TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE

ELASTICITEITSTHEORIE I

Syllabus naar het College van

Prof. Dr. J.B. Alblas

Voorjaarssemester 1971

J d G

Onderafdeling der Wiskunde

LINEAIRE ELASTICITEITSTHEORIE I

Syllabus naar het college van
prof. dr. J.B. Alblas

Voorjaarssemester 1971

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Dict. nr. 2.224 / prijs f 3,--

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit dictaat is samengesteld uit colleges gegeven door Prof.dr. J.B. Alblas in de voorjaarssemesters 1967 en 1971. In het eerste hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de algemene theorie van de lineaire elasticiteit met enige bijbehorende wiskundige aspecten (o.a. potentiaaltheorie). In de volgende drie hoofdstukken worden enkele problemen uit de lineaire elasticiteitstheorie exact opgelost. Problemen met gemengd-gemengde randvoorwaarden worden in dit deel van het college niet besproken. (Zie hiervoor lineaire elasticiteitstheorie II.)

In het laatste hoofdstuk worden een aantal benaderingsmethoden gebaseerd op energieprincipes afgeleid. Onder andere wordt een methode besproken die benaderingsvoorwaarden geeft voor de materiaalconstanten van niet-homogene materialen.

Aangezien dit dictaat de stof over twee colleges beslaat, kan voor het tentamen worden volstaan met de bestudering van een gedeelte van het dictaat. Men make hiertoe een afspraak met de desbetreffende hoogleraar.

I. Inleiding

In de lineaire elasticiteitstheorie zoeken we de oplossingen van een stelsel lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, de zogenaamde Navier-vergelijkingen, onder goed gedefinieerde randvoorwaarden. We besteden aandacht aan existentie- en eenduidigheidsstellingen en bovendien zullen we, indien de oplossing niet expliciet te bepalen is, benaderingsoplossingen zoeken.

I.1. Wiskundige begrippen

Definities:

Klasse C^n van functies: de klasse van n maal continu-differentieerbare functies.

Reguliere boog: de boog $y = f(x)$ heet regulier als $f(x)$ en de raaklijn $f'(x)$ continu zijn.

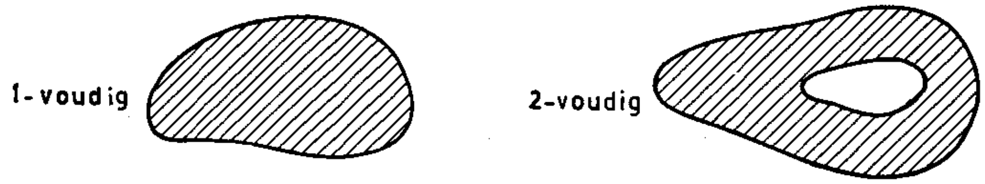
Reguliere kromme: verzameling van een eindig aantal reguliere bogen.

Op analoge wijze definiëren we een regulier oppervlakte element (continu veranderd raakvlak) en een regulier vlak: verzameling van eindig aantal reguliere oppervlakte elementen.

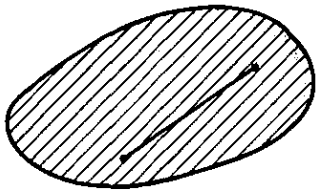
De snijpunten van reguliere bogen heten toppen; de snijlijnen van reguliere oppervlakte elementen: randen.

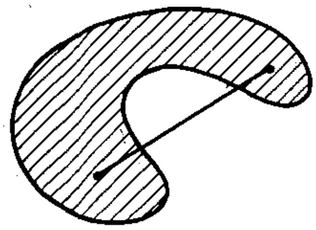
Regulier gebied: een gebied begrensd door reguliere vlakken. De stelling van Gauss geldt in een regulier gebied.

Een gebied heet enkelvoudig samenhangend, als iedere gesloten kromme in het gebied tot één punt van het gebied kan worden samengetrokken en meervoudig samenhangend als dit niet het geval is.

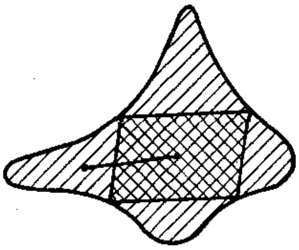


Een gebied heet convex, als iedere rechte lijn door ieder tweetal punten van het gebied geheel in het gebied ligt.





Een gebied heet stervormig met een kern, als ieder punt van de kern met ieder punt van het gebied verbonden kan worden door een rechte lijn welke geheel in het gebied ligt. We kunnen dan alle punten van het gebied beschrijven met bolcoördinaten met oorsprong in de kern.



I.2. Mechanische begrippen

We zullen in deze paragraaf een kort overzicht geven van de belangrijkste begrippen en vergelijkingen van de lineaire elasticiteitstheorie. Voor afleidingen en bewijzen wordt verwezen naar de eerste vijf hoofdstukken van het collegedictaat toegepaste mechanica.

We beschouwen een continu, deformeerbaar lichaam. We geven de verplaatsing van een punt van dit lichaam aan met: u_i, $(i = 1,2,3)$.
We definiëren:
de deformaties:

$$e_{ij} := \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \,, \qquad (1.01)$$

en de rotaties:

$$\omega_{ij} := \tfrac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \,, \qquad (1.02)$$

waarin

$$u_{i,j} := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \,.$$

De noodzakelijke en voldoende voorwaarden opdat uit zes gegeven deformaties drie verplaatsingen te bepalen zijn, worden gegeven door de zes compatibiliteitsvergelijkingen

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),$$

$$2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}, \qquad (1.03)$$

plus nog vier andere vergelijkingen, welke worden verkregen door de cyclische verwisselingen:

$$x,y,z \rightarrow y,z,x \rightarrow z,x,y .$$

Verg. (1.03) zijn ook te schrijven in index-notatie

$$e_{ij,k\ell} + e_{k\ell,ij} - e_{i\ell,jk} - e_{jk,i\ell} = 0, \; (i,j,k,\ell = 1,2,3). \qquad (1.04)$$

We definiëren de spanningsvector $t_i^{(n)}$, werkende op een vlakje met eenheidsnormaal: $\underline{n}$, door

$$t_i^{(n)} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta T_i}{\Delta S}, \qquad (1.05)$$

waarin ΔT_i de kracht is werkende op het oppervlakte-elementje ΔS. De spanningstensor t_{ij} wordt gedefinieerd door

$$t_i^{(n)} = t_{ij}\, n_j . \qquad (1.06)$$

Voor deze spanningen gelden de volgende twee vergelijkingen:
evenwicht:

$$t_{ij,j} + k_i = 0, \; k_i: \text{volumekracht}, \qquad (1.07)$$

momentenstelling:

$$t_{ij} = t_{ji}, \; \text{(géén volumemomenten)}. \qquad (1.08)$$

Uit (1.08) volgt dat we zes onbekende spanningen hebben, waarvoor we slechts drie vergelijkingen (1.07) hebben. Als extra vergelijkingen hebben we het verband tussen de deformaties en spanningen nodig, dat in de lineaire elasticiteitstheorie wordt gegeven door de wet van Hooke, welke in zijn meest algemene gedaante luidt

$$t_{ij} = c_{ijk\ell}\, e_{k\ell} \,. \tag{1.09}$$

Verg. (1.09) geldt voor anisotrope, inhomogene (als $c_{ijk\ell}$ afhankelijk is van de plaats) materialen.
Uit de symmetrie van e_{ij} en t_{ij} volgt dat $c_{ijk\ell}$: 36 onafhankelijke componenten heeft; als we bovendien het bestaan van een elastische energie aannemen, blijven er nog: 21 over.
Voor homogene lichamen is $c_{ijk\ell}$ onafhankelijk van de plaats en voor isotrope lichamen is $c_{ijk\ell}$ invariant ten opzichte van starre-lichaamsrotaties.
Voor homogene, isotrope lichamen geldt

$$c_{ijk\ell} = \lambda\delta_{ij}\,\delta_{k\ell} + \mu(\delta_{ik}\delta_{\ell j} + \delta_{i\ell}\delta_{kj}), \tag{1.10}$$

waarin de constanten λ en μ de Lamé-parameters worden genoemd.
Substitutie van (1.10) in (1.09) geeft de wet van Hooke voor homogene, isotrope materialen

$$t_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} \,. \tag{1.11}$$

Een andere, meer technische, schrijfwijze van (1.11) luidt

$$t_{ij} = 2G[e_{ij} + \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)}\,\delta_{ij}e_{kk}], \tag{1.12}$$

waarin de afschuivingsmodulus G en de dwarscontractiecoëfficiënt ν afhangen van λ en μ volgens

$$G = \mu, \quad \text{en} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \,. \tag{1.13}$$

Een verdere, belangrijke materiaalconstante is de elasticiteitsmodulus E welke gelieerd is met G en ν volgens

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \,. \tag{1.14}$$

We zullen ook nog de wet van Hooke in zijn inverse vorm nodig hebben,

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\,[t_{ij} - \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)}\,\delta_{ij}t_{kk}], \tag{1.15}$$

of

$$e_{ij} = \frac{1}{2G}\,[t_{ij} - \frac{\nu}{(1 + \nu)}\,\delta_{ij}t_{kk}]. \tag{1.16}$$

We nemen aan dat er een elastische energie W bestaat

$$W = \int_V W_s\, dV, \tag{1.17}$$

met

$$W_s = \frac{1}{2}\, t_{ij} e_{ij} : \text{ specifieke elastische energie.} \tag{1.18}$$

Met behulp van (1.09) is W_s te schrijven als functie van de deformaties

$$W_s = W_s^{(e)}(e_{ij}) = \frac{1}{2}\, c_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell}, \tag{1.19}$$

waaruit direct volgt

$$\frac{\partial W_s^{(e)}}{\partial e_{ij}} = t_{ij} \; . \tag{1.20}$$

Door (1.09) te inverteren krijgen we

$$e_{ij} = \gamma_{ijk\ell} t_{k\ell}, \tag{1.21}$$

waarmee we W_s kunnen uitdrukken in de spanningen

$$W_s = W_s^{(t)}(t_{ij}) = \frac{1}{2}\, \gamma_{ijk\ell} t_{ij} t_{k\ell}, \tag{1.22}$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial W_s^{(t)}}{\partial t_{ij}} = e_{ij} \; . \tag{1.23}$$

Voor een homogeen, isotroop medium vinden we met (1.11) en (1.15)

$$W_s^{(e)} = \frac{1}{2}[\lambda (e_{kk})^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij}],$$

en

$$W_s^{(t)} = \frac{1}{4}[\frac{1}{\mu}\, t_{ij} t_{ij} - \frac{\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\, (t_{kk})^2]. \tag{1.24}$$

Deze uitdrukkingen zijn positief-definiet, dwz. alleen nul als $e_{ij} \equiv t_{ij} \equiv 0$ en anders groter dan nul.

Resumerend kunnen we stellen dat we 15 onbekenden hebben, namelijk

$u_i(3)$, $e_{ij}(6)$ en $t_{ij}(6)$,

waarvoor we de volgende 15 vergelijkingen hebben
de definities van e_{ij}: (1.01): 6
de evenwichtsvergelijkingen: (1.07): 3
en de wet van Hooke: (1.09) (of (1.11)): 6.

Na eliminatie van e_{ij} en t_{ij} krijgen we hieruit de Navier-vergelijkingen, welke voor homogene, isotrope lichamen luiden

$$\Delta u_i + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} u_{j,ji} + \frac{1}{\mu} k_i = 0 \ , \quad (i = 1,2,3) \ . \tag{1.25}$$

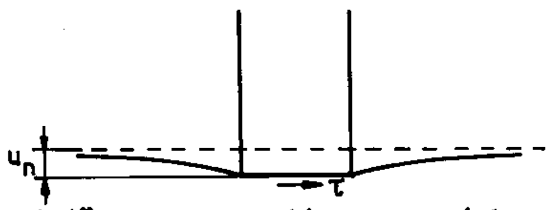
Dit is een stelsel elliptische partiële differentiaalvergelijkingen, dat gekoppeld is met één van de volgende randvoorwaarden (r.v.w.)

a) r.v.w. van de eerste soort: langs het gehele oppervlak van het lichaam zijn de spanningen voorgeschreven (⇒ Neumann-probleem),

b) r.v.w. van de tweede soort: idem de verplaatsingen voorgeschreven (⇒ Dirichlet-probleem),

c) gemengde r.v.w.: op een deel van het oppervlak (S_p) zijn de spanningen voorgeschreven en op een ander deel (S_u) de verplaatsingen.

d) gemengd-gemengde r.v.w.: op éénzelfde deel van het oppervlak zijn zowel spanningen als verplaatsingen voorgeschreven; bijvoorbeeld starre stempel met gegeven indrukking (u_n) en gladde onderkant (⇒ $\tau = 0$).



We definiëren een reguliere evenwichtstoestand $S(x)$ door

$$S(x) := \{t_{ij}(x),\ e_{ij}(x),\ u_i(x) \mid u_i \in C^2,\ e_{ij} \in C^1,\ t_{ij} \in C^1\}, \tag{1.26}$$

en zodanig dat voldaan is aan (1.01), (1.07) en (1.09) en aan de randvoorwaarden.

Als het lichaam oneindig groot genomen wordt, moet

$$u_i = 0(\tfrac{1}{r}),\ e_{ij} = 0(\tfrac{1}{r^2}),\ t_{ij} = 0(\tfrac{1}{r^2}),\ f_i = 0(\tfrac{1}{r^3}) \tag{1.27}$$

voor $r \to \infty$.

Theorema van Betti (reciprociteitstheorema)

Stel: $S'(x)$ en $S''(x)$ zijn reguliere evenwichtstoestanden behorende bij de belastingstoestanden: (k_i', t_i') en (k_i'', t_i'') resp., dan geldt

$$\int_V k_i' u_i'' dV + \int_S t_i' u_i'' dS = \int_V k_i'' u_i' dV + \int_S t_i'' u_i' dS. \tag{1.28}$$

In (1.28) is t_i de spanningsvector op S.

Eenduidigheidsstelling van Kirchhoff:

Beschouw een, eindig, regulier lichaam. Stel $S_1(x)$ en $S_2(x)$ reguliere evenwichtstoestanden, beide met k_i, t_i^* op S_p en u_i^* op S_u voorgeschreven. Dan moet $S_1(x) = S_2(x)$ op starre translaties en rotaties na.

Deze stelling is uit te breiden tot oneindige lichamen mits voldaan is aan (1.27).

Deze afleiding geldt niet meer voor singulariteiten (zoals puntlasten). De eenduidigheid gaat dan verloren. We moeten daarom de singulariteiten over een oppervlak uitsmeren en dit oppervlak naar nul laten gaan.

Voor de existentie van de oplossing is nodig dat het lichaam regulier is en dat de uitwendige belasting stuksgewijze continu is. We gaan hier niet verder in op existentie-bewijzen.

Voor wat betreft de regulariteit van de oplossing kunnen we zeggen dat:

indien van de oplossing de eenduidigheid en de existentie is bewezen, de oplossing in het binnengebied (niet de rand) oneindig vaak differentieerbaar is, mits k_i dat ook is. (Dit is een uitbreiding van het lemma van Weyl (1940)).

Beschouw de Navier-vergelijkingen (1.25) voor het bijzondere geval dat $k_i = 0$:

$$u_{i,jj} + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} u_{j,ji} = 0. \qquad (1.29)$$

Differentiatie naar i geeft

$$\Delta u_{i,i} = 0. \qquad (1.30)$$

Dus de relatieve volumeverandering: e_{ii} is een potentiaalfunctie.

Verg. (1.29) tweemaal naar k differentiëren, geeft met (1.30)

$$\Delta\Delta u_i = 0. \qquad (1.31)$$

Dus de verplaatsing u_i is een bipotentiaalfunctie.

Door substitutie van de wet van Hooke (1.15) in (1.04) krijgen we met behulp van (1.07) de compatibiliteitsvergelijkingen voor de spanningen. Deze vergelijkingen luiden (zie [6], pp. 74-76)

$$t_{ij,kk} + \frac{1}{1 + \nu}\, t_{kk,ij} = 0, \quad (i,j = 1,2,3). \qquad (1.32)$$

Vermenigvuldigen met δ_{ij} geeft

$$\Delta t_{ii} = 0. \tag{1.33}$$

Dus het spoor van de spanningstensor is een potentiaalfunctie.
Verg. (1.32) tweemaal differentiëren naar ℓ geeft met (1.33)

$$\Delta\Delta t_{ij} = 0. \tag{1.34}$$

Dus de spanning t_{ij} is een bipotentiaalfunctie.

I.3. Potentiaaltheorie

De vergelijkingen uit de lineaire elasticiteitstheorie zijn sterk verwant aan de potentiaalvergelijking. We zullen daarom hier een overzicht geven van enkele stellingen uit de potentiaaltheorie. Voor uitgebreidere informatie raadplege men [2], [3] of [4].

Divergentiestelling (Gauss):

Zij V een begrensd gesloten gebied met als rand het reguliere oppervlak S en $\vec{n}$ de naar buiten gerichte normaal op S, dan geldt

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV = \int_V a_{i,i}\, dV = \oint_S (\vec{a}.\vec{n})dS = \oint_S a_i n_i\, dS. \tag{1.35}$$

In twee-dimensionale vorm luidt deze stelling:
Zij S een begrensd gesloten oppervlak met als rand de reguliere kromme R, dan geldt

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = \oint_R [u \cos(n,x) + v \cos(n,y)]ds. \tag{1.36}$$

Stelling van Stokes:

Zij S een begrensd gesloten oppervlak met als rand de reguliere kromme R en zij $\vec{\tau}$ de eenheids-raakvector aan R, dan geldt

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{a}.\vec{n})dS = \int_S e_{ijk} a_{k,j} n_i\, dS = \oint_R (\vec{a}.\vec{\tau})ds = \oint_R a_i dx_i. \tag{1.37}$$

Rotatievrij vectorveld:
Zij

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 0,$$

dan is $\vec{a}$ te schrijven als

$$\vec{a} = \text{grad } \Phi. \tag{1.38}$$

Omgekeerd geldt, dat uit

$$\vec{a} = \text{grad } \Phi$$

volgt

$$\text{rot } \vec{a} = 0.$$

Divergentievrij vectorveld:
Zij

$$\text{div } \vec{a} = 0,$$

dan is $\vec{a}$ te schrijven als

$$\vec{a} = \text{rot } \vec{\Psi},$$

met

$$\text{div } \vec{\Psi} = 0. \tag{1.39}$$

Theorema van Helmholtz:

Iedere vector $\vec{u} \in C^1$ is te schrijven als

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi},$$

met

$$\text{div } \vec{\Psi} = 0. \tag{1.40}$$

Lemma I:

Zij $A = A(x,y) \in C^1$ en $B = B(x,y) \in C^1$, en zij

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \tag{1.41}$$

dan bestaat er een $f(x,y) \in C^2$ zodanig dat

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad B = -\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{1.42}$$

Met (1.42) is triviaal voldaan aan (1.41).

Bewijs: Voer in

$$f_1(x,y) := \int_{y_0}^{y} A(x,\eta)d\eta + g(x), \tag{1.43}$$

met $g(x)$ nog willekeurig.

Dan is

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = A(x,y), \tag{1.44}$$

en

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial A(x,\eta)}{\partial x}\, d\eta + g'(x) = -\int_{y_0}^{y} \frac{\partial B(x,\eta)}{\partial \eta}\, d\eta + g'(x) =$$

$$= - B(x,y) + B(x,y_0) + g'(x), \tag{1.45}$$

en dit is gelijk aan: $-B(x,y)$, als

$$B(x,y_0) + g'(x) = 0,$$

of

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} B(\xi,y_0)d\xi + C. \tag{1.46}$$

Kiezen we $f(x,y)$ gelijk aan $f_1(x,y)$ volgens (1.43) met $g(x)$ volgens (1.46) dan is voldaan aan (1.41) en (1.42). q.e.d.

Uit bovenstaand bewijs volgt dat $f(x,y)$ bepaald is op een constante na. Een andere keuze van y_0 en x_0 geeft alleen een verandering in deze constante.

Airy-functies

Aan de evenwichtsvergelijkingen (met $k_i = 0$)

$$t_{ij,j} = 0,$$

voor $i,j = 1,2$, is triviaal te voldoen door

$$t_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad t_{xy} = -\frac{\partial U}{\partial x \partial y}, \tag{1.47}$$

waarin

$U = U(x,y)$: Airy-functies.

Met behulp van voorgaand lemma is direct te bewijzen dat er altijd zo'n functie $U(x,y)$ bestaat.

Immers:

De eerste evenwichtsvergelijking luidt

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0.$$

Er bestaat dus een functie A(x,y) zodanig dat

$$t_{xx} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad t_{xy} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{1.48}$$

Analoog volgt uit de tweede evenwichtsvergelijking dat er een B bestaat met

$$t_{yx} = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad t_{yy} = -\frac{\partial B}{\partial x}. \tag{1.49}$$

Uit $t_{xy} = t_{yx}$ volgt dan

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

dus er bestaat een functie U(x,y) zodanig dat

$$A = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad B = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{1.50}$$

Combinatie van (1.48), (1.49) en (1.50) geeft (1.47). q.e.d.

Identiteiten van Green:

1e identiteit: (V en S volgens (1.35))

$$\int_V AB_{,ii}\, dV + \int_V A_{,i}B_{,i}\, dV = \oint_S A \frac{\partial B}{\partial n}\, dS. \tag{1.51}$$

Voor A = 1 wordt dit

$$\int_V B_{,ii}\, dV = \oint_S \frac{\partial B}{\partial n}\, dS, \tag{1.52}$$

en als B een potentiaalfunctie is

$$\oint_S \frac{\partial B}{\partial n}\, dS = 0. \tag{1.53}$$

2e identiteit:

$$\int_V AB_{,ii}\, dV - \int_V BA_{,ii}\, dV = \oint_S (A \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial A}{\partial n}) dS. \tag{1.54}$$

Als A én B potentiaalfuncties zijn, krijgen we

$$\oint_S (A \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial A}{\partial n}) dS = 0. \tag{1.55}$$

3^e identiteit:

Zij $\vec{\xi}$ een punt van V, $r(\vec{x},\vec{\xi}) := \sqrt{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)}$ en $A(\vec{x}) \in C^2(V)$, dan geldt

$$4\pi A(\vec{\xi}) = -\int_V \frac{\Delta A}{r} dV - \oint_S [A \frac{\partial}{\partial n} (\frac{1}{r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial n}] dS. \tag{1.56}$$

Als $A(\vec{x})$ een potentiaalfunctie is, krijgen we

$$A(\vec{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S [\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial}{\partial n} (\frac{1}{r})] dS. \tag{1.57}$$

Definieer de hulpfunctie $v(\vec{x},\vec{\xi})$, bij vaste $\vec{\xi}$, door

$$\Delta v = 0, \text{ in } V, \text{ en } v = -\frac{1}{r} \text{ op } S. \tag{1.58}$$

Voor het bewijs van de existentie van v zie [4].
Kies B = v in (1.54):

$$-\int_V v \Delta A \, dV = \oint_S [A \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial n}] dS, \tag{1.59}$$

en dit geeft met (1.56):

$$4\pi A(\vec{\xi}) = -\int_V G(\vec{x},\vec{\xi}) \Delta A dV - \oint_S A \frac{\partial G}{\partial n} dS, \tag{1.60}$$

waarin

$$G(\vec{x},\vec{\xi}) := v(\vec{x},\vec{\xi}) + \frac{1}{r(\vec{x},\vec{\xi})} \text{ : } \textit{Greense functie.} \tag{1.61}$$

Voor $\Delta A = 0$ geeft (1.60)

$$A(\vec{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S A \frac{\partial G}{\partial n} dS. \tag{1.62}$$

Voor G geldt de relatie

$$G(\vec{x},\vec{\xi}) = G(\vec{\xi},\vec{x}). \tag{1.63}$$

(*bewijs: zie* [4]).

I.4. Oplossing Navier-vergelijking. Potentialen

Alle in deze paragraaf af te leiden resultaten gelden voor enkelvoudig samenhangende gebieden. We schrijven de Navier-vergelijking (1.25) met behulp van (1.13) in de vorm

$$u_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ij} = -\frac{1}{G} k_i \ , \ (i = 1,2,3). \tag{1.64}$$

Een particuliere oplossing van deze vergelijking, welke is gevonden door Lord Kelvin, luidt

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi E} \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \left[\int_V \{ (3-4\nu) \frac{1}{r(\vec{x},\vec{\xi})} k_i(\vec{\xi}) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (x_j - \xi_j) k_j(\vec{\xi}) \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{1}{r(\vec{x},\vec{\xi})}) \} \, dV(\vec{\xi}) \right] . \tag{1.65}$$

Zie hiervoor bijvoorbeeld [5], pp. 183-185.
We hebben hiermee de particuliere oplossing gevonden. We zullen ons daarom voortaan beperken tot de behandeling van de homogene vergelijking ($k_i = 0$). In dat geval zijn, volgens (1.31) en (1.34), u_i en t_{ij} bipotentiaalfuncties.

<u>Stelling</u>: Iedere bipotentiaalfunctie kan worden uitgedrukt in potentiaalfuncties.

<u>Bewijs</u>:

We hebben voor het bewijs het volgende lemma nodig:

<u>Lemma</u>: Gegeven de bipotentiaalfunctie φ ($\Delta\Delta\varphi = 0$).
Dan bestaat er een potentiaalfunctie ψ ($\Delta\psi = 0$), zodanig dat

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \Delta\varphi. \tag{1.66}$$

Bewijs lemma:

Definieer een functie $\bar{\psi}$, niet noodzakelijk een potentiaalfunctie, door

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} = \Delta\varphi. \tag{1.67}$$

Dan is

$$\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial x} = \Delta\Delta\varphi = 0,$$

dus

$$\Delta\bar{\psi} = f(y,z). \tag{1.68}$$

Definieer $A(y,z)$ als een oplossing van

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -f(y,z), \tag{1.69}$$

en $\psi(x,y,z)$ door

$$\psi := \bar{\psi} + A. \tag{1.70}$$

Dan is ψ een potentiaalfunctie, want

$$\Delta\psi = \Delta\bar{\psi} + \Delta A = f(y,z) - f(y,z) = 0, \tag{1.71}$$

en verder is

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} = \Delta\varphi. \tag{1.72}$$

q.e.d. lemma.

We kunnen nu de bipotentiaalfunctie φ uitdrukken in de potentiaalfuncties ψ, volgens (1.70), en β, welke laatste gedefinieerd wordt door

$$\beta := \varphi - \frac{1}{2}x\psi. \tag{1.73}$$

Deze β is een potentiaalfunctie want

$$\Delta\beta = \Delta\varphi - \Delta(\frac{1}{2}x\psi) = \Delta\varphi - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\psi) - \frac{1}{2}x(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}) =$$

$$= \Delta\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{2}x\Delta\psi = 0. \tag{1.74}$$

We hebben dus

$$\varphi = \beta + \frac{1}{2}x\psi. \tag{1.75}$$

q.e.d.

In (1.75) is de x willekeurig: we kunnen in plaats van x ook y of z nemen. Dat wil zeggen, er moet gelden

$$\begin{aligned} \varphi &= \beta_1 + \frac{1}{2}x\psi_1, \qquad (\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \Delta\varphi), \\ &= \beta_2 + \frac{1}{2}y\psi_2, \qquad (\frac{\partial\psi_2}{\partial y} = \Delta\varphi), \\ &= \beta_3 + \frac{1}{2}z\psi_3, \qquad (\frac{\partial\psi_3}{\partial z} = \Delta\varphi). \end{aligned} \tag{1.76}$$

Optellen van deze drie vergelijkingen en gebruikmaken van de definities

$$\beta := \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3),\quad \eta_i := \frac{1}{3}\psi_i, \qquad (i = 1,2,3), \tag{1.77}$$

leidt tot

$$\varphi = \beta + \frac{1}{2} x_i\eta_i, \text{ met: } \eta_{i,i} = \Delta\varphi \text{ en } \Delta\beta = \Delta\eta_i = 0\ . \tag{1.78}$$

Neuber-Papkowich-potentialen

Beschouw de Navier-vergelijking (1.64) met $k_i = 0$

$$u_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ji} = 0. \tag{1.79}$$

We definiëren de functie $\alpha(x,y,z)$ door

$$\Delta\alpha = u_{i,i}. \tag{1.80}$$

Uit het feit dat $u_{i,i}$ een potentiaalfunctie is (volgens (1.30)) volgt dat α een bipotentiaalfunctie is.
We substitueren (1.80) in (1.79)

$$\Delta[u_i + \frac{1}{(1-2\nu)}\alpha_{,i}] = \Delta\eta_i = 0, \tag{1.81}$$

waarbij de potentiaalfunctie η_i is gedefinieerd door

$$\eta_i := \frac{1}{(1-2\nu)}\alpha_{,i} + u_i. \tag{1.82}$$

Verg. (1.82) differentiëren naar x_i leidt met (1.80) tot

$$\eta_{i,i} = \frac{1}{1-2\nu}\Delta\alpha + u_{i,i} = \frac{(2-2\nu)}{(1-2\nu)}\Delta\alpha. \tag{1.83}$$

Aangezien α een bipotentiaalfunctie is, kunnen we volgens (1.78) schrijven

$$\frac{(2-2\nu)}{(1-2\nu)}\alpha = \frac{1}{2}x_i\eta_i - (2-2\nu)\omega, \text{ met } \Delta\omega = 0. \tag{1.84}$$

Met (1.82) krijgen we hieruit voor de verplaatsingen

$$u_i = -\frac{1}{4(1-\nu)}(x_j\eta_j)_{,i} + \eta_i + \omega_{,i},\quad (i,j = 1,2,3). \tag{1.35}$$

Hiermee hebben we de verplaatsing uitgedrukt in de vier potentiaalfuncties: η_1,η_2,η_3 en ω. Dit zijn de Neuber-Papkowich-functies.

Opmerking: Bij bovenstaande afleiding moet $\nu \neq \frac{1}{2}$ zijn. Maar (1.85) geldt ook voor $\nu = \frac{1}{2}$; alleen de afleiding wordt dan anders.

Reductie van vier potentiaalfuncties naar drie, voor $4\nu \neq$ geheel getal.

We beperken ons principieel tot een stervormig gebied. We kunnen dan bolcoördinaten invoeren:

$$(x,y,z) = (r \cos \theta \cos \varphi,\ r \cos \theta \sin \varphi,\ r \sin \theta). \qquad (1.86)$$

Definieer $p(x,y,z)$ als de oplossing van

$$4(1 - \nu)p - x_i p_{,i} = - 4(1 - \nu)\omega. \qquad (1.87)$$

Als we overgaan op bolcoördinaten

$$p(x,y,z) \Rightarrow p(r,\theta,\varphi)$$

wordt (1.87)

$$4(1 - \nu)p - r \frac{\partial p}{\partial r} = - 4(1 - \nu)\omega, \qquad (1.88)$$

immers

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial r} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial p}{\partial x_i} .$$

De oplossing van (1.88) luidt

$$\frac{\partial}{\partial r} \{pr^{-4(1-\nu)}\} = 4(1 - \nu)\omega r^{(-5+4\nu)},$$

of

$$p = r^{4(1-\nu)} \int_0^r 4(1 - \nu)\omega\rho^{(-5+4\nu)} d\rho . \qquad (1.89)$$

Doordat we ons beperken tot stervormige gebieden is ρ eenduidig.
Uit (1.89) is af te leiden dat

$$\Delta p = 0. \qquad (1.90)$$

Voer in de nieuwe potentiaalfunctie Y_i door

$$Y_i := \eta_i - p_{,i}, \qquad (1.91)$$

waarmee (1.85) overgaat in

$$u_i = - \frac{1}{4(1 - \nu)} (x_j Y_j)_{,i} + Y_i. \qquad (1.92)$$

De verplaatsing is nu dus uitgedrukt in drie potentiaalfuncties: Y_1, Y_2 en Y_3.

Bijzondere potentialen (zie bijv. [7], pp. 169-172).

Een aantal bijzondere oplossingen van (1.79) luiden: (of deze oplossingen bruikbaar zijn is afhankelijk van de randvoorwaarden)

i) $$u_i = \Phi_{,i}, \text{ met } \Delta\Phi = 0. \tag{1.93}$$

Voor deze oplossing is de volumerek $u_{i,i}$ nul.

ii) Rotatie-oplossing

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ u_y = \frac{\partial\psi}{\partial x},\ u_z = 0,\ \Delta\psi = 0. \tag{1.94}$$

Ook deze oplossing geeft: $u_{i,i} = 0$.
Andere combinaties van x,y,z zijn natuurlijk ook mogelijk.

iii) $$u_x = z\,\frac{\partial F}{\partial x},\ u_y = z\,\frac{\partial F}{\partial y},\ u_z = z\,\frac{\partial F}{\partial z} - (3 - 4\nu)F, \tag{1.95}$$

$$\Delta F = 0,$$

In dit geval is

$$u_{i,i} = -2(1 - 2\nu)\,\frac{\partial F}{\partial z}\,. \tag{1.96}$$

iv) Deze is te verkrijgen door in (1.93): $\Phi = (1 - 2\nu)A$, en in (1.95): $F = \frac{\partial A}{\partial z}$ te stellen en deze twee op te tellen. De functie A is een potentiaalfunctie. Deze oplossing is te gebruiken bij problemen waarbij in één vlak (zeg: z = 0) de schuifspanningen nul zijn.
We krijgen

$$\begin{aligned} u_x &= z\,\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial z} + (1 - 2\nu)\,\frac{\partial A}{\partial x}\,, \\ u_y &= z\,\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial z} + (1 - 2\nu)\,\frac{\partial A}{\partial y}\,, \\ u_z &= z\,\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2\,(1 - \nu)\,\frac{\partial A}{\partial z}\,. \end{aligned} \tag{1.97}$$

Met de wet van Hooke (1.12) krijgen we hiermee de spanningen

$$\frac{1}{2G}\,t_{xx} = z\,\frac{\partial^3 A}{\partial x^2\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2\nu\,\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\,,$$

$$\frac{1}{2G}\, t_{yy} = z\, \frac{\partial^3 A}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2\nu\, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\, ,$$

$$\frac{1}{2G}\, t_{zz} = z\, \frac{\partial^3 A}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\, ,$$

$$\frac{1}{2G}\, t_{yz} = z\, \frac{\partial^3 A}{\partial y \partial z^2}\, , \tag{1.98}$$

$$\frac{1}{2G}\, t_{xz} = z\, \frac{\partial^3 A}{\partial x \partial z^2}\, ,$$

$$\frac{1}{2G}\, t_{xy} = z\, \frac{\partial^3 A}{\partial x \partial y \partial z} + (1 - 2\nu)\, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\, .$$

Uit (1.98) 4 en 5 volgt meteen dat t_{yz} en t_{xz} op $z = 0$ gelijk aan nul zijn.

Galerkin-functies

Volgens het theorema van Helmholtz (1.40) kunnen we de verplaatsingsvector u_i schrijven als

$$u_i = (1 - 2\nu)\, A_{,i} - 2(1 - \nu) e_{ijk} B_{k,j}\, , \text{ met } B_{k,k} = 0. \tag{1.99}$$

Volgens (1.39) kunnen we B_k dan schrijven als

$$B_k = e_{k\ell m}\, C^*_{m,\ell}. \tag{1.100}$$

Definiëren we

$$C_m := C^*_m + \varphi_{,m}\, , \; (\varphi\text{: willekeurig}) \tag{1.101}$$

dan geldt ook

$$B_k = e_{k\ell m}\, C_{m,\ell}. \tag{1.102}$$

Tevens is dan

$$C_{m,m} = C^*_{m,m} + \varphi_{,mm}\, . \tag{1.103}$$

Door φ zo te kiezen dat

$$\Delta\varphi = A - C^*_{m,m}\, , \tag{1.104}$$

krijgen we

$$C_{m,m} = A. \qquad (1.105)$$

Hiermee gaat (1.99) over in

$$u_i = (1 - 2\nu)\, C_{j,ji} - 2(1 - \nu) e_{ijk}\, e_{k\ell m}\, C_{m,\ell j} =$$

$$= - C_{j,ji} + 2(1 - \nu) C_{i,jj}. \qquad (1.106)$$

Substitutie van dit resultaat in de Navier-vergelijking (1.79) leidt tot de volgende vergelijking voor de Galerkin-functies C_i:

$$-C_{j,jikk} + 2(1 - \nu) C_{i,jjkk} + \frac{1}{(1 - 2\nu)} [-C_{j,jkki} + 2(1 - \nu) C_{k,jjki}] = 0$$

of

$$\Delta\Delta C_i = 0. \qquad (1.107)$$

Voor het bepalen van de Galerkin-functies moeten we dus deze bipotentiaalvergelijking oplossen.

Spanningsfuncties van Maxwell en Morera

Aan de evenwichtsvergelijkingen

$$t_{ij,j} = 0,$$

is triviaal te voldoen door de keuze

$$t_{ij} = e_{ipr} e_{jqs} F_{rs,qp} \, . \qquad (1.108)$$

De functies $F_{rs} = F_{sr}$ worden de spanningsfuncties genoemd. Deze spanningsfuncties zijn niet eenduidig, omdat de vergelijking

$$e_{ipr} e_{jqs} F^0_{rs,qp} = 0,$$

oplossingen heeft van de gedaante

$$F^0_{rs} = \Phi_{r,s} + \Phi_{s,r} \, .$$

Als wij van de tensor F_{rs} de componenten F_{12}, F_{13} en F_{23} nul kiezen, krijgen we de oplossing volgens Maxwell en nemen we F_{11}, F_{22} en F_{33} nul die volgens Morera. De aldus verkregen tensoren zijn echter nièt invariant tegen draaiing van het coördinatensysteem.

Met het uitgangspunt van Maxwell worden de uitdrukkingen voor de spanningen

$$t_{xx} = -(\frac{\partial^2 F_{22}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial y^2}), \quad t_{xy} = \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x \partial y}, \text{ etc.} \tag{1.109}$$

en bij Morera

$$t_{xx} = 2\,\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial y \partial z}\,, \quad t_{xy} = -\frac{\partial}{\partial z}\,(\frac{\partial F_{23}}{\partial x} + \frac{\partial F_{31}}{\partial y} - \frac{\partial F_{12}}{\partial z}), \text{ etc.} \tag{1.110}$$

De functies F_{rs} moeten verder voldoen aan de compatibiliteitsvergelijkingen voor de spanningen (1.32). Dit leidt er toe dat bij Maxwell:

$$\Delta\Delta F_{11} = \Delta\Delta F_{22} = \Delta\Delta F_{33} = 0, \tag{1.111}$$

en bij Morera

$$\Delta\Delta F_{12} = \Delta\Delta F_{13} = \Delta\Delta F_{23} = 0. \tag{1.112}$$

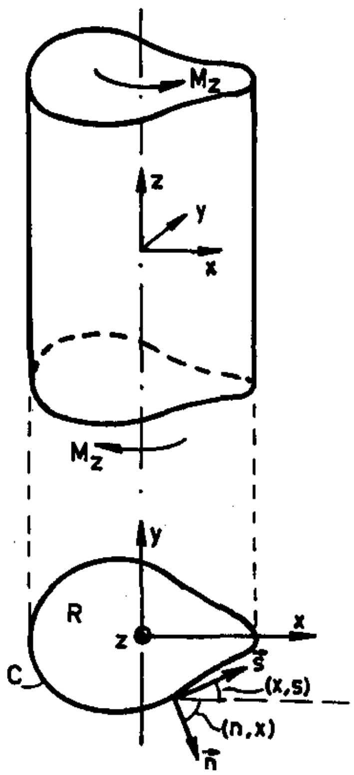
Voor meer uitgebreidere informatie over spanningsfuncties zij verwezen naar [6], pp. 334-336, en speciaal naar de daar genoemde literatuur.

Literatuur

[1] Collegedictaat Toegepaste Mechanica.
[2] Collegedictaat Wiskunde IVA.
[3] Kellog, Theory of Potentials.
[4] Günther, Potentialtheorie.
[5] Love, Mathematical Theory of Elasticity.
[6] Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity.
[7] Green & Zerna, Theoretical Elasticity.

II. Torsie van cylindrische staven

II.1. Probleemstelling (Zie [1], HVI en [2], H4)



We zoeken steeds exacte oplossingen. We maken daarom een aantal resticties:

a) de cylindermantel is onbelast;

b) de schuifspanningen op het eindvlak zijn "goed verdeeld" (d.w.z. volgens (2.03) en (2.22). Zie [1]. Een andere verdeling kan met deze slechts een evenwichtsbelasting verschillen, en deze laatste dempt volgens de Saint-Venant uit. (Zie ook HIV.7))

We nemen de z-as door de zwaartepunten van de doorsneden (niet-essentieel). Beschouw het enkelvoudig samenhangend gebied R met rand C.

$\vec{n}$ en $\vec{s}$: eenheidsvectoren.

$(x,n) = (n,x) =$ hoek tussen x-as en $\vec{n}$, etc.

Dan geldt:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos(x,s) = \sin(n,x) = -\cos(n,y) = -\frac{\partial y}{\partial n} \quad , \qquad (2.01)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \cos(y,s) = \sin(x,s) = \cos(x,n) = \frac{\partial x}{\partial n} \; . \qquad (2.02)$$

We gaan uit van de volgende aanname voor het spanningsveld

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0 \; . \qquad (2.03)$$

We zullen aantonen dat we met deze veronderstelling aan alle vergelijkingen kunnen voldoen, zodat, volgens de eenduidigheidsstelling van Kirchhoff, (2.03) een correct uitgangspunt is.

De eerste twee evenwichtsvergelijkingen worden hiermee

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0 \; . \qquad (2.04)$$

Hieruit volgt

$$t_{xz} = \bar{f}_1(x,y) \; ,$$
$$t_{yz} = \bar{f}_2(x,y) \; . \tag{2.05}$$

En de derde evenwichtsvergelijking geeft

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0 \; . \tag{2.06}$$

De randvoorwaarden op de <u>mantel</u> zijn

$$p_i = t_{ij} n_j = 0 \; ; \quad \vec{n} = (\cos(x,n), \; \cos(y,n), \; 0) \; .$$

Dit geeft in <u>x-ri</u>: $0 = 0$,

<u>y-ri</u>: $0 = 0$,

<u>z-ri</u>: $t_{zx} n_x + t_{zy} n_y = 0$,

of: $t_{zx} \cos(n,x) + t_{zy} \cos(n,y) = 0$. (2.07)

Dit systeem is statisch onbepaald, want we hebben één vergelijking met twee onbekenden (t_{xz}, t_{yz}).
We hebben nog een vergelijking nodig en wel de wet van Hooke

$$t_{xz} = 2G\, e_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \; ,$$
$$t_{yz} = 2G\, e_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \; . \tag{2.08}$$

Naar z differentiëren geeft met (2.04)

$$\frac{\partial}{\partial z} t_{xz} = 0 = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}\right) \; ,$$
$$\frac{\partial}{\partial z} t_{yz} = 0 = G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}\right) \; . \tag{2.09}$$

t_{xz} en t_{yz} substitueren in 3^e evenwichtsvergelijking (2.06):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \; . \tag{2.10}$$

Uit:

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = 0 \; ,$$

volgt

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0 \ ,$$

dus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ . \tag{2.11}$$

Dan geeft (2.09):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \ , \tag{2.12}$$

en (2.10):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ . \tag{2.13}$$

(2.12) integreren geeft, m.b.v. (2.11):

$$\begin{aligned} u &= f_1(y) + f_2(y)z \\ v &= g_1(x) + g_2(x)z \end{aligned} \tag{2.14}$$

Uit $t_{xy} = 0$ volgt met de wet van Hooke:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ . \tag{2.15}$$

(2.14) substitueren in (2.15) geeft

$$\frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dy} z + \frac{dg_1}{dx} + \frac{dg_2}{dx} z = 0 \ . \tag{2.16}$$

(2.16) moet gelden voor <u>alle</u> z, dus

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dy} + \frac{dg_1}{dx} &= 0 \ , \\ \frac{df_2}{dy} + \frac{dg_2}{dx} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Aan (2.17) is alleen te voldoen als

$$\begin{aligned} f_2 &= cy + a_2 \ , \quad g_2 = - cx + b_2 \ , \\ f_1 &= dy + a_1 \ , \quad g_1 = - dx + b_1 \ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dus

$$\begin{aligned} u &= dy + cyz + a_1 + a_2 z \\ v &= - dx - cxz + b_1 + b_2 z \ . \end{aligned}$$

De coëfficiënten a_1, b_1 en d geven alleen verplaatsingen als star lichaam.

We nemen deze nul. Noem $c = -\alpha$, zodat we krijgen

$$\begin{aligned} u &= -\alpha zy + a_2 z \ , \\ v &= \alpha zx + b_2 z \ . \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Volgens (2.11^3) moet

$$w = \alpha\Phi(x,y) - a_2 x - b_2 y + d_1 \ . \qquad (2.20)$$

a_2, b_2 en d_1 geven enkel starre-lichaamsverplaatsingen, zodat we deze nul kunnen nemen. (2.13) wordt dan:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \ . \qquad (2.21)$$

Voor de spanningen krijgen we uit (2.08)

$$\begin{aligned} t_{xz} &= G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right) \ , \\ t_{yz} &= G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right) \ . \end{aligned} \qquad (2.22)$$

De randvoorwaarde (2.07) uitgedrukt in Φ wordt:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)\cos(n,y) = 0 \ , \qquad (2.22a)$$

op de cylindermantel.

<u>Is het systeem (2.22) oplosbaar?</u>

Bekijk:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(n,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{d\Phi}{dn} \ . \qquad (2.23)$$

Hiermee wordt de randvoorwaarde:

$$\frac{d\Phi}{dn} = y\cos(n,x) - x\cos(n,y) \ . \qquad (2.24)$$

Het rechterlid van (2.24) is een gegeven functie bij een bekende rand.
Het probleem is dus herleid tot

$$\Delta\Phi = 0 \ , \qquad (2.25)$$

met $\frac{d\Phi}{dn}$ = voorgeschreven langs de rand.
Dit is een Neumann-probleem.

$\frac{d\Phi}{dn}$ integreren langs de rand:

$$\oint \frac{d\Phi}{dn}\, ds = \oint \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(n,y)\right]ds = \iint_R \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)dS = 0 \ .$$

De eis voor oplosbaarheid is dus:

$$\oint \frac{d\Phi}{dn} = \oint [y\cos(n,x) - x\cos(n,y)]ds = 0 \ ,$$

of

$$\oint \left[y\frac{dy}{ds} + x\frac{dx}{ds}\right]ds = \oint \frac{d}{ds}\left[\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]ds = 0 \ .$$

Het probleem is dus oplosbaar.

We gaan nu kijken naar $\iint_R t_{xz}\,dxdy$.

Deze moet nul zijn, omdat er geen resulterende dwarskracht is.

$$\iint_R t_{xz}\,dxdy = \iint_R G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)dxdy = \qquad \text{(met (2.21))}$$

$$= G\alpha \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)\right\}\right]dxdy =$$

$$= G\alpha \oint_C \left\{x\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)\cos(n,y)\right]\right\}ds = 0 \ .$$

Volgens randvoorwaarde (2.22a).

De schuifspanning t_{xz} volgens (2.22)[1] geeft dus geen resulterende dwarskracht.

Hetzelfde geldt voor t_{yz}.

Voor het torsiemoment vinden we

$$M_z = \iint_R (xt_{yz} - yt_{xz})dxdy =$$

$$= G\alpha \iint_R \left\{x^2 + y^2 + x\frac{\partial\Phi}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\}dxdy = D\alpha \ , \qquad (2.26)$$

waarbij D de torsiestijfheid is:

$$D := G \iint_R \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\Phi}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)dxdy \ . \qquad (2.27)$$

Uit fysische overwegingen volgt direct dat D > 0 moet zijn. We zullen bewijzen, dat daaraan inderdaad voldaan is.

Beschouw:

$$\iint_R \left(x\frac{\partial\Phi}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)dxdy = \iint_R \left[\frac{\partial(x\Phi)}{\partial y} - \frac{\partial(y\Phi)}{\partial x}\right]dxdy =$$

$$= -\oint_C \Phi[y\cos(n,x) - x\cos(n,y)]ds = \qquad \text{(met (2.24))}$$

$$= -\oint_C \Phi\frac{d\Phi}{dn}ds = \qquad \text{(met (1.51) in twee dimensies voor } A = B = \Phi)$$

$$= -\iint_R \Phi_{,k}\Phi_{,k}dxdy = -\iint_R \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right]dxdy \;.$$

Dus

$$\iint_R \left[x\frac{\partial\Phi}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = 0 \;. \tag{2.28}$$

(2.27) optellen bij (2.28) geeft:

$$D = G\iint_R \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)^2\right]dxdy \quad , \tag{2.29}$$

en dit is altijd ≥ 0 en alleen gelijk aan nul als

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -x \;,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = y \;,$$

wat onmogelijk is, omdat dan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) \;.$$

Dus bewezen: <u>D > 0</u>. q.e.d.

II.2. <u>Geconjugeerde functie en torsiefunctie</u>

Beschouw

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi = 0 \quad ,$$

en

$$\left(\frac{d\Phi}{dn}\right)_{rand} = \text{gegeven}, \qquad \text{(Neumann-probleem)}\,.$$

We voeren in de zgn. geconjugeerde functie $\Psi(x,y)$, welke zo gedefinieerd is, dat

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,. \tag{2.30}$$

Uit een bekende Φ is dan een Ψ te bepalen, terwijl

$$\Delta\Phi = 0, \quad \text{geeft} \quad \Delta\Psi = 0\,. \tag{2.31}$$

Uit (2.30) volgt

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(-\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{d\Psi}{ds}\,. \tag{2.32}$$

Dus voor de geconjugeerde functie wordt het torsieprobleem:

$$\Delta\Psi = 0\,,$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = f(\text{rand}) = y\cos(n,x) - x\cos(n,y) = y\frac{dy}{ds} + x\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\,\tfrac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Dus langs de rand c: $\Psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ + constante.
Aangezien we ons beperken tot <u>enkelvoudig</u> samenhangende doorsneden kunnen we de constante nul kiezen. We krijgen dan

$$\Delta\Psi = 0 \text{ met } \Psi = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \text{ langs de rand.} \tag{2.33}$$

Dit is een Dirichlet-probleem.
Formulering d.m.v. de <u>torsiefunctie</u> $F(x,y)$, die gedefinieerd wordt als

$$F(x,y) = \Psi(x,y) - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\,. \tag{2.34}$$

Dan geldt aan de rand C: $F = 0$.
En verder is

$$\Delta F = \Delta\Psi - 2 = -2. \tag{2.35}$$

De spanningen worden:

$$t_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right) = G\alpha\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} - y\right) = G\alpha\,\frac{\partial F}{\partial y}\,,$$

en

$$t_{yz} = -\,G\alpha\,\frac{\partial F}{\partial x}\,. \tag{2.36}$$

Voor het torsiemoment krijgen we

$$M = \iint_R (xt_{yz} - yt_{xz})dxdy = - G\alpha \iint_R (x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y})dxdy =$$

$$= - G\alpha \iint_R (\frac{\partial(xF)}{\partial x} + \frac{\partial(yF)}{\partial y})dxdy + 2G\alpha \iint_R F\, dxdy \ . \qquad (2.37)$$

Nu is

$$\iint_R (\frac{\partial(xF)}{\partial x} + \frac{\partial(yF)}{\partial y})dxdy = \oint_C F(x \cos(n,x) + y \cos(y,n))ds = 0 \ ,$$

want $F = 0$ langs C.

Dus

$$M = 2G\alpha \iint F\, dxdy \ . \qquad (2.38)$$

Toepassing

Ellipsvormige doorsnede C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Probeer

$$F = c(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1) \ .$$

Dan is $F = 0$ op rand C, en

$$\Delta F = c(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}) = -2 \Rightarrow c = \frac{-a^2b^2}{a^2+b^2} \ .$$

Dus

$$F = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) > 0 \ .$$

Torsiestijfheid voor ellips:

$$D = 2G \iint F\, dxdy = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2} \ .$$

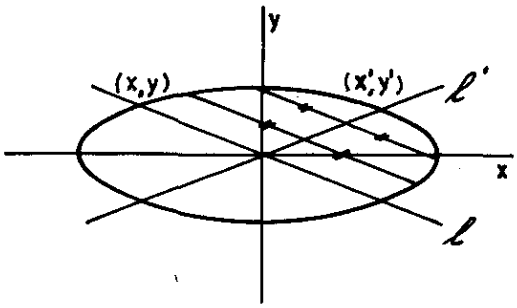
Opmerking: We zullen laten zien dat de grootste schuifspanningen bij een ellips aan de rand optreden.

Definieer

$$\tau = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2} \ .$$

Bij een ellips blijkt

$$\tau = \frac{2G\alpha}{a^2 + b^2} \sqrt{a^4y^2 + b^4x^2} \ .$$



Te bewijzen: langs ℓ is τ maximaal in randpunten (ℓ willekeurig).
ℓ': geconjugeerde van ℓ, ($x' = \frac{b}{a}x$, $y' = \frac{a}{b}y$).
Dan is:

$$\tau(x',y') = \frac{2G\alpha ab}{a^2+b^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} \ ,$$

dus τ maximaal als ($x'^2 + y'^2$) het grootst is, dus in de randpunten.

Stelling

Algemeen geldt: τ bereikt maximum aan de rand.

Bewijs:

$$\tau = G\alpha\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \ ,$$

dus

$$\tau^2 = G^2\alpha^2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right] \ .$$

Dan is

$$\Delta\tau^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tau^2 = 2G^2\alpha^2 \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2\right] > 0 \ .$$

Een functie Φ waarvoor $\Delta\Phi > 0$ heet een subharmonische functie. Nu geldt: een subharmonische functie heeft maximum een rand. Bewijs:
Stel: maximum in inwendig punt (x_0,y_0).
Dan is

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \ , \qquad \text{in } (x_0,y_0) \ .$$

$\Phi(x,y)$ ontwikkelen om (x_0,y_0):

$$\Phi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \Phi(x_0,y_0) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0(\Delta x)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_0 \Delta x\Delta y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_0(\Delta y)^2 + 0(\Delta x)^3) \ .$$

Hieruit volgt dat de conditie voor een maximum is:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2 > 0 \ ,$$

en

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} < 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} < 0 \ .$$

Uit

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} > 0 \quad , \quad \text{(subharmonisch)} \ ,$$

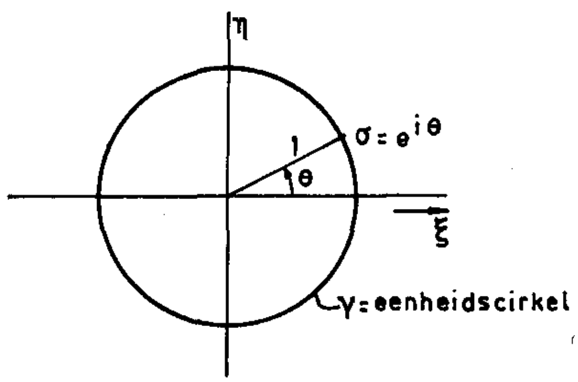
volgt

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} > -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \ .$$

Dus stel $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} < 0$, dan $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} > 0$, dus geen maximum in inwendig. Hiermee is bewezen dat het maximum op de rand moet liggen.

II.3. Conforme afbeeldingen (Zie [2], pp. 137-165)

Theorema van Harnack:



Laat $f(\sigma)$ en $\varphi(\sigma)$ continue reële functie zijn van σ, gedefinieerd op de eenheidscirkel γ.

Als

$$\int_\gamma \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma - \zeta} = \int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{\sigma - \zeta}\ , \tag{2.39}$$

voor alle ζ binnen γ, dan is $f(\sigma) = \varphi(\sigma)$, terwijl (2.39) voor alle ζ buiten γ, geeft

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma) + \text{const.}\ .$$

Voor het bewijs van deze stelling zie bijv. [2], §41.

Dirichlet-probleem op eenheidscirkel

Beschouw een functie $u(\zeta)$, $(\zeta = \xi + i\eta)$, waarvoor geldt:

$$\Delta u = 0 \quad \text{binnen } \gamma, \quad \text{en} \quad u = f(\sigma) \quad \text{op } \gamma, \quad f(\sigma)\text{: Hölder-continu.}$$

Omdat $\Delta u = 0$ bestaat de geconjugeerde functie $v(\zeta)$ met de eigenschappen:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \eta}\ , \ \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \text{en} \quad \Delta v = 0\ .$$

Noem

$$F(\zeta) := u(\zeta) + iv(\zeta)\ .$$

Definieer:

$$F(\bar{\zeta}) := u(\bar{\zeta}) + iv(\bar{\zeta}),\ \bar{\zeta} := \xi - i\eta\ ,$$

en

$$\bar{F}(\zeta) := \overline{F(\bar{\zeta})} := u(\bar{\zeta}) - iv(\bar{\zeta})\ .$$

Dus

$$\bar{F}(\bar{\zeta}) = u(\zeta) - iv(\zeta)\ .$$

Op γ geldt dan de volgende relatie

$$F(\sigma) + \bar{F}(\bar{\sigma}) = 2f(\sigma)\ .$$

Deze relatie vermenigvuldigen met: $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ en integreren langs de eenheidscirkel geeft

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\sigma)d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{F}(\bar{\sigma})}{\sigma - \zeta}\,d\sigma = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma\ , \tag{2.40}$$

welke vergelijking volgens het theorema van Harnack equivalent is met de vorige.

Volgens de residustelling (zie [2] of [3])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = F(\zeta)\ .$$

$F(\sigma)$ ontwikkelen om $\sigma = 0$ geeft:

$$F(\sigma) = F(0) + F'(0)\sigma + \tfrac{1}{2}F''(0)\sigma^2 + \ldots\ ,$$

$$\bar{F}(\sigma) = \overline{F(\bar{\sigma})} = \overline{F(0)} + \overline{F'(0)\bar{\sigma}} + \ldots = \bar{F}(0) + \bar{F}'(0)\sigma + \ldots\ ,$$

en dus

$$\bar{F}(\bar{\sigma}) = \bar{F}(0) + \bar{F}'(0)\,\frac{1}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\bar{F}''(0)\,\frac{1}{\sigma^2} + \ldots \qquad (\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma})\ .$$

Dan wordt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{F}(\bar{\sigma})d\sigma}{\sigma-\zeta} = \bar{F}(0)\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \bar{F}'(0)\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)} + \ldots =$$

$$= \bar{F}(0) + \bar{F}'(0)0 + \bar{F}''(0)0 + \ldots = \bar{F}(0)\ , \qquad (2.42)$$

want

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma^n(\sigma-\zeta)} = \begin{cases} 0, \text{ als } n > 0\ , \\ 1, \text{ als } n = 0\ . \end{cases}$$

(2.41) en (2.42) substitueren in (2.40) geeft

$$F(\zeta) + \bar{F}(0) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\ , \quad (= \text{bekende functie van } \zeta). \qquad (2.43)$$

Stel

$$F(0) = u(0) + iv(0) = a_0 + ib_0\ ,$$

dan

$$\bar{F}(0) = a_0 - ib_0\ ,$$

dus

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} - a_0 + ib_0\ . \qquad (2.44)$$

(2.44) voor $\zeta = 0$ geeft:

$$F(0) = a_0 + ib_0 = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma} - a_0 + ib_0\ .$$

Hieruit volgt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma} .$$

Dus

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\sigma) \frac{(\sigma + \zeta)}{(\sigma - \zeta)} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + ib_0 . \tag{2.45}$$

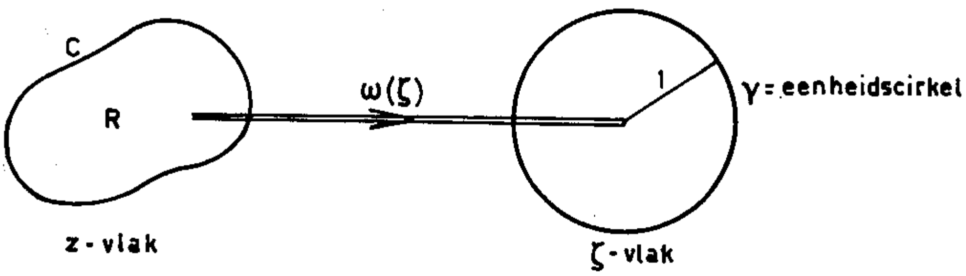
b_0 blijft onbepaald, want v is slechts bepaald op een constante na.
Dus voor gegeven $f(\sigma)$ is $F(\zeta)$ te bepalen uit (2.45).
Noem

$$\zeta = \rho e^{i\psi} , \quad \sigma = e^{+i\theta} ,$$

dan geeft (2.45):

$$u = \text{Re } F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho^2)\, f(e^{i\theta})d\theta}{1 - 2\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2} . \tag{2.46}$$

M.b.v. deze twee vergelijkingen kunnen we alle torsieproblemen, voor enkelvoudig samenhangende doorsneden, oplossen.



Volgens de conforme-afbeeldingsstelling van Riemann kunnen we een enkelvoudig samenhangend, twee-dimensionaal gebied afbeelden op de eenheidscirkel door middel van $z = \omega(\zeta)$. (Zie bijv. [2], § 43, of [3], H VII.2.)
We combineren de welvingsfunctie $\Phi(x,y)$ (volgens (2.20)) met zijn geconjugeerde $\Psi(x,y)$ (volgens (2.30)) tot de functie

$$F(z) := \Phi + i\Psi , \qquad z = x + iy .$$

Volgens (2.33) moet aan de rand C gelden

$$\Psi = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = \tfrac{1}{2}(x + iy)(x - iy) = \tfrac{1}{2} z\bar{z} .$$

Afbeelden op het ζ-vlak geeft

$$F(z) = F(\omega(\zeta)) =: f(\zeta) ,$$

of

$$f(\zeta) = \Phi(\omega(\zeta)) + i\Psi(\omega(\zeta)) =: \varphi(\zeta) + i\psi(\zeta) \ .$$

Dus langs de eenheidscirkel γ geldt

$$\mathrm{Re}[\tfrac{1}{i} f(\sigma)] = \psi(\sigma) = \tfrac{1}{2} z\bar{z} = \tfrac{1}{2} \omega(\sigma)\ \bar{\omega}(\bar{\sigma}) \ .$$

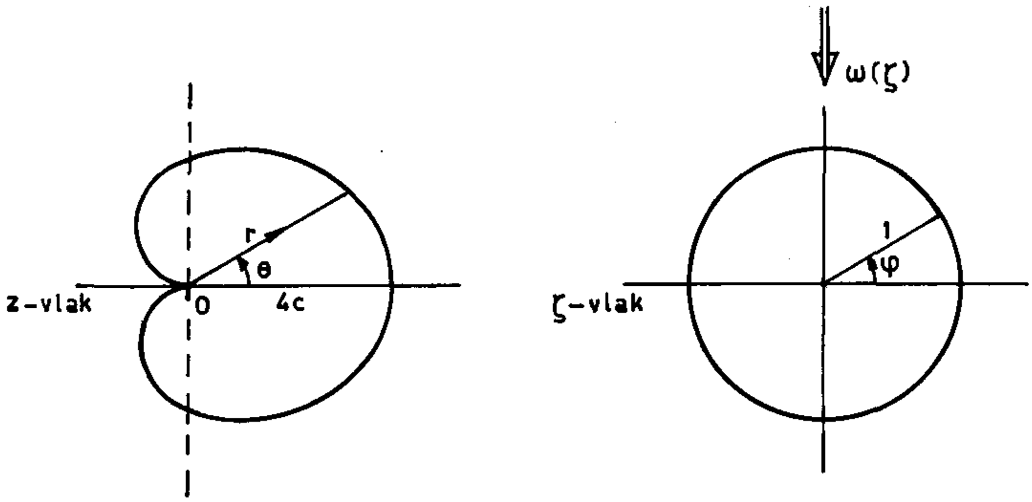
Dit is een speciaal geval van (2.44), met $F(\zeta) \Rightarrow \frac{1}{i} f(\zeta)$, $u \Rightarrow \psi$ en $f(\sigma) \Rightarrow \frac{1}{2}\omega(\sigma)\ \bar{\omega}(\bar{\sigma})$, zodat we krijgen

$$\frac{1}{i} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega(\sigma)\ \bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\sigma - \zeta}\, d\sigma - a_0 + ib_0 \ . \qquad (2.47)$$

Dus

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\omega(\sigma)\bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\sigma - \zeta}\, d\sigma + \text{const.} = \varphi(\zeta) + i\psi(\zeta) \ . \qquad (2.48)$$

Voorbeeld



Cardioïde: $r = 2c(1 + \cos\theta)$.

De afbeelding is: $z = \omega(\zeta) = c(1 + \zeta)^2$.

Bewijs:

$$z = x + iy = c(1 + \zeta)^2 = c(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^2 =$$

$$= c[(1 + \cos\varphi)^2 - \sin^2\varphi] + 2ic(1 + \cos\varphi)\sin\varphi \ .$$

Dus

$$x = c(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) =$$

$$= c(4\cos^4(\varphi/2) - 4\sin^2(\varphi/2)\cos^2(\varphi/2)) .$$

$$y = 2c\sin\varphi(1 + \cos\varphi) = c$$

$$= c(4\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) \,.\, 2\cos^2(\varphi/2)) .$$

Geeft:

$$r^2 = x^2 + y^2 = 16c^2\cos^4(\varphi/2) = [2c(1 + \cos\varphi)]^2$$

of

$$r = 2c(1 + \cos\varphi) = \text{cardioide.}$$

Dus

$$\omega(\sigma)\bar{\omega}(\tfrac{1}{\sigma}) = c^2(1 + \sigma)^2(1 + \tfrac{1}{\sigma})^2 = \frac{c^2(1 + \sigma)^4}{\sigma^2} .$$

(2.48) geeft hiermee:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{c^2(1 + \sigma)^4}{\sigma^2(\sigma - \zeta)}\,d\sigma + \text{const.} = ic^2(\zeta^2 + 4\zeta + 6) + \text{const.}$$

Nu is

$$\zeta = \sqrt{\frac{z}{c}} - 1 .$$

Dit geeft

$$F(z) = f(\omega^{-1}(z)) = ic^2(\frac{z}{c} + 2\sqrt{\frac{z}{c}} + 3) + \text{const.}$$

$z = x + iy$ en $F = \Phi + i\Psi$ geven dan Φ en Ψ.

Literatuur.

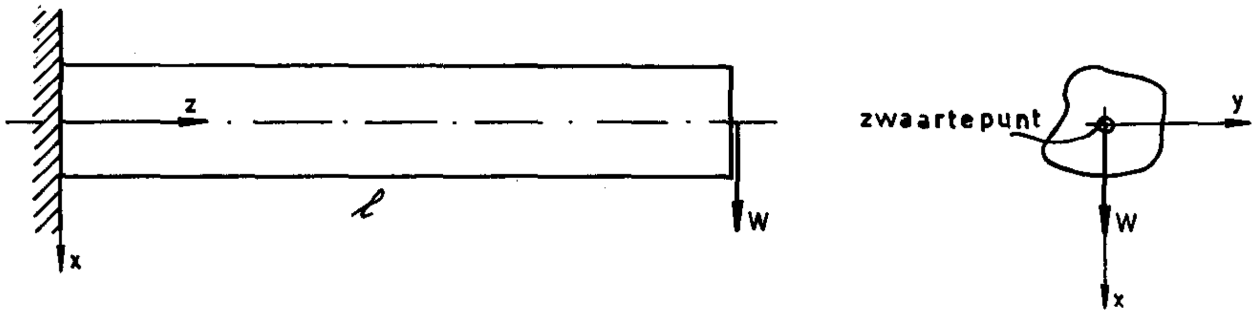
[1] Collegedictaat Toegepaste Mechanica.

[2] Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity.

[3] Collegedictaat Wiskunde V.

III. Buiging van cylindrische staven (Zie [1], H. VII., [2], H. 4, of [3], H. V., XV-XVII)

III.1. Buigingstheorie



Opmerkingen:

1) We beschouwen de balk belast door een dwarskracht W aangrijpend in de einddoorsnede $z = \ell$.
2) We kiezen de x- en de y-as langs hoofdtraagheidsassen van de doorsnede en W langs de x-richting. Dit is geen essentiële beperking, want een kracht langs de y-as geeft een analoog probleem. We kunnen dus een willekeurige kracht ontbinden langs de x- en de y-as en deze twee problemen afzonderlijk oplossen. Omdat we werken met lineaire theorieën kunnen we daarna beide resultaten superponeren.
3) We laten W aangrijpen in het zwaartepunt van de doorsnede. Als dit niet het geval is kunnen we W verplaatsen met invoering van een torsiemoment.

We proberen de volgende spanningsverdeling (welke we hierna als juist zullen aantonen (Kirchhoff)):

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0 \ , \tag{3.01}$$

$$t_{zz} = -\frac{Mx}{I} = -\frac{W(\ell - z)x}{I} \ , \tag{3.02}$$

waarbij

$$M = \text{buigend moment in doorsnede } z = W(\ell - z) \ ,$$

en

$$I = \int_S x^2 dS \ .$$

De evenwichtsvergelijkingen worden dan:

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0 \ , \tag{3.03}$$

en

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{Wx}{I} = 0 \ . \tag{3.04}$$

Randvoorwaarden: spanningen statisch equivalent met W en de mantel is spanningsvrij.

Schrijf 3^e evenwichtsvergelijking (3.04) als:

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(t_{yz} + \frac{Wxy}{I}\right) = 0 \ . \tag{3.05}$$

Dan bestaat er een functie F(x,y) zodanig dat

$$t_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \ ; \qquad t_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{Wxy}{I} \ , \tag{3.06}$$

waarmee triviaal aan de evenwichtsvergelijkingen voldaan is.

Compatibiliteitsvergelijkingen in de spanningen (1.32) luiden hier

$$\begin{aligned} \Delta t_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(t_{xx} + t_{yy} + t_{zz}) &= 0 \ , \\ \Delta t_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial y \partial z}(t_{xx} + t_{yy} + t_{zz}) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.07}$$

De overige geven identiek nul.

Met de aannamen voor de spanningen, krijgen we uit (3.07):

$$\begin{aligned} \Delta t_{yz} &= 0 \ , \\ \Delta t_{xz} + \frac{1}{(1+\nu)}\frac{W}{I} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.08}$$

(3.06) substitueren in (3.08) geeft:

$$\begin{aligned} &\Delta\left(-\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{Wxy}{I}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\Delta F = 0 \ , \\ &\Delta \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{(1+\nu)}\frac{W}{I} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\Delta F = -\frac{W}{(1+\nu)I} \ . \end{aligned} \tag{3.09}$$

(3.09) integreren geeft:

$$\Delta F = -\frac{Wy}{(1+\nu)I} - 2G\alpha \ , \tag{3.10}$$

waarbij α een constante is, welke bepaald wordt uit de conditie dat W door het zwaartepunt gaat.

Er geldt:

$$- \frac{Wy}{(1+\nu)I} - 2G\alpha = \Delta[- \frac{W}{2(1+\nu)I} \{\tfrac{1}{2} \nu x^2 y + (1 - \frac{\nu}{2}) \frac{y^3}{3}\} +$$

$$- \tfrac{1}{2} G\alpha(x^2 + y^2)] =: \Delta P \ , \qquad (P := [\ldots]) \ . \tag{3.11}$$

Geeft

$$\Delta(F - P) = 0 \ .$$

Voer in $\psi_1(x,y)$ door

$$\psi_1 := F - P, \Rightarrow \Delta\psi_1 = 0 \ , \qquad (\psi_1 : \text{harmonisch}) \ .$$

Dus

$$F = \psi_1 - \frac{W}{2(1+\nu)I} [\tfrac{1}{2} \nu x^2 y + (1 - \frac{\nu}{2}) \frac{y^3}{3}] - \frac{G\alpha}{2} (x^2 + y^2) \ . \tag{3.12}$$

Noem $\varphi_1(x,y)$ de geconjugeerde van $\psi_1(x,y)$:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = - \frac{\partial\psi_1}{\partial x} \ .$$

Dan is ook

$$\Delta\varphi_1 = 0 \ . \tag{3.13}$$

(3.06) wordt nu

$$t_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - G\alpha y - \frac{W}{2(1+\nu)I} [\tfrac{1}{2} \nu x^2 + (1 - \frac{\nu}{2})y^2] \ , \tag{3.14}$$

en

$$t_{yz} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + G\alpha x - \frac{W(2+\nu)}{2(1+\nu)I} xy \ . \tag{3.15}$$

Stel

$$\varphi_1 = G\alpha\varphi - \frac{W}{2(1+\nu)I} \chi \ , \quad \text{met } \Delta\varphi = \Delta\chi = 0 \ . \tag{3.16}$$

Dan worden (3.14) en (3.15):

$$\begin{aligned} t_{xz} &= G\alpha(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y) - \frac{W}{2(1+\nu)I} \{\frac{\partial\chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2} \nu x^2 + (1 - \frac{\nu}{2})y^2\} \ , \\ t_{yz} &= G\alpha(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x) - \frac{W}{2(1+\nu)I} \{\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2 + \nu)xy\} \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

En verder was

$$t_{zz} = - \frac{W(\ell - z)}{I} x .$$

φ en χ zijn harmonische functies, die volgen uit de randvoorwaarde:

$$t_{xz} \cos(n,x) + t_{yz} \cos(n,y) = 0 , \quad \text{aan de mantel} . \tag{3.18}$$

Stel

$$t = t^{(1)}(\varphi) + t^{(2)}(\chi) ,$$

en eis, dat zowel $t^{(1)}$ als $t^{(2)}$ aan bovenstaande randvoorwaarde voldoet.
Dus stel

$$t_{xz}^{(1)} := G\alpha(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y) , \quad t_{xz}^{(1)} := - \frac{W}{2(1+\nu)I} \{\frac{\partial\chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2} \nu x^2 + (1 - \frac{\nu}{2})y^2\} ,$$

$$t_{yz}^{(1)} := G\alpha(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x) , \quad t_{yz}^{(2)} := - \frac{W}{2(1+\nu)I} \{\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\nu)xy\}, \tag{3.19}$$

$$t_{zz}^{(1)} := 0 , \quad t_{zz}^{(2)} := - \frac{W(\ell - z)}{I} x .$$

We hebben dan de volgende twee problemen:

(i) Torsieprobleem (opgelost in H. II.)

$$\Delta\varphi = 0 ,$$

met

$$(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)\cos(n,x) + (\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x)\cos(n,y) = 0 ,$$

langs de rand.

(ii) Buigingsprobleem: $\Delta\chi = 0$, (3.20)

met als randvoorwaarde:

$$[\frac{\partial\chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2} \nu x^2 + (1 - \frac{\nu}{2})y^2]\cos(n,x) + [\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\nu)xy]\cos(n,y) = 0 ,$$

of

$$\frac{d\chi}{dn} = - [\tfrac{1}{2} \nu x^2 + (1 - \frac{\nu}{2})y^2]\cos(n,x) - (2+\nu)xy \cos(n,y) . \tag{3.21}$$

Aan de eis voor oplosbaarheid: $\oint \frac{d\chi}{dn} ds = 0$, is hier voldaan, immers

$$\oint \frac{d\chi}{dn}\, ds = \oint \{-[\tfrac{1}{2}\, \nu x^2 + (1 - \tfrac{\nu}{2})y^2]n_x - [(2 + \nu)xy]n_y\}ds =$$

$$= \iint_S \{\frac{\partial}{\partial x}[-\tfrac{1}{2}\, \nu x^2 - (1 - \tfrac{\nu}{2})y^2] - \frac{\partial}{\partial y}[(2 + \nu)xy]\}dS = -2(1 + \nu)\iint_S x\, dS = 0 ,$$

want de x-as gaat door het zwaartepunt.

Het probleem is dus gesplitst in een torsie- en een buigingsprobleem. De nog onbekende α volgt uit het feit dat W door het zwaartepunt gaat, zodat het wringend moment om het zwaartepunt nul is, wat met (2.26) leidt tot de betrekking

$$G\alpha \iint_R (x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x})dxdy +$$
$$+ \frac{W}{2(1 + \nu)I}\iint_R [y\frac{\partial\chi}{\partial x} - x\frac{\partial\chi}{\partial y} - (1 - \frac{\nu}{2})y^3 - (2 + \frac{\nu}{2})x^2 y]dxdy = 0 , \tag{3.22}$$

en hieruit volgt α (φ en χ bekend).
Hiermee is in principe dit probleem opgelost.
Voor de verplaatsingen krijgen we met de wet van Hooke uit (3.17)

$$u = -\alpha zy + \frac{W}{EI}\{\tfrac{1}{2}\,\nu(\ell - z)(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{2}\,\ell z^2 - \frac{1}{6}z^3\},$$
$$v = \alpha xz + \frac{W}{EI}\{\nu(\ell - z)xy\} , \tag{3.23}$$
$$w = \alpha\varphi - \frac{W}{EI}\{\chi + x(\ell z - \frac{z^2}{2}) + xy^2\} ,$$

afgezien van starre lichaamsverplaatsingen.

Vergelijking met de elementaire theorie: (Zie [1], H. VII.)
Neutrale vlak, is het vlak waarvoor geldt:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = x(\ell - z) = 0 \Rightarrow x = 0 .$$

Op de centrale lijn (0,0,z) zijn de verplaatsingen:

$$x' = u = \frac{W}{EI}\left(\tfrac{1}{2}\,\ell z^2 - \frac{z^3}{6}\right)$$

$$y' = v = 0 \tag{3.24}$$

$$z' = w + z = z + \alpha\varphi(0,0) - \frac{W}{EI}\,\chi(0,0)\ .$$

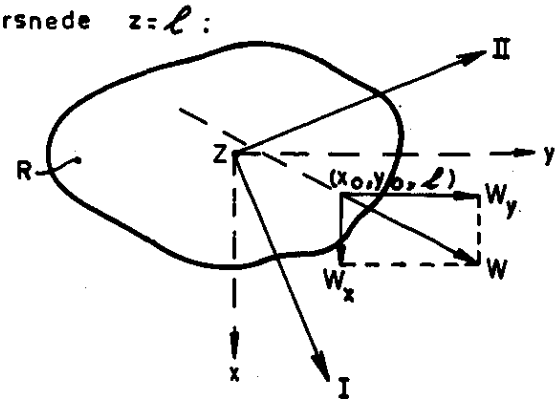
(x',y',z') zijn de coördinaten van de centrale lijn na de deformatie.
Voor de kromming van de centrale lijn geldt dan:

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2u}{dz'^2} = (\ell - z)\frac{W}{EI} = \frac{M}{EI}\ . \tag{3.25}$$

Dus de uitdrukking voor de kromming van de centrale lijn in de technische (Bernoulli) theorie komt overeen met de exacte uitdrukking.

III.2. Dwarskrachtenmiddelpunt

Doorsnede $z = \ell$:



I, II : hoofdtraagheidsassen.

Laat W aangrijpen in (x_0,y_0). Dan is het torsiemoment t.o.v. Z

$$M_z = x_0W_y - y_0W_x\ , \quad \text{(zie figuur)}\ , \tag{3.26}$$

en dit is tevens gelijk aan

$$M_z = \iint\limits_R (xt_{yz} - yt_{xz})\,dxdy\ . \tag{3.27}$$

We schrijven de spanningen (vergelijk III.1) als:

$$t = \alpha t^{(1)} + t^{(2)} , \qquad (t^{(1)} \text{ en } t^{(2)} \text{ onafhankelijk van } \alpha) .$$

Substitueren in (3.27) geeft

$$M_z = \alpha \iint_R (xt^{(1)}_{yz} - yt^{(1)}_{xz})dxdy + \iint_R (xt^{(2)}_{yz} - yt^{(2)}_{xz})dxdy . \qquad (3.28)$$

Definieer x_D en y_D door

$$\iint_R (xt^{(2)}_{yz} - yt^{(2)}_{xz})dxdy = x_D W_y - y_D W_x . \qquad (3.29)$$

We noemen x_D, y_D de coördinaten van dwarskrachtenmiddelpunt D.

Uit (3.28) volgt dan met (3.26) en (3.29):

$$\alpha \iint_R (xt^{(1)}_{yz} - yt^{(1)}_{xz})dxdy = (x_0 - x_D)W_y - (y_0 - y_D)W_x . \qquad (3.30)$$

Dus als $x_0 = x_D$ en $y_0 = y_D$, dan is de totale torsiehoek α gelijk aan nul.
Dus bij W door D: "torsievrije" buiging.
We hebben nu dus gedefinieerd: torsievrij als $\alpha = 0$. Wat houdt dit in?
Beschouw de locale rotaties

$$\omega_z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) . \qquad (3.31)$$

Deze ω_z is van punt tot punt variabel, dus in het algemeen is niet ω_z overal nul te krijgen.
Nu is

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} e_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} e_{xz}\right) = \frac{1}{2G}\left(\frac{\partial t_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial t_{xz}}{\partial y}\right) . \qquad (3.32)$$

Als W valt langs I (x langs I) dan wordt (3.32) met (3.06)

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2G}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{Wy}{I} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = \frac{-1}{2G}\left(\Delta F + \frac{Wy}{I}\right) = ((3.10))$$

$$= \frac{-1}{2G}\left(\frac{Wy}{(1+\nu)I} - 2G\alpha + \frac{Wy}{I}\right) = \alpha - \frac{\nu}{2G(1+\nu)}\frac{Wy}{I} \; . \tag{3.33}$$

Dan is

$$\iint_R \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\,dxdy = \alpha S - 0 = \alpha S \quad \text{, (want y door Z).}$$

Dus

$$\alpha = \overline{\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right)} = \text{gemiddelde } \left(\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right) \text{ over doorsnede.}$$

Hieruit volgt: $\alpha = 0$ betekent:

$$\frac{1}{S}\iint_R \left(\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right)dxdy = 0 \; . \tag{3.34}$$

Dus "torsievrij" betekent hier dat de gemiddelde draaiing per lengte-eenheid om de z-as nul is (definitie I).

N.B. Symmetrie-eigenschap: als de doorsnede een lijn van symmetrie heeft, ligt D op deze lijn.

Andere definitie (II) van "torsievrij": we noemen de buiging torsievrij als de totale arbeid (A) kan worden gescheiden in de arbeid t.g.v. de buiging (A_b) en de arbeid t.g.v. de torsie (A_t): $A = A_b + A_t$ (dus geen koppeling). Deze definitie geeft het dwarskrachtenmiddelpunt volgens Trefftz [4].
Neem W langs I (x langs I), dan

$$t_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \; , \quad t_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{Wxy}{I} \; ,$$

en

$$\Delta F = -\frac{Wy}{(1+\nu)I} + C.$$

Vroeger hadden we C genoemd: $-2G\alpha$.
Nu noemen we

$$C = \frac{W\beta}{(1+\nu)I} - 2G\alpha^* \; , \tag{3.35}$$

β : nog onbekende parameter.

Dus

$$\Delta F = -\frac{W(y-\beta)}{(1+\nu)I} - 2G\alpha^* \ . \tag{3.36}$$

Stel

$$F = f_1\alpha^* + F_2 = F_1 + F_2 \ , \qquad (F_1 \sim \alpha^*) \ ,$$

met

$$\begin{aligned} &\Delta f_1 = -2G \ , \implies \Delta F_1 = -2G\alpha^* \ , \\ &\Delta F_2 = -\frac{W(y-\beta)}{(1+\nu)I} \ . \end{aligned} \tag{3.37}$$

En stel

$$t_{xz} = t^{(1)}_{xz}(F_1) + t^{(2)}_{yz}(F_2) \ , \qquad \text{(en analoog } t_{yz}) \ .$$

Dus

$$t^{(1)}_{xz} := \frac{\partial F_1}{\partial y} \ , \qquad t^{(1)}_{yz} := -\frac{\partial F_1}{\partial x} \ , \tag{3.38}$$

$$t^{(2)}_{xz} := \frac{\partial F_2}{\partial y} \ , \qquad t^{(2)}_{yz} := -\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{Wxy}{I} \ . \tag{3.39}$$

<u>Definitie</u>: zuivere buiging is de oplossing van stelsel (2), mits β "goed gekozen" is.
Onder β "goed gekozen" verstaan we: β zodanig dat $A = A_b + A_t$.

Randvoorwaarde: mantel spanningsvrij:

$$t_{xz}\cos(n,x) + t_{yz}\cos(n,y) = 0 \ .$$

We zullen hieraan onafhankelijk voldoen (voor 1 en 2) door aan de rand te nemen

$$F_1 = 0$$

$$\frac{dF_2}{ds} = -\frac{W}{I}\,xy\,\frac{dx}{ds} \ . \tag{3.40}$$

De totale arbeid is volgens $(1.24)^2$

$$A = \frac{1}{2E}\int_V t^2_{zz}\,dV + \frac{\ell}{4G}\iint_R \left\{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{Wxy}{I}\right)^2\right\}dxdy \ . \tag{3.41}$$

De torsie-arbeid (alleen F_1):

$$A_t = \frac{\ell}{4G} \iint_R \{(\frac{\partial F_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F_1}{\partial y})^2\}dxdy \ . \tag{3.42}$$

En de buigingsarbeid (alleen F_2):

$$A_b = \frac{1}{2E} \int_V t_{zz}^2 dV + \frac{\ell}{4G} \iint_R \{(\frac{\partial F_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{Wxy}{I})^2\}dxdy \ . \tag{3.43}$$

Nu moet (eis voor β): $A = A_t + A_b$ of $A - A_t - A_b = 0$.
Dus moet

$$\iint_R \{\frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial x} (\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{Wxy}{I})\}dxdy = 0 \ . \tag{3.44}$$

We definiëren

$$\bar{F}_2 := F_2 + \frac{Wx^2y}{2I} \ . \tag{3.45}$$

Dan is

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x} - \frac{Wxy}{I} \Longrightarrow t_{yz}^{(2)} = - \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x} \ , \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y} - \frac{Wx^2}{2I} \Longrightarrow t_{xz}^{(2)} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y} - \frac{Wx^2}{2I} \ , \tag{3.47}$$

en

$$\Delta\bar{F}_2 = \Delta F_2 + \frac{Wy}{I} = - \frac{W(y - \beta)}{(1 + \nu)I} + \frac{Wy}{I} \ ,$$

of

$$\Delta\bar{F}_2 = \frac{W}{I} \cdot \frac{\nu}{(1 + \nu)} (y - \bar{\beta}) \ , \quad \text{met} \quad \bar{\beta} = - \frac{\beta}{\nu} \ . \tag{3.48}$$

De randvoorwaarde voor $\bar{F}_2$ (3.40), wordt

$$\frac{d\bar{F}_2}{ds} = \frac{Wx^2}{2I} \cdot \frac{dy}{ds} \ . \tag{3.49}$$

Hiermee wordt de conditie voor $\bar{\beta}$ (3.44):

$$\iint_R \{\frac{\partial F_1}{\partial y} (\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y} - \frac{Wx^2}{2I}) + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x}\}dxdy = 0 \ . \tag{3.50}$$

Nu is $\quad -\frac{W}{2I}\iint\limits_R \frac{\partial F_1}{\partial y} x^2 dxdy = -\frac{W}{2I}\int x^2 \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} dy\ dx =$

$$= -\frac{W}{2I}\int x^2\ F_1(\text{rand})\ dx = 0\ . \quad (\text{uit } (3.40)) \tag{3.51}$$

Hiermee wordt de eis voor $\bar{\beta}$:

$$\iint\limits_R \left\{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y}\right\} dxdy = 0\ . \tag{3.52}$$

of $\quad \iint\limits_R (\text{grad } F_1 . \text{grad } \bar{F}_2) dxdy = \iint\limits_R \text{div}(F_1 . \text{grad } \bar{F}_2) dxdy - \iint\limits_R F_1 \Delta \bar{F}_2\ dxdy =$

$$= \oint\limits_C F_1 \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial n} ds - \iint\limits_R F_1 \Delta \bar{F}_2\ dxdy = -\iint\limits_R F_1 \Delta \bar{F}_2\ dxdy = 0\ . \tag{3.53}$$

Substitutie van (3.48) in (3.53) geeft

$$\bar{\beta} = \iint\limits_R F_1 y\ dxdy \Big/ \iint\limits_R F_1\ dxdy\ . \quad (F_1 \text{ is bekend: torsie-probleem}) \tag{3.53}$$

F_1 is evenredig met α^* en dus is $\bar{\beta}$ onafhankelijk van α^*.

Verder is $\iint\limits_R F_1\ dxdy$ altijd $= \frac{M}{2G\alpha^*} \neq 0$, (zie (2.38)).

Volgens (3.29) is (want W valt langs de x-as):

$$Wy_D = -\iint\limits_R [x t_{yz}^{(2)} - y t_{xz}^{(2)}] dxdy = \iint\limits_R [x \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x} + y\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y} - \frac{Wx^2 y}{2I}] dxdy\ .$$

We schrijven $\bar{F}_2$ als $\bar{F}_2 = \bar{F}_2' + \bar{F}_2''$, met

$$\Delta \bar{F}_2' = 0 \quad \text{en} \quad \frac{d\bar{F}_2'}{ds} = \frac{Wx^2}{2I}\frac{dy}{ds} \text{ langs C ,}$$

$$\Delta \bar{F}_2'' = \frac{\nu W}{(1+\nu)I}(y - \bar{\beta}) \quad \text{en} \quad \bar{F}_2'' = 0 \quad \text{langs C .}$$

Dan krijgen we

$$Wy_D = \iint\limits_R [x\frac{\partial \bar{F}_2'}{\partial x} + y\frac{\partial \bar{F}_2'}{\partial y} - \frac{Wx^2 y}{2I}] dxdy + \iint\limits_R [x\frac{\partial \bar{F}_2''}{\partial x} + y\frac{\partial \bar{F}_2''}{\partial y}] dxdy\ .$$

De laatste integraal is nul, want (met (3.37[1]) en (3.40[1]))

$$-\iint_R [x\frac{\partial\bar{F}_2''}{\partial x} + y\frac{\partial\bar{F}_2''}{\partial y}]dxdy = 2\iint_R \bar{F}_2''\,dxdy = \frac{-2}{2G\alpha^*}\iint_R \bar{F}_2''\Delta F_1\,dxdy =$$

$$= -\frac{1}{G\alpha^*}\{\iint_R F_1\Delta\bar{F}_2''\,dxdy + \oint_C (\bar{F}_2''\frac{dF_1}{dn} - F_1\frac{d\bar{F}_2''}{dn})ds\} =$$

$$= -\frac{1}{G\alpha^*}\frac{\nu W}{(1+\nu)I}\iint_R F_1(y-\bar{\beta})dxdy = 0\ ,$$

volgens (3.54).
Dus

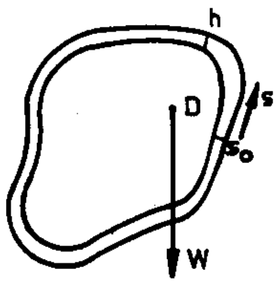
$$y_D = \frac{1}{W}\iint_R [x\frac{\partial\bar{F}_2'}{\partial x} + y\frac{\partial\bar{F}_2'}{\partial y} - \frac{Wx^2y}{2I}]dxdy =$$

$$= \frac{1}{W}\oint_C \bar{F}_2'(x\,dy + y\,dx) - \frac{2}{W}\iint_R \bar{F}_2'\,dxdy - \frac{1}{2I}\iint_R x^2y\,dxdy\ .$$

<u>Definitie III</u>: speciaal voor dunwandige constructies. (Zie [5], H. II.2)

D dwarskrachtenmiddelpunt als voor W door D geldt:

$$\oint \frac{T}{h}ds = 0\quad ,\ (T:\ \text{schuifstroom})\ . \tag{3.55}$$



De achtergrond van deze definitie (we nemen symmetrie t.o.v. de x-as) is de volgende redenering.
Stel

$$T = T_0 + \frac{W}{I}\int_{s_0}^{s} yhds\ . \tag{3.56}$$

De potentiële energie is

$$U = \oint \frac{\tau^2}{2G} h ds = \oint \frac{T^2}{2Gh} ds \qquad , \qquad (\tau = \frac{T}{h}) .$$

Geeft

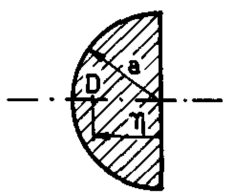
$$\frac{\partial U}{\partial T_0} = \oint \frac{2T}{2Gh} \cdot \frac{\partial T}{\partial T_0} ds .$$

Nu is $\frac{\partial T}{\partial T_0} = 1$. Dus voor $\oint \frac{T}{h} ds = 0$ geldt $\frac{\partial U}{\partial T_0} = 0$.

Dus deze keuze van D geeft een minimale schuifspanningsenergie.

Opmerking: Bij definitie I is D afhankelijk van ν en bij II niet.

Voorbeeld:



Volgens I: $\eta_I = \frac{8}{15\pi} \frac{3 + 4\nu}{1 + \nu} a$,

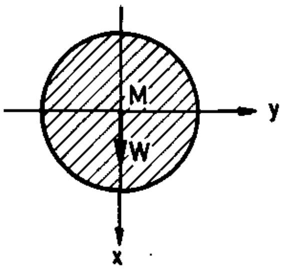
II: $\eta_{II} = \frac{8a}{5\pi}$.

Dus $\nu = 0$: $\eta_I = \eta_{II}$,

$\nu = 0{,}3$: $\eta_I = 0{,}548a$,

: $\eta_{II} = 0{,}509a$.

Voorbeeld van exacte buiging: cirkelcylinder $(x^2 + y^2 = a^2)$ belast in zijn zwaartepunt.



Hiervoor is:

$$\chi = - (\frac{3}{4} + \frac{\nu}{2}) a^2 x + \frac{1}{4} (x^3 - 3xy^2) .$$

Hieruit volgt:

$$t_{xz} = \frac{(3 + 2\nu)W}{2\pi a^4 (1 + \nu)} (a^2 - x^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} y^2) ,$$

$$t_{yz} = - \frac{(1 + 2\nu)W}{\pi a^4 (1 + \nu)} xy ,$$

$$t_{zz} = - \frac{4W}{\pi a^4} (\ell - z) x .$$

Als we deze resultaten vergelijken met de elementaire balkentheorie (τ_{ij}), zien we dat

1) $\tau_{zz} = t_{zz}$,

2) $\tau_{yz} = 0 \neq t_{yz}$,

3) $\tau_{xz} \neq t_{xz}$, (τ_{xz} is onafhankelijk van y).

Literatuur.

[1] Collegedictaat Toegepaste Mechanica.

[2] Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity.

[3] Love, Mathematical Theory of Elasticity.

[4] Trefftz, ZAMM, 1936, 220-225.

[5] Collegedictaat Technische Balkentheorie.

IV. Twee-dimensionale problemen

IV.1. De vlakke vervormingstoestand (Zie [1], §§65-69)

De vlakke vervormingstoestand wordt getypeerd door

$$w = 0, \text{ en } u = f_1(x,y), \; v = f_2(x,y) \; . \tag{4.01}$$

Hieruit volgt direct:

$$\begin{aligned} &e_{zx} = e_{zy} = e_{zz} = 0 \, , \\ &t_{zx} = t_{zy} = 0 \, , \\ &t_{zz} = \nu(t_{xx} + t_{yy}) \, . \end{aligned} \tag{4.02}$$

De nog onbekende spanningen zijn dus:

$$t_{xx}, \; t_{xy}, \; t_{yy} \; .$$

We houden nog twee evenwichtsvergelijkingen over (aan de derde wordt triviaal voldaan)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0 \, , \\ &\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0 \, . \end{aligned} \tag{4.03}$$

Verder geldt voor de deformaties

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \, , \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \, , \quad e_{xy} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \, , \tag{4.04}$$

terwijl de wet van Hooke wordt

$$t_{ij} = \lambda(e_{11} + e_{22})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \qquad (i,j = 1,2) \; . \tag{4.05}$$

We hebben dus een stelsel van 8 vergelijkingen met 8 onbekenden. Hieruit vinden we de 2 Beltrami-vergelijkingen:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu)\theta_{,i} = 0 \qquad (\theta = e_{11} + e_{22}; \; i = 1,2) \; . \tag{4.06}$$

Een fysisch voorbeeld van een vlakke vervormingstoestand is een oneindig lange cylinder belast door van z (lengte-richting) onafhankelijke krachten. We moeten dus de invloed van de randen verwaarlozen.

De tegenhanger van de vlakke vervormingstoestand is de vlakspanningstoestand. Deze treedt bijv. op bij dunne platen, welke in hun vlak belast worden. We middelen alle grootheden over de dikte en nemen $t_{zz} = 0$ *(dit is niet exact,* maar voor $z = \pm h$ is $t_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} t_{zz} = 0$, dus voor kleine h is het een goede benadering).

De vlakspanningstoestand is asymptotisch (voor $h \to 0$) exact. Wij zullen hier vooral de vlakke vervormingstoestand bespreken.

We definiëren de Airy-functie $\chi(x,y)$ met

$$t_{xx} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} \; ; \quad t_{xy} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} \; ; \quad t_{yy} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \; . \tag{4.07}$$

Hiermee is automatisch aan de evenwichtsvergelijkingen (4.03) voldaan.
(4.04) geeft de compatibiliteitsvergelijking:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y} \; . \tag{4.08}$$

Met de wet van Hooke (1.16), en met $(4.02)^3$ krijgen we hieruit

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{t_{xx} - \nu(t_{xx} + t_{yy})\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{t_{yy} - \nu(t_{xx} + t_{yy})\} = 2\,\frac{\partial^2 t_{xy}}{\partial x\partial y} \; .$$

Substitutie van (4.07) in (4.09) leidt tot de bipotentiaalvergelijking

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\chi = \Delta\Delta\chi = 0 \; . \tag{4.09}$$

IV.2. Transformaties (Zie [2], H. 1 en H. 2).

We zullen in dit hoofdstuk vaak te doen krijgen met oneindig grote lichamen. We kunnen dan dikwijls gebruik maken van Fourier-transformaties e.d.
Beschouw een functie f(x).
We veronderstellen dat f(x) voldoet aan de zgn. Dirichlet-voorwaarden, d.w.z.:

1) f(x) heeft een eindig aantal discontinuïteiten.
2) f(x) heeft een eindig aantal extrema.

Deze Dirichlet-voorwaarden zijn voldoende (maar niet noodzakelijke) voorwaarden voor het mogen toepassen van de volgende theorieën.

Als verder

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty , \tag{4.10}$$

dan geldt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos[\lambda(\xi - x)]d\xi = \tfrac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]. \tag{4.11}$$

(= f(x), als f(x) continu is in het punt x).

We zullen nu een aantal transformaties definiëren.

1) Fourier-transformaties

Definieer:

$$F(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx ,$$

$$\text{dan is} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha . \tag{4.12}$$

Bijzondere gevallen:

$$F_c(\alpha) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx ,$$

$$\text{dan} \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha , \tag{4.13}$$

$$\text{of} \quad F_s(\alpha) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx ,$$

$$\text{dan} \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_s(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha . \tag{4.14}$$

We zullen ook nog gebruiken de <u>Convolutie-integraal</u>:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)f(x - \xi)d\xi \ ,$$

waarvoor geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)f(x - \xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{-itx}dt \ . \tag{4.15}$$

Bewijs:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)f(x - \xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-it(x-\xi)}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-itx}dt \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{it\xi}d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(t)F(t)e^{-itx}dt \ .$$ q.e.d.

<u>Opmerking</u>: als we definiëren

$$F(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx \ ,$$

(4.16)

dan $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}dx \ .$$

Met deze definitie wordt (4.15):

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)f(x - \xi)d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{-itx}dx \ . \tag{4.17}$$

We zullen zowel (4.12) als (4.16) gebruiken.

2) Laplace-transformatie

Definieer

$$\Phi(p) := \int_0^\infty f(\xi)e^{-p\xi}d\xi, \quad p = \gamma + i\eta \ , \quad \gamma,\eta : \text{reëel}, \ \gamma > 0 \ .$$

Dan is $\Phi(p)$ de Fourier-transform van: $f(\xi)e^{-\gamma\xi}$, en deze heeft als terugtransform

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Phi(p)e^{p\xi}dp, \qquad \xi > 0 \ , \tag{4.18}$$

mits volgens (4.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\xi} \, |f(\xi)|d\xi < \infty, \qquad \text{met } \gamma > c \ .$$

3) Mellin-transformatie

Definieer

$$F(s) := \int_0^\infty f(x)x^{(s-1)}dx \quad ,$$

(4.19)

dan $$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^{-s}ds \ .$$

$F(s)$ bestaat, als er een k bestaat ($k > 0$) zodat

$$\int_0^\infty x^{(k-1)}|f(x)|dx < \infty \ .$$

Dan moet: $c > k$.

Samenhang met Fourier-transformaties via:

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} \ .$$

4) Hankel-transformatie (rotatie-symmetrisch):

We stellen

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty .$$

Definieer (voor $\nu \geq -\frac{1}{2}$):

$$F(u) := \int_0^\infty y f(y) J_\nu(uy) dy ,$$

$$\text{dan} \qquad f(y) = \int_0^\infty u F(u) J_\nu(uy) du , \tag{4.20}$$

(J_ν: Besselfunctie).

Met behulp van deze transformaties kunnen we 2-dimensionale problemen tot 1-dimensionale terugbrengen:

Definieer:

$$F^{(r)}(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r} e^{i\alpha x} dx . \tag{4.21}$$

Door partiële integratie krijgen we

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r} e^{i\alpha x} dx = \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} e^{i\alpha x} \Big/_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} e^{i\alpha x} dx .$$

Dus, als de afgeleiden van $f(x)$ voor $x = \pm \infty$ nul zijn, geldt

$$F^{(r)}(\alpha) = - i\alpha F^{(r-1)}(\alpha) . \tag{4.22}$$

Beschouw de bipotentiaalvergelijking

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\chi = 0 . \tag{4.23}$$

Noem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x,y) e^{i\xi y} dy =: \bar{\chi}(x,\xi) \ , \qquad (4.24)$$

dan is volgens (4.12)

$$\chi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(x,\xi) e^{-i\xi y} d\xi \ . \qquad (4.25)$$

Substitueren we (4.25) in (4.23) en bedenken we dat aan de aldus ontstane vergelijking moet worden voldaan voor alle y, dan krijgen we

$$\frac{d^4\bar{\chi}}{dx^4} - 2\xi^2 \frac{d^2\bar{\chi}}{dx^2} + \xi^4 \bar{\chi} = 0 \ . \qquad (4.26)$$

De oplossing van (4.26) luidt:

$$\bar{\chi}(\xi,x) = (A + Bx) e^{-|\xi| x} + (C + Dx) e^{|\xi| x} \ . \qquad (4.27)$$

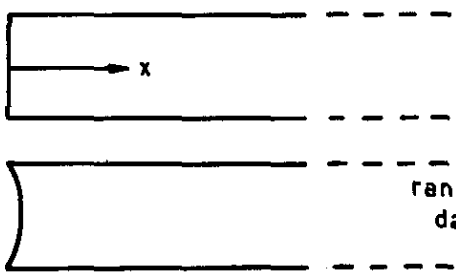
Hierbij is verondersteld:

1) het bestaan van de transformaties ,
2) "goed" gedrag in ∞ (d.w.z. de stoktermen moeten nul worden).

Bij mechanische problemen gedragen de spanningen zich altijd goed; de verplaatsingen vaak niet.

Voorbeeld:

strip:



rand wordt rond gebogen : dan gaat u in ∞ naar ∞.

We moeten dan de verplaatsing in het oneindige (u_∞) aftrekken: ($u - u_\infty$) is dan wel te transformeren.

IV.3. Toepassing Fourier-transformaties op vlakke vervormingstoestand (Zie [2], H. 9. De hoofdstukken 9 en 10 bevatten verschillende drukfouten)

In een vlakke vervormingstoestand geldt (4.09): $\Delta\Delta\chi = 0$.
Stel

$$\chi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(x,\xi) e^{-i\xi y} d\xi ,$$

$$\text{dan} \qquad \bar{\chi}(x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x,y) e^{i\xi y} dy . \tag{4.28}$$

Uit (4.07)[1]

$$t_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} ,$$

volgt

$$\bar{t}_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} t_{xx} e^{i\xi y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} e^{i\xi y} dy = -\xi^2 \bar{\chi}, \tag{4.29}$$

mits χ en $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ nul zijn voor $y = \pm \infty$.
Eis: $t_{xx} = 0$ voor $(x^2 + y^2) \to \infty$.
Analoog

$$\bar{t}_{yy} = \frac{d^2 \bar{\chi}}{dx^2} =: \bar{\chi}'', \qquad \bar{t}_{xy} = i\xi \frac{d\bar{\chi}}{dx} =: i\xi \bar{\chi}' . \tag{4.30}$$

De echte spanningen vinden we dan uit:

$$t_{xx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{t}_{xx} e^{-i\xi y} d\xi , \quad \text{etc.} \tag{4.31}$$

De spanningen moeten voldoen aan de eis: $t_{ij} \to 0$, als $(x^2 + y^2) \to \infty$.
Met de wet van Hooke (1.16) en met (4.02)[3] vinden we

$$2G \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = t_{yy} - \nu(t_{xx} + t_{yy}) . \tag{4.32}$$

Integreren geeft:

$$2G \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} e^{i\xi y} dy = \bar{t}_{yy} - \nu(\bar{t}_{xx} + \bar{t}_{yy}) = (1 - \nu)\bar{\chi}'' + \nu\xi^2\bar{\chi} \ . \quad (4.33)$$

Nu is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} e^{i\xi y} dy = ve^{i\xi y}\Big/_{-\infty}^{\infty} - i\xi \int_{-\infty}^{\infty} ve^{i\xi y} dy = - i\xi\bar{v} \ , \quad (4.34)$$

mits $v(y = \pm \infty) = 0$.

Dus

$$\bar{v} = \frac{i}{2G\xi} [(1 - \nu)\bar{\chi}'' + \nu\xi^2\bar{\chi}] \ ,$$

en

$$v = \frac{i}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 - \nu)\bar{\chi}'' + \nu\xi^2\bar{\chi}] \frac{e^{-i\xi y}}{\xi} d\xi \ . \quad (4.35)$$

Voor de bepaling van u gebruiken we:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} t_{xy} \ .$$

Integreren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy = \frac{1}{G} \bar{t}_{xy} \ . \quad (4.36)$$

of

$$-i\xi\bar{u} + \bar{v}' = \frac{2(1 + \nu)}{G} \bar{t}_{xy} \ , \quad \text{mits } u(y = \pm \infty) = 0 \ . \quad (4.37)$$

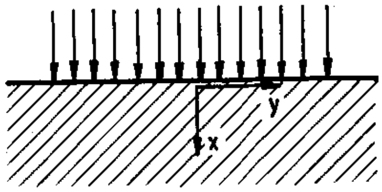
Dus

$$u = \frac{1 + \nu}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 - \nu)\bar{\chi}''' - (2 - \nu)\xi^2\bar{\chi}'] \frac{e^{-i\xi y}}{\xi^2} d\xi. \quad (4.38)$$

De factor ξ^{-2} kan bij $\xi = 0$ divergentie geven.

Voorbeeld:

Beschouw een halfruimte ($x \geq 0$) belast door een druk $p = p(y)$. Voor dit probleem geldt de vergelijking



Halfvlak.
Onafhankelijk van z - richting.

$$\Delta\Delta\chi = 0 \ ,$$

met de randvoorwaarden

$$t_{xx} = -p(y),\ t_{xy} = 0,\ \text{voor } x = 0, \qquad (4.39)$$
$$t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = 0,\ \text{voor } (x^2 + y^2) \to \infty.$$

Uit deze laatste conditie volgt dat in (4.27) $C = D = 0$ moet zijn, zodat

$$\bar{\chi} = (A + Bx)e^{-|\xi|x} \ . \qquad (4.40)$$

De randvoorwaarden voor $x = 0$ geven (met (4.29) en (4.30)) $A(\xi)$ en $B(\xi)$, waaruit

$$\bar{\chi} = \frac{\bar{p}(\xi)}{\xi^2}[1 + |\xi|x]e^{-|\xi|x} \ , \qquad (4.41)$$

waarin

$$\bar{p}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)e^{i\xi y}dy \ .$$

Hieruit volgt:

$$t_{xx} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi)e^{-|\xi|x-i\xi y}[1 + |\xi|x]d\xi,$$

$$t_{yy} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi)e^{-|\xi|x-i\xi y}[1 - |\xi|x]d\xi \ , \qquad (4.42)$$

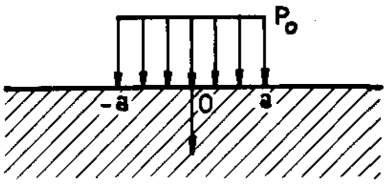
$$t_{xy} = \frac{-ix}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\bar{p}(\xi)e^{-|\xi|x-i\xi y}d\xi \ ,$$

$$t_{zz} = \frac{-\nu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi)e^{-|\xi|x-i\xi y}d\xi \ ,$$

en

$$u = \frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\xi|} \bar{p}(\xi) e^{-|\xi|x - i\xi y} \{2(1 - \nu) + |\xi|x\} d\xi \ ,$$

$$v = -\frac{i}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi} \bar{p}(\xi) e^{-|\xi|x - i\xi y} \{(1 - 2\nu) - |\xi|x\} d\xi \ . \qquad (4.43)$$



Als we als belasting kiezen:

$p = p_0$ voor $|y| \le a$ en

$p = 0$ voor $|y| > a$ (4.44)

krijgen we:

$$\bar{p}(\xi) = 2p_0 \int_0^a \cos \xi y dy = \frac{2p_0 \sin \xi a}{\xi} \ , \qquad (4.45)$$

en

$$t_{xx} = -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \xi x}{\xi} e^{-\xi x} \sin \xi a \cos \xi y d\xi \quad \text{etc.} \qquad (4.46)$$

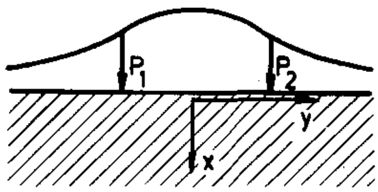
Laat nu $a \to 0$ met $p_0 = \frac{P}{2a}$, met P eindig (lijnbelasting).
Dan

$$\bar{p}(\xi) = \lim_{a \to 0} \frac{2p_0 \sin \xi a}{\xi} = \frac{2P}{2a} \cdot \frac{\xi a}{\xi} = P \ ,$$

geeft

$$t_{xx} = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos \xi y d\xi = -\frac{2Px^3}{\pi(x^2 + y^2)^2} \ ,$$

en $$t_{yy} = -\frac{2Pxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \ , \quad t_{xy} = -\frac{2Px^2 y}{\pi(x^2 + y^2)^2} \ . \qquad (4.47)$$



We kunnen nu een probleem met continue belasting oplossen door integratie van bovenstaande formules ((4.47))

$$t_{xx} = - \frac{2x^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\eta)d\eta}{[x^2 + (y - \eta)^2]^2} \text{ etc.} \tag{4.48}$$

(4.48) is ook af te leiden door convolutie uit algemene Fourier-integraal (definitie (4.16) en (4.17)):

$$t_{xx} = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi)e^{-|\xi|x-i\xi y} [1 + |\xi|x]d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\bar{p}(\xi)G(x,\xi)e^{-i\xi y}d\xi \ , \tag{4.49}$$

met

$$G(x,\xi) := e^{-|\xi|x} [1 + |\xi|x] = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y)e^{i\xi y}dy \ , \tag{4.50}$$

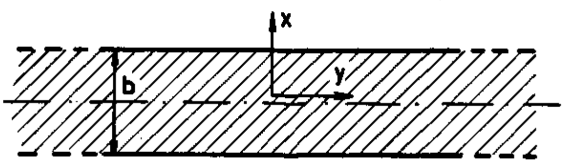
waarbij

$$k(x,y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|x-i\xi y} [1 + |\xi|x]d\xi = \frac{2x^3}{\pi(x^2 + y^2)^2} \ . \tag{4.51}$$

Volgens de definitie van de convolutie (4.17) geldt dan (uit (4.49)):

$$t_{xx} = - \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta)k(x,y - \eta)d\eta = - \frac{2x^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\eta)d\eta}{[x^2 + (y - \eta)^2]^2} \cdot \tag{4.52}$$

<u>Voorbeeld</u>. Dikke plaat:



op $x = \pm b/2$: t_{xx} en t_{xy} gegeven.
Voor $y \to \infty$ gaan de spanningen naar nul.
Vergelijking voor χ: $\Delta\Delta\chi = 0$ geeft:

$$\bar{\chi} = (A + B\xi x)\cosh \xi x + (C + D\xi x)\sinh \xi x \ .$$

A, B, C en D uit randvoorwaarden.
Oplossing splitsen in symmetrisch en keersymmetrisch deel t.o.v. de lijn $x = 0$.

IV.4. Toepassing van Mellin-transformaties op een wig (Zie [2], pp. 439-444, of [3])

Definitie (4.19):

$$F(s) := \int_0^\infty f(x)x^{(s-1)}dx ,$$

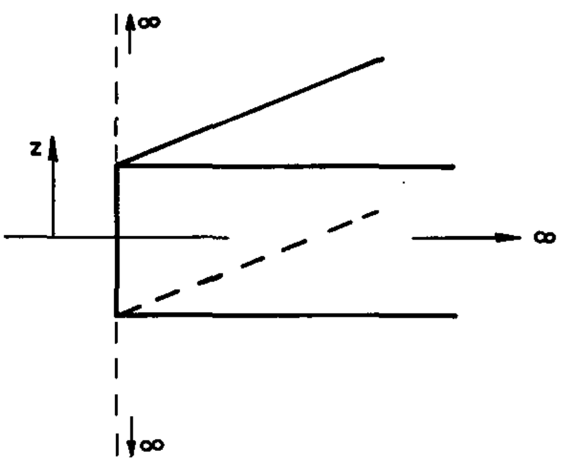
dan

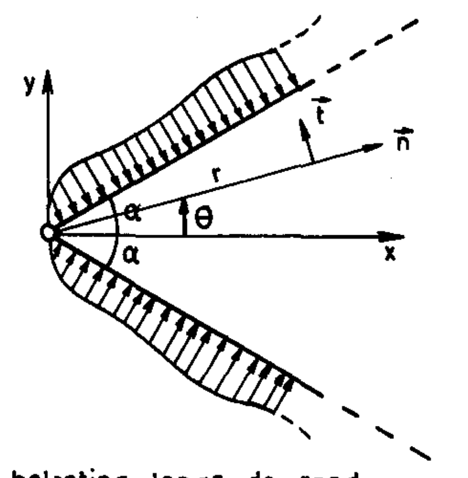
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^{-s}ds ,$$

waarbij verondersteld is dat

$$\int_0^\infty x^{(k-1)} |f(x)|dx < \infty \quad \text{voor} \quad 0 < k < c \quad (c,k \text{ reëel}).$$

Niet voor iedere $f(x)$ bestaat een Mellin-transformatie, bijv. voor $f(x) = x^{-1}$ bestaat geen, voor $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ bestaat wel een Mellin-transformatie.





We gaan over van het x-y-stelsel op het n-t-stelsel. In dit laatste stelsel luiden de evenwichtsvergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_{nn}}{\partial n} + \frac{\partial t_{nt}}{\partial t} &= 0 \,, \\ \frac{\partial t_{nt}}{\partial n} + \frac{\partial t_{tt}}{\partial t} &= 0 \,.\end{aligned} \tag{4.53}$$

Aan dit stelsel is te voldoen met de Airy-functie $\chi(n,t)$ gedefinieerd door:

$$t_{nn} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \,, \quad t_{nt} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial n \partial t} \,, \quad t_{tt} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial n^2} \,. \tag{4.54}$$

We gaan nu over van (n,t) op de poolcoördinaten (r,θ). Dan volgt uit (4.54):

$$\begin{aligned} t_{rr} &= t_{nn} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} \,, \\ t_{\theta\theta} &= t_{tt} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \,, \\ t_{r\theta} &= t_{nt} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial n \partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \,. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Met (4.55) is triviaal voldaan aan de evenwichtsvergelijkingen in poolcoördinaten :

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(t_{rr} - t_{\theta\theta}) &= 0 \,, \\ \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} t_{r\theta} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Uit de compatibiliteitsvergelijkingen volgt dan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \chi = \Delta\Delta\chi = 0 \,. \tag{4.57}$$

Definieer

$$\bar{\chi}(s,\theta) = \int_0^\infty \chi(r,\theta) r^{(s-1)} dr \,. \tag{4.58}$$

We gaan (4.57) integreren:

$$J = \int_0^\infty r^{(s+3)}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \chi(r,\theta)dr = 0 \ . \qquad (4.59)$$

Door (4.59) partieel te integreren, waarbij we aannemen, dat de stoktermen wegvallen (dit moet achteraf worden geverifieerd), krijgen we:

$$J = \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + s^2\right)\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + (s+2)^2\right)\bar{\chi} = 0 \ . \qquad (4.60)$$

De oplossing van (4.60) luidt:

$$\bar{\chi}(s,\theta) = A \sin(s\theta) + B \cos(s\theta) + C \sin(s+2)\theta + D \cos(s+2)\theta \ . \qquad (4.61)$$

A, B, C en D zijn functies van s, die volgen uit de randvoorwaarden.
Stel op

$$\begin{aligned} \theta = +\alpha &: t_{r\theta} = f_1(r) \ , \quad t_{\theta\theta} = f_2(r) \ , \\ \theta = -\alpha &: t_{r\theta} = g_1(r) \ , \quad t_{\theta\theta} = g_2(r) \ . \end{aligned} \qquad (4.62)$$

Op $\theta = \alpha$ is

$$\int_0^\infty t_{\theta\theta} r^{s+1} dr = \int_0^\infty f_2(r) r^{s+1} dr = (\text{ook}) \int_0^\infty \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} r^{s+1} dr = s(s+1)\bar{\chi}(s,\alpha), \qquad (4.63)$$

en

$$\int_0^\infty t_{r\theta} r^{s+1} dr = \int_0^\infty f_1(r) r^{s+1} dr = (s+1)\left(\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial\theta}\right)_{\theta=\alpha} \ . \qquad (4.64)$$

Met een analoge procedure voor $\theta = -\alpha$, vinden we vier randvoorwaarden voor $\bar{\chi}$ waaruit A, B, C en D zijn te bepalen.
De spanningen volgen uit

$$\bar{t}_{rr} := \int_0^\infty t_{rr} r^{s+1} dr = \left(\frac{d^2}{d\theta^2} - s\right)\bar{\chi} \ . \qquad (4.65)$$

Dus

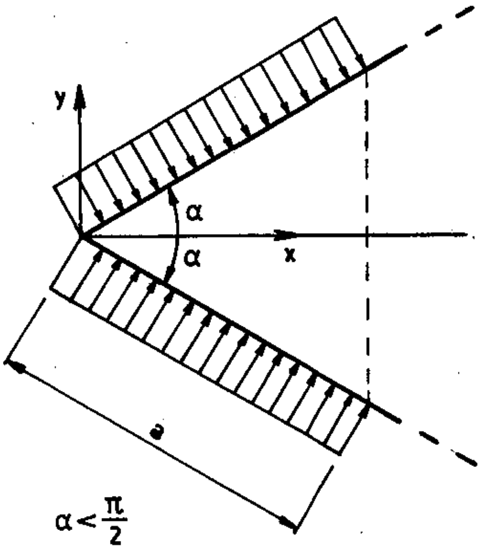
$$t_{rr} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{d^2\bar{\chi}}{d\theta^2} - s\bar{\chi}\right) r^{(-s-2)} ds \ ,$$

analoog

$$t_{r\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (s+1)\frac{d\bar{\chi}}{d\theta}\, r^{(-s-2)} ds \ , \qquad (4.66)$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s(s+1)\bar{\chi} r^{(-s-2)} ds \ .$$

Voorbeeld:



$\alpha < \frac{\pi}{2}$

Op $\theta = \pm\alpha$: $t_{r\theta} = 0$,

$t_{\theta\theta} = -p_0$ voor $r \leq a$,

$= 0$ voor $r > a$,

geeft: (voor $\theta = \pm\alpha$):

$$\int_0^\infty t_{\theta\theta} r^{(s+1)} dr = -p_0 \int_0^a r^{(s+1)} dr =$$

$$= -\frac{p_0 a^{(s+2)}}{(s+2)} \ .$$

Randvoorwaarden voor $\theta = \pm\alpha$:

$$\bar{\chi}' = 0 \ ,$$

$$s(s+1)\bar{\chi} = -\frac{p_0 a^{(s+2)}}{(s+2)} \ . \qquad (4.67)$$

Ten gevolge van de symmetrie in θ zijn (in (4.61)) A en C gelijk aan nul. B en D volgen uit (4.67). We vinden:

$$t_{\theta\theta} = -\frac{p_0}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{(s+2)}\{\sin[(s+2)\alpha]\cos(s\theta) + $$

$$-\frac{s}{(s+2)}\sin(s\alpha)\cos[(s+2)\theta]\}\frac{ds}{H(\alpha,s)} \quad ,$$

$$(4.68)$$

$$t_{rr} = -\frac{p_0}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{(s+2)}\{\frac{(s+4)}{(s+2)}\sin(s\alpha)\cos[(s+2)\theta] + $$

$$-\sin[(s+2)\alpha]\cos(s\theta)\frac{ds}{H(\alpha,s)} \quad ,$$

$$t_{r\theta} = -\frac{p}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{(s+2)}\{\sin[(s+2)\alpha]\sin(s\theta) + $$

$$-\sin(s\alpha)\sin[(s+2)\theta]\}\frac{ds}{H(\alpha,s)} \quad ,$$

met

$$H(\alpha,s) = (s+1)\sin(2\alpha) + \sin[2(s+1)\alpha].$$

Indien we ons beperken tot waarden voor α tussen 0 en $\pi/2$, zien we dat het enige nulpunt van $H(\alpha,s)$ in de strip $-2 < \mathrm{Re}(s) < 0$ ligt bij $s = -1$.
De lijn-integraal in (4.68) kan daarom worden vervangen door integralen van $-\infty$ tot 0 en van 0 tot ∞ langs de lijn $\mathrm{Re}(s) = -1$, min(πi) maal het residu in het punt $s = -1$.
Voor (4.68) vinden we dan, na enig rekenwerk:

$$\frac{\pi r}{2ap_0}(t_{\theta\theta} - t_{rr}) = \frac{\sin\alpha\cos\theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} - \int_0^\infty P(u)\sin(u\log\frac{a}{r})du \quad ,$$

$$\frac{\pi r}{2ap_0}(t_{\theta\theta} + t_{rr}) = \frac{-\pi\sin\alpha\cos\theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \int_0^\infty [P(u) - uQ(u)]\sin(u\log\frac{a}{r}) + $$

$$-[Q(u) + uP(u)]\cos(u\log\frac{a}{r})\frac{du}{(1+u^2)} \quad ,$$

$$\frac{\pi r}{2ap_0}t_{r\theta} = \int_0^\infty R(u)\cos(u\log\frac{a}{r})du \; .$$

P(u) en Q(u) volgen uit:

$$\Gamma P(u) = \sin(\alpha - \theta)\cosh[(\alpha + \theta)u] + \sin(\alpha + \theta)\cosh[(\alpha - \theta)u] ,$$

$$\Gamma Q(u) = \cos(\alpha - \theta)\sinh[(\alpha + \theta)u] + \cos(\alpha + \theta)\sinh[(\alpha - \theta)u] ,$$

$$\Gamma R(u) = \sin(\alpha - \theta)\sinh[(\alpha + \theta)u] - \sin(\alpha + \theta)\sinh[(\alpha - \theta)u] ,$$

en

$$\Gamma = u \sin(2\alpha) + \sinh(2\alpha u) .$$

N.B. Bij een willekeurige belasting moeten we deze splitsen in een symmetrisch en een antisymmetrisch deel en deze twee problemen afzonderlijk oplossen.

Literatuur:

Quart. J. Mech and Appl. Math. 1 (1948), 125.
Sneddon: Fourier Transforms, pp. 439-444.

IV.5. Toepassing van Hankel-transformaties op rotatie-symmetrische problemen (Zie [2], §§51 en 53)

We gebruiken cylindercoördinaten: r, θ, z.
Vanwege de rotatie-symmetrie zijn $t_{r\theta}$, $t_{\theta z}$, u_θ en alle termen met $\frac{\partial}{\partial\theta}$ gelijk aan nul. Overblijven dan nog: u_r, u_z, t_{rr}, $t_{\theta\theta}$, t_{zz} en t_{rz} .
De evenwichtsvergelijkingen luiden (aan de tweede, in θ-richting, is identiek voldaan)

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} = 0 ,$$
$$\frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = 0 . \qquad (4.69)$$

We voeren een Airy-functie in door

$$u_r = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\Phi_{,rz} , \quad (\Phi_{,rz} := \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}) , \qquad (4.70)$$
$$u_z = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\Delta\Phi - \frac{\lambda + \mu}{\mu}\Phi_{,zz} .$$

Op deze manier is triviaal voldaan aan de compatibiliteitsvergelijkingen én aan de eerste evenwichtsvergelijking, maar niet aan de tweede.

1) Compatibiliteitsvergelijking: (de overigen zijn triviaal)

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} e_{zz} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} e_{rr} = 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} e_{zr} . \tag{4.71}$$

(4.70) geeft

$$\begin{aligned} e_{zz} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \Delta\Phi_{,z} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \Phi_{,zzz} , \\ e_{rr} &= - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \Phi_{,rrz} , \\ 2e_{rz} &= - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \Phi_{,rzz} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} (\Delta\Phi) - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \Phi_{,zrr} . \end{aligned} \tag{4.72}$$

Let op! Niet geldt: $\frac{\partial}{\partial r} \Delta = \Delta \frac{\partial}{\partial r}$, want

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} , \quad (\text{met } \frac{\partial}{\partial \theta} = 0) .$$

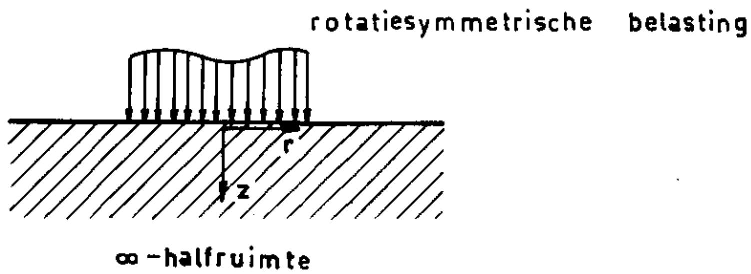
Door de deformaties (4.72) te substitueren in (4.71) zien we dat aan de compatibiliteitsvergelijking is voldaan.

2) Door met Hooke de spanningen uit de deformaties te bepalen, kunnen we laten zien dat ook triviaal aan de eerste evenwichtsvergelijking is voldaan.

3) De tweede evenwichtsvergelijking geeft de bipotentiaalvergelijking:

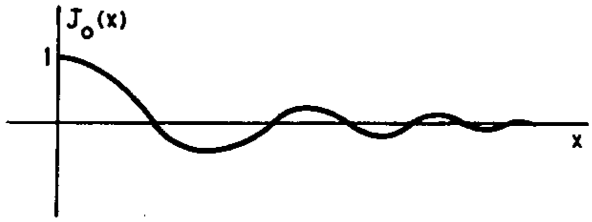
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \Phi = 0 . \tag{4.73}$$

Voorbeeld



Hankel-transformatie:

$$\bar{\Phi}(\xi,z) := \int_0^\infty \Phi(r,z) r J_0(\xi r) dr \ . \qquad (4.74)$$



$J_0(\xi r)$: 0°-orde Besselfunctie:

Partieel integreren geeft:

$$\int_0^\infty \Delta\Delta\Phi . r J_0(\xi r) dr = \left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)^2 \bar{\Phi} = 0 \ . \qquad (4.75)$$

De algemene oplossing van deze gewone differentiaalvergelijking luidt:

$$\bar{\Phi}(\xi,z) = (A + Bz)e^{-\xi z} + (C + Dz)e^{\xi z} \ , \quad (\xi > 0) \ . \qquad (4.76)$$

Voor ∞-halfruimte moet weer $C = D = 0$.

De verplaatsingen vinden we door

$$\Phi(r,z) = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \ \bar{\Phi}(\xi,z) d\xi \ ,$$

te substitueren in (4.70). Met de betrekkingen

$$\frac{dJ_0(\xi r)}{dr} = - \xi J_1(\xi r) \ ,$$

en

$$\frac{d^2 J_0(\xi r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_0(\xi r)}{dr} = \xi^2 J_0(\xi r) \ ,$$

(zie bijv. [4] of [5]), en door partieel te integreren krijgen we dan

$$u_r = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \int_0^\infty \xi^2 \frac{d\bar{\Phi}}{dz} J_1(\xi r) d\xi \ ,$$

$$u_z = \int_0^\infty \xi\left(\frac{d^2\bar{\Phi}}{dz^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \xi^2 \bar{\Phi}\right) J_0(\xi r) d\xi \ . \qquad (4.79)$$

Met de wet van Hooke vinden we uit (4.79) voor de spanningen:

$$t_{zz} = \int_0^\infty \xi\{(\lambda + 2\mu)\bar{\Phi}''' - (3\lambda + 4\mu)\xi^2\bar{\Phi}'\}J_0(\xi r)d\xi \ , \quad (' = \frac{d}{dz}) \ ,$$

$$t_{rz} = \int_0^\infty \xi^2\{\lambda\bar{\Phi}'' + (\lambda + 2\mu)\xi^2\bar{\Phi}\}J_1(\xi r)d\xi \ ,$$

$$t_{rr} = \int_0^\infty \xi\{\lambda\bar{\Phi}''' + (\lambda + 2\mu)\xi^2\bar{\Phi}'\}J_0(\xi r)d\xi - \frac{2(\lambda + \mu)}{r}\int_0^\infty \xi^2\bar{\Phi}'J_1(\xi r)d\xi \ , \tag{4.80}$$

$$t_{\theta\theta} = \lambda\int_0^\infty \xi\{\bar{\Phi}''' - \xi^2\bar{\Phi}'\}J_0(\xi r)d\xi + \frac{2(\lambda + \mu)}{r}\int_0^\infty \xi^2\bar{\Phi}'J_1(\xi r)d\xi \ .$$

Waarbij

$$\bar{\Phi}(\xi,z) = [A(\xi) + B(\xi)z]e^{-\xi z} \ .$$

$A(\xi)$ en $B(\xi)$ volgen uit de randvoorwaarden.
Bijv.: op $z = 0$: t_{zz} en t_{zr} gegeven (geen gemengde randvoorwaarden). Uit $t_{zz}(0)$ en $t_{zr}(0)$ volgen dan resp. $\bar{t}_{zz}$ en $\bar{t}_{zr}$ op $z = 0$ en hieruit volgen A en B.
Stel bijv. $t_{zz} = -p(r)$, $t_{rz} = 0$ op $z = 0$.
Substitutie van $\bar{\Phi}(\xi,z)$ in $(4.80)^{1,2}$ geeft

$$t_{zz} = \int_0^\infty 2\xi^2e^{-\xi z}\{(\lambda + \mu)\xi A + [\mu + (\lambda + \mu)\xi z]B\}\xi J_0(\xi r)d\xi \ ,$$

$$t_{rz} = \int_0^\infty 2\xi^2e^{-\xi z}\{(\lambda + \mu)\xi A - [\lambda - (\lambda + \mu)\xi z]B\}\xi J_1(\xi r)d\xi \ ,$$

waaruit volgt

$$\int_0^\infty rt_{zz}J_0(\xi r)dr = 2\xi^2e^{-\xi z}\{(\lambda + \mu)\xi A + [\mu + (\lambda + \mu)\xi z]B\} \ ,$$

$$\int_0^\infty rt_{rz}J_1(\xi r)dr = 2\xi^2e^{-\xi z}\{(\lambda + \mu)\xi A - [\lambda - (\lambda + \mu)\xi z]B\} \ . \tag{4.82}$$

Definieer

$$Z(\xi) := -\,\xi\bar{p}(\xi) := -\,\xi \int_0^\infty rp(r)J_0(\xi r)dr.$$

Dan volgt uit (4.81) en (4.82)

$$\xi^2[2(\lambda+\mu)\xi A + 2\mu B] = \frac{Z(\xi)}{\xi} \ ,$$

$$2\xi^2\{(\lambda+\mu)\xi A - \lambda B\} = 0 \ .$$

Geeft

$$\bar{\Phi}(\xi,z) = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)^2}\,\frac{Z(\xi)}{\xi^4}\,(1 + \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda}\,\xi z)e^{-\xi z} \ . \qquad (4.83)$$

Hieruit volgen direct de spanningen en de verplaatsingen, bijv.:

$$u_r = -\,\frac{z}{2\mu}\int_0^\infty Z(\xi)e^{-\xi z}J_1(\xi r)d\xi + \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\int_0^\infty Z(\xi)e^{-\xi z}\,\frac{J_1(\xi r)}{\xi}\,d\xi \ ,$$

$$t_{zz} = z\int_0^\infty \xi Z(\xi)e^{-\xi z}J_0(\xi r)d\xi + \int_0^\infty Z(\xi)e^{-\xi z}J_0(\xi r)d\xi \,,\ \text{etc.}$$

De berekening bestaat nu uit de volgende stappen:

1) Bepaling van $Z(\xi)$ uit gegeven $p(r)$ (zie bijv. [5]).
2) Bepaling van u_i en t_{ij} (meestal niet meer in gesloten vorm mogelijk).

Puntlast:

Neem $\quad p(r) = \dfrac{P}{\pi a^2} \ , \quad 0 < r \le a \ ,$

$\qquad\quad p(r) = 0 \quad , \qquad r > a \ .$

Dan is

$$Z(\xi) = -\,\xi\int_0^a rpJ_0(\xi r)dr = -\,\frac{\xi P}{\pi a^2}\int_0^a rJ_0(\xi r)dr = -\,\frac{P}{\pi a}\,J_1(\xi a) \ ,$$

want: $\quad rJ_0(\xi r) = \dfrac{1}{\xi}\dfrac{d}{dr}\{rJ_1(\xi r)\}, \quad$ ([4] of [5]) .

Voor puntlast ($a \to 0$) krijgen we dan:

$$Z(\xi) = -\lim_{a\to 0} \frac{P}{\pi} \frac{J_1(\xi a)}{a} = -\frac{P\xi}{2\pi}, \tag{4.84}$$

en dit geeft:

$$t_{zz} = -\frac{P}{2\pi} \frac{3z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$t_{rz} = -\frac{P}{2\pi} \frac{3rz^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \text{ etc.} \tag{4.85}$$

(Boussinesq 1880)

IV.6. Halfruimte ($z \geq 0$) met niet-symmetrische normaalbelasting

Beschouw een halfruimte met op het bovenvlak $z = 0$

$$t_{xz} = t_{yz} = 0, \quad t_{zz} \neq 0 .$$

Dit 3-dimensionale probleem is volledig terug te brengen tot een potentiaalprobleem. We gaan uit van (1.97) en vervangen hierin $A(x,y,z)$ door $\frac{1}{2G}\Phi(x,y,z)$ zodat

$$2Gu_x = z\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} + (1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

$$2Gu_y = z\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} + (1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{4.86}$$

$$2Gu_z = z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Als Φ dan nog voldoet aan

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = 0, \tag{4.87}$$

dan is automatisch voldaan aan:

1) Navier- (Beltrami-) vergelijkingen.
2) Aan de randvoorwaarde $t_{xz} = t_{yz} = 0$ voor $z = 0$.

Dan hoeft alleen nog maar voldaan te worden aan t_{zz} voor $z = 0$ (voorgeschreven). De oplossing gaat analoog als u_z is voorgeschreven op $z = 0$.

De spanningen worden volgens (1.98)

$$t_{xx} = z\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial z} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\nu\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,,$$

$$t_{yy} = z\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^2\partial z} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + 2\nu\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,,$$

$$t_{zz} = z\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial z^3} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\,,$$

$$t_{xy} = z\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial z} + (1-2\nu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\,, \tag{4.88}$$

$$t_{xz} = z\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial z^2}\,,$$

$$t_{yz} = z\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}\,.$$

Hieruit volgt: voor $z = 0$ geldt $t_{xz} = t_{yz} = 0$.

Noem t_{zz} voor $z = 0$: $f(x,y)$. (4.89)

Dan moet

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)_{z=0} = -f(x,y)\ . \tag{4.90}$$

Verder moet de spanning in het oneindige naar nul gaan.

We lossen vergelijking (4.87) met de randvoorwaarde (4.90) op met de Fourier-transformatie

$$\bar{\Phi}(\xi,\eta,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,y,z)e^{i\xi x+i\eta y}dxdy\ . \tag{4.91}$$

Substitueren in $\Delta\Phi = 0$ geeft

$$\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial z^2} - (\xi^2 + \eta^2)\bar{\Phi} = 0\ . \tag{4.92}$$

(4.93) heeft als oplossing

$$\bar{\Phi} = A(\xi,\eta)e^{-\sqrt{\xi^2+\eta^2}.z} + B(\xi,\eta)e^{\sqrt{\xi^2+\eta^2}.z} . \qquad (4.93)$$

De laatste term van (4.93) geeft oneindig grote spanningen voor $z \to \infty$ dus moet $B(\xi,\eta) \equiv 0$.
Dus

$$\bar{\Phi}(\xi,\eta,z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} A(\xi,\eta)e^{-[\sqrt{\xi^2+\eta^2}.z+i\xi x+i\eta y]}d\xi d\eta . \qquad (4.94)$$

Hieruit volgt

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)_{z=0} = \frac{-1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} (\xi^2 + \eta^2)A(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta = -f(x,y) ,$$

wat na terugtransformatie geeft

$$A(\xi,\eta) = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \bar{f}(\xi,\eta) . \qquad (4.95)$$

Hiermee is $\bar{\Phi}(\xi,\eta,z)$ bepaald, waaruit we door terugtransformatie $\Phi(x,y,z)$ kunnen vinden. Met (4.86) en (4.88) kunnen we dan de verplaatsingen en de spanningen berekenen.

IV.7. Twee axiaalsymmetrische problemen voor een cirkelcylinder

We gaan uit van vergelijking (1.92), waarin we de Neuber-Papkowich-functies Y_i vervangen door: $4(1 - \nu)B_i$:

$$u_i = 4(1 - \nu)B_i - (x_jB_j)_{,i} \quad , \qquad (i,j = 1,2,3) . \qquad (4.96)$$

Als we overgaan op cilindercoördinaten is

$$\begin{aligned} B_x &= B_r\cos\varphi - B_\varphi\sin\varphi, \\ B_y &= B_r\sin\varphi + B_\varphi\cos\varphi, \\ B_z &= B_z . \end{aligned} \qquad (4.97)$$

Dan is

$$x_iB_i = xB_x + yB_y + zB_z = rB_r + zB_z . \qquad (4.98)$$

Als we ons beperken tot problemen, welke onafhankelijk van φ zijn, krijgen we hiermee uit (4.96)

$$u_r = 4(1-\nu)B_r - \frac{\partial}{\partial r}(rB_r + zB_z) ,$$

$$u_\varphi = 4(1-\nu)B_\varphi , \qquad (\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0) , \tag{4.99}$$

$$u_z = 4(1-\nu)B_z - \frac{\partial}{\partial z}(rB_r + zB_z) .$$

Volgens (4.97) is

$$B_x + iB_y = (B_r + iB_\varphi)e^{i\varphi} .$$

Omdat B_x en B_y potentiaalfuncties zijn, volgt hieruit

$$\Delta(B_x + iB_y) = \Delta[(B_r + iB_\varphi)e^{i\varphi}] = 0 . \tag{4.100}$$

Uit de verg. (4.99) volgt de volgende splitsing

a) $\quad B_\varphi \neq 0 , \quad B_r = B_z = 0 ,$

dan

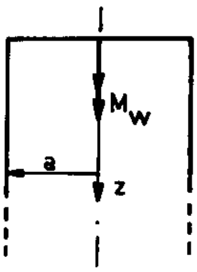
$$u_\varphi \neq 0 , \quad u_r = u_z = 0 , \text{ (torsieprobleem).}$$

b) $\quad B_\varphi = 0 , \quad B_r \neq 0 , \quad B_z \neq 0 ,$

dan

$$u_\varphi = 0 , \quad u_r \neq 0 , \quad u_z \neq 0 , \text{ (torsie-vrije probleem).}$$

1^e probleem: Een halfoneindige cylinder belast door schuifspanningen op het eindvlak $z = 0$, die als resultante het wringend moment M_w hebben. De schuifspanningen behoeven niet "goed" (volgens H. II.) verdeeld te zijn. Dit is een torsieprobleem, dat wil zeggen we nemen $B_r = B_z = 0$.



Verg. (4.99) geeft dan

$$u_r = u_z = 0 , \quad u_\varphi = 4(1-\nu)B_\varphi(r,z) \neq 0 , \tag{4.101}$$

terwijl (4.100) overgaat in

$$\Delta(B_\varphi e^{i\varphi}) = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(B_\varphi e^{i\varphi}) = 0 ,$$

of

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})B_\varphi = \frac{1}{r^2} B_\varphi . \qquad (4.102)$$

De algemene oplossing van (4.102) luidt

$$4(1 - \nu)B_\varphi = Brz + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k z} J_1(\lambda_k r) , \qquad (4.103)$$

met B, A_k en λ_k nog nader te bepalen.
Deze algemene oplossing moet voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

(i) de mantel moet spanningsvrij zijn.
(ii) op z = 0 zijn de schuifspanningen voorgeschreven, dat wil zeggen

$$t_{\varphi z} = f(r), \quad \text{voor } z = 0 . \qquad (4.104)$$

Met (4.101) en (4.103) krijgen we voor de spanningen: $t_{rr} = t_{\varphi\varphi} = t_{zz} = t_{rz} = 0$,

$$t_{r\varphi} = G(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} GA_k e^{-\lambda_k z} r \frac{d}{dr} (\frac{J_1(\lambda_k r)}{r}) ,$$

$$t_{\varphi z} = G \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = - \sum_{k=1}^{\infty} GA_k e^{-\lambda_k z} \lambda_k J_1(\lambda_k r) + GBr . \qquad (4.105)$$

De laatste term in (4.105) is de elementaire oplossing (volgens H. II.).

Voor voorwaarde (i) moet

$$t_{r\varphi} = 0, \quad \text{voor } r = a,$$

wat leidt tot

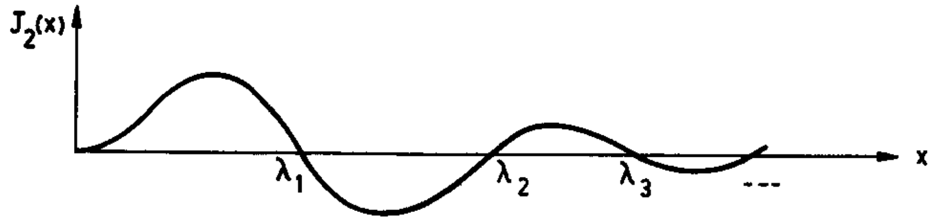
$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k z} a \frac{d}{dr} (\frac{J_1(\lambda_k r)}{r})/_{r=a} = 0 . \qquad (4.106)$$

Deze vergelijking heeft alleen dan een oplossing met niet alle A_k's gelijk aan nul als de λ_k's de nulpunten zijn van de vergelijking

$$a \frac{d}{da} (\frac{J_1(\lambda a)}{a}) = \frac{dJ_1(\lambda a)}{da} - \frac{J_1(\lambda a)}{a} = 0 ,$$

of van (zie [4] of [5])

$$J_2(\lambda a) = 0 \ . \tag{4.107}$$



De transcedente vergelijking (4.107) heeft oneindig veel nulpunten.
Voor z = 0 krijgen we volgens (4.104)

$$t_{\varphi z} = f(r) = GBr - G \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \, J_1(\lambda_k r) \ , \tag{4.108}$$

waaruit B en A_k zijn te bepalen (zie bijv. [5]).

De spanningen volgens (4.105) geven als moment

$$M_z = \int_0^a r t_{\varphi z}(r,0) 2\pi r dr =$$

$$= 2\pi BG \int_0^a r^3 dr - 2\pi G \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \int_0^a r^2 J_1(\lambda_k r) dr =$$

$$= \frac{1}{2} \pi BGa^4 \ , \tag{4.109}$$

want

$$\int_0^a r^2 J_1(\lambda_k r) dr = 0 \ . \tag{4.110}$$

Bewijs: (zie voor de te gebruiken recurrente betrekkingen voor Besselfuncties [4] en [5]).
We gaan uit van

$$\int_0^a rJ_2(\lambda r) dr = \frac{1}{2} \int_0^a J_2(\lambda r) dr^2 = \frac{1}{2} r^2 J_2(\lambda r) \Big|_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a r^2 \frac{dJ_2(\lambda r)}{dr} \, dr .$$

Dit geeft voor $\lambda = \lambda_k$ met (4.107)

$$\int_0^a r[J_2(\lambda_k r) + \tfrac{1}{2}r \frac{dJ_2(\lambda_k r)}{dr}]dr = 0 ,$$

of

$$\int_0^a r[\lambda_k r J_1(\lambda_k r)]dr = 0 ,$$

waaruit direct (4.110) volgt. q.e.d.

Uit (4.109) blijkt dat de termen met A_k in (4.105) geen bijdrage tot het moment geven: deze extra-spanningen vormen een evenwichtssysteem. Aangezien deze termen een factor: $e^{-\lambda_k z}$ bevatten en $\lambda_k = 0(k/a)$ dempen deze termen snel uit. (binnen z = enkele malen a) Dit is in overeenstemming met het principe van de Saint-Venant:

> Een spanningsstelsel dat een evenwichtssysteem vormt (d.w.z. geen resultante heeft) dempt binnen een afstand gelijk aan enkele malen een of andere karakteristieke maat uit.

We zien dus dat we op enige afstand van de einddoorsnede alleen nog te maken hebben met de elementaire oplossing volgens H. II.

<u>2^e probleem</u>: Een oneindige cylinder welke rotatie-symmetrisch wordt belast langs de mantel.
Dus, voor r = a

$$t_{rr} = f(z), \quad t_{rz} = g(z) . \tag{4.111}$$

Dit is een torsievrij probleem. We kunnen dus $B_\varphi = 0$ kiezen. Het probleem bestaat dan uit twee potentiaalproblemen

$$\Delta B_z = \Delta(B_r e^{i\varphi}) = 0 ,$$

of

$$\Delta B_z = 0 , \quad \Delta B_r(r,z) = \frac{B_r}{r^2} . \tag{4.112}$$

Het probleem is ook te beschouwen als één bipotentiaalprobleem. We gaan dan uit van (4.70)

$$u_r = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\,\Phi_{,rz}\,,$$

$$u_z = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\,\Delta\Phi - \frac{\lambda + \mu}{\mu}\,\Phi_{,zz}\,, \tag{4.113}$$

$$u_\varphi = 0\,,$$

met

$$\Delta\Delta\Phi(r,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \Phi(r,z) = 0\,. \tag{4.114}$$

We lossen dit op met de transformatie

$$\bar{\Phi}(r,\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(r,z)e^{i\zeta z}dz\,, \tag{4.115}$$

waarmee (4.114) overgaat in

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \zeta^2\right)^2 \bar{\Phi}(r,\zeta) = 0\,. \tag{4.116}$$

De oplossing van deze vergelijking luidt

$$\bar{\Phi}(r,\zeta) = A(\zeta)\, I_0(\zeta r) + \zeta r B(\zeta)\, I_1(\zeta r)\,, \tag{4.117}$$

waarin I_0 en I_1 : gemodificeerde Besselfuncties zijn (zie [4] en [5]).
De functies $A(\zeta)$ en $B(\zeta)$ kunnen we bepalen uit de randvoorwaarden op de mantel. De verdere uitwerking van dit probleem gaat op analoge wijze als bij voorgaande problemen.

Literatuur.

[1] Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity.
[2] Sneddon, Fourier Transforms.
[3] Franter, C.J., Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1, (1948), 125.
[4] Franter, C.J., Besselfunctions.
[5] Watson, Theory of Besselfunctions.

V. Energieprincipes

V.1. Potentiële en complementaire energie

We zullen in deze eerste paragraaf enige begrippen en stellingen uit het college toegepaste mechanica herhalen. Voor bewijzen van de stellingen zij verwezen naar [1].

We definiëren een reguliere evenwichtstoestand S als het stelsel

$$S = \{u_i, e_{ij}, t_{ij}\} \ , \tag{5.1}$$

dat voldoet aan

i) $$u_i \in C^2 \ , \quad e_{ij} \in C^1 \ , \quad t_{ij} \in C^1 \ , \tag{5.2}$$

ii)
$$\begin{aligned} & e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ , \\ & t_{ij} = c_{ijk\ell} e_{k\ell} \ , \ (\text{of: } e_{ij} = \gamma_{ijk\ell} c_{k\ell}) \ , \\ & t_{ij,j} + k_i = 0 \ , \end{aligned} \tag{5.3}$$

iii)
$$\begin{aligned} & u_i = u_i^* \ , \quad \text{op} \quad S_u \ , \\ & t_{ij} n_j = t_i^* \ , \quad \text{op} \quad S_p \ , \end{aligned} \tag{5.4}$$

waarin u_i^* en t_i^* respectievelijk voorgeschreven verplaatsingen en oppervlaktekrachten zijn en S_u en S_p dat deel van het oppervlak waar de verplaatsingen respectievelijk de spanningen zijn voorgeschreven.

Definitie: kinematisch toelaatbaar stelsel

$$\tilde{S} = \{\tilde{u}_i, \tilde{e}_{ij}\} \ , \tag{5.5}$$

d.i. een stelsel dat voldoet aan

$$\begin{aligned} & \text{i)} \quad \tilde{u}_i \in C^2 \ , \quad \tilde{e}_{ij} \in C^1 \ , \\ & \text{ii)} \quad \tilde{e}_{ij} = \tfrac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \ , \\ & \text{iii)} \quad \tilde{u}_i = u_i^* \ , \quad \text{op} \quad S_u \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Definitie: potentiële energie

$$U(S) = W^{(e)}(S) - \int_V k_i^* u_i dV - \int_{S_p} t_i^* u_i dS \ , \tag{5.7}$$

met $W^{(e)}(S)$ volgens (1.19) en k_i^* de voorgeschreven volumekracht.
Hieruit volgt voor de potentiële energie van de kinematisch toelaatbare toestand $\tilde{S}$

$$U(\tilde{S}) = W^{(e)}(\tilde{S}) - \int_V k_i^* \tilde{u}_i dV - \int_{S_p} t_i^* \tilde{u}_i dS \ . \tag{5.8}$$

Voor de aldus gedefinieerde potentiële energie geldt de volgende stelling:

Stelling van de minimale potentiële energie

$$U(S) = \min_{\tilde{S}} U(\tilde{S}) \ . \tag{5.9}$$

Voor het bewijs zie [1], pp. 54-56.

Definitie: statisch toelaatbaar stelsel

$$\underset{\sim}{S} = \{\underset{\sim}{t}_{ij}\} \ , \tag{5.10}$$

d.i. een stelsel dat voldoet aan

i) $\underset{\sim}{t}_{ij} \in C^1$,

ii) $\underset{\sim}{t}_{ij,j} + k_i^* = 0$, (5.11)

iii) $\underset{\sim}{t}_i = t_i^*$, op S_p , $(\underset{\sim}{t}_i = \underset{\sim}{t}_{ij} n_j)$.

Definitie: complementaire energie

$$U^*(S) = W^{(t)}(S) - \int_{S_u} t_i u_i^* dS \ , \tag{5.12}$$

met $W^{(t)}(S)$ volgens (1.22).

Hieruit volgt voor de complementaire energie van de statisch toelaatbare toestand

$$U^*(\underset{\sim}{S}) = W^{(t)}(\underset{\sim}{S}) - \int_{S_u} \underset{\sim}{t}_i u_i^* dS \ . \tag{5.13}$$

Voor de complementaire energie geldt de

<u>Stelling van de minimale complementaire energie</u>

$$U^*(\mathcal{S}) = \min_{\underset{\sim}{S}} U^*(\underset{\sim}{S}) \ . \tag{5.14}$$

Het bewijs van deze stelling is analoog aan het bewijs van (5.9).

Voor het verband tussen de potentiële en de complementaire energie geldt

<u>Stelling</u>:

$$U(\mathcal{S}) + U^*(\mathcal{S}) = 0 \ . \tag{5.15}$$

Voor het bewijs zie [1], p. 57.

Uit (5.9), (5.14) en (5.15) volgen de volgende insluitvoorwaarden voor de potentiële energie

$$U^*(\underset{\sim}{S}) \le -U^*(\mathcal{S}) = U(\mathcal{S}) \le U(\tilde{\mathcal{S}}) \ . \tag{5.16}$$

Toepassingen van de energieprincipes zijn o.a.:

i) Als $U(\mathcal{S})$ evenredig is met een of andere mechanische grootheid, bijvoorbeeld de torsiestijfheid, dan kunnen we met (5.16) boven- en ondergrenzen voor deze grootheden aangeven (zie bijv. [1], VI.4).
ii) Approximatie van de oplossing door middel van elementaire polynomen (bijv. eindige elementen methoden).
iii) Het bepalen van effectieve elasticiteitsconstanten voor inhomogene, anisotrope lichamen. Zie hiervoor § 3 van dit hoofdstuk.

V.2. Variatieprincipes van Friedrichs en Reissner ([2])

De beide energieprincipes uit de vorige paragraaf maakten gebruik van nevencondities, zoals evenwicht, compatibiliteit en de wet van Hooke.
In deze paragraaf wordt een energieprincipe (van Friedrichs) afgeleid, dat geen nevencondities gebruikt.

Definitie:

$$U_1 := \int_V W_s^{(e)} dV - \int_V k_i^* u_i dV - \int_{S_p} t_i^* u_i dS +$$

$$- \int_V [e_{ij} - \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})]\lambda_{ij} dV - \int_{S_u} p_i(u_i - u_i^*) dS \ . \qquad (5.17)$$

De eerste drie termen representeren volgens (5.7) de potentiële energie. λ_{ij} is een onbekende parameter. We nemen de tensor λ_{ij} symmetrisch.

N.B. Wanneer de verplaatsingen en deformaties een kinematisch toelaatbaar stelsel vormen, zijn de laatste twee integralen identiek nul (zie 5.6) en gaat U_1 over in de potentiële energie.

We eisen dat $\delta U_1 = 0$ voor willekeurige variaties van de 18 onafhankelijke variabelen: u_i, e_{ij}, λ_{ij} en p_i.
Er geldt

$$\delta U_1 = \int_V \frac{\partial W_s^{(e)}}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} dV - \int_V k_i^* \delta u_i dV - \int_{S_p} t_i^* \delta u_i dS +$$

$$- \int_V [\lambda_{ij}\delta e_{ij} + e_{ij}\delta\lambda_{ij} - u_{i,j}\delta\lambda_{ij} - \lambda_{ij}\delta u_{i,j}] dV +$$

$$- \int_{S_u} \delta p_i(u_i - u_i^*) dS - \int_{S_u} p_i \delta u_i dS = 0 \ . \qquad (5.18)$$

Hierin hebben we gebruik gemaakt van de symmetrie van λ_{ij}. Wanneer we alleen e_{ij} variëren en alle andere onafhankelijke variabelen constant houden, volgt uit (5.18) met (1.20)

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial W_s^{(e)}(e_{ij})}{\partial e_{ij}} = t_{ij} \; . \tag{5.19}$$

Als we alleen λ_{ij} variëren, volgt uit (5.18), wegens de symmetrie van λ_{ij}

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \; . \tag{5.20}$$

Volgens (5.19) geldt

$$\int\limits_V \lambda_{ij}\delta u_{i,j} dV = \int\limits_V t_{ij}\delta u_{i,j} dV \; .$$

Met de stelling van Gauss kunnen we afleiden

$$\begin{aligned} \int\limits_V t_{ij}\delta u_{i,j} dV &= \int\limits_V (t_{ij}\delta u_i)_{,j} - \int\limits_V t_{ij,j}\delta u_i dV = \\ &= \int\limits_S t_{ij}n_j\delta u_i dS - \int\limits_V t_{ij,j}\delta u_i dV = \\ &= \int\limits_{S_u} t_i\delta u_i dS + \int\limits_{S_p} t_i\delta u_i dS - \int\limits_V t_{ij,j}\delta u_i dV \; , \end{aligned}$$

waarmee (5.18) te herschrijven is als

$$\begin{aligned} \delta U_1 = & \int\limits_V \frac{\partial W_s^{(e)}}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} dV - \int\limits_V (t_{ij,j} + k_i^*)\delta u_i dV - \int\limits_{S_p} (t_i - t_i^*)\delta u_i dS + \\ & - \int\limits_V [\lambda_{ij}\delta e_{ij} + e_{ij}\delta\lambda_{ij} - u_{i,j}\delta\lambda_{ij}] dV + \\ & - \int\limits_{S_u} \delta p_i(u_i - u_i^*) dS - \int\limits_{S_u} (p_i - t_i)\delta u_i dS = 0 \; . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Als we alleen p_i en vervolgens alleen u_i over S_u variëren, vinden we achtereenvolgens uit (5.21)

$$u_i = u_i^* \, , \quad \text{op} \quad S_u \, , \tag{5.22}$$

$$p_i = t_i \, , \quad \text{op} \quad S_u \, . \tag{5.23}$$

Bij variatie van u_i over V resp. S_p vinden we

$$t_{ij,j} + k_i^* = 0 \, , \tag{5.24}$$

$$t_i = t_i^* \, , \quad \text{op} \quad S_p \, . \tag{5.25}$$

We definiëren U_2 door in U_1 λ_{ij} met t_{ij} en p_i met t_i te identificeren. Dit levert

$$U_2 := \int_V W_s^{(e)} dV - \int_V k_i^* u_i dV - \int_{S_p} t_i^* u_i dS +$$
$$- \int_V [e_{ij} - \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})] t_{ij} dV - \int_{S_u} t_i (u_i - u_i^*) dS \, . \tag{5.26}$$

We herleiden

$$\int_V t_{ij} u_{i,j} dV = \int_V (t_{ij} u_i)_{,j} dV - \int_V t_{ij,j} u_i dV =$$
$$= \int_{S_u} t_i u_i dS + \int_{S_p} t_i u_i dS - \int_V t_{ij,j} u_i dV \, . \tag{5.27}$$

Dit resultaat gesubstitueerd in (5.26) levert ons U_3

$$U_3 := - \int_V [t_{ij} e_{ij} - W_s^{(e)}] dV - \int_V [t_{ij,j} + k_i^*] u_i dV +$$
$$+ \int_{S_u} t_i u_i^* dS + \int_{S_p} (t_i - t_i^*) u_i dS \, . \tag{5.28}$$

Er geldt volgens (1.18)

$$t_{ij}e_{ij} - W_s^{(e)} = 2W_s^{(e)} - W_s^{(e)} = W_s^{(e)} \equiv W_s^{(t)} \; .$$

We eisen dat $\delta U_3 = 0$ voor willekeurige variaties van de 15 onafhankelijke variabelen: u_i, e_{ij} en t_{ij};

$$\delta U_3 = - \int_V \frac{\partial W_s^{(t)}}{\partial t_{ij}} \delta t_{ij} dV - \int_V [t_{ij,j} + k_i^*] \delta u_i dV +$$

$$- \int_V \delta(t_{ij,j}) u_i dV + \int_{S_u} \delta t_i u_i^* dS + \int_{S_p} \delta t_i u_i dS +$$

$$+ \int_{S_p} (t_i - t_i^*) \delta u_i dS = 0 \; . \tag{5.29}$$

Met

$$\int_V u_i \; \delta(t_{ij,j}) dV = \int_V (u_i \delta t_{ij})_{,j} dV - \int_V u_{i,j} \delta t_{ij} dV =$$

$$= \int_S u_i \delta t_{ij} n_j dS - \int_V u_{i,j} \delta t_{ij} dV =$$

$$= \int_{S_u} u_i \delta t_i dS + \int_{S_p} u_i \delta t_i dS - \int_V u_{i,j} \delta t_{ij} dV \; ,$$

is uit (5.29) af te leiden

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W_s^{(t)}}{\partial t_{ij}} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \; , \\ &t_{ij,j} + k_i^* = 0 \; , \\ &u_i = u_i^* \; , \quad \text{op} \quad S_u \; , \\ &t_i = t_i^* \; , \quad \text{op} \quad S_p \; . \end{aligned} \tag{5.30}$$

We definiëren U_4 door in U_1 : $\lambda_{ij} = t_{ij}$ te stellen

$$U_4 := \int_V [\tfrac{1}{2}t_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - W_s^{(t)} - k_i^* u_i]dV +$$

$$- \int_{S_p} t_i^* u_i dS - \int_{S_u} (u_i - u_i^*)p_i dS \ . \tag{5.31}$$

We eisen dat $\delta U_4 = 0$ voor willekeurige variaties van de 12 onafhankelijke variabelen: t_{ij}, u_i en p_i, hetgeen leidt tot het <u>principe van Reissner</u>

$$\delta U_4 = \int_V [\tfrac{1}{2}\delta t_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) + t_{ij}\delta u_{i,j} - e_{ij}\delta t_{ij} - k_i^*\delta u_i]dV +$$

$$- \int_{S_p} t_i^*\delta u_i dS - \int_{S_u} (u_i - u_i^*)\delta p_i dS - \int_{S_u} p_i \delta u_i dS = 0 \ , \tag{5.32}$$

waarin e_{ij} is gedefinieerd door

$$e_{ij} := \frac{\partial W_s^{(t)}}{\partial t_{ij}} \ . \tag{5.33}$$

Na enige bewerkingen is uit (5.32) af te leiden

$$\begin{aligned} & e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ , \\ & t_{ij,j} + k_i^* = 0 \ , \\ & u_i = u_i^* \ , \quad \text{op} \quad S_u \ , \\ & t_i = t_i^* \ , \quad \text{op} \quad S_p \ , \\ & t_i = p_i \ , \quad \text{op} \quad S_u \ . \end{aligned} \tag{5.34}$$

Volgens (1.18) en (1.21) geldt:

$$t_{ij}e_{ij} - W_s^{(e)} = \tfrac{1}{2}e_{ij}t_{ij} = \tfrac{1}{2}\gamma_{ijk\ell}t_{k\ell}t_{ij} \ . \tag{5.35}$$

Met (5.35) kunnen we U_3 herleiden tot

$$U_5 := -\int_V [\tfrac{1}{2}\gamma_{ijk\ell}t_{k\ell}t_{ij} + (t_{ij,j} + k_i^*)u_i]dV +$$

$$+ \int_{S_u} t_i u_i^* dS + \int_{S_p} (t_i - t_i^*)u_i dS \ . \tag{5.36}$$

U_5 is ook uit U_4 af te leiden met behulp van (1.22), $(5.34)^5$ en

$$\int_V t_{ij}u_{i,j}dV = \int_S t_i u_i dS - \int_V t_{ij,j}u_i dV \ . \tag{5.37}$$

Als we in U_5 de nevencondities $t_{ij,j} + k_i^* = 0$ en $t_i = t_i^*$ op S_p invoeren (d.w.z. de spanningen vormen een statisch toelaatbaar stelsel!), gaat U_5 over in

$$U_6 := -\int_V \tfrac{1}{2}\gamma_{ijk\ell}t_{k\ell}t_{ij}dV + \int_{S_u} t_i u_i^* dS \ . \tag{5.38}$$

$-U_6$ is de complementaire energie volgens (5.12).
Zo zijn we, uitgaande van een minimum energieprincipe op een maximum principe terecht gekomen; deze gedachte is afkomstig van Friedrichs.

V.3. Niet-homogene materialen

Het variatieprincipe van Hashin en Shtrikman (zie V.4) bepaalt grenzen voor de effectieve constanten bij inhomogene materialen.
De vergelijkingen, waaraan steeds voldaan moet worden, zijn (we laten volumekrachten buiten beschouwing)

$$\begin{aligned} &t_{ij,j} = 0 \ , \\ &e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ , \\ &t_{ij} = c_{ijk\ell}(\underline{x})e_{k\ell} = c_{ijk\ell}(\underline{x})u_{k,\ell} \ . \end{aligned} \tag{5.39}$$

N.B. $c_{ijk\ell}$ is een functie van de plaats $\underline{x}$ bij inhomogene materialen!

Uit de eerste en derde vergelijking van (5.39) volgt

$$(c_{ijk\ell}(\underline{x})u_{k,\ell})_{,j} = 0 \ ,$$

of

$$c_{ijk\ell,j}u_{k,\ell} + c_{ijk\ell}u_{k,\ell j} = 0 \ . \tag{5.40}$$

We nemen $c_{ijk\ell} \in C^1$, de klasse van eenmaal continu differentieerbare functies.

We beschouwen een <u>representatief volume-element</u> V^p, dit is een deel van het volume, dat klein is t.o.v. het totale volume, maar toch groot genoeg is om een groot aantal inhomogeniteiten te bevatten.
We definiëren:
Een volume V heet <u>statistisch</u> (of <u>macroscopisch</u>) <u>homogeen</u>, als de kans op het aantreffen van een bepaald aantal inhomogeniteiten in <u>elk</u> representatief volume-element V^p even groot is.
We definiëren de middelwaarde van $c_{ijk\ell}(\underline{x})$ over een volume-element V^p als

$$\bar{c}_{ijk\ell} := \frac{1}{V^p} \int_{V^p} c_{ijk\ell}(\underline{x})dV \ ; \tag{5.41}$$

$\bar{c}_{ijk\ell}$ is een constante voor het volume-element V^p en bij een statistisch homogeen lichaam ook een constante voor het hele volume V.
We eisen dat de belasting weinig varieert van element tot element en definieren

$$\bar{t}_{ij} := \frac{1}{V^p} \int_{V^p} t_{ij}dV \ ,$$

$$\bar{u}_i := \frac{1}{V^p} \int_{V^p} u_i dV \ , \tag{5.42}$$

$$\bar{e}_{ij} := \frac{1}{V^p} \int_{V^p} e_{ij}dV \ .$$

Bovendien voeren we in

$$
\begin{aligned}
c'_{ijk\ell}(\underline{x}) &:= c_{ijk\ell}(\underline{x}) - \bar{c}_{ijk\ell} , \\
t'_{ij}(\underline{x}) &:= t_{ij}(\underline{x}) - \bar{t}_{ij}(\underline{x}) , \\
e'_{ij}(\underline{x}) &:= e_{ij}(\underline{x}) - \bar{e}_{ij}(\underline{x}) .
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

N.B. De vector $\underline{x}$ in $\bar{t}_{ij}(\underline{x})$ moet worden gezien als de plaatsvector van het volume-element V^p: bij ieder volume-element hoort een $\bar{t}_{ij}$, zodat $\bar{t}_{ij}$ afhangt van de plaats van het volume-element.

Er geldt:

$$
\overline{c'_{ijk\ell}} = \overline{e'_{ij}} = \overline{t'_{ij}} = 0 . \tag{5.44}
$$

Tevens is

$$
\bar{t}_{ij} = \frac{1}{V^p} \int_{V^p} t_{ij}(\underline{x})dV = \frac{1}{V^p} \int_{V^p} c_{ijk\ell}(\underline{x})e_{ij}(\underline{x})dV = \overline{c_{ijk\ell}e_{ij}} =
$$

$$
= \overline{(\bar{c}_{ijk\ell} + c'_{ijk\ell})(\bar{e}_{k\ell} + e'_{k\ell})} = \overline{c_{ijk\ell}}.\overline{e_{k\ell}} + \overline{c'_{ijk\ell}e'_{k\ell}} , \tag{5.45}
$$

wegens (5.44).

We herleiden de laatste term van (5.45)

$$
\begin{aligned}
\overline{c'_{ijk\ell}e'_{k\ell}} &= \frac{1}{V^p} \int_{V^p} c'_{ijk\ell}e'_{k\ell}dV = \frac{1}{V^p} \int_{V^p} c'_{ijk\ell}u'_{k,\ell}dV = \\
&= \frac{1}{V^p} \int_{V^p} (c'_{ijk\ell}u'_k)_{,\ell}dV - \frac{1}{V^p} \int_{V^p} c'_{ijk\ell,\ell}u'_kdV = \\
&= \frac{1}{V^p} \int_{S^p} c'_{ijk\ell}u'_kn_\ell dS - \frac{1}{V^p} \int_{V^p} c'_{ijk\ell,\ell}u'_kdV .
\end{aligned}
$$

In het algemeen is $\overline{c'_{ijk\ell}e'_{k\ell}} \neq 0$.

We definiëren

$$c^*_{ijk\ell} := \bar{c}_{ijk\ell} + \frac{\overline{c'_{ijpq}e'_{pq}}}{\bar{e}_{k\ell}} \quad , \tag{5.46}$$

($c^*_{ijk\ell}$ heet de <u>effectieve constante</u>) dan is (5.45) te herschrijven als

$$\bar{t}_{ij} = c^*_{ijk\ell}\bar{e}_{k\ell} \; . \tag{5.47}$$

N.B. Bij statistisch homogene materialen is $c^*_{ijk\ell}$ onafhankelijk van de plaats.

We leiden voor statistisch homogene lichamen een uitdrukking af voor de elastische energie, welke dezelfde vorm zal hebben als bij homogene lichamen. V is het totale volume, opgebouwd uit "veel" representatieve volume-elementen V^p_k, dus

$$V = \sum_k V^p_k \; . \tag{5.48}$$

De elastische energie per volume is

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2V}\int_V t_{ij}e_{ij}dV = \frac{1}{2V}\sum_k \overline{t_{ij}e_{ij}}^{(k)} \; V^p_k =$$

$$= \frac{1}{2V}\sum_k V^p_k \; \overline{(\bar{t}_{ij} + t'_{ij})(\bar{e}_{ij} + e'_{ij})}^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{2V}\sum_k V^p_k \; (\overline{t_{ij}}^{(k)} \; \overline{e_{ij}}^{(k)} + \overline{t'_{ij}e'_{ij}}^{(k)}) \; . \tag{5.49}$$

Nu geldt

$$V^p_k \; \overline{t'_{ij}e'_{ij}}^{(k)} = \int_{V^p_k} (t'_{ij}e'_{ij})dV = \int_{V^p_k} (t'_{ij}u'_{i,j})dV =$$

$$= \int_{V^p_k} (t'_{ij}u'_i)_{,j}dV - \int_{V^p_k} (t'_{ij,j}u'_i)dV =$$

$$= \int_{S^p_k} t'_{ij}u'_in_jdS - \int_{V^p_k} t'_{ij,j}u'_idV \; .$$

De laatste integraal is nul omdat wegens (5.39)[1], (5.42)[1] en (5.43)[2]

$$t'_{ij,j} = t_{ij,j} - \frac{1}{V^p} \int_{V^p} t_{ij,j} dV = 0 \; . \tag{5.50}$$

We eisen, dat de belasting zo glad is, of het representatieve volume-element zo klein is, dat t'_{ij} en u'_i continu verlopen over het oppervlak tussen twee aangrenzende volume-elementen. Voor elk oppervlak tussen twee volume-elementen V^p_k en V^p_{k+1} geldt dus:

$$\sum_{k,k+1} t'_{ij} u'_i n_j = 0 \; , \tag{5.51}$$

zodat alleen het buitenoppervlak S een bijdrage levert

$$\sum_k \int_{S^p_k} t'_{ij} u'_i n_j dS = \int_S t'_{ij} u'_i n_j dS = 0 \; , \tag{5.52}$$

immers op S_p geldt $t_i = t^*_i = \bar{t}_i$ en op S_u: $u_i = u^*_i = \bar{u}_i$, zodat op S_p: $t'_{ij} = 0$ en op S_u: $u'_i = 0$. (5.49) wordt met (5.50) en (5.52)

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2V} \sum_k V^p_k \, \overline{t_{ij}}^{(k)} \, \overline{e_{ij}}^{(k)} = \frac{1}{2V} \sum_k V^p_k \, c^*_{ij\ell m} \overline{e_{ij}}^{(k)} \, \overline{e_{\ell m}}^{(k)} \; .$$

Na de limietovergang: $V^p_k \to 0$ gaat dit over in

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2V} c^*_{ijk\ell} \int_V \bar{e}_{ij} \bar{e}_{k\ell} dV \; , \tag{5.53}$$

of

$$W = \tfrac{1}{2} c^*_{ijk\ell} \int_V \bar{e}_{ij} \bar{e}_{k\ell} dV \; .$$

Hiermede is een statistisch homogeen lichaam "gehomogeniseerd".

We beschouwen de energieprincipes voor dergelijke "gehomogeniseerde" statistisch homogene lichamen.
We nemen $k_i^* = 0$ en óf $S_p = 0$ óf $S_u = 0$, dan blijkt met (5.8) en (5.12):

a) $U(S) = W(S)$, potentiële energie als $S_p = 0$

b) $U^*(S) = W(S)$, complementaire energie als $S_u = 0$. (5.54)

Het energieprincipe (5.9), behorende bij $(5.54)^1$ luidt

$$\tfrac{1}{2}c^*_{ijk\ell}\int_V \bar{e}_{ij}\bar{e}_{k\ell}dV \leq W(\tilde{S}) \ , \tag{5.55}$$

als $\tilde{S}$ een kinematisch toelaatbaar stelsel is.
Het energieprincipe (5.14), behorende bij $(5.54)^2$ luidt

$$\tfrac{1}{2}\gamma^*_{ijk\ell}\int_V \bar{t}_{ij}\bar{t}_{k\ell}dV \leq W(\underset{\sim}{S}) \ , \tag{5.56}$$

als $\underset{\sim}{S}$ een statisch toelaatbaar stelsel is.
Van grote praktische betekenis is het speciale geval, dat $\bar{e}_{k\ell} = a_{k\ell}$ is constant. Dan is $u_k^* = a_{k\ell}x_\ell$ op S_u, waarmee (5.55) overgaat in

$$c^*_{ijk\ell}a_{k\ell}a_{ij} \leq \frac{1}{V}\int_V c_{ijk\ell}\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{k\ell}dV \ . \tag{5.57}$$

Als we aannemen, dat $\bar{t}_{k\ell} = b_{k\ell}$ is constant, dan is $t_k^* = b_{k\ell}n_\ell$ op S_p, waarmee (5.56) overgaat in

$$\gamma^*_{ijk\ell}b_{ij}b_{k\ell} \leq \frac{1}{V}\int_V \gamma_{ijk\ell}\underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{t}_{k\ell}dV \ . \tag{5.58}$$

V.4. Het variatieprincipe van Hashin en Shtrikman ([3])

We beschouwen twee lichamen die qua vorm en uitwendige belasting identiek zijn, met volumekrachten nul.
Het ene lichaam is homogeen, isotroop met elasticiteitsconstante $c^0_{ijk\ell}$; het andere is willekeurig, dus inhomogeen en/of anisotroop met modulus $c_{ijk\ell}(\underline{x})$.

Als $c^0_{ijk\ell}$ bekend is, kunnen we voor $c_{ijk\ell}$ grenzen afleiden met het principe van Hashin-Shtrikman.
Er geldt:

$$t^0_{ij} = c^0_{ijk\ell}e^0_{k\ell} ,$$
$$t_{ij} = c_{ijk\ell}e_{k\ell} . \tag{5.59}$$

We definiëren de polarisatiespanning p_{ij} door

$$p_{ij} := t_{ij} - c^0_{ijk\ell}e_{k\ell} = (c_{ijk\ell} - c^0_{ijk\ell})e_{k\ell} . \tag{5.60}$$

We definiëren de volgende verschilgrootheden:

$$u'_i := u_i - u^0_i ,$$
$$e'_{k\ell} := e_{k\ell} - e^0_{k\ell} , \tag{5.61}$$
$$R_{ijk\ell} := c_{ijk\ell} - c^0_{ijk\ell} .$$

Verder is $H_{ijk\ell}$ de reciproke van $R_{k\ell mn}$

$$H_{ijk\ell}R_{k\ell mn} = \tfrac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) .$$

Het <u>variatieprincipe van Hashin-Shtrikman</u> luidt als volgt: de integraal

$$U_p := U_0 - \tfrac{1}{2}\int_V [H_{ijk\ell}p_{ij}p_{k\ell} - p_{ij}e'_{ij} - 2p_{ij}e^0_{ij}]dV , \tag{5.62}$$

met

$$U_0 := \tfrac{1}{2}\int_V t^0_{ij}e^0_{ij}dV , \quad \text{(de elastische energie van het homogene lichaam)}$$

genomen over het volume van het inhomogene, anisotrope lichaam, is stationair onder variaties van p_{ij} en e_{ij} onder de condities

$$(c^0_{ijk\ell}e'_{k\ell} + p_{ij})_{,j} = 0 ,$$
$$u'_i = 0 \quad \text{op} \quad S \equiv S_u , \tag{5.63}$$

als voldaan is aan

$$p_{ij} = R_{ijk\ell} e_{k\ell} \, . \tag{5.64}$$

Verder is de stationaire waarde U_p^s van U_p een absoluut maximum als $R_{ijk\ell}$ positief definiet is en een absoluut minimum als $R_{ijk\ell}$ negatief definiet is. De stationaire waarde U_p^s is gelijk aan de werkelijke elastische energie, opgehoopt in het lichaam.

N.B. We beperken ons hier tot het randvoorwaarde probleem van de tweede soort ($S = S_u$, $S_p = 0$). We kunnen een analoog verhaal houden voor problemen van de eerste soort ($S = S_p$, $S_u = 0$).

De eerste vergelijking (5.63) betekent dat de evenwichtsrelatie identiek is voor beide lichamen: $t_{ij,j} = t^0_{ij,j}$.
De tweede vergelijking (5.63) volgt uit het feit dat de verplaatsingen op beide lichamen op gelijke wijze zijn voorgeschreven.

We berekenen eerst δU_p voor een willekeurige variatie van $U_p = U_p(e_{ij}, p_{ij})$.

N.B. We schrijven verder U in plaats van U_p.

Met

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} + \frac{\partial U}{\partial p_{ij}} \delta p_{ij} \, .$$

krijgen we

$$\delta U = - \int_V [H_{ijk\ell} p_{ij} \delta p_{k\ell} - \tfrac{1}{2} p_{ij} \delta e'_{ij} - \tfrac{1}{2} e'_{ij} \delta p_{ij} - e^0_{ij} \delta p_{ij}] dV \, , \tag{5.65}$$

wegens $H_{ijk\ell} = H_{k\ell ij}$.
Uit $p_{ij} = p_{ji}$ en $e'_{ij} = \frac{1}{2}(u'_{i,j} + u'_{j,i})$ volgt

$$\int_V p_{ij} \delta e'_{ij} dV = \int_V p_{ij} \delta (u'_{i,j}) dV = \int_S \delta u'_i p_{ij} n_j dS - \int_V p_{ij,j} \delta u'_i dV \, .$$

Omdat u_i voorgeschreven is op S, is $\delta u_i' = 0$ op S, dus

$$\int_V p_{ij}\delta e_{ij}' dV = - \int_V p_{ij,j}\delta u_i' dV .$$

Met $(5.63)^1$ kunnen we dit herleiden tot

$$\int_V p_{ij}\delta e_{ij}' dV = \int_V c^0_{ijk\ell} e_{k\ell,j}' \delta u_i' dV . \tag{5.66}$$

Nogmaals Gauss toepassen en bedenken dat $\delta u_i' = 0$ op S levert

$$\int_V p_{ij}\delta e_{ij}' dV = - c^0_{ijk\ell} \int_V e_{k\ell}' \delta u_{i,j}' dV = - c^0_{ijk\ell} \int_V e_{k\ell}' \delta e_{ij}' dV . \tag{5.67}$$

Wegens $(5.61)^2$ geldt

$$\tfrac{1}{2}\delta p_{ij} e_{ij}' + \delta p_{ij} e^0_{ij} = e_{ij}\delta p_{ij} - \tfrac{1}{2} e_{ij}' \delta p_{ij} . \tag{5.68}$$

Met (5.67) en (5.68) kunnen we (5.65) herschrijven

$$\delta U = - \int_V [H_{ijk\ell} p_{ij} \delta p_{k\ell} + \tfrac{1}{2} c^0_{ijk\ell} e_{k\ell}' \delta e_{ij}' - e_{ij}\delta p_{ij} + \tfrac{1}{2} e_{ij}' \delta p_{ij}] dV =$$

$$= - \int_V [H_{ijk\ell} p_{ij} \delta p_{k\ell} - e_{ij}\delta p_{ij}] dV - \tfrac{1}{2} \int_V [e_{ij}'\delta p_{ij} + c^0_{ijk\ell} e_{k\ell}' \delta e_{ij}'] dV. \tag{5.69}$$

Wegens $c^0_{ijk\ell} = c^0_{k\ell ij}$ geldt: $c^0_{ijk\ell} e_{k\ell}' \delta e_{ij}' = c^0_{ijk\ell} e_{ij}' \delta e_{k\ell}'$ en hiermee kunnen we de tweede integraal in (5.69) schrijven als

$$-\tfrac{1}{2} \int_V e_{ij}' [\delta p_{ij} + c^0_{ijk\ell} \delta e_{k\ell}'] dV . \tag{5.70}$$

Definieer

$$s_{ij} := c^0_{ijk\ell} e_{k\ell}' + p_{ij} , \tag{5.71}$$

dan is volgens (5.63)

$$s_{ij,j} = 0 \Rightarrow \delta(s_{ij,j}) = 0 . \tag{5.72}$$

(5.70) wordt nu

$$-\tfrac{1}{2}\int_V e'_{ij}\,\delta S_{ij}\,dV = -\tfrac{1}{2}\int_S u'_i\,\delta S_{ij}n_j\,dS + \tfrac{1}{2}\int_V u'_i\,\delta S_{ij,j}\,dV = 0$$

want $u'_i = 0$ op S en $\delta S_{ij,j} = 0$.
(5.69) wordt hiermee

$$\delta U = -\int_V [H_{ijk\ell}p_{ij}\,\delta p_{k\ell} - e_{ij}\,\delta p_{ij}]dV \ . \tag{5.73}$$

Met $H_{ijk\ell}p_{ij}\,\delta p_{k\ell} = H_{ijk\ell}p_{k\ell}\,\delta p_{ij}$ volgt uit (5.73) dat $\delta U_p = 0$ dan en slechts dan als

$$e_{ij} = H_{ijk\ell}p_{k\ell} \ ,$$

of (5.74)

$$p_{k\ell} = R_{k\ell mn}e_{mn} \ .$$

We herschrijven (5.62) met $(5.61)^2$

$$U = U_0 - \tfrac{1}{2}\int_V [H_{ijk\ell}p_{ij}p_{k\ell} - p_{ij}e_{ij} - p_{ij}e^0_{ij}]dV \ . \tag{5.75}$$

U neemt zijn stationaire waarde aan voor $e_{ij} = H_{ijk\ell}p_{k\ell}$, zodat

$$U^s = U_0 + \tfrac{1}{2}\int_V p_{ij}e^0_{ij}\,dV \ . \tag{5.76}$$

We herschrijven (5.76)

$$U^s = \tfrac{1}{2}\int_V e^0_{ij}[t^0_{ij} + p_{ij}]dV = \tfrac{1}{2}\int_V e^0_{ij}[t^0_{ij} + t_{ij} - c^0_{ijk\ell}e_{k\ell}]dV =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_V [e^0_{ij}t^0_{ij} + t_{ij}e^0_{ij} - t^0_{ij}e_{ij}]dV =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_V [-t^0_{ij}e'_{ij} + t_{ij}e^0_{ij}]dV \ , \tag{5.77}$$

wegens (5.59) en (5.61).

Toepassing van de stelling van Gauss en $u_i' = 0$ op S, levert

$$-\tfrac{1}{2} \int_V t_{ij}^0 e_{ij}' dV = \tfrac{1}{2} \int_V t_{ij,j}^0 u_i' dV = 0 \ , \tag{5.78}$$

omdat $t_{ij,j}^0 = 0$.
Dan wordt (5.77)

$$U^s = \tfrac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij}^0 dV = \tfrac{1}{2} \int_V t_{ij} [e_{ij} - e_{ij}'] dV = \tfrac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij} dV \tag{5.79}$$

want $\int_V t_{ij} e_{ij}' dV = 0$ om dezelfde reden als (5.78).

(5.79) laat zien dat U^s precies gelijk is aan de elastische energie van het lichaam.

We onderzoeken nu, wanneer U^s een minimum of maximum aanneemt. Er geldt

$$U(e_{ij} + \delta e_{ij},\ p_{ij} + \delta p_{ij}) = U(e_{ij}, p_{ij}) + \left[\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} + \frac{\partial U}{\partial p_{ij}} \delta p_{ij}\right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{k\ell}} \delta e_{ij} \delta e_{k\ell} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial p_{k\ell}} \delta e_{ij} \delta p_{k\ell} + \frac{\partial^2 U}{\partial p_{ij} \partial p_{k\ell}} \delta p_{ij} \delta p_{k\ell}\right] + \ldots \tag{5.80}$$

We kunnen dit schrijven als (definitie van δU en $\delta^2 U$!)

$$U(e_{ij} + \delta e_{ij},\ p_{ij} + \delta p_{ij}) = U(e_{ij}, p_{ij}) + \delta U + \delta^2 U + \ldots \tag{5.81}$$

Uit (5.62) volgt voor $\delta^2 U$ (bedenk: $\delta e_{ij}' = \delta(e_{ij} - e_{ij}^0) = \delta e_{ij}$!)

$$\delta^2 U = -\tfrac{1}{2} \int_V [H_{ijk\ell} \delta p_{ij} \delta p_{k\ell} - \delta p_{ij} \delta e_{ij}] dV \ . \tag{5.82}$$

Met Gauss vinden we

$$\int_V \delta p_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V (\delta p_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \delta p_{ij,j} \delta u_i dV =$$

$$= \int_S \delta p_{ij} \delta u_i n_j dS + \int_V c_{ijk\ell}^0 \delta e_{k\ell,j}' \delta u_i dV \ .$$

Hierin is gebruik gemaakt van (5.63). De laatste integraal kunnen we door nogmaals Gauss toe te passen, herleiden tot

$$- \int_V c^0_{ijk\ell}\delta e'_{k\ell}\delta e_{ij} dV \ ,$$

waarmee (5.82) overgaat in (bedenk dat $\delta e'_{k\ell} = \delta e_{k\ell}$)

$$\delta^2 U = -\tfrac{1}{2} \int_V [H_{ijk\ell}\delta p_{ij}\delta p_{k\ell} + c^0_{ijk\ell}\delta e_{ij}\delta e_{k\ell}] dV \ . \tag{5.83}$$

De elasticiteitsmoduli $c_{ijk\ell}$ en $c^0_{ijk\ell}$ zijn positief definiet.

We onderscheiden de volgende twee gevallen:

a) R en H zijn positief definiet in ieder punt van V (dan is $c > c^0$).
Met $H_{ijk\ell}\delta p_{ij}\delta p_{k\ell} > 0$ en $c^0_{ijk\ell}\delta e_{k\ell}\delta e_{ij} > 0$ volgt uit (5.83) dat $\delta^2 U < 0$.
Dit betekent dat, als $c_{ijk\ell} > c^0_{ijk\ell}$, dan is U^s een <u>maximum</u>.

b) R en H zijn negatief definiet in ieder punt van V ($c > c^0$).
Dan is $H_{ijk\ell}\delta p_{ij}\delta p_{k\ell} < 0$ en $c^0_{ijk\ell}\delta e_{k\ell}\delta e_{ij} > 0$.
We kunnen nu a priori geen uitspraak doen over het teken van $\delta^2 U$. We zullen echter laten zien, dat nu $\delta^2 U > 0$, zodat U^s een <u>minimum</u> is.

Definieer daartoe $\gamma^0_{ijk\ell}$ als de inverse van $c^0_{ijk\ell}$:

$$\gamma^0_{ijk\ell} c^0_{k\ell mn} = \tfrac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) \ , \tag{5.84}$$

en I als

$$I := \int_V \gamma^0_{ijk\ell}\delta p_{ij}\delta p_{k\ell} dV \ . \tag{5.85}$$

Volgens (5.71) is

$$\delta p_{ij} = -c^0_{ijpq}\delta e'_{pq} + \delta S_{ij} \ , \qquad \text{met} \qquad \delta S_{ij,j} = 0 \ .$$

Hiermee gaat (5.85) over in

$$I = \int_V \gamma^0_{ijk\ell}[\delta S_{ij} - c^0_{ijpq}\delta e'_{pq}][\delta S_{k\ell} - c^0_{k\ell mn}\delta e'_{mn}]dV =$$

$$= \int_V \gamma^0_{ijk\ell}\delta S_{ij}\delta S_{k\ell}dV + \int_V \gamma^0_{ijk\ell}c^0_{ijpq}c^0_{k\ell mn}\delta e'_{pq}\delta e'_{mn}dV +$$

$$- \int_V \gamma^0_{ijk\ell}c^0_{ijpq}\delta e'_{pq}\delta S_{k\ell}dV - \int_V \gamma^0_{ijk\ell}c^0_{k\ell mn}\delta e'_{mn}\delta S_{ij}dV . \qquad (5.86)$$

Met (5.84) is de laatste integraal te schrijven als

$$\int_V \delta e'_{mn}\delta S_{mn}dV = \int_V \delta S_{mn}\delta u'_{m,n}dV =$$

$$= \int_S \delta S_{mn}\delta u'_m n_n dS - \int_V \delta u'_m \delta S_{mn,n}dV = 0 .$$

De eerste integraal is nul wegens $\delta u'_m = 0$ op S en de tweede is nul wegens $\delta S_{mn,n} = 0$.

Analoog is ook de voorlaatste integraal in (5.86) nul.

Dus voor I geldt, na gebruikmaking van (5.84)

$$I = \int_V \gamma^0_{ijk\ell}\delta S_{ij}\delta S_{k\ell}dV + \int_V c^0_{ijpq}\delta e'_{pq}\delta e'_{ij}dV . \qquad (5.87)$$

De beide integralen in (5.87) zijn positief, zodat

$$I > \int_V c^0_{ijpq}\delta e'_{pq}\delta e'_{ij}dV . \qquad (5.88)$$

Met (5.85) en (5.88) gaat (5.82) over in

$$\delta^2 U = -\tfrac{1}{2}\int_V H_{ijk\ell}\delta p_{ij}\delta p_{k\ell}dV - \tfrac{1}{2}\int_V c^0_{ijk\ell}\delta e'_{k\ell}\delta e'_{ij}dV >$$

$$> -\tfrac{1}{2}\int_V H_{ijk\ell}\delta p_{ij}\delta p_{k\ell}dV - \tfrac{1}{2}\int_V \gamma^0_{ijk\ell}\delta p_{ij}\delta p_{k\ell}dV .$$

Dus

$$\delta^2 U > -\tfrac{1}{2} \int_V (H_{ijk\ell} + \gamma^0_{ijk\ell})\delta p_{ij}\delta p_{k\ell} dV \; . \qquad (5.89)$$

Definieer $A_{ijk\ell} := -H_{ijk\ell}$, dan is $A_{ijk\ell}$ positief definiet en symmetrisch en er volgt met $H = R^{-1} = (c - c^0)^{-1}$ dat $c^0 = c + A^{-1}$, zodat

$$\gamma^0 = (c^0)^{-1} = (c + A^{-1})^{-1} \; .$$

Hiermee kunnen we (5.89) schrijven als

$$\delta^2 U > \tfrac{1}{2} \int_V \{A_{ijk\ell} - (c_{ijk\ell} + A^{-1}_{ijk\ell})^{-1}\}\delta p_{ij}\delta p_{k\ell} dV \; .$$

We moeten dus aantonen dat, als $(\underline{x},A\underline{x}) > 0$ voor elke vector $\underline{x} \neq \underline{0}$, dan ook geldt

$$(\underline{x}, \{A - (c + A^{-1})^{-1}\}\underline{x}) > 0 \; . \qquad (5.90)$$

Herschrijven van (5.90) levert

$$(\underline{x}, A^{\frac{1}{2}}\{I - A^{-\frac{1}{2}}(c + A^{-1})^{-1}A^{-\frac{1}{2}}\}A^{\frac{1}{2}}\underline{x}) > 0 \; ,$$

waarin $A^{\frac{1}{2}}$ de eenduidig bepaalde, positief definiete en symmetrische matrix is, gedefinieerd door $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = A$ en I de eenheidsmatrix is. We herleiden verder tot

$$(A^{\frac{1}{2}}\underline{x}, \{I - (I + A^{\frac{1}{2}}\, c\, A^{\frac{1}{2}})^{-1}\}A^{\frac{1}{2}}\underline{x}) > 0 \; .$$

Omdat c en A positief definiet zijn, is ook $A^{\frac{1}{2}}\, c\, A^{\frac{1}{2}}$ positief definiet. We geven de eigenwaarden van $A^{\frac{1}{2}}\, c\, A^{\frac{1}{2}}$ aan door λ_j $(j = 1,2,\ldots,9)$, dan worden de eigenwaarden van $\{I - (I + A^{\frac{1}{2}}\, c\, A^{\frac{1}{2}})^{-1}\}$ gegeven door

$$\mu_j = 1 - \frac{1}{1 + \lambda_j} \; , \qquad (j = 1,2,\ldots,9) \; .$$

Omdat iedere λ_j positief is, is μ_j $(j = 1,2,\ldots,9)$ ook positief. We concluderen hieruit, dat de matrix

$$I - (I + A^{\frac{1}{2}}\, c\, A^{\frac{1}{2}})^{-1}$$

positief definiet is, waarmee (5.90) bewezen is.

Conclusie: $(H_{ijk\ell} + \gamma^0_{ijk\ell})$ is negatief definiet en U^s is minimaal, want $\delta^2 U > 0$. $\boxdot$

Stelling: Beschouw twee lichamen van gelijke vorm, waarvan het ene homogeen, isotroop is en het andere willekeurig gestructureerd. Voor beide lichamen is aan het oppervlak hetzelfde verplaatsingsveld voorgeschreven. Door aan het homogene lichaam een volumekracht k_i, gegeven door

$$k_i = (R_{ijk\ell}e_{k\ell})_{,j} , \tag{5.91}$$

toe te voegen, krijgen we in dit lichaam dezelfde deformaties als in het niet-homogene lichaam. In (5.91) is $e_{k\ell}$ het deformatieveld van het niet-homogene lichaam en is $R_{ijk\ell}$ gedefinieerd volgens (5.61).

N.B. Grootheden, die betrekking hebben op het homogene, isotrope lichaam, worden weer aangegeven met $\overset{0}{\ }$, bv. $\overset{0}{e}_{k\ell}$.

Het bewijs van de stelling loopt als volgt:
er geldt *oorspronkelijk* ($k_i = 0$)

$$\overset{0}{u}_i = u_i = \overset{*}{u}_i , \quad (\overset{*}{u}_i \text{ voorgeschreven}) ,$$

$$t_{ij,j} = (c_{ijk\ell}e_{k\ell})_{,j} = 0 ,$$

$$\overset{0}{t}_{ij,j} = (\overset{0}{c}_{ijk\ell}\overset{0}{e}_{k\ell})_{,j} = 0 .$$

De volumekrachten $k_i = (R_{ijk\ell}e_{k\ell})_{,j}$ geven aanleiding tot een extra deformatieveld $\overset{1}{e}_{ij}$, waarmee de totale spanning wordt

$$\overset{*}{t}_{ij} := \overset{0}{t}_{ij} + \overset{0}{c}_{ijk\ell}\overset{1}{e}_{k\ell} = \overset{0}{c}_{ijk\ell}(\overset{0}{e}_{k\ell} + \overset{1}{e}_{k\ell}) . \tag{5.92}$$

We moeten aantonen dat $e_{k\ell} = \overset{0}{e}_{k\ell} + \overset{1}{e}_{k\ell}$.
We gaan uit van de evenwichtsvergelijking voor het homogene lichaam

$$\overset{*}{t}_{ij,j} = - k_i = -(R_{ijk\ell}e_{k\ell})_{,j} . \tag{5.93}$$

Volgens (5.92) geldt

$$\overset{*}{t}_{ij,j} = \overset{0}{c}_{ijk\ell}(\overset{0}{e}_{k\ell,j} + \overset{1}{e}_{k\ell,j}) . \tag{5.94}$$

Combinatie van (5.93) en (5.94) levert met (5.61)

$$-(c_{ijk\ell}e_{k\ell} - \overset{0}{c}_{ijk\ell}e_{k\ell})_{,j} = \overset{0}{c}_{ijk\ell}(\overset{0}{e}_{k\ell,j} + \overset{1}{e}_{k\ell,j}) \ . \qquad (5.95)$$

Wegens $t_{ij,j} = 0$ in het willekeurige lichaam, geldt

$$(c_{ijk\ell}e_{k\ell})_{,j} = 0 \ , \qquad (5.96)$$

waaruit voor (5.95) volgt

$$\overset{0}{c}_{ijk\ell}(e_{k\ell,j} - \overset{0}{e}_{k\ell,j} - \overset{1}{e}_{k\ell,j}) = 0 \ . \qquad (5.97)$$

Definieer $\hat{t}_{ij}$ door

$$\hat{t}_{ij} := \overset{0}{c}_{ijk\ell}(e_{k\ell} - \overset{0}{e}_{k\ell} - \overset{1}{e}_{k\ell}) \ , \qquad (5.98)$$

dan zien we uit (5.97) dat

$$\hat{t}_{ij,j} = 0 \ . \qquad (5.99)$$

Definieer $\hat{u}_k$ door

$$\hat{u}_k := \overset{0}{u}_k + \overset{1}{u}_k - u_k \ ,$$

dan is

$$\overset{0}{e}_{k\ell} + \overset{1}{e}_{k\ell} - e_{k\ell} = \tfrac{1}{2}(\hat{u}_{k,\ell} + \hat{u}_{\ell,k}) \ . \qquad (5.100)$$

Omdat op de oppervlakken van beide lichamen dezelfde verplaatsingen zijn voorgeschreven, geldt $u_k = \overset{0}{u}_k = \overset{*}{u}_k$ en $\overset{1}{u}_k = 0$, waaruit

$$\hat{u}_k = \overset{0}{u}_k + \overset{1}{u}_k - u_k = 0 \quad \text{op} \quad S \ . \qquad (5.101)$$

Beschouw de elastische energie

$$W := \tfrac{1}{2} \int_V \hat{t}_{ij}\hat{u}_{i,j}dV = \tfrac{1}{2} \int_V \overset{0}{c}_{ijk\ell}\hat{u}_{k,\ell}\hat{u}_{i,j}dV \geq 0 \ . \qquad (5.102)$$

Met Gauss herleiden we op grond van (5.101) en (5.99)

$$2W = \int_V (\hat{t}_{ij}\hat{u}_i)_{,j} dV - \int_V \hat{t}_{ij,j}\hat{u}_i dV = 0 \ .$$

We concluderen, dat $W \equiv 0$, waaruit volgt:

$$\hat{u}_{i,j} = 0 \ , \Rightarrow \hat{e}_{ij} = 0 \ ,$$

en dan is

$$e_{k\ell} = e^0_{k\ell} + e^1_{k\ell} \ . \qquad \square \tag{5.103}$$

<u>N.B.</u> Deze stelling geldt alleen in de lineaire theorie.

V.5. <u>Verband tussen klassieke energieprincipes en Hashin-Shtrikman principe</u>

We onderzoeken nu de relatie tussen de klassieke energieprincipes en het boven behandelde Hashin-Shtrikman energieprincipe.
Neem in het homogene, isotrope lichaam $c^0_{ijk\ell} = 0$, d.w.z. het lichaam is oneindig slap, dan volgt voor de polarisatiespanning p_{ij} uit (5.60)

$$p_{ij} = t_{ij} \ . \tag{5.104}$$

Eveneens volgt dan uit (5.61)

$$R_{ijk\ell} = c_{ijk\ell} \quad \text{en} \quad H_{ijk\ell} = \gamma_{ijk\ell} \ . \tag{5.105}$$

Omdat $t^0_{ij} = 0$, immers $t^0_{ij} = c^0_{ijk\ell}e^0_{k\ell}$, geldt

$$U_0 = \tfrac{1}{2} \int_V t^0_{ij} e^0_{ij} dV = 0 \ . \tag{5.106}$$

Formule (5.62) gaat dan over in

$$U_p = -\tfrac{1}{2} \int_V [\gamma_{ijk\ell} t_{ij} t_{k\ell} - t_{ij} e'_{ij} - 2t_{ij} e^0_{ij}] dV \ . \tag{5.107}$$

Met $e'_{ij} = e_{ij} - e^0_{ij}$ is af te leiden dat

$$\tfrac{1}{2}\int_V [t_{ij}e'_{ij} + 2t_{ij}e^0_{ij}]dV = \tfrac{1}{2}\int_V [t_{ij}e_{ij} + t_{ij}e^0_{ij}]dV =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_V [2t_{ij}e_{ij} - t_{ij}e'_{ij}]dV = \int_V t_{ij}e_{ij}dV \; , \tag{5.108}$$

omdat volgens (5.77) en (5.78) geldt

$$\int_V t_{ij}e'_{ij}dV = \int_S t_{ij}u'_i n_j dS - \int_V t_{ij,j}u'_i dV = 0 \; .$$

Met Gauss kunnen we (5.108) nog herleiden tot

$$\int_V t_{ij}e_{ij}dV = \int_S t_{ij}n_j u_i dS = \int_S t_i u_i dS \; , \tag{5.109}$$

waarin weer gebruik is gemaakt van $t_{ij,j} = 0$ in V.
Met $e_{k\ell} = \gamma_{ijk\ell}t_{ij} = \gamma_{k\ell ij}t_{ij}$ en (5.109) gaat (5.107) over in

$$-U_p = \tfrac{1}{2}\int_V e_{k\ell}t_{k\ell}dV - \int_S t_i u_i dS \; , \tag{5.110}$$

en volgens (5.12) is dit precies de <u>complementaire energie</u>, want $S_p = 0$ in ons geval.

<u>N.B.</u> $R_{ijk\ell}$ is in dit geval positief definiet (immers $c^0_{ijk\ell} = 0$), zodat $U^s_p = -U^{*s}$ een maximum is.

<u>Conclusie</u>: Als we een inhomogeen, anisotroop lichaam vergelijken met een homogeen, isotroop lichaam met elasticiteitsmodulus $c^0_{ijk\ell} \equiv 0$, gaat het Hashin-Shtrikman principe over in het klassieke energieprincipe van de minimale complementaire energie.

Vervolgens nemen we in het homogene, isotrope lichaam $c^0_{ijk\ell} \to \infty$ (d.w.z. het lichaam is star). Opdat de spanningen t^0_{ij} eindig blijven, zal moeten gelden volgens (5.59) e.v.

$$e^0_{ij} \to 0 \ , \quad \text{zodat} \quad e'_{ij} \to e_{ij} \ . \tag{5.111}$$

Omdat $e^0_{ij} \to 0$ zal gelden

$$U_0 = \tfrac{1}{2} \int_V t^0_{ij} e^0_{ij} dV \to 0 \ . \tag{5.112}$$

Volgens (5.60) geldt

$$p_{ij} = R_{ijk\ell} e_{k\ell} \quad \text{en} \quad e_{ij} = H_{ijk\ell} p_{k\ell} \ , \tag{5.113}$$

zodat

$$H_{ijk\ell} p_{ij} p_{k\ell} = e_{k\ell} p_{k\ell} = e_{k\ell} R_{k\ell ij} e_{ij} = R_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} \ . \tag{5.114}$$

Verder vinden we

$$p_{ij} e'_{ij} + 2p_{ij} e^0_{ij} = p_{ij} e_{ij} + p_{ij} e^0_{ij} = 2p_{ij} e_{ij} - p_{ij} e'_{ij} \ , \tag{5.115}$$

door herhaald toepassen van (5.61).

Met (5.114) en (5.115) gaat (5.62) over in

$$\begin{aligned}
2U_p &= - \int_V [R_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} - 2p_{ij} e_{ij} + p_{ij} e'_{ij}] dV = \\
&= - \int_V [R_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} - 2R_{ijk\ell} e_{k\ell} e_{ij} + R_{ijk\ell} e_{k\ell} e'_{ij}] dV = \\
&= \int_V [R_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} - c_{ijk\ell} e_{k\ell} e'_{ij} + c^0_{ijk\ell} e_{k\ell} e'_{ij}] dV = \\
&= \int_V [c_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} - c^0_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} + c^0_{ijk\ell} e_{k\ell} e'_{ij} - c_{ijk\ell} e_{k\ell} e'_{ij}] dV = \\
&= \int_V [c_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} - c^0_{ijk\ell} e^0_{ij} e^0_{k\ell}] dV \ ,
\end{aligned} \tag{5.116}$$

want

$$\int_V c^0_{ijk\ell} e^0_{ij} e'_{k\ell} dV = \int_V c_{ijk\ell} e_{k\ell} e'_{ij} dV = 0 \ .$$

Dan is met (5.112)

$$2U_p = \int_V c_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} dV \ , \tag{5.117}$$

en volgens (5.7) is dit precies de uitdrukking voor de potentiële energie, immers $k_i = 0$ en $S_p = 0$.

N.B. Hier is $R_{ijk\ell}$ negatief definiet, zodat $U^s_p = U^s$ een minimum is.

Conclusie: Als we een inhomogeen, anisotroop lichaam vergelijken met een homogeen, isotroop lichaam met elasticiteitsmodulus $c^0_{ijk\ell} \to \infty$, gaat het Hashin-Shtrikman principe over in het klassieke energieprincipe van de minimale potentiële energie.

Tot slot zullen we laten zien, dat omgekeerd ook het principe van Hashin-Shtrikman uit de klassieke principes is af te leiden. Beschouw weer de bekende twee lichamen: lichaam I is homogeen, isotroop, II willekeurig. De verplaatsingen zijn bij beide lichamen op gelijke wijze aan de rand voorgeschreven. Verder nemen we $S_p = 0$ en $k_i = 0$.

In lichaam II nemen we een kinematisch toelaatbaar stelsel: $\tilde{e}_{ij}$, $\tilde{u}_i$. Wegens de stelling van de minimale potentiële energie (5.9) geldt

$$2U := \int_V c_{ijk\ell} e_{ij} e_{k\ell} dV \le \int_V c_{ijk\ell} \tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{k\ell} dV \ , \tag{5.118}$$

waarin e_{ij} de deformaties zijn, die behoren bij een reguliere evenwichtstoestand. (5.118) is te schrijven als

$$-2U \ge - \int_V c_{ijk\ell} \tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{k\ell} dV \ . \tag{5.119}$$

In lichaam I is

$$2U_0 := \int_V c^0_{ijk\ell} e^0_{ij} e^0_{k\ell} dV \ . \tag{5.120}$$

Als we definiëren $\tilde{e}'_{ij} := \tilde{e}_{ij} - e^0_{ij}$, dan is

$$2U_0 = \int_V c^0_{ijk\ell} e^0_{ij} (\tilde{e}_{k\ell} - \tilde{e}'_{k\ell}) dV \ . \tag{5.121}$$

Na toepassing van de stelling van Gauss, en met $\tilde{u}'_k = 0$ op S en $t^0_{k\ell,\ell} = 0$, vinden we

$$\int_V t^0_{k\ell} \tilde{e}'_{k\ell} dV = 0 \ ,$$

zodat (5.121) overgaat in

$$2U_0 = \int_V c^0_{ijk\ell} e^0_{ij} \tilde{e}_{k\ell} dV \ . \tag{5.122}$$

We definiëren $\tilde{t}_{ij}$ en $\tilde{p}_{ij}$ door

$$\tilde{t}_{ij} = \tilde{p}_{ij} + c^0_{ijk\ell} \tilde{e}_{k\ell} \ , \tag{5.123}$$

én zodanig dat in ieder geval is voldaan aan

$$\tilde{t}_{ij,j} = 0 \ . \tag{5.124}$$

De vergelijkingen (5.123) en (5.124) geven negen vergelijkingen voor de 12 onbekenden $\tilde{p}_{ij}$ en $\tilde{t}_{ij}$; we hebben dus nog drie graden van vrijheid om te variëren.

(5.122) kunnen we met (5.123) herleiden tot

$$2U_0 = \int_V c^0_{ijk\ell} e^0_{ij} \tilde{e}_{k\ell} dV = \int_V (\tilde{t}_{ij} - \tilde{p}_{ij}) e^0_{ij} dV \ . \tag{5.125}$$

(5.119) en (5.125) leveren met $\int_V \tilde{t}_{ij} \tilde{e}'_{ij} dV = 0$

$$-2(U - U_0) \geq - \int_V \tilde{p}_{ij} e^0_{ij} dV + \int_V (\tilde{t}_{ij} - c_{ijk\ell}\tilde{e}_{k\ell})\tilde{e}_{ij} dV \; . \qquad (5.126)$$

Onderstel nu, dat $R_{ijk\ell}$ en $H_{ijk\ell}$ <u>negatief</u> definiet zijn, dan

$$(\tilde{t}_{ij} - c_{ijk\ell}\tilde{e}_{k\ell})\tilde{e}_{ij} = (\tilde{t}_{ij} - c_{ijk\ell}\tilde{e}_{k\ell})H_{ijpq}R_{pqmn}\tilde{e}_{mn} =$$

$$= (\tilde{t}_{ij} - c_{ijk\ell}\tilde{e}_{k\ell})H_{ijpq}[(\tilde{t}_{pq} - c^0_{pqmn}\tilde{e}_{mn}) - (\tilde{t}_{pq} - c_{pqmn}\tilde{e}_{mn})] \geq$$

$$\geq (\tilde{t}_{ij} - c_{ijk\ell}\tilde{e}_{k\ell})H_{ijpq}(\tilde{t}_{pq} - c^0_{pqmn}\tilde{e}_{mn}) =$$

$$= (\tilde{p}_{ij} - R_{ijk\ell}\tilde{e}_{k\ell})H_{ijpq}\tilde{p}_{pq} = \tilde{p}_{ij}[H_{ijpq}\tilde{p}_{pq} - \tilde{e}_{ij}] \; .$$

Hiermee gaat (5.126) over in

$$-2(U - U_0) \geq \int_V \tilde{p}_{ij}[H_{ijk\ell}\tilde{p}_{k\ell} - \tilde{e}_{ij} - e^0_{ij}]dV \; . \qquad (5.127)$$

In (5.127) herkennen we het principe van Hashin-Shtrikman: bij negatief definiete R en H neemt U een minimum aan voor $\tilde{p}_{k\ell} = R_{k\ell mn}\tilde{e}_{mn}$ (zie (5.74)). Uit (5.123) zien we, dat dit overeenkomt met het principe van de minimale potentiële energie (5.9), dat zegt dat U zijn minimum aanneemt voor $\tilde{t}_{ij} = c_{ijk\ell}\tilde{e}_{k\ell}$ (zie (5.3)).

Wegens de stelling van de maximale complementaire energie en stelling (5.15) geldt

$$-2U = 2U^* = \int_V \gamma_{ijk\ell} t_{ij} t_{k\ell} dV - 2 \int_S t_i u^*_i dS \leq$$

$$\leq \int_V \gamma_{ijk\ell} \underset{\sim}{t}_{ij} \underset{\sim}{t}_{k\ell} - 2 \int_S \underset{\sim}{t}_i u^*_i dS \; , \qquad (5.128)$$

waarin $\underset{\sim}{t}_{ij}$ een statisch toelaatbaar spanningsstelsel is.
Met de stelling van Gauss, met $u^0_i = u_i = u^*_i$ op S en $\underset{\sim}{t}_{ij,j} = 0$, kunnen we inzien dat

$$\int_S \underset{\sim}{t}_i u^*_i dS = \int_V \underset{\sim}{t}_{ij} e^0_{ij} dV \; ,$$

zodat (5.128) overgaat in

$$-2U \le \int_V \gamma_{ijk\ell}\underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{t}_{k\ell}dV - 2\int_V \underset{\sim}{t}_{ij}e^0_{ij}dV\ . \qquad (5.129)$$

Definieer $\underset{\sim}{e}_{ij}$ en $\underset{\sim}{p}_{ij}$ door

$$c^0_{ijk\ell}\underset{\sim}{e}_{k\ell} = \underset{\sim}{t}_{ij} - \underset{\sim}{p}_{ij} \qquad (5.130)$$

en zodanig dat $\underset{\sim}{e}_{ij}$ compatibel is en de hieruit af te leiden $\underset{\sim}{u}_i$ voldoet aan $\underset{\sim}{u}_i = u^*_i$ op S. Dan wordt (5.129)

$$2(U_0 - U) \le \int_V \gamma_{ijk\ell}\underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{t}_{k\ell}dV - 2\int_V \underset{\sim}{t}_{ij}e^0_{ij}dV + \int_V t^0_{ij}e^0_{ij}dV =$$

$$= \int_V \gamma_{ijk\ell}\underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{t}_{k\ell}dV - 2\int_V \underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{e}_{ij}dV + \int_V t^0_{ij}\underset{\sim}{e}_{ij}dV\ ,$$

omdat $\int_V \underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{e}'_{ij}dV = 0$ wegens Gauss, $\underset{\sim}{t}_{ij,j} = 0$ en $\underset{\sim}{u}' = 0$ op S, als

$\underset{\sim}{e}'_{ij} := \underset{\sim}{e}_{ij} - e^0_{ij}$.
Met (5.130) kunnen we herleiden

$$2(U_0 - U) \le \int_V \gamma_{ijk\ell}\underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{t}_{k\ell}dV - 2\int_V \underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{e}_{ij}dV + \int_V (\underset{\sim}{t}_{ij} - \underset{\sim}{p}_{ij})e^0_{ij}dV =$$

$$= \int_V \gamma_{ijk\ell}\underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{t}_{k\ell}dV - \int_V \underset{\sim}{p}_{ij}e^0_{ij}dV - \int_V \underset{\sim}{t}_{ij}\underset{\sim}{e}_{ij}dV =$$

$$= -\int_V \underset{\sim}{p}_{ij}e^0_{ij}dV + \int_V \underset{\sim}{t}_{ij}(\gamma_{ijk\ell}\underset{\sim}{t}_{k\ell} - \underset{\sim}{e}_{ij})dV\ .$$

Neem nu $H_{ijk\ell}$ <u>positief</u> definiet, dan analoog aan de afleiding bij het vorige geval

$$(\gamma_{ijk\ell}\underset{\sim}{t}_{k\ell} - \underset{\sim}{e}_{ij})\underset{\sim}{t}_{ij} \le \underset{\sim}{p}_{ij}(H_{ijk\ell}\underset{\sim}{p}_{k\ell} - \underset{\sim}{e}_{ij})\ ,$$

zodat

$$2(U_0 - U) \leq \int_V \underset{\sim}{p}_{ij}[H_{ijk\ell}\underset{\sim}{p}_{k\ell} - \underset{\sim}{e}_{ij} - e^0_{ij}]dV . \tag{5.131}$$

Dit is weer het principe van Hashin-Shtrikman; U^s is nu een maximum, immers R en H zijn positief definiet. Dit komt overeen met het principe van de minimale complementaire energie.

V.6. De ongelijkheid van Friedrichs (Zie [4], H IV)

We beschouwen een lichaam V, met volumekrachten $\underline{f}$, met verplaatsingen nul op de rand S

$$\underline{u} = \underline{0} \ , \quad \text{op} \quad S . \tag{5.132}$$

De Navier-vergelijkingen luiden

$$\mu u_{k,\ell\ell} + (\mu + \lambda)u_{\ell,k\ell} + f_k = 0 \ , \qquad k = 1,2,3 . \tag{5.133}$$

We onderstellen dat $f \in L^2(V)$, d.i. de klasse van kwadratisch-Lebesgue integreerbare functies op V.
Definieer de operator

$$A := -\mu I\Delta - (\mu + \lambda)\text{grad div} \ , \tag{5.134}$$

dan kunnen we (5.133) schrijven als

$$A\underline{u} = \underline{f} . \tag{5.135}$$

We voeren een inproduct op V in volgens

$$(\underline{v},\underline{w}) := \int_V v_i w_i dV = \int_V (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)dV . \tag{5.136}$$

Lemma: Voor alle $\underline{u} \in C^2(V)$, die voldoen aan $\underline{u} = \underline{0}$ op S geldt

$$(A\underline{u},\underline{u}) = 2 \int_V W_s(\underline{u})dV . \tag{5.137}$$

Bewijs:

$$(A\underline{u},\underline{u}) = -\int_V [\mu u_i u_{i,jj} + (\mu + \lambda)u_i u_{j,ij}]dV =$$

$$= -\lambda \int_V u_i u_{j,ij} dV - \mu \int_V [u_i u_{i,jj} + u_i u_{j,ij}]dV =$$

$$= -\lambda \int_V (u_i u_{j,j})_{,i} dV + \lambda \int_V u_{i,i} u_{j,j} dV +$$

$$-\mu \int_V (u_i u_{i,j} + u_i u_{j,i})_{,j} dV + \mu \int_V u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i})dV =$$

$$= \int_V \{\lambda(u_{i,i})^2 + \frac{\mu}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i})\}dV , \tag{5.138}$$

na toepassing van Gauss en met $u_i = 0$ op S.
Volgens (1.24) geldt voor de specifieke elastische energie

$$W_s(\underline{u}) = \tfrac{1}{2}[\lambda(e_{kk})^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij}] =$$

$$= \tfrac{1}{2}[\lambda(u_{k,k})^2 + \frac{\mu}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i})] \tag{5.139}$$

zodat uit (5.138) volgt

$$(A\underline{u},\underline{u}) = 2\int_V W_s(\underline{u})dV . \qquad \square$$

We definiëren op de gebruikelijke manier de norm

$$\|\underline{v}\| := (\underline{v},\underline{v})^{\frac{1}{2}} . \tag{5.140}$$

Stelling (ongelijkheid van Friedrichs): Voor alle $\underline{u} \in C^2(V)$, die voldoen aan $\underline{u} = \underline{0}$ op S, geldt

$$(A\underline{u},\underline{u}) \geq C(\underline{u},\underline{u}) = C\|\underline{u}\|^2 , \tag{5.141}$$

waarin C een constante is, C > 0.

N.B. Een operator A, die aan (5.141) voldoet, heet positief definiet.

Bewijs: We bewijzen de stelling eerst voor $\lambda = 0$ en laten vervolgens zien dat de stelling ook geldt voor $\lambda > 0$.
De A behorende bij $\lambda = 0$ noemen we A_0, dus

$$A_0 := -\mu I\Delta - \mu \text{ grad div} . \tag{5.142}$$

Er geldt nu

$$A_0 u_k = -\mu u_{k,\ell\ell} - \mu u_{\ell,k\ell} . \tag{5.143}$$

Uit (5.137) en (5.138) zien we dat

$$(A_0\underline{u},\underline{u}) = 2 \int_V W_{0s}(\underline{u})dV , \tag{5.144}$$

waarin

$$W_{0s}(\underline{u}) = \frac{\mu}{4}(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) . \tag{5.145}$$

Uit (1.65) vinden we de verplaatsing in het punt $\underline{x}$ in de k-richting onder invloed van een eenheidskracht in $\underline{y}$, werkend in de i-richting door f_j in (1.65) gelijk aan $\delta_{ji} \cdot \delta(\underline{y} - \underline{\xi})$ te nemen.
Deze verplaatsing noteren we met $v_k^i(\underline{x},\underline{y})$ en noemen we de Somiglianatensor.
Na enig rekenwerk krijgen we

$$v_k^i(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{24\pi\mu}\left[\frac{(4\lambda + 10\mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\delta_{ik}}{r} + \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right)r^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)\right] ,$$

waaruit door $\lambda = 0$ te nemen, volgt

$$v_k^i(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{24\pi\mu}\left[\frac{5}{r}\delta_{ik} + \frac{r^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)\right] . \tag{5.146}$$

Lemma: Voor alle $\underline{u} \in C^2(V)$ met $\underline{u} = \underline{0}$ op S geldt

$$\frac{1}{\mu} u_i(\underline{x}) = \int_V u_{k,\ell}(\underline{y})[v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y}) + v^i_{\ell,k}(\underline{x},\underline{y})]dV_y \ , \quad i = 1,2,3 \ . \tag{5.147}$$

Bewijs: We nemen een eenheidskracht in het punt $\underline{x}$, werkend in de i-richting, terwijl buiten $\underline{x}$ overal geldt $\underline{f} = 0$.
Dan is volgens (5.135)

$$A_0\underline{v}^i(\underline{x},\underline{y}) = \underline{f}(\underline{y}) = \underline{0} \ , \quad \underline{y} \neq \underline{x} \ . \tag{5.148}$$

We nemen een bol B_ε met straal ε om $\underline{x}$, dan geldt volgens (5.148)

$$\int_{V-B_\varepsilon} (\underline{u}(\underline{y}),\ A_0\underline{v}^i(\underline{x},\underline{y}))dV_y = 0 \ . \tag{5.149}$$

Definieer $\hat{V} := V - B_\varepsilon$, dan geldt volgens (5.143)

$$\int_{\hat{V}} (\underline{u}(\underline{y}),\ A_0\underline{v}^i(\underline{x},\underline{y}))dV =$$

$$= -\mu \int_{\hat{V}} (u_k v^i_{k,\ell\ell} + u_k v^i_{\ell,k\ell})dV =$$

$$= -\mu \int_{\hat{V}} (u_k v^i_{k,\ell} + u_k v^i_{\ell,k})_{,\ell}dV + \mu \int_{\hat{V}} (u_{k,\ell}v^i_{k,\ell} + u_{k,\ell}v^i_{\ell,k})dV =$$

$$= -\mu\left(\int_S + \int_{S_\varepsilon}\right)(u_k v^i_{k,\ell} + u_k v^i_{\ell,k})n_\ell dS + \mu \int_{\hat{V}} u_{k,\ell}(v^i_{k,\ell} + v^i_{\ell,k})dV =$$

$$= -\mu \int_{S_\varepsilon} u_k(v^i_{k,\ell} + v^i_{\ell,k})n_\ell dS + \mu \int_{\hat{V}} u_{k,\ell}(v^i_{k,\ell} + v^i_{\ell,k})dV \ . \tag{5.150}$$

Hierin is gebruik gemaakt van de stelling van Gauss en $\underline{u} = \underline{0}$ op S.
Wegens (5.149) volgt uit (5.150)

$$\int_{V-B_\varepsilon} u_{k,\ell}(\underline{y})[v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y}) + v^i_{\ell,k}(\underline{x},\underline{y})]dV_y =$$

$$\int_{S_\varepsilon} u_k(\underline{y})[v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y}) + v^i_{\ell,k}(\underline{x},\underline{y})]n_\ell dS_y \ . \tag{5.151}$$

We laten nu $\varepsilon \to 0$ gaan, dan geldt, zoals we hierna zullen bewijzen

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{S_\varepsilon} u_k(\underline{y})[v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y}) + v^i_{\ell,k}(\underline{x},\underline{y})]n_\ell dS_y \right) = \frac{1}{\mu}\, u_i(\underline{x}) \ , \tag{5.152}$$

zodat uit (5.152) en (5.151) volgt dat

$$\frac{1}{\mu}\, u_i(\underline{x}) = \int_V u_{k,\ell}(\underline{y})[v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y}) + v^i_{\ell,k}(\underline{x},\underline{y})]dV_y \ , \ i = 1,2,3 \ . \qquad \square$$

Er rest ons enkel nog (5.152) te bewijzen:

Uit (5.146) en

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{(x_k - y_k)}{r^3}\right) = \frac{3(x_k - y_k)(x_i - y_i)}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \ ,$$

is af te leiden dat

$$v^i_k(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{24\pi\mu}\left[\frac{5}{r}\,\delta_{ik} + \frac{3}{2}\,\frac{(x_k - y_k)(x_i - y_i)}{r^3} - \frac{1}{2}\,\frac{\delta_{ik}}{r}\right] =$$

$$= \frac{1}{48\pi\mu}\left[9\,\frac{\delta_{ik}}{r} + 3\,\frac{(x_k - y_k)(x_i - y_i)}{r^3}\right] \ . \tag{5.153}$$

Met de betrekkingen

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-(x_\ell - y_\ell)}{r^3}$$

en

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r^3}\right) = \frac{-3(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_\ell - y_\ell)}{r^5} +$$

$$+ \frac{(x_k - y_k)\delta_{i\ell}}{r^3} + \frac{(x_i - y_i)\delta_{k\ell}}{r^3}$$

volgt voor $v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y})$

$$v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{48\pi\mu}\left[-\frac{9(x_\ell - y_\ell)\delta_{ik}}{r^3} - \frac{9(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_\ell - y_\ell)}{r^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{3(x_k - y_k)\delta_{i\ell}}{r^3} + \frac{3(x_i - y_i)\delta_{k\ell}}{r^3}\right] .$$

Hiermee krijgen we voor de som

$$v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y}) + v^i_{\ell,k}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{8\pi\mu r^3}\left[(x_i - y_i)\delta_{k\ell} - (x_\ell - y_\ell)\delta_{ik} + \right.$$

$$\left. - (x_k - y_k)\delta_{i\ell} - \frac{3(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_\ell - y_\ell)}{r^2}\right] .$$

Met dit resultaat gaat het linkerlid van (5.152) over in

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S_\varepsilon} u_k(\underline{y})\left[\frac{n_\ell}{8\pi\mu r^3}\{(x_i - y_i)\delta_{k\ell} - (x_\ell - y_\ell)\delta_{ik} - (x_k - y_k)\delta_{i\ell} + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_\ell - y_\ell)}{r^2}\}\right]dS\right) .$$

Nu geldt voor $\underline{y}$ op S_ε: $y_\ell - x_\ell = \varepsilon n_\ell$, $n_\ell n_\ell = 1$.
Uit

$$\underline{n} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta);\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

is af te leiden dat

$$\int_{S_\varepsilon} n_i n_k dS = \delta_{ik}\,\frac{4\pi}{3}\,\varepsilon^2 .$$

Met bovenstaande betrekkingen, krijgen we

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{-\frac{1}{8\pi\mu\varepsilon^2}\int_{S_\varepsilon} u_k(\underline{y})n_\ell(n_i\delta_{k\ell} - n_\ell\delta_{ik} - n_k\delta_{i\ell} - 3n_in_kn_\ell)dS\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\{\frac{1}{8\pi\mu\varepsilon^2}\int_{S_\varepsilon} u_k(\underline{y})n_\ell n_\ell(\delta_{ik} + 3n_in_k)dS\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\{\frac{1}{8\pi\mu\varepsilon^2}\int_{S_\varepsilon} u_i(\underline{y})dS\} + \lim_{\varepsilon\to 0}\{\frac{3}{8\pi\mu\varepsilon^2}\int_{S_\varepsilon} u_k(\underline{y})n_in_kdS\} =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\, u_i(\underline{x}) + \frac{1}{2\mu}\, u_i(\underline{x}) = \frac{1}{\mu}\, u_i(\underline{x})$$

zodat (5.152) en tevens (5.147) bewezen is.

Omdat $|x_k - y_k| \le |\underline{x} - \underline{y}|$, zien we uit (5.153) dat

$$v^i_k(\underline{x},\underline{y}) = \mathcal{O}(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|}) \;, \qquad |\underline{x} - \underline{y}| \to 0 \;,$$

zodat

$$v^i_{k,\ell}(\underline{x},\underline{y}) = \mathcal{O}(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|^2}) \;, \qquad |\underline{x} - \underline{y}| \to 0 \;.$$

We zien dat $v^i_{k,\ell}$ niet kwadratisch integreerbaar is, zodat de stelling van Schwarz niet zonder meer op (5.147) toepasbaar is. We delen daarom $u_{k,\ell}$ door r en vermenigvuldigen $v^i_{k,\ell}$ met r. We krijgen dan

$$|u_i(\underline{x})| \le \frac{\mu}{2}\int_V |\frac{u_{k,\ell}(\underline{y})}{r}|.|r(v^i_{k,\ell} + v^i_{\ell,k})|dV_y \le$$

$$\le \frac{\mu}{2}\,[\int_V \frac{u_{k,\ell}(\underline{y})u_{k,\ell}(\underline{y})dV_y}{r^2}]^{\frac{1}{2}}[\int_V r^2(v^i_{k,\ell} + v^i_{\ell,k})(v^i_{k,\ell} + v^i_{\ell,k})dV_y]^{\frac{1}{2}} \;, \tag{5.154}$$

volgens de stelling van Schwarz. Nu is de tweede integraal $\le C_1^2$ omdat

$$\int_V \mathcal{O}(\frac{1}{r^2})dV_y$$

convergeert, zodat volgens (5.154)

$$|u_i(\underline{x})| \le \frac{\mu}{2} C_1 \left[\int_V \frac{u_{k,\ell}(\underline{y})u_{k,\ell}(\underline{y})dV_y}{|\underline{x} - \underline{y}|^2} \right]^{\frac{1}{2}} . \tag{5.155}$$

Hieruit volgt

$$\|u_i(\underline{x})\|^2 = \int_V u_i^2(\underline{x})dV_x \le C_2 \int_V dV_x \int_V \frac{u_{k,\ell}u_{k,\ell}dV_y}{|\underline{x} - \underline{y}|^2} =$$

$$= C_2 \int_V u_{k,\ell}u_{k,\ell}dV_y \int_V \frac{dV_x}{r^2} \le C_3 \int_V u_{k,\ell}u_{k,\ell}dV ,$$

waarin

$$C_2 := \frac{\mu^2 C_1^2}{4} \qquad \text{en} \qquad C_2 \int \frac{dV_x}{r^2} \le C_3 .$$

Tenslotte geldt

$$\|\underline{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2 \le 3C_3 \int_V u_{k,\ell}u_{k,\ell}dV = C_4 \int_V e_{k\ell}e_{k\ell}dV =$$

$$= C_5 \int_V W_{0s}(\underline{u})dV , \tag{5.156}$$

waarin $C_4 := 3C_3$ en $C_5 := \frac{1}{\mu} C_4$.
Uit (5.144) lezen we nu met (5.156)

$$(A_0\underline{u},\underline{u}) = 2 \int_V W_{0s}(\underline{u})dV \ge \frac{2}{C_5} \|\underline{u}\|^2 = C\|\underline{u}\|^2 , \quad C > 0 , \tag{5.157}$$

waarmee stelling (5.141) voor $\lambda = 0$ bewezen is.

Omdat volgens (5.145)

$$\int_V W_{0s}(\underline{u})dV = \mu \int_V e_{ij}e_{ij}dV \le \int_V [\tfrac{1}{2}\lambda(e_{kk})^2 + \mu e_{ij}e_{ij}]dV =$$

$$= \int_V W_s(\underline{u})dV ,$$

immers $\lambda > 0$, zien we dat ook geldt

$$(A\underline{u},\underline{u}) \ge C\|\underline{u}\|^2 , \quad C > 0 ,$$

waarmee de ongelijkheid van Friedrichs bewezen is. □

V.7. Een minimumprincipe in de verplaatsingen

We formuleren een minimumprincipe voor de verplaatsingen $\underline{u}$, dat nauw verwant is met het principe van de minimale potentiële energie.
We definiëren de klasse M

$$M := \{\underline{u} \mid \underline{u} \in C^2(V),\ \underline{u} = \underline{0} \text{ op } S\} . \tag{5.158}$$

Klasse M is niet volledig; er zijn rijen functies in M die convergeren naar een functie, die slechts eenmaal continu, differentieerbaar is, dus niet in M ligt. We definiëren de klasse H_0, bestaande uit de elementen van M én eventuele limietelementen; iedere $\varphi \in H_0$ kan worden verkregen als limiet van een rij functies $\varphi_n \in M$. We vermelden zonder bewijs dat H_0 dicht ligt in de ruimte $L^2(V)$, de ruimte van kwadratisch-Lebesgue integreerbare functies. Ook M ligt dicht in $L^2(V)$.

Volgens lemma (5.137) geldt voor alle $\underline{u} \in M$

$$(A\underline{u},\underline{u}) = 2\int_V W_s(\underline{u})dV = 2W(\underline{u}) . \tag{5.159}$$

Definieer $F(\underline{u})$ door

$$F(\underline{u}) := (A\underline{u},\underline{u}) - 2(\underline{f},\underline{u}) , \quad \underline{u} \in M , \tag{5.160}$$

waarin $\underline{f}$ volumekrachten voorstellen.

Uit (5.7) zien we dat $\frac{1}{2}F(\underline{u})$ de potentiële energie voorstelt, gedefinieerd op de klasse M, die een kinematisch toelaatbaar stelsel vormt.
In overeenstemming met stelling (5.9), de stelling van de minimale potentiële energie, formuleren we de volgende stelling.

Stelling. De functionaal $F(\underline{u})$, gedefinieerd in (5.160) neemt zijn minimum aan voor een zekere $\underline{u}_0 \in H_0$, waarvoor geldt $A\underline{u}_0 = \underline{f}$ (in gegeneraliseerde zin), mits de operator A positief definiet is en $\|\underline{f}\| < \infty$.
Bovendien is de oplossing $\underline{u}_0$ eenduidig. (Zie [5], pag. 103).

Bewijs. Eerst laten we zien dat $F(\underline{u})$ voor $\underline{u} \in M$ naar beneden begrensd is.

$$F(\underline{u}) = (A\underline{u},\underline{u}) - 2(\underline{f},\underline{u}) \geq C\|\underline{u}\|^2 - 2\|\underline{f}\|.\|\underline{u}\| =$$

$$= C(\|\underline{u}\| - \frac{1}{C}\|\underline{f}\|)^2 - \frac{1}{C}\|\underline{f}\|^2 \geq -\frac{1}{C}\|\underline{f}\|^2 \ .$$

In de afleiding is gebruik gemaakt van de ongelijkheid van Friedrichs (5.141) en de stelling van Schwarz.
Omdat $F(\underline{u})$ naar beneden begrensd is, bestaat er een infimum, dat we aangeven met d, dus

$$F(\underline{u}) \geq d \ , \quad \underline{u} \in M \ . \tag{5.161}$$

Wanneer we de waarde van $F(\underline{u})$ niet in de klasse M, maar in de klasse H_0 beschouwen, verandert d niet: immers, stel d is de ondergrens in de klasse M en d_1 in de klasse H_0. Dcordat $M \subset H_0$ geldt $d_1 \leq d$. Neem nu aan dat $d_1 < d$, dan is er een $\tilde{\underline{u}} \in H_0$ waarvoor geldt

$$(A\tilde{\underline{u}},\tilde{\underline{u}}) - 2(\underline{f},\tilde{\underline{u}}) < d \ ,$$

maar er bestaat een rij $\underline{u}_n \in M$, met $\|\underline{u}_n - \tilde{\underline{u}}\| \to 0$, zodat voor voldoende grote n het verschil tussen $F(\tilde{\underline{u}})$ en $F(\underline{u}_n)$ willekeurig klein gemaakt kan worden; dit betekent dat dan ook $F(\underline{u}_n) < d$ zou zijn, hetgeen in tegenspraak is met de bewering dat d het infimum is van $F(\underline{u})$, $\underline{u} \in M$.

Conclusie:

$$F(\underline{u}) \geq d \ , \quad \underline{u} \in H_0 \ . \tag{5.162}$$

Volgens (5.162) kunnen we bij iedere willekeurige positieve ε een element $\underline{u}(\varepsilon) \in H_0$ vinden, zodat geldt

$$F(\underline{u}(\varepsilon)) < d + \varepsilon \qquad \acute{e}n \qquad F(\underline{u}(\varepsilon)) \geq d \ . \tag{5.163}$$

Stel $\varepsilon = \frac{1}{n}$, met n een willekeurig positief geheel getal. De functie $\underline{u}(\frac{1}{n})$ geven we aan met $\underline{u}_n$ en er geldt volgens (5.163)

$$d \leq F(\underline{u}_n) < d + \frac{1}{n} \ , \qquad n = 1,2,\ldots \ . \tag{5.164}$$

Na de limietovergang $n \to \infty$ vinden we

$$\lim_{n\to\infty} F(\underline{u}_n) = d \ . \tag{5.165}$$

We zien dat de functies $\underline{u}_n$ een minimumrij voor $F(\underline{u})$ voorstellen.
De volgende stap bestaat eruit, te laten zien, dat de rij $\underline{u}_n$ naar een limiet $\underline{u}_0 \in H_0$ convergeert. Daartoe nemen we weer een $\varepsilon > 0$ en kiezen N zodat $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Voor $n > N$ en $m > N$ geldt dan $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ en $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ en dus

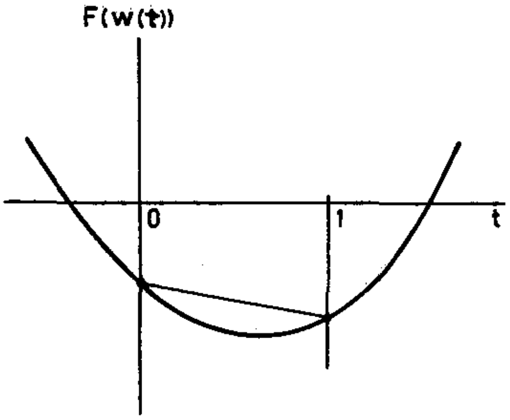
$$d \leq F(\underline{u}_n) < d + \frac{\varepsilon}{2} \qquad en \qquad d \leq F(\underline{u}_m) < d + \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{5.166}$$

Kies t, $0 \leq t \leq 1$ en beschouw $\underline{w}(t) := t\underline{u}_n + (1 - t)\underline{u}_m$, dan kunnen we schrijven wegens (5.160), de definitie van $F(\underline{u})$

$$\begin{aligned} F(w(t)) = F(tu_n + (1 - t)u_m) = t^2[(A(u_n - u_m), (u_n - u_m))] \, + \\ + 2t[(Au_m, (u_n - u_m)) - ((u_n - u_m),f)] + (Au_m,u_m) \, - \\ - 2(u_m,f) \ , \end{aligned} \tag{5.167}$$

waarin voor het gemak de strepen onder de vectoren zijn weggelaten.

$F(w(t))$ is één parabool met positieve coëfficiënt van t^2, hetgeen betekent dat het concave deel naar boven gericht is.



Beschouw het stuk van de parabool voor $0 \leq t \leq 1$, dan is duidelijk dat het maximum van $F(w(t))$ op $0 \leq t \leq 1$ aangenomen wordt in $t = 0$ óf $t = 1$. Nu is $F(w(0)) = F(u_m)$ en $F(w(1)) = F(u_n)$. Volgens (5.166) geldt $F(u_n) < d + \frac{\varepsilon}{2}$ èn $F(u_m) < d + \frac{\varepsilon}{2}$. Dan moet $F(w(t)) < d + \frac{\varepsilon}{2}$ voor alle t, $0 < t < 1$. Ook geldt $F(w(t)) \geq \inf F(u) = d$. Stel nu $t = \frac{1}{2}$ dan is $w(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(u_m + u_n)$ en

$$d \leq F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) < d + \frac{\varepsilon}{2} . \tag{5.168}$$

Uit de vergelijkingen (5.166) en (5.168) leiden we af

$$-\varepsilon < F(u_n) + F(u_m) - 2F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) < \varepsilon, \quad m,n > N > \frac{2}{\varepsilon} . \tag{5.169}$$

(5.169) betekent dat

$$\lim_{n,m\to\infty} \left[F(u_n) + F(u_m) - 2F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right)\right] = 0 . \tag{5.170}$$

Met (5.160) kunnen we de uitdrukking in (5.170) herleiden tot

$$\lim_{n,m\to\infty} \left[(Au_n,u_n) + (Au_m,u_m) - \tfrac{1}{2}(A(u_n + u_m), (u_n + u_m))\right] =$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \left[\tfrac{1}{2}(A(u_n - u_m), (u_n - u_m))\right] = 0 . \tag{5.171}$$

Met de ongelijkheid van Friedrichs (5.141) volgt uit (5.171)

$$\lim_{n,m\to\infty} \| u_n - u_m \|^2 = 0 . \tag{5.172}$$

H_0 is een volledige ruimte, zodat uit de stelling van Fischer-Riesz volgt, dat er een $\underline{u}_0 \in H_0$ bestaat, waarvoor geldt

$$\lim_{n\to\infty} \underline{u}_n = \underline{u}_0 , \quad \underline{u}_n \in M , \quad \underline{u}_0 \in H_0 . \tag{5.173}$$

(Zie bv. [5], pag. 88).

De aldus gevonden functie $\underline{u}_0$ maakt $F(\underline{u})$ minimaal: wegens (5.173) geldt ook $(A\underline{u}_n,\underline{u}_n) \to (A\underline{u}_0,\underline{u}_0)$ en wegens de continuïteit van het inproduct geldt $(\underline{u}_n,\underline{f}) \to (\underline{u}_0,\underline{f})$. Hiermee zien we dat

$$F(\underline{u}_n) = (A\underline{u}_n,\underline{u}_n) - 2(\underline{u}_n,\underline{f}) \to (A\underline{u}_0,\underline{u}_0) - 2(\underline{u}_0,\underline{f}) = F(\underline{u}_0) \qquad (5.174)$$

en wegens (5.165) volgt

$$F(\underline{u}_0) = d = \inf F(\underline{u}) \ , \quad \underline{u} \in M, \ \underline{u}_0 \in H_0 \ . \qquad (5.175)$$

Tenslotte moeten we nog aantonen dat $A\underline{u}_0 = \underline{f}$ als $\underline{u}_0 \in M$ en $A\underline{u}_0 = \underline{f}$ in gegeneraliseerde zin als $\underline{u}_0 \in H_0/M$; in het laatste geval heet $\underline{u}_0$ een zwakke oplossing.
Hiertoe formuleren we het volgende lemma.

Lemma. Beschouw de vergelijking

$$A\underline{u} = \underline{f}, \ A \text{ positief definiet}, \ \underline{u} \in M \ . \qquad (5.176)$$

a) Als vergelijking (5.176) een oplossing $\underline{u}_0 \in M$ heeft, dan is $F(\underline{u}_0) < F(\underline{u})$ voor alle $\underline{u} \neq \underline{u}_0$, $\underline{u} \in M$.
b) Omgekeerd geldt ook: als (er een $\underline{u}_0$ bestaat waarvoor) $F(\underline{u}_0) < F(\underline{u})$, $\underline{u}_0 \in M$ voor alle $\underline{u} \in M$, $\underline{u} \neq \underline{u}_0$, dan is deze $\underline{u}_0$ de oplossing van (5.176).

Bewijs. Het deel a) van het lemma bewijzen we als volgt: zij $\underline{u}_0$ de oplossing van (5.176), dan is $A\underline{u}_0 = \underline{f}$ en

$$\begin{aligned} F(\underline{u}) &= (A\underline{u},\underline{u}) - 2(\underline{f},\underline{u}) = (A\underline{u},\underline{u}) - 2(A\underline{u}_0,\underline{u}) = \\ &= (A\underline{u},\underline{u}) - 2(A\underline{u}_0,\underline{u}) + (A\underline{u}_0,\underline{u}_0) - (A\underline{u}_0,\underline{u}_0) = \\ &= (A(\underline{u} - \underline{u}_0), (\underline{u} - \underline{u}_0)) - A(\underline{u}_0,\underline{u}_0) \ . \end{aligned} \qquad (5.177)$$

Uit (5.177) zien we dat $F(\underline{u})$ zijn minimum dan en slechts dan aanneemt voor $\underline{u} = \underline{u}_0$. We merken op dat $\min F(\underline{u}) = F(\underline{u}_0) = -(A\underline{u}_0,\underline{u}_0)$.
Hiermede is bewijs van deel a) van het lemma voltooid.

Nu volgt het bewijs van deel b): omdat $F(\underline{u}_0)$ het minimum is van $F(\underline{u})$ geldt voor alle $\underline{v} \in M$

$$F(\underline{u}_0 + \underline{v}) \geq F(\underline{u}_0) \; ,$$

waaruit met (5.160) volgt

$$(A(u_0 + v), (u_0 + v)) - 2((u_0 + v), f) \geq F(u_0) \; ,$$

of

$$(Au_0, u_0) + 2(Au_0, v) + (Av, v) - 2(u_0, f) - 2(v, f) \geq F(u_0) \; .$$

Omdat

$$(Au_0, u_0) - 2(u_0, f) = F(u_0)$$

geeft dit

$$(A\underline{u}_0 - \underline{f}, \underline{v}) + \tfrac{1}{2}(A\underline{v}, \underline{v}) \geq 0 \; , \qquad (5.178)$$

met $(A\underline{v}, \underline{v}) \geq C\|\underline{v}\|^2 \geq 0$ wegens ongelijkheid van Friedrichs.
Omdat (5.178) moet gelden voor elke $\underline{v} \in M$, volgt noodzakelijkerwijs wegens het niet invariant zijn van het teken van de eerste term in (5.172) dat

$$A\underline{u}_0 - \underline{f} = 0 \; . \qquad (5.179)$$

Hiermede is ook deel b) van het lemma bewezen.

We hadden (zie 5.175) aangetoond dat er een $\underline{u}_0 \in H_0$ bestond, waarvoor $F(u)$ minimaal werd. Volgens deel b) van bovenstaand lemma volgt dan $A\underline{u}_0 = f$ als $\underline{u}_0 \in M$. Wanneer $\underline{u}_0 \in H_0/M$, geldt $(A\underline{u}_0 - \underline{f}, \underline{v}) = 0$ voor elke $\underline{v} \in H_0$ in gegeneraliseerde zin; immers $A\underline{u}_0$ is dan niet gedefinieerd.
Met deze uitbreiding volgt $A\underline{u}_0 = \underline{f}$ (in gegeneraliseerde zin), met $\underline{u}_0 \in H_0$.
(Zie bv. [5], pag. 68 e.v.)

Tenslotte moeten we nog laten zien dat de oplossing $\underline{u}_0$ eenduidig is.
Stel er zijn twee oplossingen van de vergelijking $A\underline{u} = \underline{f}$: $A\underline{u}_1 = \underline{f}$ en $A\underline{u}_2 = \underline{f}$.

Omdat de operator A lineair is, geldt

$$A(\underline{u}_1 - \underline{u}_2) = 0$$

en dan ook

$$(A(\underline{u}_1 - \underline{u}_2), (\underline{u}_1 - \underline{u}_2)) = 0$$

na vermenigvuldiging met $(\underline{u}_1 - \underline{u}_2)$.
Wegens het positief zijn van A geldt nu

$$0 = (A(\underline{u}_1 - \underline{u}_2), (\underline{u}_1 - \underline{u}_2)) \geq C\|\underline{u}_1 - \underline{u}_2\|^2 , \qquad (5.180)$$

waaruit noodzakelijkerwijs volgt:

$$\underline{u}_1 \equiv \underline{u}_2 .$$

Hieruit volgt dat de functionaal $F(\underline{u})$ zijn minimum in één punt $\underline{u}_0$ aanneemt.

Opmerking. Als $\underline{f}$ voldoende regulier is, kan men bewijzen dat geldt $\underline{u}_0 \in C^\infty(V)$. (Lemma van Weyl!)

Literatuur:

[1] Collegedictaat Toegepaste Mechanica.

[2] Reissner, J. Math. & Phys., 29, (1950), pp. 90-95.

[3] Hashin, Z. & S. Shtrikman, J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962), pp. 335-342.

[4] Mikhlin, The problem of the minimum of a quadratic functional, H. IV.

[5] Mikhlin, Variationsmethoden der Mathematischen Physik, pp. 103-106.