

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

CONTINUUMSMECHANICA

Syllabus naar het College van

Prof. Dr. J.B. Alblas

Najaarssemester 1969

LdG

Onderafdeling der Wiskunde

Continuumsmechanica

SYLLABUS NAAR HET COLLEGE VAN PROF. DR. J.B. ABLAS

NAJAARSEMESTER 1969



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT.NR. 2.250
PRIJS f 2,50

Jan de Graaf

INHOUDSOPGAVE

	pag.
I. MEETKUNDE, vectoren, tensoren, invarianten, theorema van Cayleigh-Hamilton, polaire decompositie.	1
II. KINEMATICA, coördinaten, deformaties, rotaties, snelheden, deformatiesnelheid, objectiviteit, tijdafgeleiden.	6
III. BALANSWETTEN EN SPANNINGSTENSOREN, impuls en impulsmomentstelling, energiebalans, Cauchy-spanningstensor, eerste en tweede Piola-Kirchhoff-spanningstensor, convectieve spanningstensor, spanningssnelheid.	24
IV. THERMODYNAMICA, eerste en tweede hoofdwet, ongelijkheid van Clausius-Duhem, equipresentie-principe.	40
V. ALGEMENE CONSTITUTIEVE VERGELIJKINGEN, algemene principes.	46
VI. ELASTICITEIT, isotropie, verband tussen Cauchy-spanningstensor en linker-Cauchy-Green-tensor.	52
VII. SPECIALE PROBLEMEN UIT DE ELASTICITEITSTHEORIE, zuivere afschuiving, Poynting effect, torsie van een cirkelcylinder.	60
VIII. SUPERPOSITIE VAN EEN KLEINE DEFORMATIE OP EEN EINDIGE. THEORIE VAN DE VOORSPANNINGSTOESTAND, constitutieve vergelijkingen, evenwichtsvergelijking, lineaire torsie van een eindig gerekte staaf.	75
IX. PROBLEEM VAN KNOWLES, niet lineaire trillingen van een cirkelvormige, elastische, incompressibele buis.	84
X. LINEAIRE VISCO-ELASTICITEIT, vergelijking van lineaire elasticiteits- en visco-elasticiteitstheorie, quasi-statisch analogon, Maxwell-materiaal, Kelvin-materiaal, standaard-lineair materiaal, voorbeelden.	94

Inleiding

Dit college zal bestaan uit twee delen. In het eerste deel zal de algemene theorie van de kinematica, de dynamica en de constitutieve vergelijkingen van continue media worden gegeven. In het tweede deel zullen enkele speciale problemen worden behandeld.

We zullen in dit college alleen rechthoekige cartesische coördinaten gebruiken. Voor de vergelijkingen in kromlijnige coördinaten wordt verwezen naar de literatuur.

We kunnen de deformatie van een continu lichaam in een ander continu lichaam opvatten als een afbeelding. Deze afbeelding moet continu zijn en voldoende malen continu differentieerbaar en moet voldoen aan de volgende topologische eisen:

- i) twee infinitesimaal dicht bij elkaar liggende punten blijven infinitesimaal dicht bij elkaar;
- ii) randpunten blijven randpunten en inwendige punten blijven inwendige punten.

Dit betekent dat scheuren, breuken, dislokaties e.d. worden uitgesloten.

Literatuur

- Prager: Einführung in die Kontinuums Mechanik, 1961.
Toupin-Truesdell: Handbuch der Physik, Vol. III/1, 1960.
Truesdell-Noll: Handbuch der Physik, Vol. III/3, 1965.
Eringen: Nonlinear theory of continuous media, 1962.
Eringen: Mechanics of continua, 1967.
Green-Zerna: Theoretical elasticity, 1954.
Green-Adkins: Large elastic deformations, 1960.
Jaunzemis: Continuum mechanics.

Zie verder de tijdschriften:

- Archive for rational mechanics and analysis.
Archivum Mech. Stosowanej.

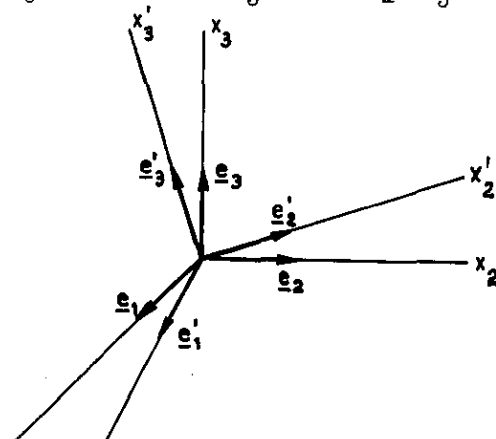
I. Meetkunde

We zullen in dit hoofdstuk een aantal definities en theorema's geven, welke we in de loop van het college regelmatig nodig zullen hebben. We gebruiken naast elkaar twee verschillende notaties, namelijk:

- i) de indexnotatie met de sommatieconventie, waarbij de componenten steeds betrekking hebben op rechthoekige cartesische coördinatenstelsels,
- ii) de tensornotatie. We zullen deze laatste niet meer gebruiken zodra we te maken hebben met tensoren waarvan de orde groter dan twee is.

Definitie. Richtingscosinus:

$$l_{ij} = \cos \langle \underline{e}_i, \underline{e}'_j \rangle = (\underline{e}_i, \underline{e}'_j) . \quad (1.1)$$



Dan geldt: x x' Fig. I.1

$$x'_i = l_{ji} x_j \Rightarrow x_i = l_{ij} x'_j . \quad (1.2)$$

Voor de l_{ij} 's bestaan de volgende betrekkingen:

$$l_{ki} l_{kj} = l_{ik} l_{jk} = \delta_{ij} , \quad (1.3)$$

waarbij δ_{ij} is de Kronecker-delta, d.w.z.:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{als } i \neq j, \\ 1, & \text{als } i = j. \end{cases} \quad (1.4)$$

Voor een algemene n^o -orde tensor T geldt:

$$\begin{aligned} T'_{i_1 i_2 \dots i_n} &= l_{j_1 i_1} l_{j_2 i_2} \dots l_{j_n i_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n} \Rightarrow T_{i_1 i_2 \dots i_n} = \\ &= l_{i_1 j_1} l_{i_2 j_2} \dots l_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n} . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Laat \underline{a} en \underline{b} vectoren zijn, en A en B tensoren van de tweede orde. We geven hier een aantal definities en stellingen (zonder bewijzen), welke we in de loop van het college zullen gebruiken.

i) Inwendig of scalair product:

$$(\underline{a}, \underline{b}) = a_i b_i . \quad (1.6)$$

ii) Uitwendig of vector product:

$$\underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b}) \Rightarrow c_i = e_{ijk} a_j b_k , \quad (1.7)$$

waarin e_{ijk} de permutatie (of cyclische) tensor is, d.w.z.:

$$e_{ijk} := \begin{cases} 0, & \text{als twee of drie indices gelijk zijn,} \\ 1, & \text{als } i, j, k \text{ een even permutatie vormen,} \\ -1, & \text{als } i, j, k \text{ een oneven permutatie vormen.} \end{cases} \quad (1.8)$$

iii) Spoor (trace) van A:

$$\text{tr } A := A_{ii} . \quad (1.9)$$

iv) Determinant van A:

$$\det A = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn} . \quad (1.10)$$

Er geldt:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) . \quad (1.11)$$

v) Onderdeterminant van A:

\bar{A}_{ij} := de determinant van de matrix die ontstaat als van A de i-de rij en de j-de kolom worden weggelaten.

Er geldt dan

$$\det A = A_{\underline{ik}} \bar{A}_{\underline{ik}} \quad (\text{niet sommeren over } k). \quad (1.12)$$

Een streep onder een index betekent dat over deze index niet gesommeerd mag worden.

Stel $A = A(t)$, dan is de afgeleide naar t van $\det A$ gelijk aan

$$\frac{d}{dt} (\det A) = \frac{\partial}{\partial A_{ij}} (\det A) \dot{A}_{ij} = \bar{A}_{ij} \dot{A}_{ij} . \quad (1.13)$$

vi) Getransponeerde van een tensor:

$$(A^T)_{ij} := A_{ji} . \quad (1.14)$$

We noemen A symmetrisch als

$$A^T = A \Rightarrow A_{ij} = A_{ji} , \quad (1.15)$$

en scheefsymmetrisch als

$$A^T = -A \Rightarrow A_{ij} = -A_{ji} . \quad (1.16)$$

Als A reëel is geldt:

$$(\underline{a}, A\underline{b}) = (A^T \underline{a}, \underline{b}) . \quad (1.17)$$

vii) Inverse van een tensor:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^s \frac{\bar{A}_{j\bar{i}}}{(\det A)} , \quad s = i + j . \quad (1.18)$$

Voor het product AB geldt:

$$(AB)_{ij} := A_{ik} B_{kj} , \quad (1.19)$$

en verder

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{en} \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} . \quad (1.20)$$

A is een orthogonale tensor als:

$$A^T = A^{-1} \quad \text{en} \quad \det A = \pm 1 . \quad (1.21)$$

In dat geval geldt

$$A^T A = A A^T = I \Rightarrow A_{ki} A_{kj} = A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} , \quad (1.22)$$

waarbij I de eenheidstensor is:

$$I_{ij} := \delta_{ij} . \quad (1.23)$$

A is een positief definitie tensor, als voor elke $\underline{u} \neq \underline{0}$ geldt

$$(A\underline{u}, \underline{u}) > 0 . \quad (1.24)$$

We zullen tot slot nog de volgende drie belangrijke theorema's geven:

Theorema I. Iedere symmetrische 2°-orde tensor is door basistransformatie te schrijven als een diagonaalmatrix met als elementen (zogenaamde hoofdwwaarden): T_1 , T_2 en T_3 . Een dergelijke tensor heeft de volgende drie reële invarianten:

$$\begin{aligned} \text{I}_{\mathbb{T}} &= \text{tr } T = T_1 + T_2 + T_3, \\ \text{II}_{\mathbb{T}} &= \text{tr}(T^{-1}) \det T = T_2 T_3 + T_3 T_1 + T_1 T_2, \\ \text{III}_{\mathbb{T}} &= \det T = T_1 T_2 T_3. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Deze invarianten veranderen niet bij een rotatie van het basisstelsel. Voor bewijs zie bijv.: Collegediktaat "Toegepaste Mechanica", § I.4.

Theorema II. Theorema van Cayleigh-Hamilton: Voor iedere symmetrische 2°-orde tensor T geldt:

$$T^3 - \text{I}_{\mathbb{T}} T^2 + \text{II}_{\mathbb{T}} T - \text{III}_{\mathbb{T}} T^0 = 0, \quad (1.26)$$

(T^0 is een eenheidstensor). Hieruit vinden we:

$$T^3 = F_3(T^2, T^1, T^0).$$

Door (1.26) te vermenigvuldigen met T vinden we

$$T^4 = F_4(T^2, T^1, T^0).$$

Hieruit volgt, dat we steeds T^n (met $n > 2$) kunnen schrijven als functie van T^2 , T^1 en T^0 .

Voor bewijs zie bijv. Jaunzemis, pag. 61.

Theorema III. Polaire decompositie. Elke 2°-orde tensor F , welke niet singulier is (d.w.z. $\det F \neq 0$) is te schrijven als:

$$F = RU = VR, \quad (1.27)$$

met: R : orthogonale tensor,
 U en V : symmetrische, positief definitie tensoren.

Bewijs. Stel $\underline{v}^* = F\underline{v}$, dan is met (1.17):

$$(\underline{v}^*, \underline{v}^*) = (F\underline{v}, F\underline{v}) = (F^T F \underline{v}, \underline{v}),$$

en $(\underline{v}^*, \underline{v}^*) > 0$,

dus $C := F^T F$: positief definitie tensor.

Ook is:

$$C^T = (F^T F)^T = F^T F = C ,$$

dus C is symmetrisch. Dan bestaat de tensor $C^{1/2}$, en deze tensor is positief en symmetrisch. We kiezen daarom:

$$U = C^{1/2} .$$

We moeten nu nog bewijzen dat

$$R = F U^{-1} ,$$

orthogonaal is:

$$R^T = (U^{-1})^T F^T = (U^T)^{-1} F^T = U^{-1} F^T ,$$

en

$$R^{-1} = (U^{-1})^{-1} F^{-1} = U F^{-1} .$$

Nu is

$$U^{-1} F^T = U F^{-1} ,$$

immers, vermenigvuldig voor met U :

$$F^T = U U^{-1} F^T = U U F^{-1} = C F^{-1} = F^T F F^{-1} = F^T ,$$

waaruit volgt:

$$R^T = R^{-1} .$$

Verder is:

$$R^T R = (F U^{-1})^T F U^{-1} = U^{-1} F^T F U^{-1} = U^{-1} U U^{-1} = 1 ,$$

d.w.z.

$$\det R = \pm 1 ,$$

waarmee de orthogonaliteit van R bewezen is.

Opgave. Bewijs de eenduidigheid van de decompositie (1.17).

Uit het voorgaande volgen de twee relaties:

$$V = R U R^T \quad \text{en} \quad B = R C R^T . \quad (1.28)$$

II. Kinematica

We zullen hier eerst de meest algemene manier geven om de beweging van een lichaam te beschrijven. Later zullen we overgaan op een eenvoudiger manier van beschrijven.

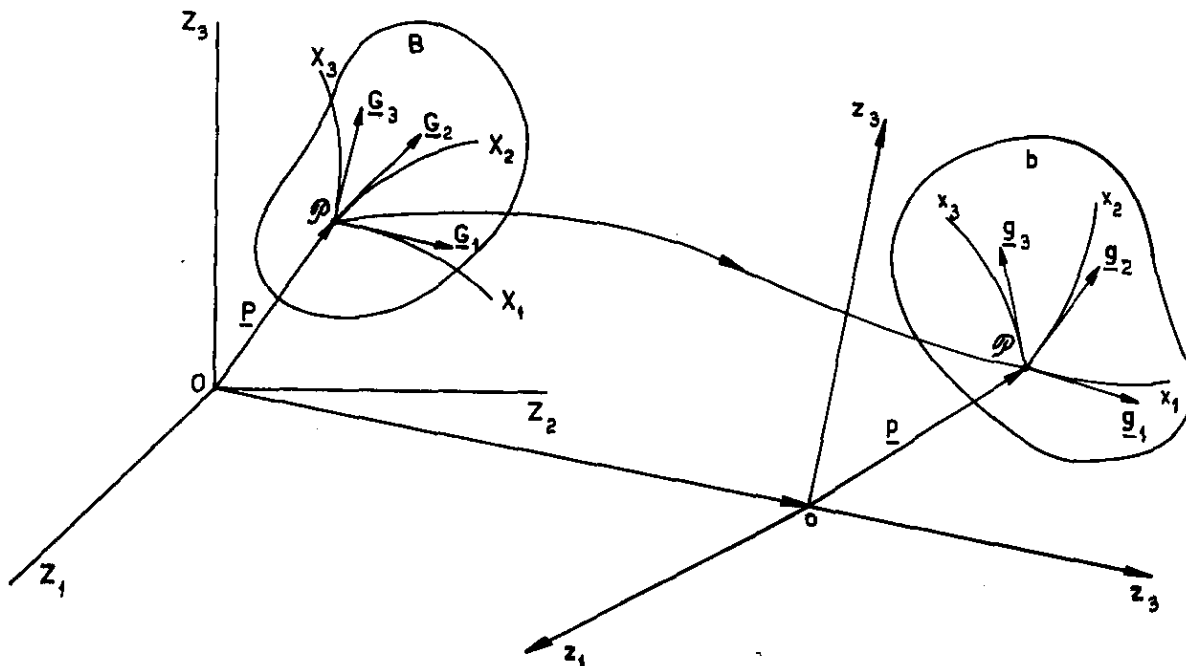


Fig. II.1

Laat de materiële punten van een continu lichaam op $t = 0$ het gebied B vullen. De positie van een materieel punt \mathcal{P} in dit gebied kan worden aangegeven door een kromlijinig coördinatensysteem X_α ($\alpha = 1, 2, 3$) of door de plaatsvector \underline{P} uitgaande van O . Na de deformatie op tijdstip t is B overgegaan in b . De positie van het materieel punt \mathcal{P} kan nu worden beschreven door een nieuw kromlijinig coördinatensysteem x_i ($i = 1, 2, 3$) of door de plaatsvector \underline{p} uitgaande van o . Voor de beschrijving van de beweging is het dikwijls gemakkelijk om of de begintoestand op $t = 0$ of de gedeformeerde toestand op t te betrekken op een rechthoekig cartesiaans assenkruis. In dat geval beelden we respectievelijk X_α af op Z_α of x_i op z_i .

Deze beschrijving is noodzakelijk, indien we niet bij voorbaat de mogelijkheid van convectieve coördinaten willen uitsluiten (die o.a. gebruikt worden in de boeken van Green-Zerna en Green-Adkins). Deze zijn te verkrijgen uit de voorgaande coördinaten door x_i zodanig te kiezen dat voor iedere t de numerieke waarde van x_i voor een bepaald punt dezelfde is als die van X_α . Hierbij zijn dus twee coördinaatsystemen nodig.

Aangezien wij in dit college weinig of geen gebruik zullen maken van convectieve coördinaten zullen wij hier een eenvoudiger beschrijvingsmanier geven, waarbij alle plaatsvectoren zijn betrokken op één vaste oorsprong en één vast cartesisch assenstelsel.

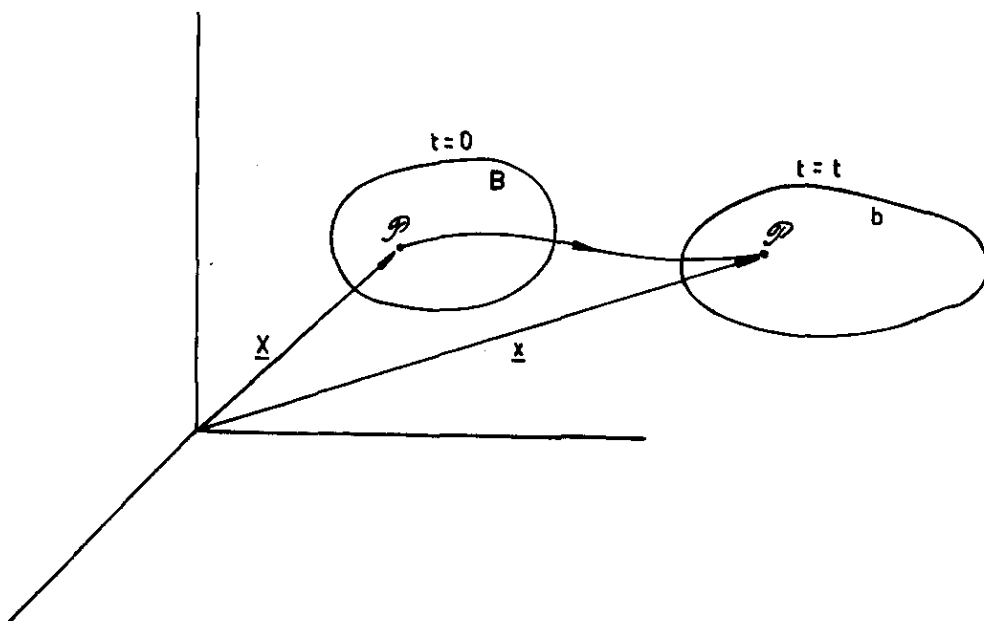


Fig. II. 2.

We beschouwen een materieel punt \mathcal{P} van een materieel lichaam \mathcal{B} , dat op $t = 0$ het gebied B inneemt. We noemen de plaatsvector op $t = 0$ van dit punt: \underline{X} , met componenten X_α in een rechthoekig cartesisch assenstelsel. Na de deformatie neemt het lichaam \mathcal{B} de ruimte b in. De positie van het materiële punt \mathcal{P} wordt nu aangegeven door de plaatsvector \underline{x} , met coördinaten x_i in hetzelfde rechthoekige cartesische assenstelsel. De beweging van \underline{X} naar \underline{x} wordt beschreven door de afbeelding:

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t) . \quad (2.1)$$

Deze afbeelding is omkeerbaar, d.w.z.:

$$\underline{X} = \underline{\chi}^{-1}(\underline{x}, t) =: \underline{\kappa}(\underline{x}, t) . \quad (2.2)$$

Hierbij moet gelden:

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \right) > 0 . \quad (2.3)$$

J is de Jacobiaan. We noemen

- \underline{X} : de materiële of Lagrange coördinaten,
- \underline{x} : de ruimtelijke of Eulerse coördinaten.

We gaan nu de deformatie van een lijnelement bekijken:

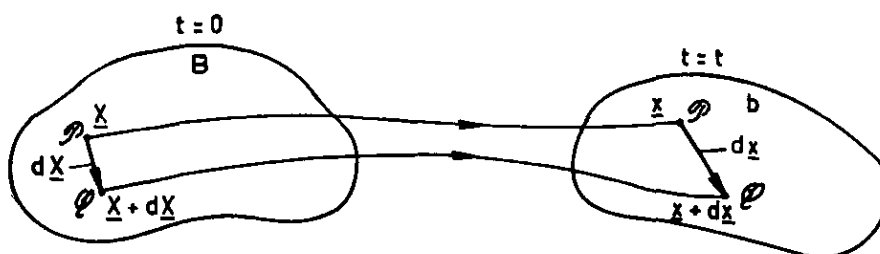


Fig. II.3

Voor dit lijnelement geldt op $t = 0$:

$$ds^2 = (d\underline{X}, d\underline{X}) , \quad (2.4)$$

en op $t = t$

$$ds^2 = (d\underline{x}, d\underline{x}) . \quad (2.5)$$

Aangezien

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t) ,$$

bestaat er een afbeelding F zodanig dat

$$d\underline{x} = F d\underline{X} \Rightarrow dx_i = F_{i\alpha} dX_\alpha , \quad (2.6)$$

waarbij

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} =: x_{i,\alpha} ,$$

met: $\det F = J \neq 0$.

Hiermee en met (1.17) leiden we af

$$ds^2 = (d\underline{x}, d\underline{x}) = (F d\underline{x}, F d\underline{x}) = (F^T F d\underline{x}, d\underline{x}) . \quad (2.7)$$

We definiëren:

$$C := F^T F : \text{ rechter-Cauchy-Green-tensor,}$$

of:

$$C_{\alpha\beta} = (F^T F)_{\alpha\beta} = F_{\alpha i}^T F_{i\beta} = F_{i\alpha} F_{i\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta} . \quad (2.8)$$

En:

$$B := F F^T : \text{ linker-Cauchy-Green-tensor,}$$

of:

$$B_{ij} = F_{i\alpha} F_{\alpha j}^T = F_{i\alpha} F_{j\alpha} = x_{i,\alpha} x_{j,\alpha} . \quad (2.9)$$

Voor de lengteverandering vinden we:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= (F^T F d\underline{X}, d\underline{X}) - (d\underline{X}, d\underline{X}) = \\ &= ((F^T F - I)d\underline{X}, d\underline{X}) = ((C - I)d\underline{X}, d\underline{X}) . \end{aligned}$$

We definiëren:

$$2E := C - I \quad (I: \text{eenheidstensor}). \quad (2.10)$$

E is de klassieke deformatietensor in Lagrange-beschrijving (Lagrange deformatietensor). Uitgeschreven vinden we:

$$2E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta} - \delta_{\alpha\beta} . \quad (2.11)$$

Dus

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{\alpha\beta} dX_{\alpha} dX_{\beta} . \quad (2.12)$$

In Euler-beschrijving krijgen we:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= (d\underline{x}, d\underline{x}) - (F^{-1} d\underline{x}, F^{-1} d\underline{x}) = \\ &= (d\underline{x}, d\underline{x}) - ((F^T)^{-1} F^{-1} d\underline{x}, d\underline{x}) = \\ &= ((I - (FF^T)^{-1})d\underline{x}, d\underline{x}) = ((I - B^{-1})d\underline{x}, d\underline{x}) . \end{aligned}$$

We definiëren:

$$2e := I - B^{-1} . \quad (2.13)$$

e is de klassieke deformatietensor in Euler-beschrijving (Eulerse deformatietensor). Uitschrijven geeft, met

$$(F^{-1})_{\alpha i} = \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_i} =: X_{\alpha, i} , \quad (2.14)$$

dat

$$2e_{ij} = \delta_{ij} - X_{\alpha, i} X_{\alpha, j} . \quad (2.15)$$

We voeren in de verplaatsing u door:

$$\underline{u} := \underline{x} - \underline{X} . \quad (2.16)$$

Dan is

$$2E_{\alpha\beta} = \bar{u}_{\alpha,\beta} + \bar{u}_{\beta,\alpha} + \bar{u}_{\gamma,\alpha} \bar{u}_{\gamma,\beta}, \quad (\underline{u} = \bar{\underline{u}}(\underline{X}, t)),$$

$$2e_{ij} = \tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i} - \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,j}, \quad (\underline{u} = \tilde{\underline{u}}(\underline{x}, t)). \quad (2.17)$$

Opgave. Leid (2.17) af.

We gaan nu kijken naar de relatieve volumeverandering bij deformatie. We beschouwen daartoe scharen van drie, niet evenwijdige, ruimtekrommen: $F_\alpha(u)$, $G_\alpha(v)$ en $H_\alpha(w)$. Het volume-element dat door twee stelsels naburige krommen wordt ingesloten is:

$$dV = e_{\alpha\beta\gamma} dF_\alpha dG_\beta dH_\gamma. \quad (2.18)$$

Na deformatie zijn de krommen overgegaan in $f(u)$, $g(v)$ en $h(w)$ en het volume-element in:

$$dv = e_{ijk} df_i dg_j dh_k = e_{ijk} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} x_{k,\gamma} dF_\alpha dG_\beta dH_\gamma. \quad (2.19)$$

We gebruiken de relatie:

$$e_{ijk} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} x_{k,\gamma} = e_{\alpha\beta\gamma} \det F, \quad (2.20)$$

om (2.19) te schrijven als

$$dv = (\det F) dV = J dV. \quad (2.21)$$

Dus de Jacobiaan $J = dv/dV$ is een maat voor de relatieve volumeverandering.

Opgave. Bewijs (2.20), met behulp van (1.10).

Opmerking betreffende compatibiliteit: Stel gegeven de deformatietensor $E_{\alpha\beta}$ (of e_{ij}). We hebben dan zes vergelijkingen, waaruit drie verplaatsingen u_α bepaald moeten worden. In het algemeen zal dit niet mogelijk zijn. De condities waaronder dit stelsel wél oplosbaar is, noemen we de compatibiliteitsvoorwaarden. Men kan aantonen dat deze voorwaarden overeenkomen met het nul zijn van de Riemannse krommingstensor.

Polaire decompositie van F

Volgens (1.27) kunnen we de in (2.6) gedefinieerde tensor F schrijven als

$$F = RU = VR,$$

waarbij:

$$U^2 = F^T F, \quad \text{en} \quad R = FU^{-1}.$$

We zullen eerst als voorbeeld een geval van zuivere afschuiving bekijken (zie Fig. II.4):

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + KX_2, & (K = \text{constant}), \\ x_2 &= X_2, \\ x_3 &= X_3. \end{aligned} \tag{2.22}$$

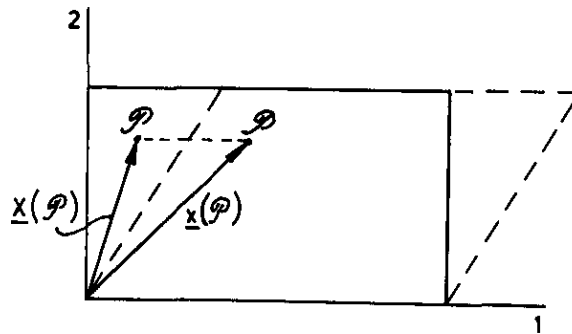


Fig. II.4

Uit (2.22) volgt voor F:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad F^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan is:

$$U^2 = F^T F = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ K & (1+K^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We kunnen hieruit U berekenen:

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{4+K^2} & K/\sqrt{4+K^2} & 0 \\ K/\sqrt{4+K^2} & (2+K^2)/\sqrt{4+K^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en vervolgens R:

$$R = FU^{-1} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{4+K^2} & K/\sqrt{4+K^2} & 0 \\ -K/\sqrt{4+K^2} & 2/\sqrt{4+K^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voeren we in een hoek α door:

$$\alpha = \arctan(K/2),$$

dan kunnen we R schrijven als

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We zien hieruit dat in dit voorbeeld R een rotatie over de hoek α om de X_3 -richting voorstelt. We zullen aantonen dat dit algemeen geldt. Stel:

$$R\underline{n} = r\underline{n}, \quad (r: \text{eigenwaarde, } \underline{n}: \text{eigenvector}),$$

met $(\underline{n}, \underline{n}) = 1$.

In indexnotatie:

$$R_{ij} n_j = rn_i.$$

Dan geldt

$$R_{ik} n_k R_{ij} n_j = r^2 n_i n_i = r^2.$$

Nu is, omdat R orthogonaal is:

$$R_{ik} R_{ij} = (RR^T)_{kj} = \delta_{kj},$$

dus

$$\delta_{kj} n_k n_j = n_j n_j = 1 = r^2, \quad (2.23)$$

waaruit volgt dat $r = \pm 1$ eigenwaarden van R zijn. We draaien het assenkruis zodanig dat \underline{n} langs de 3-richting valt:

$$\underline{n} = (0, 0, n_3) = (0, 0, 1).$$

Dan geldt voor de componenten van R in dit assenkruis:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

R moet voldoen aan de relaties:

$$\det R = \pm (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) = \pm 1 \quad \text{en} \quad R^{-1} = R^T.$$

Hieruit volgt dat (2.24) geschreven kan worden als

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Uit (2.25) concluderen we dat R een draaiing over een eindige hoek φ om de \underline{n} -richting voorstelt.

We noemen R de rotatietensor.

Snelheden

We definiëren de snelheid \underline{v} door:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t + \Delta t) - \underline{x}(t)}{\Delta t} . \quad (2.26)$$

Neem:

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t) ,$$

dan is

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial t} \Big|_{\underline{X}=\text{constant}} = \underline{\bar{v}}(\underline{X}, t) . \quad (2.27)$$

We kunnen \underline{v} ook schrijven als functie van \underline{x} en t:

$$\underline{v} = \underline{\bar{v}}(\underline{X}, t) = \underline{\bar{v}}(\underline{\chi}(\underline{x}, t), t) = \underline{\tilde{v}}(\underline{x}, t) . \quad (2.28)$$

De versnelling \underline{a} wordt gedefinieerd als

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \frac{\partial \underline{\bar{v}}}{\partial t} \Big|_{\underline{X}=\text{constant}} = \underline{\bar{a}}(\underline{X}, t) . \quad (2.29)$$

Met behulp van de kettingregel vinden we dat ook geldt:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{\tilde{v}}}{\partial t} \Big|_{\underline{x}=\text{constant}} + \frac{\partial \underline{\tilde{v}}}{\partial x_k} \underline{\tilde{v}}_k = \underline{\tilde{a}}(\underline{x}, t) . \quad (2.30)$$

We noemen

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\underline{x}=\text{constant}} + \underline{\tilde{v}}_k \frac{\partial}{\partial x_k} : \text{de materiële afgeleide.} \quad (2.31)$$

Deformatiesnelheid (strain rate)

Beschouw

$$F_{k\alpha} = x_{k,\alpha} = \chi_{k,\alpha}(\underline{X}, t) .$$

Dan geldt

$$\dot{F}_{k\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} \chi_{k,\alpha}(\underline{X}, t) = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} = \underline{\bar{v}}_{k,\alpha} . \quad (2.32)$$

We definiëren

$$L_{ij} := \tilde{v}_{i,j} . \quad (2.33)$$

Voor deze tensor L geldt

$$L = \dot{F}F^{-1} \Rightarrow L_{ij} = \dot{F}_{i\alpha} F_{\alpha j}^{-1} . \quad (2.34)$$

Bewijs: Uit

$$\bar{v}_{k,\alpha} = \tilde{v}_{k,j} x_{j,\alpha} ,$$

volgt

$$\dot{F}_{k\alpha} = L_{kj} F_{j\alpha} \Rightarrow \dot{F} = LF .$$

Achter vermenigvuldigen met F^{-1} geeft (2.34).

Uit de definitie van L volgt:

$$\frac{d}{dt} (dx_i) = \frac{d}{dt} (F_{i\alpha} dX_\alpha) = \dot{F}_{i\alpha} dX_\alpha = L_{ij} F_{j\alpha} dX_\alpha = L_{ij} dx_j . \quad (2.35)$$

We definiëren de tensoren D en W door:

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) \Rightarrow D_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{j,i}) , \quad (2.36)$$

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T) \Rightarrow W_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{j,i}) . \quad (2.37)$$

Hiermee vinden we voor de verandering per tijdseenheid van de lengte van een lijnelement ds:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (ds^2) &= \frac{d}{dt} (dx_i dx_i) = 2 dx_i \frac{d}{dt} (dx_i) = \\ &= 2 v_{i,j} dx_i dx_j = 2 D_{ij} dx_i dx_j . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dus D is een maat voor de verandering per tijdseenheid van de lengte van ds. We noemen D daarom de deformatiesnelheidstensor.

We kunnen met (1.13) en (1.12) afleiden dat:

$$\dot{J} = \frac{d}{dt} (\det F) = \frac{\partial J}{\partial x_{i,\alpha}} \dot{x}_{i,\alpha} = \frac{\partial J}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha} v_{i,j} = J \delta_{ij} v_{i,j} = J v_{i,i} .$$

Dus

$$\dot{J} = J \operatorname{div} \underline{v} . \quad (2.39)$$

Opmerking. Indien de kans op verwisseling klein is, zullen we het symbool \sim (of $-$), dat aangeeft of \underline{v} moet worden beschouwd als een functie van \underline{x} en t (dan wel van \underline{X} en t), weglaten.

Objectiviteit (frame indifference)

Het is een algemeen aanvaard principe in de continuumsmechanica, dat de wetten die een mechanisch proces beschrijven onafhankelijk moeten zijn van de plaats, de stand en de beweging van diegene die het proces waarneemt. Dit heeft geleid tot het zogenaamde Principe van de Objectiviteit (principle of frame indifference).

Dit principe zegt dat de behoudwetten en de constitutieve vergelijkingen invariant moeten zijn ten opzichte van waarnemerstransformaties. Onder een waarnemerstransformatie (change of frame) verstaan we een transformatie van de ruimte en de tijd, gespecificeerd door een constante a , een vector $\underline{c}(t)$ en een orthogonale 2-tensor $Q(t)$, zodanig dat het paar $\{\underline{x}, t\}$ transformeert in het paar $\{\underline{x}^*, t^*\}$ op de volgende wijze

$$\underline{x}^* = Q(t)\underline{x} + \underline{c}(t) , \quad (2.40)$$

$$t^* = t - a . \quad (2.41)$$

Een dergelijke transformatie heet een Euclidische transformatie. Zij bezit de eigenschap dat de lengte van een lijnelement en van een tijdsinterval en de tijdsorde onveranderd blijven.

De transformatie (2.40) - (2.41) stelt voor een draaiing ($Q(t)$) en een translatie ($\underline{c}(t)$) van een waarnemer O^* t.o.v. een andere waarnemer O plus een verschuiving van de tijdschaal (a). Het is echter fysisch gelijkwaardig of we een waarnemer laten bewegen t.o.v. een lichaam, dan wel of we dat lichaam een starre-lichaamsverplaatsing geven t.o.v. een waarnemer. Omdat we de laatste zienswijze aanschouwelijker vinden, zullen we aan de hand hiervan het principe van de objectiviteit toelichten.

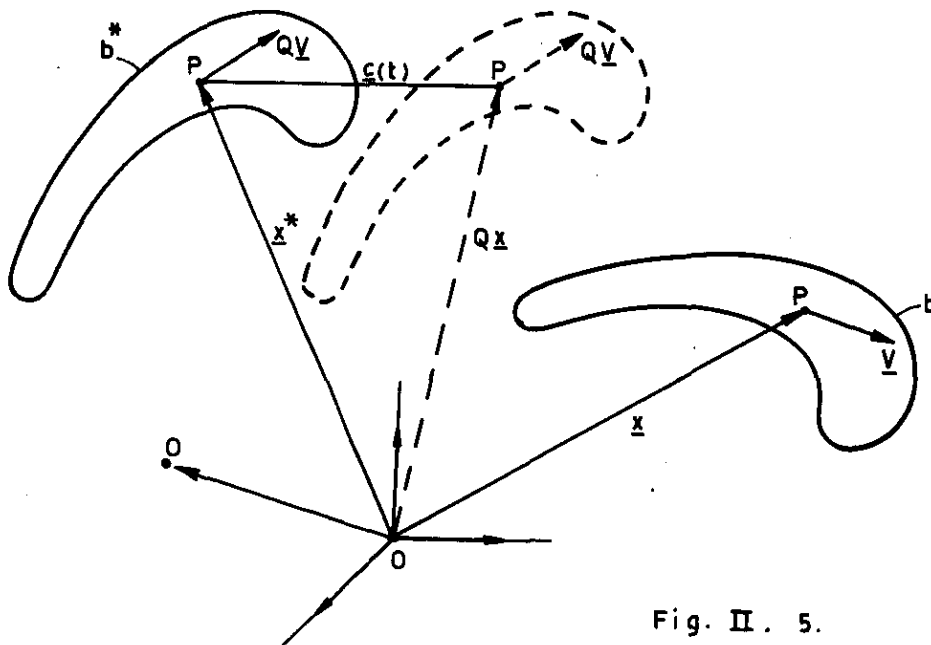


Fig. II. 5.

Stel we hebben een materieel lichaam \mathcal{B} dat zich op tijdstip t in een bepaalde configuratie b bevindt. De positie van een materieel punt \mathcal{P} van dit lichaam geven we aan met de plaatsvector \underline{x} genomen vanuit een oorsprong O . We geven \mathcal{B} een verplaatsing als star lichaam als volgt (zie Fig. II.5):

- i) Eerst roteren we \mathcal{B} als star lichaam om de oorsprong O (gestippelde stand). Deze rotatie wordt aangegeven door de orthogonale 2-tensor $Q(t)$. De plaatsvector \underline{x} gaat hierdoor over in de vector $Q\underline{x}$. Omdat Q orthogonaal is geldt:

$$QQ^T = I \Rightarrow Q_{ik} Q_{jk} = \delta_{ij} . \quad (2.42)$$

- ii) Vervolgens geven we \mathcal{B} een translatie als star lichaam, gekarakteriseerd door de vector $\underline{c}(t)$. Het lichaam neemt nu de configuratie b^* in, en de positie van \mathcal{P} wordt aangegeven door de plaatsvector \underline{x}^* , weer genomen vanuit O . Uit Fig. II.5 volgt dan direct dat het verband tussen \underline{x} en \underline{x}^* luidt

$$\underline{x}^* = Q(t)\underline{x} + \underline{c}(t) . \quad (2.43)$$

Opmerkingen

- i) Aangezien de verplaatsing van b naar b^* een starre-lichaamsverplaatsing is, moeten $Q(t)$ en $\underline{c}(t)$ uniform zijn, d.w.z. onafhankelijk van de plaats \underline{x} .
- ii) Door een verschuiving van de oorsprong van de tijdas is relatie (2.41) te verkrijgen. In dit inleidende college is dit verder niet van belang, zodat we deze transformatie buiten beschouwing zullen laten.

We maken de afspraak, dat we een grootheid in de b^* -configuratie zullen aangeven met een $*$. We kunnen nu de volgende definities voor objectiviteit geven.

We zeggen dat een scalair objectief is, indien φ in de configuraties b en b^* dezelfde waarde heeft, dus als

$$\varphi^* = \varphi . \quad (2.44)$$

Een vector \underline{V} noemen we objectief, indien deze vector in b en b^* dezelfde gedaante heeft ten opzichte van het lichaam \mathcal{B} , dus als (zie Fig. II.5)

$$\underline{V}^* = Q\underline{V} \Rightarrow V_i^* = Q_{ij} V_j . \quad (2.45)$$

Vergelijken we (2.43) met (2.45) dan zien we dat de plaatsvector \underline{x} geen objectieve grootheid is. Ook de snelheidsvector \underline{v} , gedefinieerd volgens (2.27), is niet objectief. Stel namelijk dat \mathcal{P} in de b-configuratie een snelheid \underline{v} heeft; dan is het door een goede keuze van $\underline{c}(t)$ altijd mogelijk om de snelheid van \mathcal{P} in de b*-configuratie nul te maken. We kunnen dit ook formeel afleiden. Hiertoe nemen we de materiële afgeleide van (2.43):

$$\dot{\underline{x}}^* = \underline{v}^* = Q\dot{\underline{x}} + \dot{Q}\underline{x} + \dot{\underline{c}} = Q\underline{v} + \dot{Q}\underline{x} + \dot{\underline{c}}, \quad (2.46)$$

welke relatie voldoet aan (2.45).

We noemen een 2-tensor objectief als hij een objectieve vector afbeeldt op een andere objectieve vector. Dus als \underline{V} en \underline{W} objectief zijn en als

$$\underline{V} = S\underline{W} \Rightarrow V_i = S_{ij} W_j, \quad (2.47)$$

dan is S ook objectief. Omdat \underline{V} en \underline{W} objectief zijn, geldt volgens (2.45)

$$\underline{V}^* = Q\underline{V}, \quad \underline{W}^* = Q\underline{W}, \quad (2.48)$$

waarmee we uit (2.47) krijgen

$$\underline{V}^* = S^* \underline{W}^* = S^* Q\underline{W}. \quad (2.49)$$

Vermenigvuldigen van (2.49) met Q^T geeft met (2.42) en (2.48¹)

$$Q^T \underline{V}^* = Q^T Q\underline{V} = \underline{V} = Q^T S^* Q\underline{W}. \quad (2.50)$$

Vergelijken we dit met (2.47) dan zien we dat

$$Q^T S^* Q = S, \quad (2.51)$$

of, omgekeerd

$$S^* = QSQ^T. \quad (2.52)$$

In indexnotatie luidt (2.52)

$$S^*_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} S_{kl}. \quad (2.53)$$

Op analoge wijze verkrijgen we de algemene conditie voor het objectief zijn van de n-tensor P ($n = 0, 1, 2, \dots$), welke luidt

$$P^*_{i_1 i_2 \dots i_n} = Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} \dots Q_{i_n j_n} P_{j_1 j_2 \dots j_n}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.54)$$

Onder een proces voor een lichaam \mathcal{B} verstaan we een paar $\{\underline{x}, T\}$, waarbij \underline{x} een willekeurige beweging van \mathcal{B} voorstelt en T een willekeurig spanningsveld (definitie van spanning volgt in Hfst. III). We noemen twee pro-

cessen equivalent indien zij met elkaar samenhangen volgens de relaties:

$$\underline{\chi}^*(\underline{X}, t) = Q(t)\underline{\chi}(\underline{X}, t) + \underline{c}(t), \quad (2.55)$$

$$\underline{T}^*(\underline{X}, t) = Q(t)\underline{T}(\underline{X}, t)Q^T(t). \quad (2.56)$$

Voor constitutieve vergelijkingen (zie Hfdst. V) moet gelden het Principe van de objectiviteit van de materiaaleigenschappen, dat luidt: Indien het proces $\{\underline{\chi}, \underline{T}\}$ compatibel is met een bepaalde constitutieve vergelijking, dan moeten alle processen $\{\underline{\chi}^*, \underline{T}^*\}$ welke equivalent zijn met $\{\underline{\chi}, \underline{T}\}$ compatibel zijn met dezelfde constitutieve vergelijking.

Als voorbeeld zullen we de objectiviteit onderzoeken van de tensoren U, V, C, B, E, e, F en R.

Uit de definitie van F volgens (2.6), met de kettingregel en met (2.43) krijgen we

$$F_{i\alpha}^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha} = Q_{ij} F_{j\alpha}, \quad (2.57)$$

of

$$F^* = QF. \quad (2.58)$$

Deze betrekking voldoet niet aan (2.52), waaruit volgt dat F een niet-objectieve tensor is. Dit is fysisch te verwachten omdat F de niet-objectieve rotatie R bevat (immers: $F = VR = RU$).

De tensoren V en B ($:= V^2$) zijn, zoals we nu zullen aantonen wel objectief. Volgens (2.9) is:

$$B^* = F^*(F^*)^T = QFF^T Q^T = QBQ^T, \quad (2.59)$$

Dus B is volgens (2.52) objectief. Aangezien $B = V^2$ is V dan ook objectief.

Voor C geldt volgens (2.8)

$$C^* = (F^*)^T F^* = F^T Q^T QF = F^T F = C, \quad (2.60)$$

dus C, en dan ook U (want $C = U^2$), is niet objectief. De tensor gedefinieerd door FCF^T is echter weer wel objectief; deze tensor is namelijk gelijk aan B^2 . We zullen in Hfdst. VI van deze resultaten gebruik maken bij het afleiden van constitutieve vergelijkingen voor elastische materialen.

Opgave. Leid af dat E niet en e en FEF^T wel objectief zijn.

We gaan tot slot kijken naar de deformatiesnelheden. Volgens de definitie (2.33) is

$$L_{ij}^* = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} . \quad (2.61)$$

Met (2.46), (2.43) en de kettingregel volgt hieruit

$$\begin{aligned} L_{ij}^* &= Q_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j^*} + \dot{Q}_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^*} = Q_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial x_j^*} + \dot{Q}_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^*} = \\ &= Q_{ik} Q_{j\ell} L_{k\ell} + \dot{Q}_{ik} Q_{jk} , \end{aligned} \quad (2.62)$$

of

$$L^* = QLQ^T + \dot{Q}Q^T , \quad (2.63)$$

waaruit volgt dat L niet objectief is.

Opgave. Leid, uitgaande van de definities (2.36) en (2.37), af:

$$D^* = QDQ^T \Rightarrow D_{ij}^* = Q_{ik} Q_{jl} D_{kl} , \quad (2.64)$$

$$W^* = QWQ^T + \dot{Q}Q^T \Rightarrow W_{ij}^* = Q_{ik} Q_{jl} W_{kl} + \dot{Q}_{ik} Q_{jk} . \quad (2.65)$$

Uit (2.64) en (2.65) volgt dat D wel en W niet objectief is.

Tijdafgeleiden

We beschouwen een willekeurige functie f als

$$f = \bar{f}(\underline{X}, t) .$$

De tijdafgeleide \dot{f} wordt gedefinieerd als

$$\dot{f} := \frac{\partial \bar{f}(\underline{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\underline{X}=\text{constant}} . \quad (2.66)$$

We kunnen f ook schrijven als functie van \underline{x} en t, immers

$$f = \bar{f}(\underline{X}, t) = \bar{f}(\kappa(\underline{x}, t), t) = \tilde{f}(\underline{x}, t) .$$

In dit geval wordt \dot{f}

$$\dot{f} = \frac{d\tilde{f}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}(\underline{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\underline{x}=\text{constant}} + \frac{\partial \tilde{f}(\underline{x}, t)}{\partial x_i} v_i . \quad (2.67)$$

Bij de afgeleide aangegeven met $\dot{}$ blijven we steeds hetzelfde materiële deeltje volgen (want $\underline{X} = \text{constant}$). We noemen daarom \dot{f} de materiële afgeleide van f .

Voor een 2-tensor S geldt

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + S_{ij,k} v_k, \quad (S_{ij} = \tilde{S}_{ij}(\underline{x}, t)). \quad (2.68)$$

Stel S is een objectieve tensor. Dan blijkt \dot{S} niet meer objectief te zijn. Immers, omdat S objectief is, geldt:

$$S^* = QSQ^T,$$

en nemen we hiervan de materiële afgeleide dan krijgen we

$$\dot{S}^* = \dot{Q}SQ^T + Q\dot{S}Q^T + QS\dot{Q}^T. \quad (2.69)$$

Omdat constitutieve vergelijkingen objectief moeten zijn, is het gewenst om een nieuwe tijdafgeleide in te voeren welke een objectieve tensor wel objectief laat. We definiëren daartoe de convectieve afgeleide van een 2-tensor S door

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} S_{ij} &:= \dot{S}_{ij} + S_{kj} v_{k,i} + S_{ik} v_{k,j} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{D}{Dt} S &:= \dot{S} + L^T S + S L. \end{aligned} \quad (2.70)$$

We zullen bewijzen dat deze afgeleide wél objectief is, maar we willen er eerst op wijzen dat dit niet de enige manier is om een objectieve afgeleide te definiëren. De volgende twee afgeleiden zijn namelijk ook objectief

$$\begin{aligned} \frac{D'}{D't} S_{ij} &:= \dot{S}_{ij} - S_{kj} v_{i,k} - S_{ik} v_{j,k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{D'}{D't} S &:= \dot{S} - I S - S L^T, \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{D_o}{D_o t} S_{ij} &:= \dot{S}_{ij} + W_{ki} S_{kj} + W_{kj} S_{ik} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{D_o}{D_o t} S &:= \dot{S} + W^T S + S W. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Deze laatste afgeleide wordt de Jaumann-afgeleide genoemd.

Bewijs van de objectiviteit van D/Dt en D_0/D_0t : Voer in een operator M en een bijbehorende 2-tensor m zodanig dat

$$MS = \dot{S} + m^T S + Sm . \quad (2.72)$$

met de eigenschap dat

$$m^* = QmQ^T + \dot{Q}Q^T . \quad (2.73)$$

Aan deze betrekking voldoen volgens (2.63) en (2.65) de tensoren L en W .

Met (2.69) en de eigenschap dat:

$$Q\dot{Q}^T + \dot{Q}Q^T = \frac{d}{dt} (QQ^T) = \frac{d}{dt} (I) = 0 ,$$

of

$$Q\dot{Q}^T = - \dot{Q}Q^T ,$$

kunnen we uit (2.72) afleiden dat

$$\begin{aligned} (MS)^* &= Q\dot{S}Q^T + \dot{Q}SQ^T + QS\dot{Q}^T + \\ &+ (Qm^T Q^T + Q\dot{Q}^T)QSQ^T + QSQ^T(QmQ^T + \dot{Q}Q^T) = \\ &= Q(\dot{S} + m^T S + Sm)Q^T = Q(MS)Q^T . \end{aligned} \quad (2.74)$$

We zien hieruit dat MS objectief is. Kiezen we $m = L$ of $m = W$ dan is de operator M gelijk aan respectievelijk D/Dt of D_0/D_0t . Hiermee is de objectiviteit van deze afgeleiden bewezen.

De algemene uitdrukking voor de convectieve afgeleide van een n -tensor P ($n = 0, 1, 2, \dots$) luidt:

$$\frac{D}{Dt} P_{i_1 \dots i_n} := \dot{P}_{i_1 \dots i_n} + \sum_{v=1}^n P_{i_1 \dots i_{v-1} j i_{v+1} \dots i_n} v_{j, i_v} . \quad (2.75)$$

We zien hieruit dat voor een scalair ($n = 0$) de convectieve en de materiële afgeleide gelijk zijn. Voor een vector \underline{V} ($n = 1$) geldt

$$\frac{D\underline{V}}{Dt} = \dot{\underline{V}} + L\underline{V} \Rightarrow \frac{DV_i}{Dt} = \dot{V}_i + V_j v_{i, j} . \quad (2.76)$$

In de spanningsleer, in Hfdst. III, zullen we gebruik maken van de bij een 2-tensor S behorende convectieve tensor \bar{S} , welke wordt gedefinieerd door

$$\bar{S} := F^T S F \Rightarrow \bar{S}_{\alpha\beta} := S_{ij} x_{i, \alpha} x_{j, \beta} . \quad (2.77)$$

Hiervoor geldt de volgende gelijkheid

$$\frac{d}{dt} (\bar{S}_{\alpha\beta} dX_{\alpha} dX_{\beta}) = \frac{d}{dt} (S_{ij} dx_i dx_j) . \quad (2.78)$$

Bewijs. Het linkerlid van (2.78) is, omdat bij de materiële afgeleide \underline{X} constant gehouden wordt, gelijk aan

$$\dot{\bar{S}}_{\alpha\beta} dX_{\alpha} dX_{\beta} ,$$

terwijl het rechterlid wordt

$$\begin{aligned} & \dot{S}_{ij} dx_i dx_j + S_{ij} v_{i,\alpha} dX_{\alpha} x_{j,\beta} dX_{\beta} + S_{ij} x_{i,\alpha} dX_{\alpha} v_{j,\beta} dX_{\beta} = \\ & = [\dot{S}_{ij} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} + S_{ij} v_{i,\alpha} x_{j,\beta} + S_{ij} x_{i,\alpha} v_{j,\beta}] dX_{\alpha} dX_{\beta} = \\ & = \dot{\bar{S}}_{\alpha\beta} dX_{\alpha} dX_{\beta} , \end{aligned} \quad (2.79)$$

volgens (2.77). Hiermee is (2.78) bewezen.

Met behulp van de kettingregel:

$$v_{i,\alpha} = v_{i,j} x_{j,\beta} ,$$

kunnen we de uitdrukking tussen [] in (2.79) schrijven als

$$(\dot{S}_{ij} + S_{kj} v_{k,i} + S_{ik} v_{k,j}) x_{i,\alpha} x_{j,\beta} ,$$

waarmee we de belangrijke relatie

$$\dot{\bar{S}}_{\alpha\beta} = \left(\frac{D}{Dt} S_{ij} \right) x_{i,\alpha} x_{j,\beta} , \quad (2.80)$$

hebben afgeleid.

III. Balanswetten en spanningstensors

Beschouw de integraal

$$I(t) := \int_V F(\underline{x}, t) dV = \int_V f(\underline{x}, t) \rho dV, \quad (3.1)$$

waarin $F(\underline{x}, t) = \rho f(\underline{x}, t)$ een willekeurige functie is en V een materieel volume, d.w.z. V blijft steeds dezelfde deeltjes bevatten.

We kunnen bewijzen dat voor de materiële afgeleide van $I(t)$ geldt:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \dot{I}(t) = \int_V [\dot{F}(\underline{x}, t) + F(\underline{x}, t) v_{i,i}] dV. \quad (3.2)$$

Voor het bewijs van (3.2) zie het collegediktaat Toegepaste Mechanica, pp. 33 - 36.

Kiezen we $F(\underline{x}, t) = \rho$ dan wordt $I(t)$ gelijk aan de totale massa M

$$M = \int_V \rho dV.$$

Aangezien V een materieel volume is, is deze massa M constant, zodat met (3.2) geldt:

$$\dot{M} = 0 = \int_V (\dot{\rho} + \rho v_{i,i}) dV. \quad (3.3)$$

Vergelijking (3.3) moet gelden voor ieder willekeurig volume V , zodat hieruit volgt de locale massabehoudswet:

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0. \quad (3.4)$$

Als we in (3.2) $F(\underline{x}, t)$ vervangen door $\rho f(\underline{x}, t)$ krijgen we

$$\dot{I}(t) = \int_V [\rho \dot{f}(\underline{x}, t) + \dot{\rho} f(\underline{x}, t) + \rho f(\underline{x}, t) v_{i,i}] dV. \quad (3.5)$$

Met (3.4) volgt uit (3.5) de belangrijke formule voor de materiële afgeleide van een volume-integraal

$$\dot{I}(t) = \int_V \dot{f}(\underline{x}, t) \rho dV. \quad (3.6)$$

We kunnen de dynamica van continue lichamen baseren op de volgende twee axioma's

i) De impulsstelling. We definiëren de impuls door

$$\underline{p} := \int_V \rho \underline{v} dV, \quad (3.7)$$

terwijl de totale kracht werkend op een materieel volume V is

$$\underline{K} = \int_V \rho \underline{b} dV + \int_S \underline{t} dS, \quad (3.8)$$

waarin

\underline{b} : volumekracht,

\underline{t} : oppervlaktekracht.

Dan luidt de impulsstelling

$$\underline{K} = \dot{\underline{p}},$$

of

$$\int_V \rho \dot{\underline{v}} dV = \int_V \rho \underline{b} dV + \int_S \underline{t} dS. \quad (3.9)$$

ii) De impulsmomentstelling. We definiëren het impulsmoment door

$$\underline{H} := \int_V \underline{x} \times \underline{v} \rho dV. \quad (3.10)$$

Het totale moment, bij afwezigheid van volumemomenten en oppervlaktemomenten is

$$\underline{L} = \int_V (\underline{x} \times \underline{b}) \rho dV + \int_S (\underline{x} \times \underline{t}) dS. \quad (3.11)$$

De impulsmomentstelling luidt dan

$$\underline{L} = \dot{\underline{H}},$$

of, want $\dot{\underline{x}} \times \underline{v} = \underline{v} \times \underline{v} = \underline{0}$,

$$\int_V (\underline{x} \times \dot{\underline{v}}) \rho dV = \int_V (\underline{x} \times \underline{b}) \rho dV + \int_S (\underline{x} \times \underline{t}) dS, \quad (3.12)$$

waarbij \underline{L} en \underline{H} genomen zijn t.o.v. één referentiepunt, dat vast is in de ruimte.

Het tweede axioma is niet af te leiden uit het eerste. Dit wordt wel mogelijk indien we a priori aannemen dat de spanningstensor symmetrisch is. Nemen we (3.12) als axioma dan volgt hieruit de symmetrie van de spanningen.

Het is mogelijk om de dynamica van continue lichamen te bouwen op de twee axioma's (3.9) en (3.12). Het is echter ook mogelijk om uit te gaan van één axioma, en wel de energie-balanswet, waaruit dan, door eisen van frame-indifference, de vergelijkingen (3.9) en (3.12) als stellingen zijn af te leiden. De methode is ontwikkeld door Green en Rivlin (Arch. Rat. Mech. Anal., 17 (1964), 113).

We postuleren de volgende energiebalans

$$\dot{E} + \dot{K} = P, \quad (3.13)$$

waarin

$$E = \int_V \epsilon \rho dV : \text{inwendige energie}, \quad (3.14)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_V (\underline{v}, \underline{v}) \rho dV : \text{kinetische energie}, \quad (3.15)$$

en P is de uitwendig verrichte arbeid per tijdseenheid, welke we gelijkstellen aan

$$P = \int_V r \rho dV - \int_S h dS + \int_V (\underline{b}, \underline{v}) \rho dV + \int_S (\underline{t}, \underline{v}) dS. \quad (3.16)$$

Hierin is:

r : de warmteontwikkeling per tijdseenheid per massa-eenheid,

h : uitstroming van warmte aan het oppervlak per tijdseenheid per oppervlakte-eenheid,

$(\underline{b}, \underline{v})$: arbeid verricht door de volumekrachten per tijdseenheid,

$(\underline{t}, \underline{v})$: arbeid verricht door de oppervlaktekrachten per tijdseenheid.

Met (3.14) - (3.16) wordt (3.13)

$$\int_V \dot{\epsilon} \rho dV + \int_V (\underline{v}, \dot{\underline{v}}) \rho dV = \int_V r \rho dV - \int_S h dS + \int_V (\underline{b}, \underline{v}) \rho dV + \int_S (\underline{t}, \underline{v}) dS. \quad (3.17)$$

We eisen dat de energiebalans (3.13) objectief is, d.w.z. hij moet dezelfde gedaante hebben in de b^* -configuratie (zie Fig. II.5), dus:

$$\dot{E}^* + \dot{K}^* = P^*, \quad (3.18)$$

en dat \underline{t} , ϵ , r , h en ρ frame-indifferent zijn. De volumekracht \underline{b} zal in het algemeen niet objectief zijn, omdat een waarnemer welke met een versnelling t.o.v. een andere waarnemer beweegt schijnkrachten zal waarnemen. We zullen aantonen dat, zoals te verwachten is, $(\underline{b} - \dot{\underline{v}})$ wel objectief is.

We gaan eerst bekijken de volgende transformatie

$$\underline{v}^*(\underline{x}^*, t) = \underline{v}(\underline{x}, t) + \underline{\alpha}, \quad (3.19)$$

waarin $\underline{\alpha}$ een uniforme, constante vector is. Met uniform bedoelen we onafhankelijk van de plaats \underline{x} en met constant onafhankelijk van de tijd t . Dit betekent dat we op de beweging een constante translatiesnelheid gesuperponeerd hebben. Er is dan geen extra versnelling, zodat bij de transformatie (3.19) de vector \underline{b} objectief is.

Substitueren we dit in (3.18) en laten we de termen welke links en rechts gelijk zijn weg, dan houden we over

$$\begin{aligned} & \int_V (\underline{v}, \dot{\underline{v}}) \rho dV - \int_V (\underline{b}, \underline{v}) \rho dV - \int_S (\underline{t}, \underline{v}) dS = \\ & = \int_V (\underline{v} + \underline{\alpha}, \dot{\underline{v}}) - \int_V (\underline{b}, \underline{v} + \underline{\alpha}) \rho dV - \int_S (\underline{t}, \underline{v} + \underline{\alpha}) dS, \end{aligned}$$

of

$$\left(\underline{\alpha}, \int_V (\dot{\underline{v}} - \underline{b}) \rho dV - \int_S \underline{t} dS \right) = 0. \quad (3.20)$$

Omdat (3.20) moet gelden voor elke homogene, constante $\underline{\alpha}$, volgt hieruit de impulsstelling (3.9):

$$\int_V \rho \dot{\underline{v}} dV = \int_V \underline{b} \rho dV + \int_S \underline{t} dS.$$

Vervolgens beschouwen we de transformatie

$$\underline{v}^*(\underline{x}^*, t) = \underline{v}(\underline{x}, t) + \underline{a}(t), \quad (3.21)$$

waarbij $\underline{a}(t)$ nog wel uniform is maar niet meer constant. Dit is dus een versnelde translatie zodat nu \underline{b} niet meer objectief zal zijn. Substitutie van (3.21) in (3.18) geeft:

$$\begin{aligned} & \int_V (\underline{v}, \dot{\underline{v}}) \rho dV - \int_V (\underline{b}, \underline{v}) \rho dV - \int_S (\underline{t}, \underline{v}) dS = \\ & = \int_V (\underline{v} + \underline{a}, \dot{\underline{v}} + \dot{\underline{a}}) \rho dV - \int_V (\underline{b}^*, \underline{v} + \underline{a}) \rho dV - \int_S (\underline{t}, \underline{v} + \underline{a}) dS. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Door $\underline{b}^* = \underline{b} + \dot{\underline{a}} + \underline{\beta}$ te stellen en (3.9) toe te passen gaat (3.22) over in:

$$\left(\underline{\beta}, \int_V \underline{a} \rho dV + \int_V \underline{v} \rho dV \right) = 0$$

en hieraan is alleen te voldoen voor alle $\underline{a}(t)$ als $\underline{\beta} = \underline{0}$, zodat

$$\underline{b}^* = \underline{b} + \dot{\underline{a}} .$$

Hiermee is bewezen dat

$$(\underline{b} - \dot{\underline{v}})^* = (\underline{b} - \dot{\underline{v}}) , \quad (3.23)$$

dus de objectiviteit van $(\underline{b} - \dot{\underline{v}})$.

Kiezen we tenslotte de transformatie:

$$\underline{v}^*(\underline{x}^*, t) = \underline{v}(\underline{x}, t) + \underline{\Omega}(t) \times \underline{x} , \quad (3.24)$$

met $\underline{\Omega}(t)$ uniform, dan kunnen we hiermee de impulsmomentvergelijking afleiden. We zullen dit niet verder uitwerken.

Spanningen

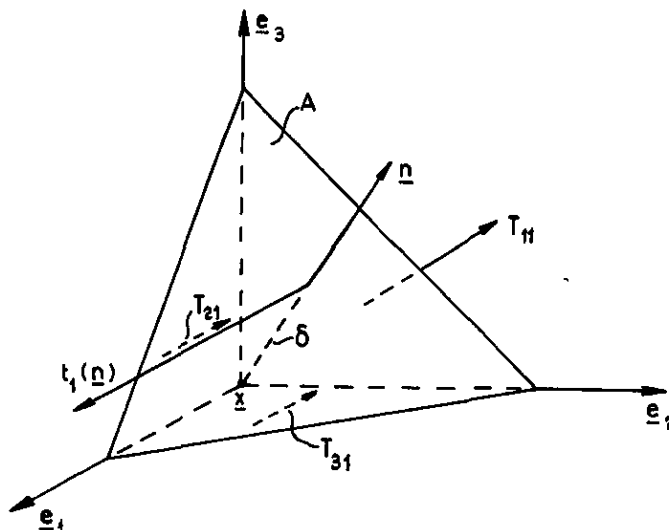


Fig. III. 1

We nemen in een punt \underline{x} van een continuum een orthonormaal stelsel basisvectoren \underline{e}_i ($i = 1, 2, 3$) aan. Dan is de kracht per oppervlakte-eenheid op een vlakje door \underline{x} met eenheidsnormaal \underline{n} gelijk aan:

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = t_i(\underline{x}, \underline{n}) \underline{e}_i . \quad (3.25)$$

Nemen we een vlakje, waarvan de normaal samenvalt met een van de basisvectoren, zeg \underline{e}_j , dan krijgen we

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_j) = t_i(\underline{x}, \underline{e}_j) \underline{e}_i . \quad (3.26)$$

We definiëren nu de spanningstensor T_{ij} door:

$$T_{ji} := t_i(\underline{x}, \underline{e}_j) , \quad (3.27)$$

dus als de kracht per oppervlak in de i -richting werkende op een vlakje met een normaal in de j -richting.

We zullen bewijzen dat tussen T en \underline{t} de volgende relatie geldt:

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = T^T(\underline{x})\underline{n} \Rightarrow t_i(\underline{x}, \underline{n}) = T_{ji}(\underline{x})n_j . \quad (3.28)$$

Hiertoe beschouwen we het evenwicht van een infinitesimaal tetrahedron met top in \underline{x} , zoals getekend in Fig. III.1. We zien dat de krachten op dit volume-element t.g.v. de volumekrachten en de versnelling van de orde δ^3 zijn (δ is de hoogte) terwijl de oppervlaktekrachten een bijdrage van de orde δ^2 geven. We hoeven dus in de limiet $\delta \rightarrow 0$ alleen deze laatste termen te bekijken. Noemen we het oppervlak van het schuine vlak van het tetrahedron A en bekijken we de impulsbalans in de 1-richting, dan krijgen we

$$t_1(\underline{n})A - T_{11} A n_1 - T_{21} A n_2 - T_{31} A n_3 + O(\delta^3) = 0 . \quad (3.29)$$

Deze vergelijking geldt analoog voor de 2- en 3-richting, zodat hiermee (3.28) bewezen is.

Met behulp van de stelling van Gauss kunnen we nu voor de kracht volgens (3.8) schrijven:

$$K_i = \int_V \rho b_i dV + \int_S T_{ji} n_j dS = \int_V [\rho b_i + T'_{ji,j}] dV . \quad (3.30)$$

Substitueren we dit in de impulsstelling (3.9) en bedenken we dat deze moet gelden voor elk willekeurig volume V dan krijgen we hieruit de lokale bewegingsvergelijking

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i . \quad (3.31)$$

Voor het moment krijgen we

$$\begin{aligned} L_i &= \int_V e_{ijk} x_j b_k \rho dV + \int_S e_{ijk} x_j T_{lk} n_l dS = \\ &= \int_V e_{ijk} x_j b_k \rho dV + \int_V (e_{ijk} x_j T_{lk})_{,l} dV = \\ &= \int_V e_{ijk} x_j (\rho b_k + T_{lk,l}) dV + \int_V e_{ijk} T_{jk} dV , \end{aligned} \quad (3.32)$$

en dit is volgens (3.12) gelijk aan

$$\dot{H}_i = \int_V e_{ijk} x_j \dot{v}_k \rho dV . \quad (3.33)$$

(3.32) en (3.33) gelijkstellen leidt met (3.31) tot:

$$e_{ijk} T_{jk} = 0 ,$$

waaraan alleen te voldoen is als

$$T_{jk} = T_{kj} . \quad (3.34)$$

Dus de spanningstensor T is symmetrisch.

Met (3.31) en met

$$\int_S t_i v_i dS = \int_S v_i T_{ji} n_j dS = \int_V [T_{ji,j} v_i + T_{ji} v_{i,j}] dV ,$$

kunnen we de energiebalans (3.17) schrijven als

$$\int_V \dot{\epsilon} \rho dV = \int_V (\rho r + T_{ji} v_{i,j}) dV - \int_S h dS . \quad (3.35)$$

Voor de warmteflux h kunnen we schrijven:

$$h = h_i n_i . \quad (3.36)$$

Opgave. Bewijs (3.36) door, op analoge wijze als bij de spanningen, het warmte evenwicht van een infinitesimaal tetrahedron te bekijken.

Met (3.36) wordt:

$$\int_S h dS = \int_S h_i n_i dS = \int_V h_{i,i} dV . \quad (3.37)$$

Substitueren we dit in (3.35) dan krijgen we voor de locale energiebalans

$$\rho \dot{\epsilon} + h_{i,i} - \rho r = T_{ji} v_{i,j} = T_{ji} D_{ij} , \quad (3.38)$$

waarbij de laatste stap volgt uit de symmetrie van T_{ij} .

We hebben tot nu toe steeds gesproken over de spanningstensor T gedefinieerd volgens (3.27) of (3.28). Deze spanningen hebben betrekking op de echte kracht werkende op het echte, d.w.z. gedeformeerde, oppervlak. We noemen deze tensor de Cauchy-spanningstensor.

Er zijn echter nog andere manieren om een spanningstensor te definiëren. We kunnen bijvoorbeeld de spanning betrekken op het oorspronkelijke oppervlak. Op deze manier krijgen we de eerste Piola-Kirchhoff spanningstensor. Deze is speciaal van belang bij problemen waarbij in de randvoorwaarden

de spanningen zijn voorgeschreven. Deze spanningen zijn dan namelijk altijd betrokken op het ongedeformeerde lichaam.

Beschouw een oppervlakte elementje $d\underline{A}(\underline{N})$, dat na deformatie overgaat in $d\underline{a}(\underline{n})$ (zie Fig. III.2). De werkelijke kracht werkende op deze oppervlakken is $d\underline{f}$.

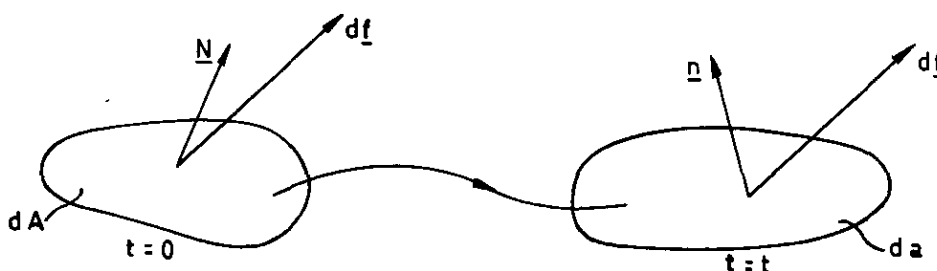


Fig. III. 2.

Met:

$$d\underline{A} = \underline{N} dA \quad \text{en} \quad d\underline{a} = \underline{n} da ,$$

en met (3.28) krijgen we

$$d\underline{f}_i = t_i(\underline{n}) da = T_{ji} n_j da = T_{ji} da_j . \quad (3.39)$$

Voor het oorspronkelijke oppervlak moet een analoge relatie gelden, namelijk:

$$d\underline{f}_i = \tilde{t}_i(\underline{N}) dA = \tilde{T}_{\alpha i} N_\alpha dA = \tilde{T}_{\alpha i} dA_\alpha . \quad (3.40)$$

De in (3.40) gedefinieerde tensor \tilde{T} wordt de eerste Piola-Kirchhoff-tensor genoemd.

Gelijkstellen van (3.39) en (3.40) geeft:

$$T_{ji} da_j = \tilde{T}_{\alpha i} dA_\alpha . \quad (3.41)$$

We zoeken nu het verband tussen dA_j en da_j . Hiertoe beschouwen we twee scharen van krommen, welke oorspronkelijk worden beschreven door:

$$X_\alpha = F_\alpha(u) , \quad X_\alpha = G_\alpha(v) , \quad (3.42)$$

en na deformatie door

$$x_i = f_i(u) , \quad x_i = g_i(v) . \quad (3.43)$$

Dan is

$$dA_\alpha = (d\underline{F}(u) \times d\underline{G}(v))_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} dF_\beta(u) dG_\gamma(v) , \quad (3.44)$$

en

$$da_i = e_{ijk} df_j(u) dg_k(v) = e_{ijk} x_{j,\beta} dF_\beta(u) x_{k,\gamma} dG_\gamma(v) . \quad (3.45)$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} da_i x_{i,\alpha} &= e_{ijk} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} x_{k,\gamma} dF_\beta(u) dG_\gamma(v) = \\ &= J e_{\alpha\beta\gamma} dF_\beta(u) dG_\gamma(v) = J dA_\alpha . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dus

$$dA_\alpha = \frac{1}{J} x_{i,\alpha} da_i , \quad (3.47)$$

en omgekeerd

$$da_i = J X_{i,\alpha} dA_\alpha . \quad (3.48)$$

Hiermee wordt (3.41):

$$T_{ji} da_j = \tilde{T}_{\alpha i} \frac{1}{J} x_{j,\alpha} da_j , \quad (3.49)$$

en dit moet gelden voor willekeurige da , zodat we hieruit de volgende relatie tussen de Cauchy-spanningstensor en de eerste Piola-Kirchhoff-tensor kunnen afleiden

$$T_{ji} = \frac{1}{J} \tilde{T}_{\alpha i} x_{j,\alpha} , \quad (3.50)$$

of, omgekeerd

$$\tilde{T}_{\alpha i} = J X_{\alpha,j} T_{ji} . \quad (3.51)$$

Uit (3.51) volgt direct dat de eerste Piola-Kirchhoff-tensor, in tegenstelling tot de Cauchy-spanningstensor, niet-symmetrisch is.

In tensornotatie luidt (3.51)

$$\tilde{T} = J F^{-1} T . \quad (3.52)$$

Hieruit volgt, gebruik makende van de symmetrie van T , dat de tensor $(F\tilde{T})$ symmetrisch is, immers

$$(F\tilde{T})^T = J T^T = J T = F\tilde{T} , \quad (3.53)$$

of in indexnotatie

$$\tilde{T}_{\alpha i} x_{j,\alpha} = \tilde{T}_{\alpha j} x_{i,\alpha} . \quad (3.54)$$

Voor het afleiden van de bewegingsvergelijkingen uitgedrukt in \tilde{T} hebben we het volgende lemma nodig:

Lemma.

$$(JX_{\alpha,k})_{,\alpha} = 0 ; \quad \left(\frac{1}{J} x_{k,\alpha}\right)_{,k} = 0 . \quad (3.55)$$

Bewijs. Noem $\bar{x}_{k\alpha}$ de onderdeterminant van J behorende bij $x_{k,\alpha}$, dus:

$$J = x_{k,\alpha} \bar{x}_{k\alpha} \quad (\text{niet sommeren over } \alpha). \quad (3.56)$$

Met de relatie

$$x_{k,\alpha} X_{\alpha,l} = \delta_{kl}$$

kunnen we hieruit afleiden

$$JX_{\alpha,k} = \bar{x}_{k\alpha} . \quad (3.57)$$

Dus (3.55¹) komt overeen met

$$\bar{x}_{k\alpha,\alpha} = 0 . \quad (3.58)$$

Volgens zijn definitie is J gelijk aan

$$J = \det \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \right) = \frac{1}{6} e_{klm} e_{\alpha\beta\gamma} x_{k,\alpha} x_{l,\beta} x_{m,\gamma} , \quad (3.59)$$

en hiermee en met (3.56) krijgen we

$$\bar{x}_{k\alpha} = \frac{\partial J}{\partial x_{k,\alpha}} = \frac{1}{2} e_{klm} e_{\alpha\beta\gamma} x_{l,\beta} x_{m,\gamma} ,$$

waaruit volgt dat

$$\bar{x}_{k\alpha,\alpha} = \frac{1}{2} e_{klm} e_{\alpha\beta\gamma} (x_{l,\beta\alpha} x_{m,\gamma} + x_{l,\beta} x_{m,\gamma\alpha}) = 0 ,$$

waarmee (3.58) en dus (3.55¹) is bewezen.

Voor het bewijs van (3.55²) schrijven we

$$\bar{X}_{\alpha k} = \frac{1}{J} x_{k,\alpha} ,$$

waarbij $\bar{X}_{\alpha k}$ de onderdeterminant is van $\frac{1}{J} = \det \left(\frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} \right)$, behorende bij $X_{\alpha,k}$.
De rest van het bewijs gaat analoog aan het vorige.

Met (3.55) en (3.50) krijgen we

$$T_{ji,j} = \left(\frac{1}{J} \tilde{T}_{\alpha i} x_{j,\alpha} \right)_{,j} = \frac{1}{J} x_{j,\alpha} \tilde{T}_{\alpha i,j} . \quad (3.60)$$

Substitueren we dit in de bewegingsvergelijking (3.31) en gebruiken we de relatie

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{m/\Delta V}{m/\Delta v} = J , \quad (3.61)$$

dan vinden we

$$\tilde{T}_{\alpha i,j} x_{j,\alpha} + \rho_0 b_i = \rho_0 \dot{v}_i$$

of

$$\tilde{T}_{\alpha i,\alpha} + \rho_0 b_i = \rho_0 \dot{v}_i . \quad (3.62)$$

(3.62) vormt een stelsel van drie lineaire vergelijkingen voor negen onbekende spanningscomponenten (want $\tilde{T}_{\alpha i} \neq \tilde{T}_{i\alpha}$). De vergelijkingen moeten daarom aangevuld worden met de drie symmetrierelaties (3.54):

$$\tilde{T}_{\alpha i} x_{j,\alpha} = \tilde{T}_{\alpha j} x_{i,\alpha} ,$$

welke niet-lineair zijn.

We definiëren de tweede Piola-Kirchhoff-tensor $\tilde{\tilde{T}}$ door

$$\tilde{\tilde{T}} := J F^{-1} T (F^{-1})^T \Rightarrow \tilde{\tilde{T}}_{\alpha\beta} := J T_{ij} X_{\alpha,i} X_{\beta,j} . \quad (3.63)$$

Uit deze definitie volgt direct, aangezien T symmetrisch is, dat $\tilde{\tilde{T}}$ symmetrisch is:

$$\tilde{\tilde{T}}_{\alpha\beta} = \tilde{\tilde{T}}_{\beta\alpha} . \quad (3.64)$$

Uit (3.63) volgt met behulp van de kettingregel

$$T_{ij} = \frac{1}{J} \tilde{\tilde{T}}_{\alpha\beta} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} . \quad (3.65)$$

Substitueren we dit in (3.31), dan krijgen we met

$$\left(\frac{1}{J} x_{i,\alpha} \tilde{\tilde{T}}_{\alpha\beta} x_{j,\beta} \right)_{,i} = \frac{1}{J} x_{i,\alpha} \left(\tilde{\tilde{T}}_{\alpha\beta} x_{j,\beta} \right)_{,i} = \frac{1}{J} \left(\tilde{\tilde{T}}_{\alpha\beta} x_{j,\beta} \right)_{,\alpha} ,$$

de bewegingsvergelijkingen uitgedrukt in $\tilde{\tilde{T}}$

$$\left(\tilde{\tilde{T}}_{\alpha\beta} x_{i,\beta} \right)_{,\alpha} + \rho_0 b_i = \rho_0 \dot{v}_i . \quad (3.66)$$

(3.66) vormt een stelsel van drie niet-lineaire vergelijkingen voor zes onbekende spanningscomponenten (want $\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\beta\alpha}$).

We zien dus dat voor de eerste Piola-Kirchhoff-tensor de bewegingsvergelijkingen lineair zijn en de symmetrierelaties (\equiv impulsmomentvergelijking) niet-lineair, terwijl dat voor de tweede Piola-Kirchhoff-tensor juist omgekeerd is.

We zullen nu een fysische interpretatie geven van de tweede Piola-Kirchhoff-tensor.

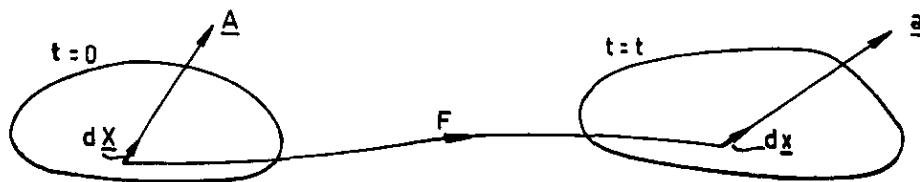


Fig. III. 3

Beschouw een infinitesimaal, materieel lijnelementje in de referentietoestand ($t = 0$): $d\underline{X}$, dat na de deformatie ($t = t$) overgegaan is in $d\underline{x}$. Beschouw twee vectoren \underline{A} (op $t = 0$) en \underline{a} (op $t = t$) met de volgende eigenschappen (zie Fig. III.3):

- i) \underline{A} en \underline{a} hebben dezelfde richting als respectievelijk $d\underline{X}$ en $d\underline{x}$,
- ii) de verhouding van de lengten van \underline{A} en \underline{a} : $\frac{|\underline{A}|}{|\underline{a}|}$ is gelijk aan $\frac{|d\underline{X}|}{|d\underline{x}|}$.

In formule-vorm uitgedrukt geeft dit:

$$a_i = x_{i,\alpha} A_\alpha, \quad \text{of} \quad A_\alpha = X_{\alpha,i} a_i. \quad (3.67)$$

Bedenk dat de componenten van \underline{A} en \underline{a} betrokken zijn op hetzelfde, cartesische assenkruis.

Van een stelsel vectoren dat zich gedraagt op de hierboven beschreven manier zeggen we dat: de vector \underline{A} met de deformatie meegroeit naar de vector \underline{a} .

Het blijkt dat de componenten $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ zijn: de spanningscomponenten:

- i) betrokken op het oorspronkelijke oppervlak,
- ii) van de "kracht" welke na deformatie groeit naar de echte krachtsvector.

Dit volgt direct uit het verband dat bestaat tussen de eerste en tweede Piola-Kirchhoff-tensor

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\alpha k} X_{\beta,k}, \quad (3.68)$$

welke relatie overeenstemt met (3.67).

We kunnen \tilde{T} ook nog op een andere manier interpreteren. Daartoe definiëren we een stelsel basisvectoren, welke in het algemeen geen eenheidsvectoren zullen zijn, door

$$\underline{c}_i := \frac{\partial X}{\partial x_i} = \frac{\partial X}{\partial X_\alpha} X_{\alpha,i} = X_{\alpha,i} \underline{E}_\alpha, \quad (3.70)$$

waarin \underline{E}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) een cartesisch stelsel van eenheidsvectoren voorstelt gedefinieerd door

$$\underline{E}_\alpha := \frac{\partial X}{\partial X_\alpha}. \quad (3.71)$$

We kunnen dan de tweede Piola-Kirchhoff-tensor schrijven als:

$$\tilde{T} = \tilde{T}_{\alpha\beta} \underline{E}_\alpha \underline{E}_\beta = \tilde{T}_{\alpha i} X_{\beta,i} \underline{E}_\alpha \underline{E}_\beta = \tilde{T}_{\alpha i} \underline{E}_\alpha \underline{c}_i. \quad (3.72)$$

Hiermee kunnen we $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ interpreteren als de spanningscomponenten:

- i) betrokken op het oorspronkelijke oppervlak,
- ii) van de werkelijke kracht gemeten t.o.v. de basisvectoren \underline{c}_i .

Tenslotte definiëren we nog een vierde spanningstensor, de convectieve spanningstensor \bar{T} , door

$$\bar{T} := F^T T F \Rightarrow \bar{T}_{\alpha\beta} = T_{ij} x_{i,\alpha} x_{j,\beta}. \quad (3.73)$$

Definiëren we de basisvectoren \underline{g}_i door

$$\underline{g}_i := x_{i,\alpha} \underline{E}_\alpha, \quad (3.74)$$

dan krijgen we

$$\bar{T} = \bar{T}_{\alpha\beta} \underline{E}_\alpha \underline{E}_\beta = T_{ij} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} \underline{E}_\alpha \underline{E}_\beta = T_{ij} \underline{g}_i \underline{g}_j. \quad (3.75)$$

We kunnen $\bar{T}_{\alpha\beta}$ dus interpreteren als de componenten van de Cauchy-tensor T t.o.v. de basisvectoren \underline{g}_i .

Uit de definitie (3.73) volgt direct dat de convectieve spanningstensor \bar{T} symmetrisch is.

De convectieve spanningstensor is van belang indien we te maken krijgen met spanningssnelheden (rate of stress). Immers, volgens (2.80) geldt:

$$\dot{\bar{T}}_{\alpha\beta} = \left(\frac{D}{Dt} T_{ij} \right)_{x_{i,\alpha} x_{j,\beta}} .$$

Voor de materiële afgeleide van \tilde{T} vinden we met

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (X_{\alpha,k}) &= \frac{\partial}{\partial t} (X_{\alpha,k}) \Big|_{\underline{x}=c} + X_{\alpha,kl} v_l = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial t} \Big|_{\underline{x}=c} \right) + X_{\alpha,kl} v_l = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dX_\alpha}{dt} - X_{\alpha,l} v_l \right) + X_{\alpha,kl} v_l = \\ &= - X_{\alpha,lk} v_l - X_{\alpha,l} v_{l,k} + X_{\alpha,kl} v_l = - X_{\alpha,l} v_{l,k} \end{aligned} \quad (3.76)$$

en (2.39):

$$\dot{J} = J v_{k,k}$$

de uitdrukking

$$\frac{d}{dt} (\tilde{T}_{\alpha\beta}) = J \overset{\nabla}{T}_{kl} X_{\alpha,k} X_{\beta,l} , \quad (3.77)$$

waarin $\overset{\nabla}{T}$ de Truesdell-afgeleide aangeeft, welke gedefinieerd is door

$$\overset{\nabla}{T}_{kl} = \dot{T}_{kl} - T_{km} v_{l,m} - T_{ml} v_{k,m} + T_{kl} v_{m,m} . \quad (3.78)$$

De tensor $\overset{\nabla}{T}$ is frame-indifferent.

We zullen tot slot laten zien dat, indien in de constitutieve vergelijkingen spanningssnelheden voorkomen, we niet kunnen werken met de materiële afgeleide

$$\dot{T}_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + T_{ij,k} v_k , \quad (3.79)$$

maar dat we de Jaumann-afgeleide

$$\frac{D_0}{Dt} T_{ij} = \dot{T}_{ij} - T_{ik} W_{kj} - T_{kj} W_{ik} , \quad (3.80)$$

moeten gebruiken.

Vergelijking (3.79) stelt namelijk de snelheid voor, waarmee de spanningscomponenten, betrokken op een vast in de ruimte staand assenkruis, veranderen. Het volgende voorbeeld zal aantonen dat deze snelheidstensor onbruikbaar is in constitutieve vergelijkingen.

Neem een staaf welke in zijn einddoorsneden belast wordt door axiale krachten en laat deze staaf samen met deze krachten roteren. Dan zullen de spanningscomponenten betrokken op een vast assenkruis veranderen, terwijl het materiaal van de staaf dezelfde spanning blijft voelen. We zien hieruit dat we in de spanningsafgeleide nog een term, welke de rotatie in rekening brengt, moeten meenemen.

We nemen in een materieel \mathcal{P} , waarvan we, omdat we hier speciaal de rotatietermen willen bekijken, de snelheid voorlopig buiten beschouwing laten, twee orthonormale stelsels van basisvectoren: \underline{e}_i en \underline{e}'_i , welke op tijdstip t samenvallen en waarvan het eerste vast in de ruimte is, terwijl het tweede met de locale rotatie van \mathcal{P} meedraait. Nemen we een tweede punt \mathcal{Q} dat infinitesimaal dicht bij \mathcal{P} ligt (afstand: $d\underline{x}$), dan veranderen de coördinaten dx'_j niet bij een rotatie waarbij $d\underline{x}$ star is, maar de dx_j wel, namelijk met een snelheid

$$dv_i = W_{ij} dx'_j, \quad (3.81)$$

waarin

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = -e_{ijk} \Omega_k, \quad (3.82)$$

met $\underline{\Omega}$ de locale rotatie-vector in \mathcal{P} . Hiermee krijgen we op het tijdstip $(t+dt)$:

$$\begin{aligned} dx_i(t+dt) &= dx'_i(t+dt) + W_{ij} dx'_j(t+dt)dt = \\ &= (\delta_{ij} + W_{ij} dt) dx'_j(t+dt). \end{aligned} \quad (3.83)$$

We kunnen $(\delta_{ij} + W_{ij} dt)$ opvatten als de richtingscosinussen van de draaiing van het stelsel \underline{e}'_i t.o.v. \underline{e}_i .

Voor de spanningscomponenten op het tijdstip $(t+dt)$ t.o.v. de vaste basis \underline{e}_i kunnen we schrijven

$$T_{ij}(t+dt) = T_{ij}(t) + \dot{T}_{ij}(t)dt. \quad (3.84)$$

Door draaiing krijgen we dan voor de componenten t.o.v. \underline{e}'_i :

$$T'_{ij}(t+dt) = (\delta_{ki} + W_{ki} dt)(\delta_{lj} + W_{lj} dt)(T_{kl}(t) + \dot{T}_{kl}(t)dt). \quad (3.85)$$

Na verwaarlozing van de termen van $\mathcal{O}(dt^2)$ en met $W_{ki} = -W_{ik}$ krijgen we uit (3.85):

$$\begin{aligned} T'_{ij}(t+dt) &= T_{ij}(t) + [\dot{T}_{ij}(t) - W_{jk} T_{ik} - W_{ik} T_{kj}]dt = \\ &= T_{ij}(t) + \frac{D_0}{D_0 t} (T_{ij})dt. \end{aligned} \quad (3.86)$$

We kunnen hieruit concluderen, dat de Jaumann-afgeleide van de spanningstensor de verandering per tijdseenheid van de spanning is, zoals die door het materiaal zelf wordt gevoeld. Dus de spanningssnelheid: $\frac{D}{D_0} \frac{D}{dt} (T_{ij})$ is wél bruikbaar in de constitutieve vergelijkingen.

We willen er nog op wijzen dat dit niet de enige mogelijkheid is. Ook de convectieve afgeleide en de Truesdell-afgeleide mogen gebruikt worden.

IV. Thermodynamica

De thermodynamica is gebaseerd op twee hoofdwetten:

i) Eerste hoofdwet:

$$\dot{K} + \dot{E} = M + Q, \quad (4.1)$$

waarin

K: kinetische energie,

E: inwendige energie,

M: uitwendig verrichte arbeid per tijdseenheid,

Q: uitwendig toegevoerde warmte per tijdseenheid.

Deze wet geldt zowel globaal als lokaal. De lokale vorm luidt volgens (3.38), waarin $\underline{h} = -\underline{q}$ is genomen:

$$\rho \dot{e} = \rho r + q_{i,i} + T_{ij} D_{ij}. \quad (4.2)$$

ii) Tweede hoofdwet:

We beschouwen eerst een homogene toestand. We stellen:

$$Q = \theta \dot{H} - D, \quad (4.3)$$

waarin

θ : absolute temperatuur ($\theta > 0$),

H: entropie,

D: dissipatie; $\frac{D}{\theta}$: entropie-productie.

Dan luidt de tweede hoofdwet, ook wel Clausius-Duhem-ongelijkheid genoemd:

$$D \geq 0. \quad (4.4)$$

Als $D = 0$ spreken we van een reversibel proces. De klassieke thermodynamica beperkt zich grotendeels tot reversibele, homogene processen.

In een homogene toestand zijn de temperatuur θ en de entropie H uniform. De temperatuur kan dan op de klassieke manier (als in de kinetische gastheorie) worden gedefinieerd.

In een niet-homogene toestand kunnen de θ en de H niet meer op deze manier worden gedefinieerd. Ze moeten dan namelijk lokaal worden gedefinieerd. Hiertoe wordt het lichaam verdeeld in een zogenaamde grofkorrelige distributie (coarse grained distribution). Dit wil zeggen: het lichaam wordt verdeeld in gebiedjes waarvan de grootte groot is t.o.v. atomaire afstanden, maar klein t.o.v. de uitwendige maten van het lichaam. De θ en de H worden dan lokaal gedefinieerd over zo'n gebiedje.

De grondslagen van deze theorie liggen in de statistische mechanica. Wij zullen hier verder aannemen, dat er een temperatuur θ als functie van de plaats bestaat en dat we voor de entropie H kunnen schrijven:

$$H = \int_V \eta \rho \, dV . \quad (4.5)$$

We weten verder dat

$$Q = \int_V r \rho \, dV + \int_S q_k n_k \, dS , \quad (4.6)$$

waarmee we volgens (4.3) voor de entropie-productie krijgen:

$$\Gamma := \frac{D}{\theta} = \int_V \dot{\eta} \rho \, dV - \int_S \frac{q_k n_k}{\theta} \, dS - \int_V \frac{r \rho}{\theta} \, dV . \quad (4.7)$$

Hiermee krijgen we voor de Clausius-Duhem-ongelijkheid voor een niet-homogeen medium:

$$\Gamma = \int_V \dot{\eta} \rho \, dV - \int_S \frac{q_k n_k}{\theta} \, dS - \int_V \frac{r \rho}{\theta} \, dV \geq 0 . \quad (4.8)$$

Stellen we

$$\Gamma = \int_V \gamma \rho \, dV \quad (4.9)$$

dan kunnen we, met de stelling van Gauss uit (4.8) de locale tweede hoofdwet voor een inhomogeen medium afleiden:

$$\gamma = \dot{\eta} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{q_i}{\theta} \right)_{,i} - \frac{r}{\theta} \geq 0 . \quad (4.10)$$

We kunnen (4.10) beschouwen als een postulaat, dat gebaseerd is op de statistische mechanica.

Elimineren we r uit (4.10) met behulp van (4.2) dan krijgen we

$$\rho \gamma = \frac{1}{\theta} T_{kl} D_{kl} + \rho \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\theta} \right) + \frac{q_k}{\theta^2} \theta_{,k} \geq 0 . \quad (4.11)$$

Het heeft dikwijls voordelen, in problemen waarin de temperatuur een rol speelt speciaal, om de inwendige energie ε te vervangen door de vrije energie ψ , welke gedefinieerd is door

$$\psi := \varepsilon - \eta \theta . \quad (4.12)$$

Hiermee gaat (4.11) over in

$$\rho\theta\gamma = T_{kl} \cdot D_{kl} - \rho\dot{\psi} - \rho\eta\dot{\theta} + \frac{q_k}{\theta} \theta_{,k} \geq 0. \quad (4.13)$$

Als γ overall nul is, spreken we van een reversibel proces.

We zullen de Clausius-Duhem-ongelijkheid gebruiken voor het afleiden van constitutieve vergelijkingen. Hiertoe stellen we het volgende postulaat: de constitutieve vergelijkingen moeten voldoen aan het equipresentie-principe. Dit houdt het volgende in:

Stel we hebben een mechanische toestand, welke beschreven kan worden door een aantal onafhankelijke variabelen plus een aantal afhankelijke variabelen welke functies daarvan zijn. Dan luidt het equipresentie-principe: alle afhankelijke variabelen moeten, tenzij het tegengestelde is bewezen, afhangen van alle onafhankelijke variabelen.

We zullen in een voorbeeld laten zien hoe we met behulp van dit principe uit de Clausius-Duhem-ongelijkheid een aantal constitutieve relaties kunnen afleiden. Hiertoe zullen we een bepaalde toelaatbare thermodynamische toestand (d.i. een systeem van variabelen met hun onderlinge relaties, dat voldoet aan de Clausius-Duhem-ongelijkheid) vergelijken met alle andere toelaatbare thermodynamische toestanden welke we daaruit kunnen verkrijgen door de uitwendige omstandigheden (volumekracht \underline{b} , warmtebron r e.d.) te variëren. De hier te volgen methode is voor het eerst afgeleid door Coleman en Noll (Arch. Rat. Mech. Anal., 1959 e.v.).

Als voorbeeld zullen we beschouwen een thermo-elastisch medium. We veronderstellen dat de onafhankelijke variabelen zijn: $x_{k,\alpha}$, θ , $\theta_{,k}$. Dan moet volgens het equipresentie-principe voor de afhankelijke variabelen T , \underline{q} , η en ψ gelden:

$$\begin{aligned} T_{kl} &= T_{kl}(x_{k,\alpha}, \theta, \theta_{,k}), \\ q_k &= q_k(x_{k,\alpha}, \theta, \theta_{,k}), \\ \eta &= \eta(x_{k,\alpha}, \theta, \theta_{,k}), \\ \psi &= \psi(x_{k,\alpha}, \theta, \theta_{,k}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Hiermee vinden we dat

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial x_{k,\alpha}} \dot{x}_{k,\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta_{,k}} \dot{\theta}_{,k} =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial x_{k,\alpha}} v_{k,l} x_{l,\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta_{,k}} \dot{\theta}_{,k}, \quad (\dot{\theta}_{,k} = \frac{d}{dt} (\theta_{,k})), \quad (4.15)$$

Met (4.15) gaat de Clausius-Duhem-ongelijkheid in de vorm (4.13) over in:

$$\left(T_{kl} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_{k,\alpha}} x_{l,\alpha} \right) v_{k,l} - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \theta_{,k}} \dot{\theta}_{,k} + \frac{q_k}{\theta} \theta_{,k} \geq 0. \quad (4.16)$$

Deze ongelijkheid moet gelden voor alle mogelijke toelaatbare thermodynamische toestanden. We kunnen bijvoorbeeld het temperatuurveld constant én homogeen nemen. Dan zijn $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{,k} = \dot{\theta}_{,k} = 0$ en gaat (4.16) over in:

$$\left(T_{kl} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_{k,\alpha}} x_{l,\alpha} \right) v_{k,l} \geq 0. \quad (4.17)$$

Nu is de term in (4.17) tussen () volgens (4.14) onafhankelijk van $v_{k,l}$, zodat voor willekeurige $v_{k,l}$ aan (4.17) alleen te voldoen is als

$$T_{kl} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_{k,\alpha}} x_{l,\alpha}. \quad (4.18)$$

Hiermee hebben we een constitutieve vergelijking voor de Cauchy-spanningen afgeleid.

Omdat in (4.16) de coëfficiënten voor $\dot{\theta}$ en $\dot{\theta}_{,k}$ onafhankelijk zijn van resp. $\dot{\theta}$ en $\dot{\theta}_{,k}$ en (4.16) moet gelden voor willekeurige $\dot{\theta}$ en $\dot{\theta}_{,k}$, kunnen we op analoge wijze afleiden:

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (4.19)$$

en

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_{,k}} = 0. \quad (4.20)$$

Uit (4.20) volgt dat ψ onafhankelijk is van $\theta_{,k}$, en dan zijn volgens (4.18) en (4.19) T en η ook onafhankelijk van $\theta_{,k}$.

Met (4.18) - (4.20) reduceert (4.16) tot (want $\theta > 0$)

$$q_k \theta_{,k} \geq 0. \quad (4.21)$$

We mogen nu niet meer de coëfficiënt voor $\theta_{,k}$ nul stellen, omdat q_k wél afhankelijk is van $\theta_{,k}$. Als we bijvoorbeeld aannemen dat het verband tussen q_k en $\theta_{,k}$ lineair is (d.w.z. we nemen aan dat de wet van Fourier geldt):

$$q_k = \alpha(x_{k,\alpha}, \theta) \theta_{,k} \quad (\alpha = \text{warmtegeleidingscoëfficiënt}) \quad (4.22)$$

dan wordt (4.21)

$$\alpha \theta_{,k} \theta_{,k} \geq 0, \quad (4.23)$$

waaraan voldaan is door $\alpha > 0$ te kiezen.

Als tweede voorbeeld kiezen we een visceuze vloeistof. Als onafhankelijke variabelen nemen we: $\frac{1}{\rho}$ (dit is een maat voor de druk), $v_{k,l}$, θ en $\theta_{,k}$. Voor de afhankelijke variabelen geldt dan

$$\begin{aligned} T_{kl} &= T_{kl} \left(\frac{1}{\rho}, v_{k,l}, \theta, \theta_{,k} \right), \\ q_k &= q_k \left(\frac{1}{\rho}, v_{k,l}, \theta, \theta_{,k} \right), \\ \eta &= \eta \left(\frac{1}{\rho}, v_{k,l}, \theta, \theta_{,k} \right), \\ \psi &= \psi \left(\frac{1}{\rho}, v_{k,l}, \theta, \theta_{,k} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Bedenken we dat volgens (3.4)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = - \frac{1}{\rho^2} \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} v_{k,k},$$

dan wordt de Clausius-Duhem-ongelijkheid (4.13):

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \psi}{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)} v_{k,k} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial v_{k,l}} \dot{v}_{k,l} - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} + \\ & - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \theta_{,k}} \dot{\theta}_{,k} + T_{kl} v_{k,l} + \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

De coëfficiënten van $\dot{v}_{k,l}$, $\dot{\theta}$ en $\dot{\theta}_{,k}$ zijn onafhankelijk van deze flucties, zodat moet gelden:

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial v_{k,l}} = 0, \quad (4.26)$$

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (4.27)$$

en

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_{,k}} = 0. \quad (4.28)$$

Van (4.25) blijft dan nog over

$$\left(T_{kl} + \Pi \delta_{kl} \right) v_{k,l} + \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0, \quad (4.29)$$

waarin de hydrostatische druk Π gedefinieerd is door

$$\Pi := - \frac{\partial \psi}{\partial \left(\frac{1}{\rho}\right)} . \quad (4.30)$$

Aan de ongelijkheid (4.29) is op de eenvoudigste manier te voldoen d.m.v. de lineaire betrekkingen:

$$\begin{aligned} q_k &= \alpha \theta_{,k} & (\alpha > 0) , \\ T_{kl} &= -\Pi \delta_{kl} + a \delta_{kl} v_{k,k} + b v_{k,l} & (a + \frac{2}{3} b \geq 0, b \geq 0) . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Vergelijking (4.31²) is de Navier-Stokes vergelijking.

Literatuur: Truesdell: Rational Thermodynamics, 1968, pag. 45.

V. Algemene constitutieve vergelijkingen

We hebben tot nu toe alleen balanswetten behandeld. We hebben al enige malen gezien dat deze wetten niet voldoende in aantal zijn voor het aantal onbekenden dat we hebben. Daarom hebben we nog een stelsel aanvullende vergelijkingen nodig, de zogenaamde constitutieve vergelijkingen. Deze vergelijkingen geven de relaties tussen de afhankelijke en de onafhankelijke variabelen.

Deze constitutieve vergelijkingen moeten aan de volgende principes voldoen:

1. Principe van het Determinisme.

Stel we hebben een afhankelijke variabele $T(\underline{X}, t)$, welke een functie is van de n onafhankelijke variabelen $q_i(\underline{X}, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, en van de plaats \underline{X} en de tijd t . Dan luidt het principe van het determinisme: de afhankelijke variabele in een bepaalde plaats \underline{X} en op een bepaalde tijd t wordt bepaald door de onafhankelijke variabelen in alle plaatsen en op alle tijden. In formulevorm is dit te schrijven als:

$$T(\underline{X}, t) = f(q_1(\underline{X}', t'), \dots, q_n(\underline{X}', t'), \underline{X}, t), \quad (5.1)$$

met \underline{X}' en t' willekeurige plaats en tijd.

Dit principe is dikwijls voor meer gespecialiseerde gevallen te algemeen. Enkele minder algemene principes, welke bijzondere gevallen van 1) zijn, luiden:

1.1. Principe van de locale actie.

In dit geval hangt de afhankelijke variabele $T(\underline{X}, t)$ af van de onafhankelijke variabelen in \underline{X} op alle tijden. Dus:

$$T(\underline{X}, t) = f(q_1(\underline{X}, t'), \dots, q_n(\underline{X}, t'), \underline{X}, t). \quad (5.2)$$

1.2. Principe van de momentane actie.

In dit geval hangt de afhankelijke variabele $T(\underline{X}, t)$ af van de onafhankelijke variabelen in alle plaatsen op tijd t . Dus:

$$T(\underline{X}, t) = f(q_1(\underline{X}', t), \dots, q_n(\underline{X}', t), \underline{X}, t). \quad (5.3)$$

1.3. Principe van de locale, momentane actie.

Dit is de combinatie van 1.1 en 1.2, waarvoor geldt:

$$T(\underline{X}, t) = f(q_1(\underline{X}, t), \dots, q_n(\underline{X}, t), \underline{X}, t). \quad (5.4)$$

Hierbij hangen de afhankelijke variabelen in een bepaalde plaats en op een bepaalde tijd alleen af van de onafhankelijke variabelen in dezelfde plaats en op dezelfde tijd.

Voorbeelden van 1.1, 1.2 en 1.3 zijn:

- 1.1: Viscoëlastisch materiaal. Dit materiaal heeft namelijk een geheugen, d.w.z. de toestand op een bepaald tijdstip is afhankelijk van wat er voor dit tijdstip gebeurd is.
- 1.2: Magneto-elastisch materiaal. Voor een magnetiseerbaar lichaam in een uitwendig veld geldt namelijk dat de toestand in het inwendige van het lichaam afhankelijk is van de uitwendige vorm van dat lichaam.
- 1.3: Elastisch materiaal.

2. Principe van de Equipresentie.

Dit principe houdt in, zoals we al eerder hebben gezien, dat, zolang niet het tegengestelde bewezen is, alle afhankelijke variabelen moeten afhangen van alle onafhankelijke variabelen.

3. Principe van de Toelaatbaarheid.

Dit betekent dat steeds aan de Clausius-Duhem-ongelijkheid moet zijn voldaan.

4. Principe van de Transformeerbaarheid.

We betrekken steeds alle componenten op één bepaald assenkruis (zie Fig. II.2). Stel dat we dit assenkruis over een bepaalde hoek verdraaien (rotatiematrix: Q). Dan geldt voor de componenten van de plaatsvectoren t.o.v. dit gedraaide stelsel (aangegeven met ') volgens (1.2):

$$X'_\alpha = Q_{\alpha\beta} X_\beta, \quad x'_i = Q_{ij} x_j. \quad (5.5)$$

We nemen als voorbeeld een constitutieve vergelijking, waarbij de spanningen T functies zijn van de deformatiegradiënt F :

$$T = f(F) \Rightarrow T_{ij} = f_{ij}(F). \quad (5.6)$$

Het principe van de transformeerbaarheid zegt nu dat de constitutieve vergelijking (5.6) ook moet gelden in het gedraaide stelsel:

$$T'_{ij} = f'_{ij}(F'). \quad (5.7)$$

Volgens (1.5) transformeert T_{ij} zich als

$$T'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} T_{kl} = Q_{ik} Q_{jl} f_{kl}(F). \quad (5.8)$$

Voor F geldt analoog:

$$F'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} F_{kl} \Rightarrow F' = QFQ^T. \quad (5.9)$$

Zodat, volgens (5.7), algemeen moet gelden:

$$Q_{ik} Q_{jl} f_{kl}(F) = f'_{ij}(QFQ^T). \quad (5.10)$$

We noemen f een isotrope functie, indien geldt:

$$f' = f. \quad (5.11)$$

Dus voor isotrope f wordt (5.10):

$$Q_{ik} Q_{jl} f_{kl}(F) = f_{ij}(QFQ^T). \quad (5.12)$$

5. Principe van de objectiviteit van de materiaaleigenschappen.

Volgens dit principe (zie Hfdst. II) moeten materiaaleigenschappen invariant zijn ten aanzien van starre-lichaamsverplaatsingen. Dit houdt in (zie (2.55) en (2.56)), dat als tussen de twee processen $\{\underline{\chi}, T\}$ en $\{\underline{\chi}^*, T^*\}$ de relaties gelden

$$\begin{aligned} \underline{\chi}^*(\underline{X}, t) &= Q(t)\underline{\chi}(\underline{X}, t) + \underline{c}(t), \\ T^*(\underline{X}, t) &= Q(t)T(\underline{X}, t)Q^T(t), \end{aligned} \quad (5.13)$$

dat dan voor deze twee processen dezelfde constitutieve vergelijking moet gelden.

Uit dit principe kunnen de volgende conclusies getrokken worden:

i) Stel

$$T = f(\underline{\chi}(\underline{X}, t), q_1, \dots, q_n, \underline{X}, t). \quad (5.14)$$

Dan moet volgens het principe van de objectiviteit gelden:

$$f(\underline{\chi}(\underline{X}, t), q_1, \dots, q_n, \underline{X}, t) = f^*(\underline{\chi}^*(\underline{X}, t), q_1^*, \dots, q_n^*, \underline{X}, t). \quad (5.15)$$

We superponeren een zodanige starre-lichaamsverplaatsing, dat de verplaatsing van het materiële punt \underline{X} in de b^* -configuratie $\underline{\chi}^*(\underline{X}, t)$ verdwijnt. In dat geval is f^* onafhankelijk van $\underline{\chi}^*(\underline{X}, t)$. In overeenstemming met (5.15) moet f dan altijd onafhankelijk zijn van $\underline{\chi}(\underline{X}, t)$.

Conclusie: de constitutieve vergelijkingen mogen nooit expliciet van de Eulerse coördinaten

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t) \quad (5.16)$$

afhangen.

ii. Stel

$$T = f(F) . \quad (5.17)$$

De spanning T voldoet aan (5.13)², dus

$$T^* = QTQ^T = Qf(F)Q^T . \quad (5.18)$$

Voor de deformatiegradiënt F geldt volgens (2.58)

$$F^* = QF , \quad (5.19)$$

waaruit met (5.15) en (5.17) volgt

$$T^* = f^*(F^*) = f(F^*) = f(QF) . \quad (5.20)$$

Gelijkstellen van (5.18) en (5.20) levert de belangrijke relatie

$$Qf(F)Q^T = f(QF) . \quad (5.21)$$

Schrijven we $F = RU$ en kiezen we $Q = R^T$, dan gaat (5.21) over in:

$$R^T f(F) R = f(R^T R U) = f(U) , \quad (5.22)$$

dus, met (5.17)

$$T = f(F) = Rf(U)R^T . \quad (5.23)$$

De spanning T kan alleen op de wijze volgens (5.23) van de rektensor U afhangen.

Door $F = VR$ te nemen kunnen we op analoge wijze uit (5.21) afleiden

$$T^* = Qf(F)Q^T = f(QVR) = f(QVQ^T) = f(V^*) ,$$

of, met (5.15)

$$T = f(V) . \quad (5.24)$$

De spanning T kan dus wél rechtstreeks van de rektensor V afhangen. Dit is een gevolg van het feit dat V wél en U niet objectief is (zie hfdst. II).

iii. Stel er geldt de volgende constitutieve vergelijking:

$$T_{ij} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha} , \quad \text{met } \epsilon = \epsilon(F) . \quad (5.25)$$

We beschouwen een transformatie, waarbij de ene configuratie over een bepaalde hoek verdraaid is t.o.v. de andere (rotatievector $\underline{\omega}$). Dan geldt:

$$x_i^* = x_i + \delta x_i = x_i + e_{ijk} \omega_j x_k . \quad (5.26)$$

De deformatiegradiënt F gaat dan over in

$$x_{i,\alpha}^* = x_{i,\alpha} + e_{ijk} \omega_j x_{k,\alpha} , \quad (5.27)$$

en de uitwendige energie ϵ in

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \delta\varepsilon = \varepsilon + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{i,\alpha}} \delta x_{i,\alpha} = \varepsilon + e_{ijk} \omega_j \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{i,\alpha}} x_{k,\alpha} . \quad (5.28)$$

Aangezien de energie ε objectief is, moet $\delta\varepsilon = 0$ zijn, voor elke $\underline{\omega}$, waarmee uit (5.28) volgt:

$$e_{ijk} \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{i,\alpha}} x_{k,\alpha} = 0 . \quad (5.29)$$

Aan (5.29) is alleen te voldoen indien

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{i,\alpha}} x_{k,\alpha} = T_{ik}$$

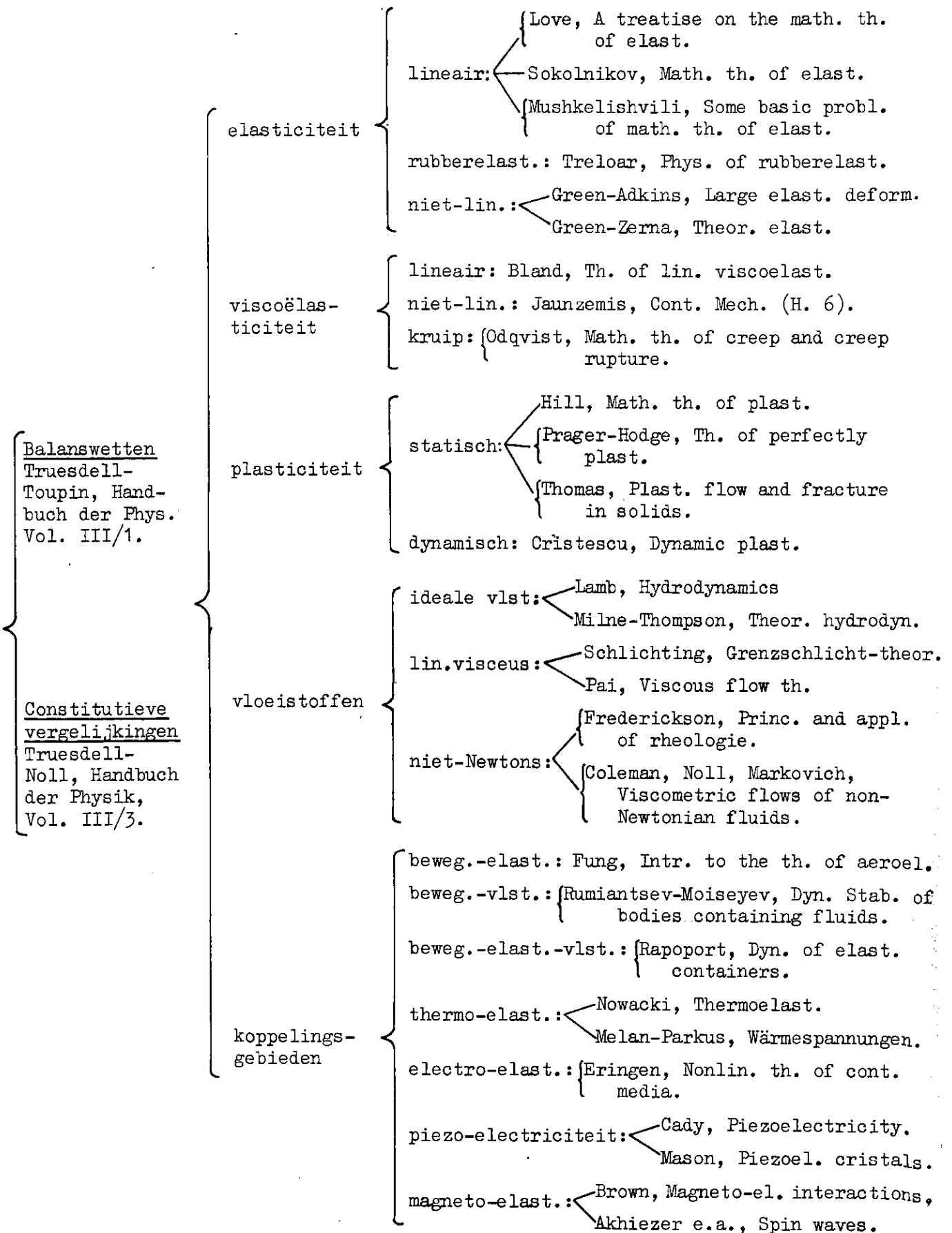
symmetrisch is.

We hebben dus m.b.v. het principe van de objectiviteit de in de elasticiteitstheorie belangrijke stelling afgeleid:

Indien de inwendige energie alleen afhangt van de deformatiegradient en indien voor de spanning een relatie als (5.25) geldt, dan is de spanningstensor symmetrisch.

We besluiten hiermee het algemene gedeelte van dit college en zullen hierna enige speciale materialen (zoals elastische, viscoëlastische e.a.) gaan behandelen. Alvorens dit te doen zullen we echter eerst een overzicht geven van de verschillende gebieden van de continuumsmechanica met enige op die gebieden van toepassing zijnde literatuur.

Overzicht van de Continuumsmechanica



VI. Elasticiteit

Een elastisch medium wordt gekarakteriseerd door de volgende constitutieve vergelijking voor de spanningen:

$$T = g(F) . \quad (6.1)$$

Uit het feit dat

$$F_{i\alpha} = x_{i,\alpha} ,$$

volgt dat de functie g afhangt van de referentietoestand X . We zullen in de elasticiteitstheorie, tenzij anders vermeld, steeds als referentietoestand kiezen de natuurlijke toestand van het medium, dit is de ongedeformeerde, spanningsloze toestand van het medium.

We beschouwen eerst het algemene geval van anisotroop materiaal, d.w.z. een materiaal met bepaalde voorkeursrichtingen. Meestal bestaan er echter groepen van transformaties H , welke we unimodulaire transformaties noemen, met de eigenschap dat:

$$g(F) = g(FH) . \quad (6.2)$$

Neem als voorbeeld een materiaal met kubische symmetrie. Dan blijft de respons g gelijk bij een draaiing van het lichaam over 90° . Dus bij een kubisch materiaal bestaat de groep van unimodulaire transformaties uit alle draaiingen over 90° .

We noemen een materiaal isotroop, indien het geen enkele voorkeursrichting bezit. De respons g blijft dan gelijk bij elke draaiing van het lichaam, zodat in dit geval de groep van unimodulaire transformaties bestaat uit alle orthogonale transformaties Q . We zullen ons van hier af voorlopig beperken tot isotrope materialen.

We hebben in het vorige hoofdstuk afgeleid (verg. (5.21)) dat, ten gevolge van het principe van de objectiviteit, moet gelden:

$$Qg(F)Q^T = g(QF) , \quad (6.3)$$

of, voor $Q = H$:

$$Hg(F)H^T = g(HF) . \quad (6.4)$$

Vervangen we in (6.4) F door FH^T dan krijgen we

$$Hg(FH^T)H^T = g(HFH^T) . \quad (6.5)$$

Aangezien H , en dus ook H^T , orthogonaal is, en omdat voor een isotroop medium alle orthogonale transformaties unimodulair zijn, is volgens (6.2):

$$g(FH^T) = g(F) . \quad (6.6)$$

Hiermee wordt (6.5)

$$Hg(F)H^T = g(HFH^T) . \quad (6.7)$$

We mogen in (6.7) $H = R$ kiezen, want R is orthogonaal, waarmee vergelijking (5.23) leidt tot:

$$T = Rg(U)R^T = g(RUR^T) = g(V) = g(B^{\frac{1}{2}}) =: f(B) .$$

We kunnen dus de spanningen T rechtstreeks in B uitdrukken door

$$T = f(B) . \quad (6.8)$$

Met C is dat onmogelijk, immers

$$T = Rg(U)R^T = Rg(C^{\frac{1}{2}})R^T = Rf(C)R^T . \quad (6.9)$$

Een andere, meer gebruikte manier om het verband tussen T en C aan te geven kunnen we vinden door een functie $h(C)$ in te voeren door:

$$g(U) = Uh(C)U^T , \quad (6.10)$$

waarmee we krijgen

$$T = RUh(C)U^T R^T = Fh(C)F^T . \quad (6.11)$$

We zullen nu een stelling gaan bewijzen betreffende de algemene gedaante van $f(B)$. Voor het bewijs van deze stelling hebben we het volgende lemma nodig.

Lemma. De spanningstensor T en de linker-Cauchy-Green-tensor B hebben dezelfde hoofdrichtingen.

Bewijs. We gaan uit van (6.8)

$$T = f(B) .$$

Met (6.7) vinden we hieruit:

$$QTQ^T = Qf(B)Q^T = f(QBQ^T) . \quad (6.12)$$

We kiezen nu, in het punt onder beschouwing, een assenkruis dat samenvalt met de hoofdassen van B . We geven tensoren, betrokken op dit assenkruis aan met ' . (6.8) wordt t.o.v. dit assenkruis

$$T' = f(B') , \quad (6.13)$$

waarbij B' dus een diagonaalmatrix is.

We nemen voor Q :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Omdat B' een diagonaalmatrix is, volgt uit (6.12):

$$QT'Q^T = f(QB'Q^T) = f(B') = T' ,$$

of, uitgeschreven

$$QT'Q^T = \begin{pmatrix} T'_{11} & -T'_{12} & -T'_{13} \\ -T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ -T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix} = T' = \begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix} .$$

Hieruit volgt direct dat

$$T'_{12} = T'_{21} = T'_{13} = T'_{31} = 0 .$$

Nemen we voor Q :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

dan kunnen we analoog bewijzen dat

$$T'_{23} = T'_{32} = 0 .$$

Dus ook T' is een diagonaalmatrix, waarmee bewezen is dat de hoofdrichtingen van T en B samenvallen.

We zijn nu in staat om de volgende stelling te bewijzen:

Stelling. Voor een isotroop, elastisch medium is het verband tussen de Cauchy-spanningstensor T en de linker-Cauchy-Green-tensor B altijd te schrijven als:

$$T = c_0 I + c_1 B + c_2 B^2 , \quad (6.14)$$

waarin c_0 , c_1 en c_2 functies zijn van de invarianten van B : I_B , II_B , III_B .

Bewijs. We onderscheiden de gevallen dat $f(B)$ wel of niet een polynoom is.

i) Stel $f(B)$ is een polynoom van de n° -graad (n : eindig):

$$f(B) = a_0 I + a_1 B + \dots + a_n B^n .$$

Uit het theorema van Cayleigh-Hamilton (verg. (1.26)) volgt direct dat dit te schrijven is in de vorm (6.14).

ii) Noem de eigenwaarden van B en T resp. B_1, B_2, B_3 en T_1, T_2, T_3 . We nemen eerst aan dat:

$$B_1 \neq B_2 \neq B_3 .$$

Dan luidt het verband tussen T en B volgens (6.13)

$$T_n = f_n(B_1, B_2, B_3) \quad (n = 1, 2, 3) . \quad (6.15)$$

Indien in (6.15) de eigenwaarden van B worden verwisseld, moeten, tengevolge van de isotropie van het materiaal, de bijbehorende eigenwaarden van T op dezelfde manier verwisseld worden. We mogen dan, door de drie functies f_n te vervangen door de drie andere functies $\gamma_0(B), \gamma_1(B), \gamma_2(B)$, (6.15) ook schrijven als

$$T_n = \gamma_0(B) + B_n \gamma_1(B) + B_n^2 \gamma_2(B) \quad n = 1, 2, 3 . \quad (6.16)$$

(6.16) vormt een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden. Oplossen geeft:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} T_1 & B_1 & B_1^2 \\ T_2 & B_2 & B_2^2 \\ T_3 & B_3 & B_3^2 \end{vmatrix}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & T_1 & B_1^2 \\ 1 & T_2 & B_2^2 \\ 1 & T_3 & B_3^2 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & B_1 & T_1 \\ 1 & B_2 & T_2 \\ 1 & B_3 & T_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_1^2 \\ 1 & B_2 & B_2^2 \\ 1 & B_3 & B_3^2 \end{vmatrix},$$

waarbij $\Delta \neq 0$, omdat $B_1 \neq B_2 \neq B_3$. We zien dat γ_0, γ_1 en γ_2 symmetrische functies zijn van B_1, B_2 en B_3 . Nu bestaat er een algebra-stelling (waarvan we hier het bewijs niet zullen leveren, zie bijv. Appendix II van Jaunzemis) die zegt dat in dat geval γ_0, γ_1 en γ_2 uit te drukken zijn in functies van I_B, II_B en III_B . We mogen dus schrijven

$$\gamma_n(B) = c_n(I_B, II_B, III_B),$$

waarmee (6.16) overgaat in

$$T_n = c_0 + c_1 B_n + c_2 B_n^2.$$

Aangezien de hoofdassen van T en B samenvallen is dit juist (6.14) getransformeerd op hoofdassen. Terugtransformeren geeft dan weer (6.14):

$$T = c_0 I + c_1 B + c_2 B^2 \Rightarrow T_{ij} = c_0 \delta_{ij} + c_1 B_{ij} + c_2 B_{ik} B_{kj}. \quad (6.17)$$

Indien twee eigenwaarden van B gelijk zijn, moet (6.17) worden vervangen door

$$T = c_0 I + c_1 B,$$

omdat we dan slechts twee verschillende f_n 's hebben en we dus in (6.16) alleen γ_0 en γ_1 kunnen kiezen. Om analoge redenen wordt (6.17) als alle drie de eigenwaarden gelijk zijn

$$T = c_0 I.$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Volgens het theorema van Cayley-Hamilton is

$$B^3 = I_B B^2 - II_B B + III_B I.$$

Vermenigvuldigen we dit met B^{-1} dan krijgen we

$$B^2 = I_B B - II_B I + III_B B^{-1}. \quad (6.18)$$

Met (6.18) kunnen we B_2 elimineren uit (6.14). Dit leidt tot

$$T = a_0 I + a_1 B + a_2 B^{-1}, \quad (6.19)$$

waarin a_0 , a_1 en a_2 weer functies zijn van I_B , II_B en III_B .

We kunnen vergelijking (6.14) ook afleiden m.b.v. de ongelijkheid van Clausius-Duhem. We beperken ons hierbij tot uniforme temperaturen (dit is geen essentiële beperking); dit houdt in dat we thermo-elastische effecten buiten beschouwing laten. Als onafhankelijke variabele nemen we de deformatiegradiënt F

$$T(\underline{X}, t) = T(\underline{x}, \alpha, \underline{X}, t) ,$$

$$\psi(\underline{X}, t) = \psi(\underline{x}, \alpha, \underline{X}, t) , \quad (6.20)$$

en $\eta(\underline{X}, t) = \eta(\underline{x}, \alpha, \underline{X}, t) .$

We hebben al gezien (verg. (6.11)) dat we in dit geval voor een isotroop materiaal ook mogen schrijven

$$T = Fh(C)F^T \Rightarrow T_{ij} = f_{\alpha\beta}(C)x_{i,\alpha} x_{j,\beta} . \quad (6.21)$$

Dus de spanning T welke een functie was van de negen variabelen $x_{i,\alpha}$ is uit te drukken in de zes variabelen $C_{\alpha\beta}$ ($= C_{\beta\alpha}$).

Dit is ook direct te bewijzen met behulp van de volgende stelling van Cauchy:

Stel f is een isotrope functie van de drie vectoren \underline{u} , \underline{v} en \underline{w} :

$$f = f(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) ,$$

dan kan f alleen een functie zijn van de inwendige producten van deze vectoren (dus $(\underline{u}, \underline{u})$, $(\underline{u}, \underline{v})$ etc.).

Deze stelling is te generaliseren voor meer dan drie vectoren. Voor het bewijs van deze stelling zie bijv.:

Weyl, The classical groups,

of Eringen, Mechanics of continua (appendix).

Passen we deze stelling toe op ons geval, dan hebben we voor de drie vectoren: \underline{x}, α ($\alpha = 1, 2, 3$), welke als inwendige producten hebben

$$C_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta} ,$$

zodat we (6.20) ook mogen schrijven als

$$T(\underline{X}, t) = T(C_{\alpha\beta}, \underline{X}, t) ,$$

$$\psi(\underline{X}, t) = \psi(C_{\alpha\beta}, \underline{X}, t) , \quad (6.22)$$

$$\eta(\underline{X}, t) = \eta(C_{\alpha\beta}, \underline{X}, t) .$$

De ongelijkheid van Clausius-Duhem (4.13) luidt dan (θ uniform)

$$T_{ij} D_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} \dot{C}_{\alpha\beta} - \rho \eta \dot{\theta} \geq 0 . \quad (6.23)$$

Nu is

$$\dot{C}_{\alpha\beta} = (\dot{x}_{i,\alpha} x_{i,\beta} + x_{i,\alpha} \dot{x}_{i,\beta}) = (v_{i,j} + v_{j,i}) x_{i,\alpha} x_{j,\beta} =$$

$$= 2D_{ij} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} , \quad (6.24)$$

waarmee (6.23) overgaat in

$$\left(T_{ij} - 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} \right) D_{ij} - \rho \eta \dot{\theta} \geq 0 . \quad (6.25)$$

De coëfficiënten van $\dot{\theta}$ en D_{ij} moeten nul zijn, wat leidt tot

$$\eta = 0 \Rightarrow \psi = \epsilon , \quad (6.26)$$

en

$$T_{ij} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{\alpha\beta}} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} = 2\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} x_{(i,\alpha} x_{j),\beta} , \quad (6.27)$$

waarin

$$x_{(i,\alpha} x_{j),\beta} := \frac{1}{2}(x_{i,\alpha} x_{j,\beta} + x_{j,\alpha} x_{i,\beta}) . \quad (6.28)$$

Aangezien de inwendige energie ϵ een isotrope functie van C is, mogen we schrijven

$$\epsilon(C_{\alpha\beta}, \underline{X}, t) = \frac{1}{\rho_0} \Sigma(I_c, II_c, III_c, \underline{X}, t) , \quad (6.29)$$

waarin ρ_0 de soortelijke massa in de ongedeformeerde toestand is. Vergelijking (6.27) gaat hiermee over in

$$T_{ij} = \frac{2\rho}{\rho_0} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I_c} \frac{\partial I_c}{\partial C_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II_c} \frac{\partial II_c}{\partial C_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_c} \frac{\partial III_c}{\partial C_{\alpha\beta}} \right] x_{i,\alpha} x_{j,\beta} . \quad (6.30)$$

Uit de definitie van de invarianten (1.25) kunnen de volgende relaties worden afgeleid:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_c}{\partial C_{\alpha\beta}} &= \delta_{\alpha\beta} , & \frac{\partial II_c}{\partial C_{\alpha\beta}} &= I_c \delta_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} , \\ \frac{\partial III_c}{\partial C_{\alpha\beta}} &= C_{\alpha\gamma} C_{\beta\gamma} - I_c C_{\alpha\beta} + II_c \delta_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Substitueren we dit in (6.30) dan krijgen we

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{2\rho}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Sigma}{\partial II_c} + II_c \frac{\partial \Sigma}{\partial III_c} \right) \delta_{\alpha\beta} + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial II_c} + I_c \frac{\partial \Sigma}{\partial III_c} \right) C_{\alpha\beta} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_c} C_{\alpha\gamma} C_{\beta\gamma} \right] x_{i,\alpha} x_{j,\beta} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2\rho}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}} \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{B}}} + II_{\mathbf{B}} \frac{\partial \Sigma}{\partial III_{\mathbf{B}}} \right) B_{ij} + \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}} \frac{\partial \Sigma}{\partial III_{\mathbf{B}}} \right) B_{ik} B_{jk} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_{\mathbf{B}}} B_{ik} B_{jl} B_{kl} \right], \quad (6.32)$$

want de invarianten van B en C zijn gelijk, omdat B een orthogonale transformatie van C is ($B = RCR^T$).

We passen het theorema van Cayleigh-Hamilton (1.26) toe en

$$\frac{\rho_0}{\rho} = J = \det F = \det(VR) = \det V = \det(B^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{III_{\mathbf{B}}}, \quad (6.33)$$

wat leidt tot:

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{III_{\mathbf{B}}}} \left[III_{\mathbf{B}} \frac{\partial \Sigma}{\partial III_{\mathbf{B}}} \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}} \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) B_{ij} + \right. \\ \left. - \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{B}}} B_{ik} B_{jk} \right]. \quad (6.34)$$

We hebben tot nu toe alleen de constitutieve vergelijking voor de Cauchy-spanning T besproken. We zullen nu laten zien hoe we uit deze vergelijking een constitutieve relatie voor de eerste Piola-Kirchhoff-tensor \tilde{T} kunnen afleiden. We gaan hierbij uit van verg. (6.27) geschreven in de vorm volgens (4.18)

$$T_{ij} = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha} = \frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha} = \frac{1}{J} \rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha}, \quad (6.35)$$

volgens (3.61). Met (3.51) krijgen we dan

$$\tilde{T}_{\alpha i} = J X_{\alpha,j} T_{ij} = \rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{i,\beta}} x_{j,\beta} X_{\alpha,j} = \rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{i,\alpha}}. \quad (6.36)$$

Met (5.29) vinden we dat

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{j,\alpha}} x_{i,\alpha},$$

zodat voldaan is aan de symmetrie-relatie (3.54).

Opgave. Leid zelf af de relatie voor de tweede Piola-Kirchhoff-tensor:

$$\tilde{\tilde{T}}_{\alpha\beta} = \rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial E_{\alpha\beta}}. \quad (6.37)$$

VII. Speciale problemen uit de elasticiteitstheorie

We zullen in dit hoofdstuk een tweetal eenvoudige problemen uit de niet-lineaire elasticiteitstheorie behandelen, namelijk: de zuivere afschuiving en de torsie van een cirkelcylinder.

VII.1. Zuivere afschuiving

We beperken ons tot homogeen, isotroop materiaal.

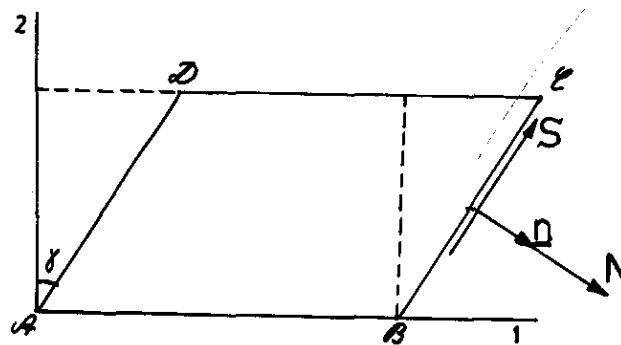


Fig. VII.1.

Zuivere afschuiving wordt gekarakteriseerd door

$$x = X + KY, \quad y = Y, \quad z = Z, \quad (K = \tan \gamma). \quad (7.1)$$

Dan is

$$F = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1+K^2 & K & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -K & 0 \\ -K & 1+K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

De invarianten van B zijn hier

$$I_B = II_B = 3 + K^2, \quad III_B = 1. \quad (7.3)$$

Uit $III_B = 1$ volgt dat er geen volumeverandering is, dus

$$\rho = \rho_0. \quad (7.4)$$

Door toepassing van (6.18) kunnen we (6.34) schrijven in de vorm

$$T = a_0 I + a_1 B + a_2 B^{-1}, \quad (7.5)$$

waarin

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\sqrt{III_B}} \left(II_B \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} + III_B \frac{\partial \Sigma}{\partial III_B} \right), \\
 a_1 &= \frac{2}{\sqrt{III_B}} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_B}, \\
 a_2 &= -2 \sqrt{III_B} \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B}.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Hiermee krijgen we

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= 2(1+K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial I_B} + 2(2+K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial III_B}, \\
 T_{22} &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_B} + 4 \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial III_B}, \\
 T_{33} &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_B} + 2(2+K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial III_B}, \\
 T_{12} = T_{21} &= 2K \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_B} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} \right), \quad T_{23} = T_{13} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

In de lineaire elasticiteitstheorie is bij een zuivere afschuiving alleen $T_{12} \neq 0$.

We gaan nu berekenen de krachten welke werken op het vlakje BC (zie Fig. VII.1) met normaal

$$\underline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+K^2}}, \frac{-K}{\sqrt{1+K^2}}, 0 \right). \tag{7.8}$$

Op dit vlakje werken de krachten (per oppervlakte-eenheid):

$$\begin{aligned}
 t_1 &= T_{11} n_1 + T_{21} n_2 + T_{31} n_3 = \frac{2}{\sqrt{1+K^2}} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_B} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_B} \right), \\
 t_2 &= t_{i2} n_i = \frac{-2K}{\sqrt{1+K^2}} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III_B} \right),
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

en

$$t_3 = 0.$$

We vinden hieruit voor de normaalkracht N en de tangenciaalkracht S op BC:

$$\begin{aligned}
 N &= t_1 n_1 + t_2 n_2 = \frac{2}{(1+K^2)} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I_B} + (2+K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} + (1+K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial III_B} \right], \\
 S &= t_1 n_2 - t_2 n_1 = \frac{-2K}{(1+K^2)} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I_B} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II_B} \right].
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

en

We trekken uit dit resultaat de volgende conclusie: om in de niet-lineaire theorie een zuivere afschuiving te realiseren is behalve een tangentialkracht ook een normaalkracht nodig. Dit staat bekend als het Poynting-effect.

Opmerking. De spanningen volgens (7.7) zijn uniform, d.w.z. onafhankelijk van \underline{x} . Er is hier dus automatisch voldaan aan de evenwichtsvergelijkingen.

We zullen nu laten zien hoe we door linearisering van de hierboven gevonden resultaten uitkomen op de klassieke lineaire theorie, waarin geldt

$$t_{12} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (7.11)$$

overige $t_{ij} = 0$.

Hiertoe gaan we over van de invarianten I_B, II_B, III_B op I_F, II_F, III_F . Het verband tussen deze invarianten kunnen we het gemakkelijkst afleiden uit vergelijking (2.10), welke we op hoofdassen brengen:

$$2E_a = C_a - 1, \quad (E_a, C_a: \text{hoofdwaarden van resp. E en C; } a = 1, 2, 3) \quad (7.12)$$

Voor de eerste invariant van C geldt dan:

$$\begin{aligned} I_C = I_B = C_1 + C_2 + C_3 &= (2E_1 + 1) + (2E_2 + 1) + (2E_3 + 1) = \\ &= 2(E_1 + E_2 + E_3) + 3 = 2I_F + 3. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Op analoge wijze kunnen we uit de relaties

$$II_C = II_B = C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1, \quad (7.14)$$

en

$$III_C = III_B = C_1 C_2 C_3,$$

afleiden

$$\begin{aligned} II_C = II_B &= 3 + 4I_F + 4II_F, \\ III_C = III_B &= 1 + 2I_F + 4II_F + 8III_F. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Uit (7.13) en (7.15) volgt dat

$$\begin{aligned} 2I_F &= -3 + I_B, \\ 4II_F &= 3 - 2I_B + II_B, \\ 8III_F &= -1 + I_B - II_B + III_B. \end{aligned} \quad (7.16)$$

We schrijven nu

$$\Sigma(I_{\mathbf{a}}, II_{\mathbf{a}}, III_{\mathbf{a}}) = \Sigma'(I_{\mathbf{f}}, II_{\mathbf{f}}, III_{\mathbf{f}}) ,$$

en gaan deze laatste ontwikkelen naar machten van E:

$$\Sigma' = \Sigma'_0 + \Sigma'_1 + \Sigma'_2 + \Sigma'_3 + \dots , \quad (7.17)$$

waarin Σ'_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) alleen n° -orde termen in E bevat. Dus Σ' is een constante en van geen betekenis, omdat Σ' alleen in gedifferentieerde vorm voorkomt. De Σ'_1 moet nul zijn, omdat deze aanleiding geeft tot restspanningen, welke niet verdwijnen met de deformatie, want:

$$\left(\frac{\partial \Sigma'}{\partial E} \right)_{E=0} = \Sigma'_1 .$$

De ontwikkeling (7.17) moet dus beginnen met de kwadratische termen Σ'_2 , welke een lineair verband geven tussen de spanningen en de deformaties. De derdemachtstermen Σ'_3 geven een tweede orde verband tussen de spanningen en de deformaties en moeten dus in de lineaire theorie verwaarloosd worden, evenals Σ'_4 , Σ'_5 etc.

In de lineaire theorie is dus:

$$\Sigma' = \Sigma'_2 = a I_{\mathbf{f}}^2 + b II_{\mathbf{f}} . \quad (7.18)$$

Voeren we de Lamé-parameters λ en μ in door

$$a = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) \quad \text{en} \quad b = -2\mu ,$$

te kiezen, dan gaat (7.18) over in

$$\Sigma' = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) I_{\mathbf{f}}^2 - 2\mu II_{\mathbf{f}} ,$$

of

$$\Sigma = \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) (I_{\mathbf{a}} - 3)^2 - \frac{1}{2} \mu (3 - 2I_{\mathbf{a}} + II_{\mathbf{a}}) . \quad (7.19)$$

Uit (7.19) volgt dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{\mathbf{a}}} &= \mu + \frac{1}{4}(\lambda + 2\mu)(I_{\mathbf{a}} - 3) = \mu + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) I_{\mathbf{f}} , \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{a}}} &= -\frac{1}{2} \mu , \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial III_{\mathbf{a}}} = 0 . \end{aligned} \quad (7.20)$$

Substitutie van (7.20) in (7.10) leidt tot

$$N = \frac{1}{1+K^2} [(\lambda + 2\mu)I_{\mathcal{E}} - \mu K^2] = O(K^2) , \quad (7.21)$$

$$S = - \frac{K}{1+K^2} [\mu + (\lambda + 2\mu)I_{\mathcal{E}}] = O(K) ,$$

want

$$I_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(I_{\mathcal{B}} - 3) = \frac{1}{2}(3 + K^2 - 3) = \frac{1}{2}K^2 . \quad (7.22)$$

Dus in de lineaire benadering ($K^2 = 0$) is

$$\begin{aligned} N &= 0 , \\ S &= - \mu K , \end{aligned} \quad (7.23)$$

wat overeenkomt met de resultaten van de klassieke lineaire theorie (verg. (7.11)).

Opmerking. Uit vergelijking (7.7) volgt het volgende verband tussen de spanningen bij zuivere afschuiving

$$T_{11} - T_{22} = KT_{12} . \quad (7.24)$$

We beschouwen nu het geval dat het materiaal incompressibel is, d.w.z. er is geen volumeverandering. Dit is een beperking (constraint) voor de deformatie. Een dergelijke constraint heeft altijd tot gevolg dat we een extra onbekende krijgen. We kunnen dit hier als volgt inzien. Aangezien er geen volumeverandering is, is de invariant $III_{\mathcal{B}}$ constant en wel gelijk aan één. Dit heeft tot gevolg dat de inwendige energie alleen nog een functie is van $I_{\mathcal{B}}$ en $II_{\mathcal{B}}$:

$$\Sigma = \Sigma(I_{\mathcal{B}}, II_{\mathcal{B}}) .$$

Deze twee grootheden zijn onvoldoende voor het beschrijven van een mechanisch proces. We hebben dus nog een extra onbekende nodig. In dit geval is dat de hydrostatische druk p . Dus voor een incompressibel materiaal is de hydrostatische druk een principiële onbekende. Deze moet bepaald worden uit de randvoorwaarden.

Vergelijking (7.5) gaat daarom, als we de hydrostatische druk afsplitsen, over in:

$$T = - pI + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{\mathcal{B}}} (B - I) - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathcal{B}}} (B^{-1} - I) , \quad (7.25)$$

of, met (7.2)

$$T = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{\mathbf{B}}} \begin{pmatrix} K^2 & K & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{B}}} \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ K & K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Uit de eis dat deze spanningen aan de evenwichtsvergelijkingen moeten voldoen, volgt dat de hydrostatische druk p uniform is.

Stellen we als randvoorwaarde dat de spanningen op de vlakken $z = \text{constant}$ nul zijn, dan krijgen we voor de hydrostatische druk:

$$p = 0.$$

Vergelijking (7.26) uitschrijven geeft dan

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2K^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{\mathbf{B}}}, \\ T_{22} &= -2K^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{B}}}, \\ T_{12} &= 2K \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{\mathbf{B}}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right), \\ T_{13} &= T_{23} = T_{33} = 0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Voor deze spanningen geldt weer relatie (7.24).

Voor de normaalkracht N vinden we op analoge wijze als bij het compressiebele materiaal:

$$N = - \frac{2K^2}{(1+K^2)} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{\mathbf{B}}} + (2+K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right]. \quad (7.28)$$

VII.2. Torsie van een cirkelcylinder

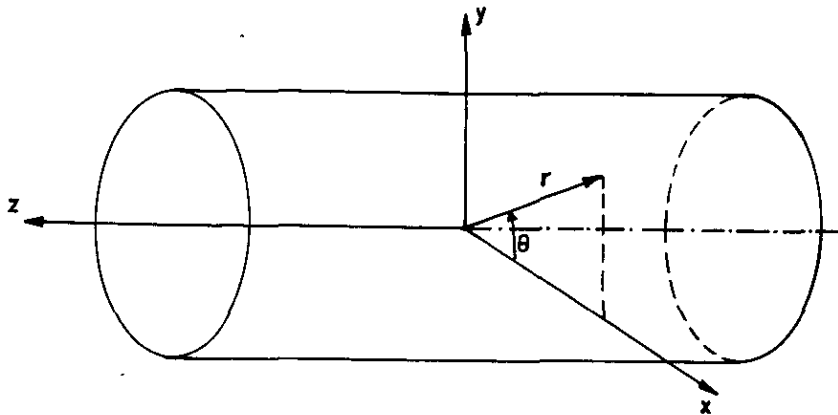


Fig.VII.2.

Voor het beschrijven van de torsie van een cirkelcylinder willen we gebruik maken van cylindercoördinaten. Aangezien dit kromlijnige coördinaten zijn en omdat alle tot nu toe afgeleide resultaten gelden in cartesische stelsels, moeten we hier eerst aangeven hoe we van een cartesisch op een kromlijnig coördinatenstelsel kunnen overgaan. We doen dit in het volgende intermezzo.

Intermezzo

We beperken ons tot orthogonale coördinatenstelsels. We voeren in het cartesische assenstelsel x_i ($i = 1, 2, 3$) en het orthogonale, kromlijnige assenstelsel y_a ($a = 1, 2, 3$). Dan geldt voor een lijnelement ds :

$$ds^2 = dx_i dx_i = \sigma_a \sigma_a, \quad (7.29)$$

waarin σ_a infinitesimaal is, maar geen exacte differentiaal. We kunnen voor σ_a namelijk schrijven:

$$\sigma_a = \frac{dy_a}{h_a}. \quad (7.30)$$

Met een streep onder een index geven we aan, dat over deze index niet gesommeerd mag worden.

Nemen we als voorbeeld cylindercoördinaten ($y_1 = r, y_2 = \theta, y_3 = z$) dan is

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

Dit geeft dat

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= dr, \quad \sigma_2 = r d\theta, \quad \sigma_3 = dz, \\ \text{of} \\ h_1 &= h_3 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Opgave. Bepaal de h_a voor bolcoördinaten.

Met behulp van de kettingregel kunnen we (7.29) schrijven als

$$ds^2 = dx_i dx_i = x_{i,a} x_{i,b} dy_a dy_b. \quad (7.32)$$

We zullen nu eerst bewijzen dat uit de orthogonaliteit van de y_a -coördinaten volgt dat

$$x_{i,a} x_{i,b} = 0 \quad \text{als } a \neq b. \quad (7.33)$$

Noemen we de basisvectoren van het y_a -stelsel \underline{e}_a en van het x_i -stelsel \underline{e}_i , dan geldt, als \underline{x} de plaatsvector is van een willekeurig punt:

$$\underline{e}_a = \frac{\partial \underline{x}}{\partial y_a} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_a} = x_{i,a} \underline{e}_i. \quad (7.34)$$

Omdat het y_a -stelsel orthogonaal is, geldt

$$(\underline{e}_a, \underline{e}_b) = 0 \quad \text{als } a \neq b,$$

waaruit met (7.34) volgt dat

$$x_{i,a} x_{j,b} (\underline{e}_i, \underline{e}_j) = x_{i,a} x_{i,b} = 0 \quad \text{als } a \neq b.$$

Hiermee is (7.33) bewezen. Dit resultaat kan ook geschreven worden als

$$x_{i,a} x_{i,b} = \delta_{ab} N_a \quad \text{met} \quad N_a := x_{i,a} x_{i,a}. \quad (7.35)$$

Hiermee gaat (7.32) over in:

$$ds^2 = \delta_{ab} N_a dy_a dy_b = \frac{N_1}{h_1^2} \sigma_1^2 + \frac{N_2}{h_2^2} \sigma_2^2 + \frac{N_3}{h_3^2} \sigma_3^2, \quad (7.36)$$

met (7.30). Aan (7.36) en (7.29) kan alleen dan gelijktijdig en in ieder punt worden voldaan als

$$\frac{N_a}{h_a^2} = 1,$$

of, met (7.35), als

$$h_a = \frac{1}{\sqrt{x_{i,a} x_{i,a}}} . \quad (7.37)$$

Met dit resultaat kunnen we het probleem van de torsie van een cirkelcylinder behandelen. We geven de plaats van een punt vóór de deformatie aan door: R, Θ, Z (algemeen Y_A) en ná de deformatie door: r, θ, z (algemeen y_a).

We beschouwen nu een infinitesimaal lijnelement $\underline{\sigma}$ als een rotatie van het lijnelement \underline{dx} :

$$\sigma_a = q_{ai} dx_i . \quad (7.38)$$

Voorbeeld. Voor cylindercoördinaten is:

$$x_1 = r \cos \theta , \quad x_2 = r \sin \theta , \quad x_3 = z .$$

Dit geeft:

$$dx_1 = \cos \theta dr - \sin \theta r d\theta = \sigma_1 \cos \theta - \sigma_2 \sin \theta ,$$

$$dx_2 = \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta = \sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta ,$$

$$dx_3 = dz = \sigma_3 ,$$

of, omgekeerd:

$$\sigma_1 = \cos \theta dx_1 + \sin \theta dx_2 ,$$

$$\sigma_2 = -\sin \theta dx_1 + \cos \theta dx_2 ,$$

$$\sigma_3 = dx_3 .$$

Zodat hier

$$q_{ai} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Uit (7.30) krijgen we

$$\sigma_a = \frac{dy_a}{h_a} = \frac{1}{h_a} y_{a,i} dx_i ,$$

waaruit we met (7.38) vinden dat

$$q_{ai} = \frac{1}{h_a} y_{a,i} . \quad (7.39)$$

Op analoge wijze kunnen we voor een lijnelement vóór de deformatie schrijven

$$\Sigma_A = \frac{dY_A}{H_A} = \frac{1}{H_A} Y_{A,\alpha} dX_\alpha = Q_{A\alpha} dX_\alpha, \quad (7.40)$$

met

$$Q_{A\alpha} = \frac{1}{H_A} Y_{A,\alpha}. \quad (7.41)$$

Hiermee krijgen we voor de deformatiegradiënt tensor betrokken op het Y_A - en y_a -stelsel:

$$F_{aA} = q_{ai} F_{i\alpha} (Q^{-1})_{\alpha A} = \frac{1}{h_a} y_{a,i} x_{i,\alpha} H_A X_{\alpha,A} = \frac{H_A}{h_a} y_{a,A}. \quad (7.42)$$

Opmerking. Vergelijking (7.42) kan ook afgeleid worden met behulp van de vergelijkingen (2.4) - (2.6). We hebben namelijk:

$$ds_a = \frac{1}{h_a} dy_a = \frac{1}{h_a} y_{a,A} dY_A,$$

en

$$dS_A = \frac{1}{H_A} dY_A,$$

zodat (2.6) wordt:

$$ds_a = \frac{1}{h_a} y_{a,A} dY_A = F_{aA} dS_A = \frac{1}{H_A} F_{aA} dY_A,$$

waaruit direct (7.42) volgt.

We gaan nu terug naar het torsieprobleem, dat wordt gekarakteriseerd door de deformatie:

$$r = R, \quad \theta = \Theta + KZ, \quad z = Z. \quad (7.43)$$

Met:

$$h_1 = h_3 = H_1 = H_3 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad H_2 = \frac{1}{R}, \quad (7.44)$$

en (7.42) krijgen we

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Kr \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.45)$$

en

$$B = FF^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + K^2 r^2 & Kr \\ 0 & Kr & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.46)$$

Voor de invarianten van B vinden we

$$I_B = II_B = 3 + K^2 r^2, \quad III_B = 1. \quad (7.47)$$

We beperken ons hier tot het geval dat de cylinder gemaakt is van een incompressibel materiaal (bijv. rubber).

De constitutieve vergelijking luidt dan, volgens (7.25):

$$T = -p I + \alpha(Kr)(B - I) + \gamma(Kr)(B^{-1} - I), \quad (7.48)$$

waarin α en γ door het materiaal bepaalde functies van Kr zijn, en de hydrostatische druk p een principiële onbekende is, welke volgt uit de evenwichtsvergelijkingen en de randvoorwaarden. Vergelijking (7.48) uitschrijven geeft

$$\begin{aligned} T_{rr} &= -p + \alpha(Kr) + \gamma(Kr), \\ T_{\theta\theta} &= -p + \alpha(Kr)(1 + K^2 r^2) + \gamma(Kr), \\ T_{zz} &= -p + \alpha(Kr) + \gamma(Kr)(1 + K^2 r^2), \\ T_{\theta z} &= Kr[\alpha(Kr) - \gamma(Kr)], \quad T_{r\theta} = T_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (7.49)$$

De evenwichtsvergelijkingen voor de Cauchy-spanningen in cylindercoördinaten en bij afwezigheid van volumekrachten luiden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} T_{r\theta} &= 0, \\ \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} T_{rz} &= 0. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Substitutie van (7.49) in (7.50) leidt tot

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{d\alpha(Kr)}{dr} + \frac{d\gamma(Kr)}{dr} - K^2 r\alpha(Kr) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Hieruit vinden we voor de hydrostatische druk

$$p = p(r) = \alpha(Kr) + \gamma(Kr) - K^2 \int_{r_0}^r \rho \alpha(K\rho) d\rho + C, \quad (7.52)$$

waarin r_0 de straal van de cylinder is en C een constante, welke bepaald wordt uit de conditie dat de mantel spanningsvrij moet zijn, of:

$$T_{rr} = T_{r\theta} = T_{rz} = 0 \quad \text{voor } r = r_0. \quad (7.53)$$

Met (7.49) en (7.52) vinden we hieruit:

$$C = 0. \quad (7.54)$$

Substitutie van (7.52) en (7.54) in (7.49) geeft voor de Cauchy-spanningen in een getordeerde, incompressibele cylinder

$$\begin{aligned} T_{rr} &= -K^2 \int_r^{r_0} \rho \alpha(K\rho) d\rho, \\ T_{\theta\theta} &= -K^2 \int_r^{r_0} \rho \alpha(K\rho) d\rho + K^2 r^2 \alpha(Kr), \\ T_{zz} &= -K^2 \int_r^{r_0} \rho \alpha(K\rho) d\rho + K^2 r^2 \gamma(Kr), \\ T_{\theta z} &= Kr[\alpha(Kr) - \gamma(Kr)], \\ T_{r\theta} &= T_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (7.55)$$

We zullen nu laten zien dat in de niet-lineaire theorie voor de torsie van een cirkelcylinder niet alleen een wringend moment in de einddoorsnede nodig is, maar ook, t.g.v. het Poynting-effect, een normaalkracht.

Voor het torsie-moment in een doorsnede geldt:

$$M_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} r T_{\theta z} r d\theta dr = 2\pi K \int_0^{r_0} r^3 [\alpha(Kr) - \gamma(Kr)] dr. \quad (7.56)$$

Voor de normaalkracht in een doorsnede geldt:

$$N_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} T_{zz} r d\theta dr = -\pi K^2 \int_0^{r_0} [\alpha(Kr) - 2\gamma(Kr)] r^3 dr. \quad (7.57)$$

Uit experimenten verricht op een rubber staaf is gebleken dat N_z een drukkracht is. Dus moet

$$\alpha(Kr) - 2\gamma(Kr) > 0. \quad (7.58)$$

In de lineaire theorie, d.w.z. in de limiet $K \Rightarrow 0$, worden α en γ constanten, en als gevolg daarvan wordt:

$$M_z = O(K) \quad \text{en} \quad N_z = O(K^2).$$

Dus in de lineaire theorie is, zoals bekend, de normaalkracht N_z nul.

We kunnen dit probleem nog iets uitbreiden door een incompressibele cylinder zowel te torderen als te rekken. De deformatie wordt dan beschreven door

$$r = AR, \quad \theta = \Theta + KZ, \quad z = GZ \quad (A, K \text{ en } G \text{ constanten}). \quad (7.59)$$

Aangezien het materiaal incompressibel is, moet de volumeverandering nul zijn, waaruit volgt:

$$A^2 = \frac{1}{G}. \quad (7.60)$$

Op analoge wijze als in het vorige probleem vinden we voor de deformatiegradiënt G en voor de linker Cauchy-Green-tensor:

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & Kr \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 + K^2 r^2 & GKr \\ 0 & GKr & G^2 \end{pmatrix}, \quad (7.61)$$

en voor de invarianten van B :

$$I_B = G^2 + \frac{2}{G} + G^2 r^2, \quad II_B = 2G + \frac{1}{G^2} + \frac{K^2 r^2}{G}, \quad III_B = 1. \quad (7.62)$$

De hydrostatische druk p wordt nu

$$p = \frac{\alpha(Kr)}{G} + G\gamma(Kr) + K^2 \int_r^{r_0} \rho \alpha(Kr) d\rho, \quad (7.63)$$

en de spanningen T_{rr} en $T_{\theta z}$:

$$T_{rr} = -K^2 \int_r^{r_0} \rho \alpha(\rho) d\rho,$$

$$T_{\theta z} = GKr \left[\alpha(Kr) - \frac{\gamma(Kr)}{G} \right]. \quad (7.64)$$

In (7.63) en (7.64) is r_0 de straal van de cylinder ná de deformatie.

Uit (7.64) vinden we voor de normaalkracht en voor het torsiemoment in een doorsnede:

$$N_z = 2\pi(G^2 - \frac{1}{G}) \int_0^{r_0} \mu(G, Kr) r dr - \pi K^2 \int_0^{r_0} [\alpha(Kr) - \frac{2\gamma(Kr)}{G}] r^2 dr ,$$

$$M_z = 2\pi GK \int_0^{r_0} \mu(G, Kr) r^3 dr , \quad (7.65)$$

met

$$\mu(G, Kr) = \alpha(Kr) - \frac{\gamma(Kr)}{G} .$$

In de lineaire theorie krijgen we, omdat α en γ dan constant zijn:

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{GM_z}{K} = \frac{1}{2} \pi R_0^2 \mu(G) =: \tau(G) , \quad (7.66)$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} N_z = \pi R_0^2 \left(G - \frac{1}{G^2} \right) \mu(G) =: N_0(G) ,$$

waarin $R_0 = \frac{1}{A} r_0$ de straal is van de cylinder vóór de deformatie.

Slotopmerking. In de niet-lineaire elasticiteitstheorie worden de volgende manieren van oplossen onderscheiden:

i) Exacte oplossingen. Dit is slechts bij een kleine klasse van problemen mogelijk. Een eerste vereiste is hierbij een eenvoudige geometrie van het lichaam.

Voorbeelden van exact oplosbare problemen zijn, behalve de hierboven behandelde nog: het opblazen en torderen van een bol, het binnenste buiten keren van een bol of bolschaal, het rekken en torderen van een holle cirkelcylinder.

ii) 2°-orde-benaderingen, zoals de vijf-constanten-theorie. Hierbij wordt in de uitdrukking voor de elastische energie volgens (7.18) behalve Σ_2' ook

$$\Sigma_3' = c I_E^2 + d I_E II_E + e III_E ,$$

meegenomen, zodat we dan vijf elasticiteitsconstanten hebben.

iii) Systematische theorie. Hieronder worden verstaan oplossingen m.b.v. storingstheorie, reeksontwikkelingen e.d.

Voor literatuur zie de boeken van Green-Zerna, Green-Adkins en Eringen (Non-linear theory of continuous media).

VIII. Superpositie van een kleine deformatie op een eindige. Theorie van de voorspanningstoestand

In dit hoofdstuk zullen we het volgende probleem beschouwen: we deformer een lichaam (ongedeformeerde toestand \underline{X}) eerst naar een eindig gedeformeerde toestand ξ , welke we de nultoestand of voorspanningstoestand noemen, en vervolgens superponeren we op deze nultoestand een kleine deformatie gekarakteriseerd door de verplaatsing \underline{u} . Geven we de eindtoestand aan door \underline{x} , dan is dus:

$$\underline{x} = \underline{\xi} + \underline{u} . \quad (8.1)$$

Het klein zijn van de deformatie houdt in dat:

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \right| \ll 1 .$$

We zullen voor het hierboven beschreven probleem een theorie ontwikkelen, waarin we alle hogere machten van $(\partial u_i / \partial \xi_j)$ zullen verwaarlozen.

De theorie van de voorspanningstoestand heeft een belangrijke toepassing in de stabiliteitstheorie.

We zullen ons hier beperken tot elastische materialen, maar analoge resultaten kunnen worden afgeleid voor andere materialen. We nemen aan dat de nultoestand een bekende toestand is, en we beperken ons tot statische nultoestanden. We geven grootheden welke betrekking hebben op de nultoestand aan door een bovenindex: 0. De deformatiegradiënt in de nultoestand is dus:

$$F_{i\alpha}^0 = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} = \xi_{i,\alpha} , \quad (8.2)$$

en in de \underline{x} -toestand:

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} = x_{i,\alpha} .$$

Het verschil van deze twee noemen we δF :

$$\begin{aligned} \delta F_{i\alpha} &:= F_{i\alpha} - F_{i\alpha}^0 = (x_i - \xi_i)_{,\alpha} = u_{i,\alpha} = \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial X_\alpha} = H_{ij} F_{j\alpha}^0 , \end{aligned} \quad (8.3)$$

waarin

$$H_{ij} := \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} . \quad (8.4)$$

We zien hieruit dat δF bestaat uit een bekend stuk: F^0 plus een onbekend maar lineair stuk: H .

We kunnen H ook schrijven als

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + O((u_{i,j})^2) = u_{i,j} , \quad (8.5)$$

omdat we termen van $O((u_{i,j})^2)$ verwaarlozen. We mogen (8.4) dus schrijven als

$$H_{ij} = u_{i,j} ,$$

waarbij het geen verschil maakt of $,j$ differentiatie naar ξ_j , dan wel naar x_j betekent.

Voor een elastisch materiaal geldt voor de Cauchy-spanning de volgende constitutieve vergelijking:

$$T_{ij} = 2\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} . \quad (8.6)$$

Schrijven we $\rho = \rho^0 + \delta\rho$, waarbij ρ^0 de soortelijke massa in de nultoestand is, dan luidt de continuïteitsvergelijking (3.4) in gelineariseerde vorm:

$$\dot{\rho} + \rho^0 u_{i,i} = 0 .$$

De oplossing van (8.7) luidt, omdat ρ^0 constant is, de nultoestand is immers statisch,

$$\rho = \rho^0 (1 - u_{i,i}) , \quad (8.8)$$

of

$$\delta\rho = \rho - \rho^0 = -\rho^0 u_{i,i} .$$

Voor $x_{i,\alpha}$ geldt:

$$x_{i,\alpha} = (\xi_i + u_i)_{,\alpha} = \xi_{i,\alpha} + u_{i,j} \xi_{j,\alpha} . \quad (8.9)$$

Ontwikkelen we $\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}}$ in een Taylorreeks om de nultoestand, dan krijgen we:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} \right)^0 + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}} \right)^0 \delta C_{\gamma\delta} + \dots, \quad (8.10)$$

waarbij

$$\begin{aligned} \delta C_{\gamma\delta} &= C_{\gamma\delta} - C_{\gamma\delta}^0 = x_{i,\gamma} x_{i,\delta} - \xi_{i,\gamma} \xi_{i,\delta} = \\ &= (\xi_{i,\gamma} + u_{i,j} \xi_{j,\gamma}) (\xi_{i,\delta} + u_{i,k} \xi_{k,\delta}) - \xi_{i,\gamma} \xi_{i,\delta} = \\ &= u_{i,j} \xi_{i,\gamma} \xi_{j,\delta} + u_{i,j} \xi_{i,\delta} \xi_{j,\gamma} + \dots \end{aligned} \quad (8.11)$$

Substitueren we (8.11) in (8.10) en bedenken we dat $C_{\gamma\delta} = C_{\delta\gamma}$ dan krijgen we

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} \right)^0 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}} \right)^0 u_{i,j} \xi_{i,\gamma} \xi_{j,\delta} + \dots \quad (8.12)$$

We substitueren (8.8), (8.9) en (8.12) in (8.6) en verwaarlozen de termen van $O((u_{i,j})^2)$, wat leidt tot

$$T_{ij} = T_{ij}^0 - T_{ij}^0 u_{k,k} + T_{kj}^0 u_{i,k} + T_{ik}^0 u_{j,k} + d_{ijkl} u_{k,l}, \quad (8.13)$$

waarin

$$T_{ij}^0 = 2\rho^0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta}} \right)^0 \xi_{i,\alpha} \xi_{j,\beta}, \quad (8.14)$$

de, bekende, Cauchy-spanning in de multistoestand is en

$$d_{ijkl} = d_{klij} = d_{jikl} = d_{ijlk} = 4\rho^2 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C_{\alpha\beta} \partial C_{\gamma\delta}} \right)^0 \xi_{i,\alpha} \xi_{j,\beta} \xi_{k,\gamma} \xi_{l,\delta}, \quad (8.15)$$

coëfficiënten zijn, welke afhankelijk zijn van de voorspanningstoestand en van het materiaal.

Voeren we in de lineaire deformatietensor \bar{e} en de lineaire rotatietensor \bar{R} door:

$$\bar{e}_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \bar{R}_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \quad (8.16)$$

dan gaat (8.13) over in:

$$\begin{aligned} \delta T_{ij} &:= T_{ij} - T_{ij}^0 = \bar{R}_{ik} T_{kj}^0 - T_{ik}^0 \bar{R}_{kj} - T_{ij}^0 \text{tr} \bar{e} + \\ &+ \bar{e}_{ik} T_{kj}^0 + T_{ik}^0 \bar{e}_{kj} + d_{ijkl} \bar{e}_{kl}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

of, in tensornotatie:

$$\delta T = \bar{R} T^0 - T^0 \bar{R} + L(\bar{e}), \quad (8.18)$$

waarbij $L(e)$ een lineaire vorm in e voorstelt. Uit (8.18) zien we dat δT niet noodzakelijk nul hoeft te zijn als $\bar{e} = 0$.

We gaan nu de evenwichtsvergelijkingen voor δT_{ij} bepalen. Voor de afleiding zullen we een soort eerste Piola-Kirchhoff-spanningstensor gebruiken welke nu niet betrokken is op een oppervlak in de \underline{x} -toestand maar op een in de $\underline{\xi}$ -toestand. Noemen we deze spanning \hat{T} , dan geldt, naar analogie met (3.51):

$$\hat{T}_{ij} = \bar{J} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} T_{kj} \quad , \quad (8.19)$$

met

$$\bar{J} = \det H = 1 + u_{i,i} + \dots \quad (8.20)$$

Met

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - u_i) = \delta_{ik} - u_{i,k} \quad ,$$

en

$$T_{kj} = T_{kj}^0 + \delta T_{kj} \quad ,$$

en (8.20) gaat (8.19) over in:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ij} &= (1 + u_{\ell,\ell}) (\delta_{ik} - u_{i,k}) (T_{kj}^0 + \delta T_{kj}) = \\ &= T_{ij}^0 + \delta T_{ij} + T_{ij}^0 u_{k,k} - T_{kj}^0 u_{i,k} + \dots \quad (8.21) \end{aligned}$$

Voor \hat{T} en T^0 gelden, volgens resp. (3.62) en (3.31) de evenwichtsvergelijkingen

$$\frac{\partial \hat{T}_{ji}}{\partial \xi_j} = -\rho^0 b_i \quad ; \quad \frac{\partial T_{ji}^0}{\partial \xi_j} = -\rho^0 b_i^0 \quad , \quad (8.22)$$

waarin \underline{b} en \underline{b}^0 zijn de volumekrachten in resp. de \underline{x} - en de $\underline{\xi}$ -toestand.

Vergelijking (8.22²) aftrekken van (8.22¹) geeft:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (\hat{T}_{ji} - T_{ji}^0) + \rho^0 (b_i - b_i^0) = 0 \quad . \quad (8.23)$$

Met (8.21) krijgen we hieruit:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (\delta T_{ji}) + \frac{\partial T_{ji}^0}{\partial \xi_j} u_{k,k} + T_{ji}^0 u_{k,kj} - T_{ki}^0 u_{j,kj} +$$

$$-\frac{\partial T_{jk}^0}{\partial \xi_j} u_{i,k} + \rho^0 (b_i - b_i^0) = 0, \quad (8.24)$$

of, met (8.22²) en omdat: $T_{ki}^0 u_{j,kj} = T_{ji}^0 u_{k,jk}$ (j en k zijn dummy-indices)

$$(\delta T_{ij}),_j + \rho^0 b_k^0 u_{i,k} - \rho^0 b_i^0 u_{k,k} + \rho^0 (b_i - b_i^0) = 0. \quad (8.25)$$

Voor de randvoorwaarden in de spanningen kunnen we het volgende afleiden: Noem \underline{n}^0 de normaal op een uitwendig oppervlak in de nultoestand. Dan geldt, krachtens de definitie van \hat{T} , voor de oppervlaktespanning in de \underline{x} -toestand:

$$t_i = \hat{T}_{ji} n_j^0. \quad (8.26)$$

Voor de oppervlaktespanning in de ξ -toestand geldt:

$$t_i^0 = T_{ji}^0 n_j^0. \quad (8.27)$$

Vergelijking (8.27) aftrekken van (8.26) levert:

$$\delta t_i := t_i - t_i^0 = (\hat{T}_{ji} - T_{ji}^0) n_j^0. \quad (8.28)$$

Werken we dit uit met behulp van (8.21) dan krijgen we:

$$\delta t_i = \delta T_{ji} n_j^0 + T_{ji}^0 u_{k,k} n_j^0 - T_{ki}^0 u_{j,k} n_j^0. \quad (8.29)$$

Opmerking. De niet-lineariteit van de vergelijking kan bij zekere deformaties aanleiding geven tot bifurcatiepunten. In deze punten moet de stabiliteit van de verschillende oplossingen worden onderzocht. De hierboven beschreven theorie geeft een van de methoden om deze stabiliteitsvraagstukken op te lossen.

Voorbeeld. We zullen als voorbeeld behandelen een prismatische staaf, welke we eerst eindig rekken en daarna een klein beetje torderen.

We zullen eerst de rek bekijken. De rek in de lengterichting, d.i. de z-richting, kan worden beschreven door:

$$x = \lambda V X, \quad y = \lambda V Y, \quad z = V Z. \quad (8.30)$$

Hierin is V een gegeven constante, terwijl de constante λ , welke een maat is voor de dwarscontractie, nog nader bepaald moet worden. Voor een incompressibel materiaal volgt λ uit de eis dat het volume onveranderd moet blijven; dit geeft:

$$dx dy dz = dX dY dZ ,$$

of

$$\lambda^2 V^3 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{V^3}} . \quad (8.31)$$

Voor een compressibel materiaal volgt λ , zoals we verderop zullen zien, uit de eis dat de mantel spanningsvrij moet zijn.

Uit (8.30) vinden we:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda V & 0 & 0 \\ 0 & \lambda V & 0 \\ 0 & 0 & V \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} \lambda^2 V^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 V^2 & 0 \\ 0 & 0 & V^2 \end{pmatrix} , \quad (8.32)$$

en

$$I_B = V^2 (1 + 2\lambda^2) , \quad II_B = \lambda^2 V^4 (2 + \lambda^2) , \quad III_B = \lambda^4 V^6 . \quad (8.33)$$

De invarianten zijn dus constanten.

Voor de Cauchy-spanningen vinden we met (7.5)

$$\begin{aligned} T_{xx} = T_{yy} &= \delta + \alpha \lambda^2 V^2 + \gamma \frac{1}{\lambda^2 V^2} , \\ T_{zz} &= \delta + \alpha V^2 + \frac{\gamma}{V^2} , \\ T_{xy} = T_{xz} = T_{yz} &= 0 , \end{aligned} \quad (8.34)$$

waarin α , γ en δ functies zijn van de invarianten van B en dus van λ en V. Nu moet de mantel spanningsvrij zijn, d.w.z. dat aan de mantel moet gelden ($n_z = 0$):

$$T_{ix} n_x + T_{iy} n_y = 0 , \quad \text{voor } i = 1, 2, 3 . \quad (8.35)$$

Hieraan is alleen te voldoen als

$$T_{xx} = T_{yy} = 0 ,$$

of, met (8.34)

$$\delta + \alpha \lambda^2 V^2 + \gamma \frac{1}{\lambda^2 V^2} = 0 . \quad (8.36)$$

Uit vergelijking (8.36) is λ als functie van V te bepalen. Het is mogelijk om materialen te bedenken waarvoor (8.36) geen reële λ als oplossing heeft. We nemen hier echter aan dat (8.36) wel een reële λ geeft.

Door met (8.36) δ te elimineren uit (8.34) vinden we voor de spanningen

$$T_{zz} = (1 - \lambda^2) \left(\alpha V^2 - \frac{\gamma}{\lambda^2 V^2} \right), \quad (8.37)$$

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{xy} = T_{xz} = T_{yz} = 0.$$

Dit voor wat het rekprobleem betreft. We noemen de toestand beschreven door (8.30) en (8.37) de multoestand en we superponeren hierop een torsie, welke we beschrijven door

$$u_1 = u = -Dyz, \quad u_2 = v = Dxz, \quad u_3 = w = D\varphi(x,y), \quad (8.38)$$

met

$$D\ell \ll 1, \quad (\ell: \text{karakteristieke lengte})$$

$\varphi(x,y)$: welvingsfunctie.

De constante D is gegeven, de functie $\varphi(x,y)$ moet bepaald worden.

Vergelijking (8.17) geeft met het verplaatsingsveld volgens (8.38) en de voorspanningen volgens (8.37):

$$\delta T_{xx} = \delta T_{yy} = \delta T_{zz} = \delta T_{xy} = 0,$$

$$\delta T_{xz} = D\mu(V)(\lambda^2 \varphi_{,x} - y), \quad (8.39)$$

$$\delta T_{yz} = D\mu(V)(\lambda^2 \varphi_{,y} + x),$$

met

$$\mu(V) := \alpha V^2 - \frac{\gamma}{\lambda^2 V^2}. \quad (8.40)$$

Vergelijking (8.24) geeft, bij afwezigheid van volumekrachten:

$$(\delta T_{xz})_{,x} + (\delta T_{yz})_{,y} = 0,$$

of, met (8.39)

$$\Delta\varphi = \varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = 0. \quad (8.41)$$

De randvoorwaarde: mantel spanningsvrij, luidt volgens (8.29)

$$\delta T_{xz} n_x + \delta T_{zy} n_y = 0,$$

of, met (8.39)

$$(\varphi_{,x} - y)n_x + (\varphi_{,y} + x)n_y = 0. \quad (8.42)$$

Voor de normaalkracht in een doorsnede $z = \text{constant}$ geldt:

$$N_z = \iint_A T_{zz} \, dx dy = (1 - \lambda^2) \mu(V) A_0 \lambda^2 V^2, \quad (8.43)$$

waarbij A_0 het oppervlak in de ongedeformeerde toestand is ($A_0 = A/(\lambda^2 V^2)$).

Het torsiemoment is gelijk aan:

$$M_z = \iint_A (x T_{yz} - y T_{xz}) \, dx dy = D \mu(V) K, \quad (8.44)$$

met

$$K := \iint_A (x^2 + y^2 + \lambda^2 x \varphi_{,y} - \lambda^2 y \varphi_{,x}) \, dx dy. \quad (8.45)$$

Voor de torsiestijfheid volgt hieruit

$$\tau(V) := \frac{M_z}{D} = \mu(V) K. \quad (8.46)$$

Tengevolge van de rek verandert de doorsnede van de staaf gelijkvormig. Noemen we de welvingsfunctie voor de ongerekte staaf: $\Phi(X, Y)$, dan moeten als gevolg van deze gelijkvormigheid $\varphi(x, y)$ en $\Phi(X, Y)$ evenredig zijn. We kunnen dit direct zien door de vergelijkingen (8.41) en (8.42) toe te passen voor de ongedeformeerde doorsnede:

$$\begin{aligned} \Phi_{,XX} + \Phi_{,YY} &= 0, \\ (\Phi_{,X} - Y)n_X + (\Phi_{,Y} + X)n_Y &= 0. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Met $n_X = n_x$ en $n_Y = n_y$, met (8.30) en met $\Phi(X, Y) = \Phi(\frac{x}{\lambda V}, \frac{y}{\lambda V})$ is dit te schrijven als

$$\begin{aligned} \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} &= 0, \\ (\lambda^2 V^2 \Phi_{,x} - y)n_x + (\lambda^2 V^2 \Phi_{,y} + x)n_x &= 0. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Vergelijken van (8.48) met (8.41) en (8.42) geeft:

$$\varphi(x, y) = \lambda^2 V^2 \Phi(\frac{x}{\lambda V}, \frac{y}{\lambda V}) = \lambda^2 V^2 \Phi(X, Y). \quad (8.49)$$

Met de grootheid

$$K_0 = \iint_{A_0} (X^2 + Y^2 + X \Phi_{,Y} - Y \Phi_{,X}) \, dX dY, \quad (8.50)$$

welke alleen afhankelijk is van de oorspronkelijke, ongedeformeerde, doorsnede kunnen we voor de torsiestijfheid volgens (8.46) schrijven:

$$\begin{aligned} \tau(V) &= \mu(\bar{V}) \iint_A (x^2 + y^2 + \lambda^2 x \varphi_{,y} - \lambda^2 y \varphi_{,x}) dx dy = \\ &= \mu(V) \lambda^4 V^4 \iint_{A_0} (X^2 + Y^2 + \lambda^2 X \Phi_{,Y} - \lambda^2 Y \Phi_{,X}) dX dY = \\ &= \mu(V) \lambda^4 V^4 [J_0 - \lambda^2 (J_0 - K_0)] , \end{aligned} \quad (8.51)$$

met

$$J_0 = \iint_{A_0} (X^2 + Y^2) dX dY : \text{polaire traagheidsmoment van de ongedeformeerde doorsnede.}$$

Uit de klassieke, lineaire, torsietheorie is bekend dat voor niet-cirkelvormige doorsneden geldt:

$$J_0 > K_0 .$$

We zien dan uit (8.51) dat de torsiestijfheid τ nul wordt door

$$\lambda^2 = \frac{J_0}{J_0 - K_0} > 0 . \quad (8.52)$$

Voor een incompressibele staaf geeft dit met (8.31):

$$0 < v^3 = \frac{J_0 - K_0}{J_0} < 1 . \quad (8.53)$$

Dus: door indrukken van een staaf is de torsiestijfheid nul te krijgen, d.w.z. de staaf zal reeds bij een te verwaarlozen klein torsiemoment gaan torderen. De ingedrukte toestand is dan instabiel. We spreken hier van torsieknik. Bij de meeste staven is deze torsieknik niet zo belangrijk, omdat de kracht waarbij buigknik optreedt dikwijls veel kleiner is. Alleen bij doorsneden waarvoor de buigstijfheid veel groter is dan de torsiestijfheid, bijvoorbeeld slanke kruisvormige doorsneden, treedt torsieknik eerder op dan buigknik.

We hebben in dit voorbeeld gezien dat door de rek van de cylinder de torsiestijfheid werd beïnvloed. Dit verschijnsel geldt algemeen; door de voorspanningstoestand worden de materiaalconstanten veranderd.

IX. Probleem van Knowles. Niet-lineaire trillingen van een cirkelvormige, elastische, incompressibele buis

Literatuur

- J.A. Knowles, Large amplitude oscillations of a tube of incompressible elastic material, *Quart. Appl. Math.* 18 (1960), 71-77.
 J.A. Knowles, On a class of oscillations in the finite deformation theory of elasticity, *J. Appl. Mech.* 29 (1962), 283-286.
 I.G. Tadjbakhsh and R.A. Toupin, On the equations of finite deformations in deformed coordinates, *Intl. Business Machines Res. Lab. (Yorktown Heights)*, Rep. R.C. 1111, January 30, 1964.
 C. Truesdell and W. Noll, *Non-linear field theories*, § 62 en § 95.

We zullen in dit hoofdstuk het probleem bespreken van een cirkelvormige buis, gemaakt van een isotroop, incompressibel, elastisch materiaal, welke zuiver radiale trillingen uitvoert.

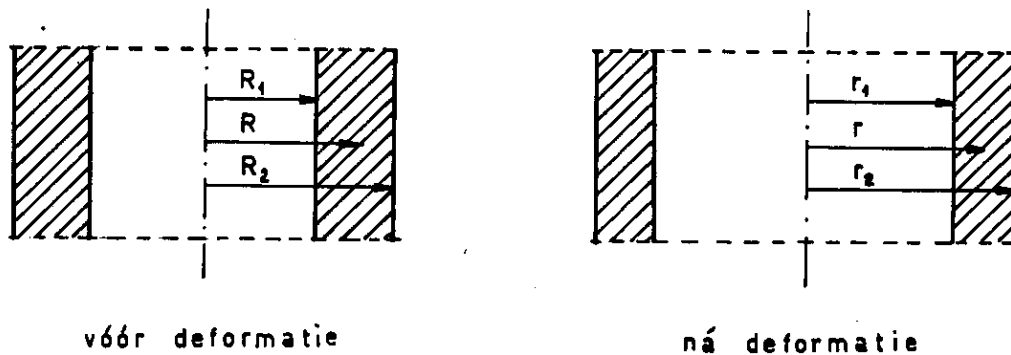


Fig. IX. 1.

We geven de plaats van een materieel punt aan met de cylindercoördinaten: R, θ, Z , vóór en: r, θ, z , ná de deformatie. We beschrijven de deformatie door:

$$r = \bar{r}(R,t), \quad \theta = \theta, \quad z = Z. \quad (9.1)$$

Met de vergelijkingen (7.42) en (7.44) krijgen we hieruit

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Aangezien het materiaal incompressibel is, moet

$$\det F = 1 ,$$

wat, met (9.2), leidt tot:

$$\frac{\partial \bar{F}(R, t)}{\partial R} = \frac{R}{\bar{F}(R, t)} . \quad (9.3)$$

De oplossing van (9.3) luidt met de conditie $r = r_1(t)$, voor $R = R_1$,

$$r^2 = [\bar{F}(R, t)]^2 = R^2 - R_1^2 + r_1^2(t) . \quad (9.4)$$

In (9.4) is R_1 een bekende constante en $r_1(t)$ een nog onbekende functie van de tijd t .

Uit (9.2) volgt

$$B = FF^T = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (9.5)$$

en

$$I_B = II_B = 1 + \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} , \quad III_B = 1 . \quad (9.6)$$

Zoals bekend luidt de constitutieve vergelijking voor de Cauchy-spanning voor een isotroop, incompressibel, elastisch materiaal:

$$T = -pI + \alpha_0 B + \gamma_0 B^{-1} , \quad (9.7)$$

waarin α_0 en γ_0 functies zijn van I_B en II_B , of, volgens (9.6),

$$\alpha_0 = \alpha_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} \right) , \quad \gamma_0 = \gamma_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} \right) . \quad (9.8)$$

Schrijven we de relaties (9.7) uit in cylindercoördinaten, dan krijgen we

$$\begin{aligned} T_{rr} &= -p + \alpha_0 \frac{R^2}{r^2} + \gamma_0 \frac{r^2}{R^2} , \\ T_{\theta\theta} &= -p + \alpha_0 \frac{r^2}{R^2} + \gamma_0 \frac{R^2}{r^2} , \\ T_{zz} &= -p + \alpha_0 + \gamma_0 , \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$T_{r\theta} = T_{rz} = T_{\theta z} = 0 .$$

De nog onbekende $p = p(r, \theta, z, t)$, welke hier niet de hydrostatische druk is, moet worden bepaald met behulp van de bewegingsvergelijkingen en de randvoorwaarden.

Uit (9.9) vinden we

$$T_{rr} - T_{\theta\theta} = \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{r^2}{R^2} \right) (\alpha_0 - \gamma_0) = \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{r^2}{R^2} \right) \mu , \quad (9.10)$$

waarbij

$$\mu := \alpha_0 - \gamma_0 = \mu \left(1 + \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} \right) = \tilde{\mu}(r) . \quad (9.11)$$

Voordat we de bewegingsvergelijkingen kunnen opschrijven, moeten we eerst de versnelling $\underline{a} = (a_r, a_\theta, a_z)$ berekenen. Uit het feit dat er alleen beweging is in de r-richting volgt direct

$$a_\theta = a_z = 0 . \quad (9.12)$$

Voor de snelheid van een punt krijgen we met (2.27) en (9.4):

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{\bar{r}}(R, t)}{\partial t} = \frac{r_1(t) \dot{r}_1(t)}{\bar{r}(R, t)} = \bar{v}(R, t) , \quad (9.13)$$

en hieruit volgt met (2.29) voor de versnelling

$$a = a_r(r, t) = \left. \frac{\partial \bar{v}(R, t)}{\partial t} \right|_{R=\tilde{R}(r, t)} = \frac{\dot{r}_1^2(t) + r_1(t) \ddot{r}_1(t)}{r} - \frac{r_1^2(t) \dot{r}_1^2(t)}{r^3} \quad (9.14)$$

waarin met (9.4)

$$\tilde{R}(r, t) = \sqrt{R_1^2 + r^2 - r_1^2(t)} . \quad (9.15)$$

Met (9.15) kunnen we de zg. extra-spanningen $T + pI$ volgens (9.9) ook als functie van de Eulerse coördinaat r schrijven. Substitueren we dit spanningsveld en de versnelling volgens (9.14) in de bewegingsvergelijkingen (3.31), uitgeschreven in cilindercoördinaten (zie (7.50)), dan krijgen we, bij afwezigheid van volumekrachten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} &= \rho a_r , \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 , \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = 0 .$$

Uit (9.16²) en (9.16³) volgt dat p, en dus, volgens (9.9¹), ook T_{rr}, alleen een functie van r en t kan zijn.

Met (9.10) en (9.14) is (9.16¹) te schrijven als

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}(r,t)}{\partial r} = \rho \left\{ \frac{\dot{r}_1^2(t) + r_1(t)\ddot{r}_1(t)}{r} - \frac{r_1^2(t)\dot{r}_1^2(t)}{r^3} \right\} + \\ - \left\{ \frac{\tilde{R}^2(r,t)}{r^2} - \frac{r^2}{\tilde{R}^2(r,t)} \right\} \frac{\tilde{u}(r)}{r} . \end{aligned} \quad (9.17)$$

De algemene oplossing van (9.17) luidt, als we bedenken dat, t.g.v. de incompressibiliteit, de dichtheid ρ constant is,

$$\begin{aligned} T_{rr}(r,t) = \rho \left[\{ \dot{r}_1^2(t) + r_1(t)\ddot{r}_1(t) \} \log r + \frac{r_1^2(t)\dot{r}_1^2(t)}{2r^2} \right] + \psi(t) + \\ - \int \left\{ \frac{\tilde{R}^2(r,t)}{r^2} - \frac{r^2}{\tilde{R}^2(r,t)} \right\} \frac{\tilde{u}(r)}{r} dr , \end{aligned} \quad (9.18)$$

waarin $\psi(t)$ een onbekende functie van de tijd is.

We schrijven de volgende randvoorwaarden voor

$$\begin{aligned} T_{rr} = - P_1(t) , \quad \text{voor } r = r_1(t) \\ T_{rr} = - P_2(t) , \quad \text{voor } r = r_2(t) , \end{aligned} \quad (9.19)$$

waarbij $P_1(t)$ en $P_2(t)$ bekende functies van de tijd zijn.

We voeren in de volgende grootheden

$$\begin{aligned} x = x(t) := \frac{r_1(t)}{R_1} , \quad u = u(r,t) := \frac{r^2}{\tilde{R}^2(r,t)} , \\ \gamma := \frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 > 0 , \end{aligned} \quad (9.20)$$

en de functie

$$f(x,\gamma) := \int_{\frac{\gamma+x^2}{\gamma+1}}^{x^2} (1+u) \hat{u} \left(u + \frac{1}{u} - 2 \right) \frac{du}{u^2} , \quad (9.21)$$

waarbij $\hat{\mu}$ gedefinieerd is door

$$\hat{\mu}\left(u + \frac{1}{u} - 2\right) = \mu\left(1 + u + \frac{1}{u}\right). \quad (9.22)$$

Opmerking: $\hat{\mu}$ wordt genoemd: de gegeneraliseerde glijdingsmodulus. Bij zuivere afschuiving geldt namelijk:

$$\frac{T_{xy}}{K} = \hat{\mu}(K^2) \quad (K \text{ volgens (7.1)}).$$

Teneinde een differentiaalvergelijking te krijgen voor de variabele $x(t)$, waaruit de onbekende functie $\psi(t)$ is geëlimineerd, schrijven we vergelijking (9.18) voor $r = r_1(t)$ en $r = r_2(t)$ en trekken deze twee vergelijkingen van elkaar af. We krijgen dan

$$x \log\left(1 + \frac{\gamma}{x^2}\right) \ddot{x} + \left[\log\left(1 + \frac{\gamma}{x^2}\right) - \frac{\gamma}{\gamma + x^2} \right] \dot{x}^2 + f(x, \gamma) = \frac{P_1(t) - P_2(t)}{\frac{1}{2} \rho R_1^2}. \quad (9.23)$$

We gaan eerst de vrije trillingen van de buis bekijken, d.w.z. we nemen

$$P_1(t) - P_2(t) = 0.$$

In dit geval kunnen we vergelijking (9.23) eenmaal integreren. We krijgen

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 x^2 \log\left(1 + \frac{\gamma}{x^2}\right) + F(x, \gamma) = C, \quad (9.24)$$

met

$$\begin{aligned} F(x, \gamma) &:= \int_1^x \xi f(\xi, \gamma) d\xi = \\ &= \frac{1}{\rho R_1^2} \int_1^x \xi \int_{\frac{\gamma + \xi^2}{\gamma + 1}}^{\xi^2} (1 + u) \hat{\mu}\left(u + \frac{1}{u} - 2\right) \frac{du}{u^2} d\xi. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Opmerking: Aangezien, volgens (9.18) en (9.21), $f(x, \gamma)$ gelijk is aan de spanning T_{rr} bij afwezigheid van beweging, volgt uit (9.25) dat $F(x, \gamma)$ evenredig is met de inwendige elastische energie.

Voor de kinetische energie T van de buis geldt:

$$T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} v^2 2\pi r \rho dr = \pi \rho \int_{r_1}^{r_2} r v^2 dr. \quad (9.26)$$

Met (9.13) en (9.4) wordt dit

$$\begin{aligned}
 T &= \pi \rho r_1^2(t) \dot{r}_1^2(t) \int_{r_1}^R \frac{r dr}{r^2} = \frac{1}{2} \pi \rho r_1^2(t) \dot{r}_1^2(t) \log\left(\frac{R^2}{r_1^2}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho r_1^2(t) \dot{r}_1^2(t) \log\left(1 + \frac{R^2 - R_1^2}{r_1^2}\right), \quad (9.27)
 \end{aligned}$$

waaruit we zien dat de eerste term van (9.24) evenredig is met de kinetische energie van de buis. Conclusie: vergelijking (9.24) komt overeen met de bekende betrekking:

$$T + U = \text{constant}.$$

We nemen aan dat we een materiaal hebben waarvoor μ positief is. Uit (9.25) volgt dan dat $F(x, \gamma)$ altijd groter dan nul is, behalve voor $x = 1$, waar hij gelijk aan nul is. $F(x, \gamma)$ is dan monotoon dalend voor $0 < x < 1$, en monotoon stijgend voor $x > 1$ (zie Fig. IX.2).

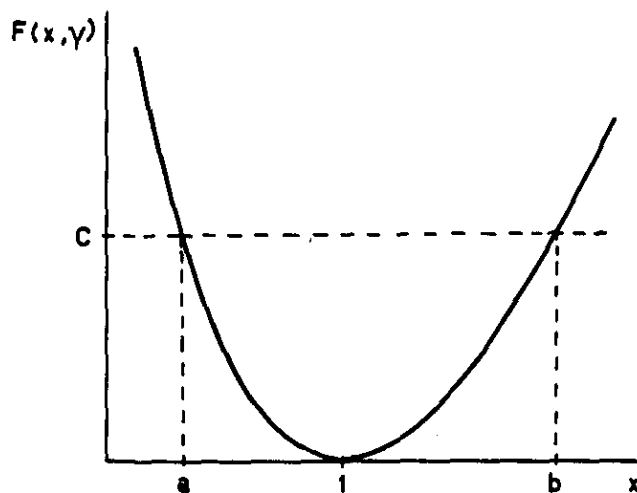


Fig. IX.2.

De integratieconstante C in (9.24) volgt uit de beginvoorwaarden. Stel dat

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \quad \text{op } t = 0, \quad (9.28)$$

dan is volgens (9.24):

$$C = \frac{1}{2} x_0^2 \dot{x}_0^2 \log \left(1 + \frac{\gamma}{x_0^2} \right) + F(x_0, \gamma) > 0 . \quad (9.29)$$

Lossen we uit (9.24) \dot{x} op, dan krijgen we

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{C - F(x, \gamma)}{\frac{1}{2} x^2 \log \left(1 + \frac{\gamma}{x^2} \right)}} . \quad (9.30)$$

Nu geldt: de beweging is periodiek dan en slechts dan als de vergelijking

$$F(x, \gamma) = C , \quad (9.31)$$

twee wortels heeft in het interval $0 < x < \infty$. Noemen we die wortels a en b ($a > b$) dan is periode T gelijk aan

$$T = 2 \int_a^b \frac{dx}{\dot{x}} = 2 \int_a^b \sqrt{\frac{\frac{1}{2} x^2 \log \left(1 + \frac{\gamma}{x^2} \right)}{C - F(x, \gamma)}} dx . \quad (9.32)$$

Opgave. Bewijs dat, als $\hat{\mu}$ uniform naar beneden begrensd is, d.w.z. er bestaat een getal $A > 0$ zodanig dat $\hat{\mu} \geq A$ voor alle positieve x en γ , $F(x, \gamma)$ onbegrensd is voor $x \rightarrow 0^+$ en $x \rightarrow \infty$, en dat in dat geval vergelijking (9.31) voor alle $C > 0$ precies twee enkelvoudige wortels a ($0 < a < 1$) en b ($b > 1$) heeft.

We gaan nu de oplossing vereenvoudigen door een dunwandige buis te bekijken, dat wil zeggen dat $R_1 \approx R_2 \approx R$ en $\gamma \ll 1$. Dan geldt

$$W(x^2) := 2 \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{F(x, \gamma)}{\gamma} = \frac{1}{\rho R^2} \int_0 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right) \hat{\mu}(\xi) d\xi . \quad (9.33)$$

Voor zeer kleine γ gaat (9.29) over in

$$C = \frac{1}{2} x_0^2 \dot{x}_0^2 \left(\frac{\gamma}{x_0^2} + \dots \right) + \frac{1}{2} \gamma W(x_0^2) + \dots , \quad (9.34)$$

zodat vergelijking (9.31) wordt:

$$W(x^2) = \dot{x}_0^2 + W(x_0^2) . \quad (9.35)$$

Vergelijking (9.35) heeft twee wortels: a_0 en b_0 , welke voldoen aan

$$a_0 b_0 = 1 ,$$

omdat

$$W(x^2) = W\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

zoals volgt uit (9.33).

Voor de periode van vrije trillingen voor een dunwandige buis krijgen we

$$T = 2 \int_{a_0}^{1/a_0} [\dot{x}_0^2 + W(x_0^2) - W(x^2)]^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (9.36)$$

We kunnen de resultaten nog op een andere manier vereenvoudigen, namelijk door een speciaal materiaal te bekijken. We zullen hier een zogenaamd "Mooney-Rivlin-materiaal" nemen, dit is een materiaal waarvoor α_0 en γ_0 (en dus ook μ en $\hat{\mu}$) constant zijn.

We kunnen (9.7) ook schrijven als

$$T = -pI + \mu\left(\frac{1}{2} + \beta\right)B - \mu\left(\frac{1}{2} - \beta\right)B^{-1}, \quad (9.37)$$

met μ en β materiaalconstanten. De constitutieve relatie (9.37) is af te leiden uit de energiefunctie

$$\rho\Sigma = \frac{1}{2}\mu \left[\left(\frac{1}{2} + \beta\right)(I_B - 3) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(II_B - 3) \right]. \quad (9.38)$$

Rivlin heeft verscheidene experimenten verricht aan rubber staven, waarvan hij bericht in het artikel:

Rivlin, Torsion of a rubber cylinder, J. Appl. Phys. 18 (1947), 444 - 449. Deze experimenten tonen aan dat het Mooney-Rivlin-materiaal een zeer goede beschrijving voor rubber geeft, zelfs bij rekken tot 400 à 600%.

Voor het speciale geval dat $\beta = \frac{1}{2}$ spreken we van "neo-Hooke's-materiaal". De hierbij behorende energie Σ is afgeleid met behulp van de, discrete, theorie van de rubberelasticiteit.

Uit de conditie dat $\Sigma \geq 0$ moet zijn, volgt:

$$\mu > 0, \quad -\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}. \quad (9.39)$$

Voor een Mooney-Rivlin-materiaal gaat $F(x, \gamma)$ volgens (9.25) over in

$$F(x, \gamma) = \frac{\mu}{2\rho R_1^2} (1 - x^2) \log\left(\frac{1 + \frac{\gamma}{x^2}}{1 + \gamma}\right), \quad (9.40)$$

terwijl voor een dunwandige buis (9.33) vereenvoudigd wordt tot:

$$W(x^2) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right) \frac{\mu}{\rho R^2} . \quad (9.41)$$

Vergelijking (9.35) is nu exact op te lossen. We krijgen

$$a_0 = \left[\frac{\dot{x}_0^2 \rho R^2}{2\mu} + \frac{x_0^2}{2} + \frac{1}{2x_0^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}_0^4 \rho^2 R^4}{\mu^2} + x_0^4 + \frac{1}{x_0^4} + \frac{2x_0^2 \dot{x}_0^2 \rho R^2}{\mu} + \frac{2\dot{x}_0^2 \rho R^2}{\mu x_0^2} - 2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (9.42)$$

$$b_0 = \frac{1}{a_0} .$$

De uitdrukking voor de periode (9.36) wordt zeer eenvoudig, namelijk

$$T = \pi R \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} , \quad (9.43)$$

waaruit blijkt dat de periode T niet meer afhangt van de amplitude.

Tot slot zullen we nog een eenvoudig geval van een gedwongen trilling bekijken, en wel:

$$\frac{P_1(t) - P_2(t)}{\frac{1}{2} \rho R_1^2} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ P, & t > 0 \quad (P: \text{constant}) \end{cases} . \quad (9.44)$$

We nemen aan dat de druk P wordt aangebracht in de ongespannen toestand, dat wil zeggen

$$\dot{x}_0 = 0 , \quad x_0 = 1 .$$

In plaats van (9.24) krijgen we nu de vergelijking:

$$\frac{1}{2} x^2 \dot{x}^2 \log \left(1 + \frac{\gamma}{x^2} \right) + F(x, \gamma) = \frac{1}{2} (x^2 - 1) P . \quad (9.45)$$

Er treedt een periodieke beweging op als de vergelijking

$$F(x, \gamma) = \frac{1}{2} (x^2 - 1) P , \quad (9.46)$$

een positieve wortel $a \neq 1$ heeft. Als $P > 0$ zal $a > 1$ zijn en bij $P < 0$ hoort $a < 1$.

De evenwichtsstand $x = b$ waarom de buis gaat trillen vinden we uit (9.23) door $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ te stellen. We zien dan dat b gelijk is aan de wortel uit:

$$f(x, \gamma) = P. \quad (9.47)$$

De periode van trillen is gelijk aan:

$$T = 2 \left| \int_1^a x \sqrt{\frac{\log\left(1 + \frac{\gamma}{x^2}\right)}{P(x^2 - 1) - 2F(x, \gamma)}} dx \right|. \quad (9.48)$$

X. Lineaire viscoëlasticiteit

Literatuur

Fredrickson, Principles and applications of rheologie, 1964, H6 (lineair) en H7 (niet-lineair).

Jaunzemis, Continuum mechanics, H6.

Bland, Theorie of linear viscoelasticity.

Parkus, Instationäre Warmespannungen, 1959, HVI (lineair).

We zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot de lineaire viscoëlasticiteitstheorie voor isotrope media. We zullen laten zien hoe, door middel van Laplace transformaties een analogon met de lineaire elasticiteitstheorie is te verkrijgen.

We geven daarom eerst een overzicht van de lineaire elasticiteitstheorie voor isotrope media (zie bijv. Collegedictaat "Toegepaste Mechanica", Alblas). Deze theorie is gebaseerd op de volgende vergelijkingen:

i) het verband tussen deformaties en verplaatsingen:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (10.1)$$

ii) de bewegingsvergelijkingen:

$$t_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (10.2)$$

iii) de wet van Hooke:

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (\lambda \text{ en } \mu: \text{Lamé-parameters}). \quad (10.3)$$

In (10.2) en (10.3) zijn t_{ij} de spanningen; in de lineaire theorie bestaat er geen verschil tussen de Cauchy-spanning en de Piola-Kirchhoff-spanningen. De wet van Hooke is ook te schrijven in de, in de technische literatuur meer gebruikelijke, vorm:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [t_{xx} - \nu(t_{yy} + t_{zz})], & (\text{cyclisch}), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} t_{xy}, & (\text{cyclisch}), \end{aligned} \quad (10.4)$$

met:

E: elasticiteits- of Young's modulus,

ν : dwarscontractie-coëfficiënt of constante van Poisson,

G: afschuif- of glijdingsmodulus.

Tussen deze drie materiaalconstanten bestaat het verband:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (10.5)$$

De vergelijkingen (10.1) - (10.3) vormen een stelsel van 15 vergelijkingen voor de 15 onbekenden t_{ij} , ε_{ij} en u_i .

De bij deze vergelijkingen horende randvoorwaarden luiden:

$$\text{op } S_p: t_{ij} n_j = t_i^*, \quad (t_i^* \text{ voorgeschreven}), \quad (10.6)$$

$$\text{op } S_u: u_i = u_i^*, \quad (u_i^* \text{ voorgeschreven}). \quad (10.7)$$

S_p en S_u zijn dat deel van het oppervlak, waarop de spanningen respectievelijk de verplaatsingen zijn voorgeschreven.

Door uit (10.1) - (10.3) t_{ij} en ε_{ij} te elimineren, verkrijgen we de Navier-vergelijkingen:

$$u_{j,jj} + (1-2\nu)u_{i,jj} = \rho \ddot{u}_i - \rho b_i \quad (10.8)$$

We voeren in de deviatorische spanningen (s_{ij}) en deformaties (e_{ij}) door:

$$s_{ij} := t_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} t_{kk}, \quad (10.9)$$

$$e_{ij} := \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}. \quad (10.10)$$

Uit deze definities volgt direct dat

$$s_{ii} = e_{ii} = 0. \quad (10.11)$$

De wet van Hooke gaat hiermee over in:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2Ge_{ij}, \\ \varepsilon_{ii} &= \frac{(1-2\nu)}{E} t_{ii}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Voor een lineair viscoëlastisch medium krijgen we in plaats van de wet van Hooke (10.12) de volgende algemene constitutieve vergelijkingen:

$$\begin{aligned} P(D)s_{ij} &= Q(D)e_{ij}, \\ F(D)t_{ii} &= H(D)\varepsilon_{ii}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Hierin zijn $P(D)$, $Q(D)$, $F(D)$ en $H(D)$ polynomen in de operator $D := \frac{\partial}{\partial t}$.

Dus

$$P(D) = \sum_{n=0}^p p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \dots, H(D) = \sum_{n=0}^h h_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} . \quad (10.14)$$

De materiaalcoëfficiënten p_n, \dots, h_n kunnen van de tijd en de plaats afhangen. We beperken ons hier echter tot constante en uniforme coëfficiënten.

De vergelijkingen (10.1) en (10.2) zijn onafhankelijk van de materiaaleigenschappen en gelden dus ook in een viscoëlastisch medium.

Opmerking. De vergelijkingen (10.13) zijn niet objectief. We zouden dan namelijk in plaats van de tijdafgeleiden $\frac{\partial}{\partial t}$, de Jaumann-afgeleide $\frac{D}{D_0} \frac{\partial}{\partial t}$ moeten gebruiken. We zullen echter toch de vergelijkingen (10.13) gebruiken, vanwege het grote praktische belang van deze vergelijkingen.

De vergelijkingen in de lineaire viscoëlasticiteitstheorie kunnen aanmerkelijk vereenvoudigd worden door het toepassen van Laplace transformatie. We definiëren de Laplace transformatie van een functie $f(x,t)$, welke nul is voor $t \leq 0$, door

$$\bar{f}(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(x,t) dt . \quad (10.15)$$

Voor de terugtransform geldt:

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{f}(x,s) e^{st} ds , \quad (10.16)$$

waarin L een rechte, evenwijdig aan de imaginaire as (in het complexe s -vlak) voorstelt, met de eigenschap dat er rechts van L geen polen van $\bar{f}(x,s)$ liggen.

Passen we deze transformatie toe op bijvoorbeeld vergelijking (10.13'), en nemen we aan dat voor $t < 0$ de spanningen, verplaatsingen, snelheden, en ook belastingen nul zijn, dan krijgen we:

$$P(s) \bar{s}_{ij}(s) = Q(s) \bar{e}_{ij}(s) , \quad (10.17)$$

met

$$P(s) = \sum_{n=0}^p p_n s^n . \quad (10.18)$$

We kunnen dit ook toepassen op de andere vergelijkingen en krijgen dan het volgende overzicht:

Lineair elastisch	Lineair visco-elastisch	L.V., Laplace getransformeerd
Constitutieve vergelijkingen: $s_{ij} = 2G e_{ij}$ $e_{ii} = \frac{(1-2\nu)}{E} t_{ii}$	$P(D)s_{ij} = Q(D)e_{ij}$ $F(D)t_{ii} = H(D)e_{ii}$	$P(s)\bar{s}_{ij}(s) = Q(s)\bar{e}_{ij}(s)$ $F(s)\bar{t}_{ii}(s) = H(s)\bar{e}_{ii}(s)$
Definities: $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ $s_{ij} = t_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} t_{kk}$ $e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk}$		$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$ $\bar{s}_{ij} = \bar{t}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{t}_{kk}$ $\bar{e}_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{e}_{kk}$
Bewegingsvergelijkingen: $t_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i$		$\bar{t}_{ij,j} + \rho \bar{b}_i = \rho s^2 \bar{u}_i$
Randvoorwaarden: op S_p : $t_{ij} n_j = t_i^*$ op S_u : $u_i = u_i^*$		op S_p : $\bar{t}_{ij} n_j = \bar{t}_i^*$ op S_u : $\bar{u}_i = \bar{u}_i^*$

We noemen een probleem quasi-statisch, indien we de traagheidstermen mogen verwaarlozen. We mogen dan de term $\rho \ddot{u}_i$ (en dus ook $\rho s^2 \bar{u}$) in de bewegingsvergelijkingen weglaten. We zien dat in dit geval de vergelijkingen in de eerste en de derde kolom van het schema identiek worden, mits we in de eerste kolom G en ν vervangen door respectievelijk:

$$G(s) := \frac{Q(s)}{2P(s)} \quad , \quad \nu(s) := \frac{H(s)P(s) - Q(s)F(s)}{2H(s)P(s) + Q(s)F(s)} \quad . \quad (10.19)$$

Dit analogon gaat alleen op als S_p en S_u niet van de tijd afhangen.

We kunnen een quasi-statisch, lineair viscoëlastisch probleem dus oplossen door eerst het analoge elastische probleem (dat dikwijls al opgelost is) op te lossen, vervolgens G en ν te vervangen door $G(s)$ en $\nu(s)$ volgens (10.19) en dan de gevonden resultaten terug te transformeren. We zullen deze methode aan enkele voorbeelden illustreren.

Dit zogenaamde quasi-statisch analogon is afgeleid door:

E.H. Lee, Stress analysis in visco-elastic bodies, Quart. of Appl. Math. 13, (1955), 183.

We hebben tot nu toe alleen de algemene constitutieve vergelijking (10.13) besproken. We zullen nu een aantal speciale gevallen van deze vergelijkingen geven. In alle viscoëlastische materialen die wij zullen beschouwen is

$$F(D) = \frac{(1-2\nu)}{2G(1+\nu)} = \frac{(1-2\nu)}{E}, \quad H(D) = 1. \quad (10.20)$$

Dit houdt in dat de volumeverandering steeds elastisch geschiedt (zie: (10.12²)).

Enkele voorbeelden van lineaire (visco)elastische materialen zijn:

i) Hooke's-materiaal, waarvoor:

$$P(D) = 1, \quad Q(D) = 2G. \quad (10.21)$$

Dit materiaal heeft als model een lineaire veer:



ii) Maxwell-materiaal, waarvoor:

$$P(D) = \frac{1}{\theta} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad Q(D) = 2G \frac{\partial}{\partial t}. \quad (10.22)$$

(10.13¹) wordt in dit geval:

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\theta} s_{ij} = 2G \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}. \quad (10.23)$$

Voor $\theta \Rightarrow \infty$ krijgen we weer het Hooke's-materiaal. θ is een maat voor de demping: hoe kleiner θ , des te groter is de invloed van de demping. Dit materiaal is te schematiseren door een lineaire veer en demper in serie geschakeld:



Uit dit model zien we, dat als we op dit materiaal een constante kracht zetten, de verplaatsingen oneindig groot zullen worden.

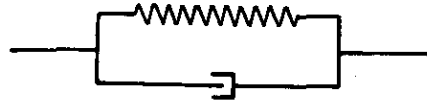
iii) Kelvin-materiaal, waarvoor

$$P(D) = 1, \quad Q(D) = 2G(1 + \theta \frac{\partial}{\partial t}), \quad (10.24)$$

zodat (10.13¹) nu overgaat in

$$s_{ij} = 2G \left(e_{ij} + \theta \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \right). \quad (10.25)$$

Voor $\theta \Rightarrow 0$ krijgen we weer het Hookes-materiaal. Het model bestaat hier uit een parallelschakeling van een lineaire veer en demper:



Doordat de demper hier parallel met de veer zit, zullen de verplaatsingen bij een eindige kracht eindig blijven.

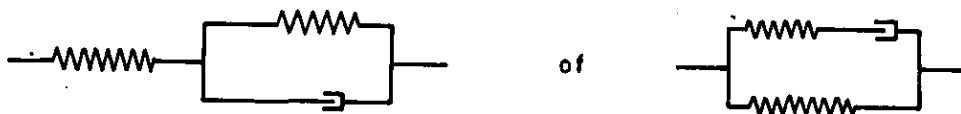
iv) Standaard-lineair-materiaal, waarvoor

$$P(D) = 1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad Q(D) = 2G(1 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial t}) \quad , \quad (10.26)$$

waarmee (10.13) wordt

$$\theta_1 \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} + s_{ij} = 2G \left(\theta_2 \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + e_{ij} \right) \quad . \quad (10.27)$$

Dit materiaal is voor te stellen door:



Voor een quasi-statisch proces luiden de Navier-vergelijkingen voor een elastisch medium (10.8), bij afwezigheid van volumekrachten

$$u_{j,jj} + (1 - 2\nu)u_{i,jj} = 0 \quad . \quad (10.28)$$

Passen we op deze vergelijking het eerder beschreven analogon toe, dan krijgen we voor een viscoëlastisch medium de getransformeerde Navier-vergelijking:

$$\bar{u}_{j,jj} + [1 - 2\nu(s)]\bar{u}_{i,jj} = 0 \quad . \quad (10.29)$$

Voor een Maxwell-materiaal krijgen we met (10,20) en (10.22) uit (10.19)

$$\nu(s) = \frac{\frac{1}{\theta} + s - \frac{(1 - 2\nu)}{(1 + \nu)} s}{\frac{2}{\theta} + 2s + \frac{(1 - 2\nu)}{(1 + \nu)} s} \quad . \quad (10.30)$$

Substitutie van (10.30) in (10.29) leidt tot:

$$\frac{3s(1-2\nu)}{(1+\nu)} \bar{u}_{i,jj} + \left[\frac{(1-2\nu)}{(1+\nu)} s + 2\left(\frac{1}{\theta} + s\right) \right] \bar{u}_{j,ji} = 0. \quad (10.31)$$

Terugtransformeren van (10.31) geeft de "Navier-vergelijking" voor een Maxwell-lichaam:

$$(1-2\nu) \frac{\partial}{\partial t} (u_{i,jj}) + \frac{\partial}{\partial t} (u_{j,ji}) + \frac{2(1+\nu)}{3\theta} u_{j,ji} = 0. \quad (10.32)$$

We gaan nu een aantal eenvoudige problemen oplossen:

1. Een tweezijdig ingeklemde staaf van een Maxwell-materiaal, waarvan de temperatuur op $t = 0$ plotseling met $T^\circ \text{C}$ wordt verlaagd. (Zie Parkus, pag. 115 e.v.)

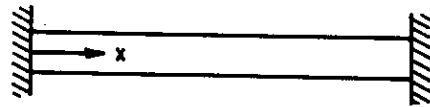


Fig. X.1.

We nemen aan dat de inklemming van de staaf zodanig is dat alleen de spanningscomponent t_{xx} ongelijk nul is.

Indien de staaf gemaakt is van een Hooke-materiaal geldt

$$t_{xx} = \alpha ET, \quad (10.33)$$

waarbij α de lineaire uitzettingscoëfficiënt is. Omdat alleen $t_{xx} \neq 0$, is

$$t_{ii} = t_{xx} \quad \text{en} \quad s_{xx} = \frac{2}{3} t_{xx}. \quad (10.34)$$

De volumeverandering ϵ_{ii} bestaat uit een bijdrage tengevolge van t_{xx} , welke volgens (10.13²) en (10.20) gelijk is aan

$$\frac{(1-2\nu)}{E} t_{xx},$$

plus een bijdrage tengevolge van de afkoeling:

$$- 3\alpha T,$$

zodat

$$\epsilon_{ii} = \frac{(1-2\nu)}{E} t_{xx} - 3\alpha T. \quad (10.35)$$

Omdat de balk aan beide einden is ingeklemd, is

$$\epsilon_{xx} = 0. \quad (10.36)$$

Met (10.10) krijgen we dan

$$e_{xx} = - \frac{(1-2\nu)}{3E} t_{xx} + \alpha T . \quad (10.37)$$

Omdat de spanning hier uniform is, is triviaal voldaan aan de evenwichtsvergelijking. De constitutieve vergelijking (10.23) wordt met (10.34) en (10.37):

$$\frac{2}{3} \frac{dt_{xx}}{dt} + \frac{2}{3\theta} t_{xx} = - 2G \frac{(1-2\nu)}{3E} \frac{dt_{xx}}{dt} ,$$

of, met (10.5)

$$\frac{3}{2(1+\nu)} \frac{dt_{xx}}{dt} + \frac{t_{xx}}{\theta} = 0 . \quad (10.38)$$

De oplossing van (10.38) luidt

$$t_{xx} = \alpha ET \exp \left\{ - \frac{2}{3} (1+\nu) \frac{t}{\theta} \right\} . \quad (10.39)$$

Uit deze oplossing blijkt dat als θ negatief zou zijn, de spanning ongelimiteerd met de tijd zou aangroeien. Dit is in strijd met de fysische ervaring, zodat moet gelden:

$$\theta \geq 0 . \quad (10.40)$$

Als $\theta \Rightarrow \infty$ krijgen we de oplossing uit de lineaire elasticiteitstheorie: (10.33).

Vergelijking (10.39) is ook te vinden met behulp van het analogon. We schrijven hiertoe (10.33) met (10.5) als:

$$t_{xx} = \alpha 2(1+\nu)GT(t) ,$$

waaruit we krijgen

$$\bar{t}_{xx} = 2\alpha[1+\nu(s)]G(s)\bar{T}(s) . \quad (10.41)$$

We nemen voor $T(t)$ de stapfunctie:

$$T(t) = \begin{cases} 0, & \text{als } t \leq 0, \\ T, & \text{als } t > 0, \end{cases}$$

waarmee zijn getransformeerde wordt

$$\bar{T}(s) = \int_0^{\infty} T \cdot e^{-st} dt = \frac{T}{s} . \quad (10.42)$$

Met de vergelijkingen (10.19), (10.20), (10.22) en (10.42) kunnen we (10.41) schrijven als:

$$\bar{t}_{xx} = \frac{\alpha ET}{s + \frac{2(1+\nu)}{3\theta}} \quad (10.43)$$

De terugtransform van (10.43) is (10.39).

2. Hetzelfde probleem als 1. maar nu voor een Kelvin-materiaal.

Het wordt aan de lezer overgelaten om te bewijzen dat in dit geval de oplossing luidt:

$$t_{xx} = \alpha ET \left\{ 1 + C e^{-\frac{3}{(1-2\nu)} \frac{t}{\theta}} \right\} \quad (10.44)$$

Voor $\theta \rightarrow 0$ gaat (10.44) over in (10.33). Omdat de spanning moet afnemen moet ook hier gelden: $\theta > 0$.

3. Een-dimensionale golfvoortplanting. (Zie Alblas, On some linear extensions of Hooke's law, Simon Stevin, 35 (1961), 3-13.)

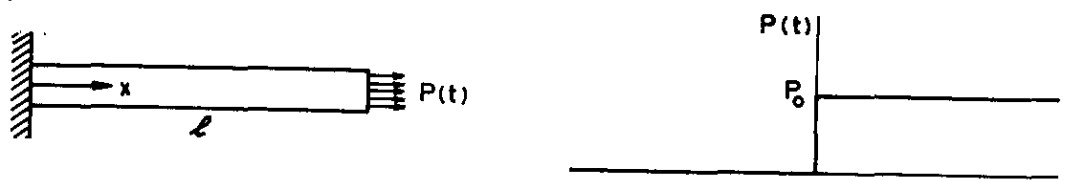


Fig. X.2.

Een ingeklemde staaf wordt in zijn vrije einddoorsnede op $t = 0$ plotseling belast door een constante normaalkracht P . Gevraagd de verplaatsingen u van de staaf als functie van x en t .

Dit is een dynamisch probleem; we kunnen hier het analogon dus niet toepassen. We nemen ook hier aan, dat alleen de spanning t_{xx} ongelijk nul is. Voor het elastische geval moet de verplaatsing in de x -richting voldoen aan de golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}) \quad (10.45)$$

Voor de spanning $t_{xx} = E \epsilon_{xx}$, en de rek $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, geldt dezelfde vergelijking. De randvoorwaarden luiden

$$\begin{aligned}
 t \leq 0, \quad u = \frac{\partial u}{\partial t} = t_{xx} = \epsilon_{xx} = 0, \\
 t > 0, \quad x = 0, \quad u = 0, \\
 t > 0, \quad x = l, \quad t_{xx} = \frac{P}{F},
 \end{aligned}
 \tag{10.46}$$

met: F doorsnede van de balk.

De oplossing van (10.45) en (10.46) luidt:

$$u(x,t) = \frac{Pc}{EF} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{st} \sinh\left(\frac{sX}{c}\right)}{s^2 \cosh\left(\frac{sL}{c}\right)} ds.
 \tag{10.47}$$

Voor $t < (l-x)/c$ krijgen we uit (10.47):

$$u = 0.$$

Residu-ontwikkeling voor $t > (l-x)/c$ van (10.47) laat zien dat de spanning t_{xx} bestaat uit de statische oplossing P/F , plus een reeks van ongedempte golven.

We gaan nu demping toevoegen. Hiertoe nemen we in plaats van de wet van Hooke de constitutieve vergelijking

$$t_{xx} + \tau_1 \frac{\partial t_{xx}}{\partial t} = E \left(\epsilon_{xx} + \tau_2 \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial t} \right).
 \tag{10.48}$$

Dit is de constitutieve vergelijking voor een standaard-lineair-lichaam in x-richting. In y- en z-richting zijn geen spanningen.

Substitutie van (10.48) in de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

leidt tot de volgende vergelijking voor $u(x,t)$:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}.
 \tag{10.49}$$

De randvoorwaarden blijven hetzelfde. Vergelijking (10.49) Laplace transformeren geeft

$$\frac{1}{c^2} (s^2 + \tau_1 s^3) \bar{u} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + s \tau_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

of

$$(1 + s\tau_2) \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = \frac{s^2}{c^2} (1 + s\tau_1) \bar{u} . \quad (10.50)$$

Door vergelijking (10.50) op te lossen en daarna terug te transformeren, waarbij we gebruik maken van de randvoorwaarden (10.46), krijgen we

$$u(x,t) = \frac{Pc}{EF} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{st}}{s^2} \sqrt{\frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2}} \frac{\sinh \left[\frac{sx}{c} \sqrt{\frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2}} \right]}{\cosh \left[\frac{s\ell}{c} \sqrt{\frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2}} \right]} ds . \quad (10.51)$$

De polen van de integrand in (10.51) zijn: een enkelvoudige pool in $p = 0$, plus de wortels van de vergelijking

$$\cosh \left[\frac{s\ell}{c} \sqrt{\frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2}} \right] = 0 . \quad (10.52)$$

De pool in $p = 0$ geeft de statische oplossing: $t_{xx} = \frac{P}{F}$. De wortels van (10.52) zijn gelijk aan de wortels van

$$\tau_1 s^3 + s^2 + a_k^2 \tau_2 s + a_k^2 = 0 , \quad (10.53)$$

waarbij

$$a_k = (2k+1) \frac{\pi c}{2\ell} . \quad (10.54)$$

Deze wortels geven tijdsafhankelijke termen. De conditie dat deze wortels voor $t \rightarrow \infty$ naar nul gaan luidt:

$$\text{Re } s < 0 . \quad (10.55)$$

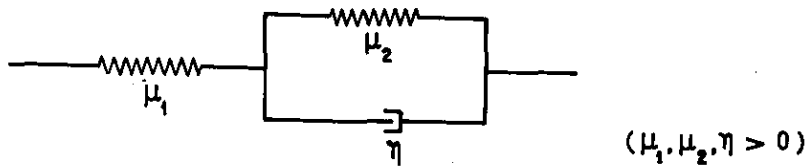
Volgens het Routh-Hurwitz-theorema (zie intermezzo aan het einde van dit voorbeeld) voldoen de wortels van (10.53) aan deze conditie als

$$\frac{1}{\tau_1} > 0 , \quad \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1 \right) \frac{a_k^2}{\tau_1} > 0 , \quad \frac{a_k^2}{\tau_1} > 0 ,$$

of als

$$\tau_1 > 0 , \quad \tau_2 > \tau_1 . \quad (10.56)$$

Dit is in overeenstemming met het schema



waarvoor

$$\tau_1 = \frac{\eta}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \tau_2 = \frac{\eta}{\mu_2}, \quad (10.57)$$

zodat aan de voorwaarden (10.56) is voldaan.

Intermezzo. Theorema van Routh-Hurwitz

Beschouw de vergelijking

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Definieer

$$\Delta_1 := a_1, \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 := \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n := a_n \Delta_{n-1}.$$

Dan is de voldoende en noodzakelijke voorwaarde, opdat alle wortels van bovenstaande vergelijking een negatief reëel deel hebben,

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

(Zonder bewijs.)

4. Dikwandige buis onder inwendige overdruk. (Zie ook: Alblas, Simon Stevin 35, (1961), 3-13.)

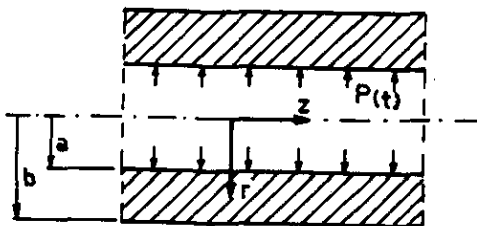
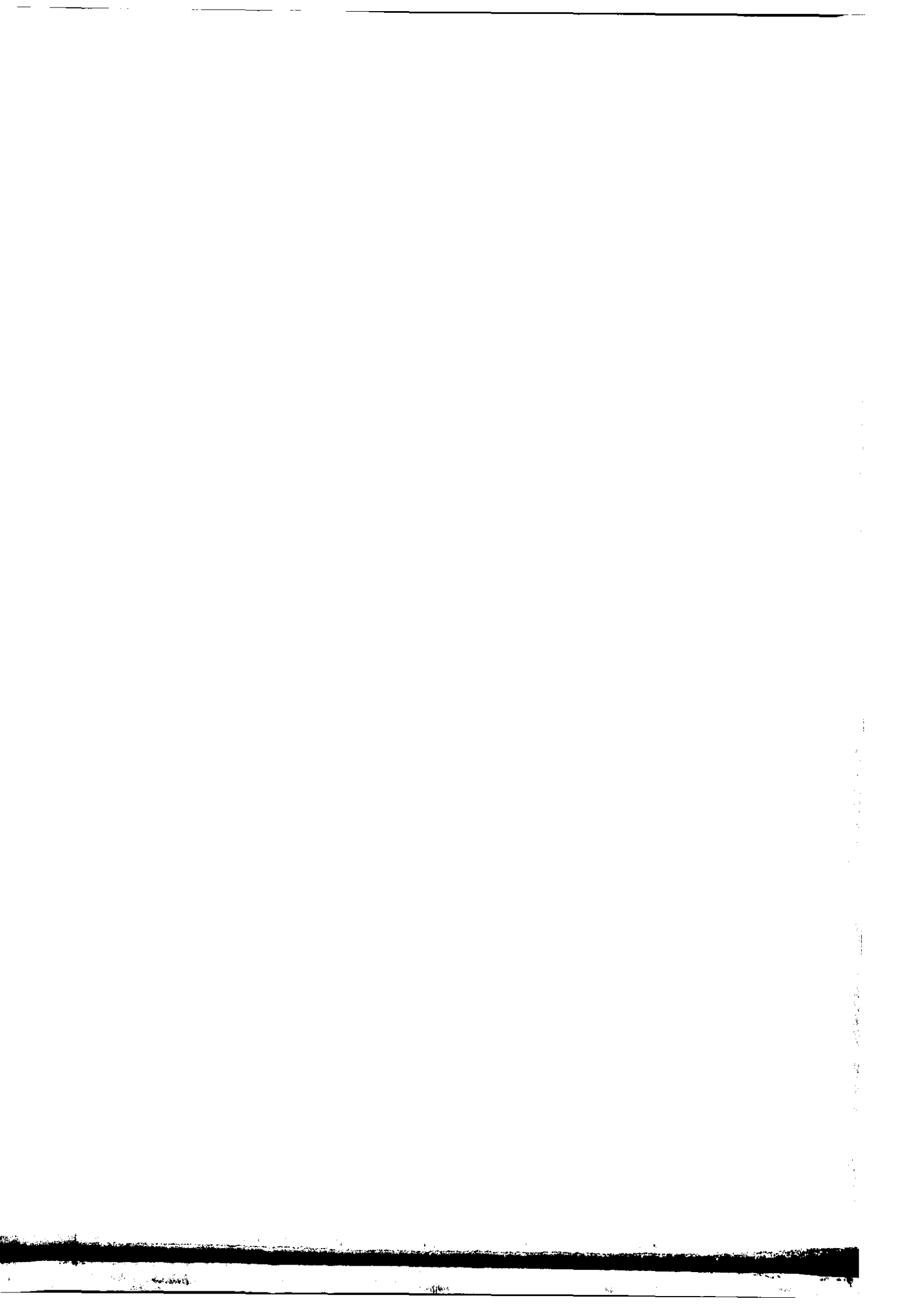


Fig. X.3.



rekken is dit wel het geval, zodat de uitwerking dan moeilijker wordt. We beperken ons tot de axiale rek ϵ_{zz} . We krijgen hiervoor na terugtransformatie

$$\epsilon_{zz} = - \frac{Pa^2}{(b^2 - a^2)} \frac{2}{2\pi i} \int_L \frac{e^{st}}{s} \frac{1}{2G(s)} \frac{\nu(s)}{[1 + \nu(s)]} ds . \quad (10.64)$$

Voor een incompressibel materiaal ($\nu = \nu(s) = \frac{1}{2}$) krijgen we hieruit

$$\epsilon_{zz} = - \frac{2Pa^2}{3(b^2 - a^2)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{st}}{s} \frac{P(s)}{Q(s)} ds . \quad (10.65)$$

Deze integraal bestaat als

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0 . \quad (10.66)$$

Voor een incompressibel Maxwell-materiaal krijgen we

$$\epsilon_{zz} = - \frac{Pa^2}{3G(b^2 - a^2)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(s + \frac{1}{\theta})e^{st}}{s^2} ds . \quad (10.67)$$

Deze uitdrukking is evenredig met:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{st}}{s^2} ds = t ,$$

want

$$\frac{1}{s^2} e^{st} = \frac{1}{s^2} (1 + st + \frac{1}{2}s^2 t^2 + \dots) = \frac{1}{s^2} + \frac{t}{s} + \frac{t^2}{2} + \dots .$$

Dus ϵ_{zz} bevat een term welke lineair met de tijd toeneemt, waaruit volgt dat de axiale rek in de tijd onbegrensd is.

Nemen we in plaats van een Maxwell-lichaam een Kelvin-lichaam dan blijven de rekken wel begrensd.

5. Dikwandige buis, inwendig verwarmd. (Zie Parkus, 1959, pag. 121-123.)

We hebben een dikwandige buis, waarvan de temperatuur aan de binnenkant $T_1^\circ C$ en aan de buitenkant $0^\circ C$ is. We voeren in een nieuwe materiaalconstante K door

$$K := \frac{(1 + \nu)}{4(1 - \nu)} \alpha T_1 .$$

Voor het elastische geval luidt de spanningsverdeling

$$t_{rr} = -4GK \left[\frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} - \frac{\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \right],$$

$$t_{\varphi\varphi} = -4GK \left[\frac{\log\left(\frac{b}{r}\right) - 1}{\log \frac{b}{a}} + \frac{\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \right], \quad (10.69)$$

$$t_{zz} = -4GK \left[\frac{2 \log\left(\frac{b}{r}\right) - \nu}{\log \frac{b}{a}} + \frac{2\nu}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \right].$$

Voor het viscoëlastische probleem nemen we voor T_1 weer een stapfunctie zodat

$$\bar{T}_1(s) = \frac{T_1}{s}. \quad (10.70)$$

We nemen een Maxwell-materiaal. Het quasi-statisch-analoon geeft

$$\bar{t}_{rr} = -4G(s)K(s)\sigma(r), \quad (10.71)$$

waarbij $\sigma(r)$ is de uitdrukking tussen [] in (10.69').

Met (10.19) en (10.22) vinden we na enig rekenwerk

$$G(s) = \frac{s}{\left(s + \frac{1}{\theta}\right)} G, \quad K(s) = \frac{(1+\nu)}{4(1-\nu)} \frac{\left(s + \frac{1}{\theta}\right)}{\left(s + \frac{1}{\theta'}\right)} \alpha \frac{T_1}{s}, \quad (10.72)$$

met

$$\theta' = \frac{3(1-\nu)}{(1+\nu)} \theta,$$

zodat

$$\bar{t}_{rr} = \frac{4GK}{\left(s + \frac{1}{\theta'}\right)} \sigma(r). \quad (10.73)$$

Terugtransformeren van (10.73) geeft

$$t_{rr} = e^{-t/\theta'} \cdot 4GK \sigma(r) = e^{-t/\theta'} (t_{rr})_{\text{elast.}} \quad (10.74)$$

Op volkomen analoge wijze kunnen we voor $t_{\varphi\varphi}$ afleiden

$$t_{\varphi\varphi} = e^{-t/\theta'} (t_{\varphi\varphi})_{\text{elast.}} \quad (10.75)$$

De uitdrukking voor t_{zz} in het viscoëlastische geval is iets moeilijker te vinden omdat in (10.69) de v in de uitdrukking tussen [] voorkomt. We krijgen nu

$$\begin{aligned} \bar{t}_{zz} = & -4G(s)K(s) \left[\frac{2 \log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \right] - 4G(s)K(s)v(s) \cdot \\ & \cdot \left[\frac{-1}{\log \frac{b}{a}} + \frac{2}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \right] \end{aligned} \quad (10.76)$$

Substitutie van de uitdrukking voor $G(s)$, $K(s)$ en $v(s)$ voor een Maxwell-lichaam en terugtransformatie leidt uiteindelijk tot

$$\begin{aligned} t_{zz} = & -4GK \left[\frac{2 \log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \right] e^{-t/\theta'} + \\ & -4GK \left[\frac{1}{\log \frac{b}{a}} - \frac{2}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \right] [e^{-t/\theta'} - (1-v)e^{-2vt/\theta''}] \end{aligned} \quad (10.77)$$

met

$$\theta'' = \frac{3\nu}{(1+\nu)} \theta \quad .$$

6. Rotatie-symmetrisch Boussinesque-probleem.

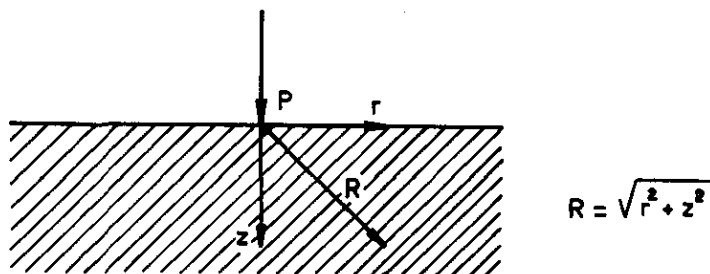


Fig. X.4.

We beschouwen een oneindige halfruimte belast door een puntlast P . De oplossing voor het elastische probleem luidt (zie bijv. Collegediktaat "Lineaire elasticiteitstheorie", pag. 60-63):

$$t_{rr} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-2\nu)}{R(R+z)} - \frac{3r^2 z}{R^5} \right],$$

$$t_{\varphi\varphi} = \frac{P}{2\pi} \left[(1-2\nu) \left\{ \frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right\} \right], \quad (10.78)$$

$$t_{zz} = - \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5},$$

$$t_{rz} = - \frac{3P}{2\pi} \frac{rz^2}{R^5}, \quad t_{r\varphi} = t_{z\varphi} = 0,$$

en

$$u = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{rz}{R^3} - \frac{(1-2\nu)r}{R(R+z)} \right],$$

$$w = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right]. \quad (10.79)$$

Voor het viscoëlastische probleem nemen we voor P weer een stapfunctie. Verder beperken we ons tot incompressibele materialen: $\nu = \nu(s) = \frac{1}{2}$.

Voor een Maxwell-materiaal krijgen we dan

$$\bar{u} = \frac{\bar{P}(s)}{4\pi G(s)} \frac{rz}{R^3} = \frac{P}{4\pi G} \frac{rz}{R^3} \frac{(s + \frac{1}{\theta})}{s^2}, \quad (10.80)$$

waaruit na terugtransformeren volgt

$$u = \frac{P}{4\pi G} \frac{rz}{R^3} \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\theta s^2} \right) ds. \quad (10.81)$$

Deze integraal is identiek aan die in (10.67), zodat ook hier de verplaatsingen lineair met de tijd toenemen.

Voor een Kelvin-materiaal krijgen we

$$\bar{u} = \frac{P}{4\pi G} \frac{rz}{R^3} \frac{1}{s(1+\theta s)}, \quad (10.81)$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} u &= \frac{P}{4\pi G} \frac{rz}{R^3} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{st}}{s(1+\theta s)} ds = \\ &= \frac{P}{4\pi G} \frac{rz}{R^3} \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st} \left[\frac{1}{s} - \frac{\theta}{(1+\theta s)} \right] ds . \end{aligned} \quad (10.82)$$

De integrand heeft nu twee enkelvoudige polen, namelijk een in $s = 0$ (geeft de statische oplossing) en een in $s = -\frac{1}{\theta}$ (geeft een uitdempende oplossing). De verplaatsingen blijven dus voor een Kelvin-materiaal beperkt.

Opmerking. Afgaande op deze voorbeelden kunnen we stellen dat een Maxwell-lichaam een meer visceus karakter heeft, terwijl een Kelvin-lichaam meer lijkt op een elastisch materiaal met demping.