

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# **TOEGEPASTE MECHANICA**

**Syllabus van het College van**

**Prof. Dr. J.B. Alblas**

**Gegeven in het Najaarssemester 1976**

Wisk. Bijbel



Technische Hogeschool Eindhoven

A T C  
0 1  
T H E

## *Onderafdeling der Wiskunde*

### *Toegepaste mechanica*

Syllabus van het college van prof. dr. J.B. Alblas

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Toegepaste Mechanica

Syllabus van het college van

Prof.dr. J.B. Alblas

Najaarssemester 1976

## Inhoudsopgave

I.	<u>Deformaties</u>	
I.1.	Verplaatsingen	2
I.2.	De deformaties	3
I.3.	De compatibiliteitsvergelijkingen	8
I.4.	De hoofdrichtingen en invarianten	14
I.5.	Kromlijnige coördinaten	18
II.	<u>Spanningsleer</u>	
II.1.	De spanningstensor	28
II.2.	Hoofdspanningen en hoofdrichtingen	31
III.	<u>Dynamica van het elastische lichaam</u>	
III.1.	De impulsstelling	33
III.2.	De momentenstelling	39
IV.	<u>Het verband tussen spanningen en deformaties</u>	
IV.1.	De wet van Hooke	42
IV.2.	De elasticiteitsconstanten	44
IV.3.	De vergelijkingen van Navier	45
IV.4.	De randcondities	46
V.	<u>Energie-beschouwingen</u>	
V.1.	Elastische energie	48
V.2.	Reciprociteitsstelling van Betti, eenduidigheidsstelling, stellingen van minimum potentiële en minimum complementaire energie	51
V.3.	Stelling van Castigliano	58
VI.	<u>Torsie van cilindrische staven</u>	
VI.1.	Inleiding	60
VI.2.	Exacte oplossing uitgaande van een verplaatsingsveld	61
VI.3.	Exacte oplossing uitgaande van een spanningsveld	63
VI.4.	Benaderingsoplossingen	69

VII.	<u>Buiging van cilindrische staven</u>	
VII.1.	Buiging door een moment. Exacte theorie	74
VII.2.	Buiging door een dwarskracht. Benaderingstheorie	76
VII.3.	Stelling van Castigliano voor balken	90
VII.4.	Doelstellingen van de technische mechanica	98
VIII.	<u>Elasto-dynamica. Lineaire theorie</u>	
VIII.1.	Bewegingsvergelijkingen	100
VIII.2.	Principe van Hamilton	102
VIII.3.	Trilvormen	105
VIII.4.	De methode van Rayleigh voor de approximatieve berekening der eigenfrequenties	108
IX.	<u>Eindige elementen methode</u>	
IX.1.	Inleiding	114
IX.2.	Techniek van de elementen methode	120
IX.3.	Mathematische aspecten	142

## Inleiding

In dit college zullen de deformaties van continue lichamen bestudeerd worden. De grondlegger van dit deel van de mechanica is Cauchy (+ 1824).

We noemen een lichaam deformeerbaar, indien het onder invloed van uitwendige krachten van vorm kan veranderen. Een deformeerbaar lichaam heeft oneindig veel graden van vrijheid, wat aanleiding geeft tot partiële differentiaalvergelijkingen. Dit in tegenstelling tot het college "Theoretische Mechanica", waarin de bewegingen van starre lichamen worden behandeld. Deze lichamen hebben slechts een eindig aantal graden van vrijheid, zodat ze beschreven kunnen worden door gewone differentiaalvergelijkingen.

We kunnen dit college splitsen in twee delen, nl.

- i) Een inleiding in de lineaire elasticiteitstheorie (I t/m V).

Hierbij betekent

- a) lineair: we beperken ons tot zeer kleine deformaties,
- b) elastisch: het lichaam keert na opheffing van de werking van de uitwendige krachten naar zijn oorspronkelijke onvervormde toestand terug.

- ii) Een inleiding in de sterkteleer (VI t/m VIII).

In deze hoofdstukken worden approximatieve berekeningen gegeven, speciaal voor de torsie, buiging en trillingen van balken.

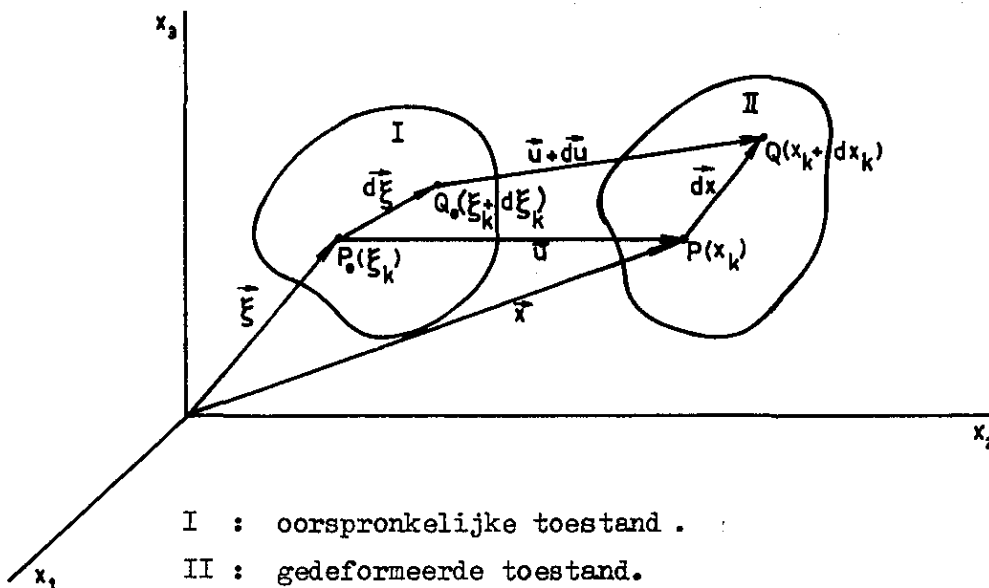
I. Deformaties.

I.1. Verplaatsingen.

We beschouwen continue, deformeerbare lichamen. Een lichaam heet deformeerbaar, indien het onder invloed van uitwendige krachten van vorm kan veranderen. Bij de vervorming zal ieder punt van het lichaam een verplaatsing ondergaan, welke een vector is met drie componenten:  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$  en  $u_3 = w$ . We zullen zowel de  $u_1, u_2, u_3$  notatie als de  $u, v, w$  notatie gebruiken. In het algemeen zijn  $u, v$  en  $w$  van plaats tot plaats verschillend, dus:

$$u_i = u_i(x_k) \quad . \quad (1.01)$$

Formule (1.01) drukt uit, dat er een verplaatsingsveld is. We nemen aan dat  $u_i$  een continu-differentieerbare functie van  $x_k$  is. De verplaatsingen bestaan in het algemeen uit een translatie en een rotatie als star lichaam plus een locale verplaatsing.



We gaan nu kijken naar een lichaam, dat gedeformeed wordt van toestand I naar II (zie figuur). We beschouwen een punt  $P_0$  van dit lichaam, welk punt in toestand I de coördinaten:  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  (in het cartesische stelsel  $x_1, x_2, x_3$ ) heeft. Na deformatie (II) gaat dit over in P met coördinaten:  $x_1, x_2, x_3$ . Er bestaat dus een afbeelding:

$$x_k = x_k(\xi_l) \quad . \quad (1.02)$$

Deze afbeelding moet voldoen aan de volgende twee topologische eisen:

1. Twee punten die voor de deformatie oneindig dicht bij elkaar liggen, blijven ook na de deformatie oneindig dicht bij elkaar (d.w.z. we laten geen scheuren in het lichaam toe).
2. Een punt dat op de rand (resp. in het inwendige) ligt, blijft ook na de deformatie op de rand (in het inwendige) liggen.

De verplaatsing van P definiëren we als:

$$u_i := x_i - \xi_i \quad . \quad (1.03)$$

We gaan nu kijken naar een punt Q, dat op een infinitesimale afstand van  $P_0$  ligt. De coördinaten van Q zijn:  $\xi_k + d\xi_k$  vóór de deformatie en:  $x_k + dx_k$  na de deformatie. Het is duidelijk, dat een lijnstukje  $P_0 Q_0$  met een eindige lengte, dat voor de deformatie recht is, door de deformatie krom kan worden.

Nu geldt:

$$d\xi_i = dx_i - du_i = dx_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = dx_i - u_{i,j} dx_j \quad , \quad *) \quad (1.04)$$

waarbij:  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad .$

We hebben hier  $u_i$  beschouwd als functie van  $x_k$ . We kunnen  $u_i$  echter ook beschouwen als functie van  $\xi_k$  immers:

$$u_i(x_k) = u_i[\xi_k(\xi_k)] \quad .$$

Indien we alle grootheden uitdrukken in  $\xi_k$  spreken we van Lagrange-systeem, idem bij  $x_k$  van Euler-systeem. In de lineaire theorie, waartoe wij ons in dit college zullen beperken, is er echter geen verschil tussen beide systemen.

We noemen de lengte van het lijnstukje  $P_0 Q_0$ :  $d\ell_0$  en van PQ:  $d\ell$ . Dan geldt:

$$d\ell_0^2 = d\xi_i d\xi_i \quad , \quad (i=1,2,3) \quad , \quad (1.05)$$

$$d\ell^2 = dx_i dx_i \quad . \quad (1.06)$$

## I.2. De deformaties.

We beschouwen:  $\frac{1}{2}(d\ell^2 - d\ell_0^2)$  .

Met (1.04), (1.05) en (1.06) krijgen we hiervoor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(d\ell^2 - d\ell_0^2) &= \frac{1}{2}(dx_i dx_i - d\xi_i d\xi_i) = \\ &= \frac{1}{2}[dx_i dx_i - (dx_i - u_{i,j} dx_j)(dx_i - u_{i,k} dx_k)] = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [u_{i,k} dx_i dx_k + u_{i,j} dx_j dx_i - u_{i,j} u_{i,k} dx_j dx_k] = \\
 &= \frac{1}{2} [u_{j,k} dx_j dx_k + u_{k,j} dx_j dx_k - u_{i,j} u_{i,k} dx_j dx_k] = \\
 &= \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j} - u_{i,j} u_{i,k}) dx_j dx_k \quad . \quad (1.07)
 \end{aligned}$$

We definiëren nu de deformatietensor  $e_{ij}$  door:

$$\frac{1}{2} (dl^2 - dl_0^2) = e_{ij} dx_i dx_j \quad . \quad (1.08)$$

Vergelijken van (1.07) en (1.08) geeft:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad . \quad (1.09)$$

We zullen ons in dit college steeds beperken tot zeer kleine (wiskundig: infinitesimale) deformaties. Dan is het mogelijk de tweede graads termen in (1.09) te schrappen, zodat we krijgen

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (1.10)$$

De niet-lineaire theorie, die we krijgen indien we de laatste term van (1.09) niet verwaarlozen, wordt behandeld in het college: continuums-mechanica.

De tensor  $e_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) heeft eigenlijk 9 componenten, maar aangezien (zoals direct volgt uit (1.09))  $e_{ij} = e_{ji}$ , blijven er maar 6 verschillende over.

In de techniek worden gebruikt de notaties:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} ; \quad . \quad (1.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} ; \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Vergelijken van (1.10) en (1.11) geeft:

$$\epsilon_x = e_{11} , \quad \gamma_{xy} = 2e_{12} , \quad \text{etc.} \quad (1.12)$$

Uit (1.08) volgt dat  $e_{ij}$  een tensor is van de tweede orde. Immers:  $\frac{1}{2} (dl^2 - dl_0^2)$  is invariant tegenover orthogonale coördinaten-transformaties:

$$\bar{x}_i = l_{ij} x_j , \quad (\text{rotatie van het assenkruis}) \quad . \quad (1.13)$$

$l_{ij}$  is de richtingscosinus tussen  $\bar{x}_i$  en  $x_j$ . In het algemeen is:  $l_{ij} \neq l_{ji}$ .

Verder geldt:

$$\sum l_{ij} l_{ik} = \delta_{jk} \quad , \quad l_{ki} l_{ji} = \delta_{jk} \quad . \quad (1.14)$$

$\delta_{jk}$ : Kronecker-delta .

Omdat  $(dl^2 - dl_0^2)$  invariant is, geldt:

$$e_{kl} dx_k dx_l = \bar{e}_{kl} d\bar{x}_k d\bar{x}_l \quad . \quad (1.15)$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{kl} d\bar{x}_k d\bar{x}_l &= \bar{e}_{kl} l_{kj} dx_j l_{li} dx_i = \\ &= l_{il} l_{jk} \bar{e}_{ji} dx_k dx_l \quad . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Dus:

$$e_{kl} = l_{il} l_{jk} \bar{e}_{ij} \quad (1.17)$$

Door formule (1.17) te vermenigvuldigen met  $l_{pk}$  en  $l_{ql}$  vinden we (met (1.14)):

$$e_{kl} l_{pk} l_{ql} = l_{il} l_{ql} l_{jk} l_{pk} \bar{e}_{ij} = \delta_{iq} \delta_{jp} \bar{e}_{ij} = \bar{e}_{pq} \quad .$$

Dus:

$$\bar{e}_{ij} = l_{ik} l_{jl} e_{kl} \quad . \quad (1.18)$$

We hebben de deformaties volledig wiskundig formeel ingevoerd. We gaan nu de fysische betekenis ervan onderzoeken.

Indien we de punten P en Q zodanig kiezen, dat ze na de deformatie langs de  $x_1$ -as liggen (dan wordt  $dx_2 = dx_3 = 0$ ) gaat (1.08) over in:

$$\frac{1}{2}(dl^2 - dl_0^2) = e_{11} dx_1^2 \quad . \quad (1.19)$$

Nu is:  $dl = dx_1$ , zodat:

$$e_{11} = \frac{dl^2 - dl_0^2}{2dl^2} = \frac{dl - dl_0}{dl} \cdot \frac{dl + dl_0}{2dl} \quad . \quad (1.20)$$

Bij infinitesimale deformaties verschillen  $dl$  en  $dl_0$  slechts een waarde, welke klein is van een hogere orde dan  $dl_0$ . Dus mag gesteld worden:

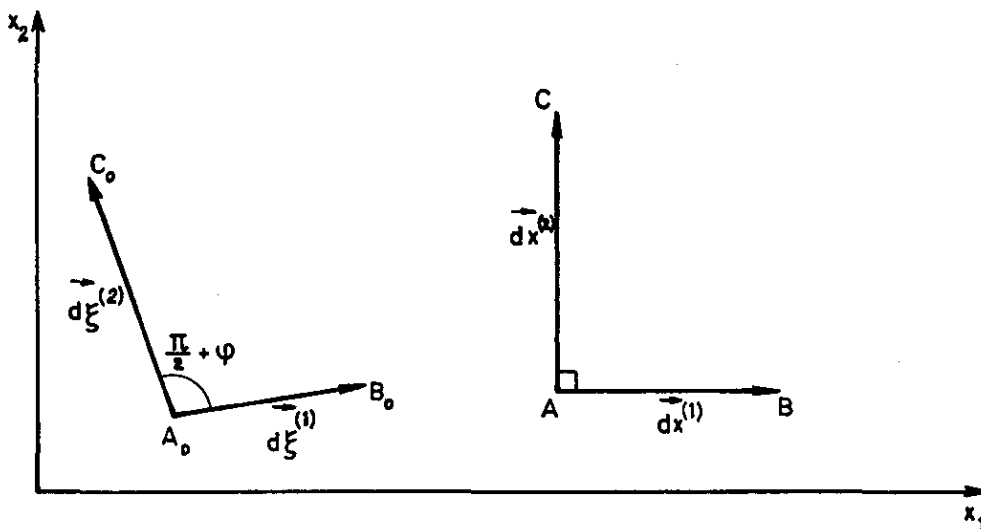
$$\frac{dl + dl_0}{2} \approx dl \approx dl_0 \quad . \quad (1.21)$$

Hiermee wordt (1.20):

$$e_{11} = \frac{dl - dl_0}{dl_0} \quad (1.22)$$

$e_{11}$  is dus de relatieve verlenging van een element van de lengte  $dl_0$  in de  $x_1$ -richting. We noemen het de rek in de  $x_1$ -richting. Op gelijke wijze blijken  $e_{22}$  en  $e_{33}$  de rekken te zijn in resp. de  $x_2$ - en de  $x_3$ -richting.

We onderzoeken nu de betekenis van  $e_{12}$ .



De vectoren  $\vec{A_0B_0}$  en  $\vec{A_0C_0}$  gaan na deformatie over in de vectoren  $\vec{AB}$  en  $\vec{AC}$ , welke evenwijdig zijn aan resp. de  $x_1$ -as en de  $x_2$ -as. Dan geldt, zoals we hiervoor hebben gezien:

$$|\vec{d\xi}^{(1)}| = \frac{|\vec{dx}^{(1)}|}{(1 + e_{11})} ; \quad |\vec{d\xi}^{(2)}| = \frac{|\vec{dx}^{(2)}|}{(1 + e_{22})} \quad (1.23)$$

Uit het scalair produkt:

$$(\vec{d\xi}^{(1)}, \vec{d\xi}^{(2)}) = d\xi_i^{(1)} d\xi_i^{(2)} = |\vec{d\xi}^{(1)}| |\vec{d\xi}^{(2)}| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \quad (1.24)$$

volgt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi = \frac{d\xi_i^{(1)} d\xi_i^{(2)}}{|\vec{d\xi}^{(1)}| |\vec{d\xi}^{(2)}|}$$

Met:  $d\xi_i = dx_i - u_{i,j} dx_j$  ,

wordt dit:

$$\sin \varphi = - \frac{(dx_i^{(1)} - u_{i,j} dx_j^{(1)})(dx_i^{(2)} - u_{i,k} dx_k^{(2)})}{|d\vec{\xi}^{(1)}| |d\vec{\xi}^{(2)}|} \quad (1.25)$$

Aangezien:

$$d\vec{x}^{(1)} = (dx_1, 0, 0) \quad \text{en} \quad d\vec{x}^{(2)} = (0, dx_2, 0)$$

krijgen we met (1.23) als we de termen van de orde  $(u_{i,j})^2$  verwaarlozen:

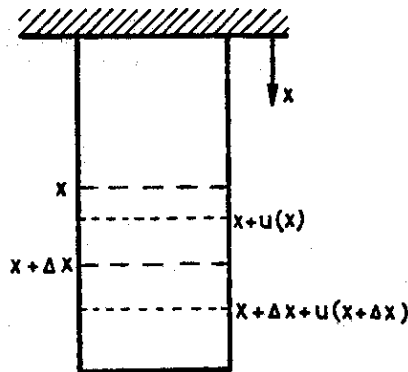
$$\sin \varphi = \frac{(u_{1,2} + u_{2,1}) dx_1 dx_2}{dx_1 dx_2} = (u_{1,2} + u_{2,1}) = 2e_{12} \quad (1.26)$$

Omdat de deformaties klein zijn, is ook  $|\varphi| \ll 1$ , d.w.z.:  $\sin \varphi = \varphi$ , zodat we tenslotte krijgen:

$$e_{12} = \frac{1}{2} \varphi \quad (1.27)$$

$e_{12}$  is dus een maat voor de vermindering van de hoek tussen twee vectoren. We noemen  $e_{12}$  de afschuiving. Soortgelijke beschouwingen gelden voor  $e_{23}$  en  $e_{31}$ .

Aansluiting met de technische theorie verkrijgen we indien we een eenvoudig blokje bekijken:

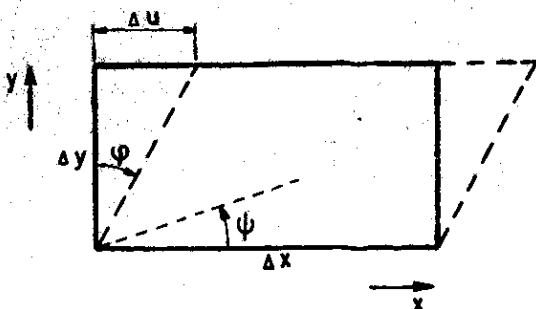


De verplaatsing in x is  $u(x)$ , die in  $x + \Delta x$ :  $u(x + \Delta x)$ . De lengte van het elementje  $dx$  wordt dus:

$$\begin{aligned} & [x + \Delta x + u(x + \Delta x)] - [x + u(x)] = \\ & = \Delta x + u(x + \Delta x) - u(x) \quad (1.28) \end{aligned}$$

De relatieve lengteverandering wordt dus:

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} =: \epsilon_x \quad (1.29)$$



Bij de afschuiving hebben we:

$$\tan \varphi = \varphi = \frac{\partial u}{\partial y}$$

en algemeen:

$$\varphi + \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} =: \gamma_{xy} \quad (1.30)$$

Dus:

$$\gamma_{xy} = 2e_{12} \quad . \quad (1.31)$$

We voeren naast de  $e_{ij}$  de rotaties  $\omega_{ij}$  in volgens:

$$\omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad . \quad (1.32)$$

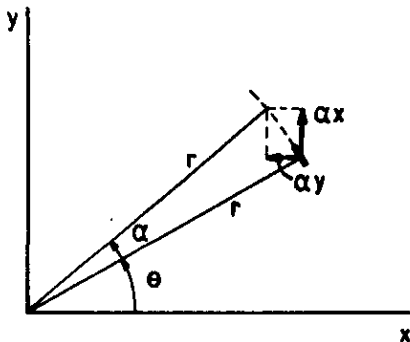
Uit (1.10) en (1.32) volgt:

$$e_{ij} + \omega_{ij} = u_{i,j} \quad . \quad (1.33)$$

De fysieke betekenis van de rotaties  $\omega_{ij}$  is te zien uit de formule:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad .$$

Dit is de infinitesimale draaiingshoek van een element om de z-as, in de negatieve z-richting:



Bij een draaiing van het element  $(r, \theta)$  over de boog  $r\alpha$  is:

$$u = -\alpha y, \quad v = +\alpha x \quad ,$$

waaruit volgt:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}(-\alpha - \alpha) = -\alpha \quad . \quad (1.34)$$

### 1.3. De Compatibiliteitsvergelijkingen.

We gaan uit van een verplaatsingsveld  $(u, v, w)$ , dat voldoende differentieerbaar is. Dan volgt direct uit de definitie van  $e_{xy}$  dat:

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad ,$$

of

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \quad . \quad (1.35)$$

Door de cyclische verwisseling:

$$x, y, z \rightarrow y, z, x \rightarrow z, x, y$$

krijgen we nog twee andere vergelijkingen van dit type.

Een ander type van vergelijkingen is:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) \quad (\text{cyclisch}) \quad (1.36)$$

Door substitutie van (1.10) zien we dat ook aan deze vergelijkingen triviaal voldaan is.

We noemen de zes bovenstaande vergelijkingen de: Compatibiliteitsvergelijkingen.

Stel  $e_{ij}$  (6 stuks) is gegeven.

Deze 6  $e_{ij}$ 's zijn de afgeleiden van 3  $u_i$ 's. Dus in het algemeen zal het niet mogelijk zijn, om uit de 6  $e_{ij}$ 's de 3  $u_i$ 's te bepalen.

Nu geldt echter:

De compatibiliteitsvergelijkingen zijn de noodzakelijke en voldoende voorwaarden, opdat uit een gegeven deformatie de verplaatsingen zijn te bepalen.

Bewijs:

a) Noodzakelijk: triviaal, volgt direct uit de definitie van  $e_{ij}$  (1.10).

b) Voldoende:

Stel: gegeven 6  $e_{kl}$ 's die voldoen aan compatibiliteitsvergelijkingen.

Gevraagd: bestaan de  $u_i$ 's?

We beperken ons tot enkelvoudig samenhangende gebieden.

We schrijven eerst de compatibiliteitsvergelijkingen in de indexnotatie:

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (1.37)$$

Dit zijn 81 vergelijkingen maar de meesten zijn niet onafhankelijk of geven identiek:  $0 = 0$  (bijv.:  $i = j = k = l = 1$ ).

Er blijven nog juist 6 onafhankelijke vergelijkingen over, welke overeenkomen met (1.35) en (1.36).

We voeren in:

$$a_i^{jk} := e_{ij,k} - e_{ik,j} \quad (1.38)$$

Dan wordt (1.37):

$$a_{i,l}^{jk} = a_{l,i}^{jk} \quad (1.39)$$

We beschouwen  $a_i^{jk}$  als de  $i^e$ -component van de vector  $\vec{a}^{jk}$ , en we gebruiken de stelling uit de potentiaaltheorie:

Indien van een vector  $\vec{A}$  geldt:

$$A_{i,j} = A_{j,i} \quad ,$$

is:

$$\text{rot } \vec{A} = 0 \quad ,$$

en dan bestaat er een  $\varphi$ , zodanig dat:

$$\vec{A} = \text{grad } \varphi \quad , \quad (\varphi : \text{skalair}) \quad .$$

Dus volgt uit (1.39) dat er een  $b_{jk}$  bestaat:

$$\vec{a}^{jk} = \text{grad } b_{jk} \tag{1.40}$$

of:

$$a_i^{jk} = b_{jk,i} \quad . \tag{1.41}$$

Uit (1.41) en (1.38) volgt:

$$b_{jk,i} = e_{ij,k} - e_{ik,j} \quad . \tag{1.42}$$

Met (1.42) zien we direct dat:

$$b_{jk,i} = - b_{kj,i} \quad . \tag{1.43}$$

Door de verwisseling:  $j,k,i \rightarrow i,j,k$  in (1.42) krijgen we:

$$b_{ij,k} = e_{ki,j} - e_{kj,i} \quad . \tag{1.44}$$

(1.42) en (1.44) optellen geeft:

$$b_{jk,i} + b_{ij,k} = e_{ij,k} - e_{kj,i}$$

of, met (1.43):

$$b_{jk,i} + e_{jk,i} = b_{ji,k} + e_{ji,k} \quad . \tag{1.45}$$

Definieer:

$$c_{j,k} := b_{jk} + e_{jk} \quad . \tag{1.46}$$

(1.45) wordt dan:

$$c_{j,ki} = c_{j,ik} \quad . \tag{1.47}$$

We waren uitgegaan van gegeven  $e_{ij}$  en we hebben bewezen dat  $b_{jk}$  bestaat. Uit (1.46) en (1.47) volgt dan dat  $c_j$  bestaat.

Uit (1.43) volgt dat:

$$b_{jk} = -b_{kj} \quad , \quad (1.48)$$

op een constante  $na$ , welke we nul kiezen.

Uit (1.46) krijgen we dan:

$$c_{k,j} = b_{kj} + e_{kj} = -b_{jk} + e_{kj} \quad . \quad (1.49)$$

(1.49) en (1.46) optellen geeft:

$$2e_{kj} = c_{k,j} + c_{j,k} \quad . \quad (1.50)$$

We nemen nu  $c_k = u_k$ . We hebben dan dus bewezen dat er een vectorveld  $u$  bestaat, dat voldoet aan (1.50) (of (1.10)).

#### Voorbeeld

1<sup>o</sup>. Gegeven:  $e_{11} = cy^2$ ,  $e_{22} = cx^2$ , overige  $e_{ij}$ 's = 0. (1.51)

Gevraagd: zijn de verplaatsingen te bepalen.

Oplossing:

De enige compatibiliteitsvergelijking, welke met (1.51) niet de identiteit:  $0 = 0$  geeft, luidt:

$$2e_{12,12} = e_{11,22} + e_{22,11} \quad . \quad (1.52)$$

(1.51) substitueren in (1.52) geeft:

$$0 = 2c + 2c \quad .$$

Er is dus niet voldaan aan (1.52) en dus zijn uit (1.51) geen verplaatsingen te bepalen.

We kunnen dit ook op een andere manier aantonen:

Uit:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = cy^2$$

volgt:

$$u = cy^2 x + f(y, z) \quad . \quad (1.53)$$



En analoog: (uit  $e_{22}$ )

$$v = cx^2y + g(x, z) \quad .$$

Dus

$$2e_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 4cxy + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} = 0$$

of:

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = -4cxy$$

en hieraan is onmogelijk te voldoen.

2<sup>e</sup>. Zelfde vraag, maar nu met:

$$e_{11} = -cy^2, \quad e_{22} = cx^2, \quad \text{overige } e_{ij} = 0 \quad . \quad (1.54)$$

In dit geval wordt (1.52):

$$0 = -2c + 2c = 0$$

Dus uit (1.52) zijn wel verplaatsingen te bepalen.

Voor het bepalen van de verplaatsingen zullen we ons beperken tot het twee dimensionale geval:

$$e_{13} = e_{23} = e_{33} = w = 0$$

en:  $u_i = u_i(x, y)$ , (onafhankelijk van  $z$ ),  $(i = 1, 2)$  .

Dan volgt uit:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = -cy^2 \quad ,$$

dat:

$$u(x, y) = -cy^2x + f(y) \quad , \quad (1.55)$$

en analoog uit:

$$e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = cx^2 \quad ,$$

$$v(x, y) = cx^2y + g(x) \quad . \quad (1.56)$$

Substitutie van (1.55) en (1.56) geeft de uitdrukking voor  $e_{12}$ :

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -cyx + \frac{1}{2} \frac{df}{dy} + cxy + \frac{1}{2} \frac{dg}{dx} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{df}{dy} + \frac{dg}{dx} \right) = 0 \quad . \quad (1.57)$$

(1.57) heeft als oplossing:

$$\begin{aligned} f(y) &= a + \alpha y \quad , \\ g(x) &= b - \alpha x \quad . \end{aligned} \tag{1.58}$$

Dus, met (1.55), (1.56) en (1.58):

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -cy^2x + \alpha y + a \\ v(x,y) &= cx^2y - \alpha x + b \end{aligned} \tag{1.59}$$

u en v zijn dus bepaald op een drietal constanten (a, b en  $\alpha$ ) na. Hiervan stellen a en b voor: translaties als star lichaam en  $\alpha$  een rotatie als star lichaam. Deze constanten hebben geen invloed op de deformaties.

In het algemene (3-dimensionale) geval geldt nu:

Indien aan de compatibiliteitsvergelijkingen voldaan is, kunnen we uit de deformaties  $e_{ij}$  de verplaatsingen  $u_i$  bepalen, op een zestal starre lichaamsverplaatsingen na, nl.:

- (i) drie translaties als star lichaam,
- (ii) drie rotaties als star lichaam.

Opmerking

In de tensoranalyse komen de compatibiliteitsvergelijkingen overeen met de eis, dat de kromming van de Riemannse ruimte, waarin onze deformaties moeten plaatsvinden, constant blijft. Dit betekent dat de krommingstensor steeds nul moet zijn. De krommingstensor (Riemann-Cristoffel - tensor) is gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} R_{prst} &:= \frac{1}{2} (g_{pt,rs} + g_{rs,pt} - g_{ps,rt} - g_{rt,ps}) + \\ &+ g^{mn} [\Gamma_{rsm} \Gamma_{ptn} - \Gamma_{rtm} \Gamma_{psn}] \quad . \end{aligned}$$

Hierbij is  $g_{kl}$  gedefinieerd door:

$$dl^2 = g_{kl} dz_k dz_l \quad ,$$

$z_k$  : algemene kromlijnige coördinaten van een punt na de deformatie .

en:  $g^{mn}$  door:

$$g^{mn} g_{np} = \delta_p^m = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq p \\ 1 & \text{als } m = p \end{cases} \quad ,$$

en:  $\Gamma_{rsm} = \frac{1}{2} (g_{rm,s} + g_{ms,r} - g_{rs,m}) \quad .$

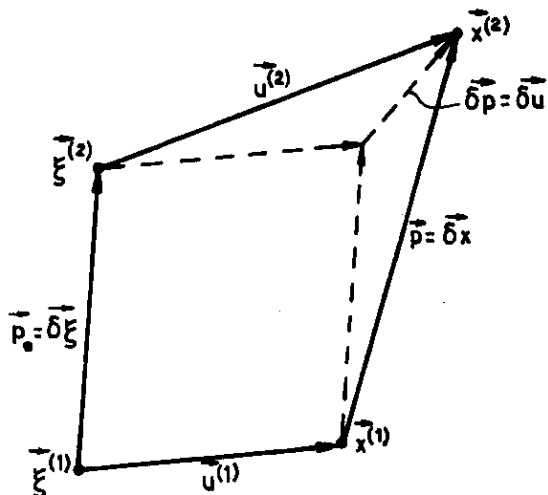
I.4. De hoofdrichtingen en invarianten

We beschouwen in een deformeerbaar lichaam twee punten, welke voor de deformatie aangegeven worden door de vectoren:

$$\vec{\xi}^{(1)} \quad \text{en} \quad \vec{\xi}^{(2)},$$

en na de deformatie door:

$$\vec{x}^{(1)} \quad \text{en} \quad \vec{x}^{(2)}.$$



We noemen de vector:

$$\vec{\xi}^{(2)} - \vec{\xi}^{(1)} = \vec{p}_0 \quad (1.60)$$

en:

$$\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)} = \vec{p} \quad (1.61)$$

We nemen nu aan dat de punten

$\vec{\xi}^{(1)}$  en  $\vec{\xi}^{(2)}$  infinitesimaal

dicht bij elkaar liggen, d.w.z.:

$$\vec{p}_0 = \vec{\xi}^{(2)} - \vec{\xi}^{(1)} = \delta \vec{\xi} \quad (1.62)$$

En analoog:

$$\vec{p} = \vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)} = \delta \vec{x} \quad (1.63)$$

Verder is:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(1)} - \vec{\xi}^{(1)} &= \vec{u}^{(1)} \\ \vec{x}^{(2)} - \vec{\xi}^{(2)} &= \vec{u}^{(2)} \end{aligned} \quad (1.64)$$

en vanwege (1.62) en (1.63):

$$\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)} = \delta \vec{u} \quad (1.65)$$

Tevens is:

$$\begin{aligned} \delta \vec{p} &= \vec{p} - \vec{p}_0 = (\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}) - (\vec{\xi}^{(2)} - \vec{\xi}^{(1)}) = \\ &= \vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)} = \delta \vec{u} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Dus geldt:

$$\delta p_i = \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} p_j \quad (1.67)$$

Nu is: (1.33)

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}$$

Dus:

$$\delta p_i = e_{ij} p_j + \omega_{ij} p_j \quad (1.68)$$

Stel nu eens  $e_{ij} = 0$ .

Dan:  $\delta p_i = \omega_{ij} p_j$ .

Vermenigvuldigen met  $p_i$ :

$$p_i \delta p_i = \omega_{ij} p_i p_j = 0,$$

want  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ .

Dus  $\omega_{ij}$  alléén geeft geen verandering van de lengte van de vector  $\vec{p}$ , alléén een starre rotatie.

We laten daarom  $\omega_{ij}$  buiten beschouwing. We krijgen dan:

$$\delta p_i = e_{ij} p_j \quad (1.69)$$

Definitie:

We noemen de richting van  $\vec{p}$  een hoofdrichting, indien de richting van  $\vec{p}$  bij een deformatie niet verandert, dus als:

$$\delta p_i = \lambda p_i \quad (1.70)$$

Met (1.69) krijgen we dan:

$$e_{ij} p_j = \lambda p_i \quad (1.71)$$

Dus  $\vec{p}$  is een hoofdrichting indien voldaan is aan

$$(e_{ij} - \lambda \delta_{ij}) p_j = 0 \quad (1.72)$$

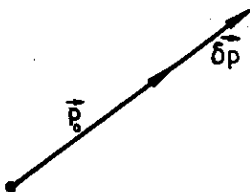
We noemen  $\lambda$  de hoofdrek.

Aangezien de homogene vergelijking (1.72) oneindig veel oplossingen heeft, normeren we  $\vec{p}$  op:

$$p_i p_i = 1 \quad (1.73)$$

Vergelijking (1.72) heeft alléén een oplossing, indien de determinant:

$$|e_{ij} - \delta_{ij} \lambda| = 0 \quad (1.74)$$



Dit is een derdegraads vergelijking voor  $\lambda$ , welke drie oplossingen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  heeft, waarvan er minstens een reëel is. We zullen bewijzen dat uit het feit dat  $e_{ij} = e_{ji}$  volgt, dat alle  $\lambda$ 's reëel zijn.

Stel immers dat er twee complex toegevoegde bij zijn, bijv.  $\lambda_2$  en  $\lambda_3$ . Dus:

$$\lambda_3 = \lambda_2^* \quad , \quad (*: \text{complex toegevoegd}).$$

Dan is ook:

$$p_i^{(3)} = p_i^{(2)*} .$$

$p_i^{(k)}$  is de hoofdrichting horende bij  $\lambda_k$ .

Voor  $\lambda_2$  en  $\lambda_3$  krijgen we:

$$\begin{aligned} e_{ij} p_j^{(2)} &= \lambda_2 p_i^{(2)} \quad , \\ e_{ij} p_j^{(3)} &= \lambda_3 p_i^{(3)} \quad . \end{aligned}$$

De eerste vergelijking vermenigvuldigen met  $p_i^{(3)}$  en de tweede met  $p_i^{(2)}$  en aftrekken geeft:

$$e_{ij} [ p_j^{(2)} p_i^{(3)} - p_j^{(3)} p_i^{(2)} ] = (\lambda_2 - \lambda_3) p_i^{(2)} p_i^{(3)} . \quad (1.75)$$

Omdat  $e_{ij} = e_{ji}$  is het linkerlid gelijk aan nul, en daar:

$$p_i^{(2)} p_i^{(3)} = p_i^{(2)} p_i^{(2)*} \neq 0 ,$$

$$\text{moet:} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_2^* . \quad (1.76)$$

Dit is onmogelijk voor een complex getal. Dus moet  $\lambda_2$  reëel zijn.

We hebben hiermee dus bewezen, dat de drie  $\lambda$ 's reëel zijn. Bovendien geldt, dat als de drie  $\lambda_k$ 's ongelijk zijn, de  $p_i^{(k)}$ 's loodrecht op elkaar staan.

$$\text{Stel:} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 .$$

Uit:

$$\begin{aligned} e_{ij} p_j^{(1)} &= \lambda_1 p_i^{(1)} \quad , \\ e_{ij} p_j^{(2)} &= \lambda_2 p_i^{(2)} \quad , \end{aligned} \quad (1.77)$$

volgt:

$$e_{ij} [ p_j^{(1)} p_i^{(2)} - p_j^{(2)} p_i^{(1)} ] = 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) p_i^{(1)} p_i^{(2)} . \quad (1.78)$$

Omdat  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  moet:

$$p_i^{(1)} p_i^{(2)} = 0 \quad , \quad (1.79)$$

waaruit de loodrechte stand volgt.

Als twee of drie  $\lambda_k$ 's gelijk zijn, kunnen we niet zonder meer tot de loodrechte stand concluderen. Aan de vergelijkingen (1.77) voldoet nu iedere lineaire combinatie van  $p_i^{(1)}$  en  $p_i^{(2)}$ :

$$p_i = p_i^{(1)} + \alpha p_i^{(2)}, \quad (1.80)$$

met  $\alpha$  reëel en willekeurig, maar zó dat:

$$p_i p_i = 1.$$

De determinant (1.74) heeft uitgeschreven de vorm:

$$\lambda^3 - \theta_1 \lambda^2 + \theta_2 \lambda - \theta_3 = 0, \quad (1.81)$$

waarin:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= e_{kk} = e_{ijk} e_{ijt} e_{kt} = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} e_{ijk} e_{ist} e_{js} e_{kt} = e_{11} e_{22} + e_{22} e_{33} + e_{33} e_{11} - e_{12}^2 - e_{23}^2 - e_{13}^2, \\ \theta_3 &= \frac{1}{6} e_{ijk} e_{rst} e_{ir} e_{js} e_{kt} = \text{Det}\{e_{ij}\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

of in hoofdrekken geschreven

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \theta_2 &= \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 \\ \theta_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

Aangezien de hoofdtrekken onafhankelijk zijn van de keuze van het assenstelsel, verandert (1.81) niet bij rotatie van dit stelsel. Hieruit volgt dat  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  en  $\theta_3$  onafhankelijk zijn van de keuze van het assenstelsel, dus invariant. U kunt dit ook direct bewijzen door substitutie.

De fysische betekenis van  $\theta_1$  is eenvoudig te zien. Neem een parallelepipedum met de zijden  $l_1$ ,  $l_2$  en  $l_3$  evenwijdig aan de hoofdasen. Na de deformatie worden de lengtes:  $l_1(1 + \lambda_1)$ ,  $l_2(1 + \lambda_2)$ ,  $l_3(1 + \lambda_3)$ .

De volumeverandering is dus:

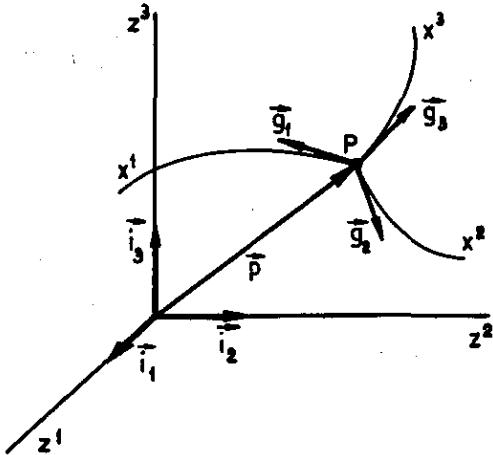
$$\begin{aligned} \Delta V &= l_1 l_2 l_3 (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - l_1 l_2 l_3 \approx \\ &\approx l_1 l_2 l_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\theta_1 = \frac{\Delta V}{V} = \underline{\text{relatieve volumeverandering}}. \quad (1.84)$$

I.5. Kromlijnige coördinaten.

Voor de praktische oplossing van problemen is het dikwijls gemakkelijker om over te gaan van cartesische coördinaten op kromlijnige coördinaten. Om deze transformaties te kunnen uitvoeren, hebben we enige elementaire begrippen uit de tensorrekening nodig.



$z^1, z^2, z^3$ : cartesisch coördinatenstelsel.

$x^1, x^2, x^3$ : kromlijnige coördinatenstelsel (niet noodzakelijk orthogonaal).

We nemen aan dat de transformatie:

$$x^k = x^k(z^1, z^2, z^3),$$

omkeerbaar is:

$$z^k = z^k(x^1, x^2, x^3).$$

Dan moet de Jacobiaan:

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \neq 0. \tag{1.85}$$

We voeren hier een iets andere sommatie - conventie in: we zullen alleen nog sommeren over gelijke onder- en boven-indices.

$\vec{i}_k$  en  $\vec{g}_k$  zijn de basisvectoren van resp. het  $x$ - en het  $z$ -stelsel. Dus:

$$\vec{p} = z^m \vec{i}_m. \tag{1.86}$$

Dan:

$$\vec{g}_k = \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \vec{i}_m \tag{1.87}$$

(1.87) vermenigvuldigen met  $\frac{\partial x^k}{\partial z^n}$  geeft:

$$\frac{\partial x^k}{\partial z^n} \cdot \vec{g}_k = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial z^n} \vec{i}_m = \delta_n^m \vec{i}_m = \vec{i}_n.$$

Dus: 
$$\vec{i}_m = \frac{\partial x^k}{\partial z^m} \vec{g}_k. \tag{1.88}$$

We definiëren de metrische tensor  $g_{kl}$  door:

$$g_{kl} := \vec{g}_k \cdot \vec{g}_l = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial z^m}{\partial x^l} \vec{i}_m \cdot \vec{i}_n = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^m}{\partial x^l} , \quad (1.89)$$

want:

$$\vec{i}_m \cdot \vec{i}_n = \delta_{mn} . \quad (1.90)$$

Dan is:

$$d\vec{p} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^k} dx^k = \vec{g}_k dx^k , \quad (1.91)$$

en:

$$d\vec{p} \cdot d\vec{p} = dl^2 = g_{kl} dx^k dx^l . \quad (1.92)$$

De reciproke basisvectoren:  $\vec{g}^k$  worden gedefinieerd door:

$$\vec{g}^k \cdot \vec{g}_l = \delta^k_l , \quad (1.93)$$

en de reciproke metrische tensor  $g^{kl}$ :

$$\vec{g}^k \cdot \vec{g}^l = g^{kl} . \quad (1.94)$$

Dan is:

$$\vec{g}^k = g^{kl} \vec{g}_l . \quad (1.95)$$

We beschouwen nu een willekeurige vector  $\vec{v}$ . We kunnen deze schrijven als:

$$\vec{v} = v^k \vec{g}_k = v_k \vec{g}^k . \quad (1.96)$$

Hiermee hebben we gedefinieerd:

$v^k$  : contra-variante componenten van  $\vec{v}$ .

$v_k$  : co-variante componenten van  $\vec{v}$ .

Door middel van de metrische tensor kunnen we van de ene soort op de andere overgaan. Immers:

$$\vec{v} \cdot \vec{g}_l = v^k \vec{g}_k \cdot \vec{g}_l = v_k \vec{g}^k \cdot \vec{g}_l = v_k \delta^k_l = v_l .$$

Dus:  $v_l = g_{kl} v^k . \quad (1.97)$

Analoog:

$$v^k = g^{kl} v_l . \quad (1.98)$$

We gaan nu het ene kromlijnige coördinatenstelsel  $x^l$  transformeren in een ander  $\bar{x}^k$ .



Dan geldt:

$$\frac{\bar{x}^{-k}}{dx^{-k}} = \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^1} dx^1. \quad (1.99)$$

We krijgen hier alleen een relatie tussen differentiaal van  $x^1$ , omdat:

$\frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^1}$  van punt tot punt verschillend is. Dit in tegenstelling tot transformaties van een cartesisch stelsel in een ander cartesisch stelsel, waarvoor geldt:

$$\bar{z}_i = l_{ij} z_j \quad (l_{ij} \text{ constant}).$$

We definiëren nu een tensor als een grootte die zich transformeert volgens:

a. tensor van 1e orde:

$$\frac{\bar{v}^{-k}}{\bar{v}^{-k}} = \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^m} v^m, \quad (1.100)$$

b. tensor van 2e orde:

$$\frac{\bar{A}^{-kl}}{\bar{A}^{-kl}} = \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^{-l}}{\partial x^n} A^{mn}, \quad (1.101)$$

en analoog voor hogere orde tensoren.

Voor de covariante componenten van een tensor geldt:

$$\frac{\bar{A}_{kl}}{\bar{A}_{kl}} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{-l}} A_{mn}, \quad (1.102)$$

en voor gemengde componenten:

$$\frac{\bar{A}^{-k} \cdot l}{\bar{A}^{-k} \cdot l} = \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{-l}} A^m \cdot n. \quad (1.103)$$

De moeilijkheid bij kromlijnige coördinaten, t.o.v. cartesische coördinaten, is gelegen in het feit dat de basisvectoren van punt tot punt verschillend zijn. Dit komt tot uiting bij het differentieren van vectoren en tensoren.

Stel:

$$\vec{u} = u^m \vec{g}_m,$$

dan:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (u^m \vec{g}_m) = \frac{\partial u^m}{\partial x^k} \vec{g}_m + u^m \frac{\partial \vec{g}_m}{\partial x^k}. \quad (1.104)$$

Cartesisch geldt:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} = \frac{\partial u^m}{\partial x^k} \vec{i}_m.$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_k}{\partial x^l} &= \frac{\partial}{\partial x^l} \left( \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial^2 z^m}{\partial x^l \partial x^k} \vec{i}_m = \\ &= \frac{\partial^2 z^m}{\partial x^l \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial z^m} \vec{g}_n =: \{ \begin{smallmatrix} n \\ k \ l \end{smallmatrix} \} \vec{g}_n . \end{aligned} \quad (1.105)$$

Hierbij hebben we gedefinieerd:

$$\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \ l \end{smallmatrix} \} = \{ \begin{smallmatrix} n \\ l \ k \end{smallmatrix} \} := \frac{\partial^2 z^m}{\partial x^l \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial z^m} : \text{Christoffelsymbolen van de tweede soort.} \quad (1.106)$$

Hiermee geldt dus:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} = \left[ \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ l \end{smallmatrix} \} u^l \right] \vec{g}_m . \quad (1.107)$$

Definitie:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} =: u^m |_{k} \vec{g}_m , \quad (1.108)$$

met:

$$u^m |_{k} : \text{covariante afgeleide van } u^m \text{ t.o.v. } \vec{g}_m .$$

Uit (1.107) en (1.108) volgt dan:

$$\left\| u^m |_{k} = \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ l \end{smallmatrix} \} u^l . \quad (1.109) \right.$$

Voor het bepalen van de Cristoffelsymbolen van de 2e soort is het dikwijls gemakkelijker om eerst de zg. Cristoffelsymbolen van de 1e soort ( $[kl, m]$  of  $\Gamma_{mkl}$ ) te bepalen. Deze zijn gedefinieerd als:

$$[kl, m] := g_{mn} \{ \begin{smallmatrix} n \\ k \ l \end{smallmatrix} \} . \quad (1.110)$$

Dit kunnen we weer schrijven als:

$$\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ l \end{smallmatrix} \} = g^{mn} [kl, n] . \quad (1.111)$$

We zullen bewijzen dat:

$$[kl, m] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) . \quad (1.112)$$

bewijs:

Volgens de definitie (1.10) en (1.89) en (1.106) is

$$[kl, m] = \frac{\partial z^p}{\partial x^m} \frac{\partial z^p}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^k \partial x^l} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial z^q} = \frac{\partial z^p}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^k \partial x^l} \cdot \frac{\partial z^p}{\partial z^q} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial z^q}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^k \partial x^l} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^l} \left[ \frac{\partial z^q}{\partial x^m} \frac{\partial z^q}{\partial x^k} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial z^q}{\partial x^k} \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^m \partial x^l} + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ \frac{\partial z^q}{\partial x^m} \frac{\partial z^q}{\partial x^l} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial z^q}{\partial x^l} \frac{\partial^2 z^q}{\partial x^m \partial x^k} = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).
 \end{aligned}$$

Belangrijk:

$$\frac{\partial u^m}{\partial x^k} \text{ is geen tensor.}$$

Dit is te zien door te transformeren van  $x_k \rightarrow \bar{x}_k$ .

Dan gaat:

$$u_k \rightarrow \bar{u}_k = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k} u^m.$$

Door:  $\frac{\partial \bar{u}^m}{\partial \bar{x}^k}$  uit te werken, blijkt dat deze zich niet als een tensor transformeert naar  $\frac{\partial u^m}{\partial x^k}$ .

Maar:

$$u^m |_{\bar{k}} \text{ is wel een tensor.}$$

In een cartesisch stelsel geldt voor de deformatie:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \equiv \frac{1}{2} (u_i |_{j} + u_j |_{i}), \quad (1.113)$$

want in een cartesisch stelsel is covariant differentieren hetzelfde als partieel differentieren. (de Cristoffelsymbolen zijn dan immers nul.)

Als we nu transformeren van een cartesisch stelsel op een kromlijng stelsel:

$$u_i \rightarrow \bar{u}_i, \quad e_{ij} \rightarrow \bar{e}_{ij},$$

dan geldt, omdat de  $u^m |_{\bar{k}}$  zich transformeert als een tensor:

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_i |_{j} + \bar{u}_j |_{i}). \quad (1.114)$$

Deze procedure geldt algemeen. We kunnen dus stellen:

De vergelijkingen welke in een cartesisch assenstelsel gelden, gelden ook in een kromlijng assenstelsel, mits we de partiele afgeleiden vervangen door covariante afgeleiden.

Voorbeeld: transformatie van de verplaatsingen en de deformatietensor van een cartesisch stelsel  $(z^1, z^2, z^3)$  op cilindercoördinaten  $(x^1, x^2, x^3 = r, \theta, z)$ .

Voor een lijnelement  $ds$  geldt:

$$ds^2 = dz^i dz^i = g_{kl} dx^k dx^l = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 + (dx^3)^2 =$$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad . \quad (1.115)$$

Dus de matrix  $\|g_{kl}\|$  wordt:

$$\|g_{kl}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad . \quad (1.116)$$

Uit  $g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m$  vinden we:

$$\|g^{lm}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad . \quad (1.117)$$

Met formule (1.112) krijgen we hieruit:

$$\begin{aligned} [12,2] &= [21,2] = x^1 \quad , \\ [22,1] &= -x^1 \quad , \end{aligned} \quad (1.118)$$

alle overige  $[kl,m]$  zijn nul.

Dit geeft met (1.111):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{x^1} \quad , \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= -x^1 \quad , \end{aligned} \quad (1.119)$$

overige  $\left\{ \begin{matrix} k \\ 1 \end{matrix} \right\}_m$  nul.

Dit leidt dan tot het volgende resultaat:

$$\left. \begin{aligned} u^1|_1 &= \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \quad , \\ u^1|_2 &= \frac{\partial u^1}{\partial x^2} - x^1 u_2 \quad , \\ u^1|_3 &= \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \quad , \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u^2|_1 &= \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{u^2}{x^1} , \\
 u^2|_2 &= \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{u^1}{x^1} , \\
 u^2|_3 &= \frac{\partial u^2}{\partial x^3} , \\
 u^3|_k &= \frac{\partial u^3}{\partial x^k} , \quad (k=1,2,3) .
 \end{aligned} \right\} \quad (1.120)$$

Fysische Componenten

In een cartesisch stelsel hebben de coördinaten  $z^i$  en de verplaatsingen  $u^i$  beide de dimensie van een lengte (L). Dus is  $u^i_{,j}$  dimensieloos.

Bij kromlijnige coördinaten hoeven de coördinaten echter niet alleen dezelfde dimensie te hebben.

Bij cilindercoördinaten is bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
 [x^1] &= [x^3] = L , \quad ([a] := \text{dimensie van } a) \\
 [x^2] &= 1 .
 \end{aligned}$$

In dit geval zullen dus ook de dimensies van  $u^i|_k$  verschillen. Ook de dimensies van  $u^i$  hoeven niet gelijk te zijn.

De oorzaak van deze moeilijkheden is gelegen in het feit dat de basisvectoren niet altijd dimensieloos zijn, immers:

$$[\vec{g}^k] = \left[ \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^k} \right] = \frac{L}{[x^k]} . \quad (1.121)$$

Bij cilindercoördinaten is dus:

$$[\vec{g}^1] = [\vec{g}^3] = 1 , \quad \text{maar: } [\vec{g}^2] = L .$$

We voeren daarom in de dimensieloze eenheidsvectoren:

$$\vec{e}_k := \frac{\vec{g}^k}{\sqrt{g_{kk}}} . \quad (1.122)$$

Een streep onder een indices geeft aan dat we niet over deze indices mogen sommeren.

Het nadeel van de  $e_k$ 's is, dat zij zich niet als een vector transformeren. We kunnen nu een vector  $\vec{u}$  ook ontbinden langs  $e_k$ . We krijgen dan:

$$\vec{u} = u^m \vec{e}_m = \sum_{m=1}^3 u^{(m)} \vec{e}_m = \sum_{m=1}^3 u^{(m)} \frac{\vec{e}_m}{\sqrt{g_{mm}}} \quad (1.123)$$

We noemen de componenten  $u^{(m)}$  de fysische componenten van de vector  $\vec{u}$ . Deze componenten hebben wél dezelfde dimensie als  $\vec{u}$ .

Uit (1.123) volgt direct:

$$u^{(k)} = u^k \sqrt{g_{kk}} \quad , \quad (1.124)$$

of

$$u^k = \frac{u^{(k)}}{\sqrt{g_{kk}}} \quad . \quad (1.125)$$

Op analoge wijze kunnen we de fysische componenten van een tensor definiëren. Voor de deformatietensor krijgen we bijvoorbeeld:

$$e^{(ij)} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \quad . \quad (1.126)$$

Als we dit toepassen op cilindercoördinaten krijgen we voor de fysische componenten van de deformatietensor (dimensie: 1):

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad , \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad , \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad , \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \quad , \\ e_{zr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad , \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad . \end{aligned} \right\} \quad (1.127)$$

Hierin zijn  $u_r$ ,  $u_\theta$  en  $u_z$  de fysische componenten (dimensie: L) van de verplaat-

singsvector  $\vec{u}$ . Het zijn dus de echte verplaatsingen in  $r$ ,  $\theta$  en  $z$ -richting.

Een praktisch belangrijk voorbeeld, is de zg. rotatie-symmetrische toestand.

In dit geval zijn:

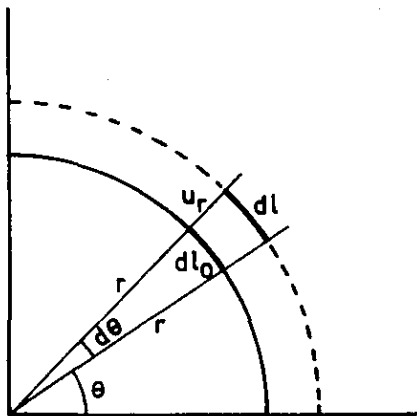
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = u_{\theta} = 0 \quad .$$

Uit (1.127) volgt dan:

$$e_{\theta z} = e_{r\theta} = 0 \quad ,$$

maar

$$e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \neq 0 \quad . \quad (1.128)$$



Deze laatste relatie is ook gemakkelijk aanschouwelijk af te leiden. We beschouwen daartoe een cirkelvormig stukje  $dl_0$ :

$$dl_0 = r d\theta \quad ,$$

welke na deformatie (rotatie-symmetrie) overgaat in:

$$dl = (r + u_r) d\theta \quad .$$

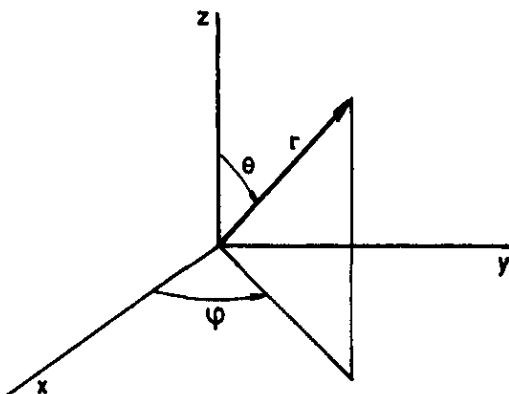
Dan is

$$\Delta l = (dl - dl_0) = u_r d\theta \quad .$$

Dus:

$$e_{\theta\theta} = \frac{\Delta l}{dl} \approx \frac{\Delta l}{r d\theta} = \frac{u_r d\theta}{r d\theta} = \frac{u_r}{r} \quad . \quad (1.129)$$

Bolcoördinaten:



$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad ,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad ,$$

$$z = r \cos \theta \quad .$$

Dan:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad .$$

Leidt zelf af, dat voor de fysische compo-

nenten van de deformatietensor geldt:

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} , \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} , \\ e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \cotg \theta + \frac{u_r}{r} , \\ 2e_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cotg \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} , \\ 2e_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} , \\ 2e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} . \end{aligned} \right\} (1.130)$$

Opgaven

- 1) Bewijs dat er in elk punt van een lichaam dat deformeert altijd minstens één richting bestaat die tijdens de deformatie niet verandert.

Hint: ga uit van:

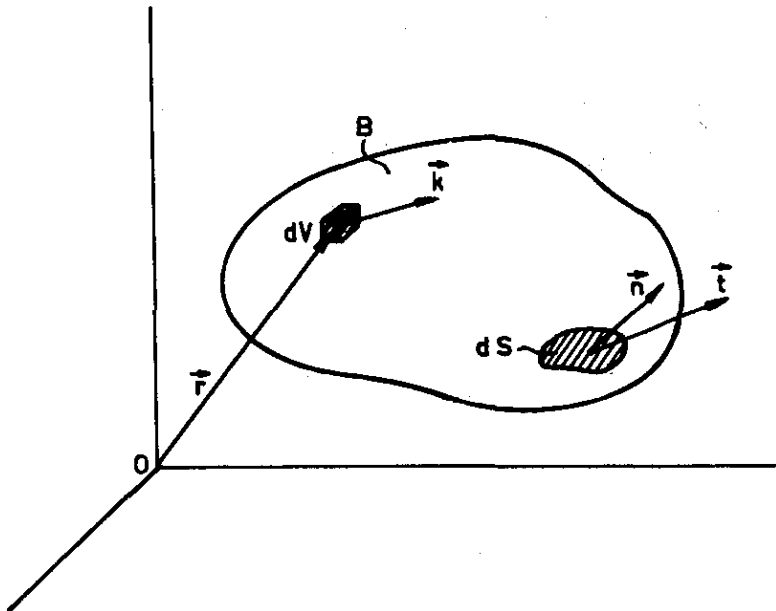
$$dx_i = \lambda d\xi_i \quad (\lambda: \text{constant}).$$

- 2) Beschrijf de gedaanteverandering die een zeer klein bolvormig deel van een lichaam bij een infinitesimale deformatie ondergaat.



## II. Spanningsleer

### II.1. De spanningstensor



Op een continu lichaam B kunnen de volgende twee soorten krachten werken:

i) Volumekrachten ( $\vec{k}$ ). Deze grijpen aan in ieder volume-element van het continuum B. De kracht op een volume-element  $dV$  is:  $\vec{k}dV$  ( $\vec{k}$  is de krachtdichtheid). De totale volumekracht werkend op B is:

$$\vec{K} = \int_V \vec{k}dV \quad , \quad (V: \text{volume van B}) \quad . \quad (2.01)$$

Voor de momentdichtheid van  $\vec{k}$  t.o.v. O krijgen we:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{k} \quad ,$$

en het totale moment om O ten gevolge van de volumekrachten is dus:

$$\vec{M} = \int_V \vec{m}dV = \int_V (\vec{r} \times \vec{k})dV \quad . \quad (2.02)$$

ii) Oppervlaktekraften

We nemen aan dat het oppervlak  $S$  van  $B$  belast wordt door een continu verdeelde kracht  $\vec{T}$ . We beschouwen een oppervlakte-element  $\Delta S$ , waarop een kracht  $\Delta \vec{T}$  werkt. We definiëren de spanningsvector  $\vec{t}$  door

$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta S}. \quad (2.03)$$

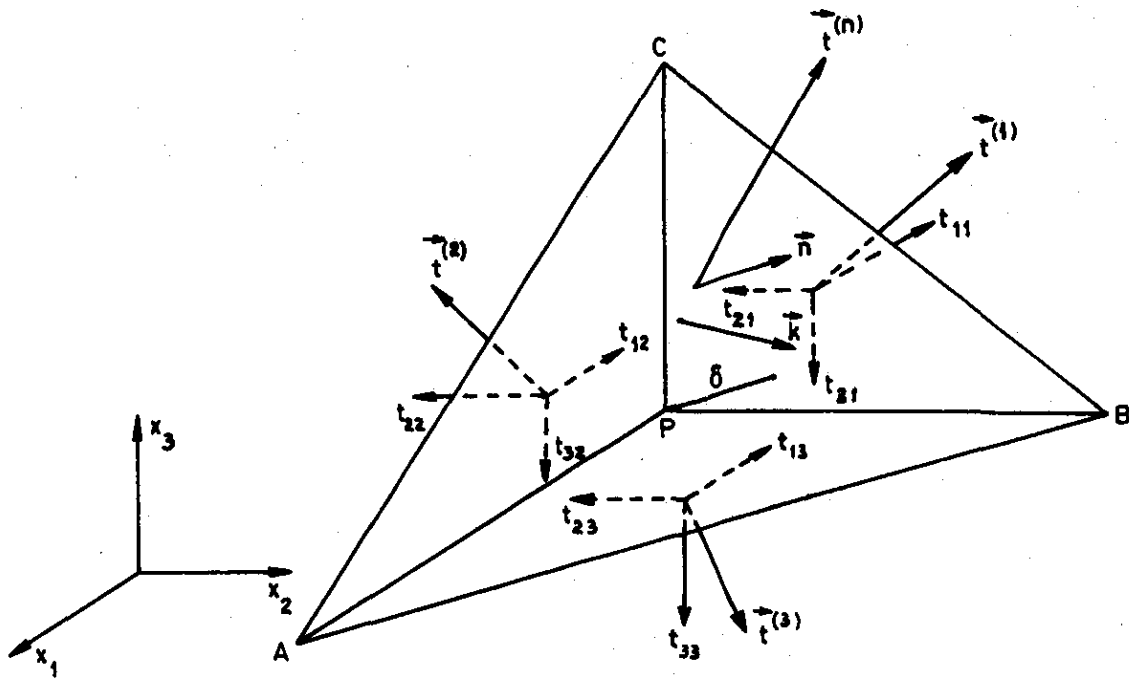
We kunnen ook in het inwendige van  $B$  een spanningsvector definiëren. Hiertoe denken we ons het lichaam in twee delen gesneden. De twee delen oefenen krachten op elkaar uit, welke gelijk maar tegengesteld gericht zijn (wegens actie is reactie). Op het snijvlak werken oppervlaktekraften, zodat we, op analoge wijze als voor het buitenoppervlak, in ieder punt van dit snijvlak een spanningsvector kunnen definiëren. Door een inwendig punt van een lichaam is echter op oneindig veel manieren een snede aan te brengen, zodat de spanningsvector niet alleen zal afhangen van de positie van het inwendige punt, maar ook van de oriëntatie van het snijvlak door dat punt. De oriëntatie van zo'n snijvlak kunnen we karakteriseren door de naar buiten gerichte normaal  $\vec{n}$ . We noemen daarom de spanningsvector in een inwendig punt:  $\vec{t}^{(n)}$ , daarmee aangevend dat hij werkt op een oppervlakte-element met normaal  $\vec{n}$ .

Opmerking. Bedenk dat het hierboven besprokene geldt voor een materiële snede, zodat dus de spanningsvector gedefinieerd is op een materieel oppervlak, dat wil zeggen een oppervlak dat tijdens de deformatie met het lichaam meebeweegt (dus steeds uit dezelfde materiële punten bestaat). Dit in tegenstelling tot de spanning in de hydrodynamica, welke gedefinieerd is op een vast in de ruimte staand oppervlak.

Bovenstaande theorie is bedacht door Cauchy in 1822.

Beschouw in een willekeurig punt  $P$  van het lichaam  $B$  een infinitesimaal tetraeder  $PABC$  (hoogte  $\delta$ ), waarvan de rechthoeksvlakken  $PBC$ ,  $PAC$  en  $PAB$  evenwijdig zijn met respectievelijk het  $x_1$ -,  $x_2$ - en  $x_3$ -vlak, terwijl het schuine vlak  $ABC$  een normaal  $\vec{n}$  heeft. Op het vlak  $ABC$  werkt de spanning  $\vec{t}^{(n)}$  en op een vlak loodrecht op de  $x_i$ -as een spanning  $\vec{t}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). We voeren in de negen getallen  $t_{ij}$  door middel van de definitie

$$t_{ij} := t_i^{(j)}. \quad (2.04)$$



Dus  $t_{ij}$  is de spanning werkend op het  $x_j$ -vlak in de  $x_i$ -richting. Deze spanning wordt positief genomen als hij op een vlak met normaal in de positieve  $x_j$ -richting wijst in de positieve  $x_i$ -richting.

We zullen nu bewijzen dat elke spanningsvector  $\vec{t}^{(n)}$  te schrijven is als functie van de negen getallen  $t_{ij}$  en de normaal  $\vec{n}$ , en wel op de volgende manier

$$t_i^{(n)} = t_{ij} n_j . \quad (2.05)$$

Hiertoe gaan we de bewegingsvergelijking voor het tetraeder PABC opschrijven. Deze luidt in de  $x_i$ -richting

$$t_i^{(n)} S - t_{i1} S_1 - t_{i2} S_2 - t_{i3} S_3 + k_i V = \rho V \ddot{u}_i . \quad (2.06)$$

Hierin is:

$S$  = oppervlak van ABC,

$S_i = S n_i$  = oppervlak van het zijvlak  $\perp x_i$ -as,

$V = \delta S$  = volume van PABC.

Deelt men (2.06) door  $S$  en laat men vervolgens  $\delta$  naar nul gaan, dan verkrijgt men (2.05).

We kunnen ook nog laten zien dat de negen getallen  $t_{ij}$  een tensor vormen. Hiertoe beschouwen we een draaiing van het cartesische stelsel  $x_i$  naar  $\bar{x}_i$ . De normaalvector  $\vec{n}$  transformeert dan volgens

$$\bar{n}_i = l_{ij} n_j, \quad (2.07)$$

zodat

$$\bar{t}_{kl} \bar{n}_k \bar{n}_l = l_{ki} l_{lj} \bar{t}_{kl} n_i n_j. \quad (2.08)$$

Verder blijft het inwendig product  $(\vec{t}^{(n)}, \vec{n})$  invariant, waaruit volgt dat

$$\bar{t}_{kl} \bar{n}_k \bar{n}_l = t_{ij} n_i n_j. \quad (2.09)$$

Vergelijken van (2.08) en (2.09) geeft

$$t_{ij} = l_{ki} l_{lj} \bar{t}_{kl}, \quad (2.10)$$

dus  $t_{ij}$  transformeert als een tensor.

De componenten  $t_{11}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{33}$  (of:  $t_{xx}$ ,  $t_{yy}$ ,  $t_{zz}$ ) heten normaalspanningen. In de technische literatuur worden ze dikwijls aangegeven met  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ . Ze zijn positief bij trek en negatief bij druk. De andere componenten  $t_{12}$  etc. worden schuifspanningen genoemd.

## II.2. Hoofdspansingen en Hoofdrichtingen

De spanningstensor behoeft niet symmetrisch te zijn, maar is dit meestal wel. We beschouwen in deze paragraaf alleen symmetrische spanningstensen:

$$t_{ij} = t_{ji}.$$

We definiëren nu de hoofdspansingen, zijnde de spanningen behorende bij de (hoofd-)richtingen, waarbij de spanningsvector loodrecht staat op het vlakje, waarop hij werkt. We hebben dan:

$$t_i = t_{ij} n_j = \lambda n_i. \quad (2.11)$$

Omdat  $t_{ij} = t_{ji}$  zijn er steeds minstens drie reële hoofdrichtingen (en -spanningen), welke loodrecht op elkaar staan. Het bewijs is analoog aan dat bij de deformaties.

De hoofdspansingen zijn de oplossingen van:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 . \quad (2.12)$$

De I's zijn de spanningsvarianten:

$$I_1 = t_{kk} = e_{ijk} e_{ijt} t_{kt} = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 ,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} e_{ijk} e_{ist} t_{js} t_{kt} = t_{11} t_{22} + t_{22} t_{33} + t_{33} t_{11} - t_{12}^2 - t_{23}^2 - t_{13}^2 = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 , \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$I_3 = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{rst} t_{ir} t_{js} t_{kt} = \text{Det}\{t_{ij}\} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 .$$

$\sigma_k$  is de k-de hoofdspanning.

Voor de eerste invariant geldt:

$$-\frac{1}{3} I_1 = \text{hydrostatische druk.}$$

De tweede invariant is van belang in de plasticiteitstheorie.

### III. Dynamica van het elastische lichaam

#### III.1. De impulsstelling

De spanningen in een lichaam zijn niet onafhankelijk, er zijn betrekkingen tussen.

De totale kracht, welke op een deel van B met volume V werkt is

$$\vec{R} = \int_V \vec{k} dV + \int_S \vec{t} dS \quad . \quad (3.01)$$

De hoeveelheid van beweging (impuls) is:

$$\vec{p} = \int_V \rho \vec{v} dV \quad . \quad (3.02)$$

Hierin is  $\vec{v}$  de snelheid van een massa-elementje van V en  $\rho$  de massa-dichtheid.

Als we even aannemen dat (het bewijs van deze bewering volgt verderop):

$$\dot{\vec{p}} = \int_V \rho \dot{\vec{v}} dV \quad , \quad (3.03)$$

dan volgt uit:  $\vec{R} = \dot{\vec{p}}$ :

$$\int_V \vec{k} dV + \int_S \vec{t} dS = \int_V \rho \dot{\vec{v}} dV \quad ,$$

of

$$\int_V k_i dV + \int_S t_i dS = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad . \quad (3.04)$$

Met (2.04) en met de stelling van Gauss krijgen we:

$$\int_S t_i dS = \int_S t_{ij} n_j dS = \int_V t_{ij,j} dV \quad . \quad (3.05)$$

Aangezien (3.04) geldt voor ieder willekeurig volume V krijgen we uit (3.04) en (3.05):

$$t_{ij,j} + k_i = \rho \dot{v}_i \quad . \quad (3.06)$$

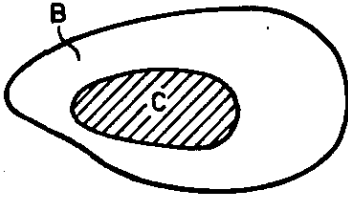
Vergelijkingen (3.06) zijn de lokale bewegingsvergelijkingen. In het geval van evenwicht is  $\dot{v}_i = 0$ . Dan geeft:

$$t_{ij,j} + k_i = 0 \quad , \quad (3.07)$$

de basisvergelijkingen van de elastostatica.

Bewijs van (3.03)

We beschouwen een deel C van het lichaam B, dat op het tijdstip t een volume V heeft. We blijven kijken naar dit deel C. Dan zal dus tijdens de beweging de totale massa van C gelijk blijven, maar het volume van C zal door de deformatie veranderen (en dus ook  $\rho$ ).

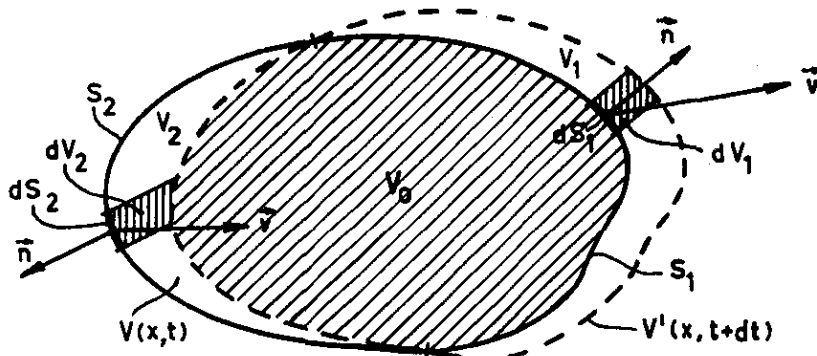


Stel:

$$I = \int_V a(x,t) dV \quad , \quad (a: \text{willekeurige grootheid}) \quad . \quad (3.08)$$

Gevraagd, wat is dan:  $\dot{I}$ , wanneer  $\dot{I}$  gedefinieerd wordt op de meebewegende massa.

We beschouwen C op de tijdstippen t en (t+dt). Het volume op t is V en op (t+dt) : V'. Als dt klein is, zal ook het verschil tussen V en V' klein zijn.



Nu is:

$$dI = \dot{I} dt = \int_{V'} a(x, t+dt) dV' - \int_V a(x, t) dV \quad . \quad (3.09)$$

We noemen  $V_0$  de doorsnede van V en V' en:

$$V_1 := V' - V_0 \quad , \quad V_2 := V - V_0 \quad .$$

Dan wordt (3.09):

$$\begin{aligned}
 dI &= \int_{V_0} [a(x, t+dt) - a(x, t)] dV_0 + \int_{V_1} a(x, t+dt) dV_1 - \int_{V_2} a(x, t) dV_2 = \\
 &= dt \int_{V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV_0 + \int_{V_1} a(x, t+dt) dV_1 - \int_{V_2} a(x, t) dV_2 \quad . \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

We gaan de twee laatste integralen nog iets nader uitwerken. We beschouwen daartoe een oppervlakte-element  $dS_1$  van de gemeenschappelijke rand van  $V$  en  $V_1$  ( $= S_1$ ). We noemen  $\vec{v}$  de snelheid van  $dS_1$ . We verdelen dan  $V_1$  in volume-elementen  $dV_1$ :

$$dV_1 = (\vec{v}, \vec{n}) dS_1 dt \quad . \quad (3.11)$$

(Bedenk dat op  $S_1$ :  $\vec{v}$  en  $\vec{n}$  naar buiten gericht zijn, dus  $(\vec{v}, \vec{n}) \geq 0$ .)

Hiermee krijgen we:

$$\begin{aligned}
 \int_{V_1} a(x, t+dt) dV_1 &= dt \int_{S_1} a(x, t+dt) (\vec{v}, \vec{n}) dS = \\
 &= dt \int_{S_1} a(x, t) (\vec{v}, \vec{n}) dS + O(dt^2) \quad . \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Hetzelfde doen we op  $S_2$  (d.i. de gemeenschappelijke rand van  $V$  en  $V_2$ ). Hier is echter:  $(\vec{v}, \vec{n}) \leq 0$  zodat:

$$dV_2 = - (\vec{v}, \vec{n}) dS_2 dt \quad (3.13)$$

en dus

$$-\int_{V_2} a(x, t) dV_2 = dt \int_{S_2} a(x, t) (\vec{v}, \vec{n}) dS \quad . \quad (3.14)$$

Door substitutie van (3.12) en (3.14) in (3.10) en met:  $S = S_1 + S_2$ , vinden we

$$dI = \dot{I} dt = dt \left[ \int_{V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV_0 + \int_S a(\vec{v}, \vec{n}) dS \right] + O(dt^2) \quad . \quad (3.15)$$



Nu is:

$$\int_{V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV_0 = \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV - \int_{V-V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV + o(dt) \quad (3.16)$$

want:

$$\left| \int_{V-V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV \right| \leq k(V-V_0) = o(dt) \quad , \quad (k = \max_{(V-V_0)} \left| \frac{\partial a}{\partial t} \right|) \quad .$$

Met de stelling van Gauss kunnen we afleiden:

$$\int_S a(\vec{n}, \vec{v}) dS = \int_S a v_k n_k dS = \int_V (a v_k)_{,k} dV \quad . \quad (3.17)$$

Met (3.16) en (3.17) wordt (3.15):

$$\begin{aligned} dI &= \dot{I} dt = dt \int_V \left[ \frac{\partial a}{\partial t} + (a v_k)_{,k} \right] dV + o(dt^2) = \\ &= dt \int_V \left[ \frac{\partial a}{\partial t} + a_{,k} v_k + a v_{k,k} \right] dV + o(dt^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.18)$$

We definiëren nu de materiële afgeleide:

$$\dot{a} := \frac{\partial a}{\partial t} + a_{,k} v_k = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x_k} v_k \quad . \quad (3.19)$$

En hiermee geeft (3.18):

$$\dot{I} = \int_V [\dot{a} + a v_{k,k}] dV \quad . \quad (3.20)$$

We gaan dit toepassen op de totale massa:

$$M = \int_V \rho dV \quad .$$

Nu moet bij meebewegende massa:

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad . \quad (3.21)$$

Hiervoor geeft (3.20): ( $\dot{a} = \rho$ )

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} v_k + \rho v_{k,k} = 0 \quad (3.22)$$

Dit is de zg. Continuïteitsvergelijking.

Nemen we:  $\mathbf{a} = \rho \vec{v}$  dan geeft (3.20) en (3.02):

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V [(\rho v_i)^\cdot + \rho v_i v_{k,k}] dV = \\ &= \int_V [\rho \dot{v}_i + (\dot{\rho} + \rho v_{k,k}) v_i] dV = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad (3.23) \end{aligned}$$

Bij de laatste regel is gebruik gemaakt van (3.22).

We hebben dus gevonden:

$$\dot{p}_i = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad (3.24)$$

waarbij volgens (3.19):

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \quad (3.25)$$

Tot zover geldt alles wat we hier afgeleid hebben algemeen. In de lineaire theorie geldt echter:

$$|v_{i,k}| \ll 1 \quad .$$

En dus wordt in de lineaire theorie:

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (3.26)$$

en:

$$\dot{p}_i = \int_V \rho \dot{v}_i dV = \int_V \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} dV \quad (3.27)$$

waarmee (3.03) bewezen is.

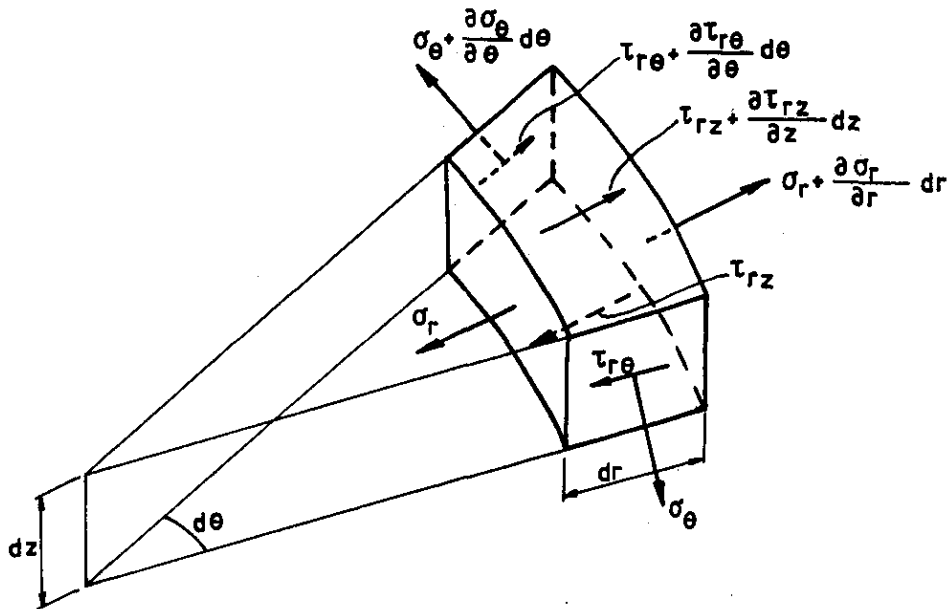
In algemene kromlijnige coördinaten luiden de evenwichtsvergelijkingen (3.07):

$$t_{ij|j} + k_i = 0 \quad (3.28)$$

Voor cilindercoördinaten geeft dit, bij afwezigheid van volumekrachten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

We zullen de eerste van deze vergelijkingen ook op een aanschouwelijke manier afleiden. De andere twee gaan analoog.



We bekijken hiertoe een volumestukje  $dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$  met alleen die spanningen welke een component in de  $r$ -richting hebben. De som van alle krachten in de  $r$ -richting moet nul zijn:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r+dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - \tau_{r\theta} \cos\left(\frac{1}{2}d\theta\right) dr dz + \\ & + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) \cos\left(\frac{1}{2}d\theta\right) dr dz - \sigma_\theta \sin\left(\frac{1}{2}d\theta\right) dr dz + \\ & - \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \sin\left(\frac{1}{2}d\theta\right) dr dz - \tau_{rz} r d\theta dr + \left( \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr = 0. \end{aligned}$$

Als we deze vergelijking delen door:  $r dr d\theta dz$ , vinden we voor een infinitesimaal volume-element de eerste vergelijking van (3.29).

III.2. De momentenstelling

We gaan uit van de fundamentele hypothese, dat voor ieder volume-element van een elastisch lichaam geldt de momentenstelling:

$$\vec{M} = \dot{\vec{D}},$$

om een vast punt O. Hierin is  $\vec{M}$  het moment en  $\vec{D}$  het impulsmoment om O van het volume-element.

Dus:

$$\vec{D} = \int_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV, \quad (3.30)$$

en

$$\vec{M} = \int_V (\vec{r} \times \vec{k}) dV + \int_S (\vec{r} \times \vec{t}) dS,$$

waarbij:  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  is de radiusvector uit O van het volume-element  $dV$ .

In component-notatie krijgen we:

$$D_i = \int_V e_{ijk} x_j v_k \rho dV. \quad (3.31)$$

$e_{ijk}$  heeft de eigenschappen:

- a)  $e_{ijk} = 0$  als twee of drie indices onderling gelijk zijn.
- b)  $e_{ijk} = +1$  of  $-1$  als  $i, j, k$  een even resp. een oneven permutatie vormen.

Uit (3.31) volgt:

$$\begin{aligned} \dot{D}_i &= \int_V e_{ijk} \overset{-onev}{v_j} v_k \rho dV + \int_V e_{ijk} x_j \dot{v}_k \rho dV = \\ &= \int_V e_{ijk} x_j \dot{v}_k \rho dV, \end{aligned} \quad (3.32)$$

waarbij gebruikt is de in (III.1) afgeleide stelling en:

$$e_{ijk} = -e_{ikj}. \quad (3.33)$$

Voor het totale moment krijgen we:

$$M_i = \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_S e_{ijk} x_j t_k dS = \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_S e_{ijk} x_j t_k n_\ell dS.$$

Na toepassing van de formule van Gauss wordt dit

$$\begin{aligned}
 M_i &= \int_V e_{ijk} x_j k_k dV + \int_V (e_{ijk} x_j t_{kl})_{,l} dV = \\
 &= \int_V e_{ijk} x_j (k_k + t_{kl,l}) dV + \int_V e_{ijk} \delta_{jl} t_{kl} dV = \\
 &= \int_V e_{ijk} x_j \dot{\rho}^v_k dV + \int_V e_{ijk} t_{kj} dV \quad , \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van (3.06).

Dus geldt:

$$M_i = \dot{D}_i + \int_V e_{ijk} t_{kj} dV \quad . \quad (3.35)$$

Een aangezien  $M_i = \dot{D}_i$  moet:

$$\int_V e_{ijk} t_{kj} dV = 0 \quad , \quad (3.36)$$

voor ieder volumedeel, dus:

$$e_{ijk} t_{kj} = 0 \quad . \quad (3.37)$$

Met (3.33) volgt hieruit:

$$t_{kj} = t_{jk} \quad , \quad (3.38)$$

de symmetrie van de spanningstensor.

Let op, dat we in de formule voor het totale moment zg. volumemomentdichtheden  $m_k$  hebben verwaarloosd. Treden deze wel op, dan krijgen we een extra term in  $M_i$  gelijk aan:

$$\int_V m_i p dV \quad ,$$

en gaat (3.37) over in:

$$e_{ijk} t_{kj} + m_i = 0 \quad .$$

De spanningstensor is dan dus niet meer symmetrisch. We zullen ons in dit college echter beperken tot het geval:  $m_i = 0$ .

De formules (3.07) en (3.38) geven zes vergelijkingen voor negen onbekenden  $t_{ij}$ . Deze zijn dus in het algemeen onvoldoende om de  $t_{ij}$  te bepalen.

Opgave. Tracht (3.07) en (3.38) af te leiden door het evenwicht van een infinitesimale kubus te bekijken.

#### IV. Het verband tussen spanningen en deformaties

##### IV.1. De wet van Hooke

Zoals we hebben gezien zijn de evenwichts- of bewegingsvergelijkingen niet voldoende in aantal om de totale spanningstensor te bepalen. Daarom moeten we relaties zoeken tussen spanningen en deformaties, welke de aanvullende vergelijkingen opleveren. Er zijn afhankelijk van het materiaal tal van typen spanning- deformatie relaties. We zullen ons tot de eenvoudigste en tevens belangrijkste beperken: de algemene wet van Hooke.

Volgens deze wet is het verband tussen  $t_{ij}$  en  $e_{ij}$  lineair. Algemeen dus:

$$t_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad , \quad (4.01)$$

waarbij verondersteld is, dat de spanningen nul zijn als de deformaties nul zijn (dus geen restspanningen).

Het aantal componenten  $c_{ijkl}$  is  $3^4 = 81$ .

Echter uit:

$$t_{ij} = t_{ji} \quad \text{en} \quad e_{ij} = e_{ji} \quad ,$$

volgt:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad ; \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad . \quad (4.02)$$

Door deze beperkingen wordt het aantal gereduceerd tot:  $6 \times 6 = 36$ .

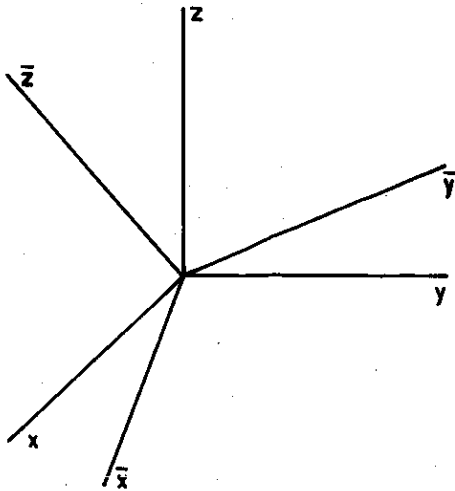
We nemen nu verder aan dat er een elastische energie bestaat. Dan blijkt:

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad . \quad (4.03)$$

We komen hier verder in het college nog op terug.

Onder voorwaarde (4.03) gaat het aantal van 36 over in 21 verschillende termen.

We beperken ons verder tot isotrope media, d.w.z. er bestaan geen voorkeurs-richtingen in het lichaam. Dus de tensor  $c_{ijkl}$  moet invariant zijn t.o.v. een starre rotatie van het assenkruis.



Bij een transformatie van

$$x_i \rightarrow \bar{x}_i ,$$

krijgen we:

$$\bar{t}_{kl} = \bar{c}_{klmn} \bar{e}_{mn} , \quad (4.04)$$

waarbij:

$$\bar{t}_{kl} = l_{ki} l_{lj} t_{ij} \text{ etc.}$$

Na enig formeel rekenwerk volgt hieruit

$$\bar{c}_{ijkl} = l_{ip} l_{jq} l_{kr} l_{ls} c_{pqrs} . \quad (4.05)$$

We noemen een vierde orde tensor  $T_{ijkl}$  isotroop, indien

$$\bar{T}_{klmn} = T_{klmn} . \quad (4.06)$$

Een voorbeeld van een isotrope 4<sup>e</sup> orde tensor is:

$$T_{ijkl}^{(1)} = \delta_{ij} \delta_{kl} , \quad (4.07)$$

want:

$$\bar{T}_{ijkl}^{(1)} = l_{ip} l_{jq} l_{kr} l_{ls} \delta_{pq} \delta_{rs} = l_{ip} l_{jp} l_{kr} l_{lr} = \delta_{ij} \delta_{kl} .$$

Andere zijn:

$$T_{ijkl}^{(2)} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \text{en} \quad T_{ijkl}^{(3)} = \delta_{il} \delta_{kj} . \quad (4.08)$$

Nu geldt de volgende stelling:

Er bestaan slechts drie onafhankelijke isotrope 4<sup>e</sup> orde tensoren (zonder bewijs).

Maar omdat tevens:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad \text{en} \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} ,$$

kunnen we voor de isotrope tensor  $c_{ijkl}$  alleen nemen een lineaire combinatie van:

$$\delta_{ij} \delta_{kl} \quad \text{en} \quad (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) .$$

Dus:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) . \quad (4.09)$$



Als we dit substitueren in (4.01) krijgen we de isotrope vorm van de wet van Hooke:

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad . \quad (4.10)$$

De parameters  $\lambda$  en  $\mu$  zijn materiaalconstanten, die de constanten van Lamé genoemd worden.

Opmerking:

De spanning is gedefinieerd als een kracht per oppervlakte. Nu geeft het in het algemeen een verschil of men deze spanning definieert per eenheid van oorspronkelijk ( $A_0$ ) of van gedeformeerd oppervlak ( $A$ ). In de lineaire theorie is echter het verschil tussen  $A$  en  $A_0$  zeer klein, d.w.z.:

$$A = A_0 + \delta A \quad , \quad \text{met} \quad \left| \frac{\delta A}{A_0} \right| \ll 1 \quad ,$$

zodat het dan geen verschil maakt op welk oppervlak we de spanning definiëren. Immers:

$$\frac{T}{A} = \frac{T}{(A_0 + \delta A)} = \frac{T}{A_0} \left( 1 - \frac{\delta A}{A_0} + \dots \right) \approx \frac{T}{A_0} \quad .$$

$T$ : kracht.

IV.2. De elasticiteitsconstanten

Naast  $\lambda$  en  $\mu$  gedefinieerd door (4.10) bestaan in de elasticiteitstheorie nog andere materiaalconstanten, zoals de elasticiteitsmodulus of Young's modulus  $E$ , de dwarscontractiecoëfficiënt of constante van Poisson  $\nu$  en de afschuivingsmodulus  $G$ . Het spreekt vanzelf dat deze constanten niet onafhankelijk zijn en alle in elkaar kunnen worden uitgedrukt. We keren eerst vergelijking (4.10) om. We krijgen dan:

$$2\mu e_{ij} = t_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu + 3\lambda} t_{kk} \quad . \quad (4.11)$$

Bij een zuivere eenassige rek is  $t_{11} \neq 0$  en zijn alle overige spanningen nul. De elasticiteitsmodulus is nu gedefinieerd als

$$E := \frac{t_{11}}{e_{11}} \quad . \quad (4.12)$$

Uit (4.11) krijgen we dan:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad . \quad (4.13)$$

Bij deze eenassige rek is er dwarscontractie ( $e_{22}$  en  $e_{33}$  zijn niet nul). De dwarscontractiecoëfficiënt wordt nu gedefinieerd door:

$$\nu := - \frac{e_{22}}{e_{11}} = - \frac{e_{33}}{e_{11}} \quad (4.14)$$

(4.11) geeft dan weer:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4.15)$$

$\nu$  moet theoretisch liggen tussen de grenzen:

$$-1 < \nu < 0,5 \quad (4.16)$$

maar ligt praktisch bijna altijd tussen:

$$0 < \nu < 0,5 \quad (4.17)$$

Beschouw een zuivere afschuiving met allen  $t_{12} \neq 0$ . Dan definiëren we de afschuivingsmodulus  $G$  door:

$$G := \frac{t_{12}}{2e_{12}} \quad (4.18)$$

Uit (4.11) volgt dan:

$$G = \mu \quad (4.19)$$

Uit (4.13), (4.15) en (4.19) volgt de belangrijke relatie:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.20)$$

De wet van Hooke heeft bij toepassing van  $E$ ,  $G$  en  $\nu$  de vorm:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad , \quad (\text{cyclisch}) \quad , \quad (4.21)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad , \quad (\text{cyclisch}) \quad .$$

Dit is de in de techniek gebruikelijke schrijfwijze van de wet van Hooke.

#### IV.3. De vergelijkingen van Navier

We bekijken alleen het geval van evenwicht en nemen aan dat er geen volumekrachten werken. We hebben dan de volgende vergelijkingen:

a) de evenwichtsvergelijkingen

$$t_{ij,j} = 0 \quad , \quad (3 \text{ vergelijkingen}) \quad , \quad (4.22)$$

b) de wet van Hooke

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad , \quad (6 \text{ vergelijkingen}) \quad , \quad (4.23)$$

c) het verband tussen verplaatsingen en deformaties

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad , \quad (6 \text{ vergelijkingen}) \quad . \quad (4.24)$$

De vergelijkingen (4.22), (4.23) en (4.24) vormen een systeem van 15 vergelijkingen met 15 onbekenden:  $u_i$  (3),  $e_{ij}$  (6),  $t_{ij}$  (6). In principe is dit systeem dus oplosbaar. Substitutie van (4.24) in (4.23) geeft:

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (4.25)$$

Dit differentiëren naar  $x_j$  geeft met (4.22):

$$\lambda u_{k,ki} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) = 0 \quad ,$$

of:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ij} = 0 \quad . \quad (4.26)$$

Anders geschreven:

$$\Delta u_i + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} u_{j,j} = 0 \quad , \quad (4.27)$$

waarbij:  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  : Laplace - operator.

We noemen (4.26), of (4.27), de vergelijkingen van Navier (of Beltrami). Het zijn drie vergelijkingen van de tweede orde voor  $u_1, u_2$  en  $u_3$ .

Deze vergelijkingen zijn sterk verwant, maar niet identiek, met de potentiaalvergelijking:

$$\Delta \varphi = 0 \quad .$$

Bij de potentiaalvergelijking onderscheiden we naar gelang de randvoorwaarden:

a) Het Dirichlet - probleem: hierbij is aan de rand  $\varphi$  voorgeschreven.

b) Het Neumann - probleem: hierbij is aan de rand  $\frac{d\varphi}{dn}$  voorgeschreven.

#### IV.4. De randcondities

Zoals bekend is een probleem, dat getypeerd wordt door differentiaalvergelijkingen eerst dan oplosbaar, indien aanvangs- en/of randvoorwaarden op de juiste

wijze worden gespecificeerd. De vergelijkingen van Navier hebben dus nog een aanvulling nodig om ze te kunnen oplossen. Er zijn verschillende typen randvoorwaardenproblemen.

We onderscheiden:

- a) het randvoorwaardenprobleem van de eerste soort, waarbij over het gehele oppervlak van het lichaam de spanningen zijn voorgeschreven (verwant met Neumann - probleem),
- b) het randvoorwaardenprobleem van de tweede soort, waarbij de verplaatsingen van het oppervlak zijn gegeven (verwant met Dirichlet - probleem),
- c) het gemengde randvoorwaardenprobleem, waarbij over een deel van het oppervlak de spanningen en over het andere deel van het oppervlak de verplaatsingen zijn gegeven,
- d) het gemengd - gemengde randvoorwaardenprobleem waarbij tegelijkertijd op hetzelfde oppervlak spannings- en verplaatsingscomponenten worden voorgeschreven.

We zullen hier alleen problemen van de soort a), b) of c) beschouwen, zodat we dus steeds het oppervlak  $S$  van het lichaam kunnen splitsen in:

$$S = S_p + S_u, \quad (4.28)$$

waarbij:

$S_p$  is dat deel van het oppervlak waar de spanningen zijn voorgeschreven (is nul voor b)) en,

$S_u$  is dat deel van  $S$  waar de verplaatsingen zijn voorgeschreven (is nul voor a)).

Het spreekt vanzelf, dat moet worden onderzocht of een gesteld probleem met randcondities oplosbaar is, m.a.w. of de oplossing existeert en zo ja, of deze eenduidig is. We gaan op deze problemen hier niet verder in.

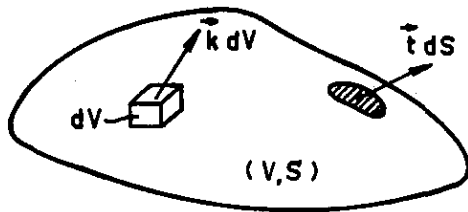
#### Opgaven

- i) Vallen in elk punt van een elastisch, isotroop lichaam de hoofdrichtingen van de deformatie- en de spanningstensor samen?
- ii) Druk de compressiemodulus  $k$  uit in  $\lambda$  en  $\mu$ . ( $k := \frac{t_{ii}}{3e_{ii}}$ .)

Tracht met deze  $k$  en  $E$  duidelijk te maken, waarom een elastisch, isotroop medium slechts twee materiaalconstanten heeft.

V. Energie-beschouwingen

V.1. Elastische energie



De arbeid per seconde verricht door een kracht  $\vec{K}$  op een massapunt  $m$ , dat een snelheid  $\vec{v}$  heeft is

$$(\vec{K}, \vec{v}) = K_i v_i .$$

Op analoge wijze is de arbeid per seconde verricht op een volume-elementje  $dV$  gelijk aan:

$$k_i \dot{u}_i dV$$

en op een oppervlakte-element  $dS$ :

$$t_i \dot{u}_i dS .$$

Dus de totale arbeid per seconde verricht door de uitwendige krachten op het lichaam met volume  $V$  en oppervlak  $S$  is:

$$\dot{A} = \int_V k_i \dot{u}_i dV + \int_S t_i \dot{u}_i dS . \quad (5.01)$$

We nemen nu aan dat de volgende relatie geldt (energiebalans):

$$\dot{A} = \dot{T} + \dot{W} , \quad (5.02)$$

$$T = \text{kinetische energie} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV , \quad (5.03)$$

en  $W$  is gedefinieerd door:

$$\dot{W} = \dot{A} - \dot{T} . \quad (5.04)$$

We noemen  $W$ : de elastische potentiële energie.

Nu geldt:

$$\int_S t_i \dot{u}_i dS = \int_S t_{ij} n_j \dot{u}_i dS = \int_V (t_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dV =$$

$$= \int_V t_{ij,j} \dot{u}_i \, dV + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV \quad (5.05)$$

Dus

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \int_V (t_{ij,j} + k_i) \dot{u}_i \, dV + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV = \\ &= \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i \, dV + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \, dV + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV = \\ &= \dot{T} + \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV \quad (5.06) \end{aligned}$$

Met (5.02) krijgen we dan

$$\dot{W} = \int_V t_{ij} \dot{u}_{i,j} \, dV \quad (5.07)$$

We kunnen  $\dot{W}$  interpreteren als de per seconde opgeslagen elastische potentiële energie.

Definieer  $W_m$  door

$$W = \int_V W_m \rho \, dV \quad (5.08)$$

$W_m$  :  $W$  per massa-eenheid .

Uit (5.07) en (5.08) volgt dus, omdat  $V$  willekeurig is:

$$\rho \dot{W}_m = t_{ij} \dot{u}_{i,j} = \frac{1}{2} (t_{ij} \dot{u}_{i,j} + t_{ji} \dot{u}_{j,i}) = t_{ij} \dot{e}_{ij} \quad , \quad (\text{want } t_{ij} = t_{ji}) \quad (5.09)$$

Beschouw

$$W_m = W_m(t_{ij}(e_{ij}), e_{ij}) = W_m(e_{ij}) =: W_m^{(e)} \quad .$$

Dan geldt

$$\dot{W}_m = \frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial e_{ij}} \dot{e}_{ij} = \frac{1}{\rho} t_{ij} \dot{e}_{ij} \quad , \quad (5.10)$$

voor alle  $e_{ij}$ . Dus moet:

$$t_{ij} = \rho \frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial e_{ij}} \quad . \quad (5.11)$$

Volgens de wet van Hooke is het verband tussen  $t_{ij}$  en  $e_{ij}$  lineair. Dus moet (vgl. (5.11))  $W_m^{(e)}$  zijn van de vorm:

$$W_m^{(e)} = \alpha + \beta_{ij} e_{ij} + \gamma_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \quad .$$

$\alpha$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ijkl}$ : constanten (dus onafhankelijk van  $e_{ij}$ ). De factor  $\alpha$  is niet interessant. Voor  $\beta_{ij}$  vinden we:

$$\frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial e_{ij}} = \beta_{ij} + 2\gamma_{ijkl} e_{kl} \quad . \quad (5.12)$$

Dus als alle deformaties nul zijn, krijgen we (uit (5.11) en (5.12)) voor de spanningen:

$$t_{ij} (e_{kl}'s = 0) = \rho \beta_{ij} \quad .$$

Aangezien we aangenomen hadden dat er geen restspanningen waren, moet dus  $\beta_{ij} = 0$ .

Voor de dichtheid  $\rho$  schrijven we

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \quad , \quad (5.13)$$

waarin  $\rho_0$  de dichtheid in de ongedeformeerde toestand is, terwijl  $\delta\rho$  in de lineaire theorie een infinitesimale grootte is van dezelfde orde als  $e_{ij}$ . Met (5.11), (5.12) en (5.13) krijgen we voor de spanningen, bij verwaarlozing van de termen van de orde  $(e_{ij})^2$

$$t_{ij} = 2\rho_0 \gamma_{ijkl} e_{kl} = c_{ijkl} e_{kl} \quad , \quad (5.14)$$

waarbij

$$c_{ijkl} = 2\rho_0 \gamma_{ijkl} \quad .$$

Opmerking.  $\frac{\partial}{\partial e_{ij}} (\gamma_{mnkl} e_{mn} e_{kl}) = 2\gamma_{ijkl} e_{kl}$ , omdat zowel de factor  $e_{mn}$  als  $e_{kl}$  bij de sommatie de waarde  $e_{ij}$  aanneemt en omdat  $\gamma_{mnkl} = \gamma_{klmn}$ .

Uit (5.13) volgt:

$$\gamma_{ijkl} e_{kl} = \frac{1}{2\rho} t_{ij} ,$$

en hiermee wordt (5.12):

$$W_m = \frac{1}{2\rho} t_{ij} e_{ij} , \quad (\alpha = 0 \text{ genomen}) . \quad (5.15)$$

We definiëren de elastische energie per volume-eenheid  $W_s$  door

$$W_s := \rho W_m . \quad (5.16)$$

Dus, met (5.15):

$$W_s = \frac{1}{2} t_{ij} e_{ij} , \quad (5.17)$$

en totaal:

$$W = \int_V W_s \, dV = \frac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij} \, dV . \quad (5.18)$$

M.b.v. de wet van Hooke kunnen we (5.17) uitdrukken in de deformaties of in de spanningen, dus:

$$W_s \equiv W_s^{(e)}(e_{ij}) = G \{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk})^2 \} \quad (5.19)$$

$$\equiv W_s^{(t)}(t_{ij}) = \frac{1}{2E} \{ (1+\nu) t_{ij} t_{ij} - \nu (t_{kk})^2 \} . \quad (5.20)$$

Uit (5.19) volgt dat  $W_s$  positief-definiet is, want  $G > 0$  en  $\nu < 0,5$ , en alleen gelijk aan nul als alle  $e_{ij} = 0$ .

Verder geldt:

$$t_{ij} = \frac{\partial W_s^{(e)}}{\partial e_{ij}} \quad \text{en} \quad e_{ij} = \frac{\partial W_s^{(t)}}{\partial t_{ij}} . \quad (5.21)$$

## V.2. Reciprociteitsstelling van Betti, eenduidigheidsstelling, stellingen van minimum potentiële en minimum complementaire energie

Definitie: een reguliere evenwichtstoestand  $S(x)$

$$S(x) = \{ t_{ij}(x), e_{ij}(x), u_i(x) \} ,$$

is een oplossing, welke voldoet aan de vergelijkingen (4.22), (4.23) en (4.24) met bijbehorende randvoorwaarden en welke voldoende malen differentieerbaar is ( $u_i \in C^2, e_{ij}, t_{ij} \in C^1$ ).

Beschouw een lichaam met volume  $V$  en oppervlak  $S$ , dat op twee manieren wordt belast:



i) door volumekrachten  $k_i^!$  en oppervlakte-spanningen  $t_i^!$ . De hierbij behorende reguliere evenwichtstoestand is:

$$S^!(x) : \{t_{ij}^!(x), e_{ij}^!(x), u_i^!(x)\} .$$

ii) idem door  $k_i''$  en  $t_i''$  met:

$$S''(x) : \{t_{ij}''(x), e_{ij}''(x), u_i''(x)\} .$$

Dan geldt de:

Reciprociteitsstelling van Betti:

$$\int_V k_k^! u_k'' dV + \int_S t_k^! u_k'' dS = \int_V k_k'' u_k^! dV + \int_S t_k'' u_k^! dS . \quad (5.22)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \int_V k_k^! u_k'' dV + \int_S t_k^! u_k'' dS &= - \int_V t_{kl,l}^! u_k'' dV + \int_S u_k'' t_{kl}^! n_l dS = \\ &= - \int_V t_{kl,l}^! u_k'' dV + \int_V (u_k'' t_{kl}^!)_l dV = \\ &= \int_V t_{kl}^! u_{k,l}'' dV = \frac{1}{2} \int_V (t_{kl}^! u_{k,l}'' + t_{lk}^! u_{l,k}'') dV = \\ &= \int_V t_{kl}^! e_{kl}'' dV . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Analoog is

$$\int_V k_k'' u_k^! dV + \int_S t_k'' u_k^! dS = \int_V t_{kl}'' e_{kl}^! dV .$$

Tevens is:

$$\begin{aligned} t_{kl}^! e_{kl}'' &= (\lambda e_{pp}^! \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}^!) e_{kl}'' = \lambda e_{pp}^! e_{kk}'' + 2\mu e_{kl}^! e_{kl}'' = \\ &= (\lambda e_{kk}'' \delta_{pq} + 2\mu e_{pq}'' ) e_{pq}^! = t_{kl}'' e_{kl}^! . \end{aligned}$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Eenduidigheidsstelling

Op analoge wijze als bij de afleiding van (5.23) kunnen we bewijzen dat voor elke reguliere evenwichtstoestand S geldt

$$\begin{aligned} W(S) &= \frac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V k_i^* u_i dV + \frac{1}{2} \int_S t_i u_i dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_V k_i^* u_i dV + \frac{1}{2} \int_{S_p} t_i^* u_i dS + \frac{1}{2} \int_{S_u} t_i u_i^* dS, \end{aligned} \quad (5.24)$$

waarin

- $k_i^*$  : voorgeschreven volumekracht,
- $t_i^*$  : voorgeschreven oppervlaktekracht op  $S_p$ ,
- $u_i^*$  : voorgeschreven verplaatsing op  $S_u$ .

Beschouw twee reguliere evenwichtstoestanden

$$S^{(1)} : \{t_{ij}^{(1)}(x), e_{ij}^{(1)}(x), u_i^{(1)}(x)\},$$

en

$$S^{(2)} : \{t_{ij}^{(2)}(x), e_{ij}^{(2)}(x), u_i^{(2)}(x)\},$$

beide behorende bij dezelfde belasting  $k_i^*$ ,  $t_i^*$ ,  $u_i^*$ , en definieer een derde toestand door

$$S' = S^{(1)} - S^{(2)}.$$

Omdat de vergelijkingen (4.22), (4.23) en (4.24) met de bijbehorende randvoorwaarden lineair zijn, vormt  $S'$  een reguliere evenwichtstoestand, in evenwicht met de belasting

$$k_i^* = t_i^* = u_i^* = 0.$$

Substitueren we dit in (5.24) dan vinden we

$$W(S') = 0. \quad (5.25)$$

In VI. hebben we gezien dat  $W(S)$  een positief definitie functie over alle reguliere evenwichtstoestanden S is, zodat uit (5.25) volgt

$$S' = 0,$$

of

$$S^1 = S^2,$$

waarmee de eenduidigheid is bewezen.

Definitie: Potentiële energie:  $U(S)$ :

$$U(S) := W(S) - \int_V k_i^* u_i dV - \int_{S_p} t_i^* u_i dS, \quad (5.26)$$

$k_i^*$ : voorgeschreven op  $V$  en  $t_i^*$ : op  $S_p$ .

Definitie: Kinematisch toelaatbare toestand:  $\bar{S}(x)$ :

d.i. een stelsel:  $\{\bar{u}_i, \bar{e}_{ij}, \bar{t}_{ij}\}$  waarvoor geldt:

- 1)  $\bar{u}_i \in C^2$  en  $\bar{e}_{ij}, \bar{t}_{ij} \in C^1$  ;
- 2)  $\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$ , (dus het verplaatsingsveld is compatibel) ;
- 3)  $\bar{t}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \bar{e}_{pp} + 2\mu \bar{e}_{ij}$  ;
- 4)  $\bar{u}_i$  voldoet aan de randvoorwaarden op  $S_u$ .

Opmerking: De met 3) gevonden spanningen  $\bar{t}_{ij}$  voldoen in het algemeen niet aan de evenwichtsvergelijkingen en aan de randvoorwaarden op  $S_p$ .

Definitie: Potentiële energie-functionaal van de kinematisch toelaatbare toestand  $\bar{S}(x)$ :

$$U(\bar{S}) := W(\bar{S}) - \int_V k_i^* \bar{u}_i dV - \int_{S_p} t_i^* \bar{u}_i dV. \quad (5.27)$$

Nu geldt de:

Stelling van de minimale potentiële energie

$$U(S) = \min_{\bar{S}} U(\bar{S}) \quad (5.28)$$

Bewijs:

(We nemen aan dat er een  $S(x)$  bestaat en dat deze eenduidig is.)

Stel:  $S' = \bar{S} - S$  ( $S'$  voldoet aan voorwaarden 1), 2) en 3) maar niet aan 4) want:

$$u_i' = 0 \text{ op } S_u, \quad ,$$

omdat  $u_i = \bar{u}_i$  is voorgeschreven op  $S_u$ .)

Dan

$$U(\bar{S}) - U(S) = W(\bar{S}) - W(S) - \int_V k_i^* u_i' dV - \int_{S_p} t_i^* u_i' dS \quad (5.29)$$

Nu is

$$\begin{aligned}
 2W_{\bar{S}}(\bar{S}) &= \bar{t}_{ij} \bar{e}_{ij} = (t_{ij} + t'_{ij})(e_{ij} + e'_{ij}) = \\
 &= t_{ij} e_{ij} + t_{ij} e'_{ij} + t'_{ij} e_{ij} + t'_{ij} e'_{ij} = \\
 &= 2W_S(S) + 2t_{ij} e'_{ij} + 2W_{S'}(S') \quad . \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Bij de laatste stap is gebruik gemaakt van vergelijking (5.25), want  $t'_{ij}$  voldoet aan de wet van Hooke.

Dus:

$$W(\bar{S}) - W(S) = \int_V t'_{ij} e'_{ij} dV + W(S') \quad . \quad (5.31)$$

Verder geldt, omdat  $t_{ij}$  de exacte spanning is en dus aan de evenwichtsvergelijkingen voldoet:

$$\begin{aligned}
 \int_V t_{ij} e'_{ij} dV &= \int_V t_{ij} u'_{i,j} dV = \\
 &= \int_V (t_{ij} u'_i)_{,j} dV - \int_V t_{ij,j} u'_i dV = \\
 &= \int_S t_{ij} u'_i n_j dS + \int_V k_i^* u'_i dV = \\
 &= \int_V k_i^* u'_i dV + \int_{S_p} t_i^* u'_i dS + \int_{S_u} t_i u'_i dS = \\
 &= \int_V k_i^* u'_i dV + \int_{S_p} t_i^* u'_i dS \quad , \quad (u'_i = 0 \text{ op } S_u) \quad . \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

(5.32) substitueren in (5.31) en dit weer in (5.29) geeft:

$$U(\bar{S}) - U(S) = W(S') \quad . \quad (5.33)$$

Nu is

$$W(S') = \frac{1}{2} \int_V t'_{ij} e'_{ij} dV = G \int_V [e'_{ij} e'_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk}')^2] dV \geq 0 \quad , \quad (5.34)$$

en alleen gelijk aan nul als alle  $e'_{ij} = 0$ .

Dus:

$$U(\bar{S}) - U(S) \geq 0 \quad , \quad (5.35)$$

waarbij het gelijkteken alleen geldt als:

$$\bar{S} = S \quad .$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Definitie: Statisch toelaatbare toestand:  $\underline{S}(x)$ :

d.i. een stelsel:  $\{\underline{e}_{ij}, \underline{t}_{ij}\}$  waarvoor geldt

- 1)  $\underline{e}_{ij}, \underline{t}_{ij} \in C^1$  ;
- 2)  $\underline{t}_{ij,j} + k_i^* = 0$  ,  $\underline{t}_{ij} = \underline{t}_{ji}$  ;
- 3)  $2\mu \underline{e}_{ij} = \underline{t}_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu + 3\lambda} \underline{t}_{kk}$  ;
- 4) op  $S_p$  :  $\underline{t}_{ij} n_j = \underline{t}_i^*$  (= voorgeschreven) .

De in 3) gevonden deformaties:  $\underline{e}_{ij}$  voldoen in het algemeen niet aan de compatibiliteitsvergelijkingen en aan de randvoorwaarden op  $S_u$ .

Definitie: Complementaire energie:  $U^*(S)$ :

$$U^*(S) := W(S) - \int_{S_u} \underline{t}_i u_i^* dS \quad , \quad (5.36)$$

$u_i^*$  : voorgeschreven op  $S_u$  .

Definitie: Complementaire energie-functionaal van een statisch toelaatbare toestand  $\underline{S}(x)$ :

$$U^*(\underline{S}) = W(\underline{S}) - \int_{S_u} \underline{t}_i u_i^* dS \quad .$$

$\underline{t}_i$  volgt uit

$$\underline{t}_{kl} n_l = \underline{t}_k \quad \text{op } S_u \quad .$$

Stelling van de minimale complementaire energie:

$$U^*(S) = \min_{\underline{S}} U^*(\underline{S}) \quad . \quad (5.38)$$

Bewijs:

Stel:  $S' = \underline{S} - S$  .

Dan is:

$$U^*(\underline{S}) - U^*(S) = W(\underline{S}) - W(S) - \int_{S_u} t'_i u_i^* dS \quad (5.39)$$

met

i)  $t'_i = 0$  op  $S_p$  en

ii)  $t'_{ij,j} = 0$  ,

want  $t_{ij,j} + k_i = 0$

$$\frac{t_{ij,j} + k_i = 0}{t'_{ij,j} = 0} \quad ,$$

krijgen we, op analoge wijze aan het vorige bewijs:

$$W(\underline{S}) - W(S) = \int_V t'_{ij} e_{ij} dV + W(S') \quad , \quad (5.40)$$

en dit geeft weer:

$$U^*(\underline{S}) - U^*(S) = W(S') \geq 0 \quad , \quad (5.41)$$

en alleen gelijk nul als:  $\underline{S} = S$ , waarmee de stelling is bewezen.

Stelling:

$$U^*(S) + U(S) = 0 \quad . \quad (5.42)$$

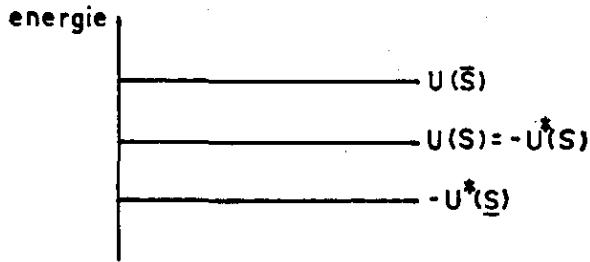
Bewijs:

$$\begin{aligned} U^*(S) + U(S) &= - \int_{S_u} t_i u_i^* dS + 2W(S) - \int_V k_i^* u_i dV - \int_{S_p} t_i^* u_i dS = \\ &= 2W(S) - \int_V k_i^* u_i dV - \int_S t_i u_i dV = 0 \quad . \quad (5.43) \end{aligned}$$

q.e.d.

Uit (5.28), (5.38) en (5.42) volgt dan:

$$- U^*(\underline{S}) \leq - U^*(S) = U(S) \leq U(\bar{S}) \quad . \quad (5.44)$$



We zien dus dat een kinematisch toelaatbare en een statisch toelaatbare toestand een boven- resp. benedengrens geven, waartussen de exacte oplossing moet liggen.

### V.3. Stelling van Castigliano

We weten dat (zie formule (5.38)) in de evenwichtstoestand  $U^*(\underline{S})$  minimaal is. We gaan nu de echte oplossing variëren:

$$S \Rightarrow S + \delta S = \underline{S} \quad , \quad (\underline{S} : \text{statisch toelaatbaar}) .$$

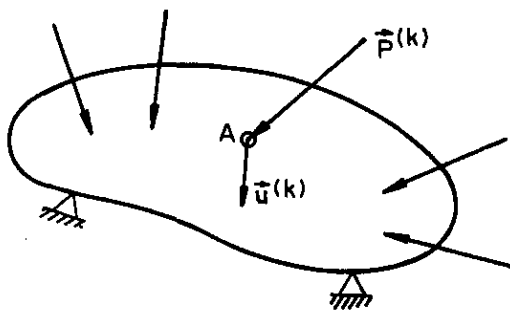
Dan is dus

$$\delta U^*(S) = 0 \quad ,$$

of

$$\delta W(S) = \delta \int_{S_u} t_i u_i^* dS = \int_{S_u} u_i^* \delta t_i dS . \quad (5.45)$$

We gaan dit nu toepassen op een ondersteund, elastisch lichaam, dat belast wordt door puntkrachten en puntmomenten.



We bekijken een kracht  $\vec{P}^{(k)}$  werkende op een punt A van het lichaam. De verplaatsing van het punt A is:  $\vec{u}^{(k)}$ . We nemen nu  $\vec{u}^{(k)}$  constant en gaan  $\vec{P}^{(k)}$  variëren:

$$\vec{P}^{(k)} \Rightarrow \vec{P}^{(k)} + \delta \vec{P}^{(k)} \quad , \quad (\delta \vec{P}^{(k)} \text{ in richting van } \vec{P}^{(k)}) .$$

Dan is

$$\delta W(S) = \int_{S_u} u_i^{(k)} \delta t_i^{(k)} dS . \quad (5.46)$$

Hierin is  $S_u$  het vlak waarop  $\vec{u}^{(k)}$  voorgeschreven, dus het vlak waarop  $\vec{P}^{(k)}$  werkt. Aangezien voor een geconcentreerde kracht dit vlak overgaat in een punt, is dus op  $S_u$ :  $\vec{u}_i^{(k)}$  constant. Dan wordt (5.46):

$$\delta W(S) = u_i^{(k)} \int_{S_u} \delta t_i^{(k)} dS = u_i^{(k)} \delta P_i^{(k)} = (\vec{u}^{(k)}, \delta \vec{P}^{(k)}) . \quad (5.47)$$

Noemen we  $u_p^{(k)}$  de component van  $\vec{u}^{(k)}$  in de richting van  $\vec{P}^{(k)}$  dan geldt dus:

$$u_p^{(k)} = \frac{\partial W(S)}{\partial p^{(k)}} \quad , \quad (p^{(k)} = |\vec{p}^{(k)}|) \quad (5.48)$$

Op analoge wijze geldt voor een puntmoment:

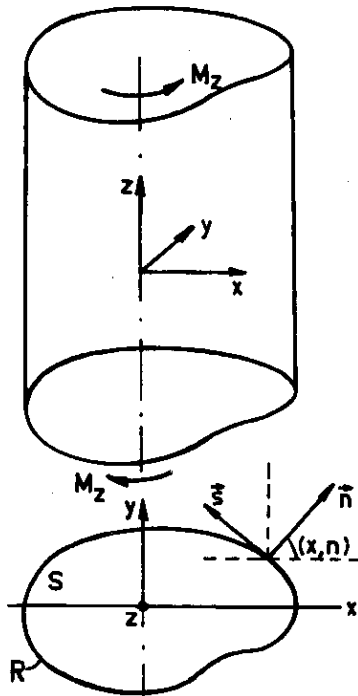
$$\varphi_M^{(\ell)} = \frac{\partial W(S)}{\partial M^{(\ell)}} \quad , \quad (5.49)$$

waarbij  $\varphi_M^{(\ell)}$  is de hoekverdraaiing in de richting van  $M$  van het punt waarop  $M$  werkt.



## VI. Torsie van cilindrische staven

### VI.1. Inleiding



$x$  en  $y$ : centrale-hoofdtraagheidsassen.

We beschouwen een lange cilinder met enkelvoudig samenhangende doorsnede. De mantel van de cilinder is onbelast ( $S_p$ -oppervlak). Verder kunnen de punten van de einddoorsneden vrij verplaatsen in  $z$ -richting (de welving van de einddoorsneden is niet verhinderd), zodat in de einddoorsneden de normaalspanning  $t_{zz} = 0$  moet zijn. In beginsel kunnen we de cilinder op twee manieren torderen:

i) We schrijven de verplaatsingen, in  $x$ - en  $y$ -richting, in de einddoorsneden voor (de randvoorwaarden op deze einddoorsneden zijn dan gemengd-gemengd) door de hoekverdraaiing van de twee einddoorsneden ten opzichte van elkaar te geven.

ii) We schrijven de schuifspanningen in de einddoorsneden voor (de einddoorsneden zijn dan  $S_p$ -oppervlakken) door het wringende moment te geven, waarbij we wel de restrictie moeten stellen dat de schuifspanningen in de einddoorsneden "goed" verdeeld zijn (we komen hierop later terug).

De aldus gestelde problemen kunnen we exact oplossen. We hebben in § IV.4 gezien dat we 15 vergelijkingen hebben voor de 15 onbekenden:  $u_i$ ,  $e_{ij}$ ,  $t_{ij}$ . Bovendien hebben we in § V.2 bewezen dat, als we een oplossing van dit stelsel gevonden hebben, dit ook de enige oplossing is.

De oplossing loopt als volgt:

1) Als we uitgaan van de randvoorwaarden volgens i) kiezen we een verplaatsingsveld in overeenstemming met de condities in de einddoorsneden. Hieruit bepalen we met (1.10) de deformaties en vervolgens met de wet van Hooke de spanningen. Aan deze spanningen wordt dan de voorwaarde opgelegd dat ze voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen en aan de randvoorwaarden.

2) Uitgaande van de randvoorwaarden volgens ii) kiezen we een spanningsveld, dat voldoet aan de randvoorwaarden en aan de evenwichtsvergelijkingen. Uit deze spanningen bepalen we met de wet van Hooke de deformaties, waaruit we de verplaatsingen proberen te halen. Hiertoe is het echter noodzakelijk, dat de deformaties aan de compatibiliteitsvoorwaarden voldoen.

Voor het opstellen van de randvoorwaarden zullen we nog de volgende relaties nodig hebben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \cos(x,s) = -\sin(x,n) = -\cos(y,n) = -\frac{\partial y}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \cos(y,s) = \sin(x,s) = \cos(x,n) = \frac{\partial x}{\partial n} \end{aligned} \tag{6.01}$$

waarin:  $(x,n)$  = de hoek tussen de positieve x-as en de  $\vec{n}$ -richting (zie figuur). Op analoge wijze zijn  $(x,s)$ ,  $(y,n)$  en  $(y,s)$  gedefinieerd.

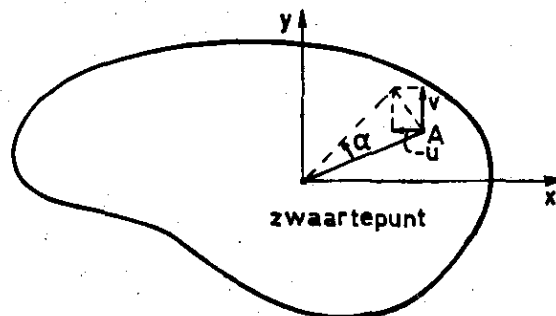
### VI.2. Exacte oplossing uitgaande van een verplaatsingsveld

We gaan uit van het verplaatsingsveld

$$\begin{aligned} u_x &= u = -\alpha zy, \\ u_y &= v = \alpha zx, \\ u_z &= w = \alpha \phi(x,y), \end{aligned} \tag{6.02}$$

waarbij de constante  $\alpha$  de gegeven draaiingshoek per lengte-eenheid voorstelt (in de infinitesimale theorie moet  $|\alpha l| \ll 1$ ).  $\phi(x,y)$  is de nog onbekende welvingsfunctie.

Uit onderstaande figuur blijkt dat  $z$  een rotatie van de doorsnede  $z$  om zijn zwaartepunt aangeeft.



In het algemeen is  $\Phi(x,y)$  niet identiek nul (voor een cirkelvormige doorsnede geldt wel:  $\Phi(x,y) \equiv 0$ ), zodat een vlakke doorsnede bij torsie niet vlak blijft. Men spreekt dan van welving van de doorsnede.

Uit het verplaatsingsveld (6.02) vinden we voor de deformaties

$$\begin{aligned} e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0 , \\ e_{xz} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) , \quad e_{yz} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) , \end{aligned} \quad (6.03)$$

en hieruit krijgen we met de wet van Hooke de spanningen

$$\begin{aligned} t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0 , \\ t_{xz} = G\alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) , \quad t_{yz} = G\alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) . \end{aligned} \quad (6.04)$$

Deze spanningen moeten voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen (3.07), met  $k_i = 0$ . Aan de vergelijkingen in x- en y-richting blijkt identiek te zijn voldaan, terwijl die in z-richting geeft

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 , \quad (6.05)$$

een potentiaalvergelijking in twee dimensies voor  $\Phi(x,y)$ .

De randvoorwaarden op de cilindermantel luiden

$$t_{ij} n_j = 0 . \quad (6.06)$$

Op de rand R van de doorsnede is

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos(n,x), \cos(n,y), 0) , \quad (6.07)$$

zodat (6.06) levert

$$\begin{aligned} \text{in x- en y-richting: } 0 = 0 , \\ \text{in z-richting: } t_{xz} \cos(n,x) + t_{yz} \cos(n,y) = 0 . \end{aligned} \quad (6.08)$$

Met (6.04) gaat deze voorwaarde over in

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) \cos(n,x) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \cos(n,y) = 0 ,$$

of, met (6.01)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = y \cos(n,x) - x \cos(n,y) =: \Gamma(x,y) . \quad (6.09)$$

Op de mantel geldt dus

$$\frac{d\phi}{dn} = \Gamma(x,y) , \quad (6.10)$$

waarbij  $\Gamma(x,y)$  een functie afhankelijk van de vorm van de doorsnede is. De differentiaalvergelijking (6.05) met de randvoorwaarde (6.10) vormt een Neumann-probleem. Een noodzakelijke voorwaarde voor de oplosbaarheid van dit systeem verkrijgen we door (6.05) te integreren over de doorsnede S

$$0 = \iint_S \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_S \text{div}(\text{grad } \phi) dx dy = \oint_R \frac{d\phi}{dn} ds . \quad (6.11)$$

Hieraan is voldaan, immers

$$\oint_R \frac{d\phi}{dn} ds = \oint_R \left( y \frac{\partial y}{\partial s} + x \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = \frac{1}{2} \oint_R \frac{\partial}{\partial s} (x^2 + y^2) ds = 0 . \quad (6.12)$$

Omdat (6.04) over de hele cilinder moet gelden, moet hij ook gelden in de einddoorsneden. We noemen nu de schuifspanning in de einddoorsneden "goed" verdeeld als hij verdeeld is volgens (6.04).

Voor het wringend moment in de doorsnede geldt

$$M_z = \iint_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dx dy = G\alpha \iint_S (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x}) dx dy . \quad (6.13)$$

### VI.3. Exacte oplossing uitgaande van een spanningsveld

We gaan nu bekijken het probleem, waarbij in de einddoorsneden het wringend moment  $M_z$  gegeven is. We onderscheiden:

- i) In de einddoorsneden zijn de schuifspanningen "goed" verdeeld (dus volgens (6.04)); we krijgen dan de oplossing S.
- ii) In de einddoorsneden is een andere schuifspanningsverdeling gegeven, maar met als enige resultante hetzelfde moment  $M_z$ . We krijgen dan de oplossing S'.

Het verschil (S - S') is niet identiek nul, maar het moet wel corresponderen met een nul-belasting, dit is een belasting welke over de doorsnede geïntegreerd geen resulterende kracht of moment geeft.

Hiervoor geldt het: Principe van de Saint-Venant:

Een oplossing welke in evenwicht is met een nulbelasting sterft zeer snel, dat wil zeggen binnen een afstand van de orde van enkele malen een karakteristieke lengte van de doorsnede, uit.

Voor ons probleem houdt dit in, dat de spanningen  $(t_{xz} - t'_{xz})$  en  $(t_{yz} - t'_{yz})$  behorende bij de toestand  $(S - S')$  nul worden op een afstand van de einddoorsneden, welke van de orde is van enkele malen een karakteristieke lengte van de doorsnede. Hieruit volgt dat de juiste verdeling van momenten en krachten niet meer belangrijk is op enige afstand van de einddoorsneden. Het principe van de Saint-Venant is in zijn algemeenheid niet te bewijzen. (U kunt een voorbeeld vinden in het collegedictaat: Lineaire Elasticiteitstheorie I, pp. 66 e.v.) Voor dunwandige doorsneden gaat het principe van de Saint-Venant niet op.

We gaan nu alleen het deel van de cilinder bekijken tussen twee doorsneden, die op voldoende afstand van de einddoorsneden zitten, zodat we mogen aannemen dat de schuifspanning "goed" verdeeld is. We nemen

$$\begin{aligned} t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0, \\ t_{xz} = G \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}, \quad t_{yz} = -G \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

waarin de voorlopig nog onbekende functie  $F(x,y)$  de spanningsfunctie wordt genoemd. Met een dergelijke keuze van het spanningsveld is triviaal voldaan aan de evenwichtsvergelijkingen.

Met behulp van de wet van Hooke vinden we uit (6.14) de deformaties

$$\begin{aligned} e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0, \\ e_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad e_{yz} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Opdat uit deze deformaties verplaatsingen te bepalen zijn, is het noodzakelijk dat voldaan wordt aan de compatibiliteitsvergelijkingen (1.35) en (1.36). Aan (1.35) is triviaal voldaan, terwijl (1.36) geeft

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} \right] &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right] &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} \right] &= 0 = 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = C, \quad (6.17)$$

waarbij C een nog onbekende constante is, welke moet worden bepaald uit de voorwaarde, dat de schuifspanningen in de doorsnede als resultante het wringend moment  $M_z$  moeten leveren. Voor dit moment geldt

$$\begin{aligned} M_z &= \iint_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dx dy = -G \iint_S (x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y}) dx dy = \\ &= -G \iint_S [\frac{\partial (xF)}{\partial x} + \frac{\partial (yF)}{\partial y}] dx dy + 2G \iint_S F dx dy = \\ &= -G \int_R F [x \cos(n,x) + y \cos(n,y)] ds + 2G \iint_S F dx dy. \end{aligned} \quad (6.18)$$

De randvoorwaarde op de mantel luidt

$$t_{xz} \cos(n,x) + t_{yz} \cos(n,y) = 0,$$

of, met (6.01) en (6.14)

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dF}{ds} = 0, \quad (6.19)$$

zodat op de mantel  $F(x,y)$  constant is. Voor een enkelvoudig samenhangende doorsnede mogen we deze constante nul kiezen:

$$F = 0, \quad \text{op } R. \quad (6.20)$$

Hiermee gaat (6.18) over in

$$M_z = 2G \iint_S F dx dy, \quad (6.21)$$

uit welke vergelijking we de constante C in (6.17) kunnen bepalen.

We kunnen de constante C elimineren uit (6.17) door in te voeren

$$\tilde{F}(x,y) = \frac{1}{C} F(x,y), \quad (6.22)$$

waarmee (6.17) en (6.19) overgaan in

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} = 1, \quad \text{met } \tilde{F} = 0, \quad \text{op } R, \quad (6.23)$$

terwijl C volgt uit

$$C = \frac{M_z}{2G \iint_S \tilde{F} \, dx dy} . \quad (6.24)$$

Voorbeeld

Als voorbeeld bekijken we de torsie van een cilinder met de ellipsvormige doorsnede

$$R : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Om aan de randvoorwaarde (6.19) te voldoen nemen we

$$F(x,y) = \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) , \quad \lambda = \text{constant} ,$$

waarmee tevens voldaan is aan (6.17). Immers

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right] = \frac{2\lambda(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} = C .$$

Voor het wringend moment krijgen we met (6.21)

$$M_z = 2G\lambda \iint_S \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx dy = - \pi G \lambda ab ,$$

of

$$\lambda = - \frac{M_z}{\pi G ab} ,$$

waarmee we gevonden hebben

$$F = \frac{M_z}{\pi G ab} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) . \quad (6.25)$$

We willen nu nog de hoekverdraaiing per lengte-eenheid  $\alpha$  bepalen. Deze is gelijk aan

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) . \quad (6.26)$$

Uit (6.15) volgt dat

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial x} , \quad (6.27)$$

en hieruit met (6.17)

$$\alpha = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = - \frac{1}{2} C . \quad (6.28)$$

Met behulp van (6.24) vinden we dan

$$\alpha = - \frac{M_z}{4G \iint_S \tilde{F} \, dx dy} . \quad (6.29)$$

Een in de technische mechanica belangrijke grootheid is de torsiestijfheid D welke gedefinieerd is door

$$D := \frac{M_z}{\alpha} . \quad (6.30)$$

Uit (6.29) volgt direct dat

$$D = - 4G \iint_S \tilde{F} \, dx dy . \quad (6.31)$$

Passen we deze resultaten toe op het voorbeeld van de ellipsvormige staaf, dan vinden we

$$\alpha = \frac{(a^2 + b^2) M_z}{\pi G a^3 b^3} , \quad (6.32)$$

en

$$D = \frac{\pi G a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} . \quad (6.33)$$

Voor een cirkelvormige doorsnede ( $a = b$ ) krijgen we

$$D = \frac{\pi}{2} G a^4 . \quad (6.34)$$



Analogon voor F

De zakking van een vlak membraan, waarvan de rand is ingeklemd en dat belast wordt door een constante druk, voldoet aan dezelfde vergelijkingen als  $F(x,y)$  (dus (6.22) en (6.25)). Als we dus een membraan kiezen dat dezelfde vorm heeft als de doorsnede van de te onderzoeken torsiestaaft, dan zal bij een belasting door een constante druk de zakking van het membraan evenredig zijn met  $F$  en bovendien zal (zie (6.28)) het wringende moment  $M_z$  (en  $D$ ) evenredig zijn met het doorgezakte volume. Het membraan-analogon is dus een experimentele methode voor het bepalen van de torsiestijfheid van een cilindrische staaf. Na de komst van de computer is het nut van deze methode sterk verminderd.

In het geval van torsie (dus:  $t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0$ ) krijgen we voor de specifieke elastische energie

$$W_s = \frac{1}{2G} (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) . \quad (6.35)$$

Voor een cirkelvormige doorsnede geeft dit

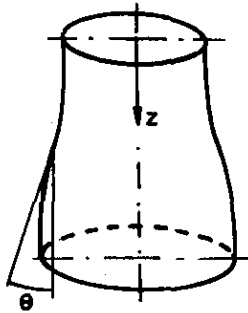
$$\begin{aligned} W &= \int_V W_s \, dV = \int_0^l \int_0^a 2\pi r W_s \, dr dz = \\ &= \int_0^l \int_0^a 2\pi r \frac{1}{2G} \{G^2 \alpha^2 (x^2 + y^2)\} dr dz = \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 G \alpha^2 l a^4 = \frac{M^2 l}{2GI_0} . \end{aligned} \quad (6.36)$$

waarbij

$$M = \int_S (t_{xz} y - t_{yz} x) dS = \frac{1}{2} \pi G \alpha a^4 , \quad (6.37)$$

en

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi a^4 = \text{polair oppervlakte traagheidsmoment.} \quad (6.38)$$



Gegeneraliseerd, voor een niet zuiver cilindrische staaf, krijgen we als een eerste benadering (voor kleine  $\theta$ )

$$W = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{M^2(z)}{I_0(z)} dz . \quad (6.39)$$

Dit is een in de technische toepassingen veel gebruikte benadering.

#### VI.4. Benaderingsoplossingen

We beschouwen een cilindrische staaf, waarbij aan de eindvlakken een draaiing is voorgeschreven. De cilindermantel is vrij.

We zoeken benaderingen m.b.v. de in V.2 afgeleide stellingen. We proberen eerst een

##### i) Kinematisch toelaatbare toestand

We nemen:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\alpha zy , \\ v &= \alpha zx , \\ w &= \alpha \varphi(x,y) . \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

We gebruiken hier niet de evenwichtsvergelijkingen.

De potentiële energie voor een torsieprobleem is

$$U(S) = W(S) - \int_V k_i^* u_i dV - \int_{S_p} t_i^* u_i dS = W(S) \quad , \quad (6.41)$$

want

$$k_i^* = 0 \quad , \quad (\text{geen volumekrachten}) \quad ,$$

$$t_i^* = 0 \quad , \quad \text{want op } S_p \text{ (d.i. de cilindermantel) zijn de spanningen nul.}$$

Voor de potentiële energie-functionaal van de kinematisch toelaatbare toestand geldt analoog

$$U(\bar{S}) = W(\bar{S}) \quad . \quad (6.42)$$

Met (6.08) en (6.35) krijgen we

$$W(S) = \frac{\ell}{2G} \iint_S (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) dx dy = \frac{1}{2} G \alpha^2 \ell I \quad , \quad (6.43)$$

met

$$I = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx dy \quad , \quad (6.44)$$

waarin

$$\varphi_0 = \text{de exacte welvingsfunctie (dus de oplossing van (6.09) en (6.13)).}$$

(6.44) uitschrijven geeft

$$\begin{aligned} I = & \iint_S \left\{ x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\} dx dy + \\ & + \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 + x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\} dx dy \quad . \quad (6.45) \end{aligned}$$

Nu is de eerste term van (6.45) gelijk aan (zie (6.16)):

$$\frac{M_z}{G \alpha} \quad ,$$

en de tweede is nul, want

$$\begin{aligned} \iint_S \left( x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) dx dy &= \iint_S \left\{ \frac{\partial (x \varphi_0)}{\partial y} - \frac{\partial (y \varphi_0)}{\partial x} \right\} dx dy = \\ &= - \oint_R \varphi_0 \{ y \cos(n, x) - x \cos(n, y) \} ds = - \oint_R \varphi_0 \frac{d\varphi_0}{dn} ds = \end{aligned}$$

(m.b.v. de eerste identiteit van Green)

$$= - \iint_{RS} \varphi_{0,k} \varphi_{0,k} \, dx dy = - \iint_{RS} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (6.46)$$

Dus

$$I = \frac{M_z}{G\alpha} = \frac{D}{G} \quad , \quad (\text{met (6.27)}) \quad , \quad (6.47)$$

zodat I een maat is voor de torsiestijfheid.

Analoog is

$$W(\bar{S}) = \frac{\ell}{2G} \iint_S (\bar{t}_{xz}^2 + \bar{t}_{yz}^2) dx dy = \frac{1}{2} G\alpha^2 \ell \bar{I} \quad , \quad (6.48)$$

met

$$\bar{I} = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx dy \quad , \quad (6.49)$$

voor willekeurige, differentieerbare  $\varphi(x,y)$ .

Met het principe minimum potentiële energie (5.28) leiden we hieruit af

$$I(S) \leq \bar{I}(\bar{S}) \quad . \quad (6.50)$$

Vervolgens proberen we een

ii) Statisch toelaatbare toestand

We nemen

$$\begin{aligned} t_{xz} &= \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \quad , \\ t_{yz} &= - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \quad , \end{aligned} \quad (6.51)$$

en de overige spanningen nul,

en:  $F = 0$ , aan de rand R van de doorsnede.

De complementaire energie voor het torsie-probleem is

$$U^*(S) = W(S) - \iint_{S_u} u_i^* t_i \, dS \quad .$$

Nu is (met (6.07), want S = exacte oplossing)

$$\begin{aligned} \iint_{S_u} u_i^* t_i \, dS &= \iint_S (u_x^* t_x + u_y^* t_y) dS = \\ &= \iint_S -\alpha \ell (y t_x - x t_y) dS = \alpha \ell M_z \quad , \end{aligned} \quad (6.52)$$

want  $S_u$  is de einddoorsnede (stel andere einddoorsnede ingeklemd, dan is daar  $u_1^* = 0$ ; dit is niet essentieel, want  $\alpha$  is de relatieve hoekverdraaiing). Nu geldt op  $S_u$  :

$$t_x = t_{xx} n_x + t_{xy} n_y + t_{xz} n_z = t_{xz} \quad ,$$

en analoog:

$$t_y = t_{yz} \quad ,$$

zodat uit (6.17) de laatste stap van (6.52) volgt. Dus

$$U^*(S) = W(S) - \alpha \ell M_z \quad . \quad (6.53)$$

Analoog krijgen we voor de complementaire energie-functionaal van de statisch toelaatbare toestand

$$U^*(\underline{S}) = W(\underline{S}) - \alpha \ell \underline{M}_z \quad , \quad (6.54)$$

waarbij (zie (6.26))

$$\underline{M}_z = 2 \iint_S F \, dx dy \quad . \quad (6.55)$$

Verder is

$$W(\underline{S}) = \frac{\ell}{2G} \iint_S (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) \, dx dy = \frac{\ell}{2G} \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right\} \, dx dy \quad . \quad (6.56)$$

Met (6.55) en (6.56) wordt (6.54)

$$U^*(\underline{S}) = \frac{\ell}{2G} \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - 4G\alpha F \right\} \, dS = \frac{1}{2} G\alpha^2 \ell \underline{K}(\underline{S}) \quad , \quad (6.57)$$

met

$$\underline{K}(\underline{S}) := \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 4f \right\} \, dx dy \quad , \quad (6.58)$$

$$\text{en} \quad f := \frac{F}{G\alpha} \quad . \quad (6.59)$$

Met het principe minimum complementaire energie (5.38) krijgen we hieruit

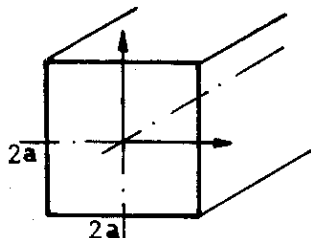
$$K(S) \leq \underline{K}(\underline{S}) \quad . \quad (6.60)$$

En formule (4.40) geeft

$$- \underline{K}(\underline{S}) \leq - K(S) = I(S) \leq \bar{I}(\bar{S}) \quad . \quad (6.61)$$

Hiermee hebben we een boven- en een ondergrens gevonden, waartussen de exacte waarde van de torsiestijfheid, welke een technisch belangrijke grootte is, moet liggen.

Voorbeeld: Cilindrische staaf met vierkante doorsnede.



De exacte oplossing van dit torsie-probleem is te vinden m.b.v. oneindige reeksen. We krijgen dan voor de torsiestijfheid de exacte waarde

$$D = 2,25 Ga^4 .$$

i) We nemen eerst:  $\varphi(x,y) = 0$ , (dit is een slechte benadering).

Dit geeft

$$I = \frac{8}{3} a^4 = 2,67 a^4 . \quad (6.62)$$

ii) Vervolgens nemen we

$$f(x,y) = A(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) ,$$

zodat voldaan is aan  $f = 0$  (en dus  $F = 0$ ) aan de rand.

Dit geeft

$$K = \frac{64}{9} a^6 \left( \frac{4}{5} a^2 A^2 - A \right) .$$

Het minimum van  $K$  treedt op voor  $A = \frac{5}{8a^2}$ , zodat de kleinste  $K$  is

$$K = - \frac{20}{9} a^4 = - 2,22 a^4 . \quad (6.63)$$

Met (6.62) en (6.63) krijgen we voor  $D = IG$

$$2,22 Ga^4 \leq D \leq 2,67 Ga^4 . \quad (6.64)$$

Vergelijken we dit met de exacte waarde, dan zien we dus, dat vooral de  $\varphi(x,y)$  slecht gekozen is. We proberen daarom de functie

iii)  $\varphi(x,y) = A(yx^3 - xy^3)$ , (deze functie is invariant t.o.v. draaiing over  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ) .

Deze geeft

$$D = 2,25 a^4 G ,$$

dus een zeer goede benadering.

Nu moet

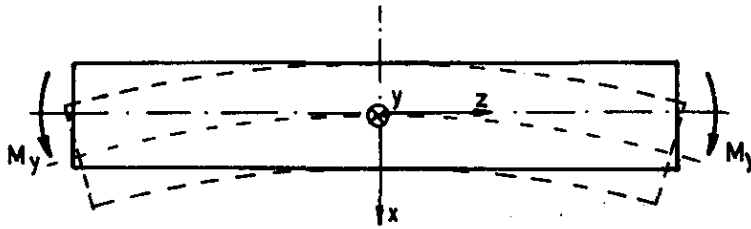
$$2,22 Ga^4 \leq D \leq 2,25 Ga^4 , \quad (6.65)$$

zodat de exacte waarde nu goed ingesloten is.

VII. Buiging van cilindrische staven

VII.1. Buiging door een moment. Exacte theorie

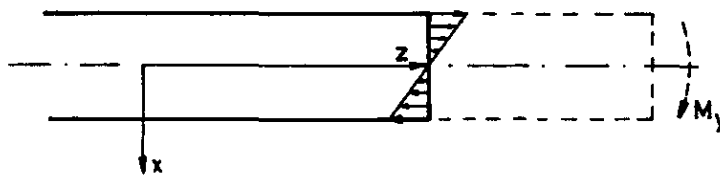
We beschouwen een cilindrische staaf met lengte  $l$ , welke in zijn einddoorsneden belast wordt door een buigend moment, gericht langs een van de hoofdtraagheidsassen van de doorsneden. We nemen aan dat de spanningen in de einddoorsneden "goed" verdeeld zijn (een exacte definitie van "goed" verdeeld volgt verderop).



De x-, y- en z-as zijn hoofdtraagheidsassen door het zwaartepunt van de doorsneden. We definiëren het begrip: neutrale lijn als de meetkundige plaats van de zwaartepunten van de doorsneden.

We stellen de volgende spanningsverdeling

$$\left. \begin{aligned} t_{zz} &= -\frac{M_y}{I_y} x, & (I_y &:= \int_S x^2 dS), \\ t_{xx} &= t_{yy} = t_{xy} = t_{xz} = t_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.01)$$



Spanningsverdeling.

De spanningen volgens (7.01) voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen en maken ook evenwicht met het buigende moment  $M_y$ , want

$$M_y = - \int_S x t_{zz} dS = - \int_S \left( -\frac{M_y}{I_y} x \right) x dS = \frac{M_y}{I_y} \int_S x^2 dS = M_y.$$

We noemen nu de eindspanning "goed" verdeeld, indien ook in de einddoorsneden voldaan is aan (7.01). Indien het moment in de einddoorsneden anders dan rechtlijnig verdeeld is, zal het verschil (want dit geeft een nulbelasting) volgens het principe van de Saint-Venant snel uitdempen.

Uit (7.01) kunnen we de deformaties bepalen ( $M \equiv M_y$ ,  $I \equiv I_y$ ):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} = e_{yy} &= \frac{\nu}{E} \frac{M}{I} x, \\ e_{zz} &= -\frac{M}{EI} x, \\ e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.02)$$

Deze deformaties zijn compatibel; we kunnen hieruit dus de verplaatsingen berekenen. We krijgen, afgezien van starre-lichaamsverplaatsingen:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{2EI} (z^2 + \nu x^2 - \nu y^2), \\ v &= \frac{M}{EI} \nu xy, \\ w &= -\frac{M}{EI} xz. \end{aligned} \right\} \quad (7.03)$$

Langs de neutrale lijn ( $x=y=0$ ) krijgen we

$$u_0 = \frac{M}{2EI} z^2,$$

en dit geeft

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI}, \quad (R: \text{kromtestraal}) \quad (7.04)$$

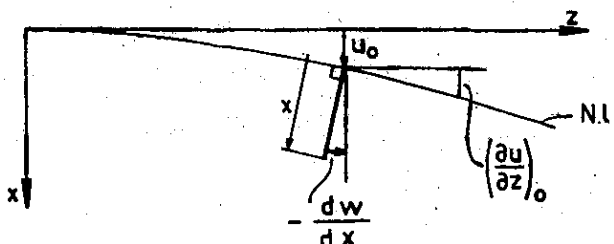
In onze benadering geldt inderdaad:  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{R}$ , want termen van hogere orde van  $u$  worden consequent verwaarloosd. Dus formule (7.04) is, binnen de lineaire theorie, exact.

Langs de neutrale lijn geldt verder

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = \frac{M}{EI} z, \quad (7.05)$$

zodat we krijgen

$$w = -x \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = - \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \quad (7.06)$$



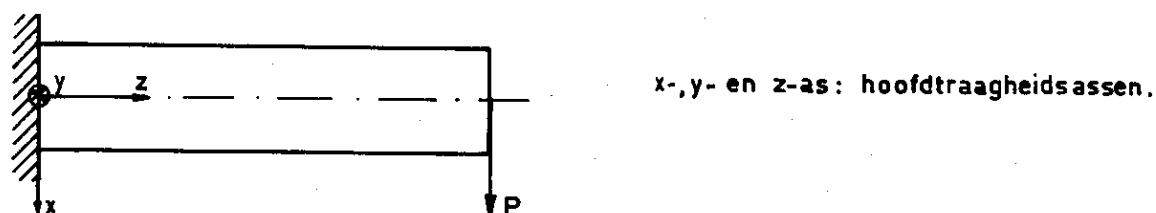


Uit (7.06) volgt, dat de doorsneden loodrecht op de neutrale lijn blijven staan. Dit is de zg. Wet van Bernoulli of "stekelvarkenhypothese":

Normale doorsneden blijven na de buiging normaal.

De stelling geldt exact voor de buiging van een cilindrische staaf door een moment langs een hoofdtraagheidsas. Een technisch veel belangrijker probleem is echter de buiging van een balk door een dwarskracht; hier geldt bovenstaande hypothese ook nog, maar voor meer algemene belastingen (meer dan een dwarskracht, verdeelde belasting) niet meer.

### VII.2. Buiging door een dwarskracht. Benaderingstheorie



We beschouwen een cilindrische staaf, welke in zijn einddoorsnede belast wordt door een dwarskracht P gericht langs een hoofdtraagheidsas.

Dit probleem is om twee redenen moeilijker dan het vorige:

- i) Het moment in een doorsnede z is afhankelijk van z, immers

$$M_y(z) = P(\ell - z) \quad . \quad (7.07)$$

- ii) De spanning  $t_{zx} \neq 0$ , want deze spanningen moeten in evenwicht zijn met de dwarskracht, dus

$$\int_S t_{zx} \, dS = P \quad . \quad (7.08)$$

Dit probleem is nog wel exact te behandelen met potentiaaltheorie (zie Lineaire Elasticiteitstheorie I), maar het is een veel ingewikkelder probleem dan de torsie. Bovendien is het probleem van een balk, welke belast wordt door twee, in verschillende doorsneden aangrijpende dwarskrachten, niet meer exact te behandelen. We zullen daarom hier een benaderingstheorie afleiden. Deze benaderingstheorie geldt voor staven, waarvan de lengte vele malen groter is dan een karakteristieke maat van de doorsnede. We beperken ons hier wel tot enkelvoudig samenhangende doorsneden (dit is geen essentiële beperking). We nemen verder aan, dat de volgende benaderingen ook gelden voor staven waarvan de doorsnede in de z-richting verandert, mits deze veranderingen niet te groot zijn.

We nemen in het vervolg steeds aan dat de volgende spanningen nul zijn

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0 \quad (7.09)$$

We definiëren de doorsnedegrootheden

i) normaalkracht

$$N := \int_S t_{zz} \, dS \quad (7.10)$$

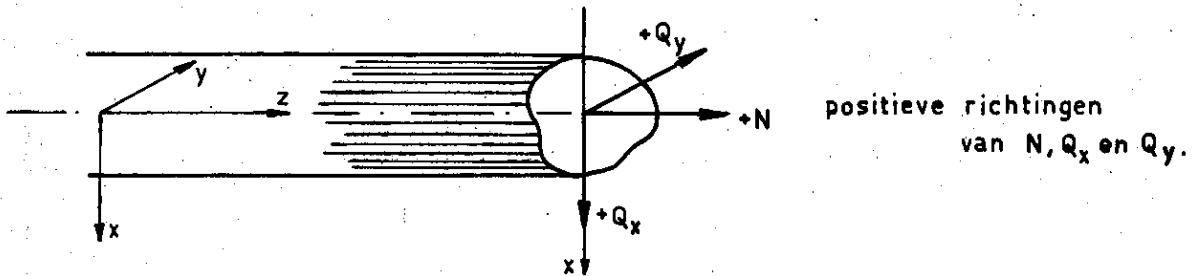
ii) dwarskracht in x-richting

$$Q_x := \int_S t_{xz} \, dS \quad (7.11)$$

iii) dwarskracht in y-richting

$$Q_y := \int_S t_{yz} \, dS \quad (7.12)$$

We noemen  $Q_x$  positief, indien hij in een doorsnede, waarvan de normaal in de positieve z-richting staat, werkt in de positieve x-richting. Analoog voor  $Q_y$  en N.



iv) buigend moment in de x-richting

$$M_x := \int_S y t_{zz} \, dS \quad (7.13)$$

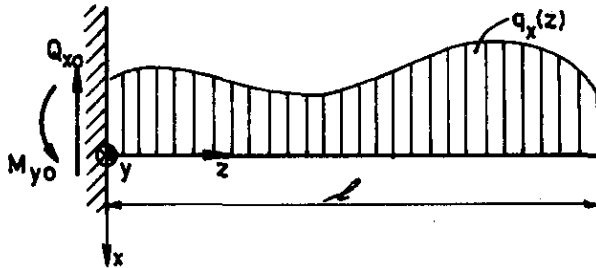
v) buigend moment in de y-richting

$$M_y := - \int_S x t_{zz} \, dS \quad (7.14)$$

vi) wringend (of torsie) moment

$$M_z := \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) \, dS \quad (7.15)$$

We noemen weer  $M_x$  positief, indien hij in een doorsnede, waarvan de normaal in de positieve  $z$ -richting staat, werkt in de positieve  $x$ -richting en analoog voor  $M_y$  en  $M_z$ .



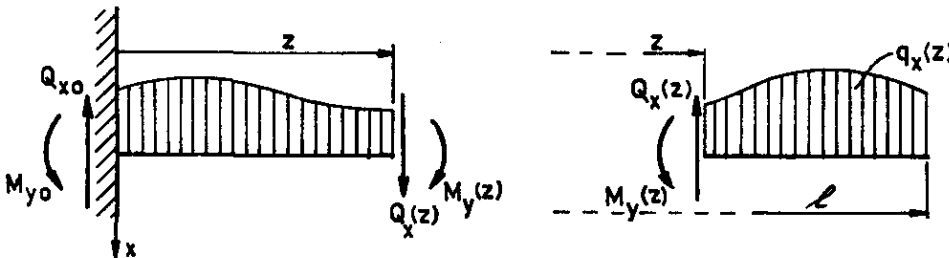
$q_x(z)$ : kracht per eenheid van lengte.

We beschouwen een ingeklemde rechte balk belast door de verdeelde belasting  $q_x(z)$ . Uit het totale evenwicht volgt voor de reactiegrootheden in de in-klemming

$$Q_{x0} = \int_0^l q_x(\zeta) d\zeta \quad , \quad (7.16)$$

en

$$M_{y0} = \int_0^l \zeta q_x(\zeta) d\zeta \quad . \quad (7.17)$$



In een doorsnede  $z$  geldt

$$Q_x(z) = \int_z^l q_x(\zeta) d\zeta \quad , \quad (7.18)$$

en

$$M_y(z) = \int_z^l (\zeta - z) q_x(\zeta) d\zeta \quad . \quad (7.19)$$

Uit (7.18) en (7.19) volgen door differentiatie de drie belangrijke relaties

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_x}{dz} &= -q_x(z) , \\ \frac{dM_y}{dz} &= -Q_x(z) , \\ \text{en } \frac{d^2 M_y}{dz^2} &= q_x(z) . \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

De eerste twee vergelijkingen van (7.20) zijn de globale evenwichtsvergelijkingen. De evenwichtsvergelijkingen luiden hier namelijk (alleen  $t_{xz}$  en  $t_{zz}$  ongelijk nul)

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + k_x = 0 , \quad (7.21)$$

$$\text{en } \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + k_z = 0 , \quad (7.22)$$

waarbij in ons probleem  $k_z = 0$  en  $k_x$  voldoet aan

$$\int_S k_x dS = q_x(z) . \quad (7.23)$$

(7.21) integreren over de doorsnede geeft met (7.23)

$$\int_S \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} dS + \int_S k_x dS = 0 ,$$

of

$$\frac{d}{dz} \int_S t_{xz} dS + q_x(z) = 0 ,$$

en dit geeft met (7.11):

$$\frac{dQ_x}{dz} = -q_x(z) .$$

(7.22) met  $x$  vermenigvuldigen en integreren over de doorsnede, geeft met (7.11) en (7.14) en met de voorwaarde dat  $t_{xz} = 0$  aan de rand van de doorsnede

$$\begin{aligned} \int_S x \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} dS + \int_S x \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} dS &= \\ &= (xt_{xz}) \Big|_R - \int_S t_{xz} dS + \frac{d}{dz} \int_S xt_{zz} dS = -Q_x(z) - \frac{dM_y}{dz} = 0 . \end{aligned}$$

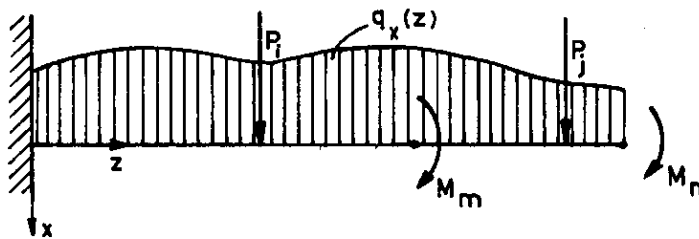
De globale evenwichtsvergelijkingen (7.20) zijn dus te verkrijgen door middeling van de lokale evenwichtsvergelijkingen over de doorsnede. Hiermee is het probleem van de buiging van een balk teruggebracht tot een één-dimensionaal probleem (alleen  $z$  als variabele).

Een van de grootheden uit de balkentheorie welke we graag willen kennen is de verplaatsing van de centrale lijn:  $u_0$ . Hiertoe moeten we een verband kennen tussen de buigende momenten in de doorsneden en deze verplaatsing. In de technische mechanica wordt hiervoor de volgende relatie gepostuleerd

$$M_y = \frac{EI}{R} = EI \frac{d^2 u_0}{dz^2} \quad (7.24)$$

Deze relatie hangt direct samen met de wet van Bernouilli, zoals we in de vorige paragraaf hebben gezien. Deze wet geldt echter alleen exact voor de momentenbuiging. M.b.v. een energie-beschouwing zullen we laten zien dat de relatie (7.24) inderdaad in de balkentheorie de beste is die we kunnen kiezen. We moeten daarbij bedenken, dat de balkentheorie geldt als een benaderingstheorie voor lichamen waarvan de lengte  $l$  vele malen groter is dan een of andere karakteristieke doorsnede-maat  $r$ . We zullen dus moeten trachten aan te tonen, dat de hypothese (7.24) een goede aanname is voor het geval dat  $(r/l)$  naar nul gaat.

We beschouwen het volgende systeem:



een rechte balk belast door een verdeelde belasting en enkele puntkrachten en -momenten.

We kiezen eerst een

i) Kinematisch toelaatbare toestand

Stel: 
$$u = \varphi(z) + \frac{1}{2}v(x^2 - y^2)\varphi''(z) \quad , \quad (\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}) \quad ,$$

$$v = vxy\varphi''(z) \quad ,$$

$$w = -x\varphi'(z) \quad .$$
(7.25)

$\varphi(z)$ : willekeurige, driemaal continu differentieerbare functie van  $z$ , welke voldoet aan de voorgeschreven verplaatsingen van de neutrale lijn ( $u_k^*$ ).

Hieruit leiden we af de deformaties

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \nu x \varphi'' & ; & & e_{yy} &= \nu x \varphi'' & ; & & e_{zz} &= -x \varphi'' & ; \\ e_{xy} &= 0 & ; & & e_{yz} &= \frac{1}{2} \nu x y \varphi''' & ; & & e_{xz} &= \frac{1}{4} \nu (x^2 - y^2) \varphi''' & . \end{aligned} \quad (7.26)$$

Voor de elastische energie krijgen we uit (7.26)

$$\begin{aligned} W &= G \int_V \left\{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk})^2 \right\} dV = G \int_V \left\{ 2\nu^2 x^2 (\varphi'')^2 + x^2 (\varphi'')^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \nu^2 x^2 y^2 (\varphi''')^2 + \frac{1}{8} \nu^2 (\varphi''')^2 (x^2 - y^2)^2 + \left. \frac{\nu}{1-2\nu} [(2\nu - 1)x\varphi'']^2 \right\} dV = \\ &= G \int_V x^2 (\varphi'')^2 \left[ 2\nu^2 + 1 + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (1-2\nu)^2 \right] dV + \\ &+ G \int_V (y^2 + x^2)^2 (\varphi''')^2 \frac{\nu^2}{8} dV = \\ &= \frac{1}{2} EI \int_0^l (\varphi'')^2 dx + \frac{\nu^2 EK}{16(\nu+1)} \int_0^l (\varphi''')^2 dz, \end{aligned} \quad (7.27)$$

waarbij

$$K = \int_S (y^2 + x^2)^2 dS, \quad (7.28)$$

en waarbij gebruikt zijn de relaties:

$$I = \int_S x^2 dS \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} .$$

Als (zie de opmerkingen aan het einde van deze paragraaf)

$$\frac{K}{I} = O(x^2),$$

en

$$\frac{\int_0^l (\varphi''')^2 dz}{\int_0^l (\varphi'')^2 dz} = O\left(\frac{1}{l^2}\right),$$

krijgen we uit (7.27)

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l (\varphi'')^2 dx + O\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2\right], \quad (7.29)$$

en dit geeft, als  $u_0$  de verplaatsing in x-richting van de neutrale lijn ( $x = y = 0$ ) is

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l (u_0'')^2 dx + O\left[\left(\frac{l}{l}\right)^2\right] . \quad (7.30)$$

Hiermee vinden we voor de potentiële energie functionaal

$$U(S) = \frac{EI}{2} \int_0^l (u_0'')^2 dz - \int_0^l q u_0 dz - \Sigma \{u_k P_k^* + u_k' M_k^*\} + O\left[\left(\frac{l}{l}\right)^2\right] . \quad (7.31)$$

Hierin zijn  $P_k^*$  ( $M_k^*$ ) voorgeschreven puntkrachten (-momenten) en  $u_k$  ( $u_k'$ ) de verplaatsingen (verdraaiingen) in de richting  $P_k^*$  ( $M_k^*$ ) van de neutrale lijn. De arbeid door  $q(z)$  verricht is

$$\int_V \frac{q(z)}{S} u dV = \int_0^l q \phi dz + \frac{v}{2S} \int_S (x^2 - y^2) dS \int_0^l q \phi'' dz = \int_0^l q \phi dz (1 + O\left[\left(\frac{l}{l}\right)^2\right]) .$$

We nemen vervolgens een

ii) Statisch toelaatbare toestand

De globale evenwichtsvergelijkingen luiden

$$M''(z) = q(z) ; \quad M'(z) = -Q(z) ; \quad Q'(z) = -q(z) . \quad (7.32)$$

We beschouwen  $q(z)$  als een gelijkmatig over de doorsnede verdeelde volumekracht in x-richting. Dan worden de lokale evenwichtsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + \frac{q(z)}{S} &= 0 , \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} &= 0 , \\ \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} &= 0 . \end{aligned} \quad (7.33)$$

We stellen:

$$\begin{aligned} t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} &= 0 , \\ t_{zz} = -\frac{M(z)}{I} x ; \quad t_{xz} = -\frac{Q(z)}{I} f(x,y) ; \quad t_{yz} = -\frac{Q}{I} g(x,y) , \end{aligned} \quad (7.34)$$

dan is aan de eerste twee vergelijkingen van (7.33) triviaal voldaan, terwijl de laatste met behulp van (7.32) geeft

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - x = 0 .$$

Aan deze vergelijking is identiek voldaan door de substitutie

$$f(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + \frac{1}{2}x^2 ; \quad g(x,y) = - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} . \quad (7.35)$$

Uit het feit dat de mantel spanningsvrij is, volgt de randvoorwaarde:

$$t_{xz} n_x + t_{yz} n_y = 0 \Rightarrow f n_x + g n_y = 0 ,$$

en dit geeft met (7.35)

$$\frac{\partial F}{\partial y} n_x - \frac{\partial F}{\partial x} n_y = -\frac{1}{2}x^2 n_x , \quad \text{langs de rand,}$$

of:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{dF}{ds} = -\frac{1}{2}x^2 n_x .$$

Dus

$$(F)_{\text{rand}} = -\frac{1}{2} \int_0^s x^2 n_x ds . \quad (7.36)$$

Uit (7.36) kunnen we altijd een oplossing  $F(x,y)$  vinden, welke  $O(r^3)$  is, en zodanig dat  $f(x,y)$  en  $g(x,y)$ :  $O(r^2)$  zijn.

Verder stellen we

$$t_{xx} = \frac{q(z)}{I} T_{xx} ; \quad t_{yy} = \frac{q(z)}{I} T_{yy} ; \quad t_{xy} = \frac{q(z)}{I} T_{xy} ,$$

dan worden de eerste twee vergelijkingen van (7.33)

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = - \left( \frac{I}{S} + f \right) ,$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = - g ,$$

met de randvoorwaarden

$$T_{xx} n_x + T_{xy} n_y = T_{xy} n_x + T_{yy} n_y = 0 .$$

Dit stelsel heeft oplossingen  $T_{xx}$ ,  $T_{xy}$ ,  $T_{yy}$  welke  $O(r^3)$  zijn.

De elastische energie wordt met dit spanningsveld

$$W = \frac{1}{2E} \int_V \{ (1+\nu)t_{ij}t_{ij} - \nu(t_{kk})^2 \} dV =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2E} \int_V \{t_{xx}^2 + t_{yy}^2 + t_{zz}^2 - 2\nu(t_{xx}t_{yy} + t_{xx}t_{zz} + t_{yy}t_{zz}) + \\
 &+ (1+\nu)(t_{xy}^2 + t_{xz}^2 + t_{yz}^2)\} dV = \\
 &= \frac{1}{2E} \left\{ \int_V \frac{M^2(z)}{I^2} x^2 dV + (1+\nu) \int_V \frac{Q^2(z)}{I^2} (f^2 + g^2) dV + \right. \\
 &+ 2\nu \int_V \frac{M(z)q(z)}{I^2} x(T_{xx} + T_{yy}) dV + \int_V \frac{q^2(z)}{I^2} [T_{xx}^2 + T_{yy}^2 - 2\nu T_{xx}T_{yy} + \\
 &\quad \left. + (1+\nu)T_{xy}^2] dV \right\} = \\
 &= \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(z) dz \left\{ 1 + \frac{(1+\nu)}{I} \int_S (f^2 + g^2) dS \frac{\int_0^l (M')^2 dz}{\int_0^l M^2 dz} + \right. \\
 &+ \frac{2\nu}{I} \int_S x(T_{xx} + T_{yy}) dS \frac{\int_0^l MM' dS}{\int_0^l M^2 dS} + \frac{1}{I} \int_S [T_{xx}^2 + T_{yy}^2 - 2\nu T_{xx}T_{yy} + \\
 &\quad \left. + (1+\nu)T_{xy}^2] dS \frac{\int_0^l (M')^2 dz}{\int_0^l M^2 dz} \right\} = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(z) dz (1 + o\left[\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]), \quad (7.37)
 \end{aligned}$$

mits (zie de opmerkingen aan het einde van deze paragraaf)

$$\frac{\int_0^l (M')^2 dz}{\int_0^l M^2 dz} = o\left(\frac{1}{l^2}\right) \quad \text{en} \quad \frac{\int_0^l MM' dz}{\int_0^l M^2 dz} = o\left(\frac{1}{l^2}\right),$$

en omdat

$$\frac{1}{I} \int_S (f^2 + g^2) dS \quad \text{en} \quad \frac{1}{I} \int_S x(T_{xx} + T_{yy}) dS ,$$

$O(r^2)$  zijn.

De laatste integraal van (7.37) is, onder deze voorwaarden,  $O[(\frac{r}{l})^4]$ .

De complementaire energie functionaal wordt dus

$$U^*(\bar{S}) = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dz - \sum_k (u_k^* P_k + u_k^{*'} M_k) + O[(\frac{r}{l})^2] , \quad (7.38)$$

waarbij  $u_k^*$  voorgeschreven verplaatsingen zijn.

Met (7.31) en (7.38) krijgen we de belangrijke betrekking

$$U(S) + U^*(\bar{S}) = \frac{EI}{2} \int_0^l (u_0'')^2 dz + \frac{EI}{2} \int_0^l (\frac{M}{EI})^2 dz + \\ - \int_0^l q u_0 dz - \sum_k \{u_k P_k^* + u_k' M_k^*\} - \sum_k \{u_k^* P_k + u_k^{*'} M_k\} + O[(\frac{r}{l})^2] ,$$

welke we verder uitwerken tot

$$U(S) + U^*(\bar{S}) = \frac{EI}{2} \int_0^l (u_0'' - \frac{M}{EI})^2 dz + \int_0^l u_0'' M dz - \int_0^l q u_0 dz + \\ - \sum_k \{u_k P_k^* + u_k' M_k^*\} - \sum_k \{u_k^* P_k + u_k^{*'} M_k\} + O[(\frac{r}{l})^2] = \\ = \frac{EI}{2} \int_0^l (u_0'' - \frac{M}{EI})^2 dz + O[(\frac{r}{l})^2] . \quad (7.39)$$

Bij deze laatste stap hebben we gebruikt:  $q = M''$  en de tweede en derde term partieel geïntegreerd. De stoktermen vallen dan weg tegen:  $\sum_k u_k P_k^*$  etc.

Als we de hypothese

$$u_0'' = \varphi'' = \frac{M}{EI} , \quad (7.40)$$

gebruiken, vinden we uit (7.39)

$$U(\underline{S}) + U^*(\overline{S}) = O\left[\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right]. \quad (7.41)$$

Hiermee is bewezen dat voor  $(r/\ell) \rightarrow 0$  de hypothese (7.40) exact is. Deze aanname is dus zeer bruikbaar voor lange slanke balken.

Opmerkingen

i) Essentieel voor de beschouwingen is dat  $\varphi(z)$  en  $M(z)$  voldoen aan

$$\frac{\int_0^{\ell} (\varphi''')^2 dz}{\int_0^{\ell} (\varphi'')^2 dz} = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right) \quad \text{en} \quad \frac{\int_0^{\ell} (M')^2 dz}{\int_0^{\ell} M^2 dz} = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right).$$

Gebruiken we (7.40), dan wordt

$$\frac{\int_0^{\ell} (\varphi''')^2 dz}{\int_0^{\ell} (\varphi'')^2 dz} = \frac{\int_0^{\ell} (M')^2 dz}{\int_0^{\ell} (M)^2 dz}.$$

$M(z)$  moet voldoen aan de globale evenwichtsvergelijkingen (7.32) en is dus afhankelijk van de gegeven belasting. Aan bovenstaande voorwaarde zal daarom alleen voldaan zijn als de belasting voldoende glad is.

Nemen we bijvoorbeeld

$$q(z) = q_0 \cos\left(\frac{n\pi z}{\ell}\right), \quad P_k^* = M_k^* = 0,$$

dan wordt

$$\int_0^{\ell} (M')^2 dz = \int_0^{\ell} Q^2 dz = \frac{\ell^3 q_0^2}{2\pi^2 n^2},$$

en

$$\int_0^{\ell} M^2 dz = \frac{\ell^5 q_0^2}{2\pi^3 n^3},$$

zodat

$$\frac{\int_0^{\ell} (M')^2 dz}{\int_0^{\ell} M^2 dz} = \frac{m}{\ell^2} .$$

Dit is alleen  $O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)$  als  $n = O(1)$ .

ii) Verder is noodzakelijk dat:

$$\frac{K}{I} = O(r^2) .$$

Stel

$$|x| \leq a , \quad |y| \leq b , \quad a, b \ll \ell .$$

Dan is

$$K = \int_S (x^2 + y^2)^2 dS \leq (a^2 + b^2)^2 S .$$

We voeren verder een getal  $\alpha$  in als

$$\alpha := \frac{I}{a^2 S} = \frac{1}{a^2 S} \int_S x^2 dS , \quad (0 < \alpha \leq 1) ,$$

zodat

$$\frac{K}{I} \leq \frac{a^2}{\alpha} \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2 .$$

Dit is dus niet meer  $O(a^2)$  als

i)  $\frac{1}{\alpha} \gg 1 .$

Voor de meeste, in de praktijk belangrijke doorsneden is echter  $\frac{1}{\alpha} = O(1)$ ;  
bijv.

rechthoek:  $\alpha = \frac{1}{3} ,$

cirkel :  $\alpha = \frac{1}{4} .$

ii)  $\frac{b}{a} \gg 1 ,$

dus voor doorsneden, waarvan de afmetingen in de  $y$ -richting veel groter zijn dan die in de  $x$ -richting.

Resumerend kunnen we dus stellen, dat de balkentheorie niet mag worden toegepast op balken waarvan

- i) de belasting, als functie van  $z$ , te snel varieert,
- ii) de ene doorsnedemaat groot is t.o.v. de andere.

Voor een bestaande situatie, gegeven balk met gegeven belasting, kunnen we altijd controleren of we de balkentheorie mogen toepassen, door

$$\alpha, \frac{K}{I}, \frac{\int_0^{\ell} (M')^2 dz}{\int_0^{\ell} M^2 dz},$$

te berekenen.

Voorbeeld: balk met rechthoekige doorsnede ( $P_1^* = M_1^* = 0$ ).

Voor deze doorsnede is

$$I = \frac{4}{3} a^3 b$$

$$K = \frac{4}{3} a^3 b \left[ \frac{3}{5} a^2 + \frac{2}{3} b^2 + \frac{3}{5} b^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right].$$

Hiermee wordt

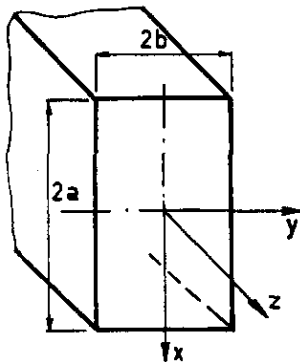
$$\begin{aligned} U(S) = & \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} (\varphi'')^2 dz + \\ & + \frac{EI}{2} \frac{\nu^2}{8(1+\nu)} \left[ \frac{3}{5} a^2 + \frac{2}{3} b^2 + \frac{3}{5} b^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right] \int_0^{\ell} (\varphi''')^2 dz + \\ & - \int_0^{\ell} q \varphi dz - \frac{\nu}{6} (a^2 - b^2) \int_0^{\ell} q \varphi'' dz. \end{aligned}$$

Als spanningsverdeling kiezen we

$$t_{xx} = \frac{q}{6I} (a^2 - x^2)x, \quad t_{xy} = t_{yy} = t_{yz} = 0,$$

$$t_{zz} = -\frac{M}{I} x, \quad t_{xz} = -\frac{Q}{2I} (x^2 - a^2).$$

Dit geeft



$$U^*(\bar{S}) = \frac{1}{2EI} \int_0^{\ell} M^2 dz + \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{2va^2}{15} \int_0^{\ell} (M')^2 dz - \frac{2(6+5v)a^2}{15} \int_0^{\ell} MM' dz + \right. \\ \left. + \frac{2a^4}{315} \int_0^{\ell} (M'')^2 dz \right\} .$$

Hieruit volgt, na partieel integreren en m.b.v. (7.32) en (7.40)

$$U(S) + U^*(\bar{S}) = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{v(16+25v)a^2}{120(1+v)} + \right. \\ \left. + \frac{v^2}{12(1+v)} b^2 + \frac{3v^2}{40(1+v)} b^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right\} \int_0^{\ell} (M')^2 dz + \frac{1}{2EI} \left\{ - \frac{(24+25v)}{30} a^2 + \right. \\ \left. + \frac{v}{6} b^2 \right\} \int_0^{\ell} MM' dz + \frac{1}{2EI} \frac{2a^4}{315} \int_0^{\ell} (M'')^2 dz ,$$

en dit is, voor voldoende gladde belasting,  $O\left[\left(\frac{F}{\ell}\right)^2\right]$ , behalve als  $b \gg a$ .

We hebben nu de volgende vergelijkingen voor de buiging van balken:

i) Globaal evenwicht:

$$\frac{dM}{dz} = - Q_x ,$$

$$\frac{dQ_x}{dz} = - q_x ,$$

en hieruit volgt

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q_x .$$

ii) Bernouilli-hypothese

$$M_y = EI_y u'' \quad ,$$

Uit de bovenstaande vergelijkingen volgt de belangrijke relatie

$$\frac{d^2}{dz^2} (EI_y u'') = q_x(z) \quad . \quad (7.42)$$

Voor  $EI_y = \text{constant}$  gaat dit over in:

$$EI_y u^{(iv)} = q_x(z) \quad . \quad (7.43)$$

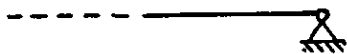
We hebben dus een 4<sup>o</sup>-orde differentiaalvergelijking gevonden; we moeten dus ook vier randvoorwaarden hebben. De volgende grootheden kunnen voorgeschreven zijn (2 op  $z=0$  en 2 op  $z=l$ ).

- i) verplaatsing:  $u$
- ii) hoekverdraaiing:  $u'$
- iii) buigend moment; dit komt overeen met  $u''$  voorgeschreven
- iv) dwarskracht; dit komt overeen met  $u'''$  voorgeschreven.

Voorbeelden:



vrij:  $u'' = u''' = 0 \quad .$



opgelegd:  $u = u'' = 0 \quad .$



ingeklemd:  $u = u' = 0 \quad .$

### VII.3. Stelling van Castigliano voor balken

We zullen hier de in paragraaf V.3 afgeleide stelling van Castigliano toe gaan passen op balken.

We onderscheiden voor de elastische energie  $W$  de volgende gevallen

- i) Buigingsenergie tgv. een moment.

Voor

$$t_{zz} = - \frac{M_y}{I_y} x \quad ,$$

krijgen we hiervoor

$$W_{M_y} = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_y^2(z)}{I_y(z)} dz \quad . \quad (7.44)$$

Hierbij is aangenomen dat de dwarskracht of het buigende moment langs een hoofdas gericht was. Als we een dwarskracht of buigend moment hebben welke niet langs een hoofstraagheidsas gericht is, ontbinden we deze langs de twee hoofdtraagheidsassen. We krijgen dan

$$t_{zz} = - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y \quad ,$$

en dit geeft

$$W_M = \frac{1}{2E} \int_V \left\{ \frac{M_y^2}{I_y^2} x^2 + \frac{M_x^2}{I_x^2} y^2 - \frac{2M_x M_y}{I_x I_y} xy \right\} dV \quad . \quad (7.45)$$

Omdat x en y hoofdtraagheidsassen zijn geldt

$$\int_S xy dS = 0 \quad ,$$

waarmee (7.45) wordt

$$W_M = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_y^2(z)}{I_y(z)} dz + \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_x^2(z)}{I_x(z)} dz \quad . \quad (7.46)$$

We mogen dus de energieën van  $M_x$  en  $M_y$  superponeren.

ii) Energie bij een normaalkracht.

Als we nog een extra normaalkracht hebben, krijgen we

$$t_{zz} = - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{S} \quad .$$

Omdat x en y vanuit het zwaartepunt zijn genomen, krijgen we hieruit

$$W = W_{\text{Buiging}} + \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{N^2(z)}{S(z)} dz \quad . \quad (7.47)$$

iii) Torsie-energie.

Voor een balk met een cirkelvormige doorsnede wordt de elastische energie bij belasting door een wringend moment  $M_z$ :

$$W_T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2(z)}{S_W(z)} dz \quad , \quad (S_W : \text{torsiestijfheid}) \quad . \quad (7.48)$$



We kunnen deze energie bij de buigingsenergie superponeren. Dus bij een belasting door

$$M_x, M_y, M_z \text{ en } N$$

krijgen we voor de totale elastische energie als x, y en z hoofdtraagheidsassen door het zwaartepunt zijn

$$W = W_{M_x} + W_{M_y} + W_T + W_N \quad (7.49)$$

iv) Dwarskracht.

De arbeid tgv. een dwarskracht was

$$W_{Q_x} = \frac{k}{2G} \int_0^l \frac{Q_x^2(z)}{S(z)} dz, \quad (7.50)$$

waarbij k een functie van de vorm van de doorsnede is.

We kunnen bewijzen, m.b.v. Schwartz-ongelijkheid, dat altijd  $k \geq 1$  is, immers

$$W_{Q_x} = \frac{1}{2G} \int_V (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) dV \geq \frac{1}{2G} \int_0^l \int_S t_{xz}^2 dS dz \geq \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{Q_x^2(z)}{S(z)} dz, \quad (7.51)$$

want uit

$$\left( \int_S t_{xz} dS \right)^2 \leq \int_S t_{xz}^2 dS \int_S dS,$$

en

$$\int_S t_{xz} dS = Q_x(z),$$

volgt

$$\int_S t_{xz}^2 dS \geq \frac{Q_x^2(z)}{S}.$$

Het aangeven van een bovengrens voor k voor willekeurige doorsneden is moeilijker. Voor praktisch belangrijke doorsneden, zoals rechthoekige en cirkelvormige, blijkt de k niet veel groter dan 1 te zijn.

Zowel een dwarskracht als een wringend moment levert een schuifspanning  $t_{xz}$ . De arbeid van deze twee zal dus in het algemeen niet te scheiden zijn. Er is echter een punt in de doorsnede, nl. het dwarskrachtenmiddelpunt volgens Trefftz, met de eigenschap, dat als de dwarskracht door dit punt gaat de totale arbeid van dwarskracht en wringend moment te schrijven is als

$$W = W_{Q_x} + W_{M_T} .$$

Opmerking: Indien de doorsnede een symmetrie-as heeft ligt het dwarskrachtenmiddelpunt op die as.

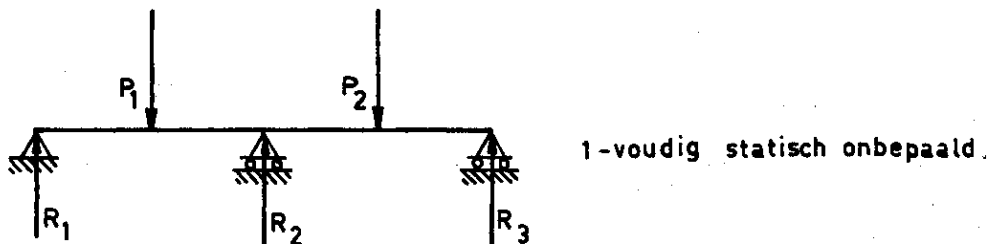
De stelling van Castigliano luidt (zie H.V)

$$u^{(k)} = \frac{\partial W}{\partial P^{(k)}} , \quad (7.52)$$

waarbij  $u^{(k)}$  is de verplaatsing in de richting van  $P^{(k)}$  van het aangrijpingspunt van  $P^{(k)}$ .

Formule (7.52) kan ook gebruikt worden voor het bepalen van zg. statisch onbepaalde reactiekrachten. Voor een ondersteund lichaam belast door krachten en momenten gelden in het algemeen 6 evenwichtsvergelijkingen. Indien er meer reactiekrachten zijn dan evenwichtsvergelijkingen noemen we een lichaam statisch onbepaald.

Voorbeeld:



Stel we hebben een  $m$ -voudig statisch onbepaald systeem ( $R_i$  t/m  $R_m$ ) belast door  $n$  krachten ( $P_i$  t/m  $P_n$ ). Dan is de elastische energie

$$W = W(P_1, \dots, P_n, R_1, \dots, R_m) .$$

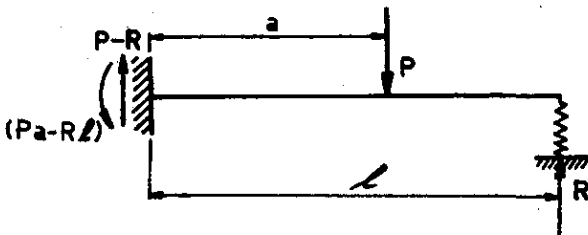
We nemen nu aan dat de ondersteuningen star zijn, d.w.z. de verplaatsing  $u^{(i)}$  van het aangrijpingspunt van  $R_i$  in de richting van  $R_i$  is nul. We sluiten dus verende opleggingen uit.

We krijgen dan de extra vergelijking voor  $R_i$

$$u^{(i)} = 0 = \frac{\partial W}{\partial R_i} , \quad (i = 1, \dots, m) , \quad (7.53)$$

waaruit we de onbekende reactiekrachten kunnen bepalen.

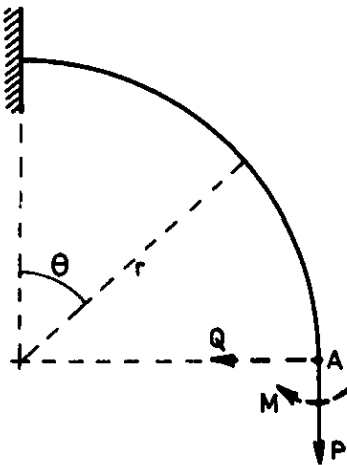
Opmerking



Als we een verende ondersteuning hebben, moeten we de veer bij het systeem nemen en de elastische energie van het totale systeem (balk plus veer) bepalen.

Voorbeelden

Voorbeeld 1:



We beschouwen allereerst een statisch bepaald probleem, met een belasting in het vlak van de constructie. Dit is een ingeklemde kwart cirkel, belast door een kracht  $P$ . We veronderstellen dat de meetkundige configuratie zo is, dat alleen vervorming optreedt in het vlak van de kwart cirkel. Gevraagd wordt de horizontale, verticale verplaatsing van en de hoekverdraaiing in het punt  $A$ .

We voeren de hulpkracht  $Q$  en het hulpmoment  $M$  in. Het oppervlak van de doorsnede is  $A$ . Een coëfficiënt typerend voor de doorsnede is  $k$ . De arbeid is

$$W = \frac{1}{2EI} \int M_b^2 ds + \frac{1}{2EA} \int N^2 ds + \frac{k}{2GA} \int D^2 ds \quad (7.54)$$

Bij de belasting  $(P, Q, M)$  is

$$\left. \begin{aligned} M_b &= Pr(1 - \sin \theta) + Qr \cos \theta + M \\ N &= P \sin \theta - Q \cos \theta \\ D &= P \cos \theta + Q \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

waarin  $D$  de dwarskracht is (ingevoerd om verwarring met  $Q$  te vermijden).

We vullen (7.55) in (7.54) in en verkrijgen

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi/2} (Pr(1 - \sin \theta) + Qr \cos \theta + M)^2 r d\theta + \\ &+ \frac{1}{2EA} \int_0^{\pi/2} (P \sin \theta - Q \cos \theta)^2 r d\theta + \frac{k}{2GA} \int_0^{\pi/2} (P \cos \theta + Q \sin \theta)^2 r d\theta \quad (7.56) \end{aligned}$$

De verticale verplaatsing  $v$  is

$$v = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=M=0} = \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right) \frac{Pr^3}{EI} + \frac{\pi}{4} \frac{Pr}{EA} + k \frac{\pi}{4} \frac{Pr}{GA} \quad (7.57)$$

De horizontale verplaatsing  $h$  is

$$h = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=M=0} = \frac{Pr^3}{2EI} - \frac{Pr}{2EA} + \frac{kPr}{2GA} \quad (7.58)$$

en de hoekverdraaiing is

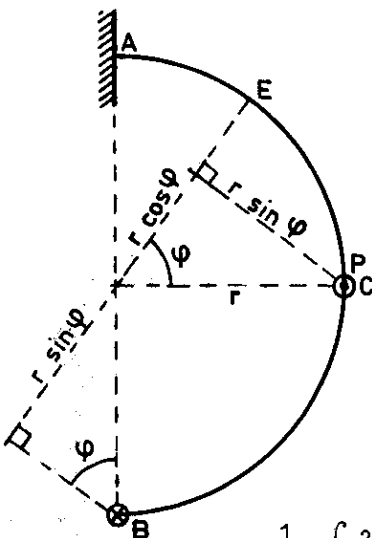
$$\varphi = \left( \frac{\partial W}{\partial M} \right)_{Q=M=0} = \frac{Pr^2}{EI} (\pi/2 - 1) \quad (7.59)$$

Het is duidelijk dat de eerste bijdrage in (7.57), (7.58) en (7.59) van de buiging komt, de tweede van de normaalkracht en de derde van de dwarskracht. Voor het traagheidsmoment  $I$  kunnen we schrijven

$$I = p \cdot A \cdot d^2 \quad (7.60)$$

waarin  $d$  een karakteristieke lengteparameter is van de doorsnede,  $A$  het oppervlak en  $p$  een constante van de orde 1. Met (7.60) zijn de drie bijdragen te vergelijken. Het blijkt dat de buigingsterm  $(r/d)^2$  groter is dan de andere. Daarom wordt vaak normaalenergie en dwarskrachtenergie verwaarloosd tegenover buigingsenergie.

Voorbeeld 2:



We bestuderen nu een statisch bepaalde constructie, welke loodrecht op het vlak wordt belast.

Een halve cirkel met straal  $r$  is ingeklemd bij  $A$  en wordt bij  $C$  door een puntlast  $P$  loodrecht op het vlak belast.

Gevraagd wordt de loodrecht verplaatsing van  $B$ .

In  $B$  brengen we de hulpkracht aan  $Q$ . We hebben nu

$$W = \frac{1}{2EI} \int_b^2 M^2 ds + \frac{1}{2S_W} \int W^2 ds \quad (7.61)$$

indien  $M_b$  resp.  $M_W$  het buigend en wringend moment zijn en  $S_W$  de stijfheid tegen wringing.

We superponeren

$$M_b = M_b^{(1)} + M_b^{(2)} \quad , \quad (7.62)$$

de bijdragen resp. van P en Q en

$$M_W = M_W^{(1)} + M_W^{(2)} \quad . \quad (7.63)$$

Dan wordt

$$W = \frac{1}{2EI} \int (M_b^{(1)} + M_b^{(2)})^2 ds + \frac{1}{2S_W} \int (M_W^{(1)} + M_W^{(2)})^2 ds \quad . \quad (7.64)$$

De gevraagde verplaatsing is

$$u_B = \left( \frac{\partial W}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \frac{1}{EI} \int M_b^{(1)} \frac{\partial M_b^{(2)}}{\partial Q} ds + \frac{1}{S_W} \int M_W^{(1)} \frac{\partial M_W^{(2)}}{\partial Q} ds \quad . \quad (7.65)$$

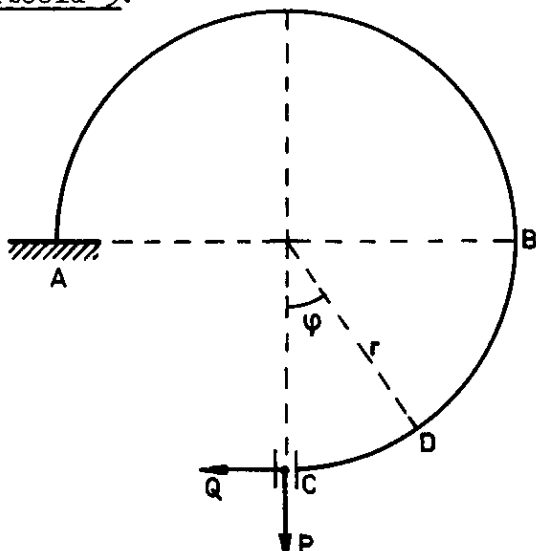
Nu is

$$\left. \begin{aligned} M_b^{(1)} &= Pr \sin \varphi \quad , \\ M_W^{(1)} &= Pr(1 - \cos \varphi) \quad , \\ M_b^{(2)} &= Qr \cos \varphi \quad , \\ M_W^{(2)} &= Qr(1 + \sin \varphi) \quad , \end{aligned} \right\} \quad (7.66)$$

waaruit volgt

$$u_B = \frac{Pr^3}{2} \left[ \frac{1}{EI} + \frac{\pi - 1}{S_W} \right] \quad . \quad (7.67)$$

Voorbeeld 3:



Nu volgt een statisch onbepaald probleem van een in het vlak belaste constructie. Een ingeklemde ring ABC, met de straal r en de buigstijfheid EI wordt in C door een kracht P belast. Het punt C glijdt in een bus en kan alleen verticaal bewegen. Gevraagd wordt de zakking van C.

De reactiekracht door de bus uitgeoefend is  $Q$ . In de doorsnede D is het buigend moment

$$M = Pr \sin \varphi - Qr(1 - \cos \varphi) \quad . \quad (7.68)$$

De energie  $W$  is

$$W = \frac{1}{2EI} \int M^2 ds \quad , \quad (7.69)$$

waaruit volgt

$$u_Q = 0 = \frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial Q} ds \quad . \quad (7.70)$$

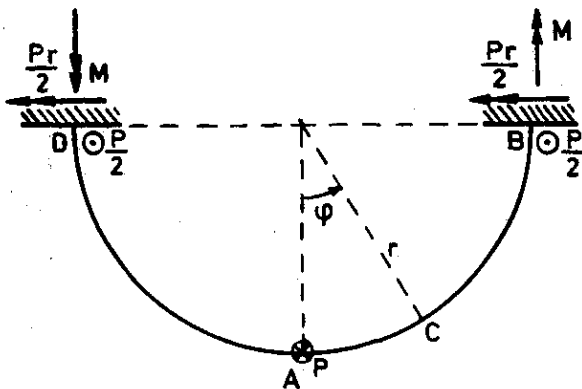
Na invullen volgt uit (7.70)

$$Q = \frac{2P}{9\pi + 8} \quad . \quad (7.71)$$

De verplaatsing  $u_p$  is nu

$$u_p = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pr^3}{EI} \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{9\pi + 8} \right) \quad . \quad (7.72)$$

Voorbeeld 4:



We geven nu een voorbeeld van een statisch onbepaald probleem, waarbij de constructie loodrecht op het vlak wordt belast.

Een halve ring DACB is bij D en B ingeklemd. De straal is  $r$ , de belasting  $P$  in A staat loodrecht op het vlak. Gevraagd wordt de zinking in A.

Op grond van de symmetrie zien we dat de reactiekrachten in B en D gelijk  $P/2$  zijn. Evenwicht en symmetrie vereisen voorts dat, zowel in B, als in D, een moment evenwijdig BD werkt, dat gelijk is aan  $\frac{Pr}{2}$ . De statisch onbepaalde is het moment  $M$ , dat gelijk is en tegengesteld gericht in B en D.

Het buigend moment is in C

$$M_b = \frac{Pr}{2} \sin \varphi + \left( M - \frac{Pr}{2} \right) \cos \varphi \quad , \quad (7.73)$$

terwijl het wringend moment in C is

$$M_w = \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) + \left( M - \frac{Pr}{2} \right) \sin \varphi \quad . \quad (7.74)$$

De energie wordt

$$W = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{Pr}{2} \sin \varphi + \bar{M} \cos \varphi \right)^2 r d\varphi$$

$$+ \frac{1}{GI_0} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) + \bar{M} \sin \varphi \right)^2 r d\varphi \quad , \quad (7.75)$$

als  $\bar{M} = M - \frac{Pr}{2}$  (7.76)

en we ons beperken tot een cirkelvormige doorsnede.  $\bar{M}$  is bepaald door

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{M}} = 0 \quad , \quad \text{waaruit volgt}$$

$$\bar{M} = - \frac{Pr}{\pi} \quad . \quad (7.77)$$

De zakking in A is

$$u_P = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pr^3}{EI} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\pi} \right) + \frac{Pr^3}{GI_0} \left( \frac{3\pi}{8} - 1 - \frac{1}{2\pi} \right) \quad . \quad (7.78)$$

Is a de straal van de doorsnede, dan wordt (7.78)

$$u_P = \frac{Pr^3}{2\pi^2 a^4} \left[ \frac{\pi^2 - 4}{E} + \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{2G} \right] \quad . \quad (7.79)$$

#### VII.4. Doelstellingen van de technische mechanica

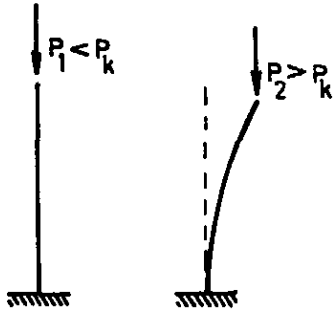
Uit technisch oogpunt zijn de volgende eigenschappen van een constructie belangrijk:

- i) sterkte,
- ii) stijfheid,
- iii) stabiliteit.

Bij de bepaling van de sterkte zoeken we de bij een bepaalde belasting optredende maximale spanning en kijken of deze kleiner is dan de toelaatbare spanning.

Voor het bepalen van de stijfheid berekenen we de verplaatsingen behorende bij een bepaalde belasting (bv. met Castigliano).

Het onderzoek naar de stabiliteit is een veel moeilijker probleem. We kunnen dit zien aan het volgende voorbeeld:



Beschouw een ingeklemde staaf, welke belast wordt door een normaalkracht  $P$ . Als  $P$  klein genoeg is zal de staaf alleen ingedrukt worden. We maken nu  $P$  steeds groter; dan zal boven een bepaalde kritische waarde ( $P_k$ ) de staaf gaan uitknikken. Voor  $P > P_k$  heeft het

probleem dus twee oplossingen:

- i) alleen indrukking,
- ii) uitbuiging en indrukking,

d.w.z. de oplossing is niet meer eeneenduidig. Dit is in strijd met de lineaire theorie. Dus: het stabiliteitsvraagstuk is een essentieel niet-lineair probleem en past dus niet binnen het kader van dit college. Dit type problemen wordt behandeld in het hogere jaars college: Stabiliteit.

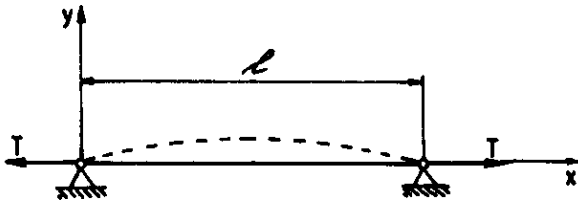


VIII. Elasto-dynamica. Lineaire theorie

VIII.1. Bewegingsvergelijkingen

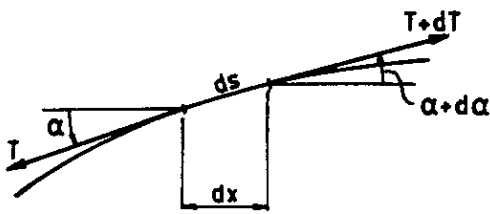
We beschouwen alleen trillingen van een voorgespannen snaar en een balk.

1. De snaar



Een snaar is een elastische draad zonder buigstijfheid. In zijn rusttoestand werkt op de snaar een rekkracht  $T$  (de zg. "voorspanning"). We beperken ons tot kleine amplituden. De uitbuiging wordt gegeven

door de functie  $y(x,t)$ . In de evenwichtsstand ligt de snaar langs de  $x$ -as van 0 tot  $l$ .



We bekijken de beweging van een element  $ds$ , geprojecteerd op de  $x$ -as als  $dx$ . Omdat we ons beperken tot kleine uitwijkingen geldt:

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad , \quad \cos \alpha \approx 1 \quad .$$

Dan is, in deze benadering, de horizontale kracht ter plaatse  $x$  :

$$T \cos \alpha \approx T \quad ,$$

en ter plaatse  $(x+dx)$  :

$$T \cos(\alpha+d\alpha) \approx T \quad ,$$

dus er werkt, in deze benadering, geen resulterende horizontale kracht op  $ds$ . De verticale kracht op  $ds$  naar boven gericht is

$$(T\alpha)_{x+dx} - (T\alpha)_x = \frac{\partial}{\partial x} (T\alpha)dx + O(d^2x) \quad . \quad (8.01)$$

Omdat

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \tan \alpha \approx \alpha \quad ,$$

volgt uit (8.01) voor de verticale kracht op  $ds$  :

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad . \quad (8.02)$$

Indien  $\rho$  de massa per lengte-eenheid van de snaar is, is massa maal versnelling van het element  $ds$  gelijk aan

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} , \quad (8.03)$$

eveneens naar boven gericht. Uit (8.02) en (8.03) vinden we volgens Newton

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 , \quad (8.04)$$

waarvoor we ook kunnen schrijven

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 , \quad (8.05)$$

met

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} . \quad (8.06)$$

## 2. De balk

We gaan uit van de vergelijking voor de statische uitbuiging van de balk, welke in de hier gebruikte notatie wordt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = q(x) . \quad (8.07)$$

Indien de oppervlakte van de doorsnede ter plaatse  $x$ ,  $S(x)$  bedraagt en de dichtheid  $\rho(x)$ , dan kunnen we voor  $qdx$  de traagheidskracht

$$- \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx , \quad (8.08)$$

invoeren volgens d'Alembert. Dan wordt (8.07)

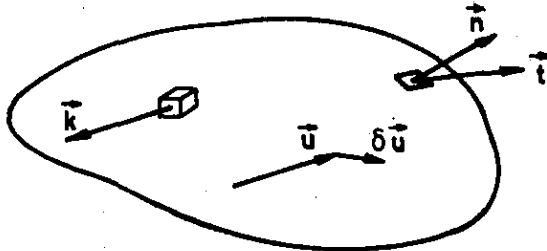
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 . \quad (8.09)$$

Dit is de bewegingsvergelijking voor de balk. Indien er nog krachten  $q(x,t)$  per lengte-eenheid op de balk werken, wordt (8.09) gegeneraliseerd tot

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t) . \quad (8.10)$$

VIII.2. Principe van Hamilton

We zullen de bewegingsvergelijking voor de balk (8.09) afleiden met behulp van het principe van Hamilton. We beperken ons tot balken, waarbij aan de randen geen energie in het systeem gestopt kan worden (dus geen verende ophangingen).



We beschouwen een verandering van het verplaatsingsveld  $\vec{u}$  :  $\delta\vec{u}$  waarvoor geldt:

$$i) \quad \delta u_i = 0 \quad \text{op die plaatsen, waar de verplaatsing is voorgeschreven} \quad (8.11)$$

$$ii) \quad (\delta u_i)_{,j} = \delta u_{i,j} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\delta u_i) = \delta \dot{u}_i \quad (8.12)$$

Dan geldt de volgende vergelijking

$$\int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i \, dV + \int_V t_{ij} \delta u_{i,j} \, dV - \int_V k_i \delta u_i \, dV - \int_S t_i \delta u_i \, dS = 0 \quad (8.13)$$

Bewijs:

Met (2.04) en (3.06) kunnen we afleiden:

$$\begin{aligned} & \int_V k_i \delta u_i \, dV + \int_S t_i \delta u_i \, dS = \\ & = \int_V k_i \delta u_i \, dV + \int_V (t_{ij} \delta u_i)_{,j} \, dV = \\ & = \int_V (k_i + t_{ij,j}) \delta u_i \, dV + \int_V t_{ij} (\delta u_i)_{,j} \, dV = \\ & = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i \, dV + \int_V t_{ij} \delta u_{i,j} \, dV \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Nu is volgens (5.26)

$$\int_V t_{ij} \delta u_{i,j} \, dV - \int_V k_i \delta u_i \, dV - \int_S t_i \delta u_i \, dS = \delta U \quad (8.14)$$

want, volgens (8.11)

$$\int_{S_p}^{t_i} \delta u_i \, dS = \int_S^{t_i} \delta u_i \, dS \quad , \quad (8.15)$$

omdat  $\delta u_i = 0$  op  $S_u$ .

Als we (8.13) integreren naar  $t$ , van  $t_1$  tot  $t_2$ , krijgen we met (8.14):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta U \, dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i \, dV \right\} dt = - \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho \ddot{u}_i \delta u_i \, dt \, dV = \\ &= - \int_V \rho \dot{u}_i \delta u_i \, dV \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_V \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta (\dot{u}_i^2)}{2} \, dt \right\} \rho \, dV \quad . \end{aligned} \quad (8.16)$$

We eisen nu bovendien dat

$$\delta u_i = 0 \quad \text{voor} \quad t = t_1 \quad \text{en} \quad t = t_2 \quad , \quad (8.17)$$

waarmee (8.16) overgaat in

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta \left( \frac{\dot{u}_i^2}{2} \right) \rho \, dV \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T \, dt \quad , \quad (8.18)$$

met  $T$ : kinetische energie.

Hiermee is bewezen het principe van Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \quad , \quad L = T - U \quad , \quad (8.19)$$

voor continue systemen.

Voor het geval van de balk is

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho S \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad , \quad (8.20)$$

terwijl

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad . \quad (8.21)$$

(8.19) wordt hier dus

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \left\{ \rho S \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx dt = 0 \quad (8.22)$$

Met (8.12) kunnen we (8.22) schrijven als

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \left\{ \rho S \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta y - EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta y \right\} dx dt = 0 \quad (8.23)$$

We vormen (8.23) als volgt om

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \rho S \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta y dx dt &= \int_0^{\ell} \int_{t_1}^{t_2} \rho S \frac{\partial y}{\partial t} d(\delta y) dx = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dx dt \quad (8.24) \end{aligned}$$

Bij de laatste stap is gebruik gemaakt van (8.17).

De tweede integraal in (8.23) wordt

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d\left(\frac{\partial}{\partial x} \delta y\right) dt &= \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta y \right\} \Big|_0^{\ell} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \frac{d}{dx} \delta y dx dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\} \Big|_0^{\ell} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \delta y \Big|_0^{\ell} dt + \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \delta y dx dt \quad (8.25) \end{aligned}$$

In (8.25) zijn

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^{\ell} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \delta y \Big|_0^{\ell} ,$$

resp. de arbeid verricht door het moment en door de dwarskracht aan de randen. Aangezien we eizen dat aan de randen geen energie wordt toegevoerd, moeten deze termen nul zijn.

Uit (8.24) en (8.25) volgt dan, dat Hamilton's principe voor de balk overgaat in

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \right\} \delta y \, dx \, dt = 0 \quad (8.26)$$

Daar (8.26) moet gelden voor willekeurige  $\delta y$  moet

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (8.27)$$

Dit is weer de bewegingsvergelijking voor de balk (8.09).

Op analoge wijze kunnen ook andere bewegingsvergelijkingen worden afgeleid.

### VIII.3. Trilvormen

We bekijken van de snaar en de balk harmonische trillingen; dit zijn trillingen van de vorm

$$y(x, t) = W(x) \cos \omega t \quad , \quad (8.28)$$

waarin  $\omega$  de hoekfrequentie is.

Substitueren we (8.28) in (8.05) en (8.09) dan krijgen we

voor de snaar

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + k^2 W = 0 \quad , \quad k = \frac{\omega}{c} \quad , \quad (8.29)$$

en voor de balk

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \rho S \omega^2 W = 0 \quad (8.30)$$

De vergelijkingen (8.29) en (8.30) kunnen alleen worden opgelost, indien de randvoorwaarden gegeven zijn. Deze zijn homogeen, zodat deze vraagstukken aanleiding geven tot eigenwaardeproblemen. Een triviale oplossing is steeds  $W = 0$ .

We zullen nu de snaar en de balk afzonderlijk beschouwen.

### 1. De snaar

De snaar is ingeklemd bij  $x=0$  en  $x=l$ , zodat de randvoorwaarden worden

$$W = 0 \text{ op } x = 0 \text{ en op } x = l \quad . \quad (8.31)$$

De algemene oplossing van (8.29) luidt

$$W(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad . \quad (8.32)$$

Uit (8.31) volgt dan

$$A = 0 \quad ,$$

$$\text{en } B \sin kl = 0 \quad , \quad (8.33)$$

waaraan wordt voldaan door

$$B = 0 \quad , \quad (\Leftrightarrow W = 0)$$

$$\text{of } B \neq 0 \quad , \quad k = \frac{n\pi}{l} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad . \quad (8.34)$$

De waarden (8.34) van  $k$  zijn de eigenwaarden. De eigenfuncties zijn

$$B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad .$$

We noemen

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} c \quad , \quad (8.35)$$

de  $n^{\circ}$  eigenfrequentie.

De totale oplossing voor de trillingsvorm van de snaar luidt

$$y(x,t) = \sum_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \quad . \quad (8.36)$$

$B_n$  volgt uit de beginvoorwaarden voor  $y(x,0)$ .

Een van de hoofdproblemen in de mechanica is het bepalen van eigenfrequenties.

### 2. De balk

We behandelen alleen de balk met constante buigstijfheid  $EI$ , dichtheid  $\rho$  en doorsnede  $S$ . Dan wordt (8.30)

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = 0 \quad , \quad k^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \quad . \quad (8.37)$$

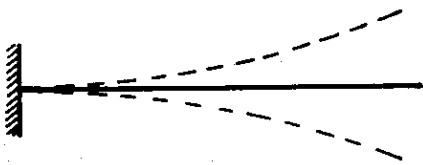
Om (8.37) te kunnen oplossen moeten aan elke rand twee randvoorwaarden gegeven zijn, welke kunnen zijn

i) opgelegd:  $W = \frac{d^2W}{dx^2} = 0$  ,

ii) ingeklemd:  $W = \frac{dW}{dx} = 0$  ,

iii) vrij:  $\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{d^3W}{dx^3} = 0$  .

We behandelen als voorbeeld een balk waarvan het ene einde ingeklemd en het andere vrij is.



De algemene oplossing van (8.37) luidt

$$W(x) = A \sin kx + B \cos kx + C \sinh kx + D \cosh kx \quad . \quad (8.38)$$

Uit de randvoorwaarden

$$W = \frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{op} \quad x = 0 \quad ,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{d^3W}{dx^3} = 0 \quad \text{op} \quad x = l \quad ,$$

volgt dat  $W(x)$  te schrijven is als

$$W(x) = A[\sin kx - \sinh kx] + B[\cos kx - \cosh kx] \quad , \quad (8.39)$$

waarbij voor A en B de homogene vergelijkingen gelden

$$\left. \begin{aligned} A(\sin kl + \sinh kl) + B(\cos kl + \cosh kl) &= 0 \\ A(\cos kl + \cosh kl) + B(-\sin kl + \sinh kl) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

De vergelijkingen hebben alleen een niet-triviale oplossing, indien de determinant

$$\begin{vmatrix} (\sin kl + \sinh kl) & (\cos kl + \cosh kl) \\ (\cos kl + \cosh kl) & (-\sin kl + \sinh kl) \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

wat kan worden vereenvoudigd tot

$$\cos kl \cosh kl = -1 \quad , \quad (8.40)$$

een transcendente vergelijking met de oplossingen



$$k_1 \ell = 1,8751\dots ; \quad k_2 \ell = 4,6941\dots ; \quad k_3 \ell = 7,8548\dots ;$$

etc. (8.41)

De eigenfrequenties zijn

$$f_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \frac{(k_n \ell)^2}{2\pi \ell^2} \quad (8.42)$$

VIII.4. De methode van Rayleigh voor de approximatieve berekening der eigenfrequenties

We beschouwen alleen de balkenvergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \rho S \omega^2 W = 0 \quad (8.43)$$

Vermenigvuldigen we (8.43) met  $W$  en integreren we over  $x$  van 0 tot  $\ell$ , dan ontstaat

$$\int_0^\ell W \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx - \omega^2 \int_0^\ell \rho S W^2 dx = 0 \quad (8.44)$$

Door partiële integratie vormen we de eerste integraal van (8.44) om tot

$$\int_0^\ell W \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx = W \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^\ell +$$

$$- \frac{dW}{dx} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_0^\ell + \int_0^\ell EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \quad (8.45)$$

Bij natuurlijke randvoorwaarden zijn de eerste twee termen van (8.45) nul, zodat

$$\omega^2 = \frac{\int_0^\ell EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^\ell \rho S W^2 dx} \quad (8.46)$$

We onderzoeken eerst de betekenis van (8.46). Met

$$y(x,t) = W(x) \cos \omega t \quad ,$$

wordt de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho S \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^l \rho S W^2 dx \quad , \quad (8.47)$$

terwijl de potentiële energie U wordt

$$U = \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \quad . \quad (8.48)$$

Formule (8.46) drukt dus uit dat

$$\bar{T} = \bar{U} \quad , \quad (8.49)$$

waarin  $\bar{T}(\bar{U})$  de middelwaarde van T(U) over een periode is, op grond van

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} \quad . \quad (8.50)$$

Zoals direct uit (8.47) en (8.48) blijkt, komt (8.46) ook overeen met

$$T + U = \text{constant} \quad .$$

Rayleigh's principe leert nu het volgende:

Stel  $W(x)$  is de exacte oplossing. Beschouw een kleine afwijking van deze oplossing:  $W(x) + \delta W(x)$ . Substitueren we deze oplossing in (8.46) dan vinden we:  $\omega^2 + \delta \omega^2$ . Volgens Rayleigh is nu  $\delta \omega^2 = 0$ ; d.w.z.  $\omega^2$  is stationair tegenover kleine veranderingen in de waarden van  $W(x)$ .

Bewijs

We gebruiken het principe van Hamilton (8.19), dat hier wordt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^l \rho S W^2 dx - \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \right\} dt = 0 \quad . (8.51)$$

De variaties moeten voldoen aan (8.17), dus moet

$$\delta W(x) \cos \omega t_1 = \delta W(x) \cos \omega t_2 = 0 \quad , \quad (8.52)$$

waaraan voldaan is door de keuze

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega} \quad , \quad t_2 = \frac{3\pi}{2\omega} \quad . \quad (8.53)$$

Met (8.53) wordt (8.51) geïntegreerd over de tijd

$$\delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \delta \int_0^l \rho S W^2 dx = 0 \quad . \quad (8.54)$$

Uit (8.46) volgt

$$\begin{aligned} \delta\omega^2 &= \frac{1}{\left[ \int_0^l \rho S W^2 dx \right]^2} \left\{ \int_0^l \rho S W^2 dx \cdot \delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx + \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \delta \int_0^l \rho S W^2 dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\int_0^l \rho S W^2 dx} \left\{ \delta \int_0^l EI \left( \frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \delta \int_0^l \rho S W^2 dx \right\} = 0 \quad , \end{aligned}$$

op grond van (8.54).

q.e.d.

De praktische betekenis van Rayleigh is gelegen in het feit, dat in veel technische problemen het verloop van  $\omega^2$  in de buurt van de exacte oplossing erg vlak is. Het principe van Rayleigh is een minimum-principe, d.w.z. de gevonden benaderingen voor  $\omega^2$  zijn altijd groter dan of gelijk aan de exacte oplossing. De laagste waarde van het quotiënt (8.46) geeft de grondfrequentie.

Opmerking. We zijn er bij de voorgaande beschouwingen steeds van uitgegaan dat aan de randen geen energie in het systeem gebracht kan worden (natuurlijke randvoorwaarden). Hieraan is bijv. niet voldaan bij een balk welke ondersteund wordt door een veer. We moeten dan het totale systeem (dus balk + veer) beschouwen.

#### Voorbeelden

1. We zoeken opnieuw de grondfrequentie van de balk, welke vrij-ingeklemd is. Een functie die aan alle randvoorwaarden voldoet is

$$W(x) = cx^2(6l^2 - 4lx + x^2) \quad . \quad (8.55)$$

Opmerking. Een goede probeerfunctie  $W(x)$  moet steeds voldoen aan de kinematische (of geometrische) randvoorwaarden (dit zijn randvoorwaarden voor  $W$  en  $\frac{dW}{dx}$ ), maar hoeft niet noodzakelijk te voldoen aan de dynamische randvoorwaarden (voor  $M$  en  $D$ ).

Met (8.55) vinden we als approximatieve waarde van de grondfrequentie

$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho S} \frac{1}{l^4} 12,46 \quad , \quad (8.56)$$

waaruit volgt

$$f = \frac{\sqrt{12,46}}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad . \quad (8.57)$$

De exacte coëfficiënt is:  $\sqrt{12,3623\dots}$

We verbeteren nu de benadering als volgt. Indien de balk belast wordt door een geconcentreerde kracht op  $x=a$  is de doorbuiging

$$\left. \begin{aligned} W(x) &= c(3ax^2 - x^3) \quad , \quad 0 \leq x \leq a \\ W(x) &= ca^2(3x - a) \quad , \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

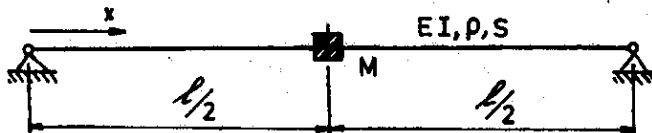
Bij deze doorbuiging vinden we met Rayleigh

$$\omega^2 = \frac{12EI}{\rho S l^4} \frac{1}{3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3 - \frac{2}{35}\alpha^4} \quad , \quad \alpha = \frac{a}{l} \quad . \quad (8.59)$$

We kiezen nu  $a$  (dus  $\alpha$ ) zodanig dat  $\omega^2$  minimaal wordt. Het maximum van de noemer van (8.59) ligt nabij  $\alpha = 0,75$  en is ongeveer:  $31/32$ . Hiervoor wordt (8.59)

$$\omega^2 = \frac{31}{32} \frac{12EI}{\rho S l^4} = 12,39 \frac{EI}{\rho S l^4} \quad . \quad (8.60)$$

2.



We krijgen in dit geval een extra term in de kinetische energie t.g.v. de massa  $M$ . Het Rayleigh-quotiënt wordt dus

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(W'')^2 dx}{\int_0^l \rho S W^2 dx + MW^2\left(\frac{l}{2}\right)} \quad . \quad (8.61)$$

We proberen eerst

$$W(x) = cx(3l^2 - 4x^2) \quad , \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad . \quad (8.62)$$

Dit is de statische uitbuiging bij een kracht in het midden van de balk.

(8.62) substitueren in (8.61) geeft:

$$\omega^2 = \frac{EI}{l^3} \cdot \frac{48}{M + \frac{34}{70} m}, \quad m = \rho l S \quad (8.63)$$

Als we voor  $W(x)$  nemen de vrije trilvorm voor het geval  $M = 0$ :

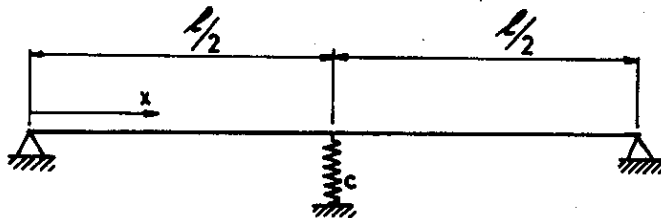
$$W(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (8.64)$$

vinden we

$$\omega^2 = \frac{EI}{l^3} \frac{\pi^4}{2(M + \frac{1}{2} m)} \quad (8.65)$$

De resultaten (8.63) en (8.65) zijn in redelijke overeenstemming.

3.



Dit is een voorbeeld van een systeem met een verende ondersteuning. We moeten nu dus ook de energie van de veer in rekening brengen. Dit betekent dat we in de potentiële energie een extra term krijgen t.g.v. de veer, welke gelijk is aan ( $c$  = veerconstante)

$$\frac{1}{2} c y^2\left(\frac{l}{2}, t\right)$$

Het Rayleigh-quotient

$$\omega^2 = \frac{EI \int_0^l (W'')^2 dx + c W^2\left(\frac{l}{2}\right)}{\rho S \int_0^l W^2 dx} \quad (8.66)$$

Kiezen we als uitbuigingsvorm

$$W(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),$$

dan vinden we

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{\rho S l^4} + \frac{2c}{\rho S l} \quad (8.67)$$

Voor het verkrijgen van een betere benadering kunnen we proberen

$$W(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \alpha \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad , \quad (\alpha > 0) \quad , \quad (8.68)$$

welke geeft

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{\rho S l^4} \frac{(1 + 81\alpha^2)}{(1 + \alpha^2)} + \frac{2c}{\rho S l} \frac{(1 - 2\alpha + \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)} \quad . \quad (8.69)$$

De beste waarde uit deze klasse vinden we voor die waarde van  $\alpha$  waarvoor de uitdrukking (8.69) minimaal is. De waarde van  $\alpha$  is

$$\alpha = \frac{40}{\gamma} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{1600}} \right) \quad , \quad \gamma = \frac{2cl^3}{\pi^4 EI} \quad , \quad (8.70)$$

en voor niet te grote waarden van  $c$  wordt dit

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{80} \quad , \quad (8.71)$$

een getal dat voor  $\gamma < 1$  een  $\omega^2$  geeft welke weinig zal verschillen van (8.67). Dus voor niet te stijve veren is (8.67) een redelijke benadering voor de grondfrequentie.

## IX. Eindige elementen methode

### IX.1. Inleiding

De lineaire elasticiteitstheorie is gebaseerd op een lineair stelsel partiële differentiaalvergelijkingen (de Navier-Beltrami-vergelijkingen) met, dikwijls gecompliceerde, randvoorwaarden. Slechts een beperkt aantal van deze problemen is exact oplosbaar. Vanaf het ontstaan van de elasticiteitstheorie is dan ook gezocht naar benaderingsoplossingen. Voorbeelden hiervan zijn de balken- en de platen-theorie.

Een andere methode, ontstaan aan het begin van deze eeuw, is de Rayleigh-Ritz-Galerkin-methode. In dit geval worden de elasticiteitsvergelijkingen getransformeerd naar een, equivalent, variatie principe, gebaseerd op een kwadratische functionaal. Door de eerste variatie van deze functionaal over een bepaalde klasse gelijk aan nul te stellen, kan de oplossing van het elasticiteitsprobleem worden verkregen. Voorbeelden van dit soort variatie principes zijn de principes van de minimale potentiële en complementaire energie.

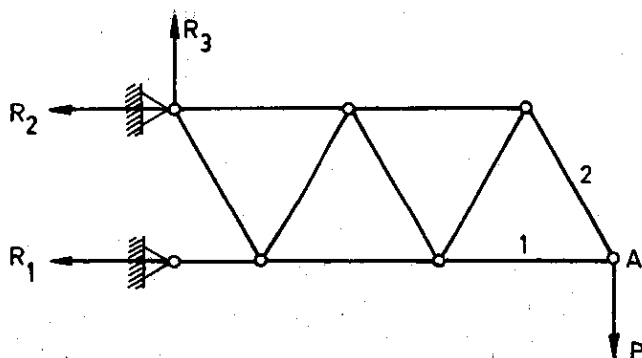
De Ritz-techniek bestaat uit het construeren van een benaderingsoplossing van dit variatie probleem door de oplossing te ontwikkelen naar een serie van testfuncties, waarbij de coëfficiënten van deze testfuncties worden bepaald uit het variatie principe.

Hoewel het ook mogelijk is om in de eindige elementen methode uit te gaan van de differentiaalvergelijkingen zelf (de directe methode), is het gebruikelijker om deze methode te baseren op een variatie principe. In feite wordt hierbij de Ritz-methode toegepast maar met een speciale keuze voor de testfuncties. Deze testfuncties worden verkregen door het lichaam te verdelen in stukken (elementen) en door over deze elementen lagere graads polynomen voor de testfuncties te nemen. Het grote voordeel van deze methode is de eenvoud van formulering, een nadeel is gelegen in het feit dat de methode leidt tot zeer grote matrices en zeer grote stelsels algebraïsche vergelijkingen. Alhoewel het idee al oud is, heeft de methode daarom ook pas een grote vlucht genomen na de opkomst van de digitale computer. De computer zorgt niet alleen voor de oplossing van de uiteindelijke vergelijkingen, maar ook voor de formulering (assemblage) van deze vergelijkingen.

Het is mogelijk om de eindige elementen methode te baseren zowel op minimum potentiële energie ( $\Rightarrow$  verplaatsingsmethode) als op minimum complementaire energie ( $\Rightarrow$  krachtenmethode), waardoor onder- en bovengrenzen voor de oplossing aangegeven kunnen worden. Op praktische gronden (hoge rekenkosten) wordt echter meestal slechts een methode (voornamelijk de verplaatsingsmethode,

welke eenvoudiger is) toegepast. Gegevens over de convergentie van de methode zijn dan erg belangrijk. In de laatste jaren zijn ook de zogenaamde gemengde principes (Reissner) in zwang gekomen, speciaal voor plaatbuiingsproblemen (Herrmann).

In dit hoofdstuk zullen we een zeer inleidende behandeling geven van enkele aspecten van de elementen methode. Zo zullen we in het kort de techniek van de verplaatsingsmethode bespreken en zullen we enkele resultaten (existentie, eenduidigheid, eisen voor toelaatbaar verplaatsingsveld, convergentie) betreffende de mathematiek van de elementen methode geven, (zonder bewijzen). Om een eerste indruk te geven van de elementen methode, bekijken we een probleem, dat in feite een klassiek voorbeeld is van de eindige elementen methode: het vakwerk.



Hieronder verstaan we een systeem van staven, welke door middel van scharnieren met elkaar verbonden zijn. We denken dit systeem belast door uitwendige krachten en we vragen de verplaatsingen van het systeem en de krachten in de staven. Aangezien de scharnieren geen moment kunnen overbrengen, moeten de staafkrachten in de richting van de staven vallen.

De exacte oplossing van dit probleem moet aan de volgende eisen voldoen:

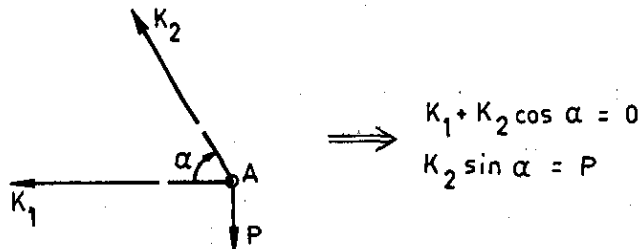
i) Evenwicht.

We onderscheiden:

- a) Globaal evenwicht: het hele stelsel moet in evenwicht zijn. Dit geeft relaties voor de reactiekrachten in de oplegpunten.



- b) Locaal evenwicht: de staafkrachten in een scharnierpunt (of knooppunt) moeten met elkaar in evenwicht zijn. Bijv. in A (zie figuur).



De evenwichtsrelaties hoeven niet voldoende te zijn om alle reactiekrachten en/of staafkrachten te kunnen bepalen; in dat geval spreken we van een statisch onbepaald vakwerk.

- ii) Consistentie: de verbindingen tussen de staven moeten behouden blijven.  
iii) Constitutieve vergelijking: in iedere staaf bestaat een verband tussen de kracht  $L$  en de uitrekking  $\Delta l$ , luidend:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{K}{EF} \quad (9.01)$$

( $l$ : lengte staaf;  $F$ : oppervlak doorsnede;  $E$ : elasticiteitsmodulus).

We kunnen een vakwerk opvatten als een elementen netwerk door de staven als elementen en de scharnierpunten als knooppunten te beschouwen.

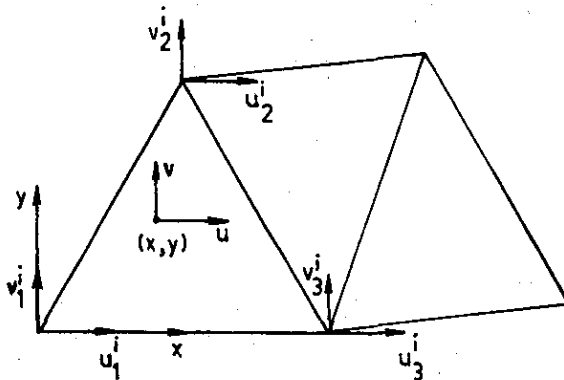
We kunnen op twee manieren een benaderingsoplossing construeren:

- i) We kiezen stelsels knooppuntsverplaatsingen, die voldoen aan de eis van consistentie en we drukken de verplaatsingen van de staven uit in deze knooppuntsverplaatsingen. Het zoeken is dan naar een criterium dat bepaalt welke keuze voor de knooppuntsverplaatsingen de beste benaderingsoplossing geeft.  
ii) We kiezen evenwichtssystemen van staafkrachten en zoeken ook hier weer een criterium voor de beste keuze.

Deze twee methoden zijn in feite illustraties van wat in de eindige elementen methode de verplaatsings-, respectievelijk de krachtenmethode wordt genoemd.

In de elementen methode verdelen we een lichaam in stukken, die we elementen zullen noemen. Zo verdelen we bijvoorbeeld een staafconstructie (vakwerk) in één-dimensionale staafelementen, een vlakke constructie (plaat) in driehoekige of rechthoekige elementen en een drie-dimensionale constructie in, bijvoorbeeld, tetraeders.

Het basisidee van de elementen methode zullen we toelichten aan een vlakke constructie welke we verdelen in driehoekige elementen. We bekijken het i-de element:



Voor dit element kiezen we een benaderingsoplossing voor de verplaatsingen in een willekeurig punt  $(x,y)$  van dat element:

$$u := u_x = f_1(x,y), \quad v := u_y = f_2(x,y) . \quad (9.02)$$

De eenvoudigste keuze voor  $f_1(x,y)$  en  $f_2(x,y)$  is een polynoom. Beperken we ons tot eerste graads polynomen, dan kunnen we de verplaatsingen van elk punt van het i-de element uitdrukken in de verplaatsingen van de hoekpunten (knoop-punten) van het element:

$$\begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \\ v_1^i \\ v_2^i \\ v_3^i \end{pmatrix} =: \underline{\Delta}^i . \quad (9.03)$$

De beperking tot eerste graads polynomen is niet essentieel. Bij hogere graads polynomen moeten we echter wél meer knooppunten per element nemen (zie § IX.2).

Op deze manier kunnen we het verplaatsingsveld  $\underline{u}(\underline{x})$  uitdrukken in de discrete parameters  $\Delta_k^i$  ( $k = 1, \dots, 6$ ).

We doen dit eerst voor elk element afzonderlijk (locale analyse) en we gaan daarna deze elementen zodanig samenvoegen (assembleren) dat we een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld krijgen (globale analyse). In het tweede deel van dit college zal worden aangegeven dat een verplaatsingsveld  $\underline{u}(\underline{x})$  kinematisch toelaatbaar is als voldaan is aan de volgende drie eisen:

- i)  $\underline{u}(\underline{x}) \in C^1$  stuksgewijs.
- ii)  $\underline{u}(\underline{x}) \in C^0$  voor het gehele gebied, inclusief de rand  $S$ , dat door het lichaam wordt ingenomen.
- iii)  $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^*(\underline{x})$  voor  $\underline{x} \in S_u$ , d.w.z.  $\underline{u}(\underline{x})$  voldoet aan de kinematische (of geometrische) randvoorwaarden op  $S_u$ .

De voorwaarde ii) draagt er zorg voor dat de samenhang in het lichaam behouden blijft, d.w.z. dat er geen scheuren optreden (consistentie of compatibiliteit).

Door de keuze van een polynoom voor  $\underline{u}(\underline{x})$  per element is triviaal voldaan aan eis i). De assemblage van de elementen moet zodanig geschieden dat aan eis ii) is voldaan. Aldus krijgen we een globale knooppuntsverplaatsingsvector  $\underline{\Delta}$ . De dimensie van deze vector is voor een  $n$ -dimensionaal lichaam ( $n = 1, 2$  of  $3$ ) gelijk aan  $n$  maal het aantal knooppunten van het totale netwerk.

Op deze wijze kunnen we de verplaatsing van elk punt van het lichaam uitdrukken in de discrete parameters  $\Delta_k$  en we kunnen nu ook de potentiële energie  $U(\bar{S})$  volgens (5.27) uitdrukken in deze parameters

$$U(\bar{S}) = \tilde{U}(\Delta_k) .$$

Indien we er nu nog voor zorgen dat ook aan de hierboven gestelde eis iii) is voldaan (we zullen in de volgende paragraaf aangeven hoe we hier op de meest systematische wijze aan kunnen voldoen) dan hebben we als criterium voor de beste keuze van het stelsel  $\Delta_k$  het minimum principe van de potentiële energie dat stelt dat de beste keuze van  $\Delta_k$  die is welke de potentiële energie  $U(\bar{S})$  minimaal maakt.

Aangezien  $\tilde{U}(\Delta_k)$  een kwadratische functie van  $\Delta_k$  zal blijken te zijn, zal het bepalen van het minimum, dat wil zeggen het stellen van

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \Delta_k} = 0, \quad (9.04)$$

aanleiding geven tot een stelsel van lineaire, algebraïsche vergelijkingen in de  $\Delta_k$ 's, dat op de computer kan worden opgelost.

Deze methode wordt de verplaatsingsmethode genoemd.

Een alternatieve methode wordt gevormd door de zogenaamde krachtenmethode: hierbij wordt een statisch toelaatbaar stelsel geconstrueerd door polynoomontwikkelingen voor de spanningen te kiezen. De basis van deze aanpak is het minimum principe van de complementaire energie.

We zullen in dit college alleen de verplaatsingsmethode bespreken en een bespreking van de krachtenmethode en andere, gemengde methoden (Reissner, Herrmann) achterwege laten.

In de praktijk is het begrenzen van de benaderingsoplossingen door potentiële en complementaire energie te duur gebleken. Wel is het mogelijk om, weliswaar globale, afschattingen van de fout bij een eenzijdige benadering te geven.

In dit hoofdstuk zullen we twee aspecten van de eindige elementen methode bespreken, zij het beide slechts zeer inleidend, nl.

- i) de techniek van de elementen methode,
- ii) de mathematische aspecten van de elementen methode.

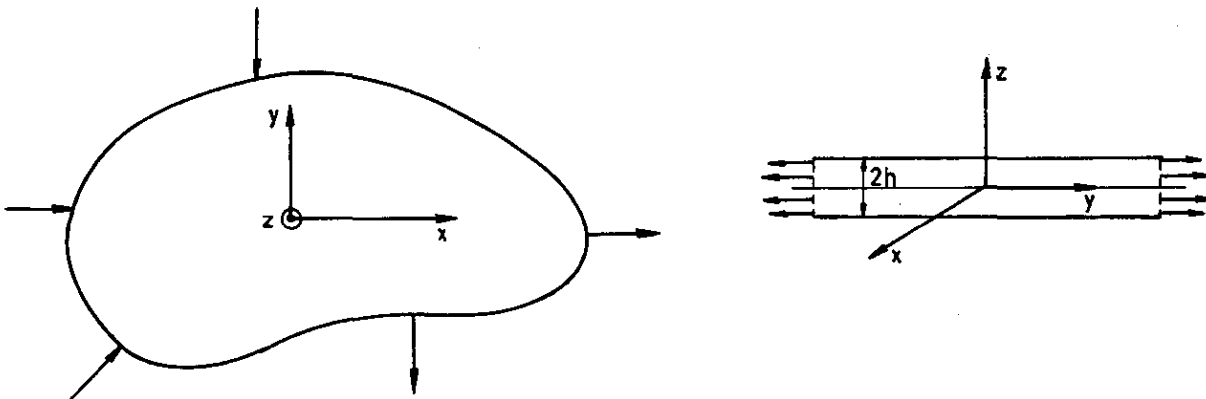
In i) zullen we aangeven hoe we  $\tilde{U}(\underline{\Delta})$  voor het totale lichaam construeren, hetgeen we zullen illustreren aan het voorbeeld van een vlakke plaat met driehoekige elementen.

In ii) zullen we een aantal resultaten geven betreffende: de eisen welke we aan het verplaatsingsveld moeten stellen en de existentie, de eenduidigheid en de convergentie van de benaderingsoplossingen, waarbij we bewijzen achterwege zullen laten.

IX.2. Techniek van de elementen methode

We zullen in deze paragraaf een algemeen overzicht geven van de verplaatsingsmethode. Hoewel de opzet algemeen zal zijn, zullen we ons voor wat betreft de toelichtingen beperken tot een twee-dimensionaal voorbeeld met driehoekige elementen. Voor dit twee-dimensionaal probleem zullen we nemen de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand. Een dergelijke toestand verkrijgen we indien we een dunne plaat belasten in zijn vlak. Alvorens over te gaan op de verplaatsingsmethode, zullen we eerst in het kort toelichten wat we onder een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand verstaan en door welke vergelijkingen deze toestand wordt beschreven.

Intermezzo: Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.



We beschouwen een dunne plaat, dikte  $2h$ , welke in zijn vlak wordt belast. We kiezen een assenstelsel met de  $x$ - en  $y$ -as in het middenvlak van de plaat en de  $z$ -as loodrecht op de plaat.

Van de belasting van de plaat eisen we:

- i) geen belasting op boven- en ondervlak van de plaat;
- ii) alleen componenten in  $x$ - en  $y$ -richting;
- iii) symmetrisch in  $z$ ;
- iv) niet te sterk verlopend over de dikte, d.w.z. we kunnen de belasting, welke we  $t(z)$  zullen noemen, als volgt ontwikkelen

$$t(z) = t(0) \left[ 1 + t_2 \left( \frac{z}{l} \right)^2 + t_4 \left( \frac{z}{l} \right)^4 + \dots \right] \quad (9.05)$$

waarin de coëfficiënten  $t_2, t_4, \dots$  getallen van  $O(1)$  zijn en  $l$  een lengteparameter die voldoet aan

$$l \gg h . \quad (9.06)$$

Onder deze condities is te bewijzen dat we ook de spanningen naar  $(z/\ell)$  kunnen ontwikkelen. Gebruikmakend van de symmetrie in de belasting krijgen we dan voor de z-componenten van de spanningstensor

$$\begin{aligned} t_{xz}(x,y,z) &= a_1(x,y)\left(\frac{z}{\ell}\right) + a_3(x,y)\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 + \dots, \\ t_{yz}(x,y,z) &= b_1(x,y)\left(\frac{z}{\ell}\right) + b_3(x,y)\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 + \dots, \\ t_{zz}(x,y,z) &= c_0(x,y) + c_2(x,y)\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.07)$$

Uit de randvoorwaarden

$$t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0, \quad \text{op } z = \pm h \quad (9.08)$$

die uitdrukken dat het boven- en ondervlak van de plaat spanningsvrij is, volgt met (9.07) dat de coëfficiënten  $a_1$ ,  $b_1$  en  $c_0$ :  $O((h/\ell)^2)$  zijn.

Onder de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand verstaan we nu een benaderingstoestand waarin alle termen welke  $O((h/\ell)^2)$  zijn worden verwaarloosd. We moeten dus nemen:

$$t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0. \quad (9.09)$$

Hiermee vervalt de evenwichtsvergelijking in z-richting, terwijl de eerste twee evenwichtsvergelijkingen worden

$$\begin{aligned} t_{xx,x} + t_{xy,y} + k_x &= 0, \\ t_{xy,x} + t_{yy,y} + k_y &= 0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Aangezien we ook hierin alle  $O((h/\ell)^2)$ -termen verwaarlozen kunnen we voor de in (9.10) voorkomende spanningen en volumekrachten de gemiddelde waarden over de dikte nemen. Hetzelfde kunnen we doen met de verplaatsingen en deformaties. Uit het feit dat  $t_{zz} = 0$ , volgt met de wet van Hooke dat

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (e_{xx} + e_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu} (u_{x,x} + u_{y,y}), \quad (9.11)$$

waarin

$$u_x = u = u(x,y) \quad \text{en} \quad u_y = v = v(x,y), \quad (9.12)$$

de gemiddelde verplaatsingen over de dikte zijn, welke overigens slechts  $O((h/\ell)^2)$  verschillen met die van het middenvlak.

Met (9.11) en met de wet van Hooke krijgen we de volgende constitutieve vergelijkingen voor de gemiddelde spanningen:

$$\begin{aligned} t_{xx} &= \frac{2G}{(1-\nu)} (u_{,x} + \nu v_{,y}), & t_{yy} &= \frac{2G}{(1-\nu)} (v_{,y} + \nu u_{,x}) \\ t_{xy} &= G(u_{,y} + v_{,x}). \end{aligned} \quad (9.13)$$

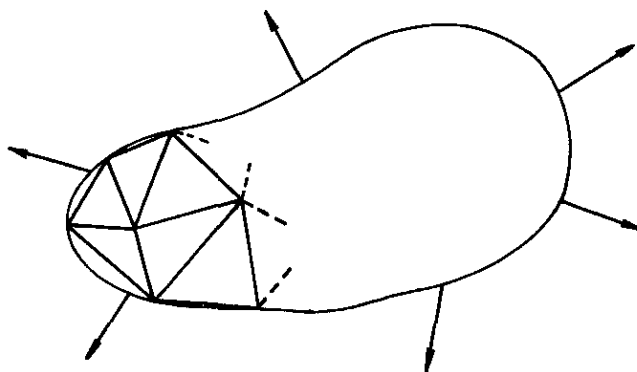
Hiermee hebben we een twee-dimensionale theorie opgesteld voor de variabelen  $u$ ,  $v$ ,  $t_{xx}$ ,  $t_{xy}$  en  $t_{yy}$ , welke alle functies van  $x$  en  $y$  zijn en welke moeten voldoen aan de vergelijkingen (9.10) en (9.13). De theorie is nauwkeurig tot op  $O((h/l)^2)$ -termen na.

Voor een wat meer uitgewerkte afleiding van deze theorie, verwijzen we naar [1], pp. 253-256.

We gaan nu een systeem bekijken, dat we zodanig belasten en opleggen dat het systeem in een evenwichtstoestand verkeerd. We willen de verplaatsingen en de spanningsverdeling in het systeem berekenen.

Om een benaderingsoplossing voor dit probleem te vinden, verdelen we het lichaam in stukken (elementen) en kiezen we op ieder stuk een benadering voor de verplaatsingen. Uit dit verplaatsingsveld kunnen we dan benaderingen vinden voor de spanningen en voor de potentiële energie.

We zullen dit toelichten aan het voorbeeld van een in zijn vlak belaste plaat (gegeneraliseerde vlakspanningstoestand) welke we in driehoekige stukken verdelen:



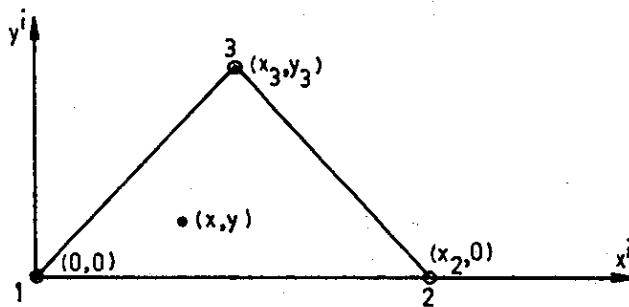
De driehoeken zijn de elementen en de hoekpunten van de driehoeken noemen we de knooppunten (eng.: nodes). We zullen voor ieder element de verplaatsingen van een willekeurig punt van het element uitdrukken in de verplaatsingen van de knooppunten.

We zullen twee aspecten van de analyse van het mechanische probleem onderscheiden, te weten:

- i) de mechanica per element (locale analyse)
- ii) de mechanica van het gehele systeem (globale analyse).

We starten met de locale analyse:

We beschouwen het i-de element en we verbinden een lokaal assenstelsel aan het element:



Teneinde de notatie eenvoudig te houden, laten we in de nu volgende locale analyse de bovenindices  $i$  voorlopig weg.

We benaderen de verplaatsingen in een punt  $(x,y)$  door de eerste graads polynomen

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = u(x,y) &= a_1 + a_2x + a_3y, \\ u_y(x,y) = v(x,y) &= a_4 + a_5x + a_6y. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Omdat de verplaatsingen biharmonische functies zijn, mogen we deze ontwikkelen naar  $x$  en  $y$ . De uitdrukkingen (9.14) zijn de eerste termen van deze ontwikkeling.

We kunnen nu ook de verplaatsingen van de knooppunten:  $(0,0)$ ,  $(x_2,0)$  en  $(x_3,y_3)$  uitdrukken in  $a_1, \dots, a_6$ . Voor de verplaatsingen in  $x$ -richting krijgen we

$$\begin{pmatrix} u(0,0) \\ u(x_2,0) \\ u(x_3,y_3) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =: \underline{B} \underline{a}, \tag{9.15}$$



of, omgekeerd,  $a_1, \dots, a_3$  uitgedrukt in  $u_1, \dots, u_3$ :

$$\underline{a} = B^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (9.16)$$

met

$$B^{-1} = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{pmatrix} x_2 y_3 & 0 & 0 \\ -y_3 & y_3 & 0 \\ (x_3 - x_2) & -x_3 & x_2 \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Door (9.16) te substitueren in (9.14) kunnen we de verplaatsing in  $x$ -richting van een punt  $(x, y)$  van het element uitdrukken in de verplaatsingen van de knooppunten:

$$u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3, \quad (9.18)$$

met

$$N_1 = N_1(x, y) = \frac{1}{x_2 y_3} (x_2 y_3 - y_3 x - x_2 y + x_3 y),$$

$$N_2 = N_2(x, y) = \frac{1}{x_2 y_3} (y_3 x - x_3 y), \quad (9.19)$$

$$N_3 = N_3(x, y) = \frac{y}{y_3}.$$

Op analoge wijze kunnen we voor de verplaatsing in  $y$ -richting afleiden:

$$v(x, y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3. \quad (9.20)$$

(9.18) en (9.20) kunnen we samenvoegen tot

$$\underline{u}(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = N \underline{\Delta}, \quad (9.21)$$

met

$$\underline{\Delta} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \text{en } N := \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}. \quad (9.22)$$

In (9.21) is dus  $\underline{u} = \underline{u}(x,y)$  een twee-dimensionale vectorfunctie van de punten van het element;  $\underline{\Delta}$  de 6-vector van de knooppuntsverplaatsingen (dus onafhankelijk van  $(x,y)$ ) en de vormmatrix  $N$  een  $2 \times 6$ -matrix die weer wel van  $(x,y)$  afhangt (in de engelse literatuur wordt  $N$  shape function genoemd).

We voeren de vector van de deformaties  $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(x,y)$  in door

$$\underline{\varepsilon} := D_1 \underline{u} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{pmatrix}. \quad (9.23)$$

Met (9.21) kunnen we  $\underline{\varepsilon}$  uitdrukken in de knooppuntsverplaatsingen:

$$\underline{\varepsilon} = D_1 N \underline{\Delta} =: D \underline{\Delta}, \quad (9.24)$$

met

$$D = \begin{pmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{pmatrix} -y_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x_3 - x_2) & -x_3 & x_2 \\ (x_3 - x_2) & -x_3 & x_2 & -y_3 & y_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Doordat we ons bij de keuze van (9.14) hebben beperkt tot eerste graads polynomen, is de matrix  $D$  onafhankelijk van  $x$  en  $y$ . In het meer algemene geval, dat wil zeggen voor hogere graads polynomen, zal dit niet meer het geval zijn en wordt  $D = D(x,y)$ .

We voeren ook een vector voor de spanningen in:

$$\underline{\sigma} := \begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{xy} \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

en we schrijven de constitutieve vergelijking als

$$\underline{\sigma} = E \underline{\varepsilon} = E D \underline{\Delta}. \quad (9.27)$$

Voor de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand is de matrix E gelijk aan (zie verg. (9.13)):

$$E = \frac{2G}{(1-\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}. \quad (9.28)$$

N.B. Als gevolg van het bestaan van een elastische energie is de matrix E altijd symmetrisch (vergelijk  $c_{ijkl} = c_{klij}$ ; verg. (4.03) op pag. 42).

We kunnen nu de potentiële energie per element uitdrukken in de knooppuntsverplaatsingen. We bepalen eerst de inwendige elastische energie, uitgedrukt in de deformaties.

Volgens (5.18) geldt

$$W = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV, \quad (9.29)$$

waarin V het volume van het element is.

Met (9.27) wordt dit:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}} dV, \quad (9.30)$$

wat met (9.24) weer te schrijven is als

$$W = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{k}} \underline{\underline{\Delta}}, \quad (9.31)$$

waarbij de symmetrische matrix k gelijk is aan

$$k = \int_V D^T E D dV. \quad (9.32)$$

Voor een driehoekig element in de vlakspanningstoestand wordt k een  $6 \times 6$ -matrix gelijk aan

$$k = \int_S D^T E D 2hdS. \quad (9.33)$$

We hebben hiermee de elastische energie van een element uitgedrukt in de knooppuntsverplaatsingen van dat element. De matrix k wordt de stijfheidsmatrix van het element genoemd. Aangezien k een integraal over het oppervlak van het element is, kan k nooit van (x,y) afhangen, dus ook niet bij een ho-

gere graads polynoom voor  $\underline{u}$ . De stijfheidsmatrix  $k$  hangt alleen af van de vorm van het element en van de elasticiteitsconstanten.

De bepaling van de potentiële energie van de voorgeschreven uitwendige krachten stellen we uit tot aan het einde van de nu volgende globale analyse.

Alvorens over te gaan tot de globale analyse, maken we eerst nog de volgende opmerking:

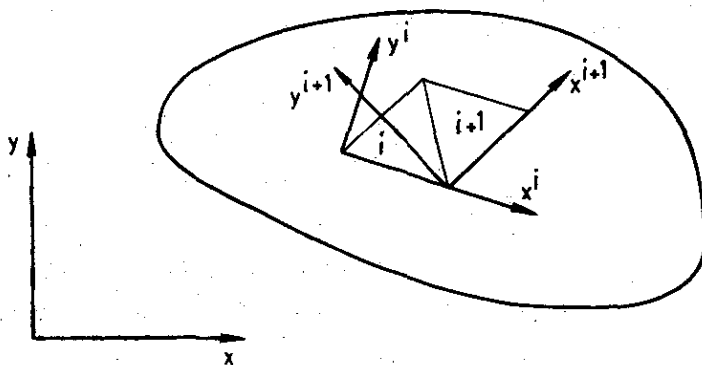
Als we de totale constructie gaan bekijken, moeten we de knooppuntsverplaatsingen  $\underline{\Delta}$  van de verschillende elementen van elkaar onderscheiden. We voeren daarom in de notatie

$$\underline{\Delta}^i$$

voor de knooppuntsverplaatsingsvector van het  $i$ -de element betrokken op het aan het element verbonden assenkruis. (We zullen van nu af aan alle grootheden betrokken op het  $i$ -de element aangeven met een bovenindex  $i$ . Het accent geeft aan dat de grootheden betrokken zijn op het locale assenkruis.)

Een tweede opmerking slaat op deze locale, d.w.z. aan het element verbondene, assenkruisen:

Deze locale assenkruisen hebben t.o.v. elkaar in het algemeen verschillende richtingen:



We zullen nu alle vectoren en matrices gaan betrekken op een vast assenkruis:  $x, y$ . Geven we de verdraaiing van het locale  $i$ -de assenkruis t.o.v. het globale assenkruis aan door middel van de rotatie-matrix  $\Gamma^i$ , met

$$\Gamma^{iT} \Gamma^i = I, \quad (I : \text{eenheidsmatrix}) \quad (9.34)$$

en noemen we de vector van de knooppuntsverplaatsingen van het  $i$ -de element betrokken op het globale  $x$ - $y$ -stelsel:  $\underline{\Delta}^i$ , dan geldt

$$\underline{\Delta}^i = \Gamma^{iT} \underline{\Delta}^i. \quad (9.35)$$

Op analoge wijze kunnen we ook de stijfheidsmatrix transformeren. Laat  $k^i$  en  $k^i$  de stijfheidsmatrices zijn van het  $i$ -de element betrokken op het locale respectievelijk het globale assenkruis. Dan geldt

$$k^i = \Gamma^{iT} k^i \Gamma^i. \quad (9.36)$$

De inwendige, elastische energie blijft onder deze transformatie natuurlijk invariant (hangt niet af van de keuze van het assenkruis). Daar is hier aan voldaan, immers als  $W^i$  de elastische energie van het  $i$ -de element is, dan geldt volgens (9.31)

$$W^i = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{iT} k^i \underline{\Delta}^i = \frac{1}{2} (\Gamma^i \underline{\Delta}^i)^T \Gamma^i k^i \Gamma^i \Gamma^i \underline{\Delta}^i = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{iT} k^i \underline{\Delta}^i, \quad (9.37)$$

waarbij (9.34) is gebruikt.

Om de totale elastische energie te verkrijgen, moeten we sommeren over alle elementen. Stel we hebben het lichaam verdeeld in  $p$  elementen dan is de totale elastische energie:

$$W = \sum_{i=1}^p W^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \underline{\Delta}^{iT} k^i \underline{\Delta}^i. \quad (9.38)$$

Alvorens we deze uitdrukking in een potentiële energie principe kunnen gaan gebruiken, moeten we er eerst voor zorgen dat het verplaatsingsveld kinematisch toelaatbaar is, dat wil zeggen we moeten voldoen aan de drie op pagina -118- geformuleerde eisen. Door de keuze (9.14) is aan de eis i) triviaal voldaan. Aan de eisen ii) en iii) moet echter nog voldaan worden. We zullen eerst laten zien hoe we aan de tweede eis kunnen voldoen.

We eisen van de verplaatsingen dat ze zodanig zijn dat twee naburige elementen aan elkaar blijven zitten: er mogen dus geen scheuren optreden (de consistentie moet behouden blijven). Dit houdt in dat twee knooppunten van verschillende elementen die in het globale netwerk samenvallen gelijke verplaatsingsvectoren moeten hebben. Zoals we later zullen zien verzekert dit de continuïteit langs de gehele gemeenschappelijke rand van de twee elementen. Formeel kunnen we dit als volgt in orde maken:

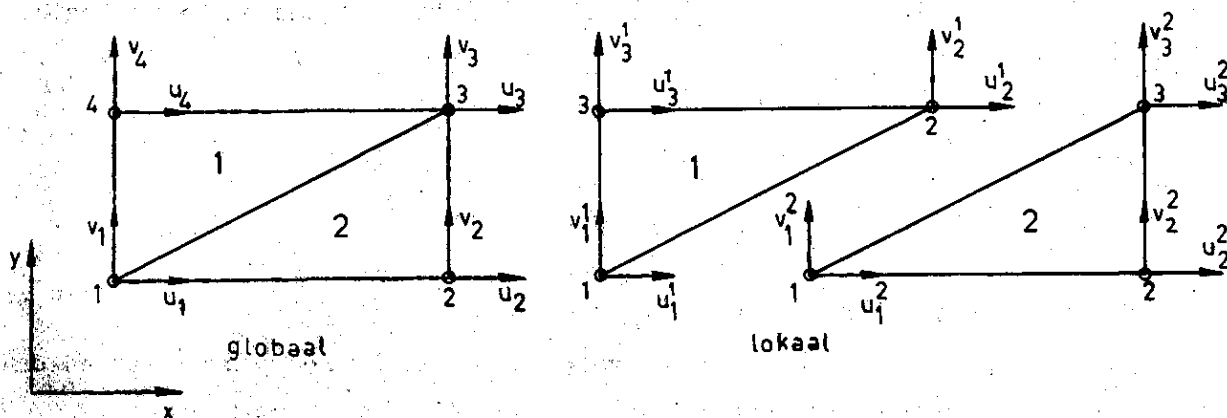
We voeren in de vector  $\underline{\Delta}^e$ , zijnde de vector van alle knooppuntsverplaatsingen. Dus, als rijvector geschreven,

$$\underline{\Delta}^{eT} := (\underline{\Delta}_1^T, \underline{\Delta}_2^T, \dots, \underline{\Delta}_p^T) \quad (9.39)$$

Aangezien in een bepaald netwerk van elementen altijd meerdere gezamenlijke knooppunten voorkomen, zal deze vector verschillende gelijke knooppuntsverplaatsingen bevatten. Door dit in rekening te brengen en door de gelijke knooppuntsverplaatsingen slechts eenmaal te tellen, kunnen we de dimensie van de vector  $\underline{\Delta}^e$  aanmerkelijk verlagen. De matrix die dit verzorgt noemen we de assemblage matrix A (eng.: connectivity matrix).

Alvorens hierop nader in te gaan, zullen we de procedure eerst toelichten aan het volgende voorbeeld:

Een rechthoekige plaat verdeeld in twee driehoekige elementen:



We hebben hier dus twee elementen, we hebben vier knooppunten in het globale netwerk, terwijl de twee afzonderlijke elementen samen zes knooppunten hebben.

De vector  $\underline{\Delta}^e$  heeft dan de vorm (geschreven als rijvector)

$$\underline{\Delta}^{eT} = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, v_1^1, v_2^1, v_3^1, u_1^2, u_2^2, u_3^2, v_1^2, v_2^2, v_3^2) . \quad (9.40)$$

Echter, het eerste knooppunt van element 1 en het eerste van 2, alsmede het tweede van 1 en het derde van 2 zijn gemeenschappelijke knooppunten. Om de samenhang te waarborgen, moeten we dus eisen dat

$$u_1^1 = u_1^2, \quad v_1^1 = v_1^2, \quad u_2^1 = u_3^2, \quad v_2^1 = v_3^2 . \quad (9.41)$$

We kunnen ook kijken naar de verplaatsingen van de knooppunten van het globale netwerk. Geven we deze verplaatsingen aan met  $u$  en  $v$ , zonder bovenindices, dan geldt (zie figuur)

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^1 = u_1^2, & v_1 &= v_1^1 = v_1^2, \\ u_2 &= u_2^2, & v_2 &= v_2^2, \\ u_3 &= u_2^1 = u_3^2, & v_3 &= v_2^1 = v_3^2, \\ u_4 &= u_3^1, & v_4 &= v_3^1. \end{aligned} \quad (9.42)$$

We geven de vector van de verplaatsingen van alle knooppunten van het globale netwerk aan met  $\underline{\Delta}$ , dus

$$\underline{\Delta}^T := (u_1, \dots, u_4, v_1, \dots, v_4) . \quad (9.43)$$

De assemblage matrix  $A$  beeldt nu de vector  $\underline{\Delta}$  af op  $\underline{\Delta}^e$ :

$$\underline{\Delta}^e = A \underline{\Delta} . \quad (9.44)$$

Deze assemblage matrix zorgt er dus voor dat er geen knooppunten worden dubbel geteld en dat de samenhang in het lichaam blijft behouden.

Voor het hiervoor genoemde voorbeeld wordt (9.44)

$$\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ \hline u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

De assemblage matrix is dus een matrix waarvan het aantal rijen gelijk is aan twee maal het totale aantal elementen-knooppunten (= dimensie van  $\underline{\Delta}^e$ ) en het aantal kolommen aan twee maal het aantal knooppunten in het globale netwerk (= dimensie van  $\underline{\Delta}$ ), terwijl iedere rij een element gelijk aan één bevat en voor de rest nullen.

Alvorens de totale elastische energie volgens (9.38) verder uit te werken, stellen we eerst op analoge wijze als gedaan in (9.39), de totale stijfheidsmatrix samen uit de stijfheidsmatrices van de afzonderlijke elementen, dus:

$$k^e = \begin{pmatrix} k^1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & k^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & k^p \end{pmatrix} \quad (9.46)$$

Hiermee wordt (9.38)

$$W = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^e T k^e \underline{\Delta}^e \quad (9.47)$$

Substitutie van (9.44) in (9.47) geeft tenslotte:

$$W = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^T K \underline{\Delta} \quad (9.48)$$



waarin de globale stijfheidsmatrix  $K$  gelijk is aan:

$$K = A^T k^e A . \quad (9.49)$$

Aangezien  $k^e$  symmetrisch is, is  $K$  ook symmetrisch.

Hiermee hebben we de totale inwendige elastische energie  $W$  uitgedrukt in de verplaatsingen van de knooppunten van het globale netwerk. Om de totale potentiële energie te verkrijgen, moeten we nu nog de potentiële energie van de voorgeschreven uitwendige krachten bepalen.

Voor de arbeid verricht door de voorgeschreven uitwendige krachten geldt (zie (5.26))

$$A_u^{(p)} := \int_V \underline{u}^T(\underline{x}) \underline{k}^* dV + \int_{S_p} \underline{u}^T(\underline{x}) \underline{t}^* ds . \quad (9.50)$$

De bijdrage van de volumekrachten  $\underline{k}^*$  voor het  $i$ -de element is m.b.v. (9.21) uit te werken tot

$$\int_{V^i} \underline{u}^{iT}(\underline{x}) \underline{k}^* dV = \int_{V^i} \underline{\Delta}^i N^i \underline{k}^* dV = \underline{\Delta}^i \underline{F}^i , \quad (9.51)$$

waarin

$$\underline{F}^i := \int_{V^i} N^i \underline{k}^* dV , \quad (9.52)$$

en waarin de vectoren reeds zijn betrokken op het globale  $x$ - $y$ -stelsel.

Voeren we  $\underline{F}^e$  in als

$$\underline{F}^{eT} = (\underline{F}^{1T}, \underline{F}^{2T}, \dots, \underline{F}^{pT}) , \quad (9.53)$$

dan geldt voor de totale uitwendige arbeid verricht door  $\underline{k}^*$

$$\int_V \underline{u}^T(\underline{x}) \underline{k}^* dV = \sum_{i=1}^p \underline{\Delta}^i \underline{F}^i = \underline{\Delta}^e \underline{F}^e , \quad (9.54)$$

wat na assemblage, dat wil zeggen na substitutie van (9.44), overgaat in

$$\int_V \underline{u}^T(\underline{x}) \underline{k}^* dV = \underline{\Delta}^T \underline{F} , \quad (9.55)$$

met

$$\underline{F} := A^T \underline{F}^e . \quad (9.56)$$

Blijft tenslotte nog over de bijdrage van de voorgeschreven randbelasting  $\underline{t}^*$ . We kunnen niet zonder meer (9.21) substitueren in de tweede integraal van (9.50), omdat we nu uitsluitend die knooppunten in rekening mogen brengen die op het  $S_p$ -oppervlak liggen. We vervangen daarom voor het  $i$ -de element de vector  $\underline{\Delta}^i$  door  $S_p^i \underline{\Delta}^i$ , waarbij de matrix  $S_p^i$ , welke enkel nullen en enen bevat, zodanig is dat  $S_p^i \underline{\Delta}^i$  alleen nog de verplaatsingen van de  $S_p$ -knooppunten bevat. Hiermee gaat (9.21) over in

$$\underline{u}(\underline{x}) = N^i S_p^i \underline{\Delta}^i =: Y^i \underline{\Delta}^i . \quad (9.57)$$

Substitutie van (9.57) in de tweede integraal van (9.50), genomen over het  $i$ -de element, geeft

$$\int_{S_p^i} \underline{u}^T(\underline{x}) \underline{t}^* dS = \underline{\Delta}^{iT} \int_{S_p^i} Y^{iT} \underline{t}^* dS = \underline{\Delta}^{iT} \underline{T}^i , \quad (9.58)$$

met

$$\underline{T}^i := \int_{S_p^i} Y^{iT} \underline{t}^* dS . \quad (9.59)$$

Voor de totale arbeid verricht door  $\underline{t}^*$  krijgen we dan

$$\int_{S_p} \underline{u}^T(\underline{x}) \underline{t}^* dS = \sum_{i=1}^p \underline{\Delta}^{iT} \underline{T}^i = \underline{\Delta}^e{}^T \underline{T}^e , \quad (9.60)$$

waarin  $\underline{T}^e$  weer is:

$$\underline{T}^e{}^T = (\underline{T}^1{}^T, \underline{T}^2{}^T, \dots, \underline{T}^p{}^T) . \quad (9.61)$$

Na assemblage gaat (9.60) over in

$$\int_{S_p} \underline{u}^T(\underline{x}) \underline{t}^* dS = \underline{\Delta}^T \underline{T} , \quad (9.62)$$

met

$$\underline{T} := A^T \underline{T}^e . \quad (9.63)$$

Met (9.55) en (9.62) krijgen we voor de totale uitwendige arbeid ten gevolge van de voorgeschreven krachten

$$A_u^{(p)} = \underline{\Delta}^T \underline{P} , \quad (9.64)$$

waarin

$$\underline{P} := \underline{F} + \underline{T} . \quad (9.65)$$

Voor de totale potentiële energie  $U$ , welke gelijk is aan

$$U = W - A_u^{(P)} ,$$

hebben we dan met (9.48) en (9.64) gevonden

$$U = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^T \underline{K} \underline{\Delta} - \underline{\Delta}^T \underline{P} . \quad (9.66)$$

Alvorens we de stelling van de minimale potentiële energie kunnen gaan toepassen, moeten we er eerst voor zorgen dat het verplaatsingsveld kinematisch toelaatbaar is. Teruggaande naar de op pagina 118 geformuleerde voorwaarden, zien we dat door de keuze van een polynoom voor  $\underline{u}(\underline{x})$  over het element en door het invoeren van de assemblage matrix aan de eisen i) en ii), respectievelijk, is voldaan. Blijft nog over eis iii).

We nemen aan dat het totale oppervlak van het lichaam te splitsen is in een  $S_p$  en een  $S_u$ -oppervlak. We zouden nu zonder meer de verplaatsingen van de knooppunten behorende tot het  $S_u$ -oppervlak gelijk kunnen stellen aan hun voorgeschreven waarden en vervolgens het minimum van  $U$  kunnen bepalen door de uitdrukking (9.66) te differentiëren naar de overgebleven knooppuntsverplaatsingen en vervolgens deze afgeleiden nul te stellen. We zullen hier echter een andere methode volgen, welke, behalve een grotere systematiek, als voordeel heeft, dat we direct de reactiekrachten in de  $S_u$ -knooppunten vinden.

Hiertoe splitsen we de globale knooppuntsverplaatsingsvector  $\underline{\Delta}$  als volgt

$$\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} \underline{\Delta}_1 \\ \underline{\Delta}_2 \end{pmatrix} \quad (9.67)$$

waarin  $\underline{\Delta}_2$  alleen de verplaatsingen bevat van die knooppunten uit het globale netwerk welke op  $S_u$  liggen. De vector  $\underline{\Delta}_2$  is dus voorgeschreven, of te wel

$$\underline{\Delta}_2 = \underline{\Delta}_2^* . \quad (9.68)$$

Op overeenkomstige wijze splitsen we ook de stijfheidsmatrix  $K$ :

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & | & K_{12} \\ \hline K_{21} & | & K_{22} \end{pmatrix} , \quad (9.69)$$

met

$$K_{21}^T = K_{12} \quad (9.70)$$

Teneinde de reactiekrachten te kunnen bepalen, voeren we in gedachte het volgende experiment uit:

We gaan het lichaam vrijmaken, dat wil zeggen: we maken de knooppunten op het  $S_u$ -oppervlak vrij (dus  $\Delta_2$  wordt vrij) en we voeren in deze knooppunten reactiekrachten  $\underline{R}$  in. We veronderstellen voorlopig de  $\underline{R}$  als voorgeschreven en de  $\Delta_2$  als vrij. We mogen dan de  $U$  zowel naar  $\Delta_1$  als naar  $\Delta_2$  variëren en we stellen pas na het variëren  $\Delta_2$  gelijk aan zijn voorgeschreven waarden  $\Delta_2^*$ . De variaties naar  $\Delta_2$  leveren dan de vergelijkingen voor de reactiekrachten  $\underline{R}$ .

Als we de reactiekrachten  $\underline{R}$  als voorgeschreven beschouwen, moeten we deze ook in de uitwendige arbeid  $A_u^{(b)}$  in rekening brengen. Dit betekent dat we de uitdrukking (9.64) moeten aanvullen met een term:

$$\Delta_2^T \underline{R},$$

zijnde de arbeid verricht door de krachten  $\underline{R}$ . Uit deze uitdrukking blijkt dat de componenten van  $\underline{R}$  de krachten in de  $S_u$ -knooppunten zijn in de richting van de bijbehorende knooppuntsverplaatsing (i.e. in de richting van de bijbehorende componenten van  $\Delta_2$ ).

We splitsen nu de vector  $\underline{P}$ , voorkomend in (9.64), op analoge wijze als  $\Delta_1$  in

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} \underline{P}_1 \\ \tilde{\underline{P}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 + \underline{R} \end{pmatrix}, \quad (9.71)$$

met

$\underline{P}_1$  : voorgeschreven krachten,  
 $\tilde{\underline{P}}_2 = \underline{P}_2 + \underline{R}$ : krachten in  $S_u$ -knooppunten;  $\underline{P}_2$ : voorgeschreven (afkomstig van volumekracht) en  $\underline{R}$ : reactiekrachten (onbekend).

Met behulp van de betrekking:

$$\Delta_2^T K_{21} \Delta_1 = \Delta_1^T K_{12} \Delta_2, \quad (9.72)$$

welke volgt uit (9.70), en met (9.67), (9.69) en (9.71) kunnen we de potentiële energie volgens (9.66) herschrijven tot

$$U = \frac{1}{2} \Delta_1^T K_{11} \Delta_1 + \Delta_1^T K_{12} \Delta_2 + \frac{1}{2} \Delta_2^T K_{22} \Delta_2 - \Delta_1^T \underline{P}_1 - \Delta_2^T \tilde{\underline{P}}_2. \quad (9.73)$$

De uiteindelijke vergelijkingen worden nu als volgt verkregen:

- i) We stellen de variatie van U naar  $\underline{\Delta}_1$  gelijk aan nul, onder de conditie dat  $\underline{\Delta}_2 = \underline{\Delta}_2^*$ , met andere woorden we stellen

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \underline{\Delta}_1} \right)_{\underline{\Delta}_2 = \underline{\Delta}_2^*} = 0 . \quad (9.74)$$

Dit geeft de volgende oplossing voor  $\underline{\Delta}_1$ :

$$\underline{\Delta}_1 = K_{11}^{-1} (\underline{P}_1 - K_{12} \underline{\Delta}_2^*) . \quad (9.75)$$

- ii) Variëren naar  $\underline{\Delta}_2$  geeft, m.b.v. (9.72),

$$\underline{\tilde{P}}_2 = K_{21} \underline{\Delta}_1 + K_{22} \underline{\Delta}_2 . \quad (9.76)$$

We substitueren hierin voor  $\underline{\Delta}_1$  de uitdrukking volgens (9.75) en voor  $\underline{\Delta}_2$  de voorgeschreven waarde  $\underline{\Delta}_2^*$ . Dit leidt tot de volgende relatie voor de reactiekrachten op het  $S_u$ -oppervlak

$$\underline{R} = K_{21} K_{11}^{-1} (\underline{P}_1 - K_{12} \underline{\Delta}_2^*) + K_{22} \underline{\Delta}_2^* - \underline{P}_2 . \quad (9.77)$$

Voor het **practisch** belangrijke geval dat de voorgeschreven verplaatsingen gelijk aan nul zijn ( $\underline{\Delta}_2^* = 0$ ), zoals bij inklemmingen of opleggingen, gaan (9.75) en (9.77) over in

$$\underline{\Delta}_1 = K_{11}^{-1} \underline{P}_1 , \quad (9.78)$$

en

$$\underline{R} = K_{21} K_{11}^{-1} \underline{P}_1 - \underline{P}_2 . \quad (9.79)$$

Opmerking. De oplossing volgens (9.75) of (9.78) bestaat alleen als  $K_{11}^{-1}$  bestaat, dat wil zeggen als  $K_{11}$  niet singulier is. We zullen nu laten zien dat de matrix K wel singulier is ( $\det K = 0$ ) maar  $K_{11}$  niet.

Hiertoe gaan we eerst kijken naar de stijfheidsmatrix per element  $k^i$ . Aangezien  $k^i$  symmetrisch is, kunnen we  $k^i$  op hoofdassen brengen. Laten we ons, om de gedachten te bepalen, beperken tot een vlak, driehoekig element. In dat geval heeft  $k^i$  zes reële eigenwaarden:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ .

Op hoofdassen gebracht heeft  $k^i$  dus de vorm

$$k^i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ 0 & & & & \cdot & \\ & & & & & \lambda_6 \end{pmatrix} . \quad (9.80)$$

Noemen we de zes bijbehorende, orthonormale eigenvectoren van  $\underline{\Delta}^i$ :  $\underline{w}^{(k)}$ , met

$$\underline{w}^{(k)T} \underline{w}^{(\ell)} = \delta_{k\ell} , \quad (9.81)$$

dan is iedere vector  $\underline{\Delta}^i$  te schrijven als lineaire combinatie van deze eigenvectoren:

$$\underline{\Delta}^i = \sum_{k=1}^6 a_k \underline{w}^{(k)} . \quad (9.82)$$

Hiermee kunnen we de elastische energie per element schrijven als

$$2W^i = \underline{\Delta}^i T k^i \underline{\Delta}^i = \sum_{k,\ell=1}^6 \lambda_k a_k a_\ell \underline{w}^{(k)T} \underline{w}^{(\ell)} = \sum_{k=1}^6 \lambda_k a_k^2 , \quad (9.83)$$

volgens (9.81).

Nu weten we dat er drie, van elkaar onafhankelijke, verplaatsingsvelden bestaan, waarvoor  $W^i$  gelijk aan nul is, namelijk de drie starre lichaamsverplaatsingen van het, vlakke, element (twee translaties plus een rotatie). Bij een verplaatsing als star lichaam treedt er geen deformatie op en is dus de elastische energie gelijk aan nul. Hieruit concluderen we dat er drie eigenwaarden gelijk aan nul moeten zijn, zeg:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 . \quad (9.84)$$

Opgave. Schrijf de stijfheidsmatrix volgens (9.33) uit, laat zien dat hij inderdaad drie eigenwaarden gelijk aan nul heeft, bepaal de bij deze eigenwaarden behorende eigenvectoren en laat zien dat deze eigenvectoren de starre lichaamsverplaatsingen voorstellen.

We weten verder, uit de klassieke elasticiteitstheorie, dat de elastische energie voor het geval er wel deformaties optreden, positief is. Uit (9.83) volgt dan meteen dat  $\lambda_4$ ,  $\lambda_5$  en  $\lambda_6$  groter dan nul moeten zijn.

Een analoge beschouwing kunnen we houden voor de globale stijfheidsmatrix  $K$ . De matrix  $k^e$  heeft nog  $3p$  eigenwaarden gelijk aan nul, maar door de assemblage m.b.v.  $A$ , waardoor de elementen met elkaar verbonden worden, blijven er in  $K$  nog maar 3 eigenwaarden gelijk aan nul over, namelijk die behorende bij de 3 starre-lichaamsverplaatsingen van de vlakke plaat als geheel (wordt 6 bij een drie-dimensionaal lichaam). Dus  $K$  is singulier.

We hebben aangenomen dat het lichaam in evenwicht is. Dit houdt ondermeer in dat het lichaam zodanig is ondersteund dat het geen starre-lichaamsverplaatsingen kan ondergaan. De voorgeschreven verplaatsingen van de ondersteuning worden ondergebracht in  $\Delta_2$ . Dit betekent dat de van de globale knooppuntsverplaatsingsvector  $\underline{\Delta}$  afgesplitste term  $\underline{\Delta}_1$  geen starre-lichaamsverplaatsingen meer bevat, ook niet nadat het lichaam is vrijgemaakt. Dientengevolge is de bij  $\underline{\Delta}_1$  behorende elastische energie, welke gelijk is aan:  $\underline{\Delta}_1^T K_{11} \underline{\Delta}_1$ , groter of gelijk aan nul en alleen dan gelijk aan nul als  $\underline{\Delta}_1 = \underline{0}$ . Hieruit concluderen we dat de matrix  $K_{11}$  alleen positieve eigenwaarden heeft en dus niet singulier is. De inverse  $K_{11}^{-1}$  bestaat dus altijd.

Tot besluit van dit hoofdstuk geven we nog een paar slotopmerkingen:

#### Slotopmerkingen.

- i) Het toepassingsgebied van de in dit hoofdstuk beschreven methode beperkt zich niet tot de lineaire elasticiteitstheorie, maar bestrijkt ook de niet-lineaire theorie en de plasticiteitstheorie alsmede, buiten de mechanica, ondermeer nog de warmtestroming en de magnetoelectriciteit.
- ii) We komen nog even terug op de eisen welke we aan het stelsel gesteld hebben. In hoofdstuk V van dit college eisten we (zie pag. 54):  $\bar{u}_i \in C^2$ . Hier hebben we deze eisen aanmerkelijk verzwakt tot:

$$\bar{u}_i \in C^0, \text{ en stuksgewijs } C^1.$$

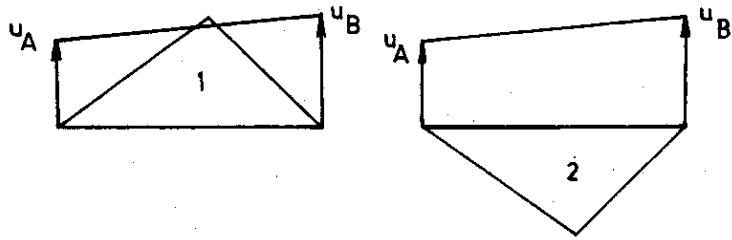
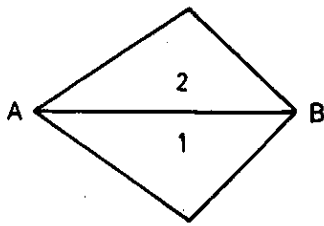
(We komen in het volgende hoofdstuk op deze eisen nader terug.)

Is aan deze eisen nu inderdaad voldaan?

We zullen laten zien dat voor een driehoekig element met een lineair verplaatsingsveld inderdaad aan deze eisen is voldaan.

Op het element is voor  $\underline{u}$  een lineaire polynoom gekozen (zie verg. (9.14)).

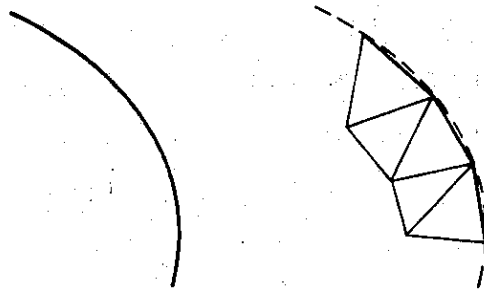
Binnen het element zijn de verplaatsingen dan oneindig vaak differentieerbaar en dus in ieder geval:  $\bar{u}_i \in C^1$ , per element. We gaan nu kijken naar de rand van het element en we beschouwen twee tegen elkaar gelegen driehoekige elementen:



Door de lineaire keuze van het verplaatsingsveld, zijn de verplaatsingen van de lijn AB ook lineaire functies over AB. Door de assemblage worden de verplaatsingen van A en B van element 1 en van element 2 aan elkaar gelijk gesteld, zodat nu de verplaatsing van een willekeurig punt van AB beschouwt als punt van element 1 gelijk is aan de verplaatsing van hetzelfde punt van AB maar nu beschouwt als punt van element 2. De continuïteit over de rand van de elementen is dus gewaarborgd. Dit geldt echter niet voor de afgeleiden, welke wel degelijk een sprong over de rand kunnen hebben.

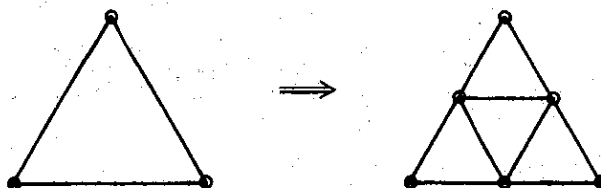
- iii) Indien we een lichaam hebben met een gebogen oppervlak, bijvoorbeeld een plaat met een niet rechte rand, en we willen niet met, bestaande, gekromde elementen werken, dan benaderen we de rand meestal door een stuksgewijze vlakke rand.

Bijvoorbeeld



De fouten die hierbij gemaakt worden zijn een onderwerp van studie in de elementen methode, maar wij zullen hier niet dieper op ingaan.

- iv) Om de oplossing te verbeteren, hebben we drie mogelijkheden:
  - a) We kunnen de elementen vervangen door andere elementen.
  - b) We kunnen het netwerk verfijnen:



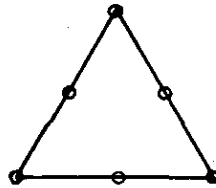


c) We kunnen hetzelfde element houden, maar we verhogen de graad van de polynomen, bijv.:

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

en analoog  $v(x,y)$ .

De verplaatsing  $u(x,y)$  bevat nu zes coëfficiënten, dit betekent dat we, om de  $a_i$ 's uit te kunnen drukken in de knooppuntsverplaatsingen, per element ook zes knooppunten moeten kiezen:



Bij de assemblage eisen we weer aansluiting in elk knooppunt. Hierdoor is de continuïteit over de randen gewaarborgd.

Opgave. Bewijs de laatste bewering.

- v) Behalve aan de in de inleiding geformuleerde eisen moet het verplaatsingsveld van een element ook nog aan de volgende eisen voldoen:
- a) het verplaatsingsveld moet de starre-lichaamsverplaatsingen van het element bevatten;
  - b) het verplaatsingsveld moet de constante deformatietoestand bevatten.
- De eisen a) en b) zijn noodzakelijk, omdat we anders nooit, door verhoging van de graad van het polynoom, tot een volledig polynoom kunnen komen.
- vi) De stof in deze paragraaf behandeld, is verre van volledig. Voor verdere studie verwijzen we naar [2] en naar de daarin genoemde literatuur.

Hiermee besluiten we deze inleiding in de verplaatsingsmethode. We zullen echter nog eerst de belangrijkste stappen van deze methode recapituleren in het nu volgende schema:

- 1) Verdeel het lichaam in elementen.

#### LOCALE ANALYSE.

- 2) Ontwikkel het verplaatsingsveld binnen het element naar een polynoom.
- 3) Druk dit verplaatsingsveld uit in de knooppuntsverplaatsingen  $\underline{\Delta}^i$ :

$$(9.21): \underline{u}(x) = N^i \underline{\Delta}^i .$$

4) Druk het deformatie- en spanningsveld uit in  $\underline{\Delta}^i$ :

$$(9.24): \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = D^i \underline{\Delta}^i$$

$$(9.27): \underline{\sigma}(\underline{x}) = E^i D^i \underline{\Delta}^i .$$

5) Druk de elastische energie per element uit in  $\underline{\Delta}^i$ :

$$(9.31): W^i = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^i T^i k^i \underline{\Delta}^i .$$

#### GLOBALE ANALYSE.

6) Transformeer de lokale assenkruisen naar een globaal assenkruis:

$$(9.35): \underline{\Delta}^i \rightarrow \underline{\Delta}^e = \Gamma^i T^i \underline{\Delta}^i .$$

7) Tel elementen op  $\rightarrow \underline{\Delta}^e$  ((9.39)).

8) Assembleer:

$$(9.44): \underline{\Delta}^e \rightarrow \underline{\Delta}: \underline{\Delta}^e = \underline{A} \underline{\Delta} .$$

9) Bepaal de totale W:

$$(9.48): W = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^T \underline{K} \underline{\Delta} .$$

10) Bepaal de uitwendige arbeid verricht door de voorgeschreven belasting ( $\underline{k}^*$  en  $\underline{t}^*$ ):

$$(9.63): \underline{A}_u^{(p)} = \underline{\Delta}^T \underline{P} .$$

11) Bepaal de totale potentiële energie:

$$(9.66): U = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^T \underline{K} \underline{\Delta} - \underline{\Delta}^T \underline{P} .$$

12) Breng de randvoorwaarden op  $S_u$  in rekening:

$$(9.67), (9.68): \underline{\Delta} = \begin{pmatrix} \underline{\Delta}_1 \\ \underline{\Delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\Delta}_1 \\ \underline{\Delta}_2^* \end{pmatrix} .$$

13) Maak het lichaam vrij en voer reactiekrachten in:

$$(9.71): \underline{P} \rightarrow \underline{P} = \begin{pmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 + \underline{R} \end{pmatrix} .$$

14) Varieer naar  $\underline{\Delta}_1$ : dit geeft de knooppuntsverplaatsingen van de vrije knooppunten:

$$(9.75): \underline{\Delta}_1 = K_{11}^{-1}(\underline{P}_1 - K_{12}\underline{\Delta}_2^*) .$$

15) Varieer naar  $\underline{\Delta}_2$ : dit geeft de reactiekrachten in de  $S_u$ -knooppunten:

$$(9.77): \underline{R} = K_{21}K_{11}^{-1}(\underline{P}_1 - K_{12}\underline{\Delta}_2^*) + K_{22}\underline{\Delta}_2^* - \underline{P}_2 .$$

### IX.3. Mathematische aspecten

In het tweede deel van dit hoofdstuk zullen we enkele mathematische aspecten van de eindige elementen methode bespreken.

We zullen uitgaande van een stelsel tweede orde elliptische differentiaalvergelijkingen de equivalentie van dit stelsel met een variatieprincipe, het zogenaamde principe van Ritz, laten zien. We zullen aangeven voor welke klasse van functies dit variatieprincipe geldt en we zullen een paar stellingen geven betreffende de eenduidigheid en de existentie van de oplossing van dit variatieprincipe. Het zal blijken dat de eindige elementen methode kan worden gezien als een speciale vorm van de Ritz-methode. Tenslotte zal een convergentiestelling besproken worden, geldend voor een één-dimensionaal probleem. Alle bewijzen van de stellingen worden achterwege gelaten. Voor de bewijzen wordt verwezen naar de literatuur ([3], [4]) en voor de definities van de gebruikte begrippen naar [5].

We beschouwen het volgende stelsel tweede orde differentiaalvergelijkingen, geschreven in operatorvorm:

$$\underline{A}\underline{u} = \underline{f} . \quad (9.85)$$

Deze vergelijkingen representeren de elasticiteitsvergelijkingen of Navier-vergelijkingen (verg. (4.26) met  $-k_i$  in het rechterlid) indien we  $\underline{f}$  gelijk nemen aan de volumekracht  $\underline{k}$  en de operator A zodanig kiezen dat

$$\underline{A}\underline{u} = -(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \underline{u} + \mu \text{rot rot } \underline{u} , \quad (9.86)$$

of, in index notatie

$$-(\underline{A}\underline{u})_i = -A_{ij}u_j = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} . \quad (9.87)$$

We nemen aan dat bij het stelsel (9.85) homogene randvoorwaarden horen. In de elasticiteitstheorie betekent dit het volgende:

Stel dat we het totale oppervlak van het elastische lichaam kunnen verdelen in een  $S_u$ -oppervlak plus een  $S_p$ -oppervlak, dan geldt

$$\begin{aligned} \text{en} \quad u_i &= u_i^* = 0 \text{ op } S_u, \\ t_i &= t_i^* = 0 \text{ op } S_p. \end{aligned} \tag{9.88}$$

In dit geval is er dus geen energie-toevoer aan de rand van het lichaam:

$$\int_S t_i u_i dV = 0. \tag{9.89}$$

Het is dan eenvoudig in te zien dat, voor  $(\underline{A}u)$  volgens (9.86),

$$\int_V \underline{u}^T \underline{A}u dV = 2W(\underline{u}), \tag{9.90}$$

waarin  $W(\underline{u})$  de elastische energie is.

Opgave. Bewijs (9.90).

De reden dat we de randvoorwaarden homogeen hebben genomen, is gelegen in het feit dat we in de nu volgende beschouwingen steeds zullen werken met lineaire ruimten; dat wil zeggen: als  $H$  een lineaire vectorruimte is, en

$$\underline{u}_1 \in H \text{ en } \underline{u}_2 \in H$$

dan ook

$$(\underline{u}_1 + \lambda \underline{u}_2) \in H.$$

Voor elasticiteitsproblemen is de oplossingsruimte alleen dan een lineaire ruimte, indien de randvoorwaarden homogeen zijn.

Immers, stel dat de randvoorwaarden niet homogeen zijn, bijvoorbeeld:

$$\underline{u} = \underline{c} \neq \underline{0} \text{ op } S_u,$$

en stel dat  $\underline{u}_1$  en  $\underline{u}_2$  oplossingen zijn (d.w.z.  $\underline{u}_1$  en  $\underline{u}_2 \in H$ ) dan

$$\underline{u}_1 = \underline{c} \text{ en } \underline{u}_2 = \underline{c} \text{ op } S_u,$$

maar

$$\underline{u}_1 + \lambda \underline{u}_2 = (1 + \lambda)\underline{c} \neq \underline{c} \text{ voor } \lambda \neq 0,$$

en dus

$$(\underline{u}_1 + \lambda \underline{u}_2) \notin H .$$

De beperking tot homogene randvoorwaarden is niet essentieel, want we kunnen randkrachten altijd transformeren naar volumekrachten, bijv., stel

$$\underline{u} = \underline{u}^* \neq \underline{0} \text{ op } S_u .$$

Dan voeren we een nieuwe functie  $\underline{u}'$  in, door

$$\underline{u}' = \underline{u} - \underline{u}^* ,$$

voor welke functie dan wel geldt

$$\underline{u}' = \underline{0} \text{ op } S_u ,$$

terwijl  $\underline{u}^*$  aanleiding geeft tot een extra volumekracht in de Navier-vergelijkingen voor  $\underline{u}'$ .

We gaan nu weer terug naar de algemene vergelijkingen volgens (9.85)

$$A(x)u(x) = f(x), \quad x \in V, \quad (9.91)$$

met homogene randvoorwaarden op de rand  $S$ . Hierin is  $A$  een tweede orde differentiaal-operator met een definitie-gebied dat dicht ligt in de volledige ruimte van de kwadratisch integreerbare functies  $L_2$ . Deze  $L_2$ -ruimte is een Hilbert-ruimte en we zullen vanaf nu de notatie  $H^0$  in plaats van  $L_2$  gebruiken.

We voeren de zogenaamde inproduct-notatie in, dat wil zeggen we schrijven  $(a,b)$  voor

$$(a,b) = \int_V (\underline{a}, \underline{b}) dV . \quad (9.92)$$

De norm in  $H^0$  geven we aan met  $\| \cdot \|_0$ :

$$\| u \|_0^2 = (u, u) . \quad (9.93)$$

We nemen aan dat het rechterlid van (9.91) kwadratisch integreerbaar is:

$$f \in H^0 \text{ of } \| f \|_0^2 < \infty . \quad (9.94)$$

Deze eis sluit puntkrachten uit.

Voor het definitie-gebied van  $A$ , dat we aan zullen geven met  $H_B^2$ , nemen we de volgende ruimte:

$$u \in H_B^2$$

als

- i) de gegeneraliseerde tweede afgeleiden van  $u(x)$  in  $H^0$  liggen,
- ii)  $u(x)$  voldoet aan alle randvoorwaarden.

Het is te bewijzen dat  $H_B^2$  dicht ligt in  $H^0$ .

Opmerking betreffende gegeneraliseerde afgeleiden: We kunnen in dit kader niet diep ingaan op het begrip "gegeneraliseerde afgeleide". Voor een definitie van dit begrip moeten we verwijzen naar het college: Lineaire Analyse II, of naar [3], § 16.

Populair gezegd, kunnen we stellen dat functies waarvan de tweede afgeleiden  $\delta$ -functies zijn, niet tot  $H_B^2$  behoren.

De ruimte  $H_B^2$  is niet volledig in de  $\|\cdot\|_0$ -norm. Het is echter wel zo dat  $H_B^2$  dicht ligt in  $H^0$  (zie [3], § 2).

We zullen verder aannemen dat de operator  $A$  positief-definiet is, dat wil zeggen, er bestaat een getal  $c > 0$ , zodanig dat

$$(Au, u) \geq c \|u\|_0^2. \quad (9.95)$$

We merken op dat voor een elasticiteitsprobleem in evenwicht en met homogene randvoorwaarden aan deze ongelijkheid is voldaan.

We zullen nu het probleem (9.91) gaan vergelijken met een variatieprobleem voor de kwadratische functionaal  $F(u)$ , gedefinieerd door:

$$F(u) := (Au, u) - 2(f, u). \quad (9.96)$$

We wijzen er op dat voor een elastische probleem  $F(u)$  tweemaal de potentiële energie functionaal (volgens (5.27)) is. Het eerste variatie-probleem luidt nu als volgt: Vindt een  $u \in H_B^2$  waarvoor  $F(u)$  zijn minimale waarde aanneemt. Hiervoor geldt: (zie [3], § 2).

Stelling 1. Indien er van (9.91) een oplossing  $u_0 \in H_B^2$  bestaat:  $Au_0 = f$ , dan is

$$F(u_0) = \min_{u \in H_B^2} F(u),$$

en omgekeerd: als  $u_0 \in H_B^2$  de functionaal minimaliseert, dan geldt:

$$Au_0 = f.$$

We kunnen dit variatie-principe nog iets ruimer formuleren. Hiertoe gaan we uit van het gegeven dat de operator  $A$  een tweede-orde differentiaal-operator is. In dat geval bevat  $(Au, u)$  tweede-orde afgeleiden van  $u$ . Door partieel te integreren met behulp van de homogene randvoorwaarden, is  $(Au, u)$  terug te brengen tot een integraal welke nog hoogstens eerste afgeleiden bevat:  $a(u, u)$ . In de elasticiteitstheorie krijgen we bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} (Au, u) &= - \int_V [(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj}] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\mu u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda(u_{i,i})^2] dV := a(u, u), \end{aligned} \quad (9.97)$$

de elastische energie.

Opgave. Bewijs (9.97).

We voeren in een nieuwe ruimte  $H_E^1$  door:

$$u \in H_E^1$$

als:

- i) de gegeneraliseerde eerste afgeleiden van  $u(x)$  in  $H^0$  liggen,
- ii)  $u(x)$  voldoet aan de kinematische randvoorwaarden  $u = 0$  op  $S_u$ .

Merk op dat

$$H_B^2 \subset H_E^1. \quad (9.98)$$

Verder ligt  $H_B^2$  weer dicht in  $H_E^1$ .

Als norm in de  $H_E^1$  voeren we in

$$\|u\|_1^2 := \int_V (u_{i,j}u_{i,j} + u_i u_i) dV. \quad (9.99)$$

Het blijkt dat ook  $a(u,u)$  een norm is in  $H_E^1$ . We noemen deze de energienorm. Het is nu te bewijzen dat de  $\|\cdot\|_1$ -norm de energienorm  $a(\cdot)$  insluit, dat wil zeggen, er bestaan positieve getallen  $C$  en  $K$  zodanig dat

$$C\|u\|_1^2 \leq a(u,u) \leq K\|u\|_1^2. \quad (9.100)$$

We kunnen dus stellen dat de energienorm en de  $\|\cdot\|_1$ -norm equivalent zijn. Bijvoorbeeld: convergeren in de  $\|\cdot\|_1$ -norm betekent ook convergeren in de  $a(\cdot)$ -norm.

Met (9.97) wordt  $F(u)$  volgens (9.96) en met  $u \in H_B^2$ :

$$F(u) = a(u,u) - 2(f,u). \quad (9.101)$$

Als tweede, verruimde variatie-principe beschouwen we de variatie van  $F(u)$  volgens (9.101) met  $u \in H_E^1$ . Hiervoor geldt:

Stelling 2. Er bestaat een eenduidige  $u_0 \in H_E^1$ , welke zodanig is dat

$$a(u, u_0) = (f, u), \quad \forall u \in H_E^1, \quad (9.102)$$

en deze  $u_0$  minimaliseert  $F(u)$  over  $H_E^1$ , en wel zodanig dat

$$\min_{u \in H_E^1} F(u) = F(u_0) = -a(u_0, u_0) = -(f, u_0). \quad (9.103)$$

Bovenstaande stelling, welke de existentie en de eenduidigheid van de zwakke oplossing van (9.91) garandeert, wordt de stelling van Riesz genoemd ([3], § 3).

Stelling 2 zegt dus dat

$$F(u_0) \leq F(u), \quad \forall u \in H_E^1, \quad (9.104)$$

en dat er een en slechts één punt  $u_0$ , gelegen in  $H_E^1$ , is dat  $F(u)$  minimaliseert. Indien  $f$  en de rand  $S$  voldoende glad zijn, is  $u_0$  gelijk aan de exacte oplossing. In het algemeen, d.w.z. als  $f$  discontinu is of als de rand  $S$  scherpe hoeken heeft, zal  $u_0$  slechts een zwakke oplossing van (9.91) zijn, dat wil zeggen:  $u_0(x) \in H_E^1$  voldoet aan:



$$i) \quad a(u, u_0) = (f, u), \quad \forall u \in H_E^1, \quad (9.105)$$

ii) de kinematische randvoorwaarden (uiteraard),

iii) de dynamische randvoorwaarden op zwakke wijze; dus als  $S_p$  het deel van  $S$  is waar dynamische randvoorwaarden zijn voorgeschreven, dan geldt

$$\int_{S_p} \underline{t}^T(\underline{u}_0) \underline{u} \, dS = 0, \quad \forall u \in H_E^1. \quad (9.106)$$

De ongelijkheid (9.104) komt in de elasticiteitstheorie overeen met het principe van de minimale potentiële energie. Op dit principe is de verplaatsingsmethode uit de eindige elementen methode gebaseerd. In de verplaatsingsmethode wordt een lichaam in elementen verdeeld en worden over deze elementen polynoom-ontwikkelingen voor de verplaatsingen genomen. Het is daarom van belang om te weten wanneer een dusdanig geconstrueerd verplaatsingsveld tot  $H_E^1$  behoort. Er geldt nu dat, als  $u$  voldoet aan de kinematische randvoorwaarden, dan:

$u \in H_E^1$ , indien de polynomen overal continu aansluiten,

$u \notin H_E^1$ , indien de polynomen over de randen sprongen vertonen.

We kunnen ook zeggen: een functie  $u(x)$  die continu is in  $\bar{V}$  en stuksgewijs continu differentieerbaar behoort tot  $H_E^1$ . De verplaatsingsfuncties waarmee in de eindige elementen methode wordt gewerkt voldoen aan deze eis (vergelijk de voorwaarden uit § IX.1).

Een klassieke (uit 1908) methode om het bovenbeschreven variatieprobleem op te lossen vormt het Principe van Ritz (ook wel Rayleigh-Ritz-Galerkin).

Laat  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  een totale orthonormale rij in  $H_E^1$  zijn ( $\varphi_k \in H_E^1$ : testfuncties). Onder orthonormaal verstaan wij hier dat:

$$a(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}. \quad (9.107)$$

Ieder element  $u \in H_E^1$  kan dan worden geschreven als

$$u = \sum_k \alpha_k \varphi_k. \quad (9.108)$$

Door substitutie van (9.108) in (9.101) gaat de kwadratische functionaal  $F(u)$  over in het kwadratische polynoom  $\tilde{F}(\alpha_k)$ :

$$\tilde{F}(\alpha_k) = F\left(\sum_k \alpha_k \varphi_k\right). \quad (9.109)$$

Het minimum van  $F(u)$  is dan te vinden uit

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9.110)$$

wat een stelsel lineaire vergelijkingen in  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  vormt.

In feite vormt (9.110) een oneindig stelsel, maar in de praktijk breken we dit stelsel natuurlijk na, zeg,  $N$  termen af. Dit betekent dat we  $u$  niet meer kiezen uit  $H_E^1$ , maar uit de  $N$ -dimensionale deelruimte van  $H_E^1$ , opgespannen door de testfuncties  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N: S^N$

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \Rightarrow u \in S^N. \quad (9.111)$$

We kunnen dan het minimum van  $F(u)$  voor een bepaalde waarde van  $N$  bepalen en we kunnen de oplossing verbeteren door grotere waarden voor  $N$  te nemen.

De moeilijkheid bij deze methode zit in de keuze van de testfuncties  $\varphi_k$ . Oorspronkelijk werden voor deze  $\varphi_k$ 's functies genomen welke over het gehele gebied, minstens continu differentieerbaar waren. Hierdoor werd de methode erg omslachtig zodat meestal moest worden volstaan met slechts enkele testfuncties. De stap welke essentieel is voor de elementen methode is nu, dat men de functies  $\varphi_k$  slechts stuksgewijs  $C^1$  gaat nemen, waarbij over de elementen zeer eenvoudige functies (lagere orde polynomen) worden genomen. Het voordeel is dat men zeer eenvoudige formuleringen krijgt, maar het nadeel, waardoor deze methode tot voor enkele decennia geen praktisch nut had, is gelegen in het feit dat de orde van het verkregen stelsel lineaire vergelijkingen erg hoog wordt. Pas sinds de komst van de computer is het mogelijk geworden deze stelsels op te lossen en sindsdien heeft deze methode dan ook een geweldige vlucht genomen.

De werkwijze in de verplaatsingsmethode kunnen we als volgt beschrijven:

We nemen uit de volledige klasse  $H_E^1$  een eindig-dimensionale deelruimte:  $S^h$ , welke we verkrijgen door het lichaam in elementen te verdelen, over deze elementen polynomen voor het verplaatsingsveld te kiezen, de elementen continu te laten aansluiten en aan de kinematische randvoorwaarden te voldoen. De dimensie van  $S^h$  is gelijk aan de rang van de globale knooppuntsverplaatsingsvector. De factor  $h$  is een maat voor de afmetingen van een element. Door verkleining van  $h$ , dit geeft verfijning van het globale netwerk, wordt de klasse  $S^h$  vergroot:

$$S^{h_1} \supset S^{h_2} \quad \text{als } h_1 < h_2. \quad (9.112)$$

We gaan nu de functionaal  $F(u)$  minimaliseren over  $S^h$ . Indien voor  $u = u^h \in S^h$  dit minimum optreedt, dan geldt

$$F(u^h) \leq F(u), \quad \forall u \in S^h. \quad (9.113)$$

Verder geldt ook, omdat  $S^h$  een deelruimte is van  $H_E^1$ , dat

$$F(u_0) \leq F(u^h), \quad (9.114)$$

waarin  $u_0$  de zwakke oplossing volgens stelling 2 is.

Voor  $u^h$  gelden nog de volgende twee stellingen (zie [4], § 1.6).

Stelling 3.

$$a(u_0 - u^h, u_0 - u^h) = \min_{u \in S^h} a(u_0 - u, u_0 - u). \quad (9.115)$$

Stelling 4.

$$a(u_0 - u^h, u) = 0, \quad \forall u \in S^h. \quad (9.116)$$

(In woorden:  $u^h$  is de projectie van  $u_0$  op  $S^h$ .)

De convergentie in de energienorm van de methode van Ritz is bewezen (zie [3], § 8). Teneinde een indruk te krijgen van de convergentie van de elementen methode, bekijken we het één-dimensionale voorbeeld:

$$-\frac{d}{dx} [p(x)u'(x)] + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, \pi], \quad (9.117)$$

met  $p(x)$  en  $q(x)$  continu en

$$0 < p_{\min} < p(x) < p_{\max} \quad \text{en} \quad 0 \leq q(x) \leq q_{\max}, \quad (9.118)$$

en met de randvoorwaarden

$$u(0) = 0 \quad \text{en} \quad u(\pi) = 0 \quad (\text{kinematisch})$$

of

$$u'(\pi) = 0 \quad (\text{dynamisch}). \quad (9.118)$$

De oplossing van (9.117) kan ook, zij het wellicht alleen in zwakke vorm, worden gevonden door de bepaling van het minimum van de kwadratische functionaal:

$$F(u) = \int_0^{\pi} [p(u')^2 + qu^2 - 2fu] dx, \quad (9.120)$$

over de ruimte  $E_h^1$ .

Construeren we een deelruimte  $S^h$  door het interval  $[0, \pi]$  in  $N$  stukken te verdelen,  $h$  is dan  $1/N$ , en over deze stukken verplaatsingsvelden aan te nemen, dan kunnen we het minimum  $F(u^h)$  over deze klasse bepalen:

$$F(u^h) = \min_{u \in S^h} F(u). \quad (9.121)$$

Dan geldt de volgende convergentiestelling (zie [4], § 1.6).

Stelling 5.

$$\|u_0 - u^h\|_0 \leq Ch^2 \|f\|_0, \quad (9.122)$$

waarin  $C$  een constante is, die onafhankelijk is van de oplossing  $u_0$ .

Uit deze stelling concluderen we dat  $u^h$  een minimaalreeks is in de norm  $\|\cdot\|_0$  ( $u^h$  is reeds a priori een minimaalreeks in  $a(\cdot)$ , op grond van het principe van Ritz) en dat, voor dit één-dimensionale probleem, de convergentie gaat als  $O(h^2)$ .

Tot besluit nog de volgende twee opmerkingen:

- i) Bij een probleem met gemengd-gemengde randvoorwaarden geldt dat deel van de randvoorwaarden dat kinematisch is als criterium voor  $H_E^1$ , terwijl we de overige randvoorwaarden in  $F(u)$  moeten opnemen.
- ii) Sommige problemen uit de mechanica worden beschreven door hogere (dan 2) orde differentiaalvergelijkingen. Zo geldt bijvoorbeeld voor een plaatbuigingsprobleem ( $w(x,y)$ : doorbuiging):

$$DAAw = f.$$

Kinematische randvoorwaarden zijn dan:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial N} = 0 \text{ op } S.$$

De eisen voor  $H_E^1$  worden dan ook strenger: we kunnen niet meer volstaan met  $w \in C^0(\bar{V})$  maar we moeten eisen (voor de plaatbuiging):

$$w \in C^0(\bar{V}) \text{ en } \frac{\partial w}{\partial N} \in C^0(\bar{V}),$$

waarbij  $\partial w / \partial N$  de normale afgeleide over de randen van de elementen voorstelt.

### Literatuur

- [1] I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.
- [2] R.H. Callagher, Finite Element Analysis, Fundamentals, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975 (techniek).
- [3] S.G. Mikhlin, The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional, Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.
- [4] G. Strang & G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [5] Collegedictaat, Lineaire Analyse I, Dict. nr. 2.238.