelden de relaties:

**x en y: centrale-hoofdtraagheidsassen.**

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos(x,s) = \sin(n,x) = -\cos(n,y) = -\frac{\partial y}{\partial n} \quad , \quad (6.01)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \cos(y,s) = \sin(x,s) = \cos(n,x) = \frac{\partial x}{\partial n} \quad . \quad (6.02)$$

We gaan uit van de, fundamentele, veronderstelling

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = 0 \quad ; \quad t_{xy} = 0 \quad , \quad (6.03)$$

en we zullen aantonen, dat we met deze hypothese aan al onze vergelijkingen kunnen voldoen.

De eerste twee evenwichtsvergelijkingen geven met (6.03)

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0 \quad . \quad (6.04)$$

Hieruit volgt

$$t_{xz} = f_1(x,y) \quad , \quad t_{yz} = f_2(x,y) \quad . \quad (6.05)$$

De derde evenwichtsvergelijking geeft

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0 \quad . \quad (6.06)$$

De verplaatsingen, welke consistent zijn met dit systeem van spanningen luiden

$$\left. \begin{aligned} u_x = u = -\alpha zy & , \\ u_y = v = \alpha zx & , \\ u_z = w = \alpha \Phi(x,y) & , \end{aligned} \right\} \quad (6.07)$$

waarbij

$\alpha = \text{constant} = \text{draaiingshoek}$ . (In de infinitesimale theorie moet  $|\alpha| \ll 1$ .)

$\Phi(x,y) = \text{de nog onbekende welvingsfunctie}$ .

### Bewijs

Uit (6.07) volgt voor de deformaties

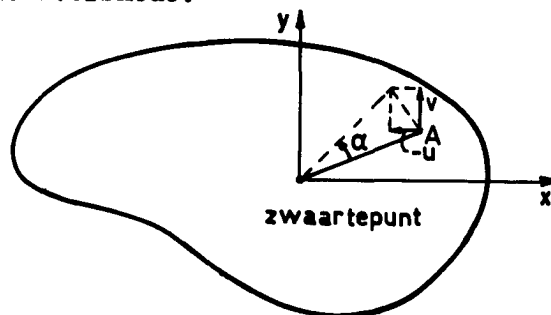
$$i) \quad e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0 \quad .$$

Met Hooke krijgen we dan

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = 0 \quad .$$

$$ii) \quad t_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G(-\alpha z + \alpha z) = 0 \quad .$$

Uit onderstaande figuur blijkt dat  $\alpha$  aangeeft een rotatie van het punt A om het zwaartepunt van de doorsnede.



In het algemeen is  $\Phi(x,y)$  niet identiek nul (voor een cirkelvormige doorsnede geldt wel:  $\Phi(x,y) \equiv 0$ ), zodat een vlakke doorsnede bij torsie niet vlak blijft.

Met de wet van Hooke krijgen we uit (6.07)

$$\left. \begin{aligned} t_{xz} &= G\alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) & , \\ t_{yz} &= G\alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) & . \end{aligned} \right\} \quad (6.08)$$

Substitutie van (6.08) in (6.06) geeft

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad (6.09)$$

een potentiaalvergelijking in twee dimensies voor  $\Phi(x,y)$ .

De randvoorwaarden op de mantel luiden

$$t_i = t_{ij} n_j = 0 \quad . \quad (6.10)$$

Op de rand R is

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos(n,x), \cos(n,y), 0) \quad , \quad (6.11)$$

zodat (6.10) uitgeschreven levert

$$\begin{aligned} \text{in de x-richting: } 0 &= 0 \quad , \\ \text{in de y-richting: } 0 &= 0 \quad , \\ \text{in de z-richting: } t_{xz} \cos(n,x) + t_{yz} \cos(n,y) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Met (6.08) wordt de voorwaarde (6.12)

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) \cos(n,x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right) \cos(n,y) = 0 \quad ,$$

of, met (6.01) en (6.02)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = y \cos(n,x) - x \cos(n,y) =: F(x,y) \quad .$$

Dus op de mantel moet gelden

$$\frac{d\Phi}{dn} = F(x,y) \quad , \quad (6.13)$$

waarbij  $F(x,y)$  een bekende functie van de rand van de doorsnede is.

De vergelijking (6.09) met de randvoorwaarde (6.13) vormt een Neumann-probleem. Als dit systeem oplosbaar is, is de  $\Phi(x,y)$  bepaald op een constante na. Wil het systeem oplosbaar zijn, dan moet gelden ((6.09) geïntegreerd)

$$\iint_S \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_S \text{div}(\text{grad } \Phi) dx dy = \oint_R \frac{d\Phi}{dn} ds = 0 \quad . \quad (6.14)$$

Hieraan is voldaan, want

$$\oint_R \frac{d\Phi}{dn} ds = \oint_R \left[ y \frac{\partial y}{\partial s} + x \frac{\partial x}{\partial s} \right] ds = \frac{1}{2} \oint_R \frac{\partial}{\partial s} (x^2 + y^2) ds = 0 \quad . \quad (6.15)$$



Deze beschouwing geldt alleen voor enkelvoudig samenhangende doorsneden.  
(Een uitbreiding naar meervoudig samenhangende doorsneden is mogelijk.)

Omdat (6.08) over de hele cilinder moet gelden, moet hij ook gelden in de einddoorsneden ( $z = \pm l$ ).

We noemen nu een schuifspanning in de einddoorsneden "goed" verdeeld als hij verdeeld is volgens (6.08).

Voor het wringend moment in de doorsnede geldt dan

$$M_z = \iint_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dx dy = G \alpha \iint_S (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dy \quad (6.16)$$

We gaan nu bekijken het probleem, waarbij in de einddoorsneden gegeven is het wringend moment  $M_z$ . We onderscheiden

i) in de einddoorsneden zijn de schuifspanningen "goed" verdeeld (dus volgens (6.08)); we krijgen dan de oplossing:  $S$ ,

ii) in de einddoorsneden is een andere schuifspanningsverdeling gegeven, maar met hetzelfde resulterende moment  $M_z$ . We krijgen dan de oplossing:  $S'$ .

Nu zal het verschil:  $(S - S')$  niet identiek nul zijn, maar het moet wel in evenwicht zijn met een nul-belasting, d.i. een belasting welke over de doorsnede geïntegreerd geen resulterende kracht of moment geeft.

Hiervoor geldt het

#### Principe van de Saint-Venant:

Een oplossing welke in evenwicht is met een nulbelasting sterft zeer snel, d.w.z. binnen een afstand van de orde van enkele malen een karakteristieke lengte van de doorsnede, uit.

Voor ons probleem betekent dit, dat de spanningen:  $(t_{xz} - t'_{xz})$  en  $(t_{yz} - t'_{yz})$  behorende bij de toestand:  $(S - S')$ , nul worden op een afstand van de einddoorsneden, welke van de orde is van enkele malen een karakteristieke lengte van de doorsnede. Hieruit volgt dat de juiste verdeling van momenten en krachten niet meer belangrijk is op enige afstand van de einddoorsneden.

Het principe van de Saint-Venant is in zijn algemeenheid niet te bewijzen.

We zullen als een voorbeeld bekijken een op torsie belaste cirkelcilinder.

Hiervoor geldt voor de schuifspanningen:

$$t_{r\varphi} = t_{r\varphi}^{(0)} + G \sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k(r) \cdot e^{-\lambda_k z} \quad (6.17)$$

(Een afbeelding van (6.17) kunt U desgewenst vinden in het collegediktaat: Lineaire elasticiteitstheorie I, pp. 66 e.v.)

$t_{r\varphi}^{(0)}$  is de "klassieke" oplossing (die die welke voldoet aan (6.08)) en  $\lambda_k$  zijn de eigenwaarde van een 2°-graads Besselfunctie en zijn van de orde

$$\lambda_k \approx \frac{k\pi}{a} \quad . \quad (a : \text{straal cirkel}) \quad .$$

De term:

$$e^{-\lambda_k z} \quad ,$$

sterft dus snel uit, en voor  $z$  enkele malen  $a$  geldt ( $z=0$  in einddoorsnede):

$$t_{r\varphi} = t_{r\varphi}^{(0)} \quad . \quad (6.18)$$

N.B. Voor dunwandige doorsneden gaat het principe van de Saint-Venant niet op.

We gaan het torsieprobleem nu nog eens op een andere wijze oplossen. We bekijken weer alleen maar het deel van de cilinder tussen twee doorsneden die op voldoende afstand van de einddoorsneden zitten, zodat we mogen aannemen dat de schuifspanning overal "goed" verdeeld is.

We nemen aan dat voldaan is aan (6.03), (6.04) en (6.05) en gaan uit van de evenwichtsvergelijking

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0 \quad . \quad (6.19)$$

We voeren in de torsiefunctie  $F(x,y)$  door

$$t_{xz} = G\alpha \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad t_{yz} = -G\alpha \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad (6.20)$$

zodat triviaal aan (6.19) is voldaan.

De randvoorwaarde op de mantel

$$t_{xz} \cos(n,x) + t_{yz} \cos(n,y) = 0 \quad ,$$

in  $F$  uitdrukken geeft (met (6.01) en (6.02))

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dF}{ds} = 0 \quad . \quad (6.21)$$

Dus op de mantel moet  $F$  constant zijn. Voor een enkelvoudig samenhangende doorsnede mogen we deze constante nul kiezen, zodat we dan krijgen

$$F = 0 \quad , \quad \text{op de mantel} \quad . \quad (6.22)$$

De wet van Hooke geeft

$$t_{xz} = G\alpha \frac{\partial F}{\partial y} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad (6.23)$$

$$t_{yz} = -G\alpha \frac{\partial F}{\partial x} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad . \quad (6.24)$$

Door (6.23) te differentiëren naar  $y$  en (6.24) naar  $x$  en af te trekken en door gebruik te maken van de relaties van  $u$  en  $v$  volgens (6.07), welke consistent zijn met (6.03), krijgen we

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2 \quad . \quad (6.25)$$

Voor het wringend moment in de doorsnede vinden we

$$\begin{aligned} M_z &= \iint_S (xt_{yz} - yt_{xz}) dx dy = -G\alpha \iint_S \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx dy = \\ &= -G\alpha \iint_S \left[\frac{\partial(xF)}{\partial x} + \frac{\partial(yF)}{\partial y}\right] dx dy + 2G\alpha \iint_S F dx dy = \\ &= -G\alpha \oint_C F [x \cos(n,x) + y \cos(n,y)] dx dy + 2G\alpha \iint_S F dx dy \quad , \end{aligned}$$

en hieruit krijgen we met (6.15)

$$M_z = 2G\alpha \iint_S F dx dy \quad . \quad (6.26)$$

We definiëren de torsiestijfheid  $D$  van een cilindrische staaf als

$$D := \frac{M_z}{\alpha} \quad . \quad (6.27)$$

Dus

$$D = 2G \iint_S F dx dy \quad . \quad (6.28)$$

### Voorbeeld

Als voorbeeld bekijken we een cilinder met de ellipsvormige doorsnede

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad (6.29)$$

We nemen

$$F = c \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad , \quad (6.30)$$

dan is voldaan aan de randvoorwaarde op de mantel (6.22).

(6.25) geeft

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = c \left( \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2 \quad ,$$

of

$$c = - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad . \quad (6.31)$$

Voor het moment krijgen we

$$M_z = \frac{2G\alpha a^2 b^2}{a^2 + b^2} \iint_S \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2} \alpha \quad , \quad (6.32)$$

en voor de torsiestijfheid

$$D = \frac{M_z}{\alpha} = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad . \quad (6.33)$$

Voor een cirkelvormige doorsnede ( $a = b$ ) krijgen we

$$D = \frac{\pi}{2} G a^4 \quad . \quad (6.34)$$

#### Analogon voor F

De zakking van een vlak membraan, waarvan de rand is ingeklemd en dat belast wordt door een constante druk, voldoet aan dezelfde vergelijkingen als  $F(x,y)$  (dus (6.22) en (6.25)). Als we dus een membraan kiezen dat dezelfde vorm heeft als de doorsnede van de te onderzoeken torsiestaaaf, dan zal bij een belasting door een constante druk de zakking van het membraan evenredig zijn met  $F$  en bovendien zal (zie (6.28)) het wringende moment  $M_z$  (en  $D$ ) evenredig zijn met het doorgezakte volume. Het membraan-analogon is dus een experimentele methode voor het bepalen van de torsiestijfheid van een cilindrische staaaf. Na de komst van de computer is het nut van deze methode sterk verminderd.

In het geval van torsie (dus:  $t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0$ ) krijgen we voor de specifieke elastische energie

$$W_s = \frac{1}{2G} (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) \quad . \quad (6.35)$$

Voor een cirkelvormige doorsnede geeft dit

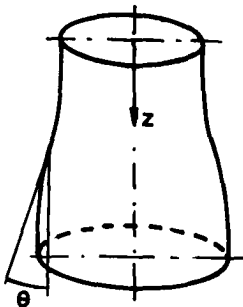
$$\begin{aligned}
 W &= \int_V W_s \, dV = \int_0^{\ell} \int_0^a 2\pi r W_s \, dr dz = \\
 &= \int_0^{\ell} \int_0^a 2\pi r \frac{1}{2G} \{G^2 \alpha^2 (x^2 + y^2)\} \, dr dz = \\
 &= \frac{1}{4} \pi^2 G \alpha^2 \ell a^4 = \frac{M^2 \ell}{2GI_0} \quad . \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

waarbij

$$M = \int_S (t_{xz} y - t_{yz} x) \, dS = \frac{1}{2} \pi G \alpha a^4 \quad , \quad (6.37)$$

en

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi a^4 = \text{polair oppervlakte traagheidsmoment} \quad . \quad (6.38)$$



Gegeneraliseerd, voor een niet zuiver cilindrische staaf, krijgen we als een eerste benadering (voor kleine  $\theta$ )

$$W = \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \frac{M^2(z)}{I_0(z)} \, dz \quad . \quad (6.39)$$

Dit is een in de technische toepassingen veel gebruikte benadering.

## VI.2. Benaderingsoplossingen

We beschouwen een cilindrische staaf, waarbij aan de eindvlakken een draaiing is voorgeschreven. De cilindermantel is vrij.

We zoeken benaderingen m.b.v. de in V.2 afgeleide stellingen. We proberen eerst een

### i) Kinematisch toelaatbare toestand

We nemen:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= -\alpha z y \quad , \\
 v &= \alpha z x \quad , \\
 w &= \alpha \varphi(x, y) \quad .
 \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

We gebruiken hier niet de evenwichtsvergelijkingen.

De potentiële energie voor een torsieprobleem is

$$U(S) = W(S) - \int_V k_i^* u_i dV - \int_{S_p} t_i^* u_i dS = W(S) \quad , \quad (6.41)$$

want

$$k_i^* = 0 \quad , \quad (\text{geen volumekrachten}) \quad ,$$

$$t_i^* = 0 \quad , \quad \text{want op } S_p \text{ (d.i. de cilindermantel) zijn de spanningen nul.}$$

Voor de potentiële energie-functionaal van de kinematisch toelaatbare toestand geldt analoog

$$U(\bar{S}) = W(\bar{S}) \quad . \quad (6.42)$$

Met (6.08) en (6.35) krijgen we

$$W(S) = \frac{\ell}{2G} \iint_S (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) dx dy = \frac{1}{2} G \alpha^2 \ell I \quad , \quad (6.43)$$

met

$$I = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx dy \quad , \quad (6.44)$$

waarin

$$\varphi_0 = \text{de exacte welvingsfunctie (dus de oplossing van (6.09) en (6.13)).}$$

(6.44) uitschrijven geeft

$$\begin{aligned} I = & \iint_S \left\{ x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\} dx dy + \\ & + \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 + x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\} dx dy \quad . \quad (6.45) \end{aligned}$$

Nu is de eerste term van (6.44) gelijk aan (zie (6.16)):

$$\frac{M}{G \alpha} \quad ,$$

en de tweede is nul, want

$$\begin{aligned} \iint_S \left( x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) dx dy &= \iint_S \left\{ \frac{\partial (x \varphi_0)}{\partial y} - \frac{\partial (y \varphi_0)}{\partial x} \right\} dx dy = \\ &= - \oint_R \varphi_0 \{ y \cos(n, x) - x \cos(n, y) \} ds = - \oint_R \varphi_0 \frac{d\varphi_0}{dn} ds = \end{aligned}$$

(m.b.v. de eerste identiteit van Green)

$$= - \iint_R \varphi_{0,k} \varphi_{0,k} \, dx dy = - \iint_R \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad . \quad (6.46)$$

Dus

$$I = \frac{M_z}{G\alpha} = \frac{D}{G} \quad , \quad (\text{met (6.27)}) \quad , \quad (6.47)$$

zodat I een maat is voor de torsiestijfheid.

Analoog is

$$W(\bar{S}) = \frac{\ell}{2G} \iint_S (\bar{t}_{xz}^2 + \bar{t}_{yz}^2) dx dy = \frac{1}{2} G\alpha^2 \ell \bar{I} \quad , \quad (6.48)$$

met

$$\bar{I} = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx dy \quad , \quad (6.49)$$

voor willekeurige, differentieerbare  $\varphi(x,y)$ .

Met het principe minimum potentiële energie (5.28) leiden we hieruit af

$$I(S) \leq \bar{I}(\bar{S}) \quad . \quad (6.50)$$

Vervolgens proberen we een

### ii) Statisch toelaatbare toestand

We nemen

$$\begin{aligned} t_{xz} &= \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \quad , \\ t_{yz} &= - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \quad , \end{aligned} \quad (6.51)$$

en de overige spanningen nul,

en:  $F = 0$ , aan de rand R van de doorsnede.

De complementaire energie voor het torsie-probleem is

$$U^*(S) = W(S) - \iint_{S_u} u_i^* t_i \, dS \quad .$$

Nu is (met (6.07), want S = exacte oplossing)

$$\begin{aligned} \iint_{S_u} u_i^* t_i \, dS &= \iint_S (u_x^* t_x + u_y^* t_y) dS = \\ &= \iint_S -\alpha \ell (y t_x - x t_y) dS = \alpha \ell M_z \quad , \end{aligned} \quad (6.52)$$

want  $S_u$  is de einddoorsnede (stel andere einddoorsnede ingeklemd, dan is daar  $u_i^* = 0$ ; dit is niet essentieel, want  $\alpha$  is de relatieve hoekverdraaiing). Nu geldt op  $S_u$ :

$$t_x = t_{xx} n_x + t_{xy} n_y + t_{xz} n_z = t_{xz} \quad ,$$

en analoog:

$$t_y = t_{yz} \quad ,$$

zodat uit (6.17) de laatste stap van (6.52) volgt. Dus

$$U^*(S) = W(S) - \alpha \ell M_z \quad . \quad (6.53)$$

Analoog krijgen we voor de complementaire energie-functionaal van de statisch toelaatbare toestand

$$U^*(\underline{S}) = W(\underline{S}) - \alpha \ell \underline{M}_z \quad , \quad (6.54)$$

waarbij (zie (6.26))

$$\underline{M}_z = 2 \iint_S F \, dx dy \quad . \quad (6.55)$$

Verder is

$$W(\underline{S}) = \frac{\ell}{2G} \iint_S (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) \, dx dy = \frac{\ell}{2G} \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right\} \, dx dy \quad . \quad (6.56)$$

Met (6.55) en (6.56) wordt (6.54)

$$U^*(\underline{S}) = \frac{\ell}{2G} \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - 4G\alpha F \right\} \, dS = \frac{1}{2} G\alpha^2 \ell \underline{K}(\underline{S}) \quad , \quad (6.57)$$

met

$$\underline{K}(\underline{S}) := \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 4f \right\} \, dx dy \quad , \quad (6.58)$$

$$\text{en} \quad f := \frac{F}{G\alpha} \quad . \quad (6.59)$$

Met het principe minimum complementaire energie (5.38) krijgen we hieruit

$$K(S) \leq \underline{K}(\underline{S}) \quad . \quad (6.60)$$

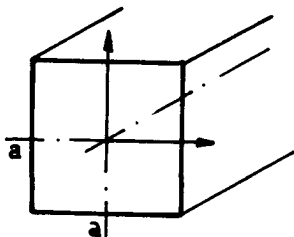
En formule (4.40) geeft

$$- \underline{K}(\underline{S}) \leq -K(S) = I(S) \leq \bar{I}(\bar{S}) \quad . \quad (6.61)$$



Hiermee hebben we een boven- en een ondergrens gevonden, waartussen de exacte waarde van de torsiestijfheid, welke een technisch belangrijke grootte is, moet liggen.

Voorbeeld: Cilindrische staaf met vierkante doorsnede.



De exacte oplossing van dit torsie-probleem is te vinden m.b.v. oneindige reeksen. We krijgen dan voor de torsiestijfheid de exacte waarde

$$D = 2,25 Ga^4 .$$

i) We nemen eerst:  $\varphi(x,y) = 0$ , (dit is een slechte benadering).

Dit geeft

$$I = \frac{8}{3} a^4 = 2,67 a^4 . \quad (6.62)$$

ii) Vervolgens nemen we

$$f(x,y) = A(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) ,$$

zodat voldaan is aan  $f = 0$  (en dus  $F = 0$ ) aan de rand.

Dit geeft

$$K = \frac{64}{9} a^6 \left( \frac{4}{5} a^2 A^2 - A \right) .$$

Het minimum van  $K$  treedt op voor  $A = \frac{5}{8a^2}$ , zodat de kleinste  $K$  is

$$K = -\frac{20}{9} a^4 = -2,22 a^4 . \quad (6.63)$$

Met (6.62) en (6.63) krijgen we voor  $D = IG$

$$2,22 Ga^4 \leq D \leq 2,67 Ga^4 . \quad (6.64)$$

Vergelijken we dit met de exacte waarde, dan zien we dus, dat vooral de  $\varphi(x,y)$  slecht gekozen is. We proberen daarom de functie

iii)  $\varphi(x,y) = A(yx^3 - xy^3)$ , (deze functie is invariant t.o.v. draaiing over  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ) .

Deze geeft

$$D = 2,25 a^4 G ,$$

dus een zeer goede benadering.

Nu moet

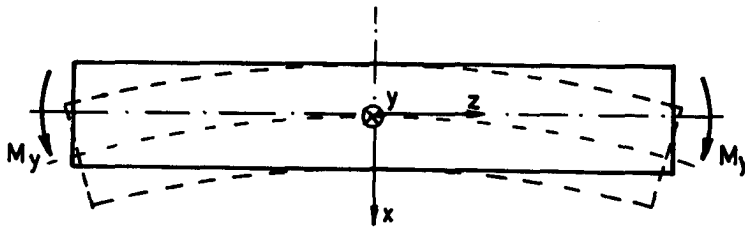
$$2,22 Ga^4 \leq D \leq 2,25 Ga^4 , \quad (6.65)$$

zodat de exacte waarde nu goed ingesloten is.

## VII. Buiging van cilindrische staven

### VII.1. Buiging door een moment. Exacte theorie

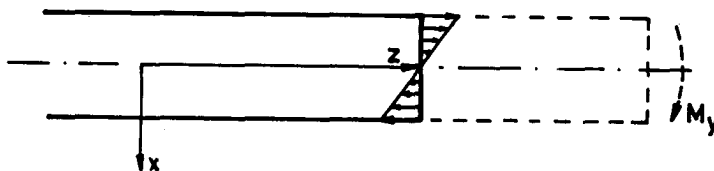
We beschouwen een cilindrische staaf met lengte  $l$ , welke in zijn einddoorsneden belast wordt door een buigend moment, gericht langs een van de hoofdtraagheidsassen van de doorsneden. We nemen aan dat de spanningen in de einddoorsneden "goed" verdeeld zijn (een exacte definitie van "goed" verdeeld volgt verderop).



De x-, y- en z-as zijn hoofdtraagheidsassen door het zwaartepunt van de doorsneden. We definiëren het begrip: neutrale lijn als de meetkundige plaats van de zwaartepunten van de doorsneden.

We stellen de volgende spanningsverdeling

$$\left. \begin{aligned} t_{zz} &= -\frac{M_y}{I_y} x, & (I_y &:= \int_S x^2 dS), \\ t_{xx} &= t_{yy} = t_{xy} = t_{xz} = t_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.01)$$



**Spanningsverdeling.**

De spanningen volgens (7.01) voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen en maken ook evenwicht met het buigende moment  $M_y$ , want

$$M_y = - \int_S x t_{zz} dS = - \int_S \left( -\frac{M_y}{I_y} x \right) x dS = \frac{M_y}{I_y} \int_S x^2 dS = M_y.$$

We noemen nu de eindspanning "goed" verdeeld, indien ook in de einddoorsneden voldaan is aan (7.01). Indien het moment in de einddoorsneden anders dan rechtlijnig verdeeld is, zal het verschil (want dit geeft een nulbelasting) volgens het principe van de Saint-Venant snel uitdempen.

Uit (7.01) kunnen we de deformaties bepalen ( $M \equiv M_y$ ,  $I \equiv I_y$ ):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} = e_{yy} &= \frac{\nu}{E} \frac{M}{I} x, \\ e_{zz} &= -\frac{M}{EI} x, \\ e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.02)$$

Deze deformaties zijn compatibel; we kunnen hieruit dus de verplaatsingen berekenen. We krijgen, afgezien van starre-lichaamsverplaatsingen:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{2EI} (z^2 + \nu x^2 - \nu y^2), \\ v &= \frac{M}{EI} \nu xy, \\ w &= -\frac{M}{EI} xz. \end{aligned} \right\} \quad (7.03)$$

Langs de neutrale lijn ( $x=y=0$ ) krijgen we

$$u_0 = \frac{M}{2EI} z^2,$$

en dit geeft

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI}, \quad (R: \text{kromtestraal}) \quad (7.04)$$

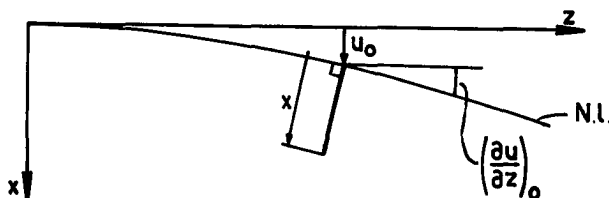
In onze benadering geldt inderdaad:  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{R}$ , want termen van hogere orde van  $u$  worden consequent verwaarloosd. Dus formule (7.04) is, binnen de lineaire theorie, exact.

Langs de neutrale lijn geldt verder

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = \frac{M}{EI} z, \quad (7.05)$$

zodat we krijgen

$$w = -x \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \quad (7.06)$$

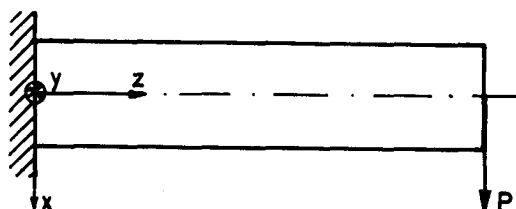


Uit (7.06) volgt, dat de doorsneden loodrecht op de neutrale lijn blijven staan. Dit is de zg. Wet van Bernouilli of "stekelvarkenhypothese":

Normale doorsneden blijven na de buiging normaal.

De stelling geldt exact voor de buiging van een cilindrische staaf door een moment langs een hoofdtraagheidsas. Een technisch veel belangrijker probleem is echter de buiging van een balk door een dwarskracht; hier gaat echter bovenstaande hypothese niet meer exact op.

### VII.2. Buiging door een dwarskracht. Benaderingstheorie



x-, y- en z-as: hoofdtraagheidsassen.

We beschouwen een cilindrische staaf, welke in zijn einddoorsnede belast wordt door een dwarskracht  $P$  gericht langs een hoofdtraagheidsas.

Dit probleem is om twee redenen moeilijker dan het vorige:

i) Het moment in een doorsnede  $z$  is afhankelijk van  $z$ , immers

$$M_y(z) = P(l - z) \quad . \quad (7.07)$$

ii) De spanning  $t_{zx} \neq 0$ , want deze spanningen moeten in evenwicht zijn met de dwarskracht, dus

$$\int_S t_{zx} \, dS = P \quad . \quad (7.08)$$

Dit probleem is nog wel exact te behandelen met potentiaaltheorie (zie Lineaire Elasticiteitstheorie I), maar het is een veel ingewikkelder probleem dan de torsie. Bovendien is het probleem van een balk, welke belast wordt door twee, in verschillende doorsneden aangrijpende dwarskrachten, niet meer exact te behandelen. We zullen daarom hier een benaderingstheorie afleiden. Deze benaderingstheorie geldt voor staven, waarvan de lengte vele malen groter is dan een karakteristieke maat van de doorsnede. We beperken ons hier wel tot enkelvoudig samenhangende doorsneden (dit is geen essentiële beperking). We nemen verder aan, dat de volgende benaderingen ook gelden voor staven waarvan de doorsnede in de  $z$ -richting verandert, mits deze veranderingen niet te groot zijn.

We nemen in het vervolg steeds aan dat de volgende spanningen nul zijn

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0 \quad . \quad (7.09)$$

We definiëren de doorsnedegrootheden

i) normaalkracht

$$N := \int_S t_{zz} \, dS \quad . \quad (7.10)$$

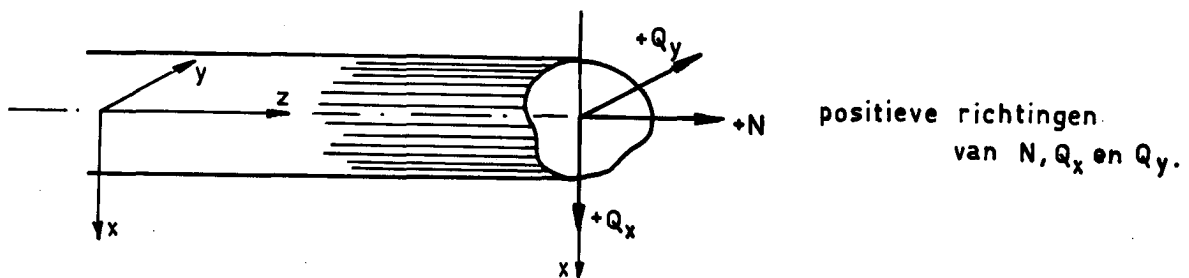
ii) dwarskracht in x-richting

$$Q_x := \int_S t_{xz} \, dS \quad . \quad (7.11)$$

iii) dwarskracht in y-richting

$$Q_y := \int_S t_{yz} \, dS \quad . \quad (7.12)$$

We noemen  $Q_x$  positief, indien hij in een doorsnede, waarvan de normaal in de positieve z-richting staat, werkt in de positieve x-richting. Analoog voor  $Q_y$  en  $N$ .



iv) buigend moment in de x-richting

$$M_x := \int_S y t_{zz} \, dS \quad . \quad (7.13)$$

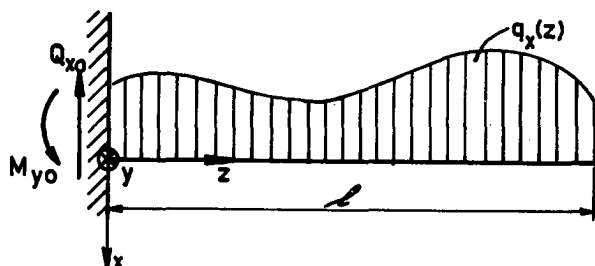
v) buigend moment in de y-richting

$$M_y := - \int_S x t_{zz} \, dS \quad . \quad (7.14)$$

vi) wringend (of torsie) moment

$$M_z := \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) \, dS \quad . \quad (7.15)$$

We noemen weer  $M_x$  positief, indien hij in een doorsnede, waarvan de normaal in de positieve  $z$ -richting staat, werkt in de positieve  $x$ -richting en analoog voor  $M_y$  en  $M_z$ .



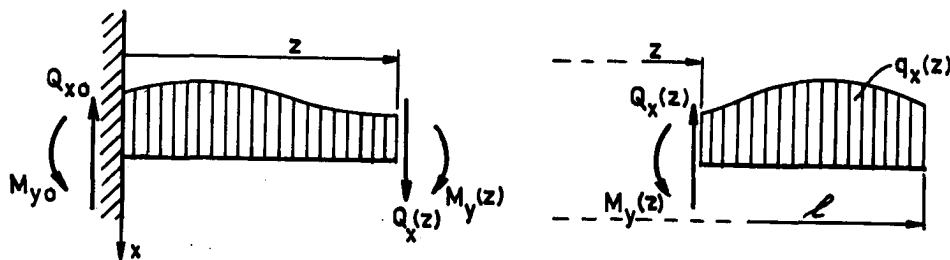
$q_x(z)$ : kracht per eenheid van lengte.

We beschouwen een ingeklemde rechte balk belast door de verdeelde belasting  $q_x(z)$ . Uit het totale evenwicht volgt voor de reactiegrootheden in de inklemming

$$Q_{x0} = \int_0^l q_x(\zeta) d\zeta \quad , \quad (7.16)$$

en

$$M_{y0} = \int_0^l \zeta q_x(\zeta) d\zeta \quad . \quad (7.17)$$



In een doorsnede  $z$  geldt

$$Q_x(z) = \int_z^l q_x(\zeta) d\zeta \quad , \quad (7.18)$$

en

$$M_y(z) = \int_z^l (\zeta - z) q_x(\zeta) d\zeta \quad . \quad (7.19)$$

Uit (7.18) en (7.19) volgen door differentiatie de drie belangrijke relaties

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_x}{dz} &= -q_x(z) \quad , \\ \frac{dM_y}{dz} &= -Q_x(z) \quad , \\ \text{en} \quad \frac{d^2 M_y}{dz^2} &= q_x(z) \quad . \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

De eerste twee vergelijkingen van (7.20) zijn de globale evenwichtsvergelijkingen. De evenwichtsvergelijkingen luiden hier namelijk (alleen  $t_{xz}$  en  $t_{zz}$  ongelijk nul)

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + k_x = 0 \quad , \quad (7.21)$$

$$\text{en} \quad \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + k_z = 0 \quad , \quad (7.22)$$

waarbij in ons probleem  $k_z = 0$  en  $k_x$  voldoet aan

$$\int_S k_x \, dS = q_x(z) \quad . \quad (7.23)$$

(7.21) integreren over de doorsnede geeft met (7.23)

$$\int_S \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \, dS + \int_S k_x \, dS = 0 \quad ,$$

of

$$\frac{d}{dz} \int_S t_{xz} \, dS + q_x(z) = 0 \quad ,$$

en dit geeft met (7.11):

$$\frac{dQ_z}{dz} = -q_x(z) \quad .$$

(7.22) met  $x$  vermenigvuldigen en integreren over de doorsnede, geeft met (7.11) en (7.14) en met de voorwaarde dat  $t_{xz} = 0$  aan de rand van de doorsnede

$$\begin{aligned} & \int_S x \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} \, dS + \int_S x \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \, dS = \\ & = (xt_{xz}) \Big|_R - \int_S t_{xz} \, dS + \frac{d}{dz} \int_S xt_{zz} \, dS = -Q_x(z) - \frac{dM_y}{dz} = 0 \quad . \end{aligned}$$

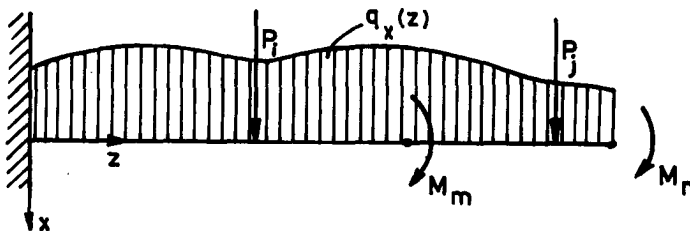
De globale evenwichtsvergelijkingen (7.20) zijn dus te verkrijgen door middeling van de lokale evenwichtsvergelijkingen over de doorsnede. Hiermee is het probleem van de buiging van een balk teruggebracht tot een één-dimensionaal probleem (alleen  $z$  als variabele).

Een van de grootheden uit de balkentheorie welke we graag willen kennen is de verplaatsing van de centrale lijn:  $u_0$ . Hiertoe moeten we een verband kennen tussen de buigende momenten in de doorsneden en deze verplaatsing. In de technische mechanica wordt hiervoor de volgende relatie gepostuleerd

$$M_y = \frac{EI}{R} = EI \frac{d^2 u_0}{dz^2} \quad (7.24)$$

Deze relatie hangt direct samen met de wet van Bernouilli, zoals we in de vorige paragraaf hebben gezien. Deze wet geldt echter alleen exact voor de momentenbuiging. M.b.v. een energie-beschouwing zullen we laten zien dat de relatie (7.24) inderdaad in de balkentheorie de beste is die we kunnen kiezen. We moeten daarbij bedenken, dat de balkentheorie geldt als een benaderingstheorie voor lichamen waarvan de lengte  $l$  vele malen groter is dan een of andere karakteristieke doorsnede-maat  $r$ . We zullen dus moeten trachten aan te tonen, dat de hypothese (7.24) een goede aanname is voor het geval dat  $(r/l)$  naar nul gaat.

We beschouwen het volgende systeem:



een rechte balk belast door een verdeelde belasting en enkele puntkrachten en -momenten.

We kiezen eerst een

i) Kinematisch toelaatbare toestand

Stel:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(z) + \frac{1}{2}v(x^2 - y^2)\varphi''(z) & , & & (\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}) & , \\ v &= v_{xy}\varphi''(z) & , & & & \\ w &= -x\varphi'(z) & . & & & \end{aligned} \quad (7.25)$$

Hieruit leiden we af de deformaties



$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \nu x \varphi'' & ; & & e_{yy} &= \nu x \varphi'' & ; & & e_{zz} &= -x \varphi'' & ; \\
 e_{xy} &= 0 & ; & & e_{yz} &= \frac{1}{2} \nu x y \varphi''' & ; & & e_{xz} &= \frac{1}{4} \nu (x^2 - y^2) \varphi''' & .
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

Voor de elastische energie krijgen we uit (7.26)

$$\begin{aligned}
 W &= G \int_V \{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk})^2 \} dV = G \int_V \{ 2\nu^2 x^2 (\varphi'')^2 + x^2 (\varphi'')^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \nu^2 x^2 y^2 (\varphi''')^2 + \frac{1}{8} \nu^2 (\varphi''')^2 (x^2 - y^2)^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} [(2\nu - 1)x \varphi'']^2 \} dV = \\
 &= G \int_V x^2 (\varphi'')^2 [2\nu^2 + 1 + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (1-2\nu)^2] dV + \\
 &+ G \int_V (y^2 + x^2)^2 (\varphi''')^2 \frac{\nu^2}{8} dV = \\
 &= \frac{1}{2} EI \int_0^\ell (\varphi'')^2 dx + \frac{\nu^2 EK}{16(\nu+1)} \int_0^\ell (\varphi''')^2 dz ,
 \end{aligned}
 \tag{7.27}$$

waarbij

$$K = \int_S (y^2 + x^2)^2 dS , \tag{7.28}$$

en waarbij gebruikt zijn de relaties:

$$I = \int_S x^2 dS \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} .$$

Aangezien

$$\frac{K}{I} = O(r^2) ,$$

en

$$\frac{\int_0^\ell (\varphi''')^2 dz}{\int_0^\ell (\varphi'')^2 dz} = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right) ,$$

krijgen we uit (7.27)

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^\ell (\varphi'')^2 dx + O\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right] , \tag{7.29}$$

en dit geeft, als  $u_0$  de verplaatsing in x-richting van de neutrale lijn ( $x=y=0$ ) is

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} (u_0'')^2 dz + O\left[\left(\frac{\ell}{l}\right)^2\right] \quad (7.30)$$

Hiermee vinden we voor de potentiële energie functionaal

$$U(\underline{S}) = \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} (u_0'')^2 dz - \int_0^{\ell} qu_0 dz - \Sigma \{u_k P_k^* - u_k' M_k^*\} + O\left[\left(\frac{\ell}{l}\right)^2\right] \quad (7.31)$$

Hierin zijn  $P_k^*$  ( $M_k^*$ ) voorgeschreven puntkrachten (-momenten) en  $u_k$  ( $u_k'$ ) de verplaatsingen (verdraaiingen) in de richting van  $P_k^*$  ( $M_k^*$ ) van de neutrale lijn.

We nemen vervolgens een

ii) statisch toelaatbare toestand

We stellen dat  $M$  voldoet aan

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q(z) \quad ; \quad \frac{dM}{dz} = -Q(z) \quad (7.32)$$

We bepalen eerst de elastische energie t.g.v.  $M(z)$ . Hiertoe stellen we de normaalspanningsverdeling

$$t_{zz} = -\frac{M(z)}{I} z \quad ; \quad t_{xx} = t_{yy} = 0 \quad (7.33)$$

Bij (7.33) moet nog een schuifspanningsverdeling gekozen worden, opdat aan de evenwichtsvergelijkingen kan worden voldaan. We gaan hier op deze schuifspanningen niet verder in, maar ze zullen natuurlijk wel een bijdrage tot de elastische energie leveren.

Uit (7.33) volgt voor de elastische energie tgv.  $M(z)$ :

$$W_M = \frac{1}{2E} \int_V t_{zz}^2 dV = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} \frac{M^2}{I^2} dz \int_S x^2 dS = \frac{1}{2EI} \int_0^{\ell} M^2 dz \quad (7.34)$$

De bijdrage van de schuifspanningen (dus van  $Q(z)$ ) blijkt van de vorm te zijn:

$$W_Q = \frac{k}{2GS} \int_0^{\ell} Q^2 dz = \frac{k}{2GS} \int_0^{\ell} (M')^2 dz \quad (7.35)$$

Hierin is  $k$  een factor afhankelijk van de vorm van de doorsnede en  $S$  het oppervlak van de doorsnede. Het getal  $k$  is van de orde 1. Verder is

$$\frac{I}{S} = O(r^2) \quad \text{en} \quad \frac{\int_0^{\ell} (M')^2 dz}{\int_0^{\ell} (M)^2 dz} = C \left( \frac{1}{\ell^2} \right),$$

zodat we met (7.34) en (7.35) krijgen voor de totale elastische energie

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^{\ell} M^2 dz + O\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right] \quad (7.36)$$

De complementaire energie functionaal wordt dus

$$U^*(\bar{S}) = \frac{1}{2EI} \int_0^{\ell} M^2 dz - \sum_k (u_k^* P_k - u_k^{*'} M_k) + O\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right] \quad (7.37)$$

waarbij  $u_k^*$  voorgeschreven verplaatsingen zijn.

Met (7.31) en (7.37) vinden we de belangrijke betrekking

$$\begin{aligned} U(\underline{S}) + U^*(\bar{S}) &= \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} (u''_0)^2 dz + \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{M}{EI}\right)^2 dz + \\ &- \int_0^{\ell} q u_0 dz - \sum_k \{u_k P_k^* - u_k' M_k^*\} - \sum_k \{u_k^* P_k - u_k^{*'} M_k\} + O\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

We werken dit verder uit tot

$$\begin{aligned} U(\underline{S}) + U^*(\bar{S}) &= \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} \left(u''_0 - \frac{M}{EI}\right)^2 dz + \int_0^{\ell} u''_0 M dz + \\ &- \int_0^{\ell} q u_0 dz - \sum_k \{u_k P_k^* - u_k' M_k^*\} - \sum_k \{u_k^* P_k - u_k^{*'} M_k\} + O\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right] = \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} \left(u''_0 - \frac{M}{EI}\right)^2 dz + O\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right] \quad (7.39) \end{aligned}$$

Bij deze laatste stap hebben we gebruik gemaakt van:  $q = M''$  en vervolgens de tweede en derde term partieel geïntegreerd. De stoktermen vallen dan weg tegen de sommaties:  $\sum_k u_k P_k^*$  etc.

Als we gebruiken de hypothese

$$u''_0 = \frac{M}{EI} \quad , \quad (7.40)$$

vinden we uit (7.39)

$$U(\underline{s}) + U^*(\bar{s}) = o\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right] \quad . \quad (7.41)$$

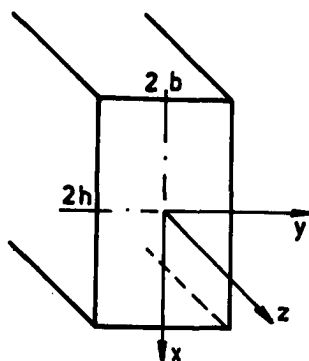
Hiermee is bewezen dat voor  $(r/\ell) \rightarrow 0$  de hypothese (7.40) exact is. Deze aanname is dus zeer bruikbaar voor lange slanke balken.

Voorbeeld: bepaling van  $W_Q$  voor rechthoekige staaf.

Stel:  $t_{zz} = -\frac{M(z)}{I} x$  ;  $t_{zx} = -\frac{Q(z)}{2I} (x^2 - h^2)$  ; overige  $t_{ij} = 0$  ,

en  $M' = -Q$  ;  $M'' = q$  .

Dan:



$$\begin{aligned} W_Q &= \frac{(1+\nu)}{2E} \int_V 2t_{zx}^2 dV = \frac{(1+\nu)}{2E} \int_V \frac{Q^2}{2I^2} (x^2 - h^2)^2 dV = \\ &= \frac{(1+\nu)}{4EI^2} \int_0^\ell Q^2 dz \int_S (x^4 - 2h^2 x^2 + h^4) dS = \\ &= \frac{1}{2EI} \frac{16(1+\nu)}{15I} bh^5 \int_0^\ell (M')^2 dz = \\ &= \frac{1}{2EI} \frac{4(1+\nu)}{5} h^2 \int_0^\ell (M')^2 dz \quad , \quad (\text{want } I = \frac{4}{3} bh^3) \quad . \end{aligned}$$

We hebben nu de volgende vergelijkingen voor de buiging van balken:

i) Globale evenwicht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_y}{dz} &= -Q_x \quad , \\ \frac{dQ_x}{dz} &= -q_x \quad , \end{aligned} \right\} \therefore \frac{d^2 M_y}{dz^2} = q \quad .$$

ii) Bernouilli-hypothese

$$M_y = EI_y u'' \quad ,$$

Uit de bovenstaande vergelijkingen volgt de belangrijke relatie

$$\frac{d^2}{dz^2} (EI_y u'') = q_x(z) \quad . \quad (7.42)$$

Voor  $EI_y = \text{constant}$  gaat dit over in:

$$EI_y u^{(4)} = q_x(z) \quad . \quad (7.43)$$

We hebben dus een 4<sup>o</sup>-orde differentiaalvergelijking gevonden; we moeten dus ook vier randvoorwaarden hebben. De volgende grootheden kunnen voorgeschreven zijn (2 op  $z=0$  en 2 op  $z=l$ ).

- i) verplaatsing:  $u$
- ii) hoekverdraaiing:  $u'$
- iii) buigend moment; dit komt overeen met  $u''$  voorgeschreven
- iv) dwarskracht; dit komt overeen met  $u'''$  voorgeschreven.

Voorbeelden:

-----	vrij: $u'' = u''' = 0$ .
-----  -----	opgelegd: $u = u'' = 0$ .
-----  -----	ingeklemd: $u = u' = 0$ .

### VII.3. Stelling van Castigliano

We zullen hier de in paragraaf V.3 afgeleide stelling van Castigliano toe gaan passen op balken.

We onderscheiden voor de elastische energie  $W$  de volgende gevallen

- i) Buigingsenergie tgv. een moment.

Voor

$$t_{zz} = - \frac{M_y}{I_y} x \quad ,$$

krijgen we hiervoor

$$W_{M_y} = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_y^2(z)}{I_y^2(z)} dz \quad . \quad (7.44)$$

Hierbij is aangenomen dat de dwarskracht of het buigende moment langs een hoofdas gericht was. Als we een dwarskracht of buigend moment hebben welke niet langs een hoofstraagheidsas gericht is, ontbinden we deze langs de twee hoofdtraagheidsassen. We krijgen dan

$$t_{zz} = -\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y \quad ,$$

en dit geeft

$$W_M = \frac{1}{2E} \int_V \left\{ \frac{M_y^2}{I_y^2} x^2 + \frac{M_x^2}{I_x^2} y^2 - \frac{2M_x M_y}{I_x I_y} xy \right\} dV \quad . \quad (7.45)$$

Omdat x en y hoofdtraagheidsassen zijn geldt

$$\int_S xy dS = 0 \quad ,$$

waarmee (7.45) wordt

$$W_M = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_y^2(z)}{I_y(z)} dz + \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_x^2(z)}{I_x(z)} dz \quad . \quad (7.46)$$

We mogen dus de energieën van  $M_x$  en  $M_y$  superponeren.

ii) Energie bij een normaalkracht.

Als we nog een extra normaalkracht hebben, krijgen we

$$t_{zz} = -\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{S} \quad .$$

Omdat x en y door het zwaartepunt gaan, krijgen we hieruit

$$W = W_{\text{Buiging}} + \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{N^2(z)}{S^2(z)} dz \quad . \quad (7.47)$$

iii) Torsie-energie.

Voor een balk met een cirkelvormige doorsnede wordt de elastische energie bij belasting door een wringend moment  $M_z$ :

$$W_T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2(z)}{S_W(z)} dz \quad , \quad (S_W : \text{torsiestijfheid}) \quad . \quad (7.48)$$

We kunnen deze energie bij de buigingsenergie superponeren. Dus bij een belasting door

$$M_x, M_y, M_z \text{ en } N$$

krijgen we voor de totale elastische energie als  $x$ ,  $y$  en  $z$  hoofdtraagheidsassen door het zwaartepunt zijn

$$W = W_{M_x} + W_{M_y} + W_T + W_N \quad (7.49)$$

iv) Dwarskracht.

De arbeid tgv. een dwarskracht was

$$W_{Q_x} = \frac{k}{2G} \int_0^l \frac{Q_x^2(z)}{S(z)} dz \quad , \quad (7.50)$$

waarbij  $k$  een functie van de vorm van de doorsnede is.

We kunnen bewijzen, m.b.v. Schwartz-ongelijkheid, dat altijd  $k \geq 1$  is, immers

$$W_{Q_x} = \frac{1}{2G} \int_V (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) dV \geq \frac{1}{2G} \int_0^l \int_S t_{zx}^2 dS dz \geq \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{Q_x^2(z)}{S(z)} dz \quad , \quad (7.51)$$

want uit

$$\left( \int_S t_{xz} dS \right)^2 \leq \int_S t_{xz}^2 dS \int_S dS \quad ,$$

en

$$\int_S t_{xz} dS = Q_x(z) \quad ,$$

volgt

$$\int_S t_{xz}^2 dS \geq \frac{Q_x^2(z)}{S} \quad .$$

Het aangeven van een bovengrens voor  $k$  voor willekeurige doorsneden is moeilijker. Voor praktisch belangrijke doorsneden, zoals rechthoekige en cirkelvormige, blijkt de  $k$  niet veel groter dan 1 te zijn.

Zowel een dwarskracht als een wringend moment levert een schuifspanning  $t_{xz}$ . De arbeid van deze twee zal dus in het algemeen niet te scheiden zijn. Er is echter een punt in de doorsnede, nl. het dwarskrachtenmiddenpunt volgens Trefftz, met de eigenschap, dat als de dwarskracht door dit punt gaat de totale arbeid van dwarskracht en wringend moment te schrijven is als

$$W = W_{Q_x} + W_{M_T} \quad .$$

Opmerking: Indien de doorsnede een symmetrie-as heeft ligt het dwarskrachtenmiddelpunt op die as.

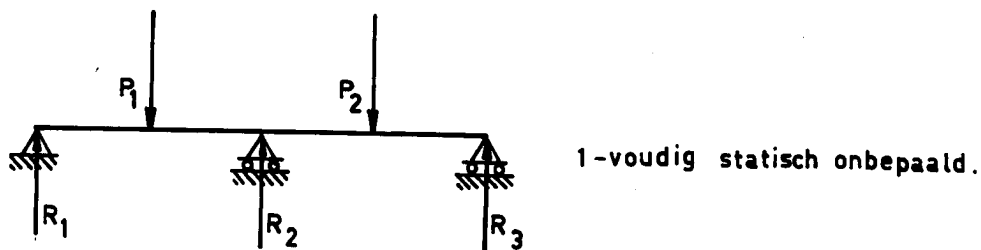
De stelling van Castigliano luidt (zie H.V)

$$u^{(k)} = \frac{\partial W}{\partial P^{(k)}} \quad , \quad (7.52)$$

waarbij  $u^{(k)}$  is de verplaatsing in de richting van  $P^{(k)}$  van het aangrijpingspunt van  $P^{(k)}$ .

Formule (7.52) kan ook gebruikt worden voor het bepalen van zg. statisch onbepaalde reactiekrachten. Voor een ondersteund lichaam belast door krachten en momenten gelden in het algemeen 6 evenwichtsvergelijkingen. Indien er meer reactiekrachten zijn dan evenwichtsvergelijkingen noemen we een lichaam statisch onbepaald.

Voorbeeld:



Stel we hebben een  $m$ -voudig statisch onbepaald systeem ( $R_1$  t/m  $R_m$ ) belast door  $n$  krachten ( $P_1$  t/m  $P_n$ ). Dan is de elastische energie

$$W = W(P_1, \dots, P_n, R_1, \dots, R_m) \quad .$$

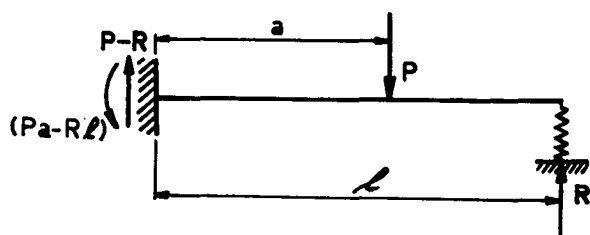
We nemen nu aan dat de ondersteuning star zijn, d.w.z. de verplaatsing  $u^{(i)}$  van het aangrijpingspunt van  $R_i$  in de richting van  $R_i$  is nul. We sluiten dus verende opleggingen uit.

We krijgen dan de extra vergelijking voor  $R_i$

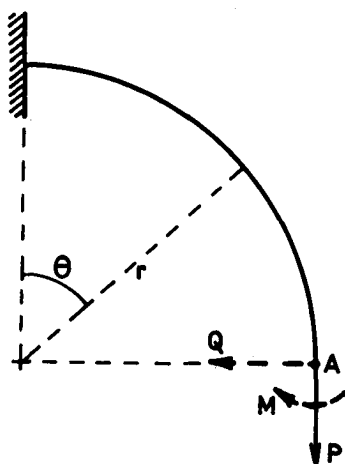
$$u^{(i)} = 0 = \frac{\partial W}{\partial R_i} \quad , \quad (i = 1, \dots, m) \quad , \quad (7.53)$$

waaruit we de onbekende reactiekrachten kunnen bepalen.



Opmerking

Als we een verende ondersteuning hebben, moeten we de veer bij het systeem nemen en de elastische energie van het totale systeem (balk plus veer) bepalen.

VoorbeeldenVoorbeeld 1:

We beschouwen allereerst een statisch bepaald probleem, met een belasting in het vlak van de constructie. Dit is een ingeklemde kwart cirkel, belast door een kracht P. We veronderstellen dat de meetkundige configuratie zo is, dat alleen vervorming optreedt in het vlak van de kwart cirkel. Gevraagd wordt de horizontale, verticale verplaatsing van en de hoekverdraaiing in het punt A.

We voeren de hulpkracht Q en het hulpmoment M in. Het oppervlak van de doorsnede is A. Een coëfficiënt typerend voor de doorsnede is k. De arbeid is

$$W = \frac{1}{2EI} \int M_b^2 ds + \frac{1}{2EA} \int N^2 ds + \frac{k}{2GA} \int D^2 ds \quad (7.54)$$

Bij de belasting (P, Q, M) is

$$\left. \begin{aligned} M_b &= Pr(1 - \sin \theta) + Qr \cos \theta + M \\ N &= P \sin \theta - Q \cos \theta \\ D &= P \cos \theta + Q \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

waarin D de dwarskracht is (ingevoerd om verwarring met Q te vermijden).

We vullen (7.55) in (7.54) in en verkrijgen

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi/2} (Pr(1 - \sin \theta) + Qr \cos \theta + M)^2 r d\theta + \\ &+ \frac{1}{2EA} \int_0^{\pi/2} (P \sin \theta - Q \cos \theta)^2 r d\theta + \frac{k}{2GA} \int_0^{\pi/2} (P \cos \theta + Q \sin \theta)^2 r d\theta \end{aligned} \quad (7.56)$$

De verticale verplaatsing  $v$  is

$$v = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=M=0} = \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right) \frac{Pr^3}{EI} + \frac{\pi}{4} \frac{Pr}{EA} + k \frac{\pi}{4} \frac{Pr}{GA} \quad (7.57)$$

De horizontale verplaatsing  $h$  is

$$h = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=M=0} = \frac{Pr^3}{2EI} - \frac{Pr}{2EA} + \frac{kPr}{2GA} \quad (7.58)$$

en de hoekverdraaiing is

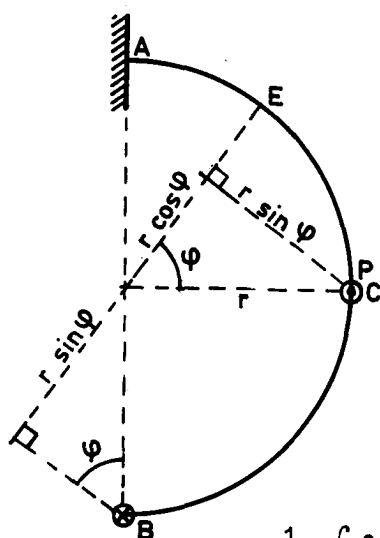
$$\varphi = \left( \frac{\partial W}{\partial M} \right)_{Q=M=0} = \frac{Pr^2}{EI} (\pi/2 - 1) \quad (7.59)$$

Het is duidelijk dat de eerste bijdrage in (7.57), (7.58) en (7.59) van de buiging komt, de tweede van de normaalkracht en de derde van de dwarskracht. Voor het traagheidsmoment  $I$  kunnen we schrijven

$$I = p \cdot A \cdot d^2 \quad (7.60)$$

waarin  $d$  een karakteristieke lengteparameter is van de doorsnede,  $A$  het oppervlak en  $p$  een constante van de orde 1. Met (7.60) zijn de drie bijdragen te vergelijken. Het blijkt dat de buigingsterm  $(r/d)^2$  groter is dan de andere. Daarom wordt vaak normaalenergie en dwarskrachtenergie verwaarloosd tegenover buigingsenergie.

Voorbeeld 2:



We bestuderen nu een statisch bepaalde constructie, welke loodrecht op het vlak wordt belast.

Een halve cirkel met straal  $r$  is ingeklemd bij A en wordt bij C door een puntlast  $P$  loodrecht op het vlak belast.

Gevraagd wordt de loodrecht verplaatsing van B.

In B brengen we de hulpkracht aan  $Q$ . We hebben nu

$$W = \frac{1}{2EI} \int_b M^2 ds + \frac{1}{2S_W} \int W^2 ds \quad (7.61)$$

indien  $M_b$  resp.  $M_W$  het buigend en wringend moment zijn en  $S_W$  de stijfheid tegen wringing.

We superponeren

$$M_b = M_b^{(1)} + M_b^{(2)} \quad , \quad (7.62)$$

de bijdragen resp. van P en Q en

$$M_W = M_W^{(1)} + M_W^{(2)} \quad . \quad (7.63)$$

Dan wordt

$$W = \frac{1}{2EI} \int (M_b^{(1)} + M_b^{(2)})^2 ds + \frac{1}{2S_W} \int (M_W^{(1)} + M_W^{(2)})^2 ds \quad . \quad (7.64)$$

De gevraagde verplaatsing is

$$u_B = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \frac{1}{EI} \int M_b^{(1)} \frac{\partial M_b^{(2)}}{\partial Q} ds + \frac{1}{S_W} \int M_W^{(1)} \frac{\partial M_W^{(2)}}{\partial Q} ds \quad . \quad (7.65)$$

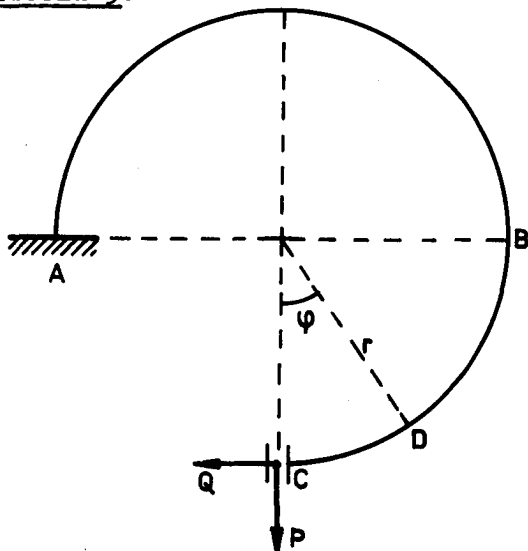
Nu is

$$\left. \begin{aligned} M_b^{(1)} &= Pr \sin \varphi \quad , \\ M_W^{(1)} &= Pr(1 - \cos \varphi) \quad , \\ M_b^{(2)} &= Qr \cos \varphi \quad , \\ M_W^{(2)} &= Qr(1 + \sin \varphi) \quad , \end{aligned} \right\} \quad (7.66)$$

waaruit volgt

$$u_B = \frac{Pr^3}{2} \left[ \frac{1}{EI} + \frac{\pi - 1}{S_W} \right] \quad . \quad (7.67)$$

Voorbeeld 3:



Nu volgt een statisch onbepaald probleem van een in het vlak belaste constructie. Een ingeklemde ring ABC, met de straal  $r$  en de buigstijfheid  $EI$  wordt in C door een kracht  $P$  belast. Het punt C glijdt in een bus en kan alleen verticaal bewegen. Gevraagd wordt de zakking van C.

De reactiekracht door de bus uitgeoefend is  $Q$ . In de doorsnede D is het buigend moment

$$M = Pr \sin \varphi - Qr(1 - \cos \varphi) \quad . \quad (7.68)$$

De energie  $W$  is

$$W = \frac{1}{2EI} \int M^2 ds \quad , \quad (7.69)$$

waaruit volgt

$$u_Q = 0 = \frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial Q} ds \quad . \quad (7.70)$$

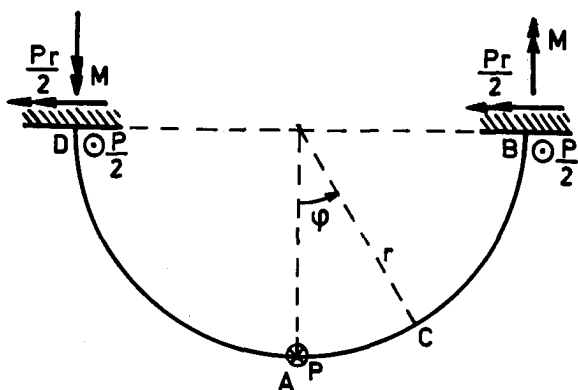
Na invullen volgt uit (7.70)

$$Q = \frac{2P}{9\pi + 8} \quad . \quad (7.71)$$

De verplaatsing  $u_P$  is nu

$$u_P = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pr^3}{EI} \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{9\pi + 8} \right) \quad . \quad (7.72)$$

Voorbeeld 4:



We geven nu een voorbeeld van een statisch onbepaald probleem, waarbij de constructie loodrecht op het vlak wordt belast.

Een halve ring DACB is bij D en B ingeklemd. De straal is  $r$ , de belasting  $P$  in A staat loodrecht op het vlak. Gevraagd wordt de zinking in A.

Op grond van de symmetrie zien we dat de reactiekrachten in B en D gelijk  $P/2$  zijn. Evenwicht en symmetrie vereisen voorts dat, zowel in B, als in D, een moment evenwijdig BD werkt, dat gelijk is aan  $\frac{Pr}{2}$ . De statisch onbepaalde is het moment  $M$ , dat gelijk is en tegengesteld gericht in B en D.

Het buigend moment is in C

$$M_b = \frac{Pr}{2} \sin \varphi + \left( M - \frac{Pr}{2} \right) \cos \varphi \quad , \quad (7.73)$$

terwijl het wringend moment in C is

$$M_W = \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) + \left( M - \frac{Pr}{2} \right) \sin \varphi \quad . \quad (7.74)$$

De energie wordt

$$W = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{Pr}{2} \sin \varphi + \bar{M} \cos \varphi \right)^2 r d\varphi$$

$$+ \frac{1}{GI_0} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) + \bar{M} \sin \varphi \right)^2 r d\varphi \quad , \quad (7.75)$$

als  $\bar{M} = M - \frac{Pr}{2}$  (7.76)

en we ons beperken tot een cirkelvormige doorsnede.  $\bar{M}$  is bepaald door

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{M}} = 0 \quad , \quad \text{waaruit volgt}$$

$$\bar{M} = - \frac{Pr}{\pi} \quad . \quad (7.77)$$

De zakking in A is

$$u_P = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pr^3}{EI} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\pi} \right) + \frac{Pr^3}{GI_0} \left( \frac{3\pi}{8} - 1 - \frac{1}{2\pi} \right) \quad . \quad (7.78)$$

Is  $a$  de straal van de doorsnede, dan wordt (7.78)

$$u_P = \frac{Pr^3}{2\pi^2 a^4} \left[ \frac{\pi^2 - 4}{E} + \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{2G} \right] \quad . \quad (7.79)$$

#### VII.4. Doelstellingen van de technische mechanica

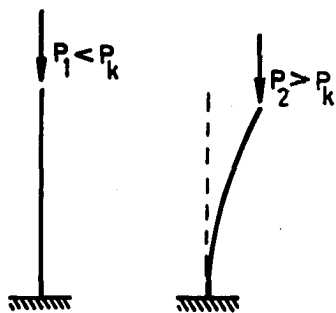
Uit technisch oogpunt zijn de volgende eigenschappen van een constructie belangrijk:

- i) sterkte,
- ii) stijfheid,
- iii) stabiliteit.

Bij de bepaling van de sterkte zoeken we de bij een bepaalde belasting optredende maximale spanning en kijken of deze kleiner is dan de toelaatbare spanning.

Voor het bepalen van de stijfheid berekenen we de verplaatsingen behorende bij een bepaalde belasting (bv. met Castigliano).

Het onderzoek naar de stabiliteit is een veel moeilijker probleem. We kunnen dit zien aan het volgende voorbeeld:



Beschouw een ingeklemde staaf, welke belast wordt door een normaalkracht  $P$ . Als  $P$  klein genoeg is zal de staaf alleen ingedrukt worden. We maken nu  $P$  steeds groter; dan zal boven een bepaalde kritische waarde ( $P_k$ ) de staaf gaan uitknikken. Voor  $P > P_k$  heeft het

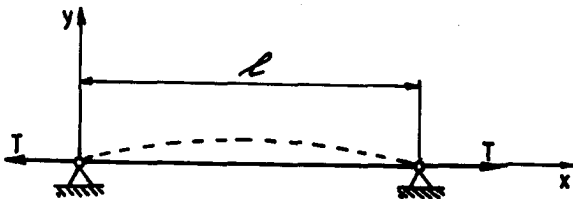
probleem dus twee oplossingen:

- i) alleen indrukking,
- ii) uitbuiging en indrukking,

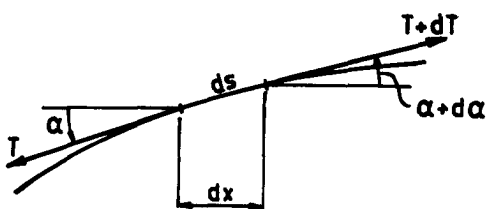
d.w.z. de oplossing is niet meer eeneenduidig. Dit is in strijd met de lineaire theorie. Dus: het stabiliteitsvraagstuk is een essentieel niet-lineair probleem en past dus niet binnen het kader van dit college. Dit probleem wordt behandeld in het hogere jaars college: Stabiliteit.

VIII. Elasto-dynamica. Lineaire theorieVIII.1. Bewegingsvergelijkingen

We beschouwen alleen trillingen van een voorgespannen snaar en een balk.

1. De snaar

door de functie  $y(x,t)$ . In de evenwichtsstand ligt de snaar langs de  $x$ -as van 0 tot  $l$ .



Een snaar is een elastische draad zonder buigstijfheid. In zijn rusttoestand werkt op de snaar een rekkracht  $T$  (de zg. "voorspanning"). We beperken ons tot kleine amplituden. De uitbuiging wordt gegeven

We bekijken de beweging van een element  $ds$ , geprojecteerd op de  $x$ -as als  $dx$ . Omdat we ons beperken tot kleine uitwijkingen geldt:

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad , \quad \cos \alpha \approx 1 \quad .$$

Dan is, in deze benadering, de horizontale kracht ter plaatse  $x$  :

$$T \cos \alpha \approx T \quad ,$$

en ter plaatse  $(x+dx)$  :

$$T \cos(\alpha+d\alpha) \approx T \quad ,$$

dus er werkt, in deze benadering, geen resulterende horizontale kracht op  $ds$ . De verticale kracht op  $ds$  naar boven gericht is

$$(T\alpha)_{x+dx} - (T\alpha)_x = \frac{\partial}{\partial x} (T\alpha)dx + O(d^2x) \quad . \quad (8.01)$$

Omdat

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \tan \alpha \approx \alpha \quad ,$$

volgt uit (8.01) voor de verticale kracht op  $ds$  :

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad . \quad (8.02)$$

Indien  $\rho$  de massa per lengte-eenheid van de snaar is, is massa maal versnelling van het element  $ds$  gelijk aan

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad , \quad (8.03)$$

eveneens naar boven gericht. Uit (8.02) en (8.03) vinden we volgens Newton

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad (8.04)$$

waarvoor we ook kunnen schrijven

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad (8.05)$$

met

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad . \quad (8.06)$$

## 2. De balk

We gaan uit van de vergelijking voor de statische uitbuiging van de balk, welke in de hier gebruikte notatie wordt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = q(x) \quad . \quad (8.07)$$

Indien de oppervlakte van de doorsnede ter plaatse  $x$ ,  $S(x)$  bedraagt en de dichtheid  $\rho(x)$ , dan kunnen we voor  $qdx$  de traagheidskracht

$$- \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx \quad , \quad (8.08)$$

invoeren volgens d'Alembert. Dan wordt (8.07)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (8.09)$$

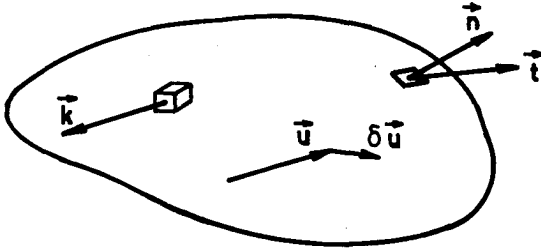
Dit is de bewegingsvergelijking voor de balk. Indien er nog krachten  $q(x,t)$  per lengte-eenheid op de balk werken, wordt (8.09) gegeneraliseerd tot

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t) \quad . \quad (8.10)$$



VIII.2. Principe van Hamilton

We zullen de bewegingsvergelijking voor de balk (8.09) afleiden met behulp van het principe van Hamilton. We beperken ons tot balken, waarbij aan de randen geen energie in het systeem gestopt kan worden (dus geen verende ophellingen).



We beschouwen een verandering van het verplaatsingsveld  $\vec{u}$  :  $\delta\vec{u}$  waarvoor geldt:

$$i) \quad \delta u_i = 0 \quad \text{op die plaatsen, waar de verplaatsing is voorgeschreven} \quad (8.11)$$

$$ii) \quad (\delta u_i)_{,j} = \delta u_{i,j} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\delta u_i) = \delta \dot{u}_i \quad . \quad (8.12)$$

Dan geldt de volgende vergelijking

$$\int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i \, dV + \int_V t_{ij} \delta u_{i,j} \, dV - \int_V k_i \delta u_i \, dV - \int_S t_i \delta u_i \, dS = 0 \quad . \quad (8.13)$$

Bewijs:

Met (2.04) en (3.06) kunnen we afleiden:

$$\begin{aligned} & \int_V k_i \delta u_i \, dV + \int_S t_i \delta u_i \, dS = \\ & = \int_V k_i \delta u_i \, dV + \int_V (t_{ij} \delta u_i)_{,j} \, dV = \\ & = \int_V (k_i + t_{ij,j}) \delta u_i \, dV + \int_V t_{ij} (\delta u_i)_{,j} \, dV = \\ & = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i \, dV + \int_V t_{ij} \delta u_{i,j} \, dV \quad . \end{aligned} \quad \underline{\text{q.e.d.}}$$

Nu is volgens (5.26)

$$\int_V t_{ij} \delta u_{i,j} \, dV - \int_V k_i \delta u_i \, dV - \int_S t_i \delta u_i \, dS = \delta U \quad , \quad (8.14)$$

want, volgens (8.11)

$$\int_{S_p} t_i \delta u_i dS = \int_S t_i \delta u_i dS \quad , \quad (8.15)$$

omdat  $\delta u_i = 0$  op  $S_u$ .

Als we (8.13) integreren naar  $t$ , van  $t_1$  tot  $t_2$ , krijgen we met (8.14):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \right\} dt = - \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dt dV = \\ &= - \int_V \rho \dot{u}_i \delta u_i dV \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_V \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta (\dot{u}_i^2)}{2} dt \right\} \rho dV \quad . \end{aligned} \quad (8.16)$$

We eisen nu bovendien dat

$$\delta u_i = 0 \quad \text{voor} \quad t = t_1 \quad \text{en} \quad t = t_2 \quad , \quad (8.17)$$

waarmee (8.16) overgaat in

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta \left( \frac{\dot{u}_i^2}{2} \right) \rho dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \quad , \quad (8.18)$$

met  $T$ : kinetische energie.

Hiermee is bewezen het principe van Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad , \quad L = T - U \quad , \quad (8.19)$$

voor continue systemen.

Voor het geval van de balk is

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho S \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad , \quad (8.20)$$

terwijl

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad . \quad (8.21)$$

(8.19) wordt hier dus

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \left\{ \rho S \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx dt = 0 \quad . \quad (8.22)$$

Met (8.12) kunnen we (8.22) schrijven als

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \left\{ \rho S \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta y - EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta y \right\} dx dt = 0 \quad . \quad (8.23)$$

We vormen (8.23) als volgt om

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \rho S \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta y dx dt &= \int_0^{\ell} \int_{t_1}^{t_2} \rho S \frac{\partial y}{\partial t} d(\delta y) dx = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dx dt \quad . \end{aligned} \quad (8.24)$$

Bij de laatste stap is gebruik gemaakt van (8.17).

De tweede integraal in (8.23) wordt

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d\left(\frac{\partial}{\partial x} \delta y\right) dt &= \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta y \right\} \Big|_0^{\ell} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \frac{d}{dx} \delta y dx dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \right\} \Big|_0^{\ell} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \delta y \Big|_0^{\ell} dt + \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \delta y dx dt \quad . \end{aligned} \quad (8.25)$$

In (8.25) zijn

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \Big|_0^{\ell} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \delta y \Big|_0^{\ell} \quad ,$$

resp. de arbeid verricht door het moment en door de dwarskracht aan de randen. Aangezien we eizen dat aan de randen geen energie wordt toegevoerd, moeten deze termen nul zijn.

Uit (8.24) en (8.25) volgt dan, dat Hamilton's principe voor de balk overgaat in

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \left\{ \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \right\} \delta y dx dt = 0 \quad . \quad (8.26)$$

Daar (8.26) moet gelden voor willekeurige  $\delta y$  moet

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (8.27)$$

Dit is weer de bewegingsvergelijking voor de balk (8.09).

Op analoge wijze kunnen ook andere bewegingsvergelijkingen worden afgeleid.

### VIII.3. Trilvormen

We bekijken van de snaar en de balk harmonische trillingen; dit zijn trillingen van de vorm

$$y(x, t) = W(x) \cos \omega t \quad , \quad (8.28)$$

waarin  $\omega$  de hoekfrequentie is.

Substitueren we (8.28) in (8.05) en (8.09) dan krijgen we

voor de snaar

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + k^2 W = 0 \quad , \quad k = \frac{\omega}{c} \quad , \quad (8.29)$$

en voor de balk

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \rho S \omega^2 W = 0 \quad . \quad (8.30)$$

De vergelijkingen (8.29) en (8.30) kunnen alleen worden opgelost, indien de randvoorwaarden gegeven zijn. Deze zijn homogeen, zodat deze vraagstukken aanleiding geven tot eigenwaardeproblemen. Een triviale oplossing is steeds  $W = 0$ .

We zullen nu de snaar en de balk afzonderlijk beschouwen.

### 1. De snaar

De snaar is ingeklemd bij  $x=0$  en  $x=l$ , zodat de randvoorwaarden worden

$$W = 0 \text{ op } x = 0 \text{ en op } x = l \quad . \quad (8.31)$$

De algemene oplossing van (8.29) luidt

$$W(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad . \quad (8.32)$$

Uit (8.31) volgt dan

$$A = 0 \quad ,$$

$$\text{en } B \sin kl = 0 \quad , \quad (8.33)$$

waaraan wordt voldaan door

$$B = 0 \quad , \quad (\Leftrightarrow W = 0)$$

$$\text{of } B \neq 0 \quad , \quad k = \frac{n\pi}{l} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad . \quad (8.34)$$

De waarden (8.34) van  $k$  zijn de eigenwaarden. De eigenfuncties zijn

$$B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad .$$

We noemen

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} c \quad , \quad (8.35)$$

de  $n^{\circ}$  eigenfrequentie.

De totale oplossing voor de trillingsvorm van de snaar luidt

$$y(x, t) = \sum_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \quad . \quad (8.36)$$

$B_n$  volgt uit de beginvoorwaarden voor  $y(x, 0)$ .

Het hoofdprobleem in de mechanica is het bepalen van de eigenfrequenties.

### 2. De balk

We behandelen alleen de balk met constante buigstijfheid  $EI$ , dichtheid  $\rho$  en doorsnede  $S$ . Dan wordt (8.30)

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = 0 \quad , \quad k^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \quad . \quad (8.37)$$

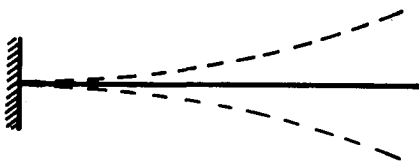
Om (8.37) te kunnen oplossen moeten aan elke rand twee randvoorwaarden gegeven zijn, welke kunnen zijn

$$\text{i) opgelegd: } W = \frac{d^2W}{dx^2} = 0 \quad ,$$

$$\text{ii) ingeklemd: } W = \frac{dW}{dx} = 0 \quad ,$$

$$\text{iii) vrij: } \frac{d^2W}{dx^2} = \frac{d^3W}{dx^3} = 0 \quad .$$

We behandelen als voorbeeld een balk waarvan het ene einde ingeklemd en het andere vrij is.



De algemene oplossing van (8.37) luidt

$$W(x) = A \sin kx + B \cos kx + C \sinh kx + D \cosh kx \quad . \quad (8.38)$$

Uit de randvoorwaarden

$$W = \frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{op } x = 0 \quad ,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{d^3W}{dx^3} = 0 \quad \text{op } x = l \quad ,$$

volgt dat  $W(x)$  te schrijven is als

$$W(x) = A[\sin kx - \sinh kx] + B[\cos kx - \cosh kx] \quad , \quad (8.39)$$

waarbij voor A en B de homogene vergelijkingen gelden

$$\left. \begin{aligned} A(\sin kl + \sinh kl) + B(\cos kl + \cosh kl) &= 0 \\ A(\cos kl + \cosh kl) + B(-\sin kl + \sinh kl) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

De vergelijkingen hebben alleen een niet-triviale oplossing, indien de determinant

$$\begin{vmatrix} (\sin kl + \sinh kl) & (\cos kl + \cosh kl) \\ (\cos kl + \cosh kl) & (-\sin kl + \sinh kl) \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

wat kan worden vereenvoudigd tot

$$\cos kl \cosh kl = -1 \quad , \quad (8.40)$$

een transcendente vergelijking met de oplossingen

$$k_1 l = 1,8751\dots \quad ; \quad k_2 l = 4,6941\dots \quad ; \quad k_3 l = 7,8548\dots \quad ;$$

etc. (8.41)

De eigenfrequenties zijn

$$f_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \frac{(k_n l)^2}{2\pi l^2} \quad . \quad (8.42)$$

#### VIII.4. De methode van Rayleigh voor de approximatieve berekening der eigenfrequenties

We beschouwen alleen de balkenvergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \rho S \omega^2 W = 0 \quad . \quad (8.43)$$

Vermenigvuldigen we (8.43) met  $W$  en integreren we over  $x$  van 0 tot  $l$ , dan ontstaat

$$\int_0^l W \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx - \omega^2 \int_0^l \rho S W^2 dx = 0 \quad . \quad (8.44)$$

Door partiële integratie vormen we de eerste integraal van (8.44) om tot

$$\begin{aligned} \int_0^l W \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx &= W \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^l + \\ &- \frac{dW}{dx} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^l + \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \quad . \end{aligned} \quad (8.45)$$

Bij natuurlijke randvoorwaarden zijn de eerste twee termen van (8.45) nul, zodat

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho S W^2 dx} \quad . \quad (8.46)$$

We onderzoeken eerst de betekenis van (8.46). Met

$$y(x, t) = W(x) \cos \omega t \quad ,$$

wordt de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho S \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^l \rho S W^2 dx \quad , \quad (8.47)$$

terwijl de potentiële energie U wordt

$$U = \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \quad . \quad (8.48)$$

Formule (8.46) drukt dus uit dat

$$\bar{T} = \bar{U} \quad , \quad (8.49)$$

waarin  $\bar{T}(\bar{U})$  de middelwaarde van  $T(U)$  over een periode is, op grond van

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} \quad . \quad (8.50)$$

Zoals direct uit (8.47) en (8.48) blijkt, komt (8.46) ook overeen met

$$T + U = \text{constant} \quad .$$

Rayleigh's principe leert nu het volgende:

Stel  $W(x)$  is de exacte oplossing. Beschouw een kleine afwijking van deze oplossing:  $W(x) + \delta W(x)$ . Substitueren we deze oplossing in (8.46) dan vinden we:  $\omega^2 + \delta \omega^2$ . Volgens Rayleigh is nu  $\delta \omega^2 = 0$ ; d.w.z.  $\omega^2$  is stationair tegenover kleine veranderingen in de waarden van  $W(x)$ .

#### Bewijs

We gebruiken het principe van Hamilton (8.19), dat hier wordt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^l \rho S W^2 dx - \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \right\} dt = 0 \quad . (8.51)$$

De variaties moeten voldoen aan (8.17), dus moet

$$\delta W(x) \cos \omega t_1 = \delta W(x) \cos \omega t_2 = 0 \quad , \quad (8.52)$$

waaraan voldaan is door de keuze

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega} \quad , \quad t_2 = \frac{3\pi}{2\omega} \quad . \quad (8.53)$$

Met (8.53) wordt (8.51) geïntegreerd over de tijd

$$\delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \delta \int_0^l \rho S W^2 dx = 0 \quad . \quad (8.54)$$



Uit (8.46) volgt

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\left[ \int_0^l \rho S W^2 dx \right]^2} \left\{ \int_0^l \rho S W^2 dx \cdot \delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx + \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \delta \int_0^l \rho S W^2 dx \right\} = \\
 &= \frac{1}{\int_0^l \rho S W^2 dx} \left\{ \delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \delta \int_0^l \rho S W^2 dx \right\} = 0 \quad ,
 \end{aligned}$$

op grond van (8.54).

q.e.d.

De praktische betekenis van Rayleigh is gelegen in het feit, dat in veel technische problemen het verloop van  $\omega^2$  in de buurt van de exacte oplossing erg vlak is. Het principe van Rayleigh is een minimum-principe, d.w.z. de gevonden benaderingen voor  $\omega^2$  zijn altijd groter dan of gelijk aan de exacte oplossing. De laagste waarde van het quotiënt (8.46) geeft de grondfrequentie.

Opmerking. We zijn er bij de voorgaande beschouwingen steeds van uitgegaan dat aan de randen geen energie in het systeem gebracht kan worden (natuurlijke randvoorwaarden). Hieraan is bijv. niet voldaan bij een balk welke ondersteund wordt door een veer. We moeten dan het totale systeem (dus balk + veer) beschouwen.

#### Voorbeelden

1. We zoeken opnieuw de grondfrequentie van de balk, welke vrij-ingeklemd is. Een functie die aan alle randvoorwaarden voldoet is

$$W(x) = cx^2(6l^2 - 4lx + x^2) \quad . \quad (8.55)$$

Opmerking. Een goede probeerfunctie  $W(x)$  moet steeds voldoen aan de kinematische (of geometrische) randvoorwaarden (dit zijn randvoorwaarden voor  $W$  en  $\frac{dW}{dx}$ ), maar hoeft niet noodzakelijk te voldoen aan de dynamische randvoorwaarden (voor  $M$  en  $D$ ).

Met (8.55) vinden we als approximatieve waarde van de grondfrequentie

$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho S} \frac{1}{l^4} 12,46 \quad , \quad (8.56)$$

waaruit volgt

$$f = \frac{\sqrt{12,46}}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad . \quad (8.57)$$

De exacte coëfficiënt is:  $\sqrt{12,3623\dots}$

We verbeteren nu de benadering als volgt. Indien de balk belast wordt door een geconcentreerde kracht op  $x=a$  is de doorbuiging

$$\left. \begin{aligned} W(x) &= c(3ax^2 - x^3) \quad , \quad 0 \leq x \leq a \\ W(x) &= ca^2(3x - a) \quad , \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad . \quad (8.58)$$

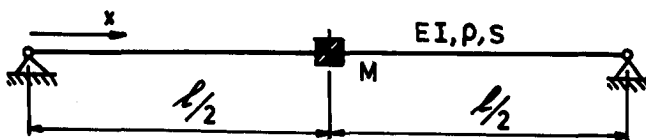
Bij deze doorbuiging vinden we met Rayleigh

$$\omega^2 = \frac{12EI}{\rho S l^4} \frac{1}{3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3 - \frac{2}{35}\alpha^4} \quad , \quad \alpha = \frac{a}{l} \quad . \quad (8.59)$$

We kiezen nu  $a$  (dus  $\alpha$ ) zodanig dat  $\omega^2$  minimaal wordt. Het maximum van de noemer van (8.59) ligt nabij  $\alpha = 0,75$  en is ongeveer:  $31/32$ . Hiervoor wordt (8.59)

$$\omega^2 = \frac{31}{32} \frac{12EI}{\rho S l^4} = 12,39 \frac{EI}{\rho S l^4} \quad . \quad (8.60)$$

2.



We krijgen in dit geval een extra term in de kinetische energie t.g.v. de massa  $M$ . Het Rayleigh-quotiënt wordt dus

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(W'')^2 dx}{\int_0^l \rho S W^2 dx + M W^2 \left(\frac{l}{2}\right)} \quad . \quad (8.61)$$

We proberen eerst

$$W(x) = cx(3l^2 - 4x^2) \quad , \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad . \quad (8.62)$$

Dit is de statische uitbuiging bij een kracht in het midden van de balk.

(8.62) substitueren in (8.61) geeft:

$$\omega^2 = \frac{EI}{l^3} \cdot \frac{48}{M + \frac{34}{70} m}, \quad m = \rho l S \quad (8.63)$$

Als we voor  $W(x)$  nemen de vrije trilvorm voor het geval  $M = 0$ :

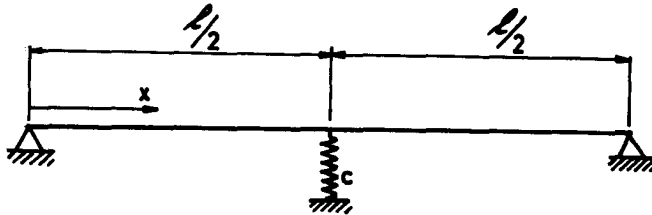
$$W(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (8.64)$$

vinden we

$$\omega^2 = \frac{EI}{l^3} \frac{\pi^4}{2(M + \frac{1}{2} m)} \quad (8.65)$$

De resultaten (8.63) en (8.65) zijn in redelijke overeenstemming.

3.



Dit is een voorbeeld van een systeem met een verende ondersteuning. We moeten nu dus ook de energie van de veer in rekening brengen. Dit betekent dat we in de potentiële energie een extra term krijgen t.g.v. de veer, welke gelijk is aan ( $c =$  veerconstante)

$$\frac{1}{2} c y^2\left(\frac{l}{2}, t\right)$$

Het Rayleigh-quotiënt

$$\omega^2 = \frac{EI \int_0^l (W''')^2 dx + c W^2\left(\frac{l}{2}\right)}{\rho S \int_0^l W^2 dx} \quad (8.66)$$

Kiezen we als uitbuigingsvorm

$$W(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),$$

dan vinden we

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{\rho S l^4} + \frac{2c}{\rho S l} \quad (8.67)$$