

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

THEORIE
van de
MECHANISCHE STABILITEIT

naar het college van

Prof.Dr. J.A. Alblas



Bibliografie
Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Theorie van de Mechanische Stabiliteit

naar het college van prof.dr. J.A. Alblas

Inhoudsopgave

pagina

Deel I: Het stabiliteitsbegrip

Hoofdstuk 0.

- § 1. Inleiding 1

Hoofdstuk 1.

- § 1. Bewegingsstabiliteit volgens Lagrange 2
§ 2. Bewegingsstabiliteit volgens Poisson 3
§ 3. Baanstabiliteit 3
§ 4. Stabiliteit volgens Lyapounov 5
§ 5. Asymptotische stabiliteit 6
§ 6. Stabiliteit van het continue systeem volgens Movchan 7
§ 7. Stabiliteit van het conservatief elastisch evenwicht 14
§ 8. Stabiliteit onder invloed van niet-conservatieve en van niet-stationaire belastingen 18

Deel II: Grondslagen

Hoofdstuk 2.

- § 1.1. De vergelijkingen van Hamilton 19
§ 1.2. De variatievergelijkingen 20
§ 1.3. Definities 21
§ 1.4. Lyapounov's stabiliteitstheorema 22
§ 1.5. Asymptotische stabiliteit 23
§ 1.6. Stabiliteit van het evenwicht volgens Lagrange 24
§ 1.7. Lyapounov's stelling over de instabiliteit 24
§ 1.8. Stabiliteit van de gelineariseerde beweging 26
§ 1.9. Het Routh-Hurwitz criterium 29
§ 2. De invloed van storende krachten op het evenwicht 30
§ 3.1. Het continue elastische systeem, Movchan's methode 34
§ 3.2. De meerdimensionale golfvergelijking, het membraan en de bol 36

| | | |
|--------|---|----|
| § 4.1. | De differentiaalvergelijkingen van de nabuurttoestand | 40 |
| § 4.2. | Toepassing op de balkenvergelijking | 45 |
| § 4.3. | Toepassing op de plaatvergelijking | 47 |
| § 5.1. | De energiemethode | 49 |
| § 5.2. | Toepassing op de plaat | 55 |

Deel III: Toepassingen

Hoofdstuk 3.

| | | |
|--------|---|----|
| § 1.1. | De staaf | 58 |
| § 1.2. | Het post-buckling gedrag | 59 |
| § 1.3. | Stabiliteit van de uitgeknikte vorm | 62 |
| § 2.1. | Knik van de balk onder eigen gewicht | 64 |
| § 2.2. | Knik van de balk met naar beneden toenemend gewicht | 66 |
| § 3.1. | Kromme balken en ringen | 67 |
| § 3.2. | Stabiliteit van een ring onder dead load belasting | 68 |
| § 3.3. | Ring belast door centrale krachten | 70 |
| § 3.4. | Ring onder hydrostatische belasting | 72 |
| § 4. | Kiep van balken | 74 |
| § 5. | Torsieknik | 76 |
| § 6.1. | Knik van platen | 78 |
| § 6.2. | Knik van een opgelegde rechthoekige plaat onder invloed van een gelijkmatige druk | 79 |
| § 6.3. | Knik van een gelijkmatig belaste cirkelvormige plaat | 81 |
| § 7. | Thermo-elastische stabiliteit van platen | 83 |

Hoofdstuk 4.

| | | |
|--------|---|-----|
| § 1.1. | Stabiliteit van de beweging (Lyapounov stellingen) | 91 |
| § 1.2. | Rotatie van een symmetrisch lichaam met één vast punt | 93 |
| § 1.3. | Vrij lichaam dat om een hoofdtraagheidsas roteert | 97 |
| § 2. | Shimmy van wielen | 99 |
| § 3. | Ventiel van een dieselmotor met vloeistofinjectie | 104 |

Hoofdstuk 5.

| | | |
|--------|---|-----|
| § 1. | Circulatorische krachten (voorbeelden) | 108 |
| § 2.1. | Follower force | 109 |
| § 2.2. | Staaft met verdeelde massa onder een follower force | 116 |
| § 3. | Sub- en supertangentiële belasting | 119 |
| § 4. | Flutter | 124 |

Hoofdstuk 6.

| | | |
|--------|---|-----|
| § 1. | Knik onder invloed van niet-stationaire belasting | 129 |
| § 2.1. | Een opgelegde balk onder pulserende belasting | 130 |
| § 2.2. | De vergelijking van Hill | 132 |
| § 3. | Een opgelegde balk onder blokbelasting | 136 |
| § 4. | Stabiliteit van niet-lineaire trillingen | 139 |

Hoofdstuk 7.

| | | |
|--------|--|-----|
| § 1. | Invloed van storende krachten op het evenwicht | 142 |
| § 2.1. | Dissipatieve krachten (volledig) | 145 |
| § 2.2. | Gyroscopische krachten | 145 |
| § 2.3. | Gyroscopische krachten en inwendige dissipatie (volledig), voor $c_1 = c_2 = c$ | 146 |
| § 2.4. | Gyroscopische krachten, inwendige en uitwendige demping, voor $c_1 = c_2 = c$ | 147 |
| § 2.5. | Gyroscopische krachten en inwendige demping met $c_1 < c_2$ | 147 |
| § 2.6. | Gyroscopische krachten, inwendige en uitwendige demping met $c_1 < c_2$ | 147 |

THEORIE VAN DE MECHANISCHE STABILITEIT

DEEL I. INLEIDING STABILITEITSBEGRIJ

Hoofdstuk 0.

§ 1. Inleiding

Het is vrijwel onmogelijk een mathematische definitie van het begrip stabiliteit te geven, welke voor alle gevallen gelijkwaardig toepasbaar is. De definitie moet voldoen aan onze intuïtieve en fysische eis: een systeem is stabiel als kleine storingen het vrijwel niet beïnvloeden, instabiel als kleine storingen grote veranderingen tot stand brengen. De moeilijkheid zit hem nu hierin dat we in diverse gevallen aan "grote veranderingen" ongelijkwaardige betekenissen toekennen. We geven enkele voorbeelden.

Stel we willen de stabiliteit van een mathematische slinger onderzoeken. Indien we de uiterste standen, de amplitude A met een klein bedrag vergroten, zal de slinger praktisch dezelfde slingeringen uitvoeren met een iets andere frequentie en een iets grotere amplitude. Noemt men de beweging stabiel als de baan die de massa beschrijft weinig verandert, dan is bij $A < \frac{\pi}{2}$ de beweging stabiel, noemt men echter de beweging stabiel als voor iedere $t > 0$ snelheid en positie weinig van elkaar afwijken, dan is de beweging instabiel omdat de frequentie, hoe weinig ook gewijzigd, niet exact dezelfde is en dus relatief grote plaatselijke afwijkingen tussen de ongestoorde en de gestoorde baan zullen optreden als t groot genoeg is.

Een ander voorbeeld vinden we in het probleem van het gestrekte membraam. Het ligt voor de hand de evenwichtspositie, onder spanning, stabiel te noemen. Geven we nu een kleine storing aan de rand, dan plant deze zich voort in het inwendige. Het kan nu worden aangetoond, dat op bepaalde tijden en op bepaalde plaatsen de lokale uitwijking niet steeds oneindig klein zal zijn, ook als de initiële storing dat wel was. Een en ander komt fysisch door het optreden van concentraties in enkele punten, bijv. bij een cirkel in het middelpunt. Eist men nu dat oneindig kleine storingen \rightarrow oneindig kleine verplaatsingen voor alle $t > 0$, dan is de evenwichtstoestand van het membraam niet stabiel, geheel in tegenstelling tot onze intuïtie. Staan we echter toe dat oneindig kleine storingen geen oneindig kleine verplaatsingen behoeven te geven om stabiel te zijn, dan zullen we pertinente instabiele gevallen stabiel moeten verklaren.

Een en ander is samen te vatten door te verklaren dat het begrip stabiliteit onstabiel is. We kunnen er echter wat aan doen. We zullen de initiële storing typeren door een norm. We definiëren voor de gestoorde toestand een andere norm. We eisen nu voor stabiliteit dat de twee normen continu afhankelijk zijn. Hierdoor zal het gebeuren dat een toestand, welke stabiel is onder de ene norm, dat niet meer is onder een andere. Voor de keus van de normen laten we ons leiden door de fysische eis. We kunnen het normbegrip bovendien nog willekeurig uitbreiden.

Onder de norm van geringe baansverandering (orbital stability) is de slinger dus stabiel, onder de andere, de zg. Lyapounov-norm, niet. Het membraam is niet stabiel onder de supremum norm, wel onder de kwadratische integratie norm.

Hoofdstuk 1.

§ 1. Bewegingsstabiliteit volgens Lagrange

Beschouw een stelsel bewegende lichamen die zich bevinden binnen een gebied D , op $t = 0$.

Als alle lichamen voor alle $t > 0$ in D blijven, dan heet de beweging van het stelsel stabiel.

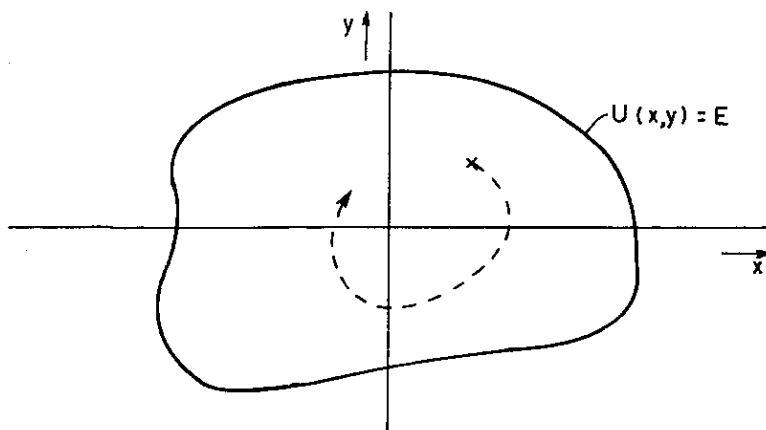
Deze definitie is afkomstig uit de hemelmechanica.

De beweging van de aarde rond de zon is dus stabiel volgens Lagrange.

Beschouwen we de beweging van een massapunt onder invloed van een potentiaal, dan geldt

$$(1) \quad \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E - U(x,y) \geq 0$$

waaruit we zien dat het massapunt niet buiten de kromme $U(x,y) = E$ kan komen en dus is het massapunt stabiel volgens Lagrange.



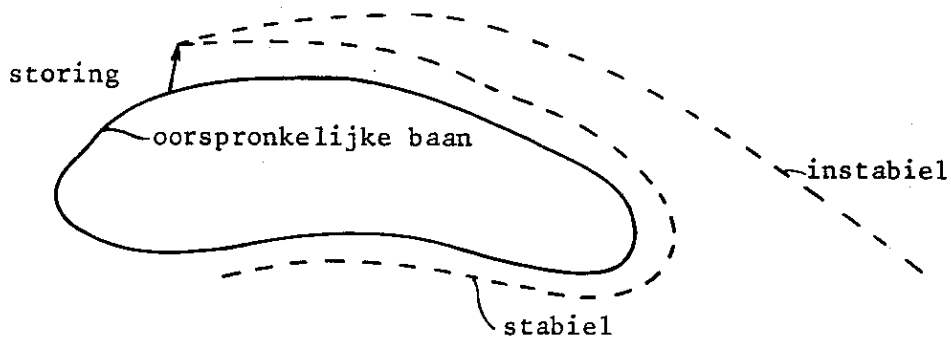
§ 2. Bewegingsstabiliteit volgens Poisson

Beschouw een punt Q in de ruimte en een gebiedje G dat Q bevat. Een beweging heet nu stabiel volgens Poisson als een punt uitgaande van Q na verloop van tijd steeds weer terugkeert in Q .

Bijvoorbeeld: een periodieke beweging.

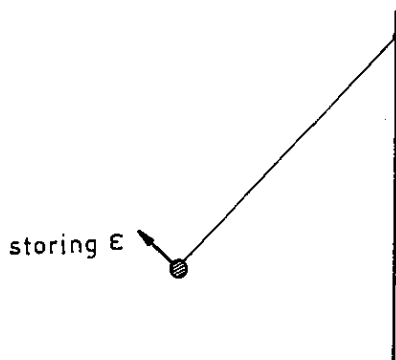
§ 3. Baan stabiliteit (Orbital stability)

Een beweging heet baan stabiel als een kleine storing van de beweging slechts aanleiding geeft tot een kleine verandering van de baan.



Voorbeelden:

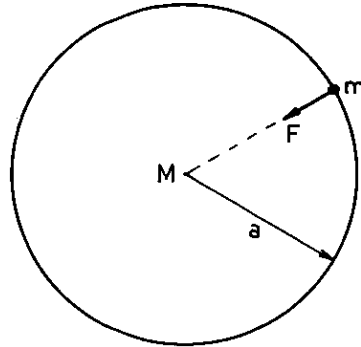
a) De slinger



Bij een kleine storing blijft de baan van de slinger vrijwel gelijk aan de ongestoorde baan, dus de slinger is orbital stabiel.

b) We beschouwen de stabiliteit van de beweging van een massapunt in een cirkelbaan onder invloed van een centrale kracht.

De cirkelstraal is a en de centrale kracht is $F = -m g(r)$.



Uit het evenwicht voor de cirkelbeweging volgt dat

$$(2) \quad \frac{mv^2}{a} = m g(a) .$$

Voor de snelheid van het massapunt geldt dus

$$(3) \quad v^2 = a g(a) .$$

De bewegingsvergelijkingen in radiële resp. tangentiële richting zijn

$$(4) \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -m g(r) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 . \end{cases}$$

De tangentiële vergelijking levert na integratie het behoud van impulsmoment

$$(5) \quad m r^2 \dot{\theta} = \text{const.} = D \text{ (impulsmoment).}$$

Substitutie hiervan in de radiële vergelijking geeft

$$(6) \quad \ddot{r} - \frac{D^2}{m^2 r^3} = -g(r) .$$

Een kleine storing van de baan $r = a + x$ (met $x \ll a$) geeft

$$(7) \quad \ddot{x} - \frac{D^2}{m^2 a^3} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-3} = -g(a+x) .$$

Taylor ontwikkeling geeft nu, omdat $g(a) = \frac{D^2}{m^2 a^3}$,

$$(8) \quad \ddot{x} + \left(\frac{3g(a)}{a} + g'(a)\right)x = 0,$$

met als oplossing

$$(9) \quad x = A \sin \sqrt{p} t + B \cos \sqrt{p} t, \quad p > 0$$

$$(10) \quad x = C e^{\sqrt{p} t} + D e^{-\sqrt{p} t}, \quad p < 0$$

met

$$(11) \quad p = \frac{3g(a)}{a} + g'(a).$$

We zien hieruit dat het massapunt baan stabiel is als

$$(12) \quad \frac{3g(a)}{a} + g'(a) > 0.$$

Voor $g(r) = \frac{c}{r^n}$ is er sprake van baan stabiliteit als $n < 3$.

§ 4. Stabiliteit volgens Lyapounov

Beschouw een stelsel met n graden van vrijheid:

$$q_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

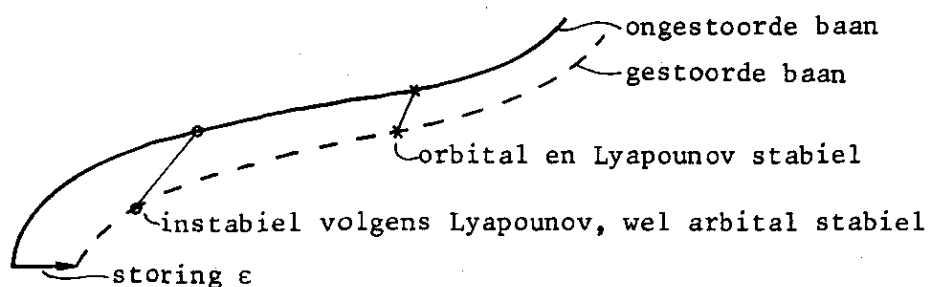
met bijbehorende snelheden $\dot{q}_k(t)$.

Om de gestoorde beweging te beschrijven gebruiken we de coördinaten $y_k(t)$ met snelheden $\dot{y}_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$).

De beweging is stabiel volgens Lyapounov als voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $t > t_0$ geldt

$$(13) \quad \begin{cases} \text{als } |q_k(t_0) - y_k(t_0)| < \delta \text{ en } |\dot{q}_k(t_0) - \dot{y}_k(t_0)| < \delta \\ \text{dan } |q_k(t) - y_k(t)| < \epsilon \text{ en } |\dot{q}_k(t) - \dot{y}_k(t)| < \epsilon \end{cases}$$

Voorbeeld: Een slinger is volgens Lyapounov instabiel, immers een kleine storing verandert de trillingstijd T , waardoor de afstand tussen een overeenkomstig gestoord en ongestoord punt na verloop van tijd groot zal worden.



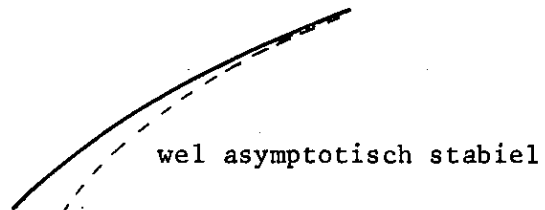
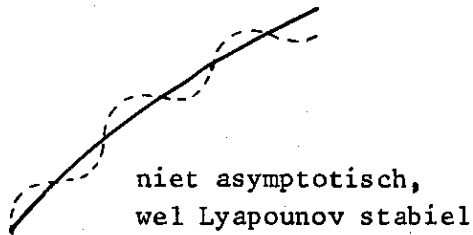
§ 5. Asymptotische stabiliteit

Een stelsel met n graden van vrijheid is asymptotisch stabiel als voor de ongestoorde beweging $q_k(t)$ en de gestoorde beweging $y_k(t)$ geldt

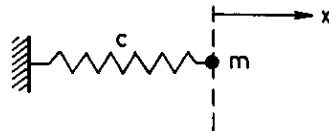
$$(14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_k(t) = q_k(t) \quad \text{en} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}_k(t) = \dot{q}_k(t) .$$

Voorbeelden:

a)



b) Het massa-veer systeem



We onderzoeken de asymptotische stabiliteit van de stand $x = 0$ van het ongedempte en het gedempte massa-veer systeem.

De vergelijking voor het ongedempte systeem is

$$(15) \quad \ddot{x} + k^2 x = 0 , \quad \text{met} \quad k^2 = \frac{c}{m} .$$

De oplossing is

$$(16) \quad x = A \sin kt + B \cos kt .$$

Kiezen we de beginuitwijking en de beginsnelheid klein, dan zullen de uitwijking en de snelheid steeds klein blijven.

Neem

$$x(0) = B < \delta$$

$$\dot{x}(0) = Ak < \delta$$

dan geldt

$$(17) \quad \begin{cases} |x(t)| \leq \sqrt{A^2 + B^2} \leq \delta \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \\ |\dot{x}(t)| \leq k\sqrt{A^2 + B^2} \leq k\delta \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \end{cases}$$

Voor

$$(18) \quad \varepsilon = \max\left(\delta \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}, k\delta \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}\right)$$

geldt dan $|x(t)| < \varepsilon$ en $|\dot{x}(t)| < \varepsilon$, waaruit we zien dat er sprake is van Lyapounov stabiliteit. Uit de oplossing zien we direct dat het ongedempte systeem niet asymptotisch stabiel is.

De vergelijking voor het ongedempte systeem is

$$(19) \quad \ddot{x} + p\dot{x} + k^2x = 0 \quad (p > 0, \text{dempingsfactor})$$

met oplossing

$$(20) \quad \begin{cases} x = Ae^{-\frac{1}{2}pt} \cos(\sqrt{k^2 - \frac{1}{4}p^2} t + B) & \text{voor } k^2 > \frac{1}{4}p^2 \\ x = (A + Bt)e^{-\frac{1}{2}pt} & \text{voor } k^2 = \frac{1}{4}p^2 \\ x = e^{-\frac{1}{2}pt} (Ae^{\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - k^2} t} + Be^{-\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - k^2} t}) & \text{voor } k^2 < \frac{1}{4}p^2 \end{cases}$$

We zien hieruit dat $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$ en $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{x}(t)| = 0$ waaruit blijkt dat het gedempte systeem wel asymptotisch stabiel is.

§ 6. Stabiliteit van het continue systeem volgens Movchan

We beschouwen de ruimte $X(t)$ van lineaire vectorfuncties $\underline{u}(\underline{x}, t)$ die oplossing zijn van elastische systemen met vaste randvoorwaarden, echter verschillende beginvoorwaarden.

Hierbij is $\underline{x} \in B \subset R_3$ en $t \in T$ met T zodanig dat $0 \in T$. We voegen aan $X(0)$ en $X(t)$ de normen $\| \cdot \|_0$ resp. $\| \cdot \|_t$ toe.

Zij \underline{u} de ongestoorde en \underline{w} de gestoorde toestand, dan is \underline{u} Movchan stabiel als uit $\|w - u\|_0 < \delta$ volgt dat $\|w - u\| < \varepsilon$, waarin

$$(21) \quad \|w - u\| := \sup_{t \in T} \|w - u\|_t .$$

We zullen in de praktijk de normen zo kiezen dat ze in directe relatie staan met de energie die aan een toestand wordt toegevoerd.

We spreken van asymptotisch stabiel als $\lim_{t \rightarrow \infty} \|w - u\|_t \rightarrow 0$.

Voorbeelden

a) Beschouw een aan beide zijden ingeklemde snaar



Voor de snaar geldt de volgende DV

$$(22) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

met

$$c^2 = \frac{S}{\rho} \quad \begin{array}{l} S: \text{spanning in de snaar} \\ \rho: \text{massa per lengte eenheid.} \end{array}$$

Voor het gemak kiezen we $c^2 = 1$, zodat

$$(23) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 .$$

De randvoorwaarden zijn $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

We zullen de toestand $u = 0$ op stabiliteit onderzoeken.

Voor de energie van de snaar geldt

$$(24) \quad E = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx ,$$

de som van kinetische en potentiële energie.

Er geldt

$$(25) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] dx .$$

Partiële integratie van de tweede term in de integrand geeft met gebruikmaking van de DV en de randvoorwaarden

$$(26) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \text{en dus} \quad E(t) = E(0) .$$

Voor de normen kiezen we

$$(27) \quad \|u\|_0 = \sup_{x \in B} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) \right| + \sup_{x \in B} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \right| ,$$

de maximale helling en snelheid in de begintoestand

$$(28) \quad \|u\| = \sup_{t \in T} \|u\|_t \quad \text{met} \quad \|u\|_t = \sup_{x \in B} |u(x,t)| .$$

We kiezen nu $\|u\|_0 \leq \delta$, waarmee

$$(29) \quad \sup_{x \in B} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) \right| \leq \delta \quad \text{en} \quad \sup_{x \in B} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \right| \leq \delta .$$

Voor de energie geldt dan

$$(30) \quad E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \right)^2 \right] dx \leq \delta^2 .$$

Voor de uitwijking schrijven we

$$(31) \quad u(x,t) = \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

en dus

$$(32) \quad u^2(x,t) = \left(\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right)^2$$

hetgeen op grond van de ongelijkheid van Schwarz

$$(33) \quad \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$$

te schrijven is als

$$(34) \quad u^2(x,t) \leq \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \int_0^x 1^2 dx \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leq 2E(t) = 2E(0) .$$

Dus

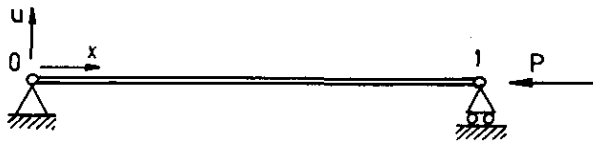
$$(35) \quad |u(x,t)| \leq \sqrt{2E(0)} \leq \delta\sqrt{2}$$

en dus ook

$$(36) \quad \|u\| \leq \epsilon = \delta\sqrt{2} ,$$

waarmee aangetoond is dat de toestand $u = 0$ stabiel is.

- b) We beschouwen een aan beide zijden opgelegde balk en zullen aantonen dat $u = 0$ onder bepaalde voorwaarden een stabiele stand is.



De DV voor de balk is

$$(37) \quad EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

met

EI : buigstijfheid

P : belasting

ρ : massa per lengte eenheid.

Met $\beta = \frac{P}{EI}$ en $\gamma = \frac{\rho}{EI}$ gaat de DV over in

$$(38) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

met randvoorwaarden

$$(39) \quad \begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0 \end{cases}$$

Als normen nemen we

$$(40) \quad \|u\|_0 = \sup_{x \in B} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) \right| + \sup_{x \in B} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right| ,$$

de maximale kromming en snelheid in de begintoestand.

$$(41) \quad \|u\| = \sup_{x \in B} \|u\|_t \quad \text{waarin} \quad \|u\|_t = \sup_{x \in B} |u(x, t)| .$$

De energie van de balk is

$$(42) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx .$$

Door partiële integratie en gebruikmaking van de DV en de randvoorwaarden is op analoge wijze als bij de snaar in te zien dat

$$(43) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \text{en dus} \quad E(t) = E(0) .$$

We beschouwen eerst het volgende probleem:

Bepaal de oplossingen $v(x)$ en de eigenwaarden λ van het eigenwaardenprobleem

$$(44) \quad \frac{d^4 v}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

met randvoorwaarden

$$(45) \quad v(0) = v(1) = \frac{d^2 v}{dx^2}(0) = \frac{d^2 v}{dx^2}(1) = 0 .$$

Afgeleid kan worden (Rayleigh) dat voor alle $v(x)$ die aan de DV en de randvoorwaarden voldoen de volgende ongelijkheid geldt

$$(46) \quad \lambda_0 \leq \frac{\int_0^1 (v'')^2 dx}{\int_0^1 (v')^2 dx} , \quad \lambda_0 \text{ kleinste eigenwaarde.}$$

Bij bovenstaande randwaarden is $\lambda_0 = \pi^2$.

De uitwijking u van de balk voldoet aan de nodige voorwaarden zodat voor de energie geldt

$$\begin{aligned}(47) \quad E(0) = E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(\lambda_0 - \beta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx \\ &\geq \frac{1}{2} (\lambda_0 - \beta) \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} (\lambda_0 - \beta) u^2(x, t)\end{aligned}$$

zodat

$$(48) \quad |u(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2E(0)}{\lambda_0 - \beta}}.$$

Kiezen we $\|u\|_0 \leq \delta$, dus

$$\sup_{x \in B} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) \right| < \delta \quad \text{en} \quad \sup_{x \in B} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right| < \delta,$$

dan geldt

$$\begin{aligned}(49) \quad E(t) = E(0) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) \right)^2 - \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right)^2 \right] dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right)^2 \right] dx \\ &\leq \frac{1}{2} (1 + \gamma) 2\delta^2 = (1 + \gamma) \delta^2,\end{aligned}$$

waaruit volgt

$$(50) \quad \|u\| \leq \sqrt{\frac{2E(0)}{\lambda_0 - \beta}} \leq \delta \sqrt{\frac{2(1 + \gamma)}{\lambda_0 - \beta}} = \varepsilon,$$

waarbij opgemerkt dient dat voor $\beta < \lambda_0$ de uitwijking u te begrenzen is en dat voor $\beta \geq \lambda_0$ de uitwijking groot wordt, er treedt dan knik op.

De bij de afschatting van de energie in het opgelegd-opgelegde balkprobleem gebruikte ongelijkheid

$$(51) \quad \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \geq \lambda \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

bekijken we eens nader.

Zij u een oplossing van de PDV voor de balk die bovendien voldoet aan de randcondities.

Zij w een oplossing van het eigenwaardeprobleem

$$(52) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

met randcondities

$$(53) \quad w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0 .$$

Tweemaal integreren levert met gebruikmaking van de randcondities

$$(54) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda w = 0 .$$

Definieer nu

$$(55) \quad y = \frac{u}{w} .$$

Dan is

$$(56) \quad u' = y'w + w'y$$

en dus

$$(57) \quad \begin{aligned} \int_0^1 (u')^2 dx &= \int_0^1 (y')^2 w^2 dx + \int_0^1 (w')^2 y^2 dx + 2 \int_0^1 yy'ww' dx \\ &= \int_0^1 (y')^2 w^2 dx + \int_0^1 (w')^2 y^2 dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} (y^2)ww' dx . \end{aligned}$$

Partieel integreren van de laatste integraal in het rechterlid geeft

$$(58) \quad \begin{aligned} \int_0^1 (u')^2 dx &= \int_0^1 (y')^2 w^2 dx + \int_0^1 (w')^2 y^2 dx + y^2 ww' \Big|_0^1 - \int_0^1 y^2 ww'' dx - \\ &\quad - \int_0^1 y^2 (w')^2 dx = \int_0^1 (y')^2 w^2 dx + \lambda \int_0^1 y^2 w^2 dx , \end{aligned}$$

op grond van de randcondities voor w en de DV $w'' = -\lambda w$.

Dus

$$(59) \quad \int_0^1 (u')^2 dx = \int_0^1 (y')^2 w^2 dx + \lambda \int_0^1 u^2 dx .$$

Hieruit volgt dat

$$(60) \quad \int_0^1 (u')^2 dx \geq \lambda \int_0^1 u^2 dx .$$

Deze ongelijkheid is kritisch. De gelijkheid treedt op voor $u = f(t)w(x)$.

Verder zien we dat

$$(61) \quad \int_0^1 (u')^2 dx = \int_0^1 u' du = uu' \Big|_0^1 - \int_0^1 uu'' dx = - \int_0^1 uu'' dx$$

op grond van de randcondities voor u .

De ongelijkheid van Schwarz en de reeds afgeleide ongelijkheid leveren dan

$$(62) \quad \left| \int_0^1 (u')^2 dx \right|^2 \leq \int_0^1 u^2 dx \int_0^1 (u'')^2 dx \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (u')^2 dx \int_0^1 (u'')^2 dx ,$$

waaruit volgt

$$(63) \quad \lambda \leq \frac{\int_0^1 (u'')^2 dx}{\int_0^1 (u')^2 dx} .$$

§ 7. Stabiliteit van het conservatief elastisch evenwicht

We kunnen deze stabiliteit op verschillende manieren onderzoeken en wel met

a. de methode van Movchan (zie 6);

b. de methode van de minimum potentiële energie; de te onderzoeken toestand wordt vergeleken met een naburige evenwichtstoestand. Indien er een geïsoleerd minimum bestaat is de toestand stabiel. De verandering van de elastische energie moet groter zijn dan de toegevoegde arbeid

$$(64) \quad \delta W - \delta A_u^{(b)} = 0 ;$$

c. de methode van de naburige neutrale evenwichtstoestanden;

d. de kinetische methode (methode van de kleine trillingen).

We zullen b, c en d toelichten aan de hand van het probleem van de opgelegd-opgelegde balk.

ad b. De elastische energie in de balk bij een uitwijking $u(x)$ is

$$(65) \quad W = \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} (u'')^2 dx .$$

De arbeid verricht door de kracht P die op de balk werkt is

$$(66) \quad A_u^{(b)} = P \Delta \ell = P \left(\ell - \int_0^{\ell} ds \right) = P \left[\ell - \int_0^{\ell} \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} \right] =$$

$$= P \left[\ell - \int_0^{\ell} \sqrt{1 + (u')^2} dx \right] \approx - \frac{1}{2} P \int_0^{\ell} (u')^2 dx$$

waarbij alleen de eerste term van de Taylorreeksontwikkeling meegenomen is.

De potentiële energie is dan

$$(67) \quad U = \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} (u'')^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^{\ell} (u')^2 dx .$$

Voor evenwicht is vereist dat $\delta U = 0$, dus

$$(68) \quad \delta U = EI \int_0^{\ell} u'' \delta u'' dx - P \int_0^{\ell} u' \delta u' dx = 0 .$$

Na partieel integreren van de termen in het rechterlid en rekening houdend met de randvoorwaarden $u(0) = u(\ell) = u''(0) = u''(\ell) = 0$ ontstaat hieruit

$$(69) \quad \delta U = \int_0^{\ell} \delta u (EIu^{(iv)} + Pu'') dx = 0$$

en dus

$$(70) \quad EIu^{(iv)} + Pu'' = 0 .$$

$u = 0$ voldoet aan deze vergelijking en is dus een evenwichtsstand. Over stabiliteit van de evenwichtsstand kunnen we echter geen uitspraak doen.

ad c. We veronderstellen dat de balk een kleine beginuitwijking u heeft en beschouwen het moment dat optreedt in een willekeurige doorsnede volgens de Bernouilli hypothese

$$(71) \quad M = EIu'' .$$

Bovendien is

$$(72) \quad M = - Pu ,$$

zodat

$$(73) \quad EIu'' + Pu = 0 ,$$

met randvoorwaarden

$$(74) \quad u(0) = u(\ell) = 0 .$$

Oplossen van de DV geeft

$$(75) \quad u = A \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + B \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x$$

en uit de randvoorwaarden volgt:

$$(76) \quad B = 0 \quad \text{en} \quad \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = 0 ,$$

zodat de minimale knikwaarde volgt uit

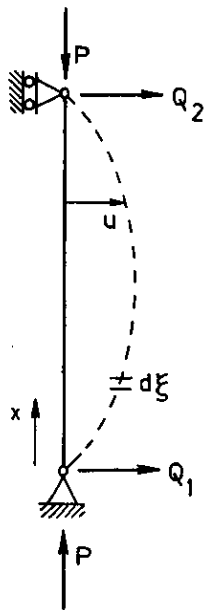
$$(77) \quad P_{\text{klik}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2} , \quad \text{voor } n = 1 .$$

Hieruit volgt dat $u = 0$ stabiel is als

$$(78) \quad P < \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} .$$

Opmerking. Deze methode voor het verkrijgen van de DV voor de balk is in feite inconsistent omdat we de werkende krachten laten aangrijpen op het reeds vervormde lichaam.

ad d.



De krachten Q_1 en Q_2 zijn reactiekrachten in de scharnieren.

We beschouwen het momentenevenwicht ter plaatse x .

Op een massa elementje $\rho d\xi$ ter plaatse ξ werkt de traagheidskracht ter grootte

$$(79) \quad -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, t) d\xi .$$

Voor evenwicht geldt dan ter plaatse x

$$(80) \quad EIu''(x, t) = -Pu(x, t) + Q_1 x - \int_0^x \rho \ddot{u}(\xi, t)(x - \xi) d\xi .$$

Tweemaal differentiëren naar x geeft de bewegingsvergelijking voor de balk

$$(81) \quad EIu^{(iv)} + Pu'' + \rho \ddot{u} = 0 .$$

We proberen deze vergelijking op te lossen met

$$(82) \quad u(x, t) = \sin \frac{m\pi x}{l} (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) , \quad m = 1, 2, \dots .$$

Voor $u \neq 0$ moet ω_m voldoen aan

$$(83) \quad \rho \omega_m^2 = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} EI - P \right) .$$

Willen we inderdaad sinus en cosinus oplossingen hebben, dan moet ω_m reëel zijn voor alle m en dus moet

$$(84) \quad P < \frac{\pi^2 EI}{l^2} .$$

Dan is $u = 0$ een stabiele oplossing.

§ 8.

We zullen verder in het college nog beschouwen

- a. Stabiliteit van de niet conservatieve belasting.
- b. Stabiliteit onder invloed van niet stationaire belastingen. Hierbij is de uitwendige kracht P een functie van de tijd ($P = P(t)$).

DEEL II. GRONDSLAGEN

Hoofdstuk 2.

§ 1.1. De vergelijkingen van Hamilton

De beweging van een conservatief star systeem met n graden van vrijheid wordt beschreven met de Lagrange vergelijkingen:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

met

$$(2) \quad L = L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - U .$$

We nemen verder aan dat de tijd niet expliciet voorkomt: $L = L(q_k, \dot{q}_k)$.

Voer in

$$(3) \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k(q_\ell, \dot{q}_\ell) .$$

Los hieruit \dot{q}_k op:

$$(4) \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k(p_\ell, q_\ell) .$$

Definieer:

$$(5) \quad - H = L - p_k \dot{q}_k .$$

Voor de differentiaal dH geldt

$$\begin{aligned} (6) \quad - dH &= dL - dp_k \dot{q}_k - p_k d\dot{q}_k \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - dp_k \dot{q}_k - p_k d\dot{q}_k \\ &= \dot{p}_k dq_k - \dot{q}_k dp_k . \end{aligned}$$

Dus

$$(7) \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} , \quad \dot{q}_k = + \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) .$$

Dit zijn de Hamilton vergelijkingen. We hebben

$$(8) \quad -H = -H(p_k, q_k) = T - U - 2T = -(T + U)$$

want

$$(9) \quad p_k \dot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T.$$

§ 1.2. De variatievergelijkingen

We beschouwen de gestoorde beweging met

$$(10) \quad p_k + \xi_k \quad \text{en} \quad q_k + \eta_k$$

waarin ξ_k en η_k de storingen zijn.

De Hamilton vergelijkingen zijn dan

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (p_k + \xi_k) = - \frac{\partial H(p_\ell + \xi_\ell, q_\ell + \eta_\ell)}{\partial (q_k + \eta_k)} \\ \frac{d}{dt} (q_k + \eta_k) = + \frac{\partial H(p_\ell + \xi_\ell, q_\ell + \eta_\ell)}{\partial (p_k + \xi_k)}. \end{cases}$$

Ontwikkelen geeft

$$(12) \quad H(p_\ell + \xi_\ell, q_\ell + \eta_\ell) = H(p_\ell, q_\ell) + \frac{\partial H}{\partial p_s} \xi_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} \eta_s + \dots$$

en

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial (p_k + \xi_k)} = \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial (p_k + \xi_k)} = \frac{\partial}{\partial p_k}$$

dus

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{p}_k + \dot{\xi}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_s} \xi_s - \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_s} \eta_s + \dots \\ \dot{q}_k + \dot{\eta}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_s} \xi_s + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_s} \eta_s + \dots \end{cases}$$

en dus geldt op grond van de Hamilton vergelijkingen (7) dat

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_k = - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_s} \xi_s + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_s} \eta_s \right) + \dots \\ \dot{\eta}_k = + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_s} \xi_s + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_s} \eta_s \right) + \dots, \end{cases}$$

de variatievergelijkingen. We schrijven deze vergelijkingen als

$$(16) \quad \dot{x}_k = X_k(x_k) \quad \text{met } (k = 1, 2, \dots, 2n)$$

waarbij

$$(17) \quad X_k(0, 0, \dots, 0) = 0 .$$

Als de X_k de tijd t niet expliciet bevatten noemen we het systeem (16) autonoom.

§ 1.3. Definities

We zullen de Lyapounov stabiliteit van (16) voor $x_k = 0$ bestuderen. Let erop dat x_k staat voor positie en snelheidscoördinaten en dat $x_k = 0$ een oplossing van (16) is.

We beschouwen het systeem (16) voor alle $t \geq t_0$ met t_0 voldoende groot en voor $x_k \in B$ met B het gebied

$$(18) \quad x_k x_k \leq H \quad \text{met } H > 0 \text{ rondom } x_k = 0 ,$$

omdat we geen globale uitspraak over stabiliteit kunnen doen.

Een functie $W(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ is positief definitief als

$$(19) \quad W(x_k) \geq 0 \quad \text{voor alle } x_k \in B$$

$$(20) \quad \text{met alléén } W(0, 0, \dots, 0) = 0 .$$

We onderstellen W continu.

De functie $V(t, x_1, \dots, x_{2n})$ is positief definitief als er een W is zodat

$$(21) \quad V(t, x_k) \geq W(x_k) > 0 \quad \text{voor alle } t ,$$

$$V(t, 0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ en } V \text{ is differentieerbaar voor alle } t \text{ en alle } x \in B .$$

Voorbeeld:

$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos t \\ t(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 x_2 \cos t \end{array} \right\} \text{ zijn positief definitief voor bijv. } t > 2 ;$$

$e^{-t}(x_1^2 + x_2^2)$ is niet positief definitief.

De afgeleide van V is gedefinieerd door

$$(22) \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_k} \dot{x}_k .$$

§ 1.4. Lyapounov's stabiliteitstheorema

De oplossing $x_k = 0$ van (16) is stabiel als er een V bestaat met $V \geq 0$ voor alle $x \in B$ en $t \geq t_0$ en $\dot{V} \leq 0$ of $\dot{V} = 0$ in genoemd gebied.

Bewijs. We moeten bewijzen dat voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat

$$(23) \quad x_k x_k < \epsilon \quad \text{voor alle } t \geq t_0$$

mits

$$(24) \quad x_{k0} x_{k0} < \delta(\epsilon) \quad \text{op } t = 0 .$$

Beschouw de bol $x_k x_k = \epsilon > 0$. Op deze bol is W positief en continu, dus W heeft een exacte benedengrens $\ell > 0$. Beschouw nu de functie: $V(t_0, x_\ell)$, die niet van t afhangt. We zoeken het gebied van x_ℓ , waarin $V(t_0, x) \leq \ell$. Dit is

$$x_k x_k < \delta .$$

Zo'n gebied bestaat omdat $V(t_0, x_\ell) \geq 0$, continu in x_ℓ en $\ell > 0$ is, terwijl V alleen nul wordt in $(0, 0, \dots, 0)$.

Als nu

$$x_{k0} x_{k0} < \delta$$

wordt gekozen blijft $x_k x_k < \epsilon$ zodat de beweging stabiel is volgens Lyapounov. Want er geldt

$$(25) \quad V = V_0 + \int_{t_0}^t V' dt < \ell ,$$

waarin

$$(26) \quad V_0 = V(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots) ,$$

dus

$$(27) \quad W \leq V \leq V_0 < \ell ,$$

voor alle $t \geq t_0$. Maar dan moet ook voor alle $t \geq t_0$: $x_k x_k < \epsilon$ blijven, want zou dit = ϵ worden, dan werd daar $W = \ell$. V heet een Lyapounov functie.

Voorbeeld.

$$(28) \quad \begin{cases} \dot{x} = - (x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2) \\ \dot{y} = - (y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2) \end{cases}$$

met $\alpha, \beta, a, b > 0$ en $a < b$, $\alpha < \beta$.

We hebben hier

$$(29) \quad V = \alpha x^2 + \beta y^2 ,$$

positief definitief. Verder is

$$(30) \quad \dot{V} = - 2(\alpha x^2 + \beta y^2)(1 - ax^2 - by^2) < 0$$

mits (x, y) voldoende klein.

Dus $x = y = 0$ is stabiel.

§ 1.5. Asymptotische stabiliteit

Onder de condities van Lyapounov's theorema is de beweging asymptotisch stabiel als $\dot{V} < 0$.

Bewijs. We moeten aantonen dat

$$(31) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_k x_k \rightarrow 0 .$$

De beweging is stabiel, dus voor $x_{k0} x_{k0} < \delta$ blijft $x_k x_k < \epsilon$. Ga van deze beginconditie uit. Nu is V in het gebied positief, continu dus begrensd. Daar $\dot{V} < 0$ heeft V dus voor $t \rightarrow \infty$ een limiet. Stel

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V = a .$$

We bewijzen dat $a = 0$. Stel dat $a > 0$. Dan zal voor $t > t_1$ bijvoorbeeld $V > \frac{a}{2}$ zijn.

We nemen de bol

$$(33) \quad x_k x_k = \delta_1 .$$

Op deze bol neemt V minstens één waarde aan $\geq \frac{a}{2}$. Op deze bol heeft W een exacte bovengrens $b > 0$. Dus op de bol is $W \geq b$. \dot{V} is negatief definitief, dus alleen nul voor $(0, 0, \dots, 0)$. Op de bol is de kleinste waarde van $|\dot{V}| = c > 0$. Voor $t > t_1$ is dan

$$(34) \quad V = V(t_1, x_1(t_1), \dots) + \int_{t_1}^t \dot{V} dt \leq V_1 - c(t - t_1) .$$

We hebben voor $t > t_1$

$$(35) \quad W \leq V \leq V_1 - c(t - t_1) , \quad (c > 0)$$

dat in het rechterlid negatief wordt voor voldoende grote t .

Maar $W \geq b > 0$ op de bol, dus er is een tegenspraak bereikt en dus moet $a = 0$ zijn.

§ 1.6. Stabiliteit van het evenwicht volgens Lagrange

Een holonoom conservatief systeem is in stabiel evenwicht als de potentiaal U een geïsoleerd minimum heeft.

Bewijs. We hebben $U = U(q_1, \dots, q_n)$ voor het evenwicht. Daar de potentiaal op een constante na bepaald is nemen we

$$(36) \quad U_0 = U(0, 0, \dots, 0) = 0 .$$

Het gegeven luidt U is positief definit. Beschouw de afgeleide. Het systeem is conservatief dus:

$$(37) \quad U + T = \text{const.}$$

of

$$(38) \quad \dot{U} + \dot{T} = 0 .$$

Vanuit het evenwicht kan T alleen maar toenemen, dus

$$(39) \quad \dot{U} = -\dot{T} < 0 .$$

Dan is dus volgens Lagrange het evenwicht stabiel.

§ 1.7. Lyapounov's stelling over de instabiliteit

Als $\dot{V} \leq 0$, definit, terwijl V zelf niet positief semidefinit is, is de beweging labiel (semidefinit betekent dat $V = 0$ kan zijn buiten de oorsprong). We bewijzen deze stelling alleen als V niet expliciet afhangt van t_0 .

Bewijs. We moeten bewijzen dat steeds na voldoende lange tijd

$$x_k x_k > \epsilon , \quad (\epsilon > 0)$$

zal zijn, onverschillig hoe klein δ wordt gekozen, waaraan

$$(40) \quad x_{k0} x_{k0} < \delta$$

voldoet.

Kies x_{k0} zó, dat aan (40) voldaan is en tevens aan

$$(41) \quad V(x_{10}, x_{20}, \dots) < 0 .$$

Zo'n functie bestaat omdat V niet positief definitief is, dus in ieder gebied, hoe klein ook, negatieve waarden aanneemt. Kies deze begintoestand, dan geldt voor willekeurige t

$$(42) \quad V(x_1(t), \dots) < V(x_{10}, \dots) ,$$

of ook

$$(43) \quad -V(x_1(t), \dots) > -V(x_{10}, \dots) > 0 .$$

Daaruit volgt dat er een ℓ bestaat zodat

$$(44) \quad x_k(t) x_k(t) \geq \ell > 0 .$$

Want bestond ℓ niet, dan was niet aan (43) te voldoen voor voldoende kleine ℓ . Daar \dot{V} negatief definitief is, geldt voor de bol (44)

$$(45) \quad \dot{V} \leq -b; \quad b > 0 .$$

Dus

$$(46) \quad V(x_1(t), x_2(t), \dots) = V(x_{10}, x_{20}, \dots) + \int_{t_0}^t \dot{V} dt \leq \\ \leq V(x_{10}, x_{20}, \dots) - b(t - t_0)$$

of

$$(47) \quad -V(x_1(t), x_2(t), \dots) \geq -V(x_{10}, x_{20}, \dots) + b(t - t_0) .$$

$-V$ groeit dus boven alle grenzen. Maar als $x_k x_k < \epsilon$ moet blijven, moet de continue functie $-V$ begrensd zijn. Dus tegenspraak.

§ 1.8. Stabiliteit van de gelineariseerde beweging

Van groot belang voor de mechanica is het onderzoek naar het gedrag van storingsvergelijkingen nadat deze zijn gelineariseerd. Deze methode is niet steeds toelaatbaar, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

Voorbeeld. We onderzoeken de stabiliteit van de evenwichtstoestand van

$$(48) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + ax^3 \\ \dot{y} = x + ay^3 \end{cases} .$$

We vinden uit (48) op eenvoudige wijze

$$(49) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = a(x^4 + y^4) .$$

Als $a > 0$, groeit $(x^2 + y^2)$ voortdurend. Dus de beweging is instabiel.

Als $a < 0$, is de beweging asymptotisch stabiel.

De gelineariseerde vergelijkingen zijn

$$(50) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

met oplossing

$$(51) \quad \begin{cases} x = x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y = x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases} .$$

We zien dat als $|x_0|$ en $|y_0|$ voldoende klein worden genomen, ook $|x|$ en $|y|$ klein blijven. De beweging is dus stabiel volgens Lyapounov, maar niet asymptotisch stabiel.

We bestuderen nu het volgende systeem

$$(52) \quad \dot{x}_k = p_{kl} x_l + X_k(x_m)$$

waarin $p_{kl} x_l$ de lineaire termen zijn en

$$(53) \quad X_k(0, 0, \dots, 0) = 0 .$$

We onderstellen dat in het gebied

$$x_k x_k \leq H$$

de functie X_k te ontwikkelen is beginnende met de tweede macht.

Hoofdstelling van Lyapounov. Als alle wortels λ_k van de lineaire benadering negatief reële delen hebben, is de beweging stabiel en zelfs asymptotisch stabiel onafhankelijk van $X_k(x_m)$.

Bewijs. We definiëren een Lyapounov functie $V(x_1, x_2, \dots)$ door

$$(54) \quad \frac{\partial V}{\partial x_k} p_{k\ell} x_\ell = - (x_m x_m) .$$

We zullen bewijzen dat V bestaat en onder de condities van de stelling positief definitief is. Verder is

$$(55) \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_k} \dot{x}_k = \frac{\partial V}{\partial x_k} (p_{k\ell} x_\ell + X_k) = - (x_m x_m) + \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k .$$

Indien H in (53) voldoende klein is, is de rechterkant in (55) negatief definitief. De beweging is dan volgens de basisstelling van Lyapounov asymptotisch stabiel.

We moeten nu nog bewijzen dat een positief definitieve V bestaat die aan (54) voldoet. Daartoe construeren we zo'n V . We stellen

$$(56) \quad V = \frac{1}{2} a_{k\ell} x_k x_\ell , \quad a_{k\ell} = a_{\ell k}$$

en vinden zo

$$(57) \quad a_{k\ell} x_\ell p_{km} x_m = - (x_n x_n)$$

een betrekking waaraan $a_{k\ell}$ moet voldoen. We zien dat (57) gelijkwaardig is met

$$(58) \quad a_{\ell k} p_{km} = - \delta_{\ell m} .$$

We schrijven dit als

$$(59) \quad \frac{1}{2} a_{\ell k} p_{km} + \frac{1}{2} a_{k\ell} p_{k\ell} = \frac{1}{2} AP + \frac{1}{2} p_{km} a_{k\ell} = \frac{1}{2} AP + \frac{1}{2} P^T A = - I .$$

Dit zijn juist $\frac{1}{2}n(n+1)$ vergelijkingen voor de $\frac{1}{2}n(n+1)$ onbekenden $a_{k\ell}$.

We hebben hiermee de existentie van V bewezen en ook dat $\dot{V} < 0$ volgens (55).

Om aan te tonen dat V positief definitief is bekijken we het lineaire stelsel

$$(60) \quad \dot{x}_k = p_{k\ell} x_\ell .$$

De oplossing is

$$(61) \quad \underline{x}^{(\ell)} = \underline{A}^{(\ell)} e^{\lambda_{\ell} t}$$

waarin λ_{ℓ} de eigenwaarden zijn uit

$$(62) \quad |p_{k\ell} - \delta_{k\ell} \lambda_{\ell}| = 0 .$$

Op grond van de onderstelling is voor alle ℓ

$$(63) \quad \operatorname{Re}(\lambda_{\ell}) < 0 .$$

We hebben ondersteld dat het stelsel (60) niet ontaard is, dus dat de matrix P de rang n heeft.

We weten dus dat de oplossing van (60) asymptotisch stabiel is.

Er is nu een Lyapounov functie V voor dit stelsel, gelijk aan (56).

Indien V niet positief definitief zou zijn, terwijl in ieder geval $\dot{V} < 0$ is, zou (60) instabiel zijn. Hiermee is een tegenspraak bereikt. Dus V is positief definitief:

$$(64) \quad V > 0 .$$

Stelling van Lyapounov voor de instabiliteit. Indien één of meer wortels λ_k van de lineaire benadering een positief reëel deel heeft is de oplossing instabiel onafhankelijk van X_k .

Bewijs. We bepalen weer een Lyapounov functie V, volgens (56), die aan (54) voldoet. V bestaat en $\dot{V} < 0$, volgens (55). We bekijken nu het echte lineaire probleem. Dit is instabiel omdat één der oplossingen $\rightarrow \infty$ voor $t \rightarrow \infty$. Zou V nu positief definitief zijn, dan was dit lineaire probleem dus stabiel. Dit is een tegenspraak. Dus V is niet positief definitief. Dan is volgens de basisstelling van Lyapounov voor de instabiliteit ook het algemene probleem instabiel.

Opmerking. De Lyapounov stellingen geven geen uitsluitel als er één of meer wortels zijn met $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, terwijl alle andere wortels een negatief reëel deel hebben. We spreken van "kritische gevallen" die nader bestudeerd moeten worden.

§ 1.9. Het Routh-Hurwitz criterium

Beschouw de lineaire vergelijkingen

$$(65) \quad \dot{x}_k = p_{k\ell} x_\ell .$$

Stel

$$(66) \quad x_k = A_k e^{\lambda t} .$$

Hiermee vinden we voor A_k een homogeen stelsel vergelijkingen dat alleen oplossingen ongelijk aan de nuloplossing heeft als

$$(67) \quad |p_{k\ell} - \lambda \delta_{k\ell}| = 0 .$$

Dit leidt tot een karakteristieke vergelijking van de n-de graad in λ . Is λ_i een enkelvoudige wortel, dan wordt de oplossing

$$(68) \quad x_k = A_{ki} e^{\lambda_i t} .$$

Is λ_i een meervoudige wortel, dan kan afhankelijk van de rang van de determinant (67) de oplossing van de vorm

$$(69) \quad x_k = f_{ki}(t) e^{\lambda_i t}$$

zijn, waarin f_{ki} een polynoom in t is van lagere graad dan de meervoudigheid van λ_i . De karakteristieke vergelijking heeft de vorm

$$(70) \quad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 .$$

We vormen de determinanten

$$(71) \quad \Delta_1 = a_1 ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} ; \quad \dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & & & & & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1}$$

waarin $a_i = 0$ voor $i > n$.

Nu geldt de stelling van Hurwitz: Opdat alle wortels van (70) negatief reële delen hebben is het nodig en voldoende dat

$$(72) \quad \Delta_1 > 0 ; \Delta_2 > 0 ; \dots \Delta_{n-1} > 0 ; \Delta_n > 0 .$$

Bijvoorbeeld voor de 3e graads vergelijking

$$(73) \quad a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

moet

$$(74) \quad a_1 > 0 ; \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 ; a_3 > 0 .$$

§ 2. De invloed van storende krachten op het evenwicht

a) De invloed van dissipatieve krachten.

We onderstellen de existentie van een dissipatiefunctie R:

$$(75) \quad R = \frac{1}{2} c_{kl} \dot{x}_k \dot{x}_l$$

waarin $c_{kl} = c_{lk}$ constanten zijn. R is positief definit. De gegeneraliseerde krachten X_k worden gedefinieerd als

$$(76) \quad X_k = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k} .$$

Er zijn ook potentiaalkrachten. In normaalcoördinaten worden de bewegingsvergelijkingen:

$$(77) \quad \frac{dx_k}{dt} = \dot{x}_k ; \quad \frac{d\dot{x}_k}{dt} = - \lambda_k x_k - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k} \quad (\text{niet sommeren}).$$

Kelvin bewees de volgende theorema's:

Stelling. Dissipatieve krachten verstoren het evenwicht niet.

Bewijs. 1. Stel het evenwicht is stabiel, dan zijn alle λ_k 's positief.

De energie is

$$(78) \quad H = \frac{1}{2} \sum_k \dot{x}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k x_k^2$$

een positief definitie functie. We hebben

$$(79) \quad \dot{H} = - 2R$$

een negatief definitie functie. Dus het evenwicht is stabiel.

2. Stel nu dat het evenwicht instabiel is.

Indien het een geïsoleerd evenwicht is zijn geen λ_k 's gelijk aan nul, maar minstens één λ_k is negatief.

We beschouwen

$$(80) \quad W = H + \beta \sum_k \lambda_k x_k \dot{x}_k .$$

We hebben

$$(81) \quad \dot{W} = - \left[\sum_{\mu, \nu} (c_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} \beta \lambda_\nu) \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu + \beta \sum_\nu \lambda_\nu^2 x_\nu^2 + \beta \sum_{\mu, \nu} \lambda_\nu c_{\mu\nu} \dot{x}_\mu x_\nu \right].$$

Een nader onderzoek leert dat \dot{W} negatief definitief kan worden gemaakt door geschikte keuze van β . Het blijkt verder dat W zelf ook negatieve waarden kan aannemen. Dus het evenwicht blijft instabiel.

3. Indien het evenwicht niet geïsoleerd is zijn sommige λ_k 's gelijk aan nul. Is er minstens één λ_k negatief dan blijft het evenwicht instabiel.

4. Is het evenwicht niet geïsoleerd, dus zijn sommige λ_k 's gelijk aan nul, terwijl alle andere positief zijn, dan kan toch instabiliteit optreden, als gevolg van de hogere termen. Deze instabiliteit kan door de dissipatieve krachten worden gestabiliseerd.

Stelling. Stabiel evenwicht onder potentiaalkrachten wordt asymptotisch stabiel onder invloed van dissipatieve krachten met volledige dissipatie. (Volledig: de dissipatiefunctie R bevat alle normaal-coördinatensnelheden.)

Bewijs. Beschouw weer

$$(82) \quad W = H + \beta x_k \dot{x}_k .$$

Door geschikte keuze van β is dit steeds positief definitief te maken:

$$(83) \quad \dot{W} = - \left[(c_{k\ell} - \delta_{k\ell} \beta) \dot{x}_k \dot{x}_\ell + \beta \lambda_k x_k^2 + \beta c_{k\ell} \dot{x}_k x_\ell \right] .$$

Voor voldoende kleine β is dit negatief definitief, dus het evenwicht is asymptotisch stabiel.

Het bewijs gaat niet op als R niet alle \dot{x}_k bevat.

b) De invloed van gyroscopische krachten.

Gyroscopische krachten zijn

$$(84) \quad X_k = g_{k\ell} \dot{x}_\ell, \quad (g_{k\ell} = -g_{\ell k}).$$

We zien dat

$$(85) \quad X_k \dot{x}_k = 0.$$

Stelling. Een geïsoleerd stabiel evenwicht blijft stabiel onder toevoeging van gyroscopische en dissipatieve krachten.

Bewijs.

$$(86) \quad \frac{dx_k}{dt} = \dot{x}_k; \quad \frac{d\dot{x}_k}{dt} = -\lambda_k x_k - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k} + X_k.$$

We hebben de energie H

$$(87) \quad H = \frac{1}{2}(\dot{x}_k \dot{x}_k + \lambda_\ell x_\ell x_\ell),$$

positief definit en

$$(88) \quad \dot{H} = -2R$$

negatief definit, als R totaal dissipatief is of nul bij bijzondere snelheden als R niet totaal dissipatief is. Dus de beweging blijft stabiel.

Stelling. Een geïsoleerd instabiel evenwicht blijft instabiel onder toevoeging van gyroscopische en volledig dissipatieve krachten.

Bewijs.

$$(89) \quad W = H + \beta \sum_k \lambda_k \dot{x}_k x_k.$$

\dot{W} is negatief definit als β voldoende klein. Verder wordt W negatief als minstens één λ_k negatief is, indien x_k en \dot{x}_k voldoende klein zijn. Dus instabiel.

Stelling. Een geïsoleerde evenwichtstoestand (alle λ_k 's $\neq 0$), welke instabiel is onder invloed van een oneven aantal krachten (d.i. oneven aantal λ_k 's negatief) kan door gyroscopische krachten niet worden gestabiliseerd.

Bewijs.

$$(90) \quad \ddot{x}_k = -\lambda_k x_k + g_{k\ell} \dot{x}_\ell .$$

De karakteristieke vergelijking is

$$(91) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda^2 & \dots & -g_{1n}\lambda \\ \vdots & & \vdots \\ -g_{n1}\lambda & \dots & \lambda_n + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

We hebben

$$(92) \quad \begin{cases} \Delta(0) = \lambda_1 \dots \lambda_n < 0 , \\ \Delta(\infty) > 0 . \end{cases}$$

Dus $\Delta(\lambda)$ heeft minstens één positieve wortel λ . Dus instabiel.

Gyroscopische stabilisering is onder bepaalde omstandigheden mogelijk. Noodzakelijk is dat de instabiliteitsgraad even is, terwijl de dissipatie niet volledig mag zijn.

Voorbeeld.

$$(93) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\alpha x + g\dot{y} \\ \ddot{y} = -\beta y - g\dot{x} \end{cases}$$

met $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dus instabiel met $g = 0$.

We vinden

$$(94) \quad \Delta(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2(g^2 + \alpha + \beta) + \alpha\beta = 0 .$$

Deze vergelijking heeft zuiver imaginaire wortels, als de vergelijking voor λ^2 alleen negatieve wortels heeft. Voorwaarde daartoe is

$$(95) \quad \begin{cases} g^2 + \alpha + \beta > 0 \\ (g^2 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta > 0 . \end{cases}$$

Als er volledige dissipatie is, is stabilisering door gyroscopische krachten niet mogelijk, zoals reeds boven is aangetoond.

§ 3.1. Het continue elastische systeem, Movchan's methode

De Lyapounov methode voor het onderzoek naar de stabiliteit van een systeem met een eindig aantal graden van vrijheid is logisch en afgesloten. Daarom willen we nagaan of deze methode is uit te breiden tot het continue systeem. Het zal blijken dat hier verschillende moeilijkheden optreden, en dat Lyapounov niet zonder meer kan worden toegepast. Essentieel in Movchan's werk is de invoering van twee normen. Als u de oplossing is en w de storing zijn deze normen

$$(96) \quad \|u - w\|_0 \quad \text{en} \quad \|u - w\| .$$

Ze mogen en kunnen soms gelijk zijn, maar hoeven dat niet.

We voeren bijvoorbeeld in

$$(97) \quad \|u - w\|_0 = \sup_{\underline{x} \in B} |u - w| ,$$

$$(98) \quad \|u - w\| = \sup_{t \in T} \|u - w\|_t$$

en

$$(99) \quad \|u - w\|_0 = \sup_{\underline{x} \in B} \sum_k \left| \frac{\partial(u-w)}{\partial x_k}(\underline{x}, t) \right| + \sup_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial(u-w)}{\partial t}(\underline{x}, t) \right| .$$

Hierin is B het gebied voor de vector \underline{x} en T het tijdsinterval dat ook $t = 0$ moet bevatten.

De voornaamste moeilijkheid ontstaat vooral doordat niet altijd fysisch natuurlijke normen kunnen worden toegepast. Voor willekeurige normen is er geen moeilijkheid. We zullen dit later nader bespreken.

Stabiliteitsdefinitie. Een systeem u is stabiel met betrekking tot de normen $\| \cdot \|_0$ en $\| \cdot \|$ als

a) $\| \cdot \|_t$ continu is voor alle $t \in T$.

b) Bij $\epsilon_1 > 0$ een $\delta_1(\epsilon_1, t_0)$ bestaat zodat

$$(100) \quad \|(v(t_0), t_0)\|_0 < \delta_1 \Rightarrow \|(v(t), t)\|_{t_0} < \epsilon_1 .$$

c) Gegeven $\epsilon_2 > 0$, er bestaat een $\delta_2(\epsilon_2, t_0) > 0$ zodat

$$(101) \quad \|v(t_0), t_0\|_0 < \delta_2 \Rightarrow \|(v(t), t)\| < \epsilon_2 .$$

De conditie c) is de normale conditie. Daar de normen betrekking hebben op de ruimtecoördinaten, zijn ze afhankelijk van t , daarom a). De conditie b) eist continuïteit van $\| \cdot \|_0$ t.o.v. $\| \cdot \|$ in t_0 . Er is automatisch aan voldaan als ze identiek zijn. Als er niet aan voldaan is, is een logisch stabiliteitsbegrip niet denkbaar.

We noemen een systeem instabiel als aan a) en b) wordt voldaan, doch bij iedere $\varepsilon_3 > 0$ een δ_3 kan worden gevonden zodat

$$(102) \quad \|(v(t_0), t_0)\|_0 < \delta_3 \Rightarrow \|(v(t), t)\|_{t_1} > \varepsilon_3$$

voor minstens één $t_1 \in T$.

Stabiliteitstheorema. Beschouw een onderruimte van $B \times T$, dit is \mathcal{R} . Hierin is $\|(v(t), t)\| < R$, met $R > 0$. Het ongestoorde systeem is stabiel als een functionaal $f(v, t)$ bestaat met de eigenschappen

a) $f(v, t)$ neemt niet toe met t .

b) $f(v, t) \geq 0$.

c) Voor iedere ε_4 ($0 < \varepsilon_4 < R$) bestaat $\delta_4(\varepsilon_4) > 0$, zodat $f(v, t) > \delta_4$ geldt als $\|(v, t)\| > \varepsilon_4$.

d) Voor iedere $\varepsilon_5 > 0$ kan een $\delta_5(\varepsilon_5, t_0)$ worden gevonden zodat $f(v(t_0), t_0) < \varepsilon_5$ als $\|(v(t_0), t_0)\|_0 < \delta_5$.

Voor instabiliteit is nodig en voldoende dat de wegen, ongestoord of gestoord eenduidig zijn en

a) $|f(v, t)| < M$, $M > 0$.

b) $f(v, t) > 0$ voor $t > t_0$, $\frac{df}{dt}(v, t) > a$, met $a > 0$.

c) Bij iedere $\delta_7 > 0$ kan $(v(t_0), t_0)$ worden gevonden zodat $\|(v(t_0), t_0)\|_0 < \delta_7$ en $f(v(t_0), t_0) > 0$.

Voorbeelden. Snaar:

$$(103) \quad u_{xx} - u_{tt} = 0$$

$$(104) \quad f \equiv 2E = \int_0^1 [(u_t)^2 + (u_x)^2] dx$$

$$(105) \quad \|u\|_0 = \sup_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\underline{x}, t) \right| + \sup_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, t) \right|$$

$$(106) \quad \|u\| = \sup_{t \in T} \sup_{\underline{x} \in B} |u| .$$

We kunnen dus u voldoende klein krijgen als $\|u\|_0$ voldoende klein is. Maar niet als $|u(\underline{x}, 0)|$ voldoende klein is.

§ 3.2. De meerdimensionale golfvergelijking, het membraan en de bol

Bij eendimensionale structuren als snaar en balk blijft de verplaatsing begrensd als de storingsenergie begrensd is. Het is geen strenge Lyapounov analogie: Uit een oneindig kleine aanvangsstoring volgt niet altijd een oneindig kleine verplaatsing op alle tijden. Dit is fysisch goed te verklaren: Ook als w_0 zeer klein is, kunnen w_{0x} en w_{0t} groot worden, dus $E(0)$ groot. Het ligt dus voor de hand te eisen dat de storingsenergie klein is.

Voor meerdimensionale structuren is de situatie nog ernstiger. Het is nu in het algemeen niet meer mogelijk bij $E(0) \rightarrow 0$ te verwachten dat $w \rightarrow 0$ overal en op alle t . We zullen twee dingen moeten doen: of we eisen meer van de aanvangsstoring of we verklaren de beweging stabiel onder ruimere condities. We bekijken de golfvergelijking in 2 of 3 dimensies:

$$(107) \quad \varphi_{,kk} - \varphi_{,tt} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \text{ of } k = 1, 2$$

met randvoorwaarden

$$(108) \quad \varphi = 0 \text{ op } A_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varphi_{,k} n_k = 0 \text{ op } A_2$$

waarbij

$$(109) \quad A = A_1 + A_2$$

het totale randoppervlak.

In drie dimensies is een oplossing van (107)

$$(110) \quad \varphi = \frac{f(t+r) - f(t-r)}{r}$$

waarin r de afstand tot het middelpunt van de bol is en f driemaal continu differentieerbaar.

In 0 is $\varphi = 2f'(t)$.

We nemen nu

$$(111) \quad \begin{cases} f(r) = \frac{1}{\varepsilon^7 r_0^7} [(r-r_0)^4 (r-r_0-2\varepsilon r_0)^4] & \text{voor } r_0 \leq r \leq r_0 + 2\varepsilon r_0 \\ f(r) = 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Nu wordt $f(r) = O(\varepsilon)$; $f'(r) = O(1)$, voor $\varepsilon \rightarrow 0$. Het blijkt dat de energie $E = O(\varepsilon)$, terwijl voor de tijden

$$(112) \quad r_0 < t < r_0 + 2\varepsilon r_0 \Rightarrow \varphi(0) = O(1) .$$

Dus terwijl de energie oneindig klein wordt, gaat op bepaalden tijden φ niet naar nul.

We merken op dat (111) niet aan de randvoorwaarden voldoet. Dit is echter van geen belang omdat we een oplossing kunnen superponeren die zich netjes gedraagt. Verder zal, als de rand wat verder ligt, de gereflecteerde golf de oorsprong nog niet hebben bereikt op de tijd (112).

We definiëren de energie E die we aangeven met E_1 :

$$(113) \quad E_1 = \frac{1}{2} \int_V \{ (\varphi_{,t})^2 + (\varphi_{,x} \varphi_{,x}) \} dV .$$

Door direct differentiëren blijkt dat

$$(114) \quad \frac{dE_1}{dt} = 0 \Rightarrow E_1 = \text{const.} : E_1(t) = E_1(0) .$$

We definiëren ook een "hogere" energie:

$$(115) \quad E_{m+1} = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \left(\frac{\partial^{m+1} \varphi}{\partial t^{m+1}} \right)^2 + \frac{\partial^{m+1} \varphi}{\partial x_\alpha \partial t^m} \frac{\partial^{m+1} \varphi}{\partial x_\alpha \partial t^m} \right\} dV \quad (m = 0, 1, 2, \dots) .$$

Ook deze E_m 's zijn constant zoals blijkt uit afleiding naar t . We onderstellen dat we de golf functies voldoende mogen differentiëren, dan geldt

$$(116) \quad E_m(t) = E_m(0) .$$

Als we volgens Movchan zouden nemen

$$(117) \quad \begin{cases} \|\varphi\| = \sup |\varphi| \\ \|\varphi\|_0 = E_1 \end{cases}$$

is het systeem dus niet stabiel.

We beschouwen het probleem nader. We voeren in de Greense functie $G(x, \xi)$ zo-
dat $G(x, \xi) - \Gamma(x, \xi)$ is harmonisch in het hele gebied, waarbij

$$(118) \quad \begin{cases} \Gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \log r, & (n = 2) \\ \Gamma(x, \xi) = \frac{1}{4\pi r}, & (n = 3) \end{cases}$$

terwijl $G(x, \xi)$ voldoet aan

$$(119) \quad G = 0 \text{ op } A_1; \quad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} n_\alpha = 0 \text{ op } A_2.$$

De oplossing van (107) en (108) is dan

$$(120) \quad \varphi(x, t) = - \int_V G(x, \xi) \frac{\partial^2 \varphi(\xi, t)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\alpha} dV_\xi.$$

Met de ongelijkheid van Schwarz leiden we af

$$(121) \quad |\varphi(x, t)| \leq \left\{ \int_V G^2(\xi, x) dV_\xi \int_V \varphi_{,kk}^2 dV \right\}^{\frac{1}{2}}$$

omdat G kwadratisch integreerbaar is. We nemen ook aan dat G uniform be-
grensd is:

$$(122) \quad \int_V G^2(\xi, x) dV_\xi \leq K,$$

dan volgt uit (107)

$$(123) \quad |\varphi(x, t)| \leq K \left\{ \int_V \varphi_{,tt}^2 dV \right\}^{\frac{1}{2}} \leq K\sqrt{2E_2}.$$

We zien dat als $E_2 \rightarrow 0$ dan ook

$$(124) \quad |\varphi(x, t)| \rightarrow 0.$$

We moeten dus Movchan's normen nemen

$$(125) \quad \begin{cases} \|\varphi\|_0 = E_2 \\ \|\varphi\| = \sup |\varphi(x, t)| \end{cases}.$$

Ook geldt:

$$(126) \quad \text{als } E_2 \rightarrow 0 \text{ dan } E_1 \rightarrow 0.$$

Want we hebben

$$(127) \quad \int_V \psi_{,\alpha\alpha}^2 dV \geq -\Lambda \int_V \psi_{,\alpha} \psi_{,\alpha} dV \geq \Lambda^2 \int_V \psi^2 dV ,$$

waarin $\psi = 0$ op A_1 , $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ op A_2 en Λ is negatief en de grootste eigenwaarde van het systeem

$$(128) \quad \Psi_{,kk} - \lambda\Psi = 0 ; \quad \Psi = 0 \text{ op } A_1 ; \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 \text{ op } A_2 .$$

Bewijs. We stellen

$$(129) \quad \psi = \eta\Psi$$

waarin $\Psi \neq 0$ in V en op A_2 . Dan wordt

$$(130) \quad \int_V \psi_{,k} \psi_{,k} dV = \int_V (\eta_{,k} \eta_{,k} \Psi^2 + 2\eta_{,k} \Psi \eta_{,k} \Psi + \eta^2 \Psi_{,k} \Psi_{,k}) dV = \\ = \int_V (\eta_{,k} \eta_{,k} \Psi^2 - \eta^2 \Psi \Psi_{,kk}) dV ,$$

dus

$$(131) \quad \int_V \psi_{,k} \psi_{,k} dV \geq -\lambda \int_V \eta^2 \Psi^2 dV = -\lambda \int_V \psi^2 dV ,$$

daarmee is het tweede deel van (127) bewezen. We hebben voorts

$$(132) \quad \int_V \psi_{,k} \psi_{,k} dV = \int_A \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA - \int_V \psi \Delta\psi dV = - \int_V \psi \psi_{,kk} dV .$$

Met de Schwarz ongelijkheid wordt dan

$$(133) \quad \left| \int_V \psi_{,k} \psi_{,k} dV \right| \leq \left\{ \int_V \psi^2 dV \int_V \psi_{,kk}^2 dV \right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

hetgeen volgens (131) kleiner is dan

$$(134) \quad \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \left(\int_V \psi_{,k} \psi_{,k} dV \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_V \psi_{,kk}^2 dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

dus

$$(135) \quad \int_V \psi^2_{,kk} dV \geq |\lambda| \int_V \psi_{,k} \psi_{,k} dV .$$

Let op dat in (131) λ de algebraïsch grootste eigenwaarde wordt genomen. λ is negatief. Dus

$$(136) \quad \int_V \psi^2_{,kk} dV \geq -\Lambda \int_V \psi_{,k} \psi_{,k} dV \geq \Lambda^2 \int_V \psi^2 dV ,$$

of

$$(137) \quad \int_V \psi^2_{,tt} dV \geq -\Lambda \int_V \psi_{,k} \psi_{,k} dV \geq \Lambda^2 \int_V \psi^2 dV$$

als ψ aan de golfvergelijking voldoet.

Iedere $\frac{\partial^m \psi}{\partial t^m}$ voldoet aan de golfvergelijking. Dus geldt voor willekeurige m

(137). Daaruit volgt

$$(138) \quad E_{m+1} \geq |\Lambda| E_m .$$

Op analoge wijze tonen we aan dat

$$(139) \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} (x,t) \right| \rightarrow 0 \quad \text{als } E_3 \rightarrow 0$$

en dat

$$(140) \quad \left| \psi_{,x} (x,t) \right| \rightarrow 0 \quad \text{als } E_3 \rightarrow 0 .$$

§ 4.1. De differentiaalvergelijkingen van de nabuurstoestand

We beschouwen drie toestanden van het lichaam: de ongedeformeerde met coördinaten \underline{x} , de eindig gedeformeerde met coördinaten $\underline{\xi}$ en daarover gesuperponeerd een extra oneindig kleine deformatie getypeerd door \underline{x} . De toestand $\underline{\xi}$ heet de voorspanningstoestand of de nultoestand en de verplaatsing van $\underline{\xi} \rightarrow \underline{x}$ heet \underline{u} :

$$(141) \quad \underline{u} = \underline{x} - \underline{\xi} .$$

Het oneindig kleine karakter van de extra deformatie wordt getypeerd door

$$(142) \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \right| \ll 1 .$$

In de te ontwikkelen theorie verwaarlozen we alle hogere machten van u_i en $u_{i,j}$. We mogen daarom differentiatie naar ξ_j vervangen door differentiatie naar x_j .

De nultoestand is een bekende toestand. De deformatiegradiënt in deze toestand $F_{i\alpha}^0$ is gedefinieerd door

$$(143) \quad F_{i\alpha}^0 = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} = \xi_{i,\alpha}.$$

De deformatiegradiënt in de x-toestand is

$$(144) \quad F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} = x_{i,\alpha}.$$

Het verschil noemen we δF :

$$(145) \quad \delta F_{i\alpha} = F_{i\alpha} - F_{i\alpha}^0 = (x_i - \xi_i)_{,\alpha} = u_{i,\alpha} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial X_\alpha} = H_{ij} F_{j\alpha}^0$$

waarin

$$(146) \quad H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = u_{i,k} (\delta_{jk} + u_{k,j}) \approx u_{i,j}.$$

Dus:

$$(147) \quad \delta F_{i\alpha} = u_{i,j} F_{j\alpha}^0.$$

Voor de Cauchy spanning in een elastisch materiaal geldt

$$(148) \quad T_{ij} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} x_{i,\alpha} x_{j,\beta}$$

waarin ψ de vrije energie en ρ de dichtheid is. We noemen ρ_0 de dichtheid in de ξ -toestand. Dan geldt

$$(149) \quad \rho = \rho_0 (1 - u_{k,k})$$

voor de dichtheid in de x-toestand.

Verder is

$$(150) \quad x_{i,\alpha} = (\xi_i + u_i)_{,\alpha} = \xi_{i,\alpha} + u_{i,j} \xi_{j,\alpha}.$$

We ontwikkelen $\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}}$ in een Taylorreeks om de nultoestand. Dan is

$$(151) \quad \frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}}\right)^0 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}}\right)^0 \delta C_{\gamma\delta} + \dots$$

waarbij

$$(152) \quad \begin{aligned} \delta C_{\gamma\delta} &= C_{\gamma\delta} - C_{\gamma\delta}^0 = x_{i,\gamma} x_{i,\delta} - \xi_{i,\gamma} \xi_{i,\delta} = \\ &= (\xi_{i,\gamma} + u_{i,j} \xi_{j,\gamma}) (\xi_{i,\delta} + u_{i,k} \xi_{k,\delta}) - \xi_{i,\gamma} \xi_{i,\delta} = \\ &= u_{i,j} \xi_{i,\gamma} \xi_{j,\delta} + u_{i,j} \xi_{i,\delta} \xi_{j,\gamma} + \dots \end{aligned}$$

Daaruit ontstaat in de lineaire benadering

$$(153) \quad \frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}}\right)^0 + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}}\right)^0 u_{i,j} \xi_{i,\gamma} \xi_{j,\delta}.$$

We substitueren een en ander in (148) en ontwikkelen:

$$(154) \quad T_{ij} = T_{ij}^0 - T_{ij}^0 u_{k,k} + T_{kj}^0 u_{i,k} + T_{ik}^0 u_{j,k} + d_{ijkl} u_{k,\ell}$$

waarin

$$(155) \quad T_{ij}^0 = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}}\right)^0 \xi_{i,\alpha} \xi_{j,\beta}$$

de Cauchy spanning in de nultoestand is en

$$(156) \quad d_{ijkl} = d_{klij} = d_{jikl} = d_{ijlk} = 4\rho^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}}\right)^0 \xi_{i,\alpha} \xi_{j,\beta} \xi_{k,\gamma} \xi_{\ell,\delta}$$

de elasticiteitsconstanten, die onafhankelijk zijn van de voorspanningstoestand.

We schrijven nu de bewegingsvergelijkingen op. In de nultoestand geldt

$$(157) \quad \frac{\partial T_{ij}^0}{\partial \xi_j} + \rho_0 b_i^0 = \rho_0 \ddot{\xi}_i.$$

Om een bewegingsvergelijking voor T_{ij} te krijgen voeren we een eerste Piola-Kirchhoff spanning in door

$$(158) \quad \hat{T}_{ij} = \bar{J} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} T_{ki}.$$

Deze spanning is betrokken op een oppervlak in de nultoestand. \bar{J} is gedefinieerd door

$$(159) \quad \bar{J} = \det H = 1 + u_{k,k} + \dots$$

Voor \hat{T}_{ij} geldt

$$(160) \quad \frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial \xi_j} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{x}_i$$

In (157) en (160) zijn b_i^0 en b_i de componenten van de volumekracht, resp. in de nultoestand en de eindtoestand.

We trekken (157) van (160) af en krijgen

$$(161) \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\hat{T}_{ij} - T_{ij}^0) + \rho_0 (b_i - b_i^{(0)}) = \rho_0 \ddot{u}_i$$

We bekijken het verschil $\hat{T}_{ij} - T_{ij}^0$. We vinden uit (158)

$$(162) \quad \hat{T}_{ij} = T_{ij} + T_{ij} u_{k,k} - T_{ki} u_{j,k} \dots$$

Met de definitie

$$(163) \quad \delta T_{ij} = T_{ij} - T_{ij}^0$$

wordt

$$(164) \quad \hat{T}_{ij} - T_{ij}^0 = \delta T_{ij} + T_{ij} u_{k,k} - T_{ki} u_{j,k} \dots$$

In (164) mogen we zonder inconsistent te zijn zetten

$$(165) \quad \hat{T}_{ij} - T_{ij}^0 = \delta T_{ij} + T_{ij}^0 u_{k,k} - T_{ki}^0 u_{j,k}$$

Het is ook consistent in (161) $\frac{\partial}{\partial \xi_k}$ te vervangen door $\frac{\partial}{\partial x_k}$, dus deze vergelijking gaat over in

$$(166) \quad (\delta T_{ij})_{,j} + (T_{ij}^0 u_{k,k})_{,j} - (T_{ki}^0 u_{j,k})_{,j} + \rho_0 (b_i - b_i^0) = \rho_0 \ddot{u}_i$$

We voeren de differentiaties uit. Er ontstaat

$$(167) \quad \delta T_{ij,j} + T_{ij,j}^0 u_{k,k} + T_{ij}^0 u_{k,kj} - T_{ki,j}^0 u_{j,k} - T_{ki}^0 u_{j,kj} + \rho_0 (b_i - b_i^0) = \rho_0 \ddot{u}_i$$

Nu is

$$(168) \quad T_{ij}^0 u_{k,kj} = T_{ki}^0 u_{j,kj}$$

en

$$(169) \quad T_{ij,j}^0 = -\rho_0 b_i^0 + \rho_0 \ddot{\xi}_i.$$

Met deze vermenigvuldigingen wordt (167)

$$(170) \quad \delta T_{ij,j}^0 - T_{ki,j}^0 u_{j,k} + \rho_0 [b_i - b_i^0 (1 + u_{k,k})] = \rho_0 \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{\xi}_i.$$

We voeren nu (154) in (170) in. Dan ontstaat

$$(171) \quad (-T_{ij}^0 u_{k,k} + T_{kj}^0 u_{i,k} + T_{ik}^0 u_{j,k} + d_{ijkl} u_{k,l})_{,j} - T_{ki,j}^0 u_{j,k} + \rho_0 (b_i - b_i^0 (1 + u_{k,k})) = \rho_0 \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{\xi}_i.$$

Dit wordt

$$(172) \quad -T_{ij,j}^0 u_{k,k} - T_{ij}^0 u_{k,kj} + T_{kj,j}^0 u_{i,k} + T_{kj}^0 u_{i,kj} + T_{ik}^0 u_{j,kj} + (d_{ijkl})_{,j} u_{k,l} + d_{ijkl} u_{k,lj} + \rho_0 [b_i - b_i^0 (1 + u_{k,k})] = \rho_0 \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{\xi}_i.$$

We vullen weer in (169) in. Er ontstaat

$$(173) \quad -u_{k,k} (\rho_0 \ddot{\xi}_i) + u_{i,k} (-\rho_0 b_k^0 + \rho_0 \ddot{\xi}_k) + T_{kj}^0 u_{i,kj} + (d_{ijkl})_{,j} u_{k,l} + d_{ijkl} u_{k,kj} + \rho_0 (b_i - b_i^0) = \rho_0 \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{\xi}_i.$$

De definitieve vorm wordt:

$$(174) \quad (d_{ijkl})_{,j} u_{k,l} + d_{ijkl} u_{k,kj} + T_{kj}^0 u_{i,kj} + \rho_0 [b_i - b_i^0 - b_k^0 u_{i,k}] = \rho_0 \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{\xi}_i (1 - u_{k,k}) - \rho_0 \ddot{\xi}_k u_{i,k}.$$

Deze vergelijkingen vereenvoudigen enorm als we aannemen, dat de nultoestand homogeen is: d_{ijkl} is constant en statisch: $\ddot{\xi} = 0$. Dan wordt (174):

$$(175) \quad d_{ijkl} u_{k,kj} + T_{kj}^0 u_{i,kj} + \rho_0 [b_i - b_i^0 - b_k^0 u_{i,k}] = \rho_0 \ddot{u}_i.$$

We kunnen de stabiliteit van de nultoestand onderzoeken met behulp van (175). Er is echter geen stelling gelijkwaardig met die van Lyapounov die

iets zegt over de stabiliteit van het niet-lineaire probleem in verband met die van het gelineariseerde. Dus theoretisch kan (175) een stabiele oplossing geven terwijl de nultoestand dat niet is. Dit is fysisch echter onwaarschijnlijk.

We onderzoeken nu de randvoorwaarden. Voor de spanning in de x -toestand geldt

$$(176) \quad t_i = \hat{T}_{ij} n_j^0$$

en voor de spanning in de ξ -toestand

$$(177) \quad t_i^0 = T_{ij}^0 n_j^0 .$$

We trekken (177) en (176) van elkaar af. Er ontstaat

$$\begin{aligned} (178) \quad \delta t_i &= t_i - t_i^0 = (\hat{T}_{ij} - T_{ij}^0) n_j^0 = \\ &= (\delta T_{ij} + T_{ij} u_{k,k} - T_{ki} u_{j,k}) n_j^0 = \\ &= (-T_{ij} u_{k,k} + T_{kj} u_{i,k} + T_{ik} u_{j,k} + T_{ij} u_{k,k} - T_{ki} u_{j,k}) n_j^0 \approx \\ &\approx T_{kj}^0 u_{i,k} n_j^0 = t_k^0 u_{i,k} . \end{aligned}$$

§ 4.2. Toepassing op de balkenvergelijking

We leggen de balk in de z -richting en nemen een beweging aan in het x - z vlak. Dan zijn alleen t_{xz} en $t_{zz} \neq 0$. We definiëren

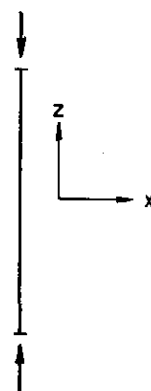
$$(179) \quad M_y = - \int_S x t_{zz} dS$$

en

$$(180) \quad Q_x = \int_S t_{xz} dS .$$

Voor het evenwichtsgeval zonder belastingkrachten gelden

$$(181) \quad \begin{cases} \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = 0 . \end{cases}$$



Uit de eerste vergelijking van (181) volgt

$$(182) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial z} = 0$$

en de tweede levert

$$(183) \quad \int_S x \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} dS + \int_S x \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} dS = |xt_{xz}|_R - \int_S t_{xz} dS + \frac{d}{dz} M_y =$$

$$= - Q_x - \frac{dM_y}{dz} = 0 .$$

Uit (182) en (183) volgt

$$(184) \quad \frac{d^2 M_y}{dz^2} = 0 .$$

Dit geldt algemeen. We beschouwen nu de overgang van de nultoestand naar de eindtoestand. Dan is

$$(185) \quad M_y + \delta M_y = - \int_S xt_{zz} dS = - \int_S (\xi + u)(t_{zz}^0 + \delta t_{zz}) dS =$$

$$= - \int_S \xi t_{zz}^0 dS - \int_S ut_{zz}^0 dS - \int_S \xi \delta t_{zz} dS .$$

Hieruit volgt: $M_y = 0$

$$(186) \quad \delta M_y = -u \int_S t_{zz}^0 dS - \int_S \xi \delta t_{zz} dS .$$

Dit wordt met (154)

$$(187) \quad \delta M_y = -u \int_S t_{zz}^0 dS - \int_S \xi [t_{33}^0 u_{k,k} + t_{k3}^0 u_{3,k} + t_{3k}^0 u_{3,k} + d_{33kl} u_{k,l}] dS .$$

We nemen nu een constante druk, zodat

$$(188) \quad - \int_S t_{zz}^0 dS = P .$$

We onderstellen Bernouilli's hypothese:

$$(189) \quad w = - \xi \frac{\partial u}{\partial z} , \quad v = 0 , \quad u = f(z) .$$

We vinden

$$(190) \quad \delta M_y = Pu + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} [d_{3333} I + 3t_{33}^0 I]$$

$$(191) \quad \delta M_y = Pu + EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 3P \frac{I}{S} \frac{d^2 u}{dz^2} .$$

Daar

$$(192) \quad \frac{P}{S} = t_{33}^0 = E \epsilon_z , \quad (\epsilon_z \ll 1)$$

is de laatste term in (191) te verwaarlozen. We krijgen dan

$$(193) \quad EI \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 .$$

We hebben deze vergelijking streng en consistent afgeleid.

Indien de balk trilt nemen we als belasting de traagheidskrachten mee en vinden

$$(194) \quad EI u^{(iv)} + Pu'' + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 .$$

§ 4.3. Toepassing op de plaatvergelijking

We leggen de plaat in het x-y vlak en definiëren:

$$(195) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z t_{xx} dz , \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z t_{yy} dz , \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z t_{xy} dz , \\ Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} t_{xz} dz , \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} t_{yz} dz . \end{array} \right.$$

Uit de evenwichtsvergelijkingen

$$(196) \quad t_{ij,j} = 0$$

ontstaat na vermenigvuldiging met z en integratie over de dikte

$$(197) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial y} M_{xy} - Q_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} M_y - Q_y = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = p = t_{zz} \Big|_{\text{boven}}^{\text{beneden}} \end{cases}$$

We elimineren Q_x en Q_y en vinden

$$(198) \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 .$$

Als we stellen

$$(199) \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

vinden we uit de wet van Hooke voor de momenten

$$(200) \quad \begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

waarin D de plaatconstante is:

$$(201) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} .$$

In het geval van de plaat gaan we uit van de definities:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (M_x + \delta M_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (\xi + w) (t_{xx}^0 + \delta t_{xx}) d\xi ,$$

$$(202) \quad \begin{cases} M_y + \delta M_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\xi + w)(t_{yy}^0 + \delta t_{yy}) d\xi, \\ M_{xy} + \delta M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (\xi + w)(t_{xy}^0 + \delta t_{xy}) d\xi. \end{cases}$$

Werken t_{xx}^0 , t_{xy}^0 en t_{yy}^0 in het vlak dan worden

$$(203) \quad M_x = M_y = M_{xy} = 0$$

en

$$(204) \quad \begin{cases} \delta M_x = wh t_{xx}^0 + \int_{-h/2}^{h/2} \xi \delta t_{xx} d\xi, \\ \delta M_y = wh t_{yy}^0 + \int_{-h/2}^{h/2} \xi \delta t_{yy} d\xi, \\ \delta M_{xy} = wh t_{xy}^0 + \int_{-h/2}^{h/2} \xi \delta t_{xy} d\xi. \end{cases}$$

Met de gebruikelijke benaderingen vinden we bij t_{xx}^0 , t_{yy}^0 en t_{xy}^0 constant:

$$(205) \quad D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

waarin N_x , N_y en N_{xy} de integralen zijn van t_{xx}^0 , t_{yy}^0 en t_{xy}^0 over de dikte, positief beschouwd als ze compressief zijn.

§ 5.1. De energiemethode

We behandelen alleen het conservatieve evenwicht en wel bij "dead load", d.w.z. de oppervlakte en volumekrachten veranderen niet tijdens de infinitesimale verplaatsing van $\underline{\xi} \rightarrow \underline{x}$.

De arbeid die door de krachten bij dit proces wordt verricht is

$$(206) \quad W = \int_V \rho b_i u_i dV + \int_S t_i u_i dS,$$

geen $\frac{1}{2}$ omdat het lichaam reeds voorgespannen is en u_i infinitesimaal. We hebben

$$(207) \quad \int_S t_i u_i dS = \int_S t_{ij} n_j u_i dS = \int_V (t_{ij} u_i)_{,j} dV = \\ = \int_V (t_{ij,j} u_i + t_{ij} u_{i,j}) dV .$$

De totale energie bij dit proces is dus op grond van de evenwichtsvergelijkingen

$$(208) \quad W = \int_T t_{ij} u_{i,j} dV = \int_V t_{ij}^0 u_{i,j} dV .$$

We hebben, zie (155):

$$(209) \quad t_{ij}^0 = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} \right)^0 \xi_{i,\alpha} \xi_{j,\beta}$$

en we substitueren dit in (208) en vinden

$$(210) \quad W = 2 \int_V \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} \right)^0 \xi_{i,\alpha} \xi_{j,\beta} u_{i,j} dV = \\ = 2 \int_V \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} \right)^0 \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \xi_j}{\partial X_\beta} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} dV = \\ = 2 \int_V \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} \right)^0 \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} dV .$$

Dit is de verrichte uitwendige arbeid. De potentiële elastische energie verandert ook en neemt toe met

$$(211) \quad \int_V (\Psi' - \Psi) \rho dV$$

als Ψ' de elastische energie is na de extraverplaatsing u_k en Ψ voor.

We mogen in (211) ook ρ_0 zetten.

De voorwaarde voor de stabiliteit van de nultoestand is nu klaarlijkkelijk:

$$(212) \quad \int_V \left[2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} \right)^0 \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} - (\Psi' - \Psi) \right] \rho dV \leq 0 .$$

We ontwikkelen (u_k infinitesimaal)

$$(213) \quad \Psi' - \Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_{\alpha\beta}}\right)^0 \delta C_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}}\right)^0 \delta C_{\alpha\beta} \delta C_{\gamma\delta} + \dots$$

waarin

$$(214) \quad \delta C_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} + \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\beta} \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta}.$$

We substitueren (214) in (213) en krijgen

$$(215) \quad \int_V \rho \, dV \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_{\alpha\beta}}\right)^0 \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}}\right)^0 \delta C_{\alpha\beta} \delta C_{\gamma\delta} \right] > 0,$$

voor alle toelaatbare extra verplaatsingsvelden u_k .

We schrijven nu

$$(216) \quad 2\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_{\alpha\beta}}\right)^0 \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_{\alpha\beta}}\right)^0 \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_\ell} \frac{\partial \xi_\ell}{\partial X_\beta} = \\ = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_{\alpha\beta}}\right)^0 \varepsilon_{k,\alpha} \varepsilon_{\ell,\beta} u_{i,k} u_{i,\ell} = t_{kl}^0 u_{i,k} u_{i,\ell}.$$

Verder is tot op de tweede orde

$$\delta C_{\alpha\beta} \delta C_{\gamma\delta} = (\varepsilon_{i,\alpha} u_{i,\beta} + \varepsilon_{i,\beta} u_{i,\alpha}) (\varepsilon_{k,\gamma} u_{k,\delta} + \varepsilon_{k,\delta} u_{k,\gamma}) = \\ = (\varepsilon_{i,\alpha} u_{i,j} \varepsilon_{j,\beta} + \varepsilon_{i,\beta} u_{i,j} \varepsilon_{j,\alpha}) (\varepsilon_{k,\gamma} u_{k,\ell} \varepsilon_{\ell,\delta} + \varepsilon_{k,\delta} u_{k,\ell} \varepsilon_{\ell,\gamma}) = \\ = u_{i,j} u_{k,\ell} (\varepsilon_{i,\alpha} \varepsilon_{j,\beta} + \varepsilon_{i,\beta} \varepsilon_{j,\alpha}) (\varepsilon_{k,\gamma} \varepsilon_{\ell,\delta} + \varepsilon_{k,\delta} \varepsilon_{\ell,\gamma}).$$

De voorwaarde (215) wordt dan

$$(217) \quad \frac{1}{2} \int_V t_{kl}^0 u_{i,k} u_{i,\ell} \, dV + \int_V \frac{1}{2} \cdot 4 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}}\right)^0 \, dV \cdot \\ \cdot u_{i,j} u_{k,\ell} (\varepsilon_{i,\alpha} \varepsilon_{j,\beta} \varepsilon_{k,\gamma} \varepsilon_{\ell,\delta}) > 0.$$

De nultoestand is stabiel indien aan de ongelijkheid (217) wordt voldaan.

We laten de belasting evenredig aangroeien. Op zeker moment wordt de vorm

(217) nul, dus

$$(218) \quad \int_V t_{kl}^0 u_{i,k} u_{i,l} dV + \int_V 4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}} \right)^0 u_{i,j} u_{k,l} \xi_{i,\alpha} \xi_{j,\beta} \xi_{k,\gamma} \xi_{l,\delta} dV = 0 .$$

Indien dan de hogere termen in de ontwikkeling $\neq 0$ zijn, i.h.b. de derde orde termen, is de grens der stabiliteit van de nultoestand bereikt. We noemen deze toestand de toestand van het neutrale evenwicht. Het is duidelijk dat het voldoende is, dat er minstens één verplaatsingsveld u_k bestaat dat aan (218) voldoet.

We hebben

$$(219) \quad X_{r,\alpha} = \delta_{r\alpha} + v_{r,\alpha} + u_{r,\alpha}$$

als v_r de verplaatsing is van de nultoestand. Het is duidelijk dat we in (219) $u_{r,\alpha}$ mogen verwaarlozen, want

$$(220) \quad \xi_{r,\alpha} = \delta_{r\alpha} + v_{r,\alpha} = x_{r,\alpha}$$

in deze benadering. Dit is dus consistent.

We maken nu additionele veronderstellingen die de theorie niet exact maken, maar meer bewerkingen toelaten:

1. Bij het bereiken der stabiliteit is de deformatie $v_{r,\alpha}$ klein t.o.v. 1, kortom we stellen $v_{r,\alpha} = 0$ t.o.v. $\delta_{r\alpha}$.

2. Op dezelfde grond stellen we

$$(221) \quad \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}} \right)^0 = \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}} \right)_{\underline{X}=0} .$$

3. We passen de wet van Hooke toe op de grondtoestand.

4. Bij praktische berekeningen worden de Kirchhoff-Love hypothesen toegepast,

Dan wordt de voorwaarde voor neutraal evenwicht

$$(222) \quad \int_V dV [t_{kl} u_{i,k} u_{i,l} + (4\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}})_{\underline{X}=0} u_{i,j} u_{k,l}] = 0 .$$

In ieder concreet geval is

$$(223) \quad \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}} \right)_0 = \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}} \right)_{\underline{X}=0}$$

direkt met Hooke te berekenen. De conditie (222) is dus op te stellen. Onder gebruik van de wet van Hooke zijn de grootheden (223) constanten, d.w.z. we verwaarlozen de variaties in de constanten als gevolg van de deformaties. Bij uitwerken wordt (222)

$$(224) \quad \int_V dV [t_{ij} u_{k,i} u_{k,j} + 2G(e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk})^2)] = 0$$

waarin

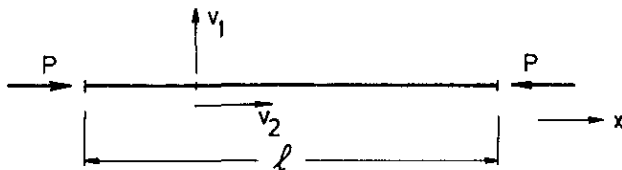
$$(225) \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Let op dat (224) de vorm heeft

$$(226) \quad \int_V dV [t_{kl} u_{i,k} u_{i,l} + 2\Delta U] = 0$$

waarin ΔU de klassieke energiedichtheidsverandering is voor de verplaatsingen u_k . Formule (226) kan worden toegepast.

Voorbeeld. Staaf onder invloed van drukkracht



We drukken de staaf samen langs de x -as. Er zijn twee onafhankelijke verplaatsingsvelden: v_1 een buigingsveld en v_2 extra samendrukking. We hebben

1. v_1 : Het eerste gedeelte van (226) is

$$(227) \quad \int_0^l dx \int_S t_{pq} (v_1')^2 dS = - \int_0^l P (v_1')^2 dx .$$

Voorts geldt voor buiging dat ψ per eenheid van lengte

$$(228) \quad \psi = \frac{1}{2} EI (v_1'')^2 .$$

Dus de bijdrage van v_1 is

$$(229) \quad \int_0^l \{EI(v_1'')^2 - P(v_1')^2\} dx .$$

2. v_2 : Voor de samendrukking geldt

$$(230) \quad \psi = \frac{1}{2} ES(v_2')^2$$

dus

$$(231) \quad \int_0^l [ES(v_2')^2 - P(v_2')^2] dx .$$

Samen:

$$(232) \quad \int_0^l \{EI(v_1'')^2 + ES(v_2')^2 - P(v_1')^2 - P(v_2')^2\} dx \geq 0 .$$

Stabiel >, neutraal = .

Daar $ES \gg P$ wordt voor $v_2 = 0$ aan (232) voldaan, dus

$$(233) \quad \int_0^l \{EI(v_1'')^2 - P(v_1')^2\} dx \geq 0 .$$

De grens wordt bereikt als voor v_1 geldt

$$(234) \quad \delta \int_0^l dx [EI(v_1'')^2 - P(v_1')^2] = 0$$

waaruit volgt

$$(235) \quad (EIv_1'')'' + (Pv_1')' = 0$$

met als randcondities

$$(236) \quad (EIv_1''\delta v' - EIv_1'''\delta v) \Big|_0^l = 0 .$$

Conditie (236) is fysisch triviaal: Er mag geen arbeid aan de randen worden toegevoerd. Vergelijking (235) is de stabiliteitsvergelijking. Voor het geval opgelegd-opgelegd geldt

$$(237) \quad P_{\text{knik}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} .$$

§ 5.2. Toepassing op de plaat

Als bijzonder geval volgt uit deze behandeling ook die van de rechte staaf. De theorie kan generaliseerd worden tot schalen en kromme balken.

We gaan uit van de potentiële energie in een driedimensionaal lichaam. We hebben

$$(238) \quad U = \frac{G}{3} \int_V \left\{ \frac{1+\nu}{1-2\nu} (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2 + \frac{3}{2} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) \right\} dV .$$

In een plaat stellen we $t_{zz} = 0$, dus

$$(239) \quad e_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (e_{xx} + e_{yy}) .$$

Verder worden de schuifspanningen $t_{zx} = t_{zy} = 0$ gesteld, dus

$$(240) \quad e_{zx} = e_{zy} = 0 .$$

Substitutie van (239) en (240) in (238) geeft voor de plaat

$$(241) \quad U = \frac{E'}{4} \int_V \left\{ (1+\nu)(e_{xx} + e_{yy})^2 + (1-\nu)((e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2) \right\} dV$$

met

$$(242) \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{2G}{1-\nu} .$$

We stellen nu

$$(243) \quad \begin{cases} e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} . \end{cases}$$

Merk op dat we de Kirchhoff-Love hypothese hebben gebruikt, lineaire termen in z en dat we van de niet-lineaire termen slechts enkele hebben behouden. De ervaring leert dat deze de belangrijkste orde van grootte hebben. Invullen geeft na integratie over z

$$(244) \quad U = U_{\text{buig}} + U_{\text{vlaksp.}}$$

met

$$(245) \quad U_{\text{buig}} = \frac{E'h^3}{48} \int_S \left\{ (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dS$$

en

$$U_{\text{vlaksp}} = \frac{E'h}{4} \int_S \left\{ (1+\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^2 + (1-\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^2 + (1-\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS .$$

We vinden de gemiddelde vlakspanningen door de integrand van (246) te differentiëren en $w = 0$ te stellen:

$$(247) \quad h \frac{\partial U_{\text{vl.dichth.}}}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} = h t_{xx} = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \{ (2(1+\nu)(\dots) + 2(1-\nu)(\dots)) \} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) .$$

Dus

$$(248) \quad \begin{cases} t_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ t_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ t_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) . \end{cases}$$

We vullen nu (248) weer in in (246) en krijgen voor de wisselwerkingstermen met de w-afgeleiden:

$$(249) \quad U'_{\text{vl}} = \frac{h}{2} \int_S \left\{ t_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + t_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2t_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dS .$$

Variatie van (246) naar u en v levert de evenwichtsvoorwaarden in het vlak op:

$$(250) \quad \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Variatie van (249) en (243) naar w levert

$$(251) \quad \frac{1}{12} E' h^2 \Delta \Delta w - t_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - t_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2t_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - p = 0$$

als de energie nog met $\int_S p w \, dS$ is aangevuld.

De vergelijking (251) is de lineaire vergelijking voor de stabiliteit. Vergelijk dit met (224). De conditie voor evenwicht voor de plaat is volgens de daar afgeleide theorie

$$(252) \quad U_{\text{buiging}} + U'_{\text{vl}} > 0.$$

Op de grens van de stabiliteit wordt dit juist nul.

DEEL III. TOEPASSINGEN

Hoofdstuk 3.

§ 1.1. De staaf

We beschouwen een staaf die belast wordt door een zgn. dead load, een belasting die tijdens de deformatie niet verandert.

De bijbehorende DV is

$$(1) \quad EIw^{iv} + Pw'' = 0 ,$$

met als tweemaal geïntegreerde vorm

$$(2) \quad EIw'' + Pw = Ax + B .$$

In het algemeen zijn dus 4 randcondities vereist om de DV te kunnen oplossen.

De randvoorwaarden heten homogeen als $w = 0$ aan de DV voldoet.

De laagste knikwaarde voor een staaf met lengte ℓ is

$$(3) \quad P_{kn.} = \inf_w \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(w'')^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^{\ell} (w')^2 dx} .$$

Opgemerkt dient te worden dat ℓ de lengte is van de nog net niet uitgebogen, maar wel al samengedrukte staaf.

De klassieke afleiding van de DV is ogenschijnlijk niet correct omdat

$$(4) \quad \begin{cases} EIw^{iv} = O(\epsilon) \\ Pw'' = O(\epsilon^2) \end{cases}$$

hetgeen veroorzaakt wordt doordat de belastende kracht aan het gedeformeerde oppervlak wordt aangebracht hetgeen niet toegestaan is in de lineaire theorie. De rechtvaardiging van de afleiding wordt gegeven in deel II.

Het stabiliteitsprobleem ontstaat doordat de oplossing van de DV niet meer eenduidig is. Naast $w = 0$ zijn er meer oplossingen te vinden. De vraag is nu welke oplossing stabiel is.

§ 1.2. Het post-buckling gedrag

We vragen ons af hoe de staaf zich gedraagt voor een last die groter is dan de kniklast ($P > P_{kn}$). Uit de DV volgt immers dat de amplitude van w onbepaald is. Hoe groot is deze amplitude nu?

Allereerst het algemene geval. Het stelsel is in het conservatieve geval steeds homogeen, dus $w = 0$ is een oplossing. We beschouwen II (175).

Hier is alleen $b_i - b_i^0$ niet verdwijnend met u . Maar als het een conservatief systeem is geldt

$$b_i^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad b_i = \frac{\partial \varphi(\underline{x} + \underline{u})}{\partial x_i},$$

$$\varphi(\underline{x} + \underline{u}) - \varphi(\underline{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} u_k + \dots = b_k u_k.$$

Dus

$$b_i - b_i^0 = b_{k,i} u_k + b_k u_{k,i}$$

evenredig met u_k of $u_{k,i}$.

Hetzelfde geldt voor (178)

$$\delta t_i = t_{k,i}^0 u_{i,k}$$

maar

$$\delta t_i = \bar{t}_{k,i} u_k + \bar{t}_k u_{k,i},$$

met \bar{t}_k de voorgeschreven belasting.

Om inzicht te krijgen in het gedrag van w moeten we de DV een orde verder ontwikkelen. Dan ontstaat een homogene DV die naast de nuloplossing tevens een begrensde andere oplossing toelaat. Dit is het post-buckling probleem.

We illustreren dit aan het probleem van de rechte balk.

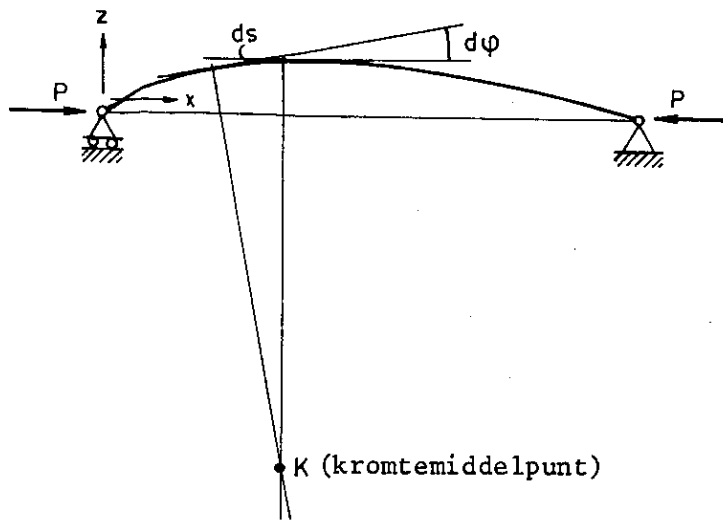
We gaan daartoe uit van de vergelijking

$$(5) \quad M = \frac{EI}{R} = -Pz,$$

waarin R de kromtestraal is, gegeven door

$$(6) \quad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

φ is de hoek tussen raaklijn en x -as en s is de booglengte langs de staaf.



Aangezien voor φ geldt: $\sin \varphi = \frac{dz}{ds}$, vinden we

$$(7) \quad EI \frac{d\varphi}{ds} + Pz = 0 .$$

We stellen $\frac{P}{EI} = k^2$ en differentiëren de DV naar s waarna volgt

$$(8) \quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} + k^2 \sin \varphi = 0 .$$

Deze DV is met behulp van elliptische integralen direct te integreren. Voor praktische berekeningen gebruiken we liever een DV in z .

Met

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \cos \varphi \quad \frac{d\varphi}{ds} = -k^2 z \cos \varphi$$

en

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + O(\varphi^3) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + O\left(\left(\frac{dz}{ds}\right)^3\right)$$

krijgen we

$$(9) \quad \frac{d^2z}{ds^2} + k^2 z = \frac{1}{2}k^2 z \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + O\left(\left(\frac{dz}{ds}\right)^3\right) .$$

Beschouwen we kleine φ 's en dus kleine $\frac{dz}{ds}$ (kleine uitwijkingen uit de eerste kniktoestand) dan kunnen we hogere orde termen verwaarlozen.

Een oplossing van de lineaire homogene vergelijking is

$$(10) \quad z = c \sin \frac{\pi}{\ell} s ,$$

die voldoet aan de randvoorwaarden ($z = z'' = 0$ voor $s = 0$ of ℓ). c is hierin onbepaald. We vullen deze oplossing in, in de niet lineaire DV en krijgen

$$(11) \quad \frac{d^2 z}{ds^2} + k^2 z = \frac{1}{8} k^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} c^3 \left(\sin \frac{\pi}{\ell} s + \sin \frac{3\pi}{\ell} s \right) .$$

Een oplossing hiervan heeft de vorm

$$(12) \quad z = c \sin \frac{\pi}{\ell} s + c_1 \sin \frac{3\pi}{\ell} s .$$

Nu zijn c en c_1 echter wel te bepalen.

We vinden

$$(13) \quad c^2 = 8 \frac{k^2 - \frac{\pi^2}{\ell^2}}{k^2 \frac{\pi^2}{\ell^2}} \quad \text{en} \quad c_1 = \frac{1}{8} \frac{k^2 \frac{\pi^2}{\ell^2}}{k^2 - 9 \frac{\pi^2}{\ell^2}} c^3 .$$

Stellen we $k^2 = (1 + \epsilon) \frac{\pi^2}{\ell^2}$, dan is $c = O(\epsilon)$ en $c_1 = O(\epsilon^{3/2})$, waaruit blijkt dat c_1 klein is t.o.v. c .

Aangezien

$$P_{kn} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad \text{en} \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

zien we ook dat

$$(14) \quad c^2 = \frac{8\ell^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{P_{kn}}{P} \right) , \quad \text{voor } P > P_{kn} .$$

Voor de maximale uitwijking vinden we

$$(15) \quad \frac{z_{\max}}{\ell} = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{P_{kn}}{P}} .$$

Voor $P = 1,01 P_{kn}$ wordt $z_{\max} = 0,1 \ell$,

voor $P = 1,05 P_{kn}$ wordt $z_{\max} = 0,2 \ell$.

De amplitude groeit dus voor $P > P_{kn}$ zeer snel aan. In de praktijk zal dan ook al snel breuk van de staaf optreden.

§ 1.3. Stabiliteit van de uitgeknikte vorm

Voor $P > P_{kn}$ wordt de rechte vorm van de staaf instabiel en de uitgeknikte vorm stabiel. We bewijzen dit als volgt.

Voor $P_{kn} > P$ gaan we uit van formule II(233). Stabiliteit treedt op als

$$(16) \quad \int_0^{\ell} \{EI(w'')^2 - P(w')^2\} dx \geq 0$$

of

$$(17) \quad \int_0^{\ell} [\{EI(w'')^2 - P_{kn}(w')^2\} + (P_{kn} - P)(w')^2] dx \geq 0 .$$

Op grond van de uitdrukking voor P_{kn} is het eerste stuk ≥ 0 , dus de eis die voldoende is voor stabiliteit van de rechte vorm is

$$(18) \quad (P_{kn} - P) \int_0^{\ell} (w')^2 dx \geq 0$$

of

$$(19) \quad P \leq P_{kn} .$$

De rechte vorm is dus nog net stabiel bij de knikwaarde.

Voor $P > P_{kn}$ gaan we uit van een gebogen staaf en bewijzen we dat aan II(217) wordt voldaan voor een verdere doorbuiging.

Het blijkt dat we tot de 4e orde termen moeten ontwikkelen,

$$(20) \quad W^{(iv)} = \int_0^{\ell} \left[-\frac{3}{2} EI(w')^2 (w'')^2 + \frac{1}{8} ES(w')^4 \right] dx \geq 0 .$$

We substitueren de simpele sinusdoorbuiging en vinden

$$(21) \quad W^{(iv)} = \frac{3\pi^4 E}{64\ell^3} \left[-\frac{4\pi^2 I}{\ell^2} + S \right] \geq 0 .$$

Daar $S \gg \frac{I}{\ell^2}$ is dit steeds positief.

Hieruit volgt dat de uitgebogen toestand stabiel is als $P > P_{kn}$.

Deze methode is algemeen, we zullen hem toelichten aan de knikstaaf waarvoor geldt

$$(22) \quad W = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} [EI(w'')^2 - P(w')^2] dx \geq 0 .$$

Voer een extra doorbuiging v in met $v \ll w$.

Voor w nemen we w_{knik} .

Voor de extra-energie bij $P = P_{\text{kn}}$ krijgen we

$$(23) \quad \Delta W = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \{EI[2w''v'' + (v'')^2] - P_{\text{kn}}[2w'v' + (v')^2]\} dx \geq 0 .$$

Stel nu

$$(24) \quad \begin{cases} w = B \sin \frac{k\pi x}{\ell} \\ v = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x}{\ell} \end{cases}$$

welke alle aan de randvoorwaarden voldoen.

Substitutie in ΔW en uitintegreren geeft

$$(25) \quad EI(Bc_k \frac{k^4\pi^4}{\ell^3} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \frac{m^4\pi^4}{2\ell^3}) - P_{\text{kn}}(Bc_k \frac{k^2\pi^2}{\ell} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \frac{m^2\pi^2}{2\ell}) \geq 0$$

of

$$(26) \quad Bc_k k^2 (\frac{k^2\pi^2 EI}{\ell^2} - P_{\text{kn}}) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 m^2 (\frac{m^2\pi^2 EI}{\ell^2} - P_{\text{kn}}) \geq 0 .$$

Nu is

$$(27) \quad P_{\text{kn}} = \frac{k^2\pi^2 EI}{\ell^2} ,$$

dus is aan de laatste uitdrukking voldaan als

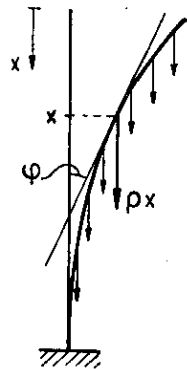
$$m^2 \geq k^2 , \quad m = 1, 2, \dots .$$

Hieraan wordt alleen voldaan voor $k = 1$, dus

$$(28) \quad P_{\text{kn}} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

levert de enige stabiele knikvorm.

§ 2.1. Knik van de balk onder eigen gewicht



We onderstellen een constante lijndichtheid ρ . Dan is het gewicht ter plaatse x gelijk aan

$$(29) \quad G = \rho x .$$

De dwarskracht is dan

$$(30) \quad Q = G \sin \varphi = G \frac{dw}{dx} = \rho x \frac{dw}{dx} ,$$

waarbij φ de hoek is van de raaklijn met de x -as.

Er geldt $M' = Q$ waaruit de DV volgt

$$(31) \quad \frac{d}{dx} (EI \frac{d^2w}{dx^2}) + \rho x \frac{dw}{dx} = 0 .$$

Met EI constant, $p = \frac{dw}{dx}$ en $k = \frac{\rho}{EI}$ gaat de DV over in

$$(32) \quad \frac{d^2p}{dx^2} + kxp = 0 .$$

We stellen $z = ax^{3/2}$, $p = z^n \eta$, dan gaat de DV over in

$$(33) \quad \eta'' + (2n + \frac{1}{3}) \frac{\eta'}{z} + \frac{4}{9} \frac{k}{a^2} \eta + \frac{\eta}{z^2} (n(n-1) + \frac{n}{3}) = 0$$

hetgeen met de keuze $n = \frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{3} \sqrt{k}$ overgaat in

$$(34) \quad \eta'' + \frac{\eta'}{z} + (1 - \frac{1}{9z^2}) \eta = 0 \quad (\text{DV van Bessel})$$

met als oplossing

$$(35) \quad \eta = AJ_{1/3}(z) + BJ_{-1/3}(z)$$

waaruit volgt

$$(36) \quad p = a^{1/3} x^{1/2} (AJ_{1/3}(z) + BJ_{-1/3}(z)) .$$

Voor $z = 0$ moet $\frac{dp}{dz}$ begrensd zijn, want de dwarskracht is nul voor $x = 0$.
Hieruit volgt dat $A = 0$.

Dus

$$(37) \quad p = z^{1/3} BJ_{-1/3}(z) .$$

Nu is

$$(38) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{dp}{dz} \frac{dz}{dx} = -\frac{3}{2} (az)^{2/3} BJ_{2/3}(z)$$

mede op grond van de relatie

$$(39) \quad \frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_{\nu}(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z) .$$

Voor $x = \ell$ moet $p = 0$ zijn, want de staaf is ingeklemd, dus

$$(40) \quad J_{-1/3}(a\ell^{3/2}) = 0 ,$$

waaruit voor de laagste knikwaarde volgt

$$(41) \quad (q\ell)_{kn} = 7,834 \frac{EI}{\rho\ell^2}$$

en voor de kniklengte

$$(42) \quad \ell = 2,799 \sqrt{\frac{EI}{\rho\ell}} .$$

§ 2.2. Knik van de balk met naar beneden toenemend gewicht

Onderstel dat de gewichtsverdeling lineair is:

$$(43) \quad G = \frac{1}{2}cx^2 .$$

Dan geldt met $k = \frac{c}{2EI}$ en $p = \frac{dw}{dx}$

$$(44) \quad EI \frac{d^2p}{dx^2} + kx^2p = 0 .$$

Stel $z = \sqrt{\frac{k}{2}} x^2$ en $p = \eta z^{\frac{1}{2}}$ dan gaat de DV over in

$$(45) \quad \eta'' + \frac{1}{z} \eta' + \left(1 - \frac{1}{16z^2}\right)\eta = 0$$

met oplossing

$$(46) \quad \eta = AJ_{\frac{1}{2}}(z) + BJ_{-\frac{1}{2}}(z)$$

waaruit volgt

$$(47) \quad p = Az^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(z) + Bz^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(z) .$$

Uit $\frac{d^2w}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$ volgt $A = 0$. Dus

$$(48) \quad p = Bz^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(z) .$$

Uit $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} = 0$ volgt

$$(49) \quad J_{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{k}{2}} l^2\right) = 0 .$$

Voor de kniklengte volgt hieruit

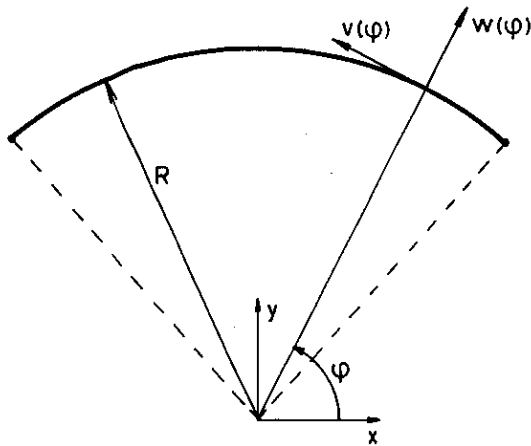
$$(50) \quad l = 3,98 \sqrt{\frac{EI}{\frac{1}{2}cl^2}} ,$$

een aanzienlijk grotere lengte dan bij de constante massaverdeling.

Controleer nog dat bij beide voorbeelden $\frac{d^2w}{dx^2}$ en $\frac{d^3w}{dx^3}$ gelijk zijn aan nul voor $x = 0$ (moment en dwarskracht zijn nul).

§ 3.1. Kromme balken en ringen

We beschouwen alleen cirkelvormige bogen en ringen.



Beschouw een cirkelboog met straal R .

Noem de radiale en tangentiële verplaatsingen $u(\varphi)$ resp. $v(\varphi)$.

De rek is

$$(51) \quad \epsilon_t = \frac{1}{R} (v' + u) \quad (' = \frac{d}{d\varphi}) .$$

De hoekverdraaiing is

$$(52) \quad \frac{1}{R} (u' - v) .$$

We stellen

$$(53) \quad \begin{cases} x = (R+u)\cos \varphi - v \sin \varphi \\ y = (R+u)\sin \varphi + v \cos \varphi . \end{cases}$$

Dan is

$$(54) \quad (x')^2 + (y')^2 = R^2 \left(1 + \frac{2}{R} (u + v') + \dots \right) .$$

Aangezien u en v klein zijn verwaarlozen we de hogere orde termen.

Ook geldt

$$(55) \quad -y'x'' + x'y'' = - (R^2 + 2Ru - Ru'' + 3Rv') + \dots .$$

De kromming wordt dan

$$(56) \quad \frac{x''y' - y''x'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{1}{R} \frac{1 - \frac{u''}{R} + \frac{2u}{R} + \frac{3v'}{R}}{[1 + \frac{2}{R}(u+v')]^{3/2}} = \frac{1}{R} (1 - \frac{u''+u}{R} + \dots) .$$

Voor dunne, zwak gekromde ringen gebruiken we voor het verband tussen het moment M en de kromming de volgende constitutieve hypothese

$$(57) \quad M = EI(\text{kromming} - \frac{1}{R})$$

waaruit volgt

$$(58) \quad M = - \frac{EI}{R^2} (u'' + u) .$$

De energie van een gebogen en gerekte cirkelboog is dan

$$(59) \quad W = \frac{1}{2} \int_S \frac{M^2}{EI} R d\varphi + \frac{1}{2} \int_S EF \epsilon_t^2 R d\varphi \\ = \int_S \left\{ \frac{1}{2} \frac{EI}{R^3} (u'' + u)^2 + \frac{1}{2} \frac{EF}{R} (u + v')^2 \right\} d\varphi .$$

De eerste term is de buigingsenergie, de tweede de rekenergie.

In deel II(226) is afgeleid dat voor een systeem waarin grootte en richting van de belasting niet veranderen tijdens knik, de stand $\underline{u} = \underline{0}$ stabiel is als geldt

$$\int_V [t_{kl} u_{i,k} u_{i,l} + 2\Delta W] dV \geq 0 .$$

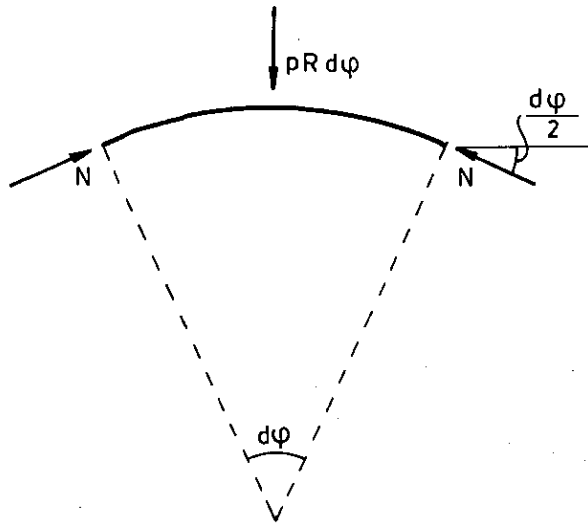
We beschouwen nu de volgende gevallen.

§ 3.2. Stabiliteit van een ring onder een dead load belasting

Beschouw een kromme balk of een ring onder invloed van een gelijkmatig verdeelde belasting gericht op het middelpunt, echter dead load (d.w.z. dat grootte en richting van de krachten niet veranderen tijdens knik).

Het kan dus gebeuren dat na knik de krachten niet meer loodrecht op het oppervlak staan en dat ze niet meer door het middelpunt gaan.

Beschouw een klein element van de ring



Uit evenwicht in verticale richting volgt dat $N = pR$.

Voor $t_{k\ell}$ geldt dus dat alleen $t_{\varphi\varphi} \neq 0$ en wel

$$(60) \quad t_{\varphi\varphi} = -\frac{pR}{D} \quad (D = \text{doorsnede van de ring}).$$

Nu is

$$(61) \quad \frac{1}{2} t_{k\ell} u_{i,k} u_{i,\ell} = \frac{1}{2} t_{22} u_{i,2} u_{i,2} = \frac{1}{2} t_{22} (u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2) = \frac{1}{2} t_{22} (\epsilon_t^2 + w^2)$$

waarin $t_{22} = t_{\varphi\varphi}$ en ϵ_t de rek is, terwijl w de hoekverdraaiing is.

$u_{i,k}$ is de covariante afgeleide naar k . Dus

$$(62) \quad \begin{cases} u_{2,2} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{u_1}{R} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{R} = \frac{1}{R} (v' + u) = \epsilon_t \\ u_{1,2} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) = w \end{cases}$$

Substitutie in de uitdrukking voor stabiliteit levert dat voor stabiliteit moet gelden

$$(63) \quad W_1 = \int_S \left\{ \frac{1}{2} \frac{EI}{R^3} (u'' + u)^2 + \frac{1}{2} \frac{EF}{R} (u + v')^2 - \frac{1}{2} p [(u' - v)^2 + (u + v')^2] \right\} d\varphi \geq 0$$

Met behulp van variatierekening minimaliseren we de functionaal W_1 en vinden dan voor u en v

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{EI}{R^3} (u^{(iv)} + 2u'' + u) + \frac{EF}{R} (u + v') + p[(u'' - v') - (u + v')] = 0 \\ -\frac{EF}{R} (u' + v'') + p[(u' - v) + (v'' + u')] = 0 . \end{cases}$$

De hierbij aan het uiteinde van de boog voor te schrijven randcondities zijn

$$(65) \quad \begin{cases} \text{voor een opgelegde boog : } u = v = M = 0 \text{ of } u = v = u'' = 0 \\ \text{voor een ingeklemde boog: } u = v = u' = 0 . \end{cases}$$

Voor een ring eisen we dat de oplossing periodiek is met periode 2π .

Stellen we in het geval van de ring

$$(66) \quad u = A \sin 2\varphi \quad \text{en} \quad v = B \cos 2\varphi$$

dan vinden we uit de DV voor u en v de laagste knikwaarde

$$(67) \quad p = \frac{4EI}{R^3} \left[1 + O\left(\frac{I}{ER^2}\right) \right] .$$

Hogere knikwaarden vinden we met

$$(68) \quad u = A \sin n\varphi \quad \text{en} \quad v = B \cos n\varphi .$$

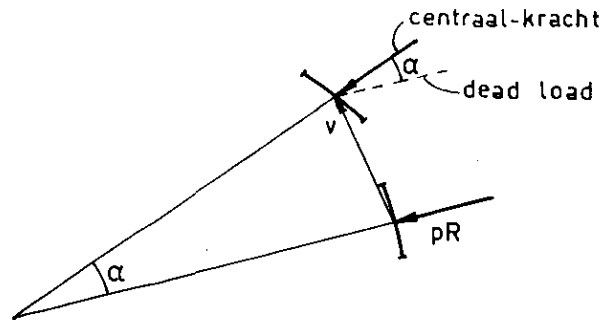
De oplossing $u = A \sin \varphi$ en $v = B \cos \varphi$ levert slechts een starre lichaamsverplaatsing van de ring met eventueel een kleine samendrukking, echter zeker geen knik. Dit is direct te zien aan de uitdrukking voor de kromming:

$$(69) \quad \text{kromming} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{u'' + u}{R} + \dots \right) .$$

Voor bovenstaande oplossing geldt $u'' + u = 0$, dus de kromming blijft $\frac{1}{R}$. Er treedt dan geen knik op.

§ 3.3. Ring belast door centrale krachten (krachten die steeds naar het middelpunt gericht blijven)

Dit probleem is conservatief, maar de kracht verandert van richting tijdens het proces. De stabiliteitsvoorwaarde uit deel II is nu niet direct toepasbaar.



De arbeid als gevolg van de rek en de draaiing van een ring elementje
 - $\frac{1}{2}p(u+v')^2$ resp. - $\frac{1}{2}p(u'-v)^2$ treedt ook hier op. De verplaatsing van het
 elementje is v en de bijbehorende hoek α , dus

$$(70) \quad \alpha = \frac{v}{R} .$$

De component van de kracht loodrecht op de dead load richting is

$$(71) \quad pR \sin \alpha \approx pR\alpha = pv .$$

Deze kracht veroorzaakt een potentiële energie

$$(72) \quad - \frac{1}{2}pv^2 .$$

Voegen we deze term toe dan wordt de stabiliteitsvoorwaarde

$$(73) \quad W_1 = \int_S \left[\frac{1}{2} \frac{EI}{R^3} (u'' + u)^2 + \frac{1}{2} \frac{EF}{R} (u + v')^2 - \frac{1}{2} p \{ (u' - v)^2 + (u + v')^2 - v^2 \} \right] d\varphi \geq 0 .$$

Variatierekening levert weer twee vergelijkingen voor u en v :

$$(74) \quad \begin{cases} \frac{EI}{R^3} (u'' + u) + \frac{EF}{R} (u + v') + p \{ (u'' - v') - (v' + u) \} = 0 \\ - \frac{EF}{R} (u' + v'') + p \{ (u' - v) + (u' + v'') + v \} = 0 . \end{cases}$$

Hieruit volgt op analoge wijze als bij dead load de kritische knikwaarde
 voor de ring

$$(75) \quad p = \frac{9}{2} \frac{EI}{R^3} .$$

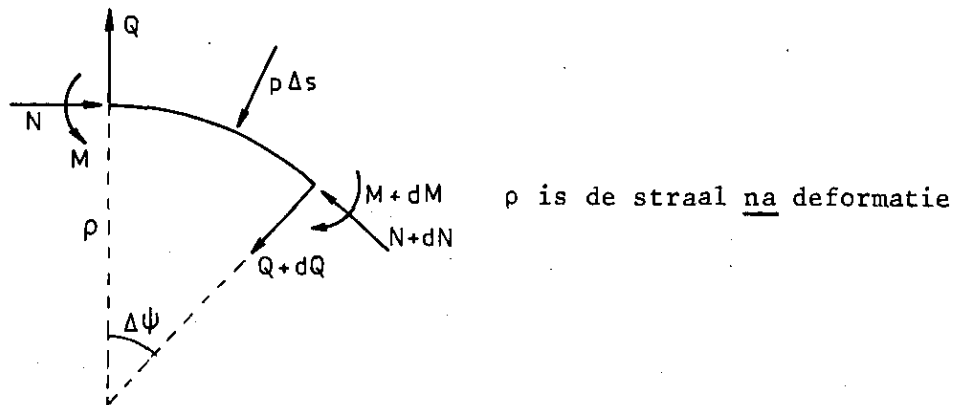
§ 3.4. Ring onder hydrostatische belasting

Het knikken in dit geval is eigenlijk geen conservatief stabiliteitsprobleem. Hoewel bij verandering van het oppervlak ΔS de totale arbeid door de hydrostatische druk verricht

$$(76) \quad \Delta A = p \Delta S$$

slechts van begin- en eindtoestand afhangt is dit alleen maar een globale betrekking, lokaal bestaat er geen potentiaal voor de kracht. We kunnen evenals bij de centrale kracht de arbeidsverandering bij een kleine verplaatsing uitrekenen. Omdat deze methode nogal bewerkelijk is zullen we een andere aanpak gebruiken, die ook in § 3.2 en § 3.3 toepasbaar is.

We bedenken dat de hydrostatische druk constant is en steeds loodrecht op het oppervlak staat. We beschouwen het evenwicht van een gedeformeerd elementje.



Evenwicht in radiale richting geeft

$$(77) \quad Q - p \Delta s - (Q + \Delta Q) + N \frac{\Delta \psi}{2} + (N + \Delta N) \frac{\Delta \psi}{2} = 0 ,$$

in tangentiële richting

$$(78) \quad - Q \frac{\Delta \psi}{2} + N - (N + \Delta N) - (Q + \Delta Q) \frac{\Delta \psi}{2} = 0 .$$

Momentenevenwicht t.o.v. het middelpunt van het element geeft

$$(79) \quad Q \frac{\Delta s}{2} + (Q + \Delta Q) \frac{\Delta s}{2} - M + (M + \Delta M) = 0 .$$

Voor $\Delta \psi \rightarrow 0$ en rekening houdend met de kromming

$$(80) \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds}$$

volgt dan

$$(81) \quad \begin{cases} -Q' - p + N\kappa = 0 \\ -Q\kappa - N' = 0 \\ Q + M' = 0 \end{cases} \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right)$$

Hieruit volgt

$$(82) \quad Q = -M' = -EI\kappa'$$

$$(83) \quad N = \frac{p - EI\kappa''}{\kappa}$$

en dus

$$(84) \quad EI\kappa\kappa' + \frac{p\kappa'}{\kappa} - \frac{EI\kappa'''}{\kappa} + \frac{EI\kappa'\kappa''}{\kappa^2} = 0$$

hetgeen te schrijven is als

$$(85) \quad \kappa\kappa''' - \kappa'\kappa'' + \frac{p}{EI}\kappa' + \kappa^3\kappa' = 0$$

Uitgaande van de formule voor de kromming

$$(86) \quad \kappa = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\frac{d^2u}{d\psi^2} + u}{R} \right)$$

vinden we

$$(87) \quad \kappa' = \frac{d\kappa}{d\psi} \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{R} \left(-\frac{\frac{d^3u}{d\psi^3} + \frac{du}{d\psi}}{R} \right) \frac{d\psi}{ds},$$

of in eerste benadering

$$(88) \quad \kappa' = -\frac{1}{R^3} \left(\frac{d^3u}{d\psi^3} + \frac{du}{d\psi} \right)$$

Op analoge manier zien we dat

$$(89) \quad \kappa'' = -\frac{1}{R^4} \left(\frac{d^4u}{d\psi^4} + \frac{d^2u}{d\psi^2} \right)$$

en

$$(90) \quad \kappa''' = - \frac{1}{R^5} \left(\frac{d^5 u}{d\psi^5} + \frac{d^3 u}{d\psi^3} \right) .$$

Substitutie in de DV geeft na lineariseren

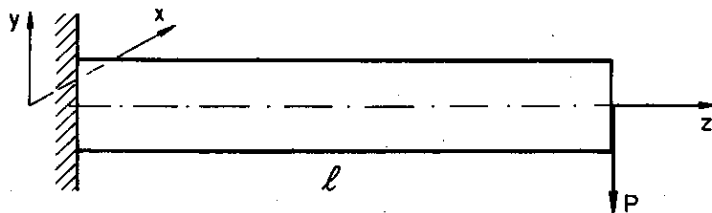
$$(91) \quad \left(\frac{d^5 u}{d\psi^5} + 2 \frac{d^3 u}{d\psi^3} + \frac{du}{d\psi} \right) + \frac{P}{EI} R^3 \left(\frac{d^3 u}{d\psi^3} + \frac{du}{d\psi} \right) = 0$$

waaruit met $u = A \sin 2\psi$ weer de laagste knikwaarde volgt

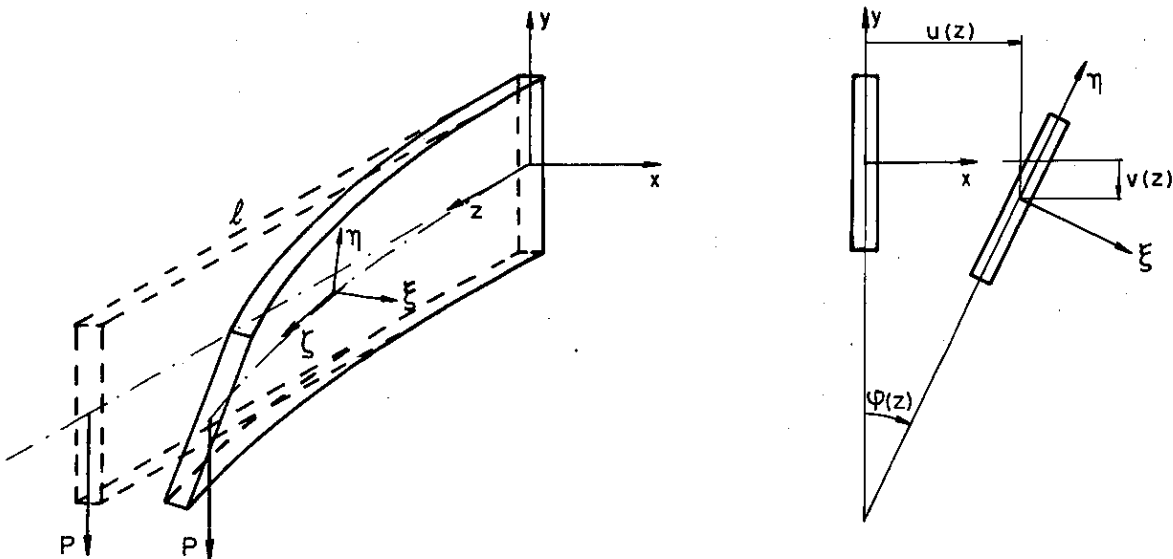
$$(92) \quad p = 3 \frac{EI}{R^3} .$$

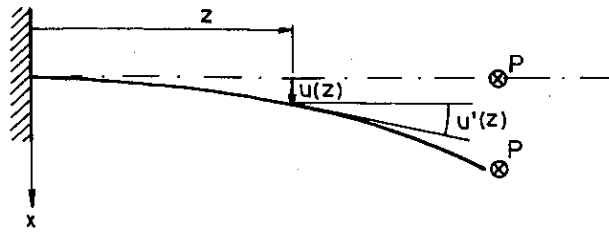
§ 4. Kiep van balken

We bekijken slechts het geval van een smalle rechthoekige doorsnede die kiept onder invloed van een eindlast.



Als de kracht P klein genoeg is buigt de balk alleen in het yz-vlak.
Als P groot wordt knikt de balk in het xz-vlak.





We bekijken de balk in een weinig uitgeknikte toestand (u , v en φ klein). De momenten in een z -doorsnede zijn dan

$$(93) \quad \begin{cases} M_x = P(\ell - z) \\ M_y = 0 \\ M_z = -P(u(\ell) - u(z)) \end{cases} .$$

Met behulp van de volgende tabel van richtingscosinussen

| | x | y | z |
|---------|------------|-----------|-------|
| ξ | 1 | φ | $-u'$ |
| η | $-\varphi$ | 1 | $-v'$ |
| ζ | u' | v' | 1 |

krijgen we voor de momenten langs de hoofdassen van de doorsnede ξ , η , ζ

$$(94) \quad \begin{cases} M_\xi = P(\ell - z) + 0 + P(u(\ell) - u(z))u' = P(\ell - z) + \dots \\ M_\eta = -P(\ell - z)\varphi + 0 + P(u(\ell) - u(z))v' = -P(\ell - z)\varphi + \dots \\ M_\zeta = P(\ell - z)u' + 0 - P(u(\ell) - u(z)) \end{cases} .$$

Bedenken we dat

$$(95) \quad \frac{d^2 u_\xi}{d\zeta^2} \approx \frac{d^2 u}{dz^2} \quad \text{en} \quad \frac{d^2 u_\eta}{d\zeta^2} \approx \frac{d^2 v}{dz^2} ,$$

dan geldt voor de relaties tussen buigende momenten en verplaatsingen

$$(96) \quad \begin{cases} EI_y u'' = M_\eta = -P(\ell - z)\varphi \\ EI_x v'' = -M_\xi = -P(\ell - z) \end{cases} .$$

Noemen we de torsiestijfheid S_w dan geldt ook nog

$$(97) \quad S_w \varphi' = M_z = P(\ell - z)u' - (Pu(\ell) - u(z)) .$$

Door eliminatie van $u(z)$ vinden we voor $\varphi(z)$ de volgende DV

$$(98) \quad \varphi'' + a^4(\ell - z)^2\varphi = 0 \quad \text{met} \quad a^2 = \frac{P}{\sqrt{EI_y S_w}} .$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn

$$(99) \quad \begin{cases} z = 0 : \varphi = 0 \\ z = \ell : \varphi' = 0 . \end{cases}$$

De DV is te herleiden tot een Bessel vergelijking met als oplossing

$$(100) \quad \varphi = \sqrt{w} [AJ_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}a^2w^2) + BJ_{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}a^2w^2)]$$

waarin $w = \ell - z$.

De tweede randconditie geeft: $A = 0$ en de eerste randconditie

$$(101) \quad BJ_{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}a^2\ell^2) = 0 ,$$

waaruit we zien dat er alleen een niet triviale oplossing mogelijk is als

$$(102) \quad J_{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}a^2\ell^2) = 0 .$$

De kleinste waarde van a die hieraan voldoet is

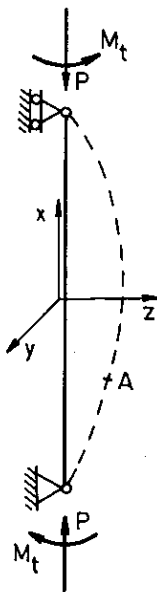
$$(103) \quad a\ell \approx 2$$

waaruit voor de laagste kiepwaarde volgt

$$(104) \quad P_{\text{kiep}} = \frac{4,013 \sqrt{EI_y S_w}}{\ell^2} .$$

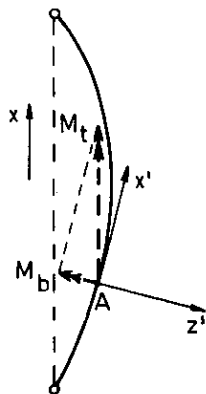
§ 5. Torsieknik

We zullen het geval beschouwen waarin een torsiemoment M_t de knik van een staaf beïnvloedt die belast wordt door een kracht P . De buigstijfheden van de staaf in het x - y vlak zowel als in het x - z vlak zijn EI . De lengte van de staaf is ℓ .



Als gevolg van M_t is de uitbuigingskromme niet gelegen in het x - z vlak. We zullen het x - z vlak en het y - z vlak dan ook afzonderlijk bekijken.

We geven de staaf een kleine uitwijking en beschouwen de invloed van krachten en momenten die dan werken in deze vervormde toestand in de doorsnede A. Bekijk de situatie in het x - z vlak



Het buigende moment M_b is de projectie van M_t .

Bij kleine uitwijking mogen we het buigend moment van P t.o.v. het x' - z' stelsel gelijk nemen aan het oorspronkelijke buigend moment van P t.o.v. het x - z stelsel.

Het extra buigende moment dat in A optreedt is M_b .

Het buigende moment in het x' - z' vlak is $M_t \frac{dy}{dx}$.

Analoog geldt in het y' - z' vlak, dat het buigende moment $- M_t \frac{dz}{dx}$ is.

De DV voor torsieknik worden dan

$$(105) \quad \begin{cases} \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{P}{EI} z + \frac{M_t}{EI} \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} y - \frac{M_t}{EI} \frac{dz}{dx} \end{cases}$$

Voor een opgelegd-opgelegde staaf vinden we als oplossing van dat stelsel DV dat

$$(106) \quad \frac{M_t^2}{(2EI)^2} + \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{\ell^2}$$

Voor $M_t = 0$ is $P = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ (de Euler-knik).

Voor $P = 0$ is $M_t = \frac{2EI\pi}{\ell}$.

We zien dat de laagste knikwaarde van een staaf dus afneemt naarmate de staaf meer getordeerd is.

§ 6.1. Knik van platen

De algemene DV die uitbuigingen van platen beschrijft is

$$(107) \quad D\Delta\Delta w = q,$$

waarin

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (h \text{ is de dikte}),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

w = doorbuiging loodrecht op het vlak van de plaat,

q = belasting loodrecht op het vlak van de plaat.

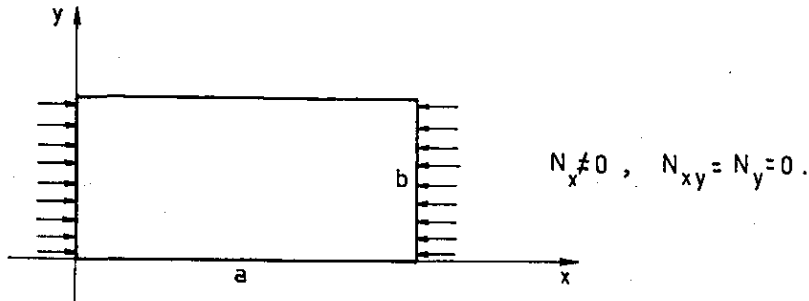
In deel II wordt de stabiliteitsvergelijking voor platen afgeleid in de vorm

$$(108) \quad D\Delta\Delta w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

waarin N_{xy} , N_x en N_y de resultanten zijn van de schuifspanning resp. de normaalspanningen in het vlak van de plaat.

We zien dat $w = 0$ een triviale oplossing is en we zullen uitbuigingen uit deze toestand beschouwen. We beperken ons hierbij tot een tweetal voorbeelden.

§ 6.2. Knik van een opgelegde rechthoekige plaat onder invloed van een gelijkmatige druk.



Door superpositie kunnen we de uitbuiging van de plaat beschouwen onder invloed van meerdere krachten.

De randvoorwaarden zijn:

$$\text{Voor } x = 0, a \text{ en } y = 0, b : w = 0 \text{ en } M = 0 .$$

We zoeken een oplossing in de vorm

$$(109) \quad w = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} .$$

Een oplossing in deze vorm voldoet reeds aan de randcondities.

Substitutie in de DV geeft

$$(110) \quad N_x = \frac{\pi^2 a^2 D \sum_{m,n} a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\sum_{m,n} a_{mn} m^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}} .$$

Deze uitdrukking geldt voor alle (x,y) in het gebied van de plaat. N_x kan alleen onafhankelijk van x en y zijn als alle $a_{mn} = 0$ uitgezonderd één. We vinden voor de daarbij behorende N_x :

$$(111) \quad N_x = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

met de bijbehorende eigenfunctie

$$(112) \quad w_{mn} = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} .$$

We schrijven N_x als

$$(113) \quad N_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{n^2}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2$$

waarbij n en m de reële getallen doorlopen.

De kleinste N_x bij vaste m treedt op voor $n = 1$. Dan wordt

$$(114) \quad N_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2 .$$

Is $\frac{a}{b} < 1$, dan ligt de kleinste waarde van N_x bij $m = 1$ en wel

$$(115) \quad (N_x)_{\text{kritisch}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 .$$

Een vierkante plaat ($a = b$) heeft daarvan weer de kleinste kritische waarde

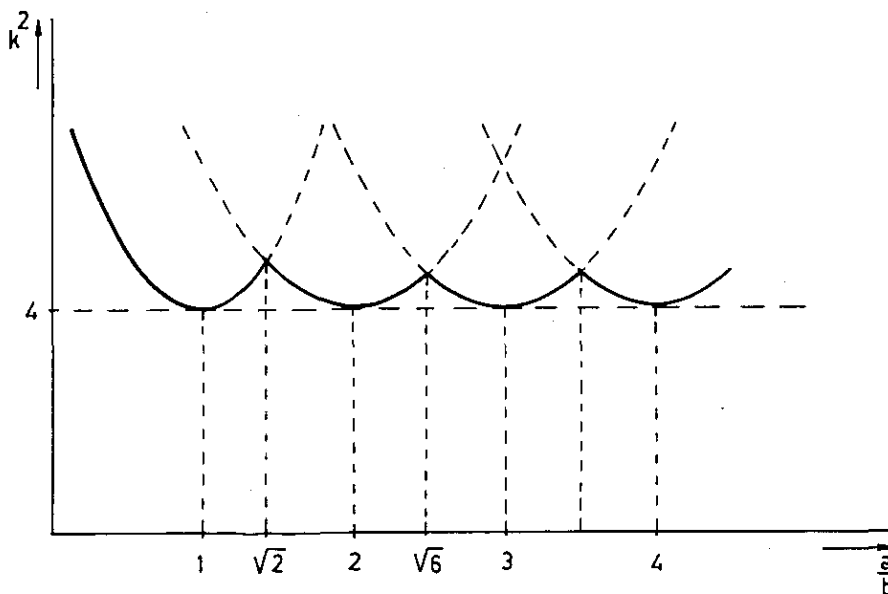
$$(116) \quad (N_x)_{\text{kr}} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} .$$

Is $\frac{a}{b} > 1$ dan kan het minimum van N_x bij $m = 2$ of hoger zijn gelegen.

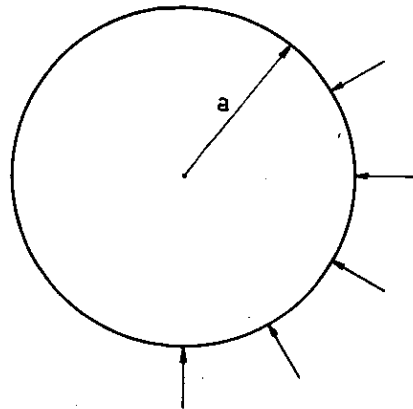
Stel

$$(117) \quad k^2 = \left(m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2 .$$

Dan zien we in de grafiek



§ 6.3. Knik van een gelijkmatig belaste cirkelvormige plaat



We beperken ons tot het rotatiesymmetrische geval. Dan geldt

$$(118) \quad N_r = N_\varphi = -N.$$

De basisvergelijking in poolcoördinaten wordt

$$(119) \quad \Delta \Delta w - \frac{N_r}{D} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{N_\varphi}{D} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0,$$

met

$$(120) \quad \Delta \Delta w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 w.$$

Deze basisvergelijking is te schrijven als

$$(121) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left\{ w'' + \frac{1}{r} w' + \frac{N}{D} w \right\} \right] = 0$$

hetgeen direct te herleiden is tot

$$(122) \quad \frac{d}{dr} \left(w'' + \frac{1}{r} w' + \frac{N}{D} w \right) = \frac{A}{r}.$$

Willen de verplaatsingen begrensd blijven dan moet $A = 0$ zijn.

Stel $w' = \varphi$ dan geldt

$$(123) \quad \varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \frac{1}{r^2} \varphi + \frac{N}{D} \varphi = 0.$$

De oplossing van deze DV van Bessel is

$$(124) \quad \varphi = A_1 J_1(\alpha r) + A_2 Y_1(\alpha r), \quad \alpha = \sqrt{\frac{N}{D}}.$$

Begrensdheid van φ levert $A_2 = 0$, dus

$$(125) \quad \varphi = A_1 J_1(\alpha r) .$$

Voor een plaat die bij $r = a$ is ingeklemd geldt $\varphi(a) = 0$. De knikvoorwaarde wordt dan

$$(126) \quad J_1(\alpha a) = 0$$

met als oplossingen $\alpha_1 a, \alpha_2 a, \alpha_3 a, \dots$

$$(127) \quad \alpha_1 a = 3,832$$

en dus

$$(128) \quad N_{kr} = \frac{14,68}{a^2} D .$$

Voor een enkelvoudig ondersteunde plaat geldt voor $r = a$: $w = M_r = 0$.

Weer uitgaande van de oplossing $\varphi = A_1 J_1(\alpha r)$ kunnen we aan

$$(129) \quad M_r(a) = \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right)_{r=a}$$

voldoen door

$$(130) \quad \alpha a J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a) = 0 .$$

Voor $\nu = 0,3$ volgt

$$(131) \quad N_{kr} = \frac{4,20 D}{a^2} .$$

Aan de voorwaarde $w = 0$ voor $r = a$ kunnen we altijd voldoen door te stellen

$$(132) \quad w = \int_a^r \varphi dr .$$

§ 7. Thermo-elastische stabiliteit van platen

De algemene vergelijkingen voor een lineair thermo-elastisch probleem zijn:

1) de constitutieve vergelijkingen

$$(133) \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu)\epsilon_{ij} + \delta_{ij}\{\nu\epsilon_{kk} + \alpha(1+\nu)(T-T_0)\}] ,$$

α is de lineaire uitzettingscoëfficiënt;

2) de definitie van de rekken

$$(134) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) ;$$

3) de evenwichtsvergelijkingen

$$(135) \quad \sigma_{ij,j} + k_i = 0 .$$

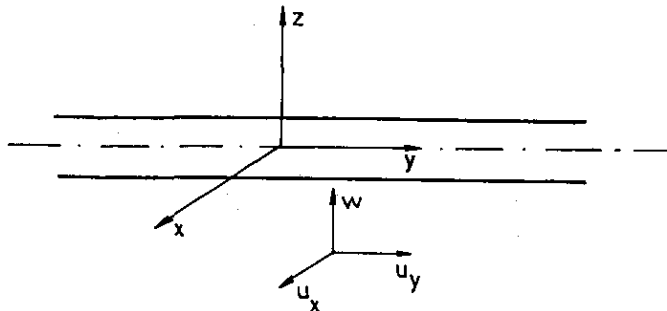
Voor de temperatuur T hebben we nog een vergelijking die samen met de randvoorwaarden deze functie bepaalt.

Als we stabiliteit onderzoeken moeten bovenstaande vergelijkingen uit de lineaire theorie aangepast worden om niet in strijd te komen met de eenduidigheidsstelling van Kirchhoff.

We kunnen verschillende niet lineaire effecten beschouwen maar we zullen ons beperken tot een niet lineaire formulering waarbij alleen de definitie van de rek wordt aangepast:

$$(136) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - u_{i,k}u_{j,k} .$$

Voor de deformatie van platen zullen we ons beperken tot de gevallen waarbij de Kirchhoff-Love hypothese (stekelvarkenhypothese) geldt.



Voor de deformaties nemen we het volgende verplaatsingsveld

$$(137) \quad u_i(x,y,z) = u_i^{(0)}(x,y) - z \frac{\partial}{\partial x_i} w^{(0)}(x,y), \quad i = 1,2, \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = y \end{matrix}$$

$u_i^{(0)}$ is de verplaatsing in het meridiaanvlak.

Voor de deformaties vinden we

lineair:

$$(138) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}) - zw_{,ij}^{(0)},$$

niet lineair:

$$(139) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}) + \frac{1}{2}w_{,i}^{(0)}w_{,j}^{(0)} - zw_{,ij}^{(0)}.$$

De toevoeging $^{(0)}$ zullen we verder weglaten omdat we toch overal verplaatsingen van en spanningen in punten van het meridiaanvlak bekijken.

We definiëren

$$(140) \quad N_{ij}(x,y) = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij}(x,y,z) dz,$$

$$(141) \quad M_{ij}(x,y) = \int_{-h/2}^{+h/2} z\sigma_{ij}(x,y,z) dz.$$

Integreren van de constitutieve vergelijkingen over de dikte van de plaat levert:

$$(142) \quad N_{ij} = D_N \left[\frac{1-\nu}{2} \{ (u_{i,j} + u_{j,i}) + w_{,i}w_{,j} \} + \delta_{ij} \{ \nu u_{k,k} - \frac{1}{2} w_{,k}w_{,k} - \epsilon_{T_1} \} \right]$$

$$(143) \quad M_{ij} = D_M \left[(1-\nu)w_{,ij} + \delta_{ij} (\nu w_{,kk} + \kappa_{T_1}) \right]$$

waarbij

$$(144) \quad D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$(145) \quad \epsilon_{T_1} = \frac{1+\nu}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha(T-T_0) dz \quad \text{en} \quad \kappa_{T_1} = \frac{12(1+\nu)}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha(T-T_0) z dz.$$

In het boek van A.D. Kovalenko ("Thermo elasticity") worden met behulp van een variatieprincipe de globale evenwichtsvergelijkingen afgeleid. Deze luiden in het geval dat de normale druk op de plaat wordt verwaarloosd

$$(146) \quad N_{ij,j} = 0$$

$$(147) \quad M_{ij,ij} + N_{ij}w_{,ij} = 0 .$$

We hebben de volgende randvoorwaarden:

1) voor de verplaatsingen van het meridiaanvlak:

$$(148) \quad \begin{cases} u_i = 0 & \text{(opgelegd)} \\ N_{ij}n_j = 0 & \text{(vrij)} ; \end{cases}$$

2) voor de normale verplaatsing w:

$$(149) \quad \begin{cases} w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{(ingeklemd)} \\ w = M_n = 0 & \text{(opgelegd)} \\ \bar{Q}_n = M_n = 0 & \text{(vrij)} . \end{cases}$$

\bar{Q}_n staat voor de gereduceerde dwarskracht (zie literatuur).

M_n staat voor

$$(150) \quad M_n = - D_M \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial n} \right) + \kappa_{T_1} \right] .$$

De coördinaten n en s zijn lokale coördinaten aan de rand, terwijl R de kromtestraal is.

Na eliminatie van M_{ij} volgt:

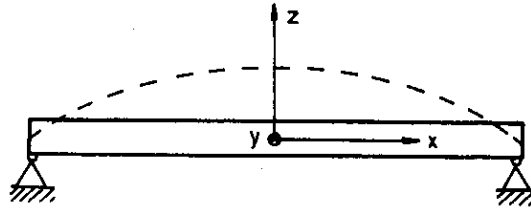
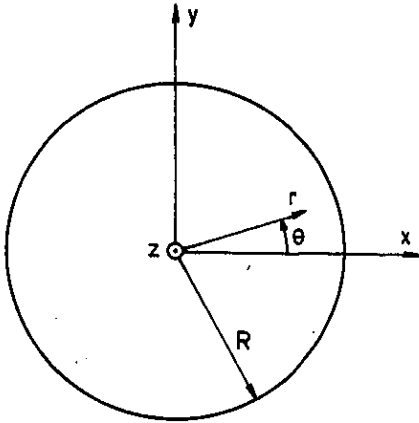
$$(151) \quad D_M \Delta \Delta w - N_{ij}w_{,ij} + D_M \Delta \kappa_{T_1} = 0 .$$

De term $- N_{ij}w_{,ij}$ is het gevolg van het meenemen van het niet lineaire deel van de deformaties. We werken verder met de 6 vergelijkingen (142, 146, 151) waarin N_{11} , N_{22} , N_{12} ($= N_{21}$), w, u_1 en u_2 de onbekenden zijn. Verondersteld is dat κ_{T_1} reeds bepaald is.

Als voorbeeld beschouwen we het volgende probleem:

Een cirkelvormige plaat is opgelegd en er zijn geen temperatuursbronnen.

De temperatuur wordt rotatiesymmetrisch verondersteld.



Vanwege de rotatiesymmetrie is $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ en $u_{\theta} = 0$.

De verplaatsing in radiale richting is $u_r = u$.

De vergelijkingen in poolcoördinaten zijn:

$$(152) \quad \begin{cases} N_{rr} = D_N \left\{ u_{,r} + \nu \frac{u}{r} + \frac{1}{2} (w_{,r})^2 - \epsilon_{T_1} \right\} & \text{uit (142)} \\ N_{\theta\theta} = D_N \left\{ \frac{u}{r} + \nu (u_{,r} + \frac{1}{2} (w_{,r})^2) - \epsilon_{T_1} \right\} \\ N_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

$$(153) \quad N_{rr,r} + \frac{1}{r} (N_{rr} - N_{\theta\theta}) = 0 \quad \text{uit (146)}$$

$$(154) \quad \Delta \Delta w + \Delta \kappa_{T_1} = \frac{1}{D_M} (N_{rr} w_{,rr} + N_{\theta\theta} \frac{1}{r} w_{,r}) \quad \text{uit (151)}$$

met

$$(155) \quad \Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) .$$

De randvoorwaarden zijn

$$(156) \quad \text{voor } r = R: u = w = 0$$

$$M_r = 0 \Rightarrow w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} + \kappa_{T_1} = 0 ;$$

$$(157) \quad \text{voor } r = 0: u = 0, w_{,r} = 0 \text{ en } \lim_{r \rightarrow 0} r N_{rr} = 0 \text{ (uit symmetrie overwelingen).}$$

We beschouwen eerst de temperatuur. Vanwege de afwezigheid van bronnen geldt:

$$(158) \quad \Delta T = 0 .$$

We zullen de volgende onderstelling maken:

$$(159) \quad T - T_0 = p + qz \quad (p \text{ en } q \text{ constant}),$$

dus T is onafhankelijk van θ en r .

Daarmee is

$$(160) \quad \begin{cases} \epsilon_{T_1} = (1 + \nu)\alpha p \\ \kappa_{T_1} = (1 + \nu)\alpha q, \end{cases}$$

beide constant, zodat (154) nog eenvoudiger wordt.

We willen $w(r)$ bepalen met parameters p en q . Dus $w(r;p,q)$ wordt gezocht.

Uit $-\nu$ maal (152.1) volgt na optellen van (152.2):

$$(161) \quad \frac{N_{\theta\theta} - \nu N_{rr}}{D_N} = (1 - \nu^2) \frac{u}{r} - (1 - \nu)\epsilon_{T_1}$$

waaruit volgt

$$(162) \quad u = \frac{r}{Eh} (N_{\theta\theta} - \nu N_{rr}) + \alpha p.$$

Uit (153) volgt:

$$(163) \quad \frac{1}{r} N_{\theta\theta} = N_{rr,r} + \frac{1}{r} N_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rN_{rr}).$$

Beide laatste vergelijkingen leveren:

$$(164) \quad u = \frac{r}{Eh} \{ (rN_{rr})_{,r} - \nu N_{rr} \} + \alpha p.$$

Substitutie in (152.1) levert een vergelijking voor N_{rr} en w

$$(165) \quad rN_{rr,rr} + 3N_{rr,r} + \frac{Eh}{2r} (w_{,r})^2 = 0.$$

Eliminatie van $N_{\theta\theta}$ uit (154) geeft

$$(166) \quad D_M \Delta \Delta w = N_{rr} w_{,rr} + (rN_{rr})_{,r} \frac{1}{r} w_{,r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rN_{rr} w_{,r}).$$

Integratie geeft

$$(167) \quad D_M \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r w_{,r}) \right] = N_{rr} w_{,r} + \frac{C}{r}.$$

$C = 0$ op grond van regulariteit voor $r = 0$, zodat

$$(168) \quad D_M \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rw_{,r}) \right] - N_{rr} w_{,r} = 0$$

en na omschrijven levert de eerste vergelijking voor N_{rr} en w

$$(169) \quad r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_{rr}) \right] + \frac{1}{2} Eh (w_{,r})^2 = 0 ,$$

de randvoorwaarden zijn

$$(170) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0: (rN_{rr})_{,r} - \nu N_{rr} + Eh\alpha p = 0 \\ w_{,rr} + \frac{\nu}{R} w_{,r} + (1+\nu)\alpha q = 0 \\ w_{,r} = rN_{rr} = 0 \quad \text{voor } r = 0 . \end{array} \right\} \text{ voor } r = R$$

Om de vergelijkingen op te lossen voeren we de volgende substituties in:

$$(171) \quad \rho = \frac{r}{R} ; \quad \varphi = w_{,r} = \frac{1}{R} w_{,\rho} ; \quad \psi = - \frac{rN_{rr}}{EhR} \quad \text{en} \quad k = 12(1-\nu^2) \left(\frac{R}{h}\right)^2 .$$

Definiëren we nog dat een accent differentiëren naar ρ is dan volgt

$$(172) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi'' + \frac{1}{\rho} \varphi' - \frac{1}{\rho^2} \varphi = -k \frac{\varphi\psi}{\rho} \\ \psi'' + \frac{1}{\rho} \psi' - \frac{1}{\rho^2} \psi = \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{\rho} \end{array} \right.$$

met

$$(173) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \psi = 0 \quad \text{voor } \rho = 0 \\ \varphi' + \nu\varphi = - (1+\nu)\alpha q R \\ \psi' - \nu\psi = \alpha p \end{array} \right\} \text{ voor } \rho = 1 .$$

Schrijf verder

$$(174) \quad Q = \alpha q R \quad \text{en} \quad P = \frac{\alpha p}{1-\nu}$$

en definieer Φ en Ψ met

$$(175) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\rho) = \Phi(\rho) - Q\rho \\ \psi(\rho) = \Psi(\rho) + P\rho \end{array} \right.$$

dan krijgen we vergelijkingen voor Φ en Ψ :

$$(176) \quad \begin{cases} \phi'' + \frac{1}{\rho} \phi' - \frac{1}{\rho^2} \phi = -\frac{k}{\rho} (\phi + Q\rho)(\Psi + P\rho) \\ \Psi'' + \frac{1}{\rho} \Psi' - \frac{1}{\rho^2} \Psi = \frac{1}{2\rho} (\Psi + P\rho)^2 \end{cases}$$

met randvoorwaarden:

$$(177) \quad \begin{cases} \phi = \Psi = 0 & \text{voor } \rho = 0 \\ \phi' + \nu\phi = 0 \\ \Psi' - \nu\Psi = 0 \end{cases} \text{ voor } \rho = 1 .$$

Voor ϕ en Ψ worden de volgende machtreksen gesubstitueerd:

$$(178) \quad \begin{cases} \phi(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} \rho^{2i+1} \\ \Psi(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i} \rho^{2i+1} \end{cases}$$

waarbij om symmetrie redenen de termen met ρ^{2n} kunnen worden weggelaten. We beperken ons tot het geval $i = 0$ en $i = 1$, alle overige coëfficiënten worden nul genomen.

De randvoorwaarden geven:

$$(179) \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{1+\nu}{3+\nu} a_0 \\ b_2 = -\frac{1-\nu}{3-\nu} b_0 \end{cases}$$

terwijl vergelijking van de coëfficiënten van ρ^0 in de beide vergelijkingen met gebruikmaking van de randvoorwaarden levert:

$$(180) \quad \begin{cases} -8 \frac{1-\nu}{3-\nu} b_0 = \frac{1}{2} (a_0 + Q)^2 \\ -8 \frac{1+\nu}{3+\nu} a_0 = -k(a_0 + Q)(b_0 + Q) . \end{cases}$$

Elimineer b_0 en substitueer $A_0 = a_0 + Q$, zodat

$$(181) \quad A_0^3 + \left[-16 \frac{1-\nu}{3-\nu} P + \frac{128}{k} \frac{1-\nu^2}{9-\nu^2} \right] A_0 - \frac{128}{k} \frac{1-\nu^2}{9-\nu^2} Q = 0$$

waaruit $A_0 = F(P, Q)$ zodat na elementair rekenwerk de functie $w(r; p, q)$ volgt.

Enige speciale gevallen.

i) $Q = 0$, de temperatuur T is homogeen verdeeld: $T - T_0 = p$, dan volgen de oplossingen

$$(182) \quad \begin{cases} A_0 = 0 \\ A_0^2 = 16 \frac{1-\nu}{3-\nu} P - \frac{128}{k} \frac{1-\nu^2}{9-\nu^2} \end{cases},$$

de tweede oplossing voor A_0 is reëel als

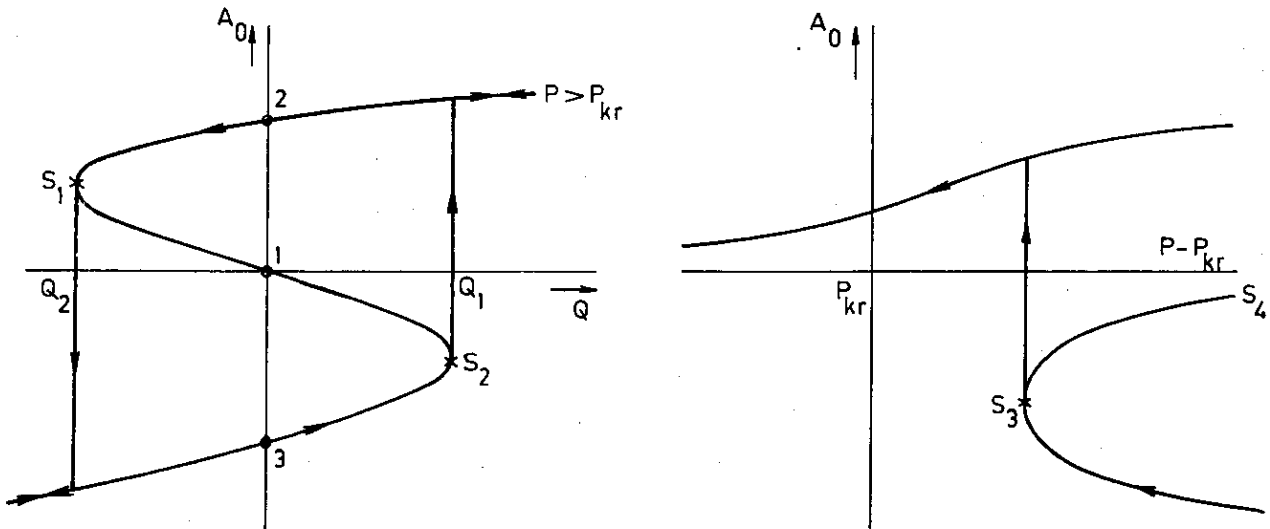
$$16 \frac{1-\nu}{3-\nu} P - \frac{128}{k} \frac{1-\nu^2}{9-\nu^2} \geq 0 \Rightarrow P \geq \frac{8(1+\nu)}{k(3+\nu)}$$

ofwel

$$(183) \quad P \geq P_{\text{krit}} = \frac{2}{3(3+\nu)\alpha} \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

ii) $P = 0$, geen instabiliteit, er is maar één reële wortel A_0 .

iii) $P, Q \neq 0$



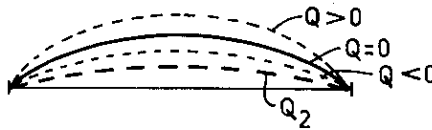
Te bewijzen is dat de delen S_1S_2 in de linker- en S_3S_4 in de rechtergrafiek overeenkomen met instabiele uitwijkingen (voor het bewijs, gebaseerd op de definitie van de vrije energie, wordt verwezen naar de literatuur).

Voor $Q = 0$ zijn er bijvoorbeeld 3 evenwichtsstanden: 1, 2 en 3 in de linkerfiguur.

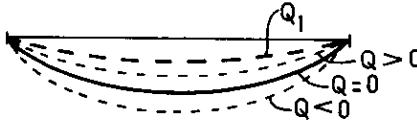
Stand 1 is instabiel:



Stand 2:



Stand 3:



Hoofdstuk 4.

§ 1.1. Stabiliteit van de beweging

We beschouwen een stelsel bewegingsvergelijkingen dat niet expliciet van de tijd afhangt (autonoom)

$$(184) \quad \dot{x}_k = X_k(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) .$$

Neem

$$(185) \quad X_k(\underline{x} = \underline{0}) = 0 .$$

Dan is $\underline{x} = \underline{0}$ een evenwichtsstand. Hiervan zullen we de stabiliteit onderzoeken. We geven eerst enige definities en stellingen.

Definitie 1. Een functie $V(\underline{x})$ is positief definitief in een gebied H dat $\underline{x} = \underline{0}$ bevat als voor alle $\underline{x} \in H$ geldt:

$$\begin{cases} V(\underline{x}) > 0 , & \underline{x} \neq \underline{0} \\ V(\underline{0}) = 0 . \end{cases}$$

Definitie 2. $V(\underline{x})$ heet positief semi definitief in een gebied H dat $\underline{x} = \underline{0}$ bevat als voor alle $\underline{x} \in H$ geldt:

$$\begin{cases} V(\underline{x}) \geq 0 , & \underline{x} \neq \underline{0} \\ V(\underline{0}) = 0 . \end{cases}$$

Voorbeelden. In R_2 beschouwen we $\underline{x} = (x_1, x_2)$. Dan:

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{is P.D.}$$

$$V(\underline{x}) = x_1^2 \quad \text{is P.S.D. (= 0 voor } x_1 = 0 \text{ en alle } x_2).$$

Stelling 1. Als er een functie $V(\underline{x})$ bestaat zodanig dat

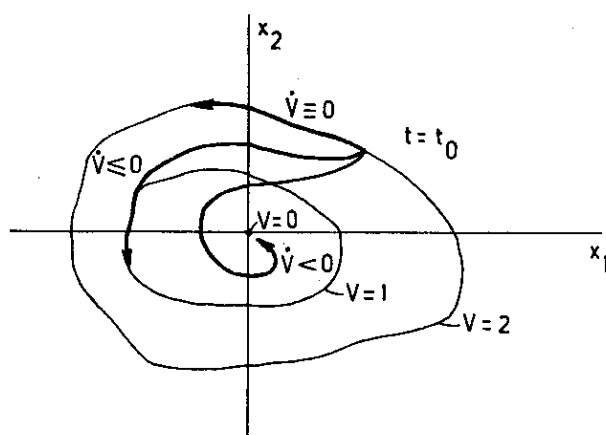
$V(\underline{x})$ is P.D.

$\dot{V}(\underline{x})$ is identiek nul of N.S.D.

dan is $\underline{x} = \underline{0}$ stabiel.

Het bewijs van de stelling wordt geleverd in de grondslagen.

Met behulp van een plaatje is stelling 1 aannemelijk te maken:



Stelling 2. Als er een functie $V(\underline{x})$ bestaat zodanig dat

$V(\underline{x})$ is P.D.

$\dot{V}(\underline{x})$ is N.D.

dan is $\underline{x} = \underline{0}$ asymptotisch stabiel.

Stelling 3. Als er een functie $V(\underline{x})$ bestaat zodanig dat

$\dot{V}(\underline{x})$ is P.D.

$V(\underline{x})$ is niet N.S.D.

dan is $\underline{x} = \underline{0}$ instabiel.

Stelling 4 (Hoofdstelling van Lyapounov). Stel

$$(186) \quad \dot{x}_k = X_k = p_{kl} x_l + \tilde{X}_k(\underline{x}) \quad (p_{kl} \text{ constant}).$$

Beschouw de gelineariseerde vergelijkingen

$$(187) \quad \dot{x}_k = p_{kl} x_l .$$

De eigenwaarden van dit stelsel halen we uit de karakteristieke vergelijking

$$(188) \quad \det(p_{k\ell} - \lambda \delta_{k\ell}) = 0, \quad \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1, & k = \ell \\ 0, & k \neq \ell. \end{cases}$$

Als voor de eigenwaarden λ_i geldt

- i) Alle $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, dan $\underline{x} = \underline{0}$ is asymptotisch stabiel.
- ii) Eén of meer $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, dan is $\underline{x} = \underline{0}$ instabiel.
- iii) Eén of meer $\text{Re}(\lambda_i) = 0$, de overige $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, dan geeft het lineaire stelsel geen uitsluitel over stabiliteit.

Stelling 5 (Stelling van Hurwitz). Beschouw de karakteristieke vergelijking

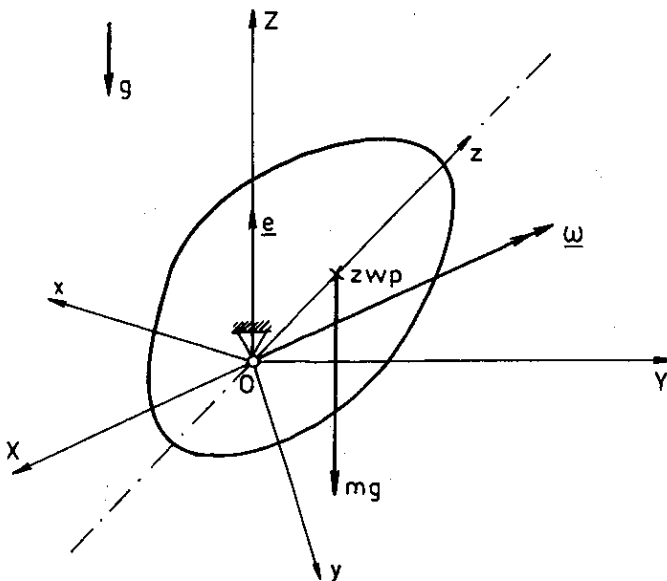
$$(189) \quad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Definieer

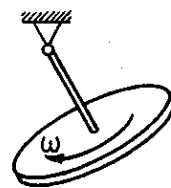
$$(190) \quad \Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Als nu geldt: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$, dan hebben alle λ 's een negatief reëel deel.

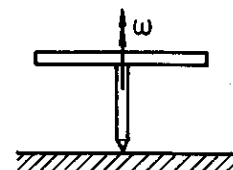
§ 1.2. Rotatie van een symmetrisch lichaam met één vast punt



Bijv.:



of



OXYZ is een inertiaalsysteem. Eenheidsvector langs de Z-as is \underline{e} .

oxyz is een meedraaiend assenkruis langs hoofdtraagheidsassen, en met eenheidsvectoren \underline{i} , \underline{j} en \underline{k} .

De richtingscosinussen van x, y en z met de Z-as zijn resp. α , β en γ .

Dus α is de cosinus van de hoek tussen \underline{i} en \underline{e} , etc.

Dan geldt:

$$(191) \quad \underline{e} = \alpha \underline{i} + \beta \underline{j} + \gamma \underline{k} .$$

Zij verder $|\underline{OZ}| = z_0$. De traagheidsmomenten om x-, y- en z-as zijn resp. A, B (= A) en C.

Voor de rotatievector geldt

$$(192) \quad \underline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (p, q, r) .$$

We zullen onderzoeken de stabiliteit van rotatie om de Z-as. Dan geldt voor de beweging:

$$(193) \quad \begin{cases} p = q = 0 , & r = \Omega = \text{constant} \\ \alpha = \beta = 0 & \text{en } \gamma = 1 . \end{cases}$$

We zullen met de stellingen van Lyapounov de stabiliteit onderzoeken zonder de bewegingsvergelijkingen te hoeven oplossen.

We passen op het lichaam de impulsmomentstelling t.o.v. het vaste punt toe:

$$(194) \quad \underline{M}_0 = \dot{\underline{D}}_0 = (\dot{\underline{D}}_0)_{\text{rel.}} + \underline{\omega} \times \underline{D}_0$$

waarin

$$(195) \quad (\dot{\underline{D}}_0)_{\text{rel.}} = (A\dot{p}, B\dot{q}, C\dot{r}) = (A\dot{p}, A\dot{q}, C\dot{r}) ,$$

aangezien we \underline{D}_0 ontbinden in componenten t.o.v. het relatieve stelsel:

$$(196) \quad \underline{D}_0 = A p \underline{i} + A q \underline{j} + C r \underline{k} .$$

Voor het moment geldt

$$(197) \quad \underline{M}_0 = z_0 \underline{k} \times (-mg \underline{e}) = mg z_0 [\beta \underline{i} + \alpha \underline{j}] .$$

Substitutie in de impulsmomentstelling levert de bewegingsvergelijkingen:

$$(198) \quad \begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = mg z_0 \beta \\ A\dot{q} + (A-C)pr = -mg z_0 \alpha \\ C\dot{r} = 0 . \end{cases}$$

We hebben hiermee 3 vergelijkingen voor 6 onbekenden: p , q , r , α , β en γ .
De 3 resterende vergelijkingen volgen uit

$$(199) \quad \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{0} = \dot{\alpha}\mathbf{i} + \dot{\beta}\mathbf{j} + \dot{\gamma}\mathbf{k} + \alpha\dot{\mathbf{i}} + \beta\dot{\mathbf{j}} + \gamma\dot{\mathbf{k}}$$

hetgeen met

$$(200) \quad \dot{\mathbf{i}} = \underline{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{j}} = \underline{\omega} \times \mathbf{j} \quad \text{en} \quad \dot{\mathbf{k}} = \underline{\omega} \times \mathbf{k}$$

levert

$$(201) \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = \beta r - \gamma q \\ \dot{\beta} = \gamma p - \alpha r \\ \dot{\gamma} = \alpha q - \beta p, \end{cases}$$

de zgn. gyrostaat vergelijkingen.

We zoeken nu een functie $V(\underline{x})$ waarop we de stellingen van Lyapounov kunnen toepassen. Daartoe zoeken we eerste integralen van de bewegingsvergelijkingen.

i) Vermenigvuldig de eerste drie vergelijkingen resp. met p , q en r en tel ze op:

$$(202) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) = mg z_0 (p\beta - q\alpha) = - mg z_0 \dot{\gamma}.$$

Integreren geeft

$$(203) \quad Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 + 2 mg z_0 \gamma = \text{const.}$$

In feite is dit

$$(204) \quad T + U = \text{constant.}$$

ii) De eerste 3 vergelijkingen vermenigvuldigen met α , β en γ , de laatste 3 met Ap , Aq en Cr . Optellen en integreren lever de vergelijking

$$(205) \quad A(\alpha p + \beta q) + Cr\gamma = \text{const.}$$

Deze vergelijking beschrijft dat het impulsmoment om de Z-as constant is.

iii) De laatste 3 vergelijkingen integreren na resp. met α , β en γ te vermenigvuldigen en op te tellen geeft

$$(206) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.} (= 1).$$

iv) De derde bewegingsvergelijking integreren geeft

$$(207) \quad r = r_0 = \text{const.}$$

Dit houdt in dat het impulsmoment om de z-as constant is.

We voeren in de vector

$$(208) \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6) = (p, q, r - \Omega, \alpha, \beta, \gamma - 1) .$$

De stand die we op evenwicht onderzoeken is $\underline{x} = \underline{0}$.

De 4 eerste integralen luiden uitgedrukt in \underline{x} :

$$(209) \quad V_1 = A(x_1^2 + x_2^2) + C(x_3^2 + 2\Omega x_3 + \Omega^2) + 2mg z_0 x_6 + 2mg z_0 = \text{const.}$$

De constante termen naar rechts brengen geeft

$$(210) \quad \begin{cases} V_1 = A(x_1^2 + x_2^2) + C(x_3^2 + 2\Omega x_3) + 2mg z_0 x_6 = \text{const.} \\ V_2 = A(x_1 x_4 + x_2 x_5) + C(x_3 x_6 + \Omega x_3 + x_3) = \text{const.} \\ V_3 = x_4^2 + x_5^2 + 2x_6 + x_6^2 = \text{const.} \\ V_4 = x_3 = \text{const.} \end{cases}$$

We proberen een Lyapounov functie $V(\underline{x})$ te construeren die positief definitief is en waarvoor $\dot{V} = 0$. Tot nog toe is het niet gelukt hiervoor een constructieve methode op te stellen. Enig puzzelwerk geeft:

$$(211) \quad V = V_1 + 2\lambda V_2 - (mg z_0 + C\Omega\lambda)V_3 + \frac{C(C-A)}{A} V_4^2 - 2(C\Omega + C\lambda)V_4 = \text{const.}$$

waarin λ een constante is. Dus

$$(212) \quad \begin{aligned} V = & Ax_1^2 + 2\lambda Ax_4 x_1 - (mg z_0 + C\Omega\lambda)x_4^2 + \\ & + Ax_2^2 + 2\lambda Ax_5 x_2 - (mg z_0 + C\Omega\lambda)x_5^2 + \\ & + \frac{C^2}{A} x_3 + 2\lambda Cx_6 x_3 - (mg z_0 + C\Omega\lambda)x_6^2 = \text{constant.} \end{aligned}$$

Er geldt inderdaad $V(\underline{0}) = 0$ en $\dot{V} = 0$.

De tweede en derde regel van bovenstaande uitdrukking hebben dezelfde vorm als de eerste, mits in de tweede x_1 door x_2 en x_4 door x_5 vervangen worden en in de derde regel x_1 door $\frac{C}{A} x_3$ en x_4 door x_6 .

Hieruit zien we dat:

V is positief definit als $Ax_1^2 + 2\lambda Ax_4 x_1 - (mg z_0 + C\Omega\lambda)x_4^2$ geen wortels heeft. Daartoe moet de discriminant D van deze kwadratische functie negatief zijn:

$$(213) \quad A^2\lambda^2 + CA\Omega\lambda + A mg z_0 < 0 .$$

De vraag is nu of er waarden van λ zijn waarvoor dit geldt.

Daarvoor moet deze ongelijkheid twee reële wortels λ hebben, dus moet

$$(214) \quad C^2\Omega^2 - 4A mg z_0 > 0 .$$

De onderzochte stand $\underline{x} = \underline{0}$ is stabiel als:

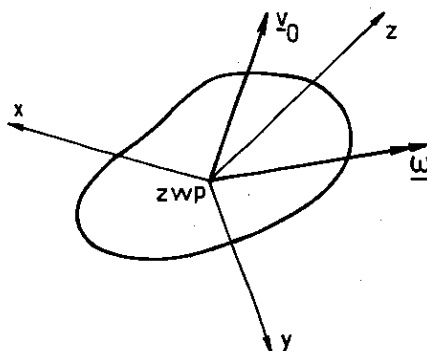
$$(215) \quad \begin{cases} z_0 < 0 : \text{altijd} \\ z_0 > 0 : |\Omega| > \sqrt{\frac{4A mg z_0}{C^2}} . \end{cases}$$

Deze conditie is een voldoende voorwaarde voor stabiliteit. We mogen niet

concluderen dat voor $|\Omega| < \sqrt{\frac{4A mg z_0}{C^2}}$ instabiliteit optreedt.

Stelling 3 is nodig om uitsluitel over instabiliteit te geven.

§ 1.3. Vrij lichaam dat om een hoofdtraagheidsas roteert



x, y, z zijn hoofdtraagheidsassen die aan het lichaam vastzitten.

De snelheid \underline{v}_0 is niet interessant.

De hoofdtraagheidsmomenten zijn A, B en C, rotatie $\underline{\omega} = (p, q, r)$.

We onderzoeken de stabiliteit van de toestand $p = \omega = \text{const}$, $q = r = 0$.
 We passen de momentenstelling $\underline{M} = \underline{\dot{D}}$ toe om het zwaartepunt, dan volgen de bewegingsvergelijkingen:

$$(216) \quad \begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0 \end{cases}$$

Voer in

$$(217) \quad \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) = (p-\omega, q, r) .$$

Daarmee gaan de bewegingsvergelijkingen over in

$$(218) \quad \begin{cases} A\dot{x}_1 + (C-B)x_2x_3 = 0 \\ B\dot{x}_2 + (A-C)x_3(x_1 + \omega) = 0 \\ C\dot{x}_3 + (B-A)x_2(x_1 + \omega) = 0 \end{cases}$$

Lineariseren van de bewegingsvergelijkingen (onderstel $|\underline{x}|$ klein):

$$(219) \quad \begin{cases} A\dot{x}_1 = 0 \\ B\dot{x}_2 + (A-C)x_3\omega = 0 \\ C\dot{x}_3 + (B-A)x_2\omega = 0 \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking hiervan is

$$(220) \quad \begin{vmatrix} A\lambda & 0 & 0 \\ 0 & B\lambda & (A-C)\omega \\ 0 & (B-A)\omega & C\lambda \end{vmatrix} = 0$$

met wortels

$$(221) \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \omega \sqrt{\frac{(C-A)(A-B)}{CB}} .$$

Als $C < A < B$ òf $B < A < C$, dan wordt λ_2 reëel: $\text{Re}(\lambda_2) > 0$, dus instabiliteit.

Voor $A > \max(B,C)$ of $A < \min(B,C)$ liggen dan alle λ 's op de imaginaire as.

Omdat $\text{Re}(\lambda_1) = 0$ krijgen we uit het lineaire systeem geen informatie.

Voor $A > \max(B,C)$ of $A < \min(B,C)$ gebruiken we weer de methode van Lyapounov.

Er zijn twee eerste integralen:

i) De energie integraal

$$(222) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.}$$

met

$$(223) \quad V_1 = Ax_1^2 + 2A\omega x_1 + Bx_2^2 + Cx_3^2 = \text{const.}$$

ii) De tweede bewegingsvergelijking vermenigvuldigen met $C\dot{r}$ en de derde met $B\dot{q}$. Deze van elkaar aftrekken en integreren geeft:

$$(224) \quad B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = \text{const.}$$

met

$$(225) \quad V_2 = B(B-A)x_2^2 + C(C-A)x_3^2 = \text{const.}$$

Als Lyapounov functie kiezen we

$$(226) \quad V = V_1^2 \pm V_2, \quad \begin{cases} + \text{ als } A < \min(B,C) \\ - \text{ als } A > \max(B,C) ; \end{cases}$$

dit geeft

$$(227) \quad V = 4A^2\omega^2x_1^2 \pm [B(B-A)x_2^2 + C(C-A)x_3^2] + O(x_1^3) = \text{const.}$$

Nu is

$V(\underline{x})$ is positief definitief als A het kleinste of het grootste traagheidsmoment is,

$$\dot{V}(\underline{x}) = 0.$$

Dus rotatie om de grootste en om de kleinste hoofdtraagheidsas is stabiel.

§ 2. Shimmy van wielen

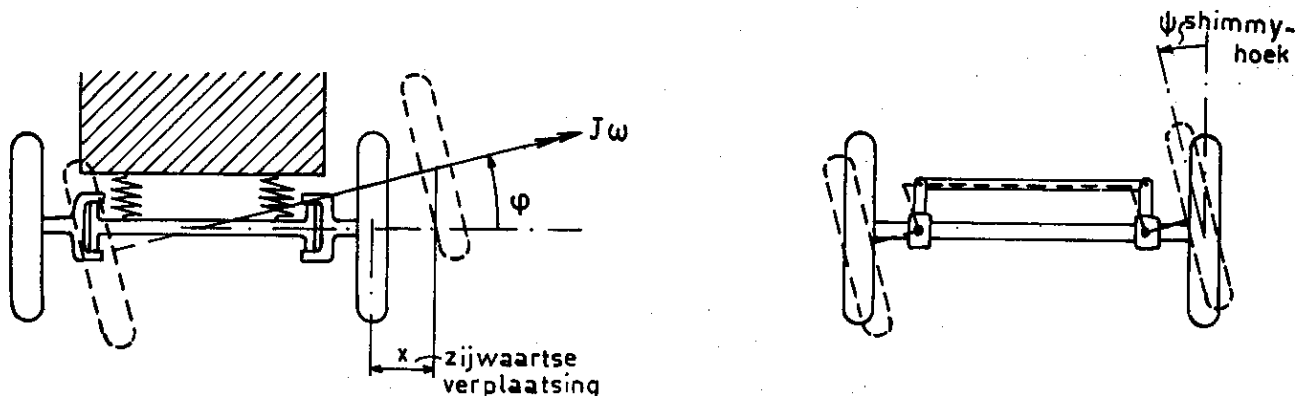
We zullen een verklaring geven voor het bij wielen van voertuigen optredende shimmy effect. In de tekening zien we het vooraanzicht van een auto schematisch weergegeven. We veronderstellen dat de massa van de auto groot is ten opzichte van de massa van het onderstel. Bovendien bestaat de vooras uit één stuk, dus de wielen zijn niet onafhankelijk opgehangen.

De 3 graden van vrijheid die bij het shimmy effect aanwezig zijn noemen we x , φ en ψ . Ze zijn onderling gekoppeld.

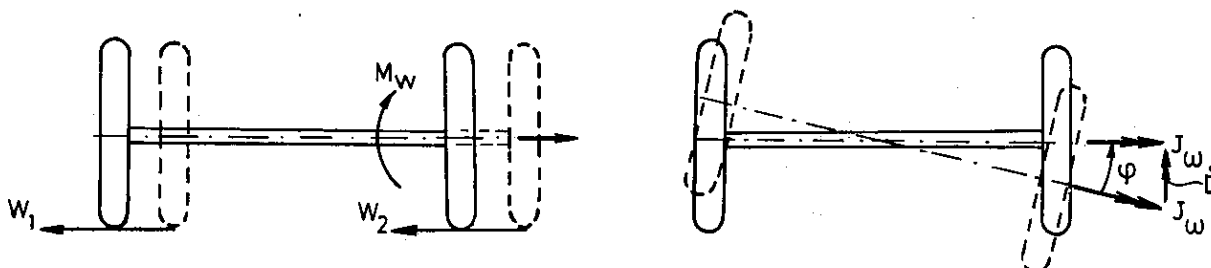
x : zijwaartse verplaatsing door de zijdelingse stijfheid van banden en op-
hanging.

φ : hoek tengevolge van de elasticiteit van de banden.

ψ : de shimmy hoek.



Een zijwaartse verplaatsing x van het onderstel geeft aanleiding tot wrij-
vingskrachten W_1 en W_2 op de wielen. Hierdoor ontstaat een wrijvingsmoment
 M_W op de wielen.



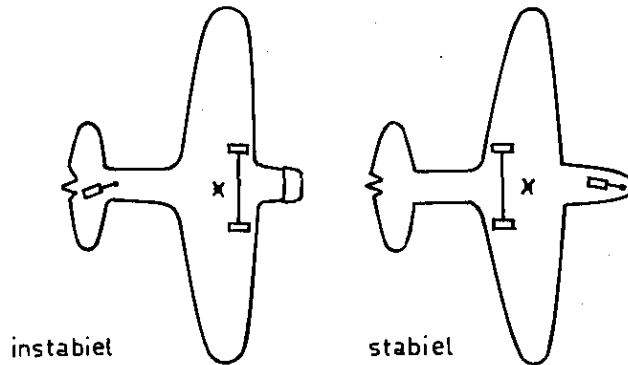
Dit wrijvingsmoment M_W veroorzaakt de hoek φ . Als φ ontstaat dan verandert
het impulsmoment J_ω van de wielen van richting. De hierbij optredende veran-
dering van impulsmoment \dot{D} levert een moment langs de verticale as, waardoor
de shimmy hoek ψ ontstaat. Deze hoek ψ geeft tengevolge van de sturing een
nieuwe x uitwijking, enzovoorts.

Het shimmy effect is een zgn. self-excited vibration en het effect kan in
bepaalde omstandigheden opslingeren.

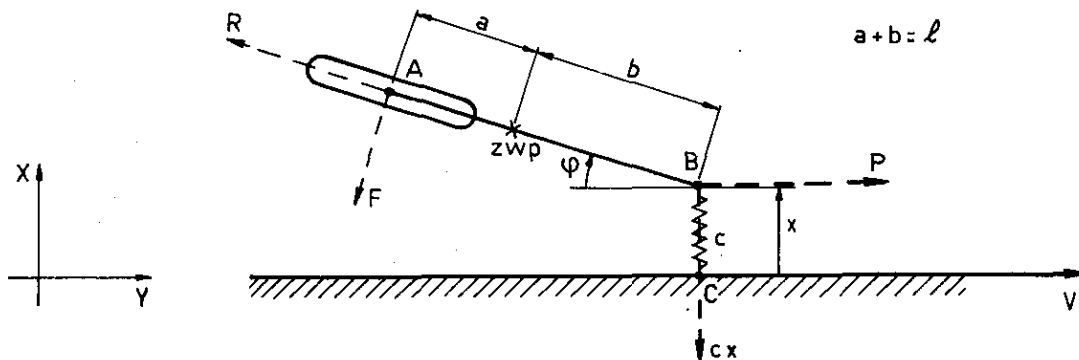
Het shimmy effect kan echter ook direct aanwijsbare oorzaken hebben, zoals
bv. slecht gebalanceerde wielen.

De energiebron voor het shimmyen is de wrijvingskracht en dus in feite de kinetische energie van de auto. Een afdoende remedie bij auto's is de onafhankelijke ophanging van de wielen, waardoor ze alleen zuiver horizontaal bewegen.

Voor het landingsgestel van een vliegtuig kunnen we aantonen dat de in de figuur getekende situatie geldt:



We zullen nu de shimmy van een vliegtuigwiel in gesimplificeerde vorm beschouwen:



x is de zijdelingse uitwijking.

φ is de shimmy-hoek.

We nemen aan dat:

- Massa en stijfheid van vliegtuig \gg die van landingsgestel.
- De band is star en er is geen zijwaartse slip.

De krachten op het gestel zijn P , cx , F en R .

De coördinaten van het zwaartepunt zijn:

$$(228) \quad \begin{cases} X_z = x + b \sin \varphi \\ Y_z = Vt - b \cos \varphi . \end{cases}$$

Dus

$$(229) \quad \begin{cases} m\ddot{X}_z = m[\ddot{x} + b(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)] = -cx - F \cos \varphi + R \sin \varphi \\ m\ddot{Y}_z = mb[\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] = -F \sin \varphi - R \cos \varphi + P . \end{cases}$$

De eerste vergelijking vermenigvuldigen met $\cos \varphi$ en de tweede met $\sin \varphi$ en daarna optellen geeft

$$(230) \quad m(\ddot{x} \cos \varphi + b\ddot{\varphi}) = -cx \cos \varphi - F + P \sin \varphi .$$

De eerste vergelijking vermenigvuldigen met $-\sin \varphi$ en de tweede met $\cos \varphi$ en optellen geeft

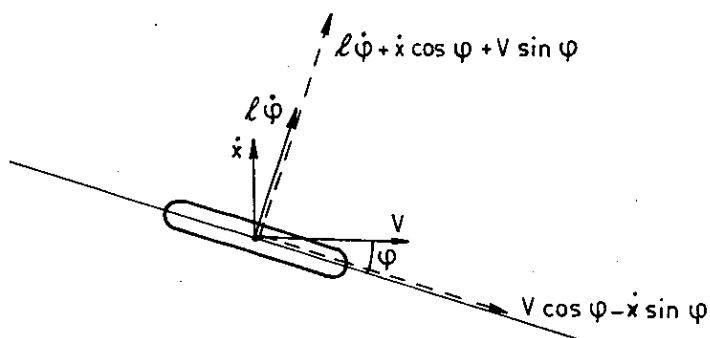
$$(231) \quad -m(\ddot{x} \sin \varphi + b\dot{\varphi}^2) = cx \sin \varphi - R + P \cos \varphi .$$

We hebben nu 2 vergelijkingen voor 5 onbekenden P , R , F , φ en x .

Zij J_0 het traagheidsmoment om het zwaartepunt in de φ -richting. Pas op AB toe $M = \dot{D}$ om het zwaartepunt

$$(232) \quad J_0 \ddot{\varphi} = cxb \cos \varphi - Pb \sin \varphi - Fa \cos \varphi .$$

Voor de snelheden van het wiel zien we:



Het wiel rolt, dus geldt voor de hoeksnelheid ω van het wiel:

$$(233) \quad \omega = \frac{1}{r} V(\cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi) \quad (r \text{ is de straal van het wiel}).$$

Uit $M = \dot{D}$ voor het wiel alleen, om het zwaartepunt volgt dan

$$(234) \quad J_{\omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{r} (V \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi) = Rr$$

waarin J_{ω} het traagheidsmoment van het wiel is.

Er is aangenomen dat er geen zijwaartse slip is, dus geldt:

$$(235) \quad \ell \dot{\varphi} + \dot{x} \cos \varphi + V \sin \varphi = 0 .$$

Onderstel nu x en φ klein en lineariseer de vergelijkingen (230, 231, 232, 234, 235). Uit (234) volgt direct:

$$(236a) \quad R = O(\varphi^2) ,$$

en hiermee uit (231)

$$(236b) \quad P = O(\varphi^2) .$$

We nemen dan verder $R = P = 0$ en hebben over, na lineariseren, de vergelijkingen (230), (232) en (235) met onbekenden x , φ en F :

$$(237) \quad \begin{cases} m(\ddot{x} + b\ddot{\varphi}) + cx + F = 0 \\ J_0 \ddot{\varphi} - cbx + Fa = 0 \\ \dot{x} + \ell \dot{\varphi} + V\varphi = 0 . \end{cases}$$

Van dit stelsel onderzoeken we of de evenwichtsstand $x = \varphi = F = 0$ stabiel is. We stellen hiertoe

$$(238) \quad x = x_0 e^{\lambda t} , \quad \varphi = \varphi_0 e^{\lambda t} \quad \text{en} \quad F = F_0 e^{\lambda t} .$$

Substitutie hiervan in de 3 vergelijkingen geeft een stelsel waarvan we de coëfficiëntendeterminant $= 0$ stellen. Als karakteristieke vergelijking krijgen we

$$(239) \quad a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

met

$$(240) \quad a_0 = J_0 + ma^2 , \quad a_1 = amV , \quad a_2 = c\ell^2 \quad \text{en} \quad a_3 = cV\ell .$$

De stabiliteitsconditie is: Voor alle λ moet $\text{Re}(\lambda) < 0$ zijn. Alle $\text{Re}(\lambda) < 0$ dan en slechts dan als voldaan is aan de Routh-Hurwitz condities:

$$(241) \quad \Delta_1 = a_1 = amV > 0 \quad (\text{altijd voldaan}),$$

$$(242) \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} amV & J_0 + ma^2 \\ cV\ell & c\ell^2 \end{vmatrix} > 0 ,$$

dus

(243) aml - /

(244) /

De s+

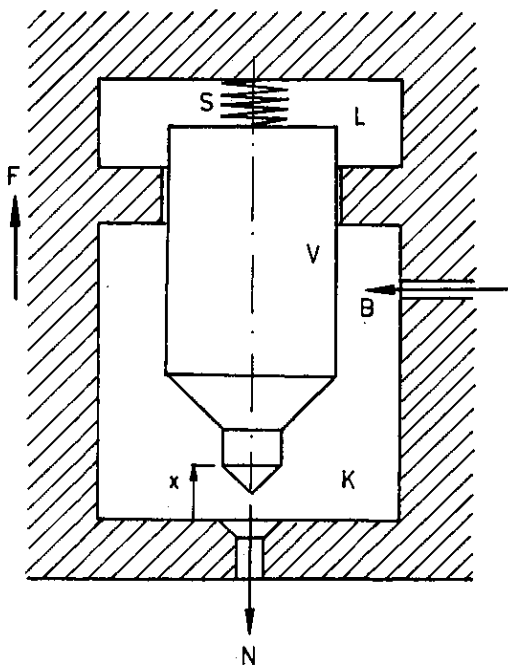
Zij $x = x_0$ de evenwichtsstand: Bij N verlaat evenveel vloeistof de kamer als er bij B inkomt.

Als de klep hoger zit dan x_0 stroomt er meer uit de kamer dan erin komt en als de klep lager zit stroomt er minder uit dan in.

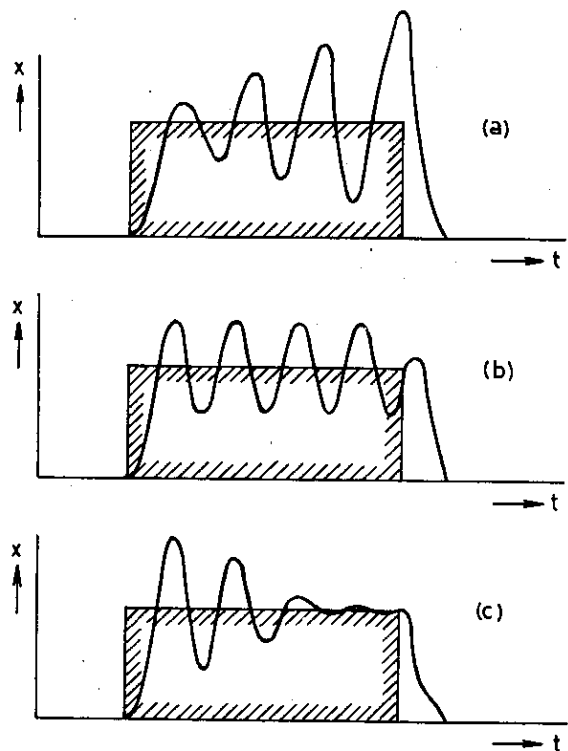
Hoe meer olie er in K zit, hoe hoger de druk is.

Neem aan dat de klep vanuit x_0 omhoog gaat. Gedurende de volgende halve trillingsperiode is de uitstroming dan groter dan de instroming, dus de druk neemt af. Dus als de klep vanuit x_0 omlaag gaat is de druk minimaal en omgekeerd is de druk maximaal als de klep vanuit x_0 omhoog gaat. Hieruit zien we dat de trilling opslingert als er geen energieverlies is door demping of wrijving.

In bovenstaande redenering is de volumeverandering van K door de beweging van V verwaarloosd. De drukverandering hierdoor is klein ten opzichte van de druk door de pomp. Bovendien zijn de drukvariaties in fase met de klepverplaatsing.

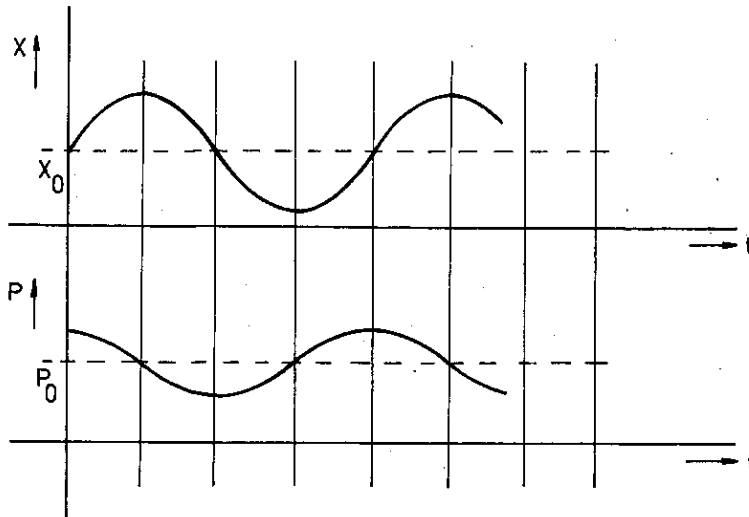


Ventiel van dieselmotor met vloeistofinjectie



Trillingen van een instabiele (a), neutrale (b) en stabiele klep van een ventiel.

We zetten de klepverplaatsing x en de druk P in de kamer K in het geval van opslingering nog uit in grafiek. P_0 is de druk in de evenwichtstoestand.



De krachten die op V werken in positieve X -richting zijn:

- i) veerkracht: $- F_0 - cX$ (F_0 is de stelkracht van de veer),
- ii) demping : $- \rho \dot{X}$,
- iii) drukkracht: PA (A doorsnede van ventiel).

De bewegingsvergelijking is

$$(246) \quad m\ddot{X} = - F_0 - cX - \rho\dot{X} + PA .$$

In de evenwichtsstand X_0, P_0 ($\ddot{X} = \dot{X} = 0$) geldt:

$$(247) \quad - F_0 - cX_0 + P_0A = 0 .$$

We stellen

$$(248) \quad \begin{cases} X(t) = X_0 + x(t) \\ P(t) = P_0 + p(t) . \end{cases}$$

De bewegingsvergelijking gaat dan over in

$$(249) \quad m\ddot{x} = - cx - \rho\dot{x} + pA .$$

In deze vergelijking zitten 2 onbekenden, x en p . We zoeken nog een vergelijking.

De drukverandering p wordt beïnvloed door twee effecten:

- a) de hoeveelheid olie in kamer K ;

b) De volumeverandering van K.

ad a). We nemen aan dat bij B een constante hoeveelheid olie per seconde naar binnen gaat: U_0 .

De uitstromende hoeveelheid olie is evenredig met de uitstroomopening en met de wortel uit de druk: $CX\sqrt{P}$. De totale afname per seconde is dan

$$(250) \quad CX\sqrt{P} - U_0 = C(X_0 + x)\sqrt{P_0 + p} - U_0 \approx CX_0\sqrt{P_0} - U_0 + C\sqrt{P_0} x + \frac{CX_0}{2\sqrt{P_0}} p .$$

Omdat $CX_0\sqrt{P_0} = U_0$ is de totale uitstroming

$$(251) \quad \tilde{C}x + \frac{\tilde{C}X_0}{2P_0} p \quad \text{met } \tilde{C} = C\sqrt{P_0} .$$

ad b). De toename van het volume per seconde is

$$(252) \quad A\dot{X} = A\dot{x} .$$

We onderstellen een lineair verband voor de drukverandering ten opzichte van beide bovengenoemde effecten:

$$(253) \quad \dot{p} = -\alpha\left(\tilde{C}x + \frac{\tilde{C}X_0}{2P_0} p + A\dot{x}\right) .$$

Uit de bewegingsvergelijkingen (249) en (253) elimineren we p en vinden

$$(254) \quad m\ddot{x} + \left[\rho + \frac{\alpha U_0}{2P_0} m\right]\dot{x} + \left[c + \frac{\alpha U_0}{2P_0} \rho + \alpha A^2\right]x + \left[\frac{\alpha U_0}{2P_0} c + \alpha A\tilde{C}\right]x = 0 .$$

Na substitutie van $x = \text{const. } e^{\lambda t}$ vinden we de karakteristieke vergelijking

$$(255) \quad m\lambda^3 + \left[\rho + \frac{\alpha U_0}{2P_0} m\right]\lambda^2 + \left[c + \frac{\alpha U_0}{2P_0} \rho + \alpha A^2\right]\lambda + \left[\frac{\alpha U_0}{2P_0} c + \alpha A\tilde{C}\right] = 0 .$$

Voor stabiliteit moet aan de R.-H. condities voldaan worden. Dit geeft de stabiliteitsvoorwaarde

$$(256) \quad \rho + \frac{\alpha m U_0}{2P_0} > \frac{m\alpha A\left(\tilde{C} + \frac{cU_0}{2AP_0}\right)}{c + \frac{\alpha \rho U_0}{2P_0} + \alpha A^2}$$

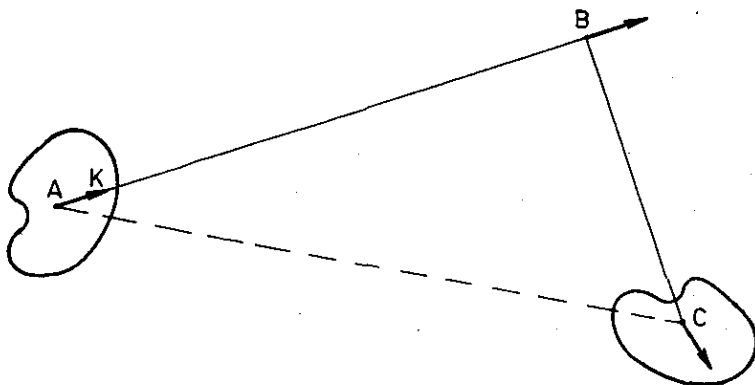
waaruit we zien dat zelfs voor $\rho = 0$ stabiliteit mogelijk is.

Hoofdstuk 5.

§ 1. Circulatorische krachten (voorbeelden)

Een kracht heet circulatorisch als de arbeid die hij verricht afhankelijk is van de weg tussen begin- en eindtoestand.

a) Kracht die vast is t.o.v. een lichaam.

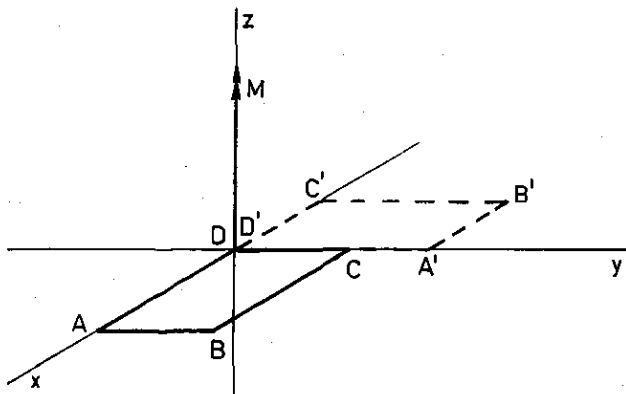


Verplaatsen we het lichaam van A naar B, en daarna evenwijdig aan zichzelf van B naar C en roteren we het lichaam pas na aankomst in C, dan verricht K arbeid langs AB.

Roteren we het lichaam in A zodanig dat $K \perp AC$, verplaatsen we het lichaam in deze toestand naar C (langs AC) en roteren we het lichaam in C naar de eindtoestand, dan heeft K geen arbeid verricht.

De verrichte arbeid is dus afhankelijk van de gevolgde weg.

b) Moment dat vast is in de ruimte.



Zij M een moment dat vast is in de ruimte en $ABCD$ een plaat in het X - Y vlak. We brengen de plaat op twee verschillende manieren in de eindtoestand $A'B'C'D'$ en zullen laten zien dat de daarbij verrichte arbeid niet gelijk is.

Roteren we de plaat over $\frac{\pi}{2}$ om de z -as, dan verricht het moment de arbeid $A = M \frac{\pi}{2} \neq 0$.

Roteren we de plaat over $\frac{\pi}{2}$ (in positieve richting) om de y -as, daarna over $\frac{\pi}{2}$ (in positieve richting) om de x -as en vervolgens over $\frac{\pi}{2}$ (in negatieve richting) om de y -as, dan is de eindtoestand $A'B'C'D'$ bereikt.

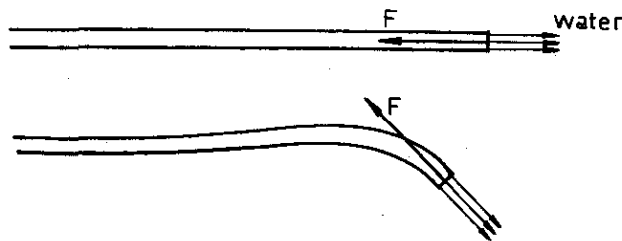
Bij geen van deze drie rotaties heeft M arbeid verricht.

Dus een moment dat vast is in de ruimte is een circulatorische grootheid.

§ 2.1. Follower Force

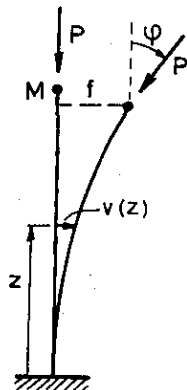
Definitie. Een follower force is een kracht die in het uiteinde raakt aan een slank lichaam.

De kracht die door wegsputend water wordt uitgeoefend op een tuinslang is een follower force.

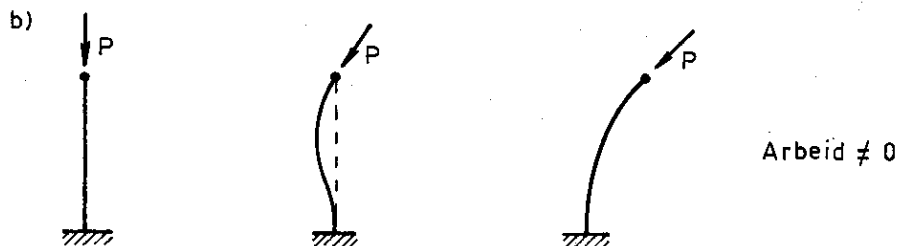
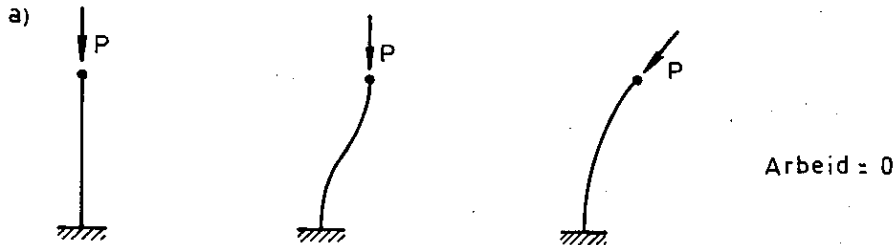


We beschouwen een massalooze staaf met lengte ℓ . In $z = \ell$ is een puntmassa M aangebracht. De staaf wordt belast door een follower force P .

$$(257) \quad \begin{cases} \ddot{f} = v(\ell) \\ \varphi = v'(\ell) \end{cases} .$$



Dat deze follower force een circulatorische kracht is ziet men in de volgende plaatjes, waarin de staaf op twee verschillende manieren van begin- naar eindtoestand wordt gebracht. De daarbij door P verrichte arbeid is niet gelijk.



We vragen ons af of de evenwichtsstand ($v = 0$) van de staaf stabiel is.

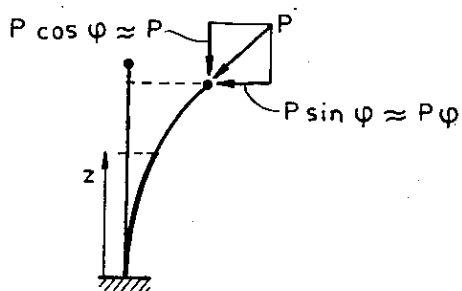
We zullen dit probleem eerst op de klassieke Euler manier behandelen.

Geef de staaf een kleine uitwijking (v en φ klein) en beschouw het evenwicht ter plaatse z .

$$(258) \quad M(z) = P(f - v) - P\varphi(l - z) .$$

Bernouilli:

$$(259) \quad M(z) = EI \frac{d^2 v}{dz^2} .$$



Dus de DV voor de staaf wordt

$$(260) \quad EI \frac{d^2v}{dz^2} = P(f - v) - P\varphi(\ell - z) .$$

De randvoorwaarden zijn:

$$(261) \quad \begin{cases} v(0) = v'(0) = 0 \\ v(\ell) = f, \quad v'(\ell) = \varphi . \end{cases}$$

De condities voor $z = \ell$ komen overeen met moment en dwarskracht en zijn gelijk aan nul.

Stel $k^2 = \frac{P}{EI}$, dan gaat de DV over in

$$(262) \quad v'' + k^2v = k^2f - k^2\varphi(\ell - z)$$

met oplossing

$$(263) \quad v(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + f - \varphi(\ell - z) .$$

De oplossing $v = 0$ voldoet hieraan ($C_1 = C_2 = f = \varphi = 0$).

We vragen ons echter af of er ook een andere oplossing mogelijk is.

Vullen we de randvoorwaarden in de oplossing in, dan krijgen we een stelsel van 4 vergelijkingen voor de onbekenden C_1, C_2, f, φ . Willen we een andere dan de nuloplossing hebben voor deze 4 onbekenden, dan moet de coëfficiënten-determinant van het stelsel vergelijkingen gelijk zijn aan nul. De determinant is

$$(264) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -\ell \\ k & 0 & 0 & 1 \\ \sin k\ell & \cos k\ell & 0 & 0 \\ k \cos k\ell & -k \sin k\ell & 0 & 0 \end{vmatrix} = -k \neq 0 .$$

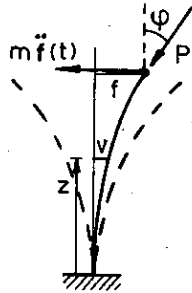
Dus alleen de oplossing $v = 0$ is mogelijk.

Met andere woorden: $v = 0$ is steeds stabiel.

Deze conclusie is echter in tegenspraak met wat we in de praktijk (bv. bij de "kwispelende" tuinslang) ervaren.

We zullen laten zien dat de klassieke Euler-methode (die uitgaat van statische uitwijkingen) niet toereikend is om het gedrag van een staaf onder een follower force te beschrijven.

Dit gedrag is wel te beschrijven met de nu volgende, dynamische, methode der kleine trillingen.



We zetten het probleem stil en voeren de traagheidskracht $m\ddot{f}(t)$ in.

Nu zijn v , f en φ functies van de tijd t .

Het evenwicht ter plaatse z levert

$$(265) \quad M(z) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = P(f - v) - P\varphi(l - z) - m \frac{d^2 f}{dt^2} (l - z) .$$

De randvoorwaarden zijn hetzelfde als die bij de statische aanpak.

We stellen

$$(266) \quad v(z, t) = V(z)e^{i\omega t} , \quad f(t) = Fe^{i\omega t} , \quad \varphi(t) = \phi e^{i\omega t} .$$

De stabiliteitseis die we stellen is:

$$|v(z, t)| \text{ moet begrensd blijven voor } t \rightarrow \infty .$$

Stel $\omega = \omega_R + i\omega_I$ (ω_R en ω_I beide reëel). Dan is

$$(267) \quad e^{i\omega t} = e^{i\omega_R t} e^{-\omega_I t} .$$

Voor $\omega_I > 0$: $e^{-\omega_I t} \rightarrow 0$, we spreken van asymptotische stabiliteit.
Dit geval treedt op als er demping is.

$$\omega_I = 0: e^{-\omega_I t} = 1, \text{ stabiliteit.}$$

$$\omega_I < 0: e^{-\omega_I t} \rightarrow \infty, \text{ instabiliteit.}$$

Aangezien we demping buiten beschouwing laten nemen we als criterium voor stabiliteit: ω is reëel.

Stellen we bovendien

$$(268) \quad k^2 = \frac{P}{EI}, \quad \mu = \frac{m}{EI},$$

dan gaat de DV voor de staaf over in

$$(269) \quad V'' + k^2 V = k^2 F - k^2 \phi(\ell - z) + \mu \omega^2 F(\ell - z).$$

De randvoorwaarden zijn:

$$(270) \quad \begin{cases} V(0) = 0, & V'(0) = 0 \\ V(\ell) = F, & V'(\ell) = \phi. \end{cases}$$

We zoeken weer een andere oplossing dan $V \equiv 0$.

De algemene oplossing van de DV is

$$(271) \quad V(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + F - \phi(\ell - z) + \frac{\mu \omega^2}{k^2} F(\ell - z).$$

Door substitutie van de randvoorwaarden in de oplossing vinden we de coëfficiënten determinant

$$(272) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 + \frac{\mu \omega^2}{k^2} \ell & -\ell \\ k & 0 & -\frac{\mu \omega^2}{k^2} \ell & 1 \\ \sin k\ell & \cos k\ell & 0 & 0 \\ k \cos k\ell & -k \sin k\ell & -\frac{\mu \omega^2}{k^2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Door uitschrijven van deze determinant krijgen we de karakteristieke vergelijking voor ω met als oplossing

$$(273) \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}} \sqrt{\frac{(k\ell)^2}{\frac{\sin k\ell}{k\ell} - \cos k\ell}}$$

waaruit blijkt dat de eigenfrequentie een functie van P is.

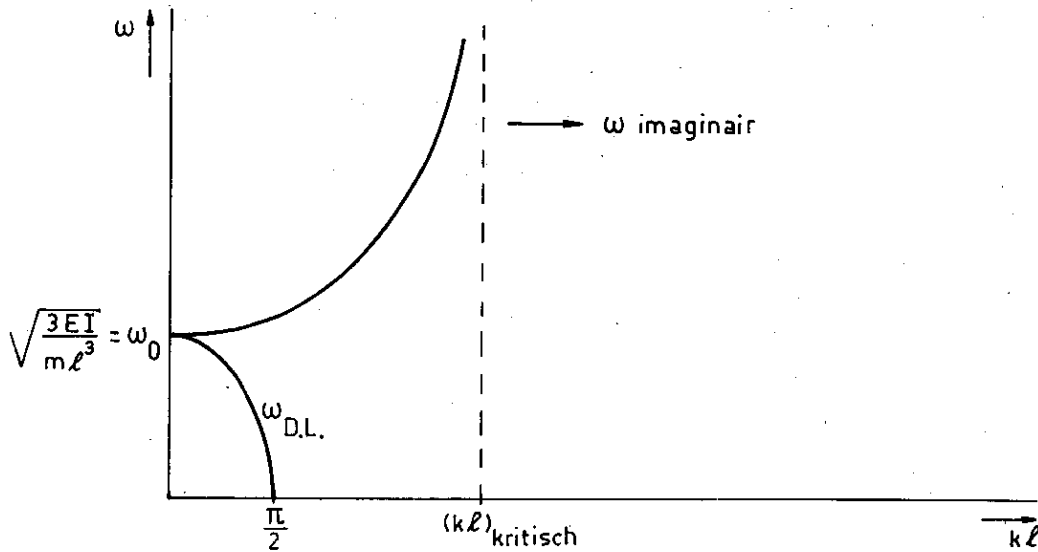
Voor kleine P (en dus kleine k) is ω reëel omdat dan

$$(274) \quad \frac{\sin k\ell}{k\ell} - \cos k\ell > 0.$$

ω wordt imaginair voor $\tan k\ell = k\ell$. De daaruit volgende kritische waarde voor P is

$$(275) \quad P_{\text{knik}} = \frac{20,19 EI}{\ell^2} .$$

In grafiek zien we



Indien we de methode der kleine trillingen in plaats van de statische behandeling toepassen op de staaf met massapunt onder een dead load belasting (D.L.) dan zien we dat geldt ($\varphi \equiv 0$):

De DV

$$(276) \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = P(f - v) - m \frac{d^2 f}{dt^2} (\ell - z)$$

met randvoorwaarden:

$$(277) \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(\ell) = f .$$

Stel weer:

$$(278) \quad \begin{cases} v(z, t) = V(z) e^{i\omega t} \\ f(t) = F e^{i\omega t} . \end{cases}$$

Voor een oplossing ongelijk aan de nuloplossing vinden we dan:

$$(279) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 + \frac{\mu\omega^2}{k^2} \ell \\ k & 0 & -\frac{\mu\omega^2}{k^2} \\ \sin k\ell & \cos k\ell & 0 \end{vmatrix} = 0$$

waaruit volgt

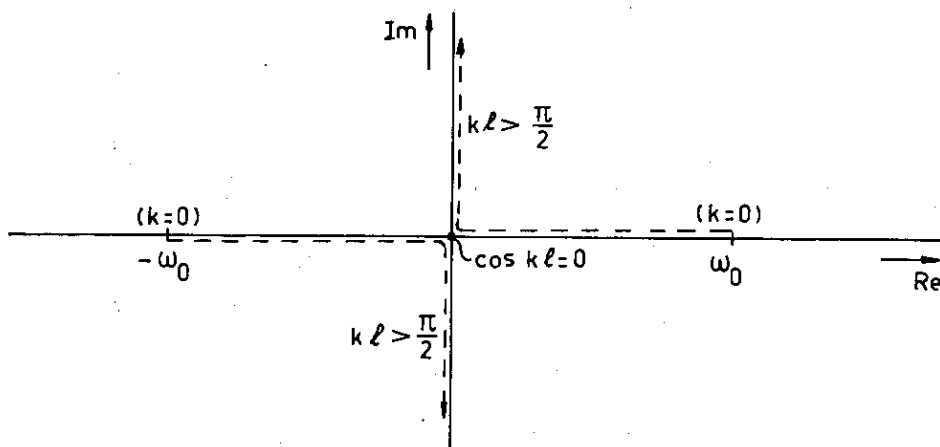
$$(280) \quad \omega_{D.L.} = \pm \sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}} \sqrt{\frac{k^2 \ell^2 \cos k\ell}{\frac{\sin k\ell}{k\ell} - \cos k\ell}}$$

$\omega_{D.L.}$ wordt imaginair voor $k\ell = \frac{\pi}{2}$ en de knikwaarde voor dead load belasting is

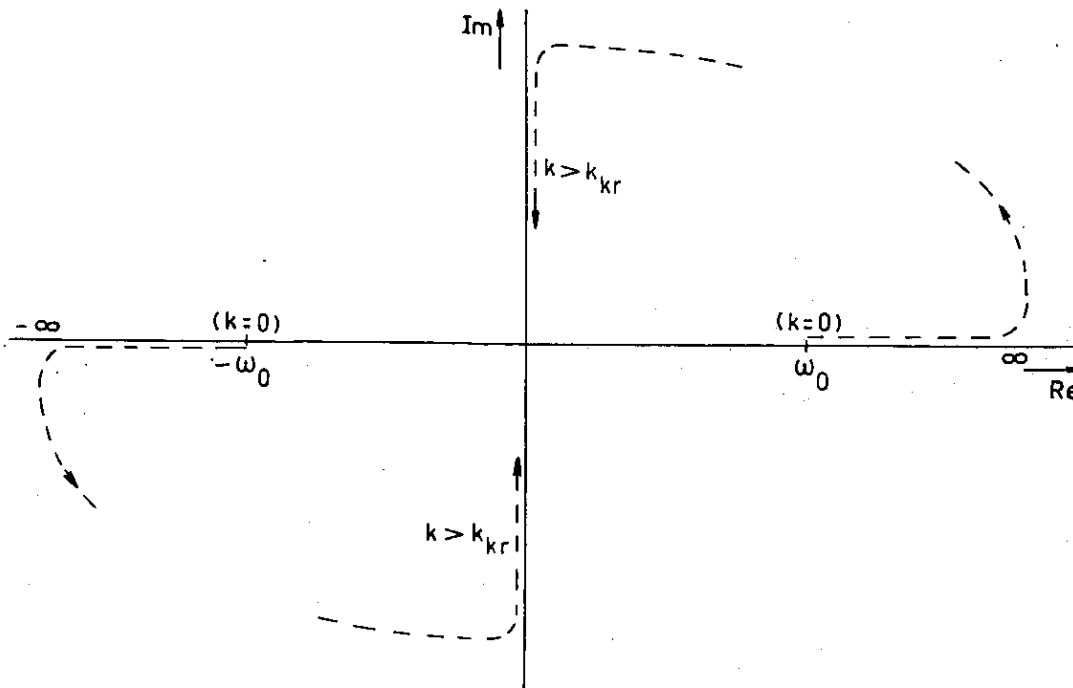
$$(281) \quad P_{kn} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$$

Voor $k = 0$ vinden we de eigenfrequentie van de balk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{m\ell^3}}$.

In het dead load geval wordt voor toenemende k de frequentie steeds kleiner totdat $\omega = 0$ de eerste maal optreedt (voor P_{knik}). Voor nog grotere k wordt ω imaginair (er treedt instabiliteit op). De knikwaarde wordt hier dus gevonden voor $\omega = 0$. Bij statische bepaling van de knikwaarde stellen we in feite al meteen $\omega = 0$. De statische methode levert in het dead load geval dan ook het correcte resultaat.



In het geval van de F.F. (follower force) daarentegen neemt ω toe voor toenemende k en zelfs $\omega \rightarrow \infty$ voor $\tan k\ell = k\ell$ en voor $k > k_{kr}$ treedt instabiliteit op (ω imaginair).



Bij F.F. treedt de stabiliteitsgrens op voor $\omega \rightarrow \infty$. De statische methode ($\omega = 0$) geeft hier dus zeker niet de goede knikwaarde.

Samenvattend kunnen we zeggen dat de methode der kleine trillingen (dynamische methode) steeds toepasbaar is, terwijl de statische methode slechts toepasbaar is in conservatieve gevallen.

Stellen we de gebruikte criteria tegenover elkaar dan zien we dat in het statische geval:

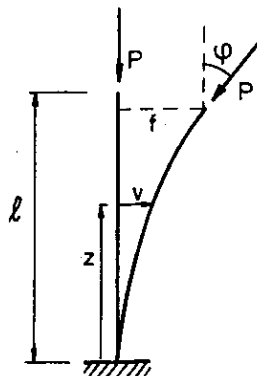
$$(282) \quad P < P_{kn} : v \equiv 0, \quad P > P_{kn} : v \neq 0;$$

in het dynamische geval:

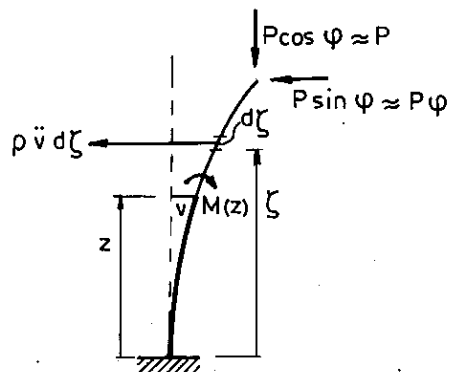
$$(283) \quad P < P_{kn} : |v| \text{ begrensd ("klein")}, \quad P > P_{kn} : |v| \rightarrow \infty \text{ ("groot").}$$

§ 2.2. Staaft met verdeelde massa onder een follower force

De massadichtheid van de staaft is ρ .



We beschouwen de staaf ter plaatse z en stellen daar het momentenevenwicht op. De uitwijkingen $\varphi = \varphi(t)$, $f = f(t)$ en $v = v(z,t)$ zijn weer klein. Bovendien wordt de staaf stilgezet en brengen we dus de traagheidskracht in rekening.



De randvoorwaarden zijn:

$$(284) \quad \begin{cases} v(0,t) = v'(0,t) = 0 \\ v''(l,t) = v'''(l,t) = 0 \quad (M(l,t) = D(l,t) = 0) \end{cases} .$$

Voor het evenwicht geldt

$$(285) \quad M(z) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = P(f - v) - P\varphi(l - z) - \int_z^l (\zeta - z) \rho \ddot{v} d\zeta .$$

Tweemaal differentiëren naar z geeft

$$(286) \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = -P \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} .$$

Stel:

$$(287) \quad v(z,t) = V(z)e^{i\omega t} .$$

Voor ω reëel is de staaf stabiel.

Stel verder

$$(288) \quad \frac{P}{EI} = k^2 , \quad \frac{\rho}{EI} = r^2 ,$$

dan gaat de DV over in

$$(289) \quad V^{(iv)} + k^2 V'' - r^2 \omega^2 V = 0$$

met randvoorwaarden

$$(290) \quad V(0) = V'(0) = V''(\ell) = V'''(\ell) = 0 .$$

Stel nu $V(z) = Ae^{\lambda z}$, dan vinden we voor λ :

$$(291) \quad \lambda^4 + k^2\lambda^2 - r^2\omega^2 = 0$$

met oplossing

$$(292) \quad (\lambda^2)_{1,2} = -\frac{1}{2}k^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}k^4 + r^2\omega^2} .$$

Omdat $\sqrt{\frac{1}{4}k^4 + r^2\omega^2} > \frac{1}{2}k^2$ is

$$(293) \quad \lambda_1^2 = -\frac{1}{2}k^2 + \sqrt{\frac{1}{4}k^4 + r^2\omega^2} > 0$$

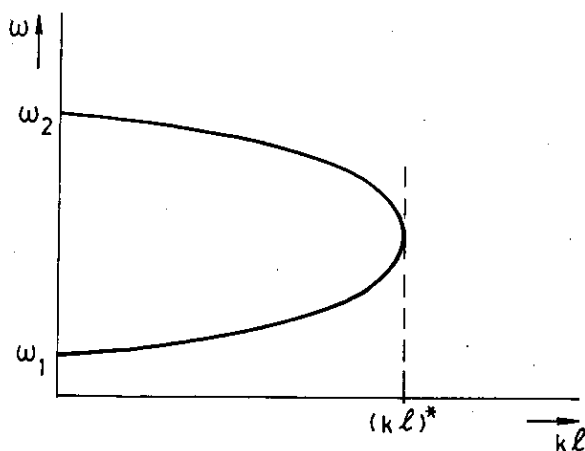
en geeft λ_1 aanleiding tot oplossingen in de vorm van e-machten.

$$(294) \quad V(z) = A_1 \sinh \lambda_1 z + A_2 \cosh \lambda_1 z + A_3 \sin \lambda_2 z + A_4 \cos \lambda_2 z .$$

Substitutie van de randvoorwaarden in de oplossing geeft op de bekende manier aanleiding tot een karakteristieke vergelijking voor ω :

$$(295) \quad (k\ell)^4 + \omega r \ell^2 \sin \lambda_2 \ell \sinh \lambda_1 \ell \cdot (k\ell)^2 + \\ + 2\omega^2 \ell^4 r^2 (1 + \cos \lambda_2 \ell \cosh \lambda_1 \ell) = 0 .$$

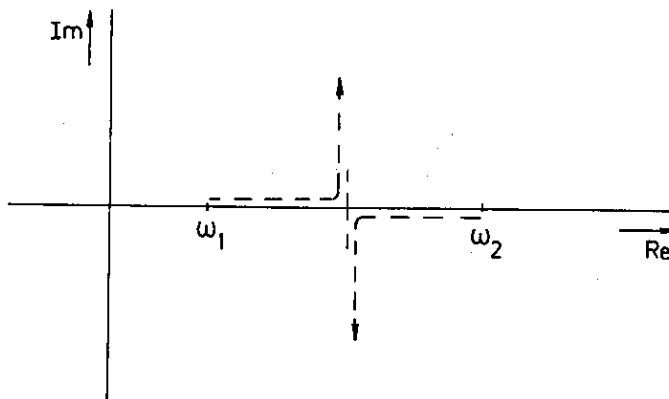
In grafiek zien we ω als functie van $k\ell$:



Voor $kl > (kl)^*$ worden de wortels ω toegevoegd complex en de staaf dus instabiel. Voor de knikwaarde volgt dan

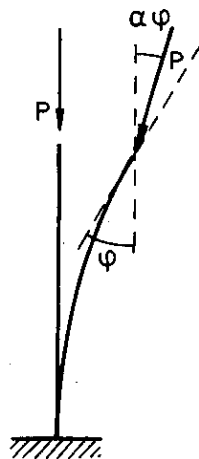
$$(296) \quad P_{kn} = \frac{20,05 EI}{l^2} .$$

In het complexe vlak zien we de volgende situatie bij toenemende waarde van k :



§ 3. Sub- en supertangentiële belasting

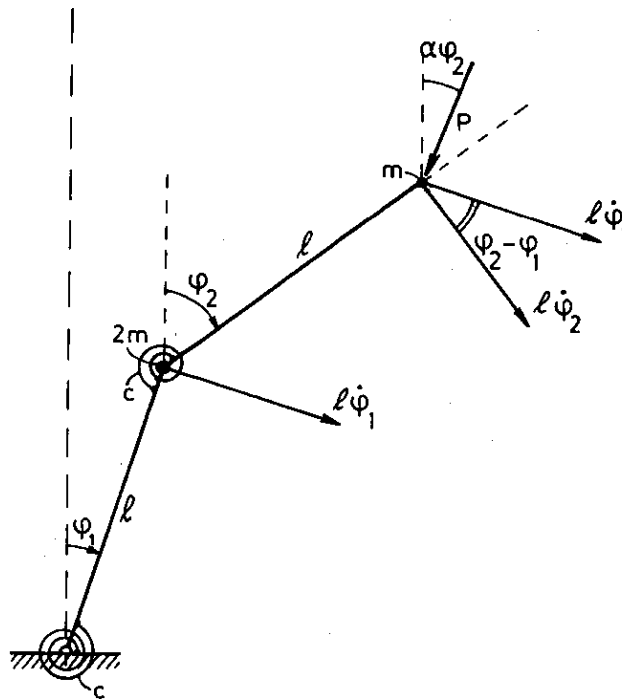
We beschouwen het geval van een kracht die niet hoeft te liggen langs de raaklijn aan het uiteinde van een staaf en die niet conservatief is.



We onderscheiden de volgende gevallen:

- $\alpha = 0$: conservatieve belasting,
- $\alpha < 1$: subtangentiële belasting,
- $\alpha = 1$: Follower Force,
- $\alpha > 1$: supertangentiële belasting.

Om het sub- en supertangentiële geval te bekijken maken we een vereenvoudigd model. Neem twee massaloze staafjes met in hun uiteinden puntmassa's ter grootte $2m$ en m . (Eventueel met massa's μm en $(3-\mu)m$, $0 < \mu < 3$.) We laten de staafjes scharnieren en brengen in de scharnieren nog veertjes aan. Er ontstaat dan een model, met twee graden van vrijheid φ_1 en φ_2 , dat we doorrekenen m.b.v. de methode van Lagrange



De lengte van de staafjes is l en de veerconstanten zijn c .

De vergelijkingen van Lagrange luiden:

$$(297) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

met $L = T - U$, $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$ en Q_k de gegeneraliseerde kracht.

Voor de kinetische energie T geldt:

$$(298) \quad T = \frac{1}{2} 2m(\dot{\ell}\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}m[\{\ell\dot{\phi}_2 + \dot{\ell}\phi_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\}^2 + \{\dot{\ell}\phi_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\}^2] .$$

We nemen de hoeken φ_1 en φ_2 klein en lineariseren bovenstaande uitdrukking, dan

$$(299) \quad T = \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2[3\dot{\phi}_1^2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_2^2] + O(\varphi^4) .$$

De potentiële energie U is afkomstig van de veertjes:

$$(300) \quad U = \frac{1}{2}c\varphi_1^2 + \frac{1}{2}c(\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

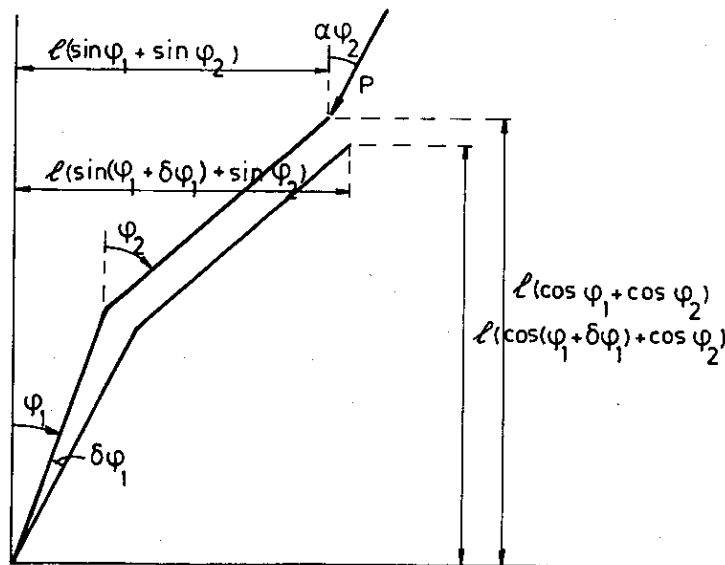
of

$$(301) \quad U = \frac{1}{2}c[2\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2] .$$

De gegeneraliseerde krachten Q_k halen we uit de relatie

$$(302) \quad \delta A = Q_k \delta q_k = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2 ,$$

waarin δA de arbeid is die verricht wordt bij virtuele veranderingen $\delta \varphi_1$ en $\delta \varphi_2$ van de gegeneraliseerde coördinaten φ_1 resp. φ_2 .



In het plaatje is φ_1 gevarieerd tot $\varphi_1 + \delta \varphi_1$. Op dezelfde manier wordt φ_2 gevarieerd tot $\varphi_2 + \delta \varphi_2$.

Voor de verrichte arbeid vinden we tengevolge van $\delta \varphi_1$ en $\delta \varphi_2$:

$$(303) \quad \delta A = P \cos \alpha \varphi_2 [\ell(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - \ell(\cos(\varphi_1 + \delta \varphi_1) + \cos \varphi_2)] + \\ - P \sin \alpha \varphi_2 [\ell(\sin(\varphi_1 + \delta \varphi_1) + \sin \varphi_1) - \ell(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)] +$$

$$+ P \cos \alpha \varphi_2 [\ell (\cos \varphi_2 - \cos(\varphi_2 + \delta \varphi_2))] + \\ - P \sin \alpha \varphi_2 [\ell (\sin(\varphi_2 + \delta \varphi_2) - \sin \varphi_2)] .$$

Door lineariseren vinden we dan

$$(304) \quad \delta A = P \ell (\varphi_1 - \alpha \varphi_2) \delta \varphi_1 + P \ell (1 - \alpha) \varphi_2 \delta \varphi_2$$

waaruit voor de gegeneraliseerde krachten volgt

$$(305) \quad \begin{cases} Q_1 = P \ell (\varphi_1 - \alpha \varphi_2) \\ Q_2 = P \ell (1 - \alpha) \varphi_2 . \end{cases}$$

Substitutie van de resultaten in de vergelijkingen van Lagrange geeft

$$(306) \quad \begin{cases} 3m\ell^2 \ddot{\varphi}_1 + m\ell^2 \ddot{\varphi}_2 + (2c - P\ell) \varphi_1 + (\alpha P\ell - c) \varphi_2 = 0 \\ m\ell^2 \ddot{\varphi}_1 + m\ell^2 \ddot{\varphi}_2 - c \varphi_1 + [c - (1 - \alpha)P\ell] \varphi_2 = 0 . \end{cases}$$

Ter oplossing van dit stelsel lineaire DV met constante coëfficiënten substitueren we $\varphi_1 = A_1 e^{i\Omega t}$ en $\varphi_2 = A_2 e^{i\Omega t}$.

Het model met de twee staafjes heeft een stabiele evenwichtstoestand als Ω reëel is.

Het stelsel DV gaat over in

$$(307) \quad \begin{cases} (2c - P\ell - 3m\ell^2 \Omega^2) A_1 + (\alpha P\ell - c - m\ell^2 \Omega^2) A_2 = 0 \\ (-c - m\ell^2 \Omega^2) A_1 + [c - (1 - \alpha)P\ell - m\ell^2 \Omega^2] A_2 = 0 . \end{cases}$$

Voor een andere oplossing dan die waarvoor $A_1 = A_2 = 0$ moet de determinant van bovenstaand stelsel gelijk zijn aan nul.

Stellen we

$$(308) \quad p = \frac{P\ell}{c} \quad \text{en} \quad \lambda = \frac{m\ell^2 \Omega^2}{c}$$

dan volgt de karakteristieke vergelijking

$$(309) \quad \lambda^2 - a\lambda + b = 0$$

met

$$(310) \quad a = \frac{1}{2}(7 + 2(\alpha - 2)p) \quad \text{en} \quad b = \frac{1}{2}((1 - \alpha)p^2 - 3(1 - \alpha)p + 1) .$$

De eis dat Ω reëel moet zijn komt overeen met de eis dat de wortels λ_1 en λ_2 van de karakteristieke vergelijking reëel en positief zijn.

Hieraan is voldaan als

$$(311) \quad \begin{cases} \text{i)} & \text{discriminant} \geq 0 : a^2 - 4b \geq 0 & \text{(D)} \\ \text{ii)} & \text{produkt } \lambda_1 \lambda_2 > 0 : b > 0 & \text{(P)} \\ \text{iii)} & \text{som } \lambda_1 + \lambda_2 > 0 : a > 0 & \text{(S).} \end{cases}$$

De discriminant $D = 0$ als:

$$(312) \quad p = \frac{8 - \alpha \pm \sqrt{(8 - \alpha)^2 - 4[1 + (1 - \alpha)^2]}}{2[1 + (1 - \alpha)^2]} .$$

p is hier reëel als

$$(313) \quad 0.345 \leq p \leq 1.305 .$$

Het produkt $P = 0$ als:

$$(314) \quad p = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - 9\alpha}{1 - \alpha}} .$$

p is reëel als

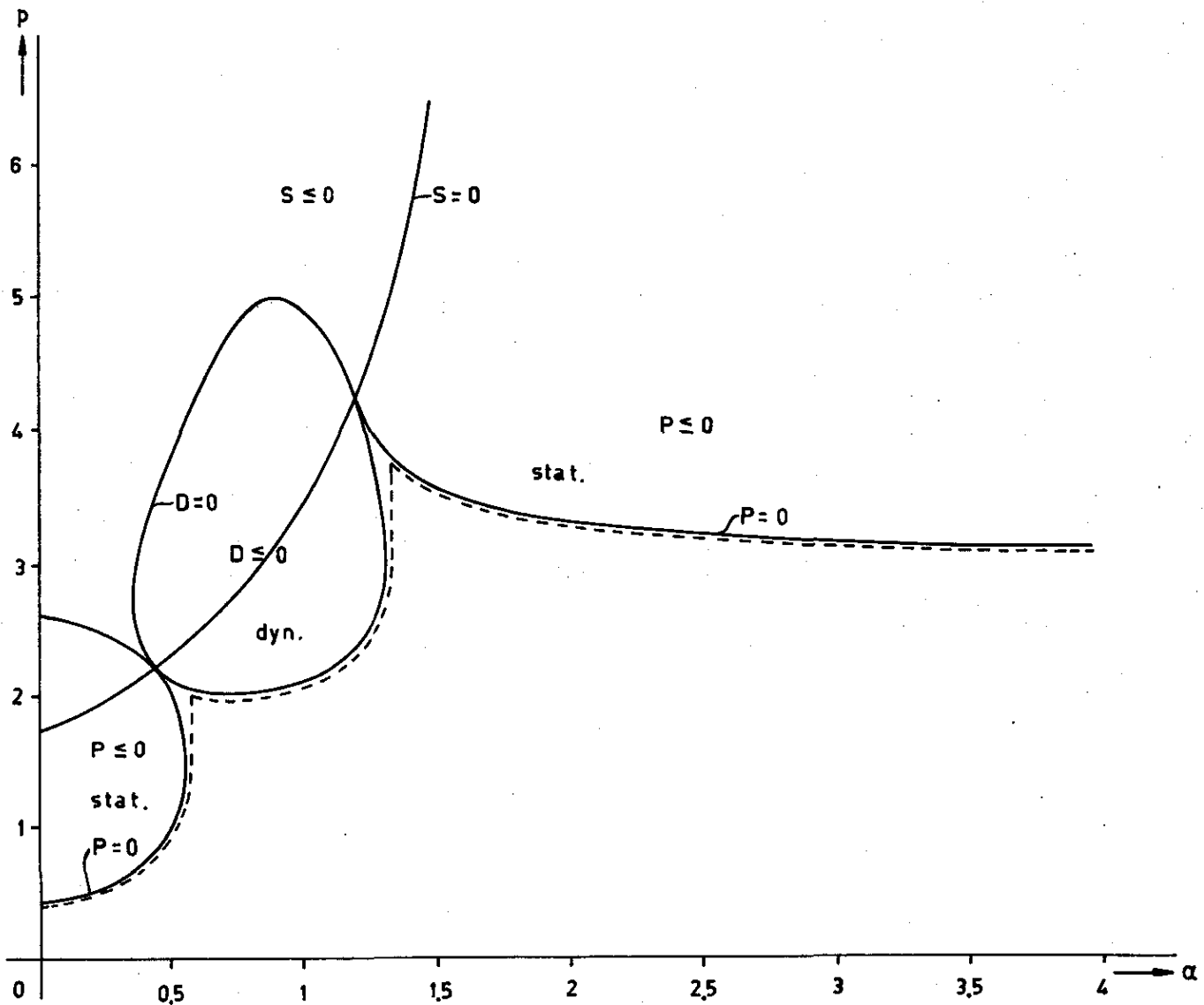
$$(315) \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{5}{9} \quad \text{en} \quad \alpha \geq 1 .$$

De som $S = 0$ als:

$$(316) \quad p = \frac{7}{2(2 - \alpha)} .$$

Aangezien op de krommen waarop $P = 0$ geldt $\lambda_1 = 0$ of $\lambda_2 = 0$ en dus $\Omega_{1,2} = 0$ (omdat $\Omega \sim \sqrt{\lambda}$) kunnen we daar eventueel de statische methode gebruiken om de stabiliteit te onderzoeken. Op de kromme waar $D = 0$ is $\lambda_1 = \lambda_2$ en zijn de λ 's nog reëel. Bij verhoging van de belasting worden de wortels λ_1 en λ_2 toegevoegd complex en moeten we ter bepaling van stabiliteit de dynamische methode gebruiken. We zien hieruit dat we in het algemene geval de dynamische methode moeten prefereren.

In de grafiek is de belasting p afgezet tegen de parameter α . Let speciaal op de beide sprongen in het stabiliteitsgebied.

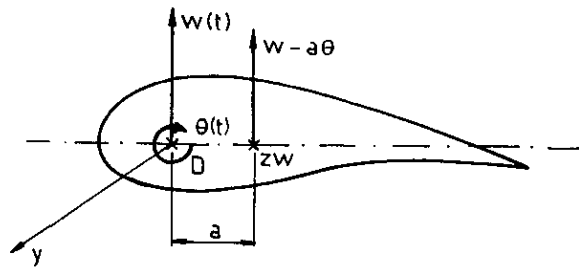


§ 4. Flutter

Flutter is de naam die gegeven is aan buig-torsie trillingen die ontstaan door stroming van vloeistoffen of gassen langs vlakke lichamen.

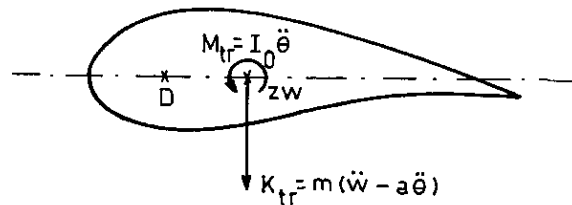
Als voorbeeld behandelen we flutter van een vliegtuigvleugel.

We beschouwen een vliegtuigdoorsnede



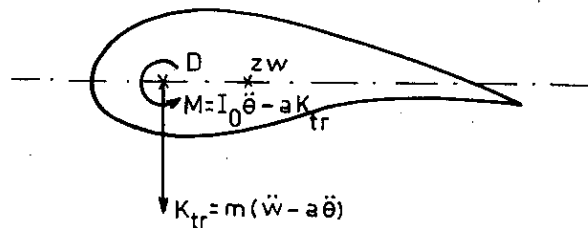
Het punt D is het zgn. dwarskrachtenmiddelpunt met de karakteristieke eigenschap dat krachten door D aanleiding geven tot torsievrije buiging.

We zetten het probleem stil door de traagheidskracht K_{tr} en het traagheidsmoment M_{tr} in te voeren (uiteraard beide per eenheid van lengte)



I_0 is het massatraagheidsmoment om een as door het zwaartepunt evenwijdig aan de y-as.

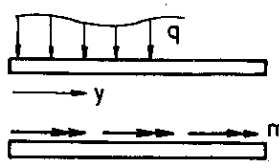
We laten vervolgens de K_{tr} aangrijpen in D, ter verkrijging van een torsievrije buiging.



Voor het moment M geldt dan

$$\begin{aligned}
 (317) \quad M &= I_0 \ddot{\theta} - a K_{tr} = I_0 \ddot{\theta} - a m (\ddot{w} - a \ddot{\theta}) \\
 &= (I_0 + m a^2) \ddot{\theta} - m a \ddot{w} \\
 &= I_D \ddot{\theta} - m a \ddot{w} .
 \end{aligned}$$

Bij het opstellen van de evenwichtsvergelijkingen voor de vleugel herinneren we eraan dat voor een balk onder belasting q en torsiebelasting m per lengte eenheid geldt:

$$(318) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{buigend moment: } \frac{\partial^2 M_{\text{buig}}}{\partial y^2} = -q \\ \text{torsiemoment : } \frac{\partial M_{\text{tors}}}{\partial y} = m \end{array} \right.$$


Voor de evenwichtsvergelijkingen van de vleugel volgt dan

$$(319) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 M_b}{\partial y^2} = -m(\ddot{w} - a\ddot{\theta}) \quad (\text{torsievrij want } K_{tr} \text{ gaat door } D) \\ \frac{\partial M_{\text{tors}}}{\partial y} = I_D \ddot{\theta} - ma\ddot{w} . \end{array} \right.$$

Voor het buigend moment en het torsiemoment gaan we uit van de constitutieve vergelijkingen:

$$(320) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_b = EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (EI: \text{ buigstijfheid}) \\ M_{\text{tors}} = GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (GJ: \text{ torsiestijfheid}). \end{array} \right.$$

De bewegingsvergelijkingen voor de trilling van de vleugel vinden we door substitutie van de constitutieve vergelijkingen in de evenwichtsvergelijkingen:

$$(321) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - ma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (GJ \frac{\partial \theta}{\partial y}) + ma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_D \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 . \end{array} \right.$$

We hebben hier te maken met gekoppelde buig-torsie-trillingen, aangezien w en θ in beide vergelijkingen voorkomen.

Een vleugel is aan een zijde ingeklemd en aan het uiteinde vrij waardoor voor de randvoorwaarden geldt:

$$(322) \quad \begin{cases} y = 0: & w = \frac{\partial w}{\partial y} = \theta = 0 \\ y = \ell: & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \text{ is het torsiemoment}\right). \end{cases}$$

Om de bewegingsvergelijkingen te separeren stellen we

$$(323) \quad \begin{cases} w(y,t) = AW(y)e^{i\Omega t} \\ \theta(y,t) = B\theta(y)e^{i\Omega t} \end{cases}$$

We vinden:

$$(324) \quad \begin{cases} A \frac{d^2}{dy^2} (EI \frac{d^2 W}{dy^2}) - m\Omega^2 WA + m\Omega^2 a\theta B = 0 \\ B \frac{d}{dy} (GJ \frac{d\theta}{dy}) - m\Omega^2 aWA + I_D \Omega^2 \theta B = 0 \end{cases}$$

Vermenigvuldig de eerste vergelijking met W , de tweede met θ en integreer beide naar y . Na partiële integratie van de begintermen vinden we met gebruikmaking van de randvoorwaarden

$$(325) \quad \begin{cases} A \int_0^\ell EI \left(\frac{d^2 W}{dy^2}\right)^2 dy - A\Omega^2 \int_0^\ell mW^2 dy + B\Omega^2 \int_0^\ell maW\theta dy = 0 \\ -B \int_0^\ell GJ \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 dy + B\Omega^2 \int_0^\ell I_D \theta^2 dy - A\Omega^2 \int_0^\ell maW\theta dy = 0 \end{cases}$$

hetgeen geschreven kan worden als

$$(326) \quad \begin{cases} (a_{11} - c_{11}\Omega^2)A + c_{12}\Omega^2 B = 0 \\ c_{12}\Omega^2 A + (a_{22} - c_{22}\Omega^2)B = 0 \end{cases}$$

met duidelijke definities voor a_{11} , a_{22} , c_{11} , c_{12} en c_{22} .

Dit stelsel heeft een oplossing ongelijk aan de nuloplossing als

$$(327) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - c_{11}\Omega^2 & c_{12}\Omega^2 \\ c_{12}\Omega^2 & a_{22} - c_{22}\Omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

hetgeen te schrijven is in de vorm

$$(328) \quad P\Omega^4 - Q\Omega^2 + R = 0$$

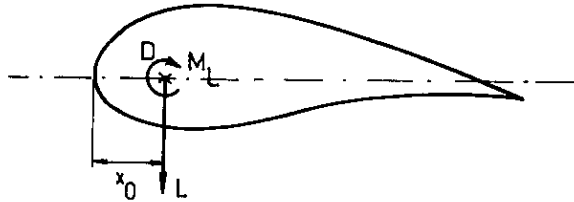
met als oplossing

$$(329) \quad \Omega^2 = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}.$$

Dit is steeds groter dan nul.

Aan de stabiliteitseis $\text{Im } \Omega > 0$ is altijd voldaan. Dus er treden gewone buig-torsie-trillingen op, hetgeen te verwachten was, want we hebben met een vrij trillende vleugel te doen.

We keren nu terug tot het flutter probleem en beschouwen de vleugel in een luchtstroming die aanleiding geeft tot lift en liftmoment, resp. L en M_L .



De bewegingsvergelijkingen zijn dan

$$(330) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - ma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + L = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (GJ \frac{\partial \theta}{\partial y}) + ma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_D \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + M_L = 0. \end{cases}$$

L en M_L zijn te bepalen met de hydrodynamica.

Voor kleine w en θ neemt men wel

$$(331) \quad \begin{cases} L = A_{12}\theta + B_{11} \frac{\partial w}{\partial t} + B_{12} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ M_L = A_{21}w + A_{22}\theta + B_{21} \frac{\partial w}{\partial t} + B_{22} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \end{cases}$$

waarin de A's en B's functies zijn van de snelheid U van de vleugel t.o.v. de lucht.

Voor L neemt men bijv. wel

$$(332) \quad L = \frac{1}{2}\rho U^2 c A [\theta + \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{U} (\frac{1}{4}c - x_0) \frac{\partial \theta}{\partial t}],$$

met ρ de dichtheid en c de spanwijdte. A is constant.

We separeren de bewegingsvergelijkingen weer. Ze zijn niet inhomogeen, omdat zowel L als M_L evenredig zijn met θ , w , $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ en $\frac{\partial w}{\partial t}$.

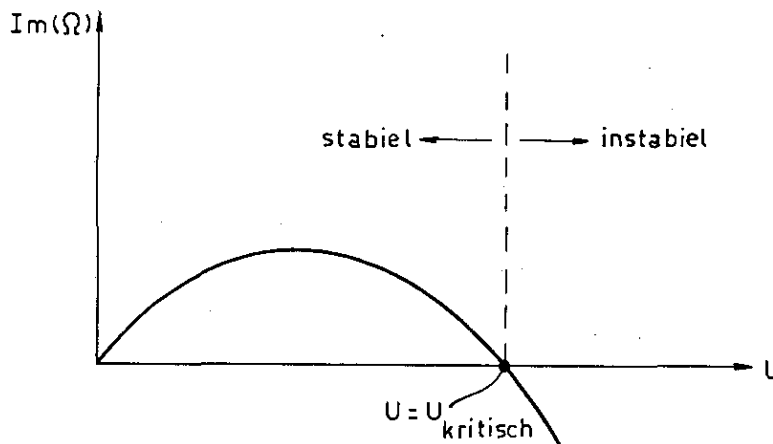
Dus is $w = \theta = 0$ een oplossing.

Voor bepaalde Ω is er een andere dan de nuloplossing.

Deze Ω is numeriek te bepalen uit de karakteristieke vergelijking: $\Omega = \Omega(U)$.

De stabiliteitseis is evenals in het voorgaande probleem: $\text{Im}(\Omega) > 0$.

In grafiek zien we:



Opmerking. Uiterst instructief is het beruchte voorbeeld van het instorten van de Tacoma-brug in de Verenigde Staten tengevolge van flutter (1940). Zie hiervoor Y. Rocard's boek: L'instabilité en Mécanique,

Hoofdstuk 6.

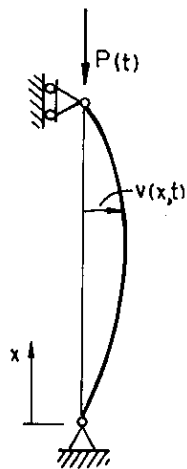
§ 1. Knik onder invloed van instationaire belastingen: $P = P(t)$

In het algemeen zijn er die parameters die een instationaire belasting bepalen. Beschouw bijvoorbeeld een pulserende belasting

$$(333) \quad P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t .$$

De parameters die invloed hebben zijn P_0 , P_1 en ω .

§ 2.1. Een opgelegde balk onder pulserende belasting



Stilzetten geeft de bewegingsvergelijking:

$$(334) \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

met randvoorwaarden:

$$(335) \quad v(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t) = v(l,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(l,t) = 0 .$$

De separatiemethode $v(x,t) = V(x)e^{i\Omega t}$ lukt hier niet door de term $P(t)$. We ontwikkelen nu $v(x,t)$ naar eigenfuncties:

$$(336) \quad v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} .$$

Deze vorm voldoet aan de randvoorwaarden. Let er bovendien op dat de eigenfuncties orthogonaal zijn, dat wil zeggen

$$(337) \quad \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} .$$

Substitutie van de reeks in de bewegingsvergelijking geeft

$$(338) \quad \rho \frac{d^2 A_k}{dt^2} + \left(\frac{k^4 \pi^4}{l^4} EI - \frac{k^2 \pi^2}{l^2} P \right) A_k = 0 .$$

Met behulp van de definities

$$(339) \quad \begin{cases} \Omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, & P_k^* = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} EI, \\ \delta_k = \frac{\Omega_k^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{P_0}{P_k^*}\right) & \text{en} \quad \varepsilon_k = - \frac{\Omega_k^2}{\omega^2} \frac{P_1}{P_k^*} \end{cases}$$

gaat deze DV over in de "Mathieuvergelijking":

$$(340) \quad \frac{d^2 A_k}{dt^2} + (\delta_k + \varepsilon_k \cos \omega t) A_k = 0.$$

In het zgn. Strutt-diagram, waarin ε en δ tegen elkaar zijn afgezet, zijn de gebieden waarin de oplossing stabiel is gearceerd, zie pagina 131a.

De eis voor stabiliteit is dat alle paren $(\delta_k, \varepsilon_k)$, $k = 1, 2, \dots$, in gearceerd gebied liggen. Praktisch is dit criterium niet bruikbaar. We zullen laten zien dat het mogelijk is, door beschouwing van een eindig aantal waarden van k , uitsluitel te geven over stabiliteit.

Voer poolcoördinaten (r_k, θ_k) in:

$$(341) \quad \begin{cases} r_k^2 = \varepsilon_k^2 + \delta_k^2 = \frac{\Omega_k^4 P_1^2 + (P_k^* - P_0)^2}{\omega^4 (P_k^*)^2} \\ \tan \theta_k = \frac{\varepsilon_k}{\delta_k} = \frac{P_1}{P_0 - P_k^*}. \end{cases}$$

Uit de definities is af te leiden dat voor $k \rightarrow \infty$ geldt

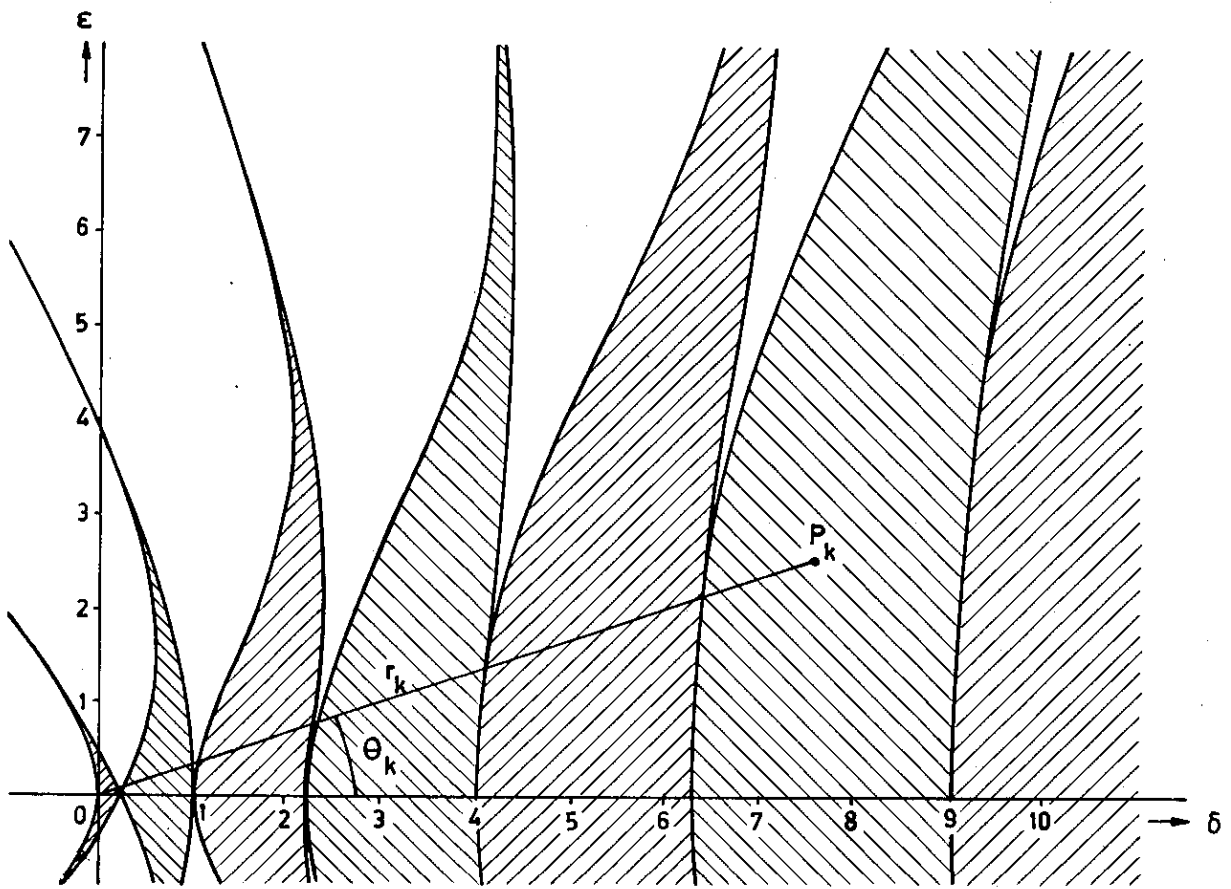
$$(342) \quad P_k^* = O(k^2) \quad \text{en} \quad \Omega_k = O(k^2).$$

Substitutie hiervan in de poolcoördinaten levert

$$(343) \quad r_k = O(k^4) \quad \text{en} \quad \tan \theta_k = O(k^{-2}).$$

Hieruit zien we dat vanaf zekere k alle paren $(\delta_k, \varepsilon_k)$ in stabiel gebied liggen. We hoeven dus slechts een eindig aantal paren te onderzoeken op hun ligging in stabiel gebied.

We hebben in het voorgaande het diagram verkregen door het probleem helemaal op te lossen. In het algemeen is dat niet het doel van de stabiliteitstheorie. We willen aan de hand van kenmerkende eigenschappen van het probleem uitspraken doen over stabiliteit zonder het probleem te hoeven oplossen. Daartoe zullen we een andere weg bewandelen.



$$P_k(\delta_k, \epsilon_k)$$

§ 2.2. De vergelijking van Hill

De Mathieuvergelijking is hiervan een bijzonder geval.

De Hillvergelijking is:

$$(344) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2 [1 - 2\phi(t)] f = 0 .$$

Hierin is $\phi(t)$ periodiek met periode T:

$$(345) \quad \phi(t) = \phi(t+T) .$$

De Hillvergelijking is een 2e orde DV en heeft dus 2 onafhankelijke oplossingen $f_1(t)$ en $f_2(t)$.

Zonder afbreuk te doen aan de algemeenheid kunnen we als beginvoorwaarden nemen:

$$(346) \quad \begin{cases} f_1(0) = 1 ; & \dot{f}_1(0) = 0 \\ f_2(0) = 0 ; & \dot{f}_2(0) = 1 . \end{cases}$$

De functie $f_1(t+T)$ is oplossing van de DV, hetgeen blijkt door invullen.

Zij

$$(347) \quad \begin{cases} f_1(t+T) = a_{11} f_1(t) + a_{12} f_2(t) \\ f_2(t+T) = a_{21} f_1(t) + a_{22} f_2(t) \end{cases}$$

of in vectornotatie

$$(348) \quad \underline{f}(t+T) = A \underline{f}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Brengen we de matrix A op hoofdrichtingen dan geldt

$$(349) \quad \begin{cases} f_1^*(t+T) = \rho_1 f_1^*(t) \\ f_2^*(t+T) = \rho_2 f_2^*(t) \end{cases}$$

waarin ρ_1 en ρ_2 eigenwaarden zijn van A en dus wortels van

$$(350) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0 .$$

De coëfficiënten a_{ij} zijn te bepalen uit de beginvoorwaarden en het verband tussen $f_i(t+T)$ en $f_i(t)$:

$$(351) \quad f_1(T) = a_{11}, \quad f_2(T) = a_{21}, \quad \dot{f}_1(T) = a_{12} \quad \text{en} \quad \dot{f}_2(T) = a_{22}.$$

Voor de karakteristieke vergelijking

$$(352) \quad \rho^2 - 2\alpha\rho + \beta = 0$$

geldt dan:

$$(353) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}[f_1(T) + \dot{f}_2(T)] \\ \beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = f_1(T)\dot{f}_2(T) - \dot{f}_1(T)f_2(T). \end{cases}$$

Aangezien $f_1(t)$ en $f_2(t)$ oplossingen van de Hillvergelijking zijn geldt

$$(354) \quad \begin{cases} \ddot{f}_1(t) + \Omega^2[1 - 2\Phi(t)]f_1(t) = 0 \\ \ddot{f}_2(t) + \Omega^2[1 - 2\Phi(t)]f_2(t) = 0. \end{cases}$$

Aftrekken van beide vergelijkingen na de eerste met $f_2(t)$ en de tweede met $f_1(t)$ vermenigvuldigd te hebben geeft

$$(355) \quad \ddot{f}_1(t)f_2(t) - \ddot{f}_2(t)f_1(t) = 0.$$

Integratie geeft:

$$(356) \quad \dot{f}_1(t)f_2(t) - \dot{f}_2(t)f_1(t) = \text{const.}$$

Uit de beginvoorwaarden op $t = 0$ volgt: $\text{const} = -1$.

De laatste vergelijking geldt voor alle t , dus ook voor $t = T$:

$$(357) \quad f_1(T)\dot{f}_2(T) - \dot{f}_1(T)f_2(T) = 1.$$

Dus

$$(358) \quad \beta = 1.$$

Daarmee gaat de karakteristieke vergelijking over in

$$(359) \quad \rho^2 - 2\alpha\rho + 1 = 0$$

en geldt

$$(360) \quad \rho_1\rho_2 = 1.$$

$f_1^*(t)$ en $f_2^*(t)$ zijn niet periodiek met periode T , anders moet gelden $\rho_1 = \rho_2 = 1$, hetgeen in het algemeen niet zo is.

Stel

$$(361) \quad f_i^*(t) = \chi_i(t) e^{\frac{t}{T} \log \rho_i}, \quad (i = 1, 2).$$

Dan is

$$(362) \quad f_i^*(t+T) = \chi_i(t+T) e^{(\frac{t}{T} + 1) \log \rho_i} = \rho_i \chi_i(t+T) e^{\frac{t}{T} \log \rho_i}.$$

Omdat

$$(363) \quad f_i^*(t+T) = \rho_i f_i^*(t)$$

geldt

$$(364) \quad \rho_i \chi_i(t+T) e^{\frac{t}{T} \log \rho_i} = \rho_i \chi_i(t) e^{\frac{t}{T} \log \rho_i}.$$

Conclusie: χ_i is periodiek, en wel

$$(365) \quad \chi_i(t+T) = \chi_i(t).$$

f_i^* is dus te schrijven als een periodieke (dus begrensde) functie maal e-macht.

De complexe-functietheorie leert ons dat

$$(366) \quad \log \rho_i = \log |\rho_i| + i \arg \rho_i.$$

Dus

$$(367) \quad e^{\frac{t}{T} \log \rho_i} = e^{\frac{t}{T} \log |\rho_i|} e^{i \frac{t}{T} \arg \rho_i}.$$

Nu is

$$(368) \quad |e^{i \frac{t}{T} \arg \rho_i}| \leq 1,$$

dus

$$(369) \quad f_i^*(t) = \varphi_i(t) e^{\frac{t}{T} \log |\rho_i|} \quad (\text{met } \varphi_i(t) = \chi_i(t) e^{i \frac{t}{T} \arg \rho_i}, \text{ dus begrend}).$$

De stabiliteitseis die we stellen is:

$$|f_i^*(t)| \text{ is begrend voor alle } t.$$

Voor onderzoek hiervan moeten we het gedrag van de wortels ρ_i nader beschouwen. Uit de karakteristieke vergelijking $\rho^2 - 2\alpha\rho + 1 = 0$ volgt:

$$(370) \quad \rho_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} .$$

Voor $|\alpha| > 1$: 2 reële wortels ρ_1 en ρ_2 .

Omdat $\rho_1\rho_2 = 1$ geldt: als $\rho_1 < 1$, dan $\rho_2 > 1$. Dan is $\log \rho_2 > 0$ en dus

$$(371) \quad e^{\frac{t}{T} \log \rho_2} \rightarrow \infty, \quad (\text{voor } t \rightarrow \infty) .$$

Dan ook $f_i^*(t) \rightarrow \infty$, dus er treedt instabiliteit op.

Voor $|\alpha| \leq 1$:

$$(372) \quad \rho_{1,2} = \alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2} .$$

Dan is

$$(373) \quad |\rho_1| = |\rho_2| = \sqrt{\alpha^2 + (\sqrt{1 - \alpha^2})^2} = 1 ,$$

dus

$$(374) \quad \log \rho_i = \log 1 = 0 .$$

Dus

$$(375) \quad f_i^*(t) = \varphi_i(t) ,$$

dus begrensd.

Er treedt stabiliteit op.

We weten dat

$$(376) \quad \alpha = \frac{1}{2}[f_1(T) + \dot{f}_2(T)] .$$

Als we α kunnen bepalen hebben we meteen uitsluitel over stabiliteit.

Samengevat: De Hillvergelijking

$$(377) \quad \ddot{f} + \Omega^2[1 - 2\phi(t)]f = 0$$

met oplossingen $f_1(t)$ en $f_2(t)$, en beginvoorwaarden

$$(378) \quad \begin{cases} f_1(0) = 1 ; \dot{f}_1(0) = 0 \\ f_2(0) = 0 ; \dot{f}_2(0) = 1 \end{cases}$$

heeft stabiele oplossingen voor $|\alpha| < 1$, en instabiele oplossingen voor $|\alpha| > 1$, waarin

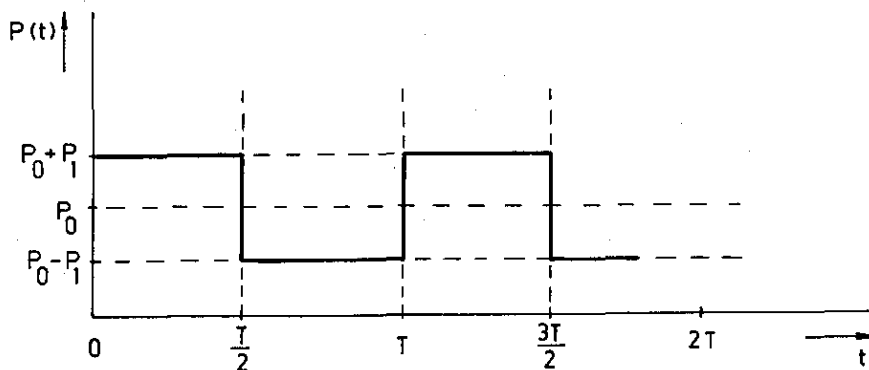
$$(379) \quad \alpha = \frac{1}{2}[f_1(T) + \dot{f}_2(T)] .$$

§ 3. Opgelegde staaf onder blokbelasting

Beschouw een staaf die belast wordt met een periodieke belasting $P(t)$ met periode T en zo dat

$$(380) \quad P(t) = \begin{cases} P_0 + P_1, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ P_0 - P_1, & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases} .$$

In grafiek



De DV

$$(381) \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

gaat met

$$(382) \quad v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

over in

$$(383) \quad \begin{cases} \ddot{A}_k + \omega_k^2(1 - 2\mu_k)A_k = 0, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ \ddot{A}_k + \omega_k^2(1 + 2\mu_k)A_k = 0, & \frac{T}{2} < t \leq T, \end{cases}$$

waarin

$$(384) \quad \omega_k = \Omega_k^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_k^*}\right) \quad \text{en} \quad \mu_k = \frac{P_1}{2(P_k^* - P_0)}$$

en Ω_k en P_k^* volgens de gebruikelijke definities.
Voer in

$$(385) \quad p_k^{(\pm)} = \omega_k \sqrt{1 \pm 2\mu_k} .$$

Laat A_{k1} en A_{k2} twee onafhankelijke oplossingen zijn, met beginvoorwaarden:

$$(386) \quad \begin{cases} A_{k1}(0) = 1, & \dot{A}_{k1}(0) = 0 \\ A_{k2}(0) = 0, & \dot{A}_{k2}(0) = 1 . \end{cases}$$

Dan vinden we voor $0 < t \leq \frac{T}{2}$:

$$(387) \quad \begin{cases} A_{k1}(t) = \cos p_k^{(-)} t \\ A_{k2}(t) = \frac{1}{p_k^{(-)}} \sin p_k^{(-)} t \end{cases}$$

en voor $\frac{T}{2} < t \leq T$:

$$(388) \quad \begin{cases} A_{k1}(t) = C_{k1} \sin p_k^{(+)} t + D_{k1} \cos p_k^{(+)} t \\ A_{k2}(t) = C_{k2} \sin p_k^{(+)} t + D_{k2} \cos p_k^{(+)} t . \end{cases}$$

De waarden van de coëfficiënten C_{k1}, \dots, D_{k2} vinden we uit de aansluitvoorwaarden voor $t = \frac{T}{2}$, die luiden:

$$(389) \quad \begin{cases} A_{ki}(t = \frac{T}{2} - \epsilon) = A_{ki}(t = \frac{T}{2} + \epsilon) \\ \dot{A}_{ki}(t = \frac{T}{2} - \epsilon) = \dot{A}_{ki}(t = \frac{T}{2} + \epsilon) \end{cases} \quad i = 1, 2 \text{ en } \epsilon \rightarrow 0 ,$$

waaruit 4 vergelijkingen volgen voor C_{k1}, \dots, D_{k2} :

$$(390) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos p_k^{(-)} \frac{T}{2} = C_{k1} \sin p_k^{(+)} \frac{T}{2} + D_{k1} \cos p_k^{(+)} \frac{T}{2} \\ \frac{1}{p_k^{(-)}} \sin p_k^{(-)} \frac{T}{2} = C_{k2} \sin p_k^{(+)} \frac{T}{2} + D_{k2} \cos p_k^{(+)} \frac{T}{2} \\ - p_k^{(-)} \sin p_k^{(-)} \frac{T}{2} = C_{k1} p_k^{(+)} \cos p_k^{(+)} \frac{T}{2} + D_{k1} (-p_k^{(+)}) \sin p_k^{(+)} \frac{T}{2} \\ \cos p_k^{(-)} \frac{T}{2} = C_{k2} p_k^{(+)} \cos p_k^{(+)} \frac{T}{2} + D_{k2} (-p_k^{(+)}) \sin p_k^{(+)} \frac{T}{2} . \end{array} \right.$$

Met $\omega = \frac{2\pi}{T}$ als frequentie vinden we hieruit voor de coëfficiënten:

$$(391) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{k1} = \sin p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} \cos p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} - \frac{p_k^{(-)}}{p_k^{(+)}} \sin p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} \cos p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} \\ C_{k2} = \frac{1}{p_k^{(-)}} \sin p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} \sin p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{p_k^{(+)}} \cos p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} \cos p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} \\ D_{k1} = \cos p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} \cos p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} + \frac{p_k^{(-)}}{p_k^{(+)}} \sin p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} \sin p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} \\ D_{k2} = \frac{1}{p_k^{(-)}} \sin p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} \cos p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} - \frac{1}{p_k^{(+)}} \sin p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} \cos p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} . \end{array} \right.$$

Volgens de algemene theorie geldt

$$(392) \quad \alpha_k = \frac{1}{2} [A_{k1}(T) + \dot{A}_{k2}(T)] \\ = \frac{1}{2} [C_{k1} \sin p_k^{(+)} T + D_{k1} \cos p_k^{(+)} T + C_{k2} p_k^{(+)} \cos p_k^{(+)} T - D_{k2} p_k^{(+)} \sin p_k^{(+)} T] ,$$

waaruit volgt

$$(393) \quad |\alpha_k| = \left| \cos p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} \cos p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} - \frac{p_k^{(-)^2} + p_k^{(+)^2}}{2p_k^{(-)} p_k^{(+)}} \sin p_k^{(-)} \frac{\pi}{\omega} \sin p_k^{(+)} \frac{\pi}{\omega} \right|$$

Stabiliteit treedt op als $|\alpha_k| \leq 1$ voor alle k .

Aangezien

$$(394) \quad p_k^{(\pm)} = \omega_k \sqrt{1 \pm 2\mu_k} = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \sqrt{k^2 \pi^2 - \frac{l^2}{EI} (P_0 \pm P_1)}$$

geldt voor grote k:

$$(395) \quad p_k^{(+)} \approx p_k^{(-)} \approx \omega_0 k \pi \quad \text{met} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} .$$

Dan is voor grote k:

$$(396) \quad |\alpha_k| = \left| \cos^2 \frac{\omega_0}{\omega} k - \sin^2 \frac{\omega_0}{\omega} k \right| = \left| \cos \frac{2\omega_0}{\omega} k \right| .$$

Dus $|\alpha_k| \leq 1$ voor grote k.

Wat ons dus rest is te onderzoeken of voor lage waarden van k, dus $k = 1, 2, \dots, n$, ook geldt $|\alpha_k| \leq 1$.

Met de resultaten hiervan kunnen we een uitspraak doen omtrent de stabiliteit van een staaf onder blokbelasting.

§ 4. Stabiliteit bij niet-lineaire trillingen

We beschouwen alleen het geval van een massaveersysteem met niet-lineaire veerconstante:

$$(397) \quad \ddot{x} + f(x)x = F \cos \omega t .$$

Voor $f(x)$ nemen we de eenvoudige functie

$$(398) \quad f(x) = \alpha + \beta x^2, \quad \alpha > 0 ,$$

waarmee

$$(399) \quad \ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos \omega t .$$

Deze DV is de zgn. vergelijking van Duffin.

Van deze Duffinvergelijking zoeken we periodieke oplossingen en daarvan bepalen we de stabiliteit.

We herschrijven de DV tot

$$(400) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \alpha)x - \beta x^3 + \beta F_0 \cos \omega t \quad (\beta F_0 = F) .$$

We onderstellen β klein. Dan is de eerste benadering voor de oplossing:

$$(401) \quad \omega^2 = \alpha, \quad \beta = 0 : \quad x_0 = A \cos \omega t .$$

Substitutie hiervan in het rechterlid van de DV geeft:

$$(402) \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = [(-\alpha + \omega^2)A - \frac{3}{4}\beta A^3 + \beta F_0] \cos \omega t - \frac{1}{4}\beta A^3 \cos 3\omega t .$$

Het rechterlid van deze vergelijking bevat $\cos \omega t$ en geeft dus aanleiding tot resonantie. Dit voorkomen we door te kiezen:

$$(403) \quad \omega^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{\beta F_0}{A}.$$

Als tweede benadering voor de oplossing vinden we dan

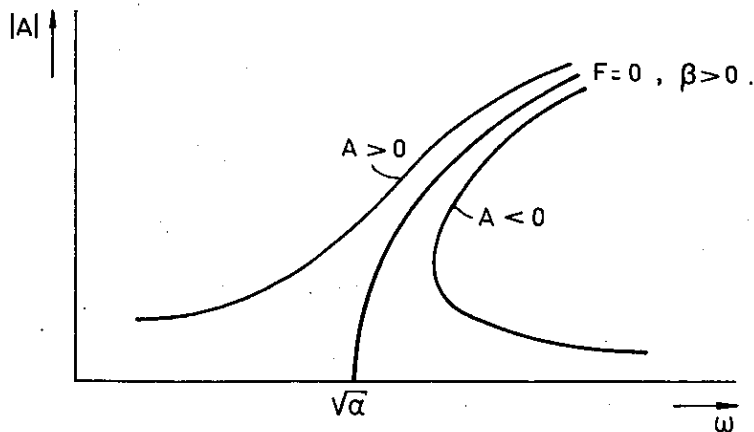
$$(404) \quad x_1 = A_1 \cos \omega t + \frac{\beta A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t.$$

Om niet in tegenspraak te komen met de eerste benadering kiezen we $A_1 = A$, waarmee

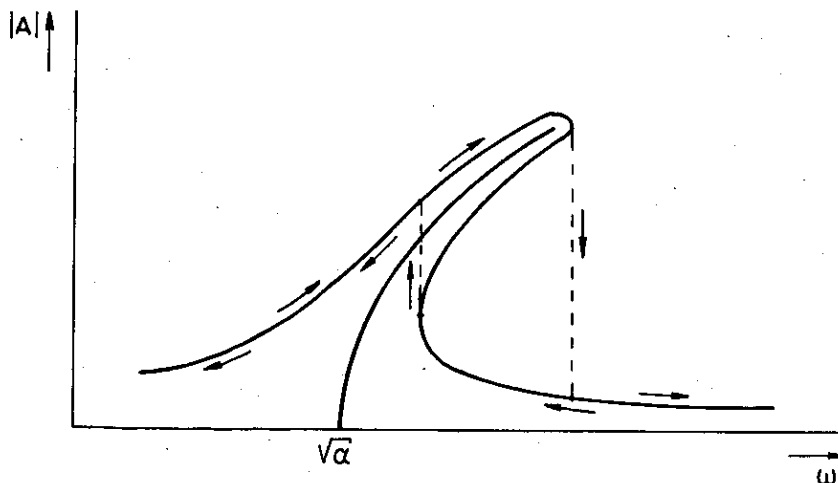
$$(405) \quad x_1 = A \cos \omega t + \frac{\beta A^3}{32(\alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{\beta F_0}{A})} \cos 3\omega t.$$

Verdere iteratie geeft x_2, x_3, \dots .

In grafiek zien we



Als er demping is, is de kromme gesloten en treden er twee sprongen op.



We beschouwen de stabiliteit van deze beweging.

Stel dat de beweging gestoord wordt met een kleine uitwijking:

$$(406) \quad x \rightarrow x+v \quad \text{met } v \ll x .$$

De DV van Duffin gaat over in:

$$(407) \quad \ddot{x} + \ddot{v} + \alpha(x+v) + \beta(x+v)^3 = F \cos \omega t .$$

We verwaarlozen termen met v^2 en v^3 en trekken de Duffinvergelijking af. Dit geeft een lineaire vergelijking voor v :

$$(408) \quad \ddot{v} + \alpha v + 3\beta x^2 v = 0 ,$$

waarin voor x de benadering x_1 moet ingevuld.

We hebben hier te doen met een vergelijking van Hill

$$(409) \quad \ddot{v} + (\alpha + 3\beta x^2)v = 0 ,$$

waarin x periodiek is.

Vullen we x_0 in, in de DV voor v , dan geldt

$$(410) \quad \ddot{v} + (\alpha + 3\beta A^2 \cos^2 \omega t)v = 0$$

of

$$(411) \quad \ddot{v} + \left[\left(\alpha + \frac{3}{2} \beta A^2 \right) + \frac{3}{2} \beta A^2 \cos 2\omega t \right] v = 0 .$$

Met $\tau = 2\omega t$ gaat dit over in

$$(412) \quad \ddot{v} + \left| \frac{\alpha + \frac{3}{2} \beta A^2}{4\omega^2} + \frac{\frac{3}{2} \beta A^2}{4\omega^2} \cos \tau \right| v = 0 ,$$

waarin fluctueren nu differentiëren naar τ voorstelt.

We merken op dat α , β en ω bekend zijn en A te bepalen is uit

$$(413) \quad \omega^2 = \alpha + \frac{3}{4} \beta A^2 - \frac{\beta F_0}{A} .$$

De twee fundamentele parameters in de Mathieuvergelijking zijn dus bekend.

Het is dus mogelijk uit de laatste DV de oplossing te bepalen en hieruit tot stabiliteit of instabiliteit van de oplossing van

$$(414) \quad \ddot{x} + (\alpha x + \beta x^3) = F \cos \omega t$$

te besluiten.

Hoofdstuk 7

§ 1. Invloed van storende krachten op het evenwicht (gyroscopie en dissipatieve krachten)

De algemene bewegingsvergelijking is

$$(415) \quad \ddot{x}_k = c_{(kl)} \dot{x}_l + c_{[kl]} \dot{x}_l + g_{(kl)} x_l + g_{[kl]} x_l$$

met

$$(416) \quad \begin{cases} c_{(kl)} = \frac{1}{2}(c_{kl} + c_{lk}) & g_{(kl)} = \frac{1}{2}(g_{kl} + g_{lk}) \\ c_{[kl]} = \frac{1}{2}(c_{kl} - c_{lk}) & g_{[kl]} = \frac{1}{2}(g_{kl} - g_{lk}) \end{cases} .$$

De verschillende krachten zijn:

$c_{(kl)} \dot{x}_l$: dissipatieve krachten, af te leiden van een dissipatiefunctie R:

$$(417) \quad R = - c_{(kl)} \dot{x}_k \dot{x}_l \geq 0 .$$

De dissipatie heet volledig als R alle \dot{x}_k 's bevat en dan is R positief definitief.

$c_{[kl]} \dot{x}_l$: gyroscopische krachten: deze verrichten geen arbeid, hetgeen direct is in te zien door met \dot{x}_k te vermenigvuldigen.

$g_{(kl)} x_l$: conservatieve krachten.

$g_{[kl]} x_l$: circulatorische krachten (niet conservatief).

Onder een ongestoord stelsel bewegingsvergelijkingen verstaan we

$$(418) \quad \ddot{x}_k = g_{(kl)} x_l .$$

Is $\underline{x} = \underline{0}$ een evenwichtsstand dan is de stabiliteit te onderzoeken door substitutie van $x_k = A_k e^{\lambda t}$.

De evenwichtsstand is

stabilief als: $\text{Re}(\lambda) < 0$ voor alle λ ,

instabilief als: $\text{Re}(\lambda) > 0$ voor een λ .

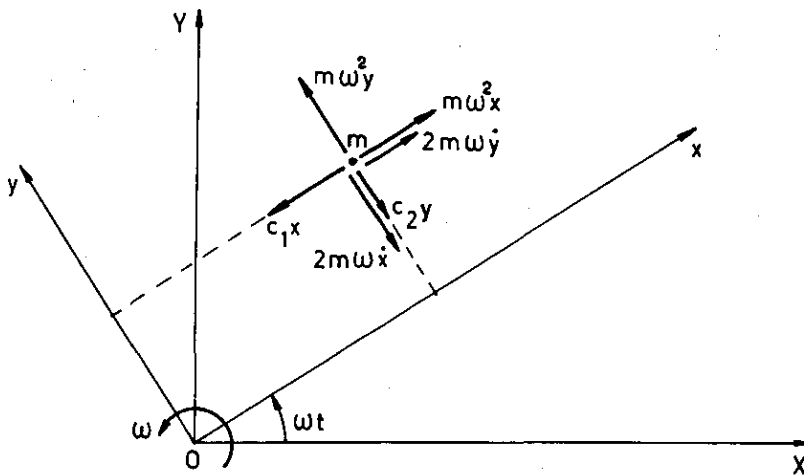
We zullen het ongestoorde stelsel storen met dissipatieve en gyroscopische krachten.

Stelling.

- 1) Dissipatieve krachten hebben geen invloed op de aard van het evenwicht.
- 2) Als $\underline{x} = \underline{0}$ stabiel is leidt toevoeging van dissipatieve krachten tot asymptotische stabiliteit.
- 3) Stabiliteit blijft stabiliteit bij toevoeging van gyroscopische krachten.
- 4) Instabiliteit blijft instabiliteit bij toevoeging van gyroscopische en dissipatieve krachten met volledige dissipatie.
- 5) Instabiliteit van oneven graad (oneven aantal $\text{Re}(\lambda) > 0$) is niet te stabiliseren door gyroscopische krachten.
- 6) Instabiliteit van even graad is te stabiliseren door gyroscopische krachten samen met dissipatieve krachten met onvolledige dissipatie (bv. helemaal geen dissipatie).

We zullen de stelling toelichten aan de hand van een voorbeeld.

Zij OXY een inertiaal stelsel. Hierin bevindt zich een massapunt met massa m , dat roteert met constante hoeksnelheid ω . Op het massapunt werken twee veerkrachten c_1x en c_2y met $c_1 \leq c_2$.



We zetten het probleem stil en voeren dan de schijnkrachten in:

i) centrifugaalkracht:

$$(419) \quad \underline{K}_{\text{centr}} = - m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = (m\omega^2x, m\omega^2y) .$$

Dit is een conservatieve kracht.

ii) corioliskracht:

$$(420) \quad \underline{K}_{\text{cor}} = -2m(\underline{\omega} \times \underline{v}_{\text{rel}}) = (2m\omega\dot{y}, -2m\omega\dot{x}) .$$

Dit is een gyroscopische kracht.

De veerkracht $\underline{K}_{\text{veer}}$ is evenals $\underline{K}_{\text{centr}}$ een conservatieve kracht. De totale potentiaal U is:

$$(421) \quad U = \frac{1}{2}[(c_1 - m\omega^2)x^2 + (c_2 - m\omega^2)y^2] .$$

De bewegingsvergelijkingen luiden:

$$(422) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} + (\frac{c_1}{m} - \omega^2)x = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} + (\frac{c_2}{m} - \omega^2)y = 0 . \end{cases}$$

Het ongestoorde stelsel is

$$(423) \quad \begin{cases} \ddot{x} + (\frac{c_1}{m} - \omega^2)x = 0 \\ \ddot{y} + (\frac{c_2}{m} - \omega^2)y = 0 . \end{cases}$$

De stabiliteit wordt onderzocht door

$$(424) \quad x = Ae^{\lambda t} \quad \text{en} \quad y = Be^{\lambda t}$$

te stellen. Dit geeft

$$(425) \quad \begin{cases} [\lambda^2 + (\frac{c_1}{m} - \omega^2)]Ae^{\lambda t} = 0 \\ [\lambda^2 + (\frac{c_2}{m} - \omega^2)]Be^{\lambda t} = 0 . \end{cases}$$

We zoeken weer oplossingen waarvoor $(A,B) \neq (0,0)$.

Voor λ vinden we

$$(426) \quad \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{c_1}{m} - \omega^2} , \quad \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{c_2}{m} - \omega^2} .$$

Voor $\omega^2 < \frac{c_1}{m}$ ($\leq \frac{c_2}{m}$): alle λ 's op Im-as ($\text{Re}(\lambda) = 0$).

De trilling is begrensd: stabiliteit.

Voor $\frac{c_1}{m} < \omega^2 < \frac{c_2}{m}$: $\text{Re}(\lambda_{3,4}) = 0$ en $\text{Re}(\lambda_1) > 0$, $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ of omgekeerd.
Er is sprake van instabiliteit van de eerste graad, deze is niet te stabiliseren.

Voor $\omega^2 > \frac{c_2}{m}$ ($\geq \frac{c_1}{m}$): Er zijn twee λ 's met $\text{Re}(\lambda) > 0$.
Er is sprake van instabiliteit van de tweede graad, deze is te stabiliseren.

We beschouwen nu de invloed van de storende krachten.

§ 2.1. Dissipatieve krachten (volledig): $(b\dot{x}, b\dot{y})$, de zogenaamde inwendige dissipatie ($b > 0$).

De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$(427) \quad \begin{cases} \ddot{x} + b\dot{x} + (\frac{c_1}{m} - \omega^2)x = 0 \\ \ddot{y} + b\dot{y} + (\frac{c_2}{m} - \omega^2)y = 0 . \end{cases}$$

Voor $\omega^2 < \frac{c_1}{m}$ treedt asymptotische stabiliteit op en voor $\omega^2 > \frac{c_1}{m}$ instabiliteit, hetgeen overeenkomt met 1) en 2) van de stelling.

§ 2.2. Gyroscopische krachten: $(-2\omega\dot{y}, 2\omega\dot{x})$

De bewegingsvergelijkingen zijn

$$(428) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} + (\frac{c_1}{m} - \omega^2)x = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} + (\frac{c_2}{m} - \omega^2)y = 0 . \end{cases}$$

Substitutie van $x = Ae^{\lambda t}$ en $y = Be^{\lambda t}$ geeft de karakteristieke vergelijking

$$(429) \quad \lambda^4 + (\frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m} + 2\omega^2)\lambda^2 + (\frac{c_1}{m} - \omega^2)(\frac{c_2}{m} - \omega^2) = 0$$

met oplossing

$$(430) \quad \lambda_{1,2}^2 = - \left[\frac{c_1 + c_2}{2m} + \omega^2 \right] \mp \sqrt{\left(\frac{c_2 - c_1}{2m} \right)^2 + \frac{2\omega^2}{m} (c_1 + c_2)} .$$

Nu is $\lambda_1^2 < 0$: dit levert zuiver imaginaire wortels,

$$\text{en } \lambda_2^2 < 0 \text{ als } \omega^2 < \frac{c_1}{m} \text{ òf } \omega^2 > \frac{c_2}{m}.$$

In dit geval geldt voor alle λ dat $\text{Re}(\lambda) = 0$, dus er treedt stabiliteit op.

Het gebied $\omega^2 > \frac{c_2}{m}$ is gestabiliseerd. Dit komt overeen met de punten 3) en 6) van de stelling.

Voor $\frac{c_1}{m} < \omega^2 < \frac{c_2}{m}$ is $\lambda_2^2 > 0$ en dus is er één λ met $\text{Re}(\lambda) > 0$. Er treedt instabiliteit op (zie ook 5) van de stelling).

§ 2.3. Gyroscopische krachten en inwendige dissipatie (volledig), voor

$$c_1 = c_2 = c$$

De bewegingsvergelijkingen zijn

$$(431) \quad \begin{cases} \ddot{x} + 2b\dot{x} - 2\omega\dot{y} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)x = 0 \\ \ddot{y} + 2b\dot{y} + 2\omega\dot{x} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)y = 0 \end{cases} \quad \text{met } b > 0, \omega > 0.$$

De karakteristieke vergelijking is

$$(432) \quad (\lambda^2 + 2b\lambda + \frac{c}{m} - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2 = 0$$

of

$$(433) \quad \lambda^2 + 2(b + i\omega)\lambda + \frac{c}{m} - \omega^2 = 0,$$

het minteken voor $\lambda_{1,2}$ en het plusteken voor $\lambda_{3,4}$.

Nu is

$$(434) \quad \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{m} - \omega^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2(b - i\omega) \end{cases}$$

dus:

voor $\omega^2 < \frac{c}{m}$ is $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$: er is asymptotische stabiliteit,

$\omega^2 > \frac{c}{m}$ is $\text{Re}(\lambda_1)$ òf $\text{Re}(\lambda_2) > 0$: er is instabiliteit.

De stabilisering door gyroscopische krachten is teniet gedaan door de volledige dissipatieve krachten.

$\lambda_{3,4}$ geven dezelfde informatie als $\lambda_{1,2}$.

§ 2.4. Gyroscopische krachten, inwendige en uitwendige demping, voor

$$c_1 = c_2 = c$$

Onder uitwendige demping wordt bijvoorbeeld de luchtweerstand verstaan. Deze werkt op de absolute snelheid

$$(435) \quad \underline{v}_{\text{abs}} = \underline{v}_{\text{rel}} + \underline{\omega} \times \underline{X} .$$

In het Oxy stelsel heeft de uitwendige demping de vorm

$$(2b_1 \dot{x} - 2b_1 \omega y, 2b_1 \dot{y} + 2b_1 \omega x) ,$$

waarin de termen met \dot{x} en \dot{y} een dissipatieve werking hebben en de termen met x en y een circulatorische kracht voorstellen ($b_1 > 0$).

De bewegingsvergelijkingen zijn

$$(436) \quad \begin{cases} \ddot{x} + 2(b_1 + b_2)\dot{x} - 2\omega\dot{y} + (\frac{c}{m} - \omega^2)x - 2b_1\omega y = 0 \\ \ddot{y} + 2(b_1 + b_2)\dot{y} + 2\omega\dot{x} + (\frac{c}{m} - \omega^2)y + 2b_1\omega x = 0 . \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking is een vierdegraads vergelijking in λ . Met de R.-H. condities volgt dat voor

$$(437) \quad \omega^2 < (1 + \frac{b_2}{b_1}) \frac{c}{m}$$

asymptotische stabiliteit optreedt, dus voor $b_1 \rightarrow 0$ is er stabiliteit voor alle ω .

§ 2.5. Gyroscopische krachten en uitwendige demping, met $c_1 < c_2$

Stabiliteit treedt op voor $\omega^2 < \frac{c_1}{m}$ en instabiliteit voor $\omega^2 > \frac{c_1}{m}$.

§ 2.6. Gyroscopische krachten, inwendige en uitwendige demping, met $c_1 < c_2$

Met behulp van de bewegingsvergelijkingen is de karakteristieke vergelijking te bepalen en met de R.-H. condities vinden we dan $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ en Δ_4 waarbij

$$(438) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 = 4(b_1 + b_2)^2 \left(\frac{c_1 - c_2}{m}\right)^2 + \\ \quad + 32[\omega^2 + (b_1 + b_2)^2] \left[\frac{c_1 + c_2}{m} (b_1 + b_2)^2 - 2b_2^2 \omega^2\right] > 0 \\ \Delta_4 = \Delta_3 \left[\left(\frac{c_1}{m} - \omega^2\right) \left(\frac{c_2}{m} - \omega^2\right) + 4b_1^2 \omega^2\right] > 0 . \end{array} \right.$$

Als $b_2 \rightarrow 0$ dan is altijd $\Delta_3 > 0$ en dan geldt $\Delta_4 > 0$ als $\omega^2 < \frac{c_1}{m}$ of $\omega^2 > \frac{c_2}{m}$.

Voor $\frac{c_1}{m} < \omega^2 < \frac{c_2}{m}$ is Δ_4 afhankelijk van b_1 , echter voor alle ω : $\Delta_4 > 0$ als

$$(439) \quad 4b_1^2 > \frac{1}{m} (c_1 + c_2 - 2\sqrt{c_1 c_2}) .$$

Als $c_1 = c_2$ dan $b_1 > 0$, dus overall stabiliteit.

Opmerking. Bij conservatieve systemen is de potentiële energie minimaal in de evenwichtsstand.

Stelling. Bij conservatieve systemen treedt stabiliteit dan en slechts dan op als de potentiële energie minimaal is.

Bij het ongestoorde stelsel geldt

$$(440) \quad U = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1}{m} - \omega^2\right) x^2 + \left(\frac{c_2}{m} - \omega^2\right) y^2 \right]$$

en we zien dat voor

$$\omega^2 < \frac{c_1}{m} \left(\leq \frac{c_2}{m} \right) \text{ geldt: } U \text{ minimaal} \Rightarrow \text{stabiliteit,}$$

$$\omega^2 > \frac{c_1}{m} \quad : \quad U \text{ niet minimaal} \Rightarrow \text{instabiliteit.}$$

Stel dat U positief definit is (en dus minimaal) en beschouw de functie H met

$$(441) \quad H = T + U$$

dan geldt in het

conservatieve systeem: $\dot{H} = 0$,

conservatief en gyroscopisch: $\dot{H} = 0$,

conservatief, gyroscopisch en dissipatief: $\dot{H} = -2R \leq 0$ (met $R \geq 0$).

Kies in het laatste geval de Lyapounov functie V zodanig dat

$$(442) \quad V = H = T + U .$$

Dan is V positief semi-definiet ($T \geq 0$, $U \geq 0$) en $\dot{V} = \dot{H} \leq 0$, dus is er sprake van stabiliteit.

Let erop dat in het laatste geval uit U minimaal met Lyapounov volgt dat stabiliteit optreedt, maar dat uit stabiliteit niet volgt dat U minimaal is. In het gyroscopische en conservatieve geval zien we al dat voor $\omega^2 > \frac{c^2}{m}$ de potentiële energie U maximaal is.

Conclusie: Pas het principe van minimale potentiële energie alleen toe op conservatieve systemen.