

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

behorende bij het college speciale problemen uit de

Elastostatica

Onderdeel van Fysica 40
van prof.dr. J.B. Alblas
verzorgd door dr.ir. A.A.F. v.d. Ven

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken behorende bij het college

ELASTOSTATICA

Prof. Dr. J.B. Alblas

Voorjaarssemester 1979

Verzorgd door

Dr.ir. A.A.F. van de Ven

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij Elastostatica

Voorjaar 1979

1. Rek van balken	1
2. Buiging van Balken	3
3. Een-dimensionale buigingstheorie	5
4. Torsie van een cirkelcylinder	7
5. Torsie van een cylinder met willekeurige doorsnede	9
6. Vlakke vervormings- en vlakspanningstoestand	12
7. Rek van platen. Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand	14
8. Buiging van dunne platen	20
Antwoorden van 1.	26
Antwoorden van 2.	27
Antwoorden van 3.	30
Antwoorden van 4.	33
Antwoorden van 5.	35
Antwoorden van 6.	36
Antwoorden van 7.	38
Antwoorden van 8.	42
Tentamens en Antwoorden 1978 - 1979	47 - 72

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

VRAAGSTUKKEN

behorende bij het college speciale problemen uit de

ELASTOSTATICA

Onderdeel van Fysica 40

van Prof. Dr. J.B. Alblas

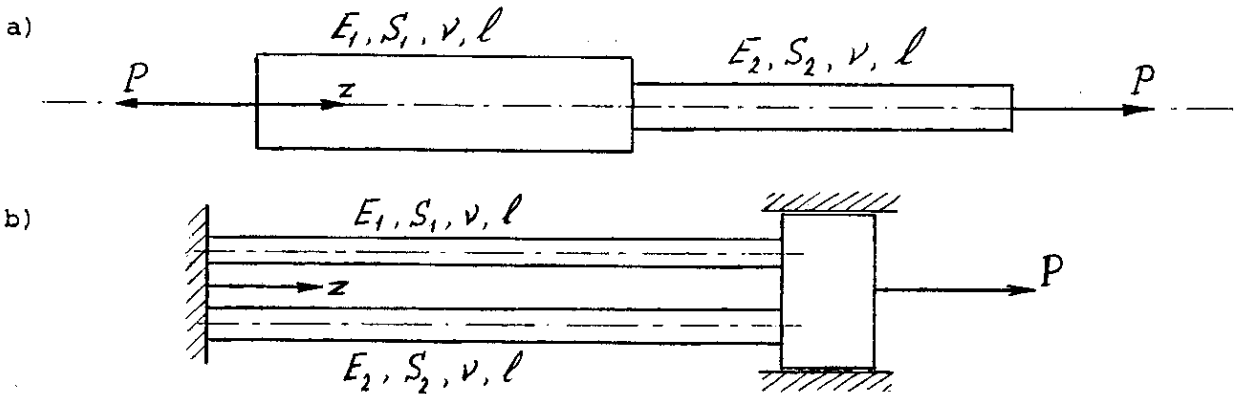
verzorgd door Dr. Ir. A.A.F. v.d. Ven

Voorjaarssemester 1979

1. REK VAN BALKEN

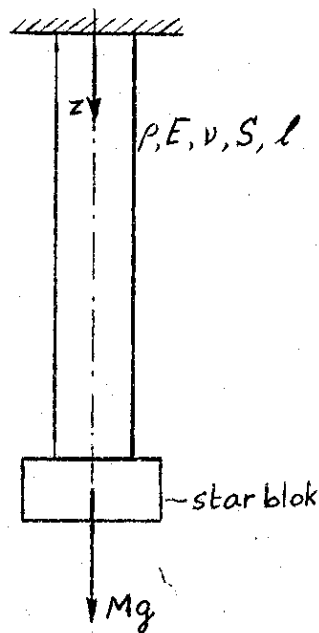
Beschouw voor de vraagstukken uit deze paragraaf alleen de gerelaxeerde (één-dimensionale) problemen.

1.1. Beschouw



- i) Bepaal de spanningsverdeling in de staven.
- ii) Bepaal de uitrekkingen en de totale stijfheid.
- iii) Bepaal de totale elastische energie. Vergelijk deze met de door P verrichte arbeid.

1.2. Bereken de spanningsverdeling en de axiale verplaatsing van:

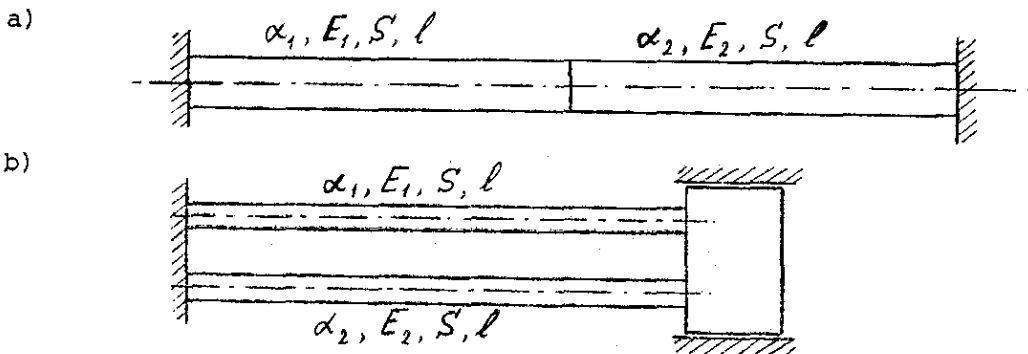


1.3. Een cilindrische staaf met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) wordt in de einddoorsneden belast door een gelijkmatig verdeelde normaaldruk p en op de zijvlakken (mantel) door een gelijkmatig verdeelde normaaldruk: αp .

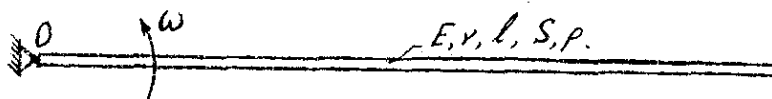
Gevraagd:

- a) de spanningen, deformaties en verplaatsingen in de staaf;
- b) de waarde van α opdat de axiale verplaatsingen van de einddoorsneden nul zijn;
- c) de waarde van α opdat de normale verplaatsingen van de zijvlakken nul zijn;
- d) voor welke waarde van ν zowel b) als c) geldt.

1.4. De volgende constructies, waarin α_1 en α_2 lineaire uitzettingscoëfficiënten zijn, worden uniform $T^\circ K$ in temperatuur verhoogd. Bereken de spanningsverdelingen en de axiale, verplaatsingen.



1.5.

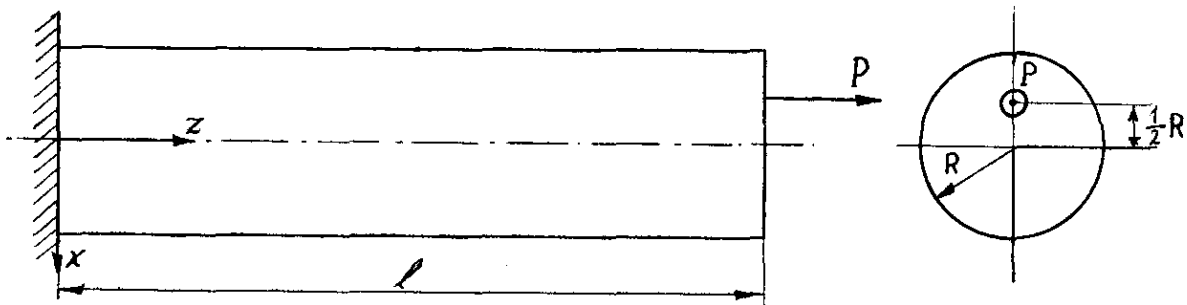


Een slanke staaf roteert met constante hoeksnelheid ω om een vast punt O .

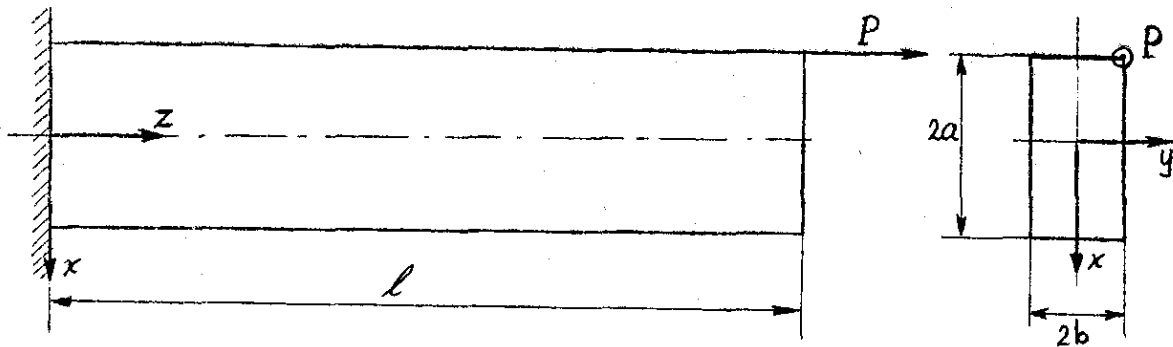
- a) Zet de rotatie stil en bepaal de t.g.v. de traagheidskrachten optredende volumekrachten.
- b) Bereken de normaalspanningsverdeling in de staaf.
- c) Bereken de uitrekking van de staaf.

2. BUIGING VAN BALKEN

- 2.1. Beschouw een cirkelcylinder, welke in de doorsnede $z = 0$ is ingeklemd en in $z = l$ wordt belast door een normaalkracht P , welke aangrijpt op een halve straal van het middelpunt van de doorsnede.

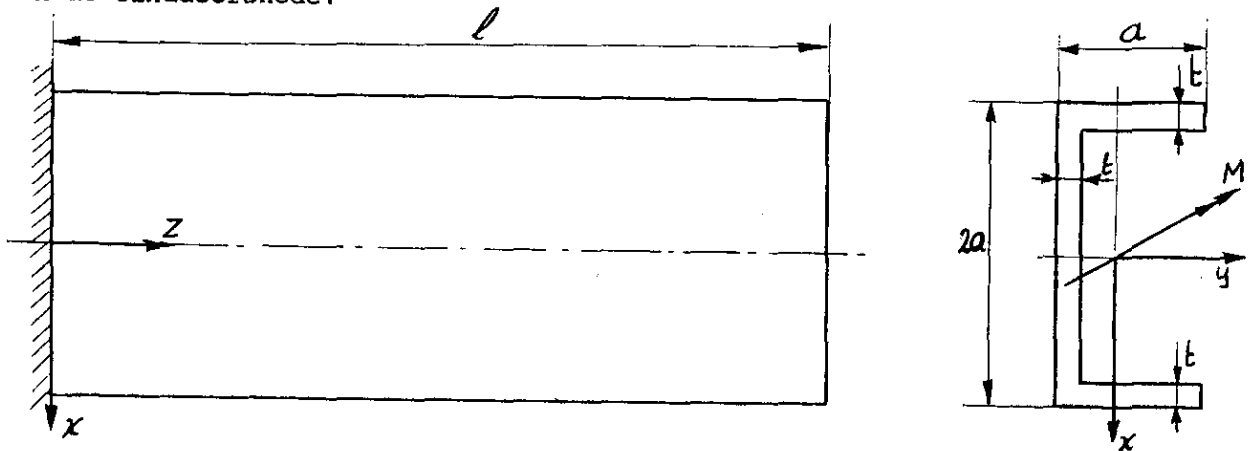


- Formuleer het gerelaxeerde probleem.
 - Bepaal de spanningen, de deformaties en de verplaatsingen.
 - Bepaal de plaats van de neutrale lijn.
 - Bereken de totale elastische energie (als functie van P).
- 2.2. Beschouw een cylinder met rechthoekige doorsnede, in $z = 0$ ingeklemd en in $z = l$ belast door een normaalkracht, aangrijpend in een hoekpunt van de doorsnede.



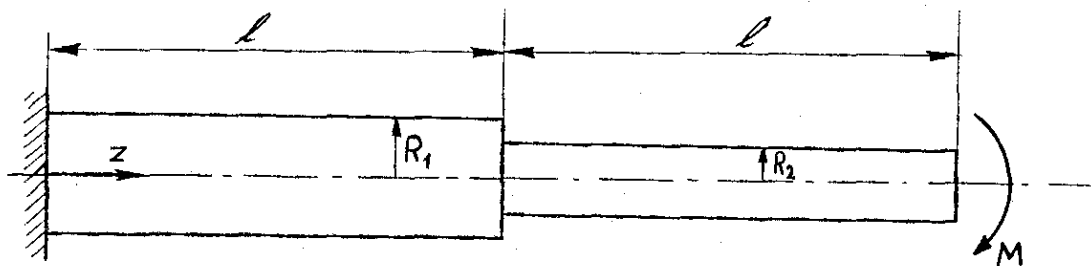
- Formuleer het gerelaxeerde probleem.
- Bepaal de spanningen, de deformaties en de verplaatsingen.
- Bepaal de plaats van de neutrale lijn.
- Bepaal de verplaatsing van het middelpunt van de einddoorsnede. Valt de projectie van deze verplaatsing op het x - y -vlak langs de diagonaal door P ?
- Bereken de totale elastische energie (als functie van P).

2.3. Beschouw de hieronder getekende U-balk, belast door een buigend moment in de einddoorsnede:



- Bepaal het centrale hoofdtraagheidsassenstelsel van de doorsnede en bereken de oppervlaktetraagheidsmomenten I_x en I_y . Neem hierbij: $t \ll a$ (Verwaarloos $O(t/a)$ -termen).
- Bepaal de spanningen.
- Bepaal de snijlijn van het neutrale vlak met de doorsnede. Valt deze samen met de richting van \underline{M} ?
- Bereken de verplaatsing van het zwaartepunt van de einddoorsnede. Staat deze loodrecht op het neutrale vlak of op \underline{M} ?
- Neem $\alpha = 0$ en bereken de hoekverdraaiing van de einddoorsnede.
- Bereken (voor $\alpha \neq 0$) de totale elastische energie van de balk (als functie van M en α).

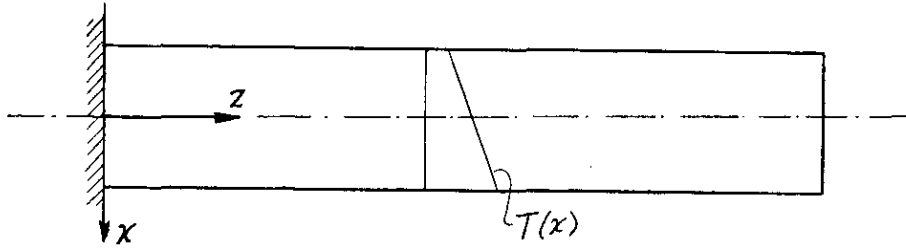
2.4. Beschouw onderstaande constructie van twee aan elkaar gelaste cirkelcilinders met verschillende stralen maar van hetzelfde materiaal.



- Geef de gerelaxeerde formulering. Bepaal de bijbehorende spanningsverdeling.
- Bepaal de doorbuiging van de neutrale lijn.

2.5. Een eenzijdig ingeklemde balk krijgt een temperatuursverhoging $T(x)$, met

$$T(x,y,z) = a + bx .$$



a) Bepaal de deformaties in de balk

Hint. Gebruik:

$$e_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} t_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} t_{kk} + \alpha T \delta_{ij} .$$


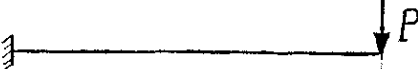
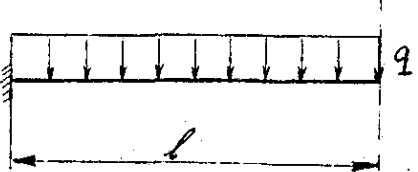
Hoe groot is in dit probleem t_{ij} ?

b) Bepaal de neutrale lijn.

c) Neem $a = 0$ en laat zien dat het deformatieveld dan overeenkomt met dat van een zuivere momentenbuiging voor het geval $\nu = -1$.

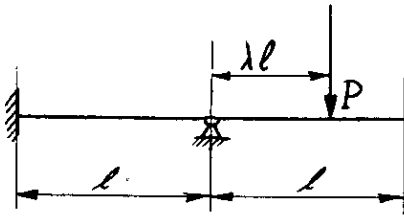
3. EEN-DIMENSIONALE BUIGINGSTHEORIE

3.1. Leidt m.b.v. de balkenvergelijking af de zogenaamde "vergeet-mij-nietjes":

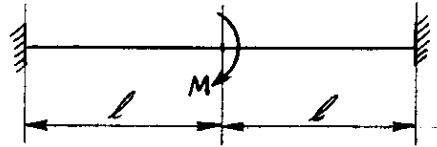
	$u'(l) =$	$u(l) =$
	$\frac{Ml}{EI}$	$\frac{Ml^2}{2EI}$
	$\frac{Pl^2}{2EI}$	$\frac{Pl^3}{3EI}$
	$\frac{ql^3}{6EI}$	$\frac{ql^4}{8EI}$

3.2. Bepaal van:

a)



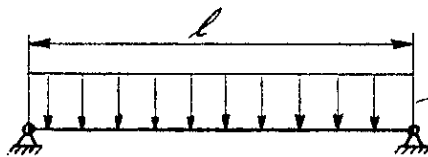
b)



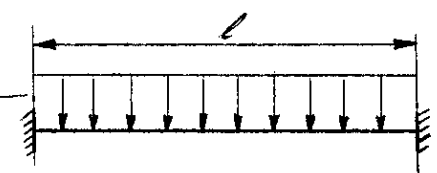
- i) de reactiekrachten;
- ii) de doorbuigingslijn;
- iii) de plaats en de grootte van de maximale trekspanning.

3.3. Bepaal van de volgende horizontale balken, welke belast worden door hun eigen gewicht:

a)

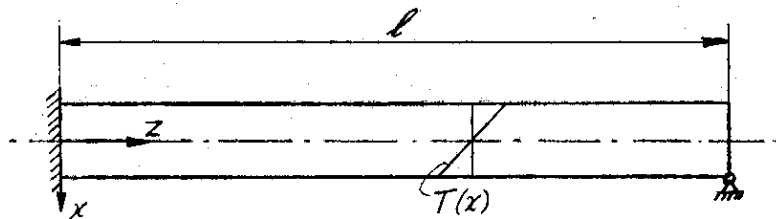


b)



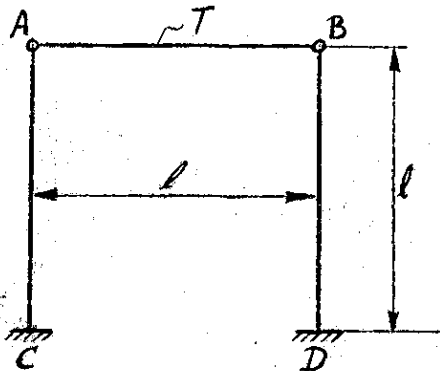
de reactiekrachten, de doorbuigingslijn en de maximale trekspanning.

3.4. Een balk aan een zijde ingeklemd en aan de andere zijde ondersteund krijgt een temperatuursverhoging T volgens: $T = T(x) = ax$, (a : constant).



Bepaal de reactiekrachten en de doorbuigingslijn.

3.5.



Van nevenstaande constructie wordt de balk AB uniform $T^{\circ}K$ verwarmd. Gevraagd wordt

- a) de spanningsverdeling in en de lengteverandering van AB;
- b) de normaalspanningsverdeling in en de uitbuigingslijn van AC en BD.

3.6. Een ingeklemde balk met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) wordt in zijn vrije uiteinde belast door een dwarskracht P welke een hoek α met de x -as maakt. Bepaal de hoek tussen $u_0(\ell)$ en de werklijn van P .

3.7. Beschouw weer een ingeklemde balk met rechthoekige doorsnede belast door een dwarskracht P in de x -richting. Stel:

$$t_{zz} = f(z)x, \quad t_{xz} = c(x^2 - a^2), \quad \text{overige } t_{ij} = 0.$$

- a) Laat zien dat deze spanningsverdeling voldoet aan de randvoorwaarden op de mantel.
- b) Bepaal c en $f(z)$ zodanig dat aan de locale en de globale evenwichtsvergelijkingen is voldaan.
- c) Bepaal de deformaties.
- d) Bewijs dat bovenstaande aanname voor $\nu \neq 0$ niet overeenkomt met de exacte oplossing, maar voor $\nu = 0$ wel (kunt U hier een fysische verklaring voor geven).

3.8. Beschouw hetzelfde probleem als bij 3.7, maar nu voor een cirkelvormige doorsnede.

Bepaal hiervoor de exacte spanningsverdeling.

Waarom moet hierbij (voor $y \neq 0$) de spanning t_{yz} ongelijk aan nul zijn?

Hint: Ga uit van:

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0, \quad t_{zz} = -\frac{P(\ell - z)x}{I}, \quad t_{xz} = t_{xz}(x, y), \\ t_{yz} = t_{yz}(x, y).$$

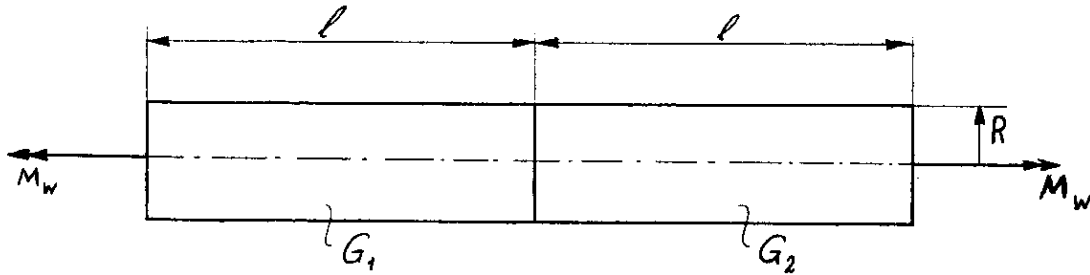
4. TORSIE VAN EEN CIRKELCYLINDER

4.1. Een holle cirkelvormige buis, binnenstraal R_1 , buitenstraal R_2 , wordt belast door een wringend moment M .

Bepaal de spanningsverdeling in de buis, de hoekverdraaiing van de einddoorsneden t.o.v. elkaar en de torsiestijfheid.

Bekijk het geval dat $R_2 - R_1 = d \ll R_2$.

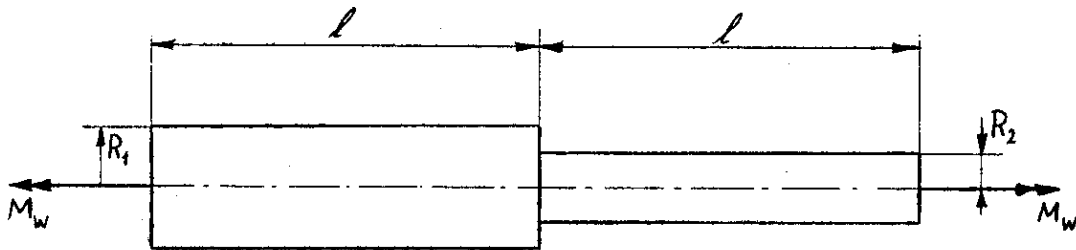
4.2.



Twee cirkelcilinders met verschillende afschuifmoduli, G_1 resp. G_2 , maar overigens gelijk, zijn aan elkaar gelast en worden belast door een wringend moment M_w .

Bepaal de spanningsverdeling, de hoekverdraaiing per lengte-eenheid en de totale torsiestijfheid.

4.3.



Als 4.2, maar nu met verschillende doorsneden, stralen R_1 resp. R_2 , maar gelijke G 's.

Bepaal, voor het gerelaxeerde probleem, de spanningsverdeling, de hoekverdraaiing per lengte-eenheid en de totale torsiestijfheid.

Waar zullen de grootste verschillen tussen de exacte en de gerelaxeerde oplossing optreden?

Wanneer zal de "gerelaxeerde" torsiestijfheid een goede benadering voor de "echte" torsiestijfheid zijn?

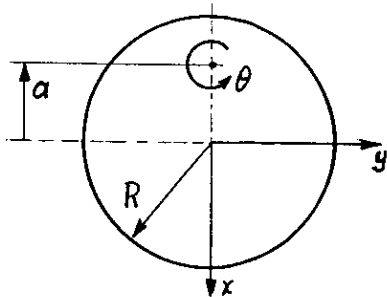
4.4. Een cirkelcilinder wordt belast door een wringend moment M en een normaalkracht N .

Bepaal de spanningen, deformaties en verplaatsingen van de cilinder.

Op welke plaats(en) zullen de grootste spanningen optreden? Bepaal hier de hoofdspanningen en de maximale schuifspanning τ_{max} .

4.5. Beantwoord dezelfde vragen als bij 4.4 voor een cirkelcylinder belast door een wringend moment M_z en een buigend moment M_x .

4.6.



Beschouw een cirkelcylinder, waarvan de begindoorsnede op zijn plaats wordt gehouden, terwijl de einddoorsnede $z = l$ wordt gedwongen te roteren om het punt $(x, y) = (-a, 0)$ over een hoek $\theta(l)$ volgens:

$$u(x, y, l) = -\theta(l)y ; \quad v(x, y, l) = \theta(l)(x + a) ,$$

terwijl we verder de normaalspanningen in deze doorsnede nul nemen:

$$(I) \quad t_{zz}(x, y, l) = 0 .$$

Laat zien dat deze deformatie niet tot stand kan worden gebracht door een wringend moment alleen, en geef aan welke andere belastingsgrootte hiervoor dan nog benodigd is.

Vervang de voorwaarde (I) door:

$$(II) \quad w(x, y, l) = 0 .$$

Welke extra belastingsgrootte moet U nu dan nog invoeren?

Bepaal, binnen het kader van de technische balkentheorie, de waarden (uitgedrukt in $\theta(l)$ en a) van de belastingsgrootheden zowel voor (I) als voor (II).

Vergelijk bovenstaand probleem met een ingeklemde cirkelcylinder, in zijn vrije einddoorsnede belast door een dwarskracht P in y -richting, die aangrijpt in $(-a, 0)$. Bepaal hiervoor de spanningsverdeling. Voor welke waarde van a is er "torsievrije" buiging?

5. TORSIE VAN EEN CYLINDER MET WILLEKEURIGE DOORSNEDE

5.1. Een cylinder met ellipsvormige doorsnede, waarvan de rand gegeven is door:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

wordt belast door een wringend moment M .

- a) Bepaal de spanningsverdeling, de hoekverdraaiing per lengte-eenheid en de torsiestijfheid D .
- b) Bepaal de plaats(en) waar de maximale schuifspanning optreedt en bereken daar de hoofdspansingen en τ_{\max} .
- c) In de technische balkentheorie wordt de torsiestijfheid meestal gelijk genomen aan: GI_p , waarin I_p het polaire oppervlaktetraagheidsmoment is:

$$I_p = \int_S (x^2 + y^2) dS .$$

Bepaal I_p voor een ellipsvormige doorsnede. Vergelijk GI_p met de bij a) gevonden waarde voor D . Geef voor $b/a = 1; 0,9; 0,75; 0,5$ de procentuele afwijkingen tussen GI_p en D .

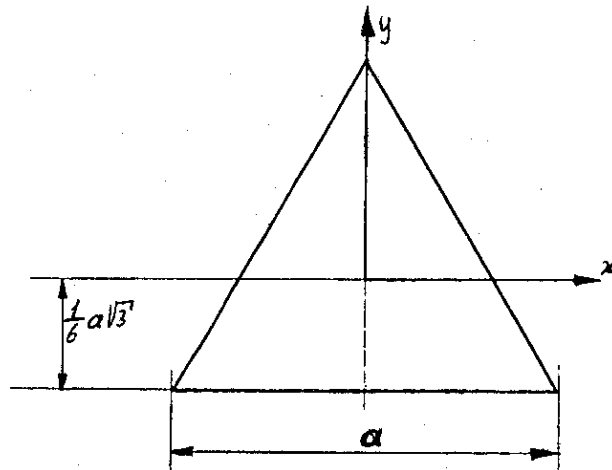
- d) Bepaal de welving van de doorsnede. Bewijs dat zowel de gemiddelde welving als zijn eerste momenten nul zijn, d.w.z. bewijs dat

$$\int_S w(x,y,z) dS = \int_S xw(x,y,z) dS = \int_S yw(x,y,z) dS = 0 .$$

(Hint: gebruik verband tussen F en Φ).

- e) Beantwoord vraag a): voor het limietgeval $b \ll a$.

5.2.



Een cylinder met een doorsnede in de vorm van een gelijkzijdige driehoek, zijde a , wordt getordeerd. De hoekverdraaiing per lengte-eenheid is α .

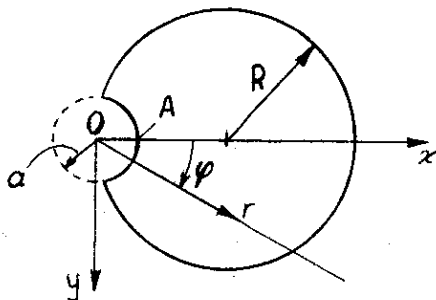
- Geef de voorstellingen in x- en y-coördinaten van de rechten waaruit de omtrek van de driehoek is opgebouwd.
- Geef met behulp hiervan een uitdrukking voor de spanningsfunctie $\tilde{F}(x,y)$, welke identiek aan de randvoorwaarde $\tilde{F} = 0$ voldoet.
- Bepaal hieruit de spanningsverdeling in de cylinder (als functie van α).
- Laat zien dat de grootheid τ gedefinieerd door

$$\tau = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2},$$

maximaal wordt op het midden van de zijden.

- Geef een uitdrukking in integraalvorm voor de torsiestijfheid.

5.3. Beschouw de torsie van een cirkelcylinder met een cirkelvormige inkeping volgens onderstaande figuur (let op keuze van de oorsprong van het assenkruis).



- Bewijs dat de spanningsfunctie $F(x,y)$ hier gelijk is aan:

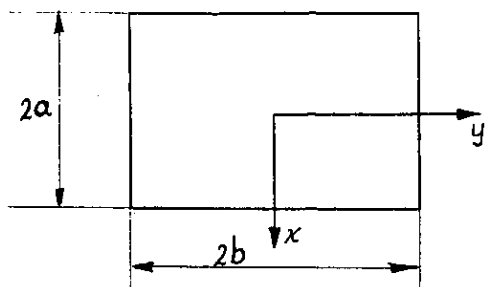
$$F = -2\alpha \left(\frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{R}{2}x + \frac{a^2 R x}{2(x^2 + y^2)} - \frac{a^2}{4} \right) =$$

$$= -2\alpha \left(\frac{r^2}{4} - \frac{R}{2}r \cos \varphi + \frac{a^2 R \cos \varphi}{2r} - \frac{a^2}{4} \right).$$

(r, φ : poolcoördinaten volgens figuur).

- Bepaal de spanningsverdeling.
- Bewijs dat de maximale schuifspanning τ_{\max} optreedt in het punt A: $(a, 0)$ en bereken de waarde van τ_{\max} .
Bepaal voor het geval dat $a \ll R$ de spanningsconcentratie in A; dit is de waarde van τ_{\max} voor de doorsnede met inkeping gedeeld door de τ_{\max} voor een zuiver cirkelvormige doorsnede.

5.4.



Beschouw de torsie van een cylinder met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) door een wringend moment M .

- Formuleer de randvoorwaarden op de mantel.
- Bewijs van het volgende spanningsstelsel.

$$t_{xz} = \frac{9}{16} \frac{M}{a^3 b^3} y(x^2 - a^2), \quad t_{yz} = -\frac{9}{16} \frac{M}{a^3 b^3} x(y^2 - b^2),$$

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0,$$

dat het voldoet aan de evenwichtsvergelijkingen en aan de randvoorwaarden op de mantel en dat het als enige snedegrootheid het wringend moment M levert.

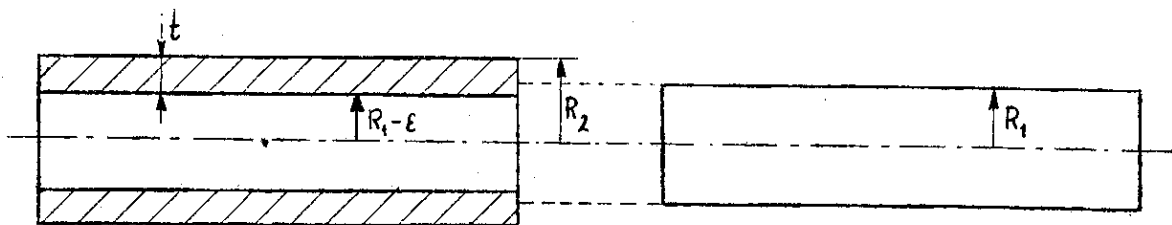
- Toch vormt dit stelsel niet de exacte oplossing. Waarom niet? Bewijs Uw antwoord.

6. VLAKKE VERVORMINGS- EN VLAKSPANNINGSTOESTAND

- Een lange, cirkelvormige buis, binnendiameter R_1 , buitendiameter R_2 , wordt belast door een inwendige druk p . Bepaal voor het geval dat de einddoorsneden: a) vrij, b) ingeklemd, zijn: de spanningen en de deformaties in de buis.

Bepaal de limietwaarden voor $t := R_2 - R_1 \ll R_1$.

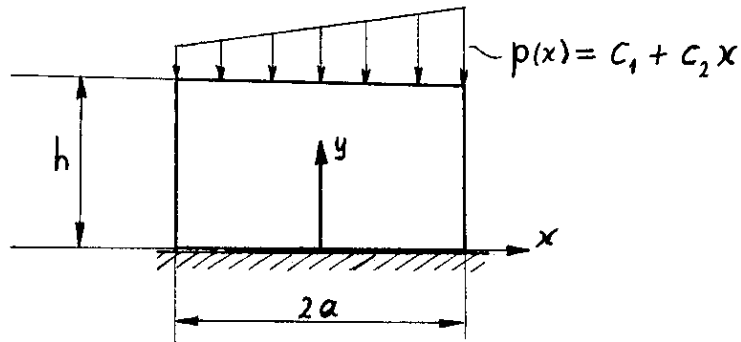
6.2.



Gegeven een cirkelcylinder, straal R_1 , en een cirkelvormige buis, binnenstraal $R_1 - \epsilon$, $0 < \epsilon \ll R_1$, buitenstraal R_2 .

- i) Hoeveel $^{\circ}\text{K}$ moet de buis worden verhit, opdat zijn binnenstraal gelijk is aan R_1 ?
- ii) De buis wordt nu over de cylinder geschoven en het geheel wordt afgekoeld tot de oorspronkelijke temperatuur. Hoe groot zijn nu de spanningen in de cylinder en de buis? Aangenomen mag worden dat de krimpverbinding alleen aanleiding geeft tot normaalspanningen.

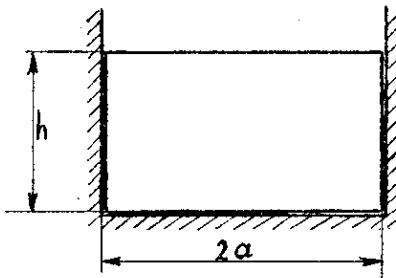
6.3.



Op een glad star vlak ligt vrij een balk, lengte l , met rechthoekige doorsnede, hoogte h , breedte $2a$. Het bovenvlak van de balk wordt belast door een lineair verlopende, normale druk $p(x)$.

- i) Bepaal de spanningen, deformaties en verplaatsingen in de balk.
- ii) Beantwoord dezelfde vragen als bij i) voor het geval de axiale verplaatsingen van de balk in zijn uiteinden verhinderd zijn.

6.4.

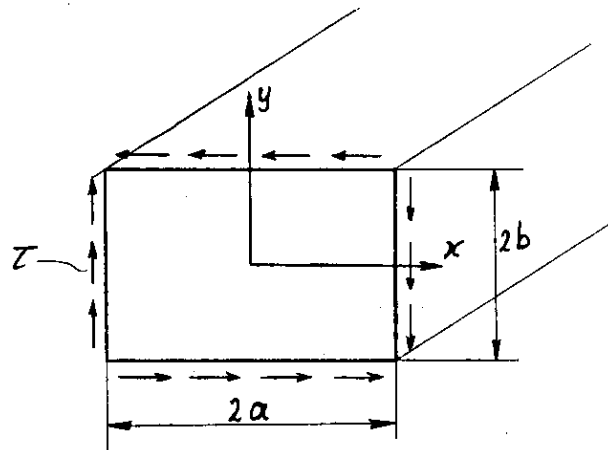


De in 6.3 beschreven balk zit nu ingeklemd tussen drie starre gladde wanden en wordt $T^{\circ}\text{K}$ in temperatuur verhoogd. Beantwoord zowel voor het geval dat de axiale verplaatsingen aan de uiteinden:

a) vrij, b) verhinderd, zijn de volgende vragen.

- i) Hoe groot zijn de spanningen in de balk?
- ii) Hoeveel is de hoogte van de balk toegenomen?

6.5.

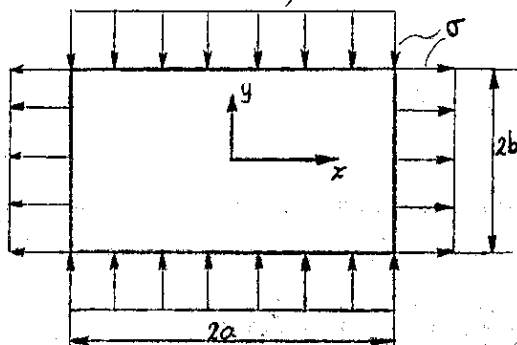


Een lange balk met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) wordt aan zijn manteloppervlak belast door loodrecht op de as van de balk staande schuifspanningen τ , welke constant van grootte zijn en verdeeld volgens bovenstaande figuur.

- i) Bewijs dat het systeem globaal in evenwicht is.
- ii) Bepaal de spanningen.
- iii) Bepaal de deformaties.
- iv) Schets de vorm van de doorsnede na deformatie.
- v) Hoe groot zijn de hoofdspansingen en in welk vlak treden zij op?
- vi) Bepaal de totale elastische energie van de balk (lengte van balk is l .)

7. REK VAN PLATEN. GEGENERALISEERDE VLAKSPANNINGSTOESTAND

7.1.

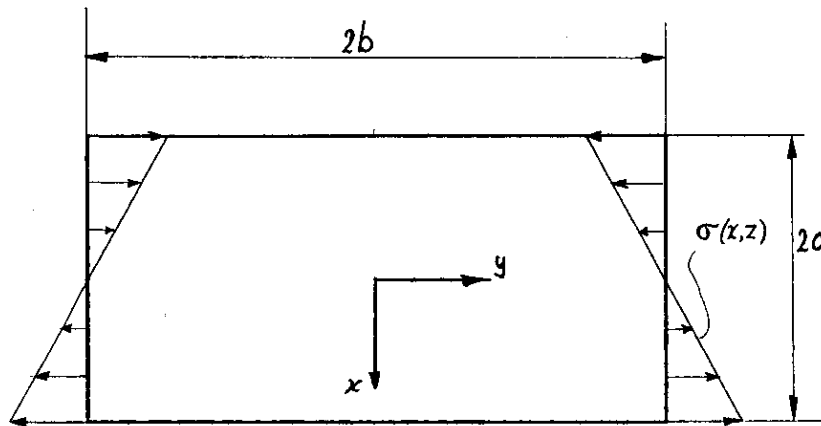


Een rechthoekige plaat ($2a \times 2b$) wordt langs de randen $x = \pm a$ en $y = \pm b$ belast door een uniforme trekspanning σ resp. drukspanning σ .

Bewijs dat in de plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst en bepaal de spanningen en deformaties in de plaat.

Wat is de dikte van de plaat na de deformatie?

7.2.



Een rechthoekige plaat ($2a \times 2b$) wordt langs de randen $y = \pm b$ belast door een normaalspanning $\sigma(x,z)$ welke lineair is in x :

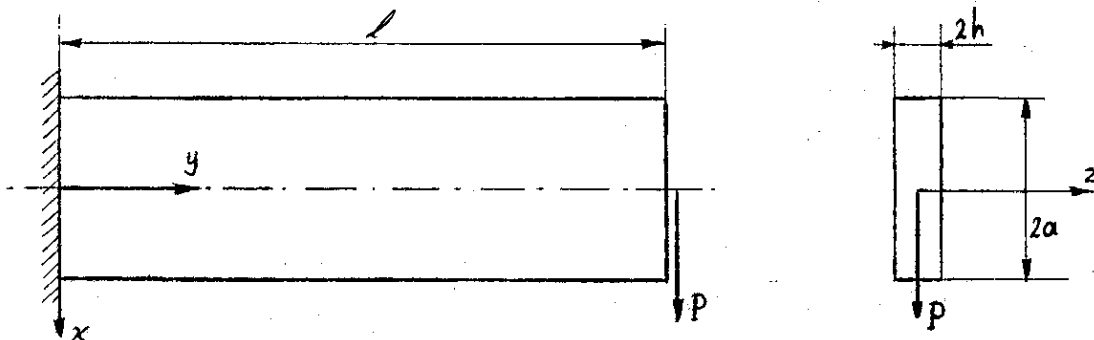
$$\sigma(x,z) = \alpha(z)x .$$

- i) Neem aan dat $\sigma(x,z)$ in z -richting "goed" verdeeld is, d.w.z. zodanig verdeeld dat in de plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst. Bepaal deze "goede" verdeling en bereken de bijbehorende spanningsverdeling in de plaat.
- ii) Beschouw dit probleem als een gegeneraliseerd vlakspanningsprobleem. Bepaal de doorsnedegrootheden N_x , N_y en N_{xy} en de spanningen als de gemiddelden van deze grootheden, dus

$$t_{xx} = \frac{1}{2h} N_x \text{ etc.}$$

- iii) Vergelijk de resultaten van i) en ii).

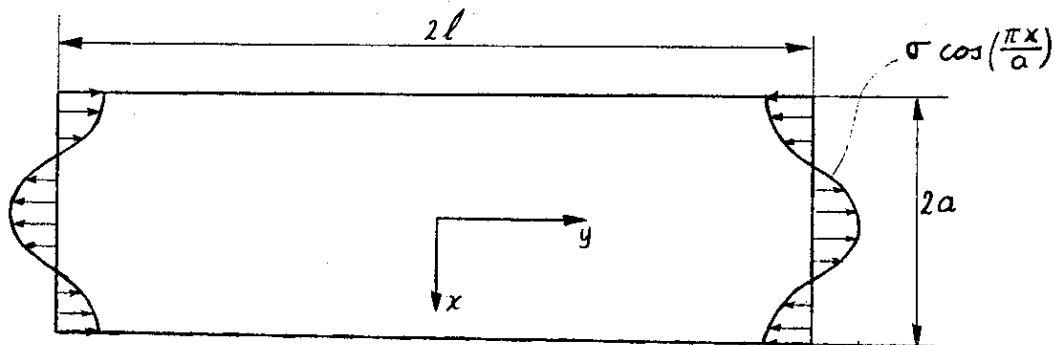
7.3.



Een rechthoekige plaat ($2a \times \ell$) is op $y = 0$ ingeklemd en op $y = \ell$ belast door een dwarskracht P in x -richting. Beschouw dit probleem als een generaliseerde vlakspanningstoestand. Neem aan dat de spanningen in de doorsneden $y = 0$ en $y = \ell$ goed verdeeld zijn, d.w.z. dat de normaalspanning t_{yy} een lineaire en de schuifspanning t_{xy} een kwadratische functie in x is.

- i) Bepaal de expliciete vorm van deze verdelingen.
- ii) Bepaal de Airy-functie voor dit probleem (ga hier voor uit van de bij i) gevonden vorm voor de spanningen aan de rand).
- iii) Bepaal de spanningen in de plaat.
- iv) Bepaal de deformaties. Laat zien dat de doorsnede $y = 0$ niet vlak blijft, zodat dus niet exact aan de voorwaarde dat de plaat op $y = 0$ is ingeklemd kan worden voldaan.

7.4.



Een rechthoekige plaat ($2a \times 2\ell$) wordt langs de zijden $y = \pm \ell$, belast door normaalspanningen, welke verdeeld zijn volgens:

$$\sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad (-a \leq x \leq a).$$

De randen $x = \pm a$ zijn vrij.

- i) Toon aan dat bovenstaande spanningsverdeling een nulbelasting vormt.
- ii) Formuleer de randvoorwaarden op $y = \pm \ell$ en $x = \pm a$.
- iii) Kies een Airy-functie $U(x,y)$ van de volgende vorm

$$U(x,y) = f(y) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

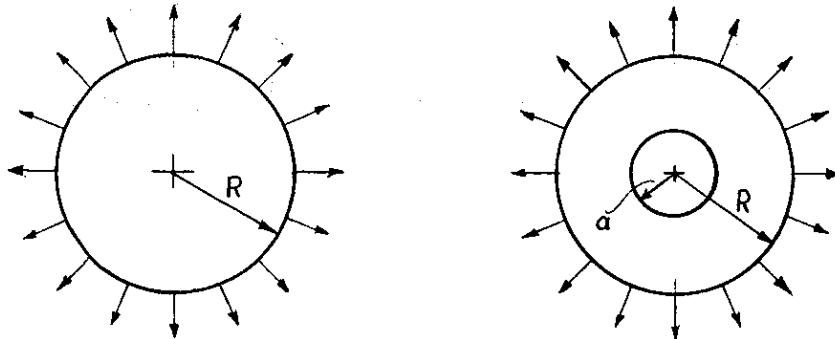
Laat zien dat hiermee aan alle randvoorwaarden op één na kan worden voldaan. Welke is deze ene, en aan welke eisen moet $f(y)$ voldoen opdat aan de andere is voldaan.

- iv) Bepaal de algemene vorm van $f(y)$ opdat $U(x,y)$ aan de bipotentiaal-

vergelijking voldoet. Bedenk hierbij dat $f(y)$ symmetrisch in y moet zijn.

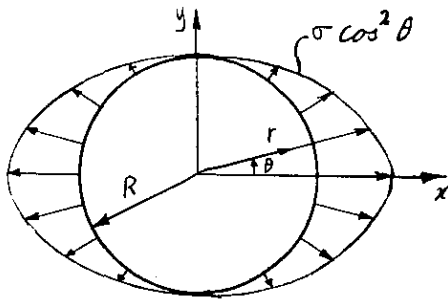
- v) Bepaal de in de onder iv) gevonden uitdrukking voor $f(y)$ voorkomende constanten.
- vi) Neem $\ell \gg a$. Bepaal nu een benaderde uitdrukking voor $f(y)$ door daarin termen van $O(e^{-\beta})$, met $\beta := \pi\ell/a$, te verwaarlozen.
- vii) Bepaal met het resultaat van vi) de spanningen in de plaat. Laat zien dat deze voor $|y| < \ell$ zeer snel uitsterven. Met welk algemeen principe is dit resultaat in overeenstemming.

7.5.



- a) Een cirkelvormige plaat, straal R , wordt aan zijn rand belast door een uniforme trekspanning σ .
 - i) Laat zien dat in deze plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst.
 - ii) Bepaal de spanningsverdeling.
 - iii) Bepaal de verplaatsingen. Hoe groot is de dikte van de plaat na de deformatie?
- b) Hetzelfde probleem als hierboven maar nu voor een plaat met een gat. De rand van het gat is vrij. Dit probleem (en alle nu volgende in dit hoofdstuk) mag worden opgelost als een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.
 - i) Bepaal de spanningen in de plaat.
 - ii) Neem de limiet $(a/R) \rightarrow 0$. Komt deze limiet overeen met probleem a)? Zo neen, hoe groot is dan de spanningsconcentratie?

7.6.

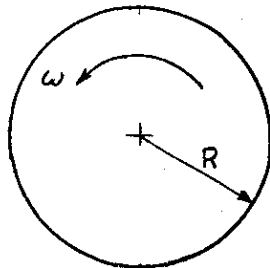


Een cirkelvormige plaat, straal R , wordt langs zijn rand belast door een normaalspanning volgens:

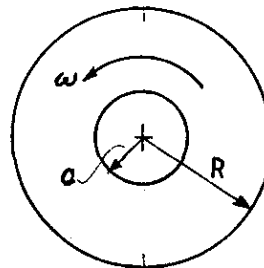
$$t_{rr} = \sigma \cos^2 \theta, \quad \text{op } r = R.$$

- i) Bepaal de algemene vorm van de Airy-functie.
- ii) Welke term(en) moet U in deze functie verwerpen omdat de plaat het punt $r = 0$ bevat? Bepaal de coëfficiënten van de overige termen uit de randvoorwaarden.
- iii) Bereken de spanningen en de deformaties.
- iv) Bepaal de verlenging van de middellijn langs $\theta = 0$.

7.7.



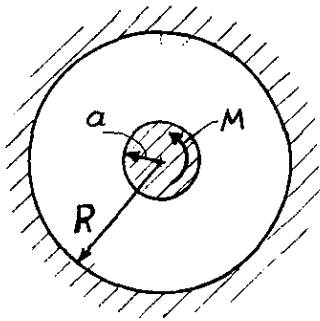
a)



b)

- a) Een cirkelvormige plaat roteert met een constante hoeksnelheid ω om een as loodrecht op zijn vlak.
 - i) Zet de rotatie stil en bepaal de van de centrifugaalkrachten afkomstige volumekracht.
 - ii) Bepaal de spanningen in de schijf.
 - iii) Waar zijn deze spanningen maximaal en hoe groot zijn ze daar?
- b) Als bij a) maar nu met een gat met straal a .
 - i) Beantwoord dezelfde vragen als bij a).
 - ii) Beschouw de limiet $(a/R) \rightarrow 0$. Is deze gelijk aan de oplossing van a)? Zo neen, hoe groot is dan de spanningsconcentratie?

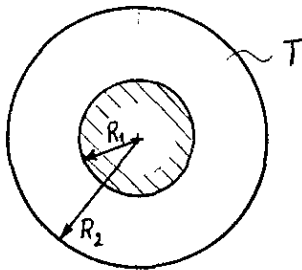
7.8.



Een cirkelvormige plaat, straal R , met een gat, straal a , is aan de buitenrand ingeklemd. De binnenrand is vast verbonden aan een starre schijf met straal a . De schijf wordt loodrecht op zijn vlak belast door een moment M .

- i) Bepaal de spanningsverdeling.
- ii) Bepaal de verplaatsingen.
- iii) Hoe groot is de hoekverdraaiing van de schijf?
- iv) Waar treedt de maximale spanning op en hoe groot is deze.

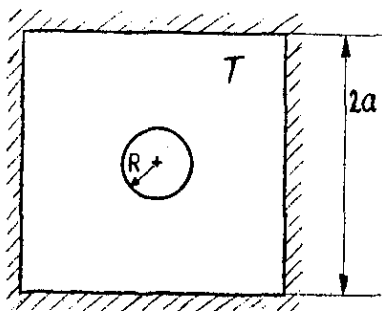
7.9.



Een cirkelvormige plaat met een gat, binnenstraal R_1 , buitenstraal R_2 , waarvan de binnenrand is ingeklemd en de buitenrand vrij is, wordt $T^\circ K$ in temperatuur verhoogd.

- i) Bepaal de spanningen.
- ii) Bepaal de toename van de buitenstraal.
- iii) Beschouw de limiet $(R_1/R_2) \rightarrow 0$.

7.10.



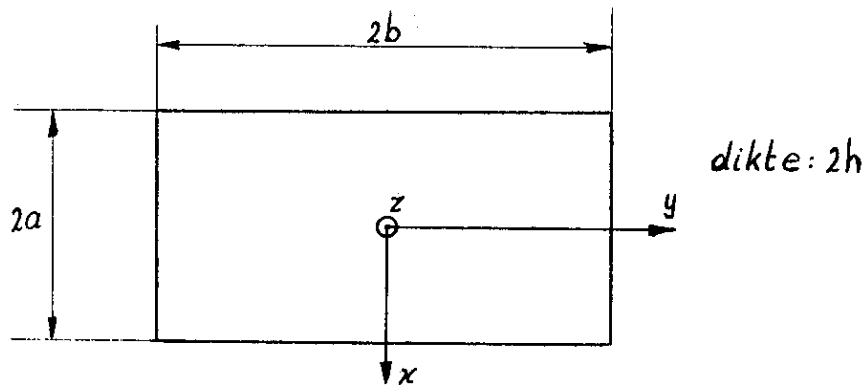
In het midden van een vierkante plaat, zijde $2a$, zit een cirkelvormig gat, straal R . De rand van het gat is vrij en de buitenranden van de plaat zijn zodanig opgelegd dat normale verplaatsingen verhinderd zijn. De plaat wordt $T^\circ K$ in temperatuur verhoogd.

We nemen de afmetingen van de plaat zo groot ($a \gg R$, in feite $a \rightarrow \infty$) dat we aan mogen nemen dat langs de buitenrand van de plaat een uniforme normaalspanning heerst.

- i) Bepaal deze uniforme spanning (is onafhankelijk van het gat).
- ii) Bepaal de spanningen in de plaat.
- iii) Bepaal de spanningsconcentratiefactor.

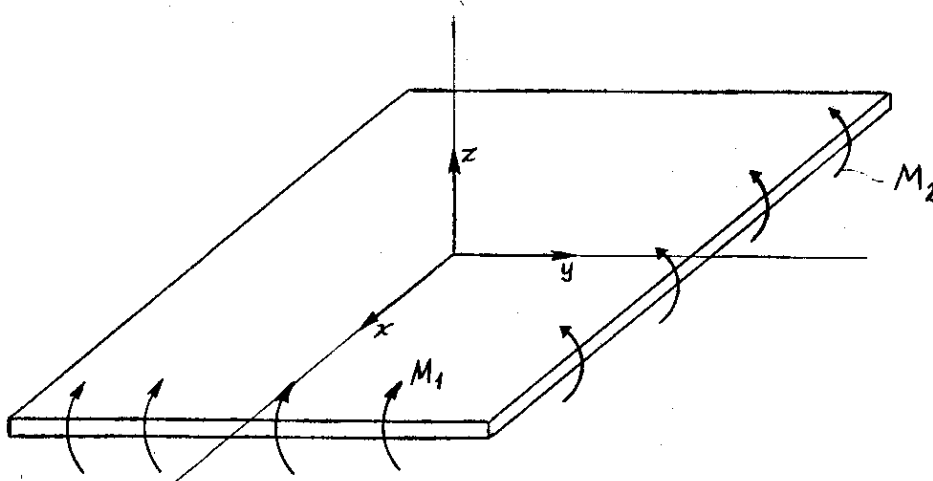
8. BUIGING VAN DUNNE PLATEN

In de nu volgende vraagstukken beschouwen we steeds rechthoekige platen van de volgende dimensies:



De belasting q , indien aanwezig, werkt steeds in de z -richting.

8.1.



Een rechthoekige plaat wordt langs zijn randen $x = \pm a$ belast door een uniform buigend moment M_1 in de, negatieve, y -richting en langs de randen $y = \pm b$ door uniforme buigende momenten M_2 in de, positieve, x -richting

(M_1 en M_2 zijn beide momenten per lengte-eenheid).

- a) Neem aan dat de momenten goed verdeeld (d.w.z. lineair in z) over de dikte van de plaat zijn.
- i) Bepaal de, exacte, spanningsverdeling in de plaat.
 - ii) Bepaal de deformaties.
 - iii) Bepaal de kromtestralen in x - en y -richting van het middenoppervlak na de buiging.
 - iv) Bewijs dat het middenoppervlak het neutrale vlak is.
 - v) Bewijs dat normalen ná de buiging nog loodrecht op het middenoppervlak staan.
- b) i) Los dit probleem op met de klassieke platentheorie; d.w.z. bepaal de doorzakking w en de snedegrootheden M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , Q_x en Q_y .
- ii) Vergelijk deze resultaten met die van a).

8.2. Een rechthoekige plaat, welke aan alle randen is opgelegd, wordt belast door een belasting $q(x,y)$ in z -richting.

a) Neem: $q(x,y) = q_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$.

- i) Bepaal de doorzakking van de plaat.
 - ii) Bepaal M_{xx} , M_{xy} , M_{yy} , Q_x en Q_y .
 - iii) Waar treedt de maximale doorzakking van de plaat op en hoe groot is deze?
- b) Neem: $q(x,y) = q_0$ (= constant), en beantwoord dezelfde vragen als bij a).
(Schrijf Uw antwoorden als een dubbele Fourierreeks).

8.3. Van een rechthoekige plaat zijn de randen $x = \pm a$ opgelegd en de randen $y = \pm b$ vrij. De belasting q is constant.

- i) Formuleer de randvoorwaarden voor dit probleem.
- ii) Laat zien dat uit deze randvoorwaarden volgt dat een lijn $x = \text{constant}$ na de buiging niet meer recht kan zijn.
- iii) Stel:

$$w(x,y) = \sum_{m=1,3}^{\infty} W_m(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) + w_1(x),$$

met

$$w_1(x) = C_1 x^4 + C_2 a^2 x^2 + C_3 a^4.$$

Kies C_1 , C_2 en C_3 zodanig dat $w_1(x)$ een particuliere oplossing van de plaatvergelijking is en dat $w_1(x)$ aan de randvoorwaarden op $x = \pm a$ voldoet.

Aan welke vergelijking moet $W_m(y)$ dan voldoen. Hoe luidt de algemene oplossing van deze vergelijking, onder de restrictie: $W_m(-y) = W_m(y)$?

Hoe luiden de randvoorwaarden voor $W_m(y)$?

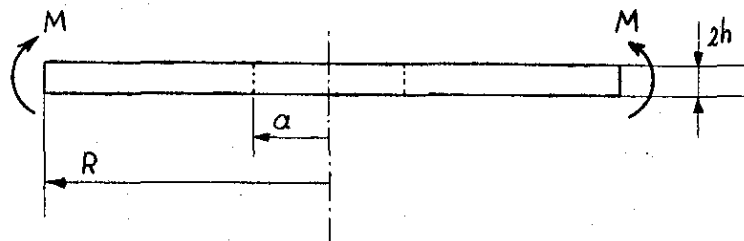
Bepaal hieruit $W_m(y)$. (Hint: schrijf $(x^2 - a^2)$ in de vorm van een cos-reeks:

$$(x^2 - a^2) = \sum_{m=1,3}^{\infty} c_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right).$$

Beperk U voor de volgende twee vragen tot de eerste term in de ontwikkeling (geef een schatting voor de hierbij gemaakte fout).

- iv) Stel: $a \gg b$. Bepaal de doorzakking voor het limietgeval: $(b/a) \rightarrow 0$. Vergelijk de doorzakking in $(x,y) = (0,0)$ met die volgens de klassieke balkentheorie.
- v) Beschouw: $a \ll b$. Bepaal voor dit geval de doorzakking (onder verwaarlozing van termen van $O(e^{-\beta})$, met $\beta = \pi b/2a$) en laat zien dat de plaat op enige afstand van de randen $y = \pm b$ nagenoeg cilindrisch uitbuigt (d.w.z. $w(x,y)$ is onafhankelijk van $y \Rightarrow$ rechten $x = \text{constant}$ zijn ook na buiging nog recht).
- vi) Neem aan dat de plaat langs de randen $y = \pm b$ wordt belast door buigende momenten per lengte-eenheid: $M(x)$. Hoe moet $M(x)$ dan gekozen worden opdat de plaat zuiver cilindrisch uitbuigt?

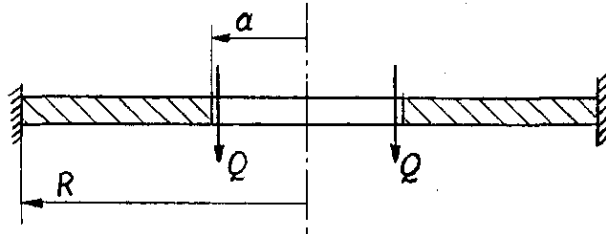
8.4.



- a) Een cirkelvormige plaat, straal R , wordt langs zijn omtrek gebogen door constante buigende momenten M .
- i) Formuleer de randvoorwaarden op $r = R$.
 - ii) Bepaal de doorbuiging (neem aan dat de rand $r = R$ niet verplaatst).
 - iii) Bepaal de buigende momenten en dwarskrachten in de plaat.
- b) Beschouw hetzelfde probleem als hierboven, maar nu voor een plaat met

een gat, straal a . De rand van het gat is vrij. Bepaal de doorbuiging. Beschouw de limiet $(a/R) \rightarrow 0$. Komt deze overeen met geval a).

8.5.



Een ingeklemde cirkelvormige plaat, straal R , met een gat, straal a , wordt langs de rand van het gat belast door een constante dwarskracht per lengte-eenheid Q , met

$$Q = \frac{P}{2\pi a} .$$

- i) Formuleer de randvoorwaarden op $r = R$ en $r = a$.
- ii) Bepaal de doorbuiging $w(r)$ van de plaat.
- iii) Bepaal de helling $w'(r)$ in $r = a$, en laat zien dat deze helling voor $a \rightarrow 0$ continu naar nul gaat.
- iv) Bepaal:

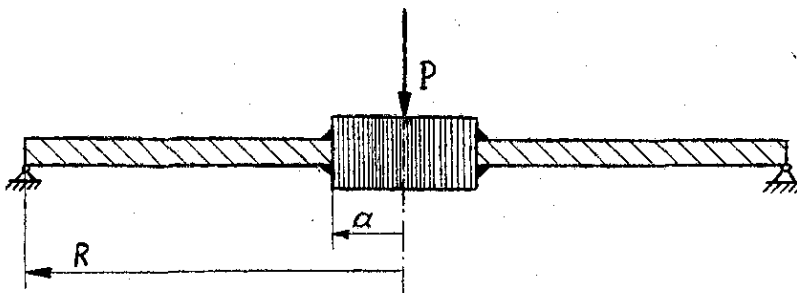
$$\lim_{a \rightarrow 0} w(a) ,$$

en bewijs dat deze gelijk is aan de doorbuiging van een volle plaat met een puntlast P in het midden, welke laatste gelijk is aan:

$$w(r) = - \frac{PR^2}{16\pi D} \left[1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{2r^2}{R^2} \log\left(\frac{r}{R}\right) \right] , \quad (r > 0) .$$

(Zie Timoshenko: Plates and Shells, pag. 74, verg. (92).)

8.6.



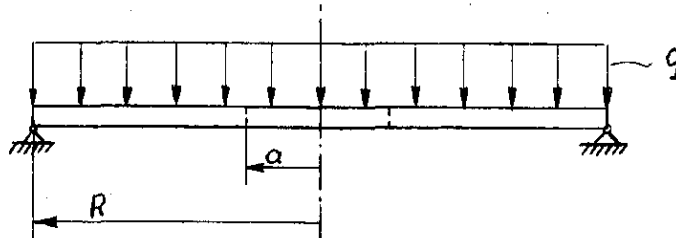
Een opgelegde, cirkelvormige plaat, straal R , bevat een starre, cirkelvormige kern, straal a , welke aan de plaat is gelast. De kern wordt belast door een kracht P .

Bepaal de doorbuiging van de plaat. Laat zien dat deze doorbuiging in de limiet $a \rightarrow 0$ overeenkomt met de doorbuiging van een volle, opgelegde plaat onder een kracht P in het midden, welke laatste gelijk is aan:

$$w(r) = -\frac{PR^2}{8\pi D} \left\{ \frac{(3+\nu)}{2(1+\nu)} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \log\left(\frac{r}{R}\right) \right\}.$$

(zie Timoshenko, pag. 65, verg. (k)).

8.7.



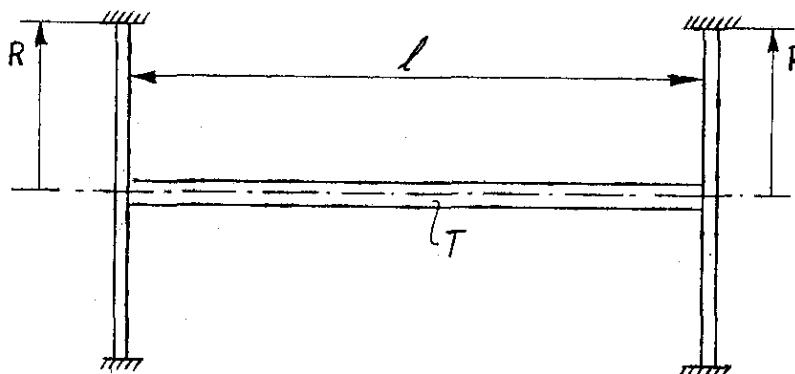
a) Een cirkelvormige plaat, straal R , wordt belast door een constante normale druk q .

Bepaal de doorbuiging van de plaat en de buigende momenten en dwarskrachten in de plaat.

b) Beschouw hetzelfde probleem, maar nu voor een plaat met een vrij gat, straal a .

Bepaal weer de doorbuigingslijn. Laat zien dat in de limiet $(a/R) \rightarrow 0$ weer de resultaten van a) worden verkregen.

8.8.



Tussen de middelpunten van twee identieke cirkelvormige platen, straal R , is een rechte staaf, lengte l , met cirkelvormige doorsnede, oppervlak F , bevestigd. De straal van de staaf is veel kleiner dan die van de plaat. De platen zijn aan de randen ingeklemd. De staaf wordt $T^{\circ}K$ in temperatuur verhoogd.

Bepaal de lengteverandering van de staaf en de normaalkracht in de staaf.

ANTWOORDEN

Hoofdstuk 1

1.1. a) i) $0 \leq z < \ell: t_{zz} = \frac{P}{S_1}, \quad \ell < z \leq 2\ell: t_{zz} = \frac{P}{S_2}.$

ii) $0 \leq z < \ell: w = \frac{Pz}{E_1 S_1}, \quad \ell < z \leq 2\ell: w = \frac{P\ell}{E_1 S_1} + \frac{P}{E_2 S_2} (z - \ell).$

Stijfheid: $c = \frac{E_1 E_2 S_1 S_2}{(E_1 S_1 + E_2 S_2) \ell}.$

iii) $W = \frac{(E_1 S_1 + E_2 S_2) P^2 \ell}{2 E_1 E_2 S_1 S_2} \quad (= \frac{P^2 \ell}{2c}).$

b) i) staaf 1 : $t_{zz} = \frac{E_1 P}{(E_1 S_1 + E_2 S_2)},$

staaf 2 : $t_{zz} = \frac{E_2 P}{(E_1 S_1 + E_2 S_2)}.$

ii) $w = \frac{Pz}{(E_1 S_1 + E_2 S_2)}.$

Stijfheid: $c = \frac{E_1 S_1 + E_2 S_2}{\ell}.$

iii) $W = \frac{P^2 \ell}{2(E_1 S_1 + E_2 S_2)} \quad (= \frac{P^2 \ell}{2c}).$

1.2. $t_{zz} = \rho g(\ell - z) + \frac{Mg}{S}; \quad w = (\rho g \ell + \frac{Mg}{S}) \frac{z}{E} - \frac{\rho g}{2E} z^2.$

1.3. a) $t_{xx} = t_{yy} = -\alpha p, \quad t_{zz} = -p, \quad t_{xy} = t_{yz} = t_{xz} = 0,$

$e_{xx} = e_{yy} = [\nu - \alpha(1 - \nu)] \frac{p}{E}, \quad e_{zz} = (2\nu\alpha - 1) \frac{p}{E},$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0 ,$$

$$u = [v - \alpha(1 - v)] \frac{Px}{E} , \quad v = [v - \alpha(1 - v)] \frac{Py}{E} , \quad w = (2v\alpha - 1) \frac{Pz}{E} .$$

b) $\alpha = \frac{1}{2v} , \quad c) \alpha = \frac{v}{1 - v} , \quad d) v = \frac{1}{2} .$

1.4. a)
$$t_{zz} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) E_1 E_2 T}{(E_1 + E_2)} ,$$

$$w = \frac{\alpha_1 (E_1 - E_2) + E_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{(E_1 + E_2)} Tz , \quad \text{voor } 0 \leq z \leq \ell$$

$$= \frac{\alpha_1 (E_1 - E_2) + E_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{(E_1 + E_2)} T\ell + \frac{\alpha_2 (E_2 - E_1) + E_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}{(E_1 + E_2)} T(z - \ell) ,$$

voor $\ell \leq z \leq 2\ell .$

b) Staaf 1:
$$t_{zz} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) E_1 E_2 T}{(E_1 + E_2)} ,$$

Staaf 2:
$$t_{zz} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E_1 E_2 T}{(E_1 + E_2)} .$$

$$w = \frac{(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2)}{(E_1 + E_2)} Tz .$$

1.5. a) $\rho f_z = \rho \omega^2 z .$

b) $t_{zz} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (\ell^2 - z^2) .$

c) $w = \frac{\rho \omega^2}{6E} (3\ell^2 - z^2) z .$

Hoofdstuk 2.

2.1. b) $t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = t_{xz} = t_{yz} = 0 , \quad t_{zz} = \frac{P}{\pi R^2} \left(1 - \frac{2x}{R}\right) ;$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu P}{\pi E R^2} \left(1 - \frac{2x}{R}\right), \quad e_{zz} = \frac{P}{\pi E R^2} \left(1 - \frac{2x}{R}\right),$$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0,$$

$$u = -\frac{\nu P x}{\pi E R^2} + \frac{P}{\pi E R^3} [z^2 + \nu(x^2 - y^2)],$$

$$v = -\frac{\nu P y}{\pi E R^2} + \frac{2\nu P x y}{\pi E R^3},$$

$$w = \frac{P z}{\pi E R^2} - \frac{2P x z}{\pi E R^3}.$$

c) $x_0 = \frac{1}{2}R.$ d) $W = \frac{P^2 \ell}{\pi E R^2}.$

2.2. b)

$$t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{xz} = t_{yz} = 0,$$

$$t_{zz} = \frac{P}{4ab} \left(1 + \frac{3y}{b} - \frac{3x}{a}\right).$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu P}{4abE} \left(1 + \frac{3y}{b} - \frac{3x}{a}\right), \quad e_{zz} = \frac{P}{4abE} \left(1 + \frac{3y}{b} - \frac{3x}{a}\right),$$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0,$$

$$u = -\frac{\nu P x}{4abE} - \frac{3\nu P x y}{4a^2 b E} + \frac{3P}{8a^2 b E} [z^2 + \nu(x^2 - y^2)],$$

$$v = -\frac{\nu P y}{4abE} + \frac{3\nu P x y}{4a^2 b E} - \frac{3P}{8ab^2 E} [z^2 - \nu(x^2 - y^2)],$$

$$w = \frac{P z}{4abE} - \frac{3P x z}{4a^2 b E} + \frac{3P y z}{4ab^2 E}.$$

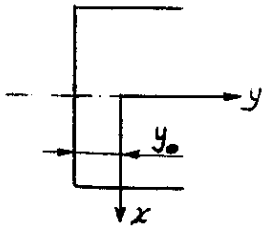
c) Neutrale lijn (x_0, y_0) uit: $\frac{3x_0}{a} - \frac{3y_0}{b} = 1.$

d)
$$\underline{u}(0,0,l) = \frac{Pl}{4abE} \left(\frac{3}{2} \frac{l}{a}, -\frac{3}{2} \frac{l}{b}, 1 \right).$$

Neen (mits $a \neq b$).

e)
$$W = \frac{7P^2 l}{8abE}.$$

2.3. a)



$$y_0 = \frac{1}{2}a,$$

$$I_x = \frac{5}{12} a^3 t, \quad I_y = \frac{8}{3} a^3 t.$$

b)
$$t_{zz} = \frac{M}{a^3 t} \left[\frac{3}{8} y \cos \alpha + \frac{12}{5} x \sin \alpha \right], \quad \text{overige } t_{ij} = 0.$$

c) Noem β hoek tussen snijlijn en y-as:

$$\tan \beta = \frac{32}{5} \tan \alpha.$$

d)
$$u_{0x} = \frac{3M \cos \alpha}{16Ea^3 t} z^2, \quad u_{0y} = \frac{6M \sin \alpha}{5Ea^3 t} z^2.$$

e)
$$\varphi(l) = -\frac{3Ml}{8Ea^3 t}.$$

f)
$$W = \frac{M^2 l}{Ea^3 t} \left(\frac{3}{16} \cos^2 \alpha + \frac{6}{5} \sin^2 \alpha \right).$$

2.4. a)

$$0 \leq z < l: t_{zz} = -\frac{4M}{\pi ER_1^4} x,$$

$$l < z \leq 2l: t_{zz} = -\frac{4M}{\pi ER_2^4} x,$$

overige $t_{ij} = 0.$

b) $0 \leq z \leq \ell: u_0(z) = \frac{2M}{\pi ER_1^4},$

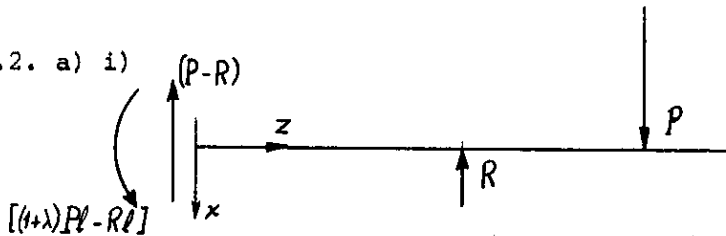
$\ell \leq z \leq 2\ell: u_0(z) = \frac{2M\ell^2}{\pi ER_1^4} \left(1 + \frac{2z}{\ell}\right) + \frac{2M}{\pi ER_2^4} z^2.$

2.5. a) $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \alpha(a + bx), \quad e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0.$

b) $x_0 = -\frac{a}{b}.$

Hoofdstuk 3.

3.2. a) i)



$R = \left(1 + \frac{3}{2}\lambda\right)P.$

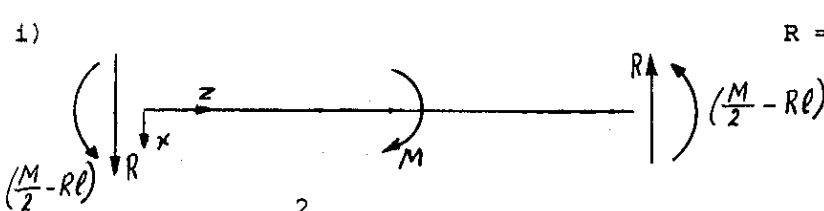
ii) $u(z) = -\frac{\lambda P}{4EI} (\ell z^2 - z^3), \quad 0 \leq z < \ell,$

$= \frac{P}{6EI} [3(1 + \lambda)\ell z^2 - z^3 + (1 + \frac{3}{2}\lambda)\ell^2(\ell - 3z)], \quad \ell < z < (1 + \lambda)\ell,$

$= \frac{\lambda P \ell^2}{12EI} [(9 + 6\lambda + 2\lambda^2)\ell + 3(1 + 2\lambda)z], \quad (1 + \lambda)\ell < z \leq 2\ell.$

iii) $(t_{zz})_{\max} = \frac{\lambda P \ell}{I} x_{\max}, \quad \text{t.p.v. } z = \ell.$

b) i)



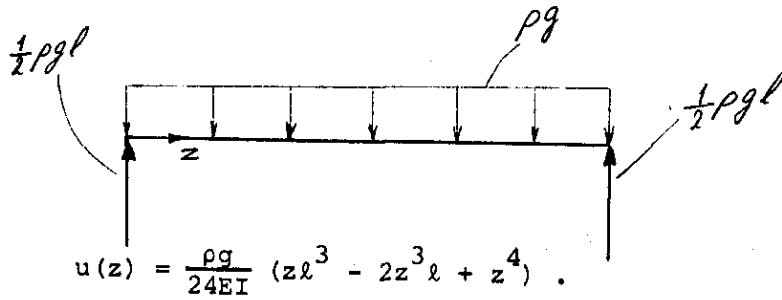
$R = \frac{3M}{4\ell}.$

ii) $u(z) = \frac{Mz^2}{8EI\ell} (z - \ell), \quad 0 \leq z < \ell$

$= -\frac{M}{8EI\ell} (4\ell^3 - 8\ell^2 z + 5\ell z^2 - z^3), \quad \ell < z \leq 2\ell.$

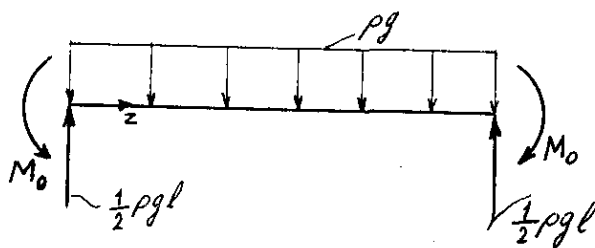
iii) $(t_{zz})_{\max} = \frac{M}{2I} x_{\max}$, t.p.v. $z = l$.

3.3. a)



$(t_{zz})_{\max} = \frac{pgl^2}{8I} x_{\max}$, t.p.v. $z = \frac{l}{2}$.

b)



$M_0 = \frac{1}{12} pgl^2$.

$u(z) = \frac{pg}{24EI} (z^4 - 2lz^3 + l^2z^2)$.

$(t_{zz})_{\max} = \frac{pgl^2}{12I} x_{\max}$, t.p.v. $z = 0, \text{ of } l$.

3.4.



$R = - \frac{3\alpha a}{2l} EI$.

$u(z) = \frac{\alpha a}{4l} (lz^2 - z^3)$.

3.5. a) In AB normaalspanning σ volgens:

$$\sigma = - \frac{3EI\alpha T}{Sl^2 \left(1 + \frac{3I}{2Sl^2}\right)}$$

$$(\Delta l)_{AB} = \frac{\alpha T l}{\left(1 + \frac{3I}{2Sl^2}\right)}$$

(N.B. voor slanke balken: $1 + \frac{3I}{2Sl^2} \approx 1$).

b) (z-as langs CA)

$$t_{zz} = - \frac{3\alpha ET}{l^2 \left(1 + \frac{3I}{2Sl^2}\right)} (l - z)x,$$

$$u(z) = \frac{\alpha T}{2l^2 \left(1 + \frac{3I}{2Sl^2}\right)} (3z^3 - z^2 l).$$

3.6. Noem hoek tussen $u_0(l)$ en x-as: β .

Dan

$$\tan \beta = \frac{a^2}{b^2} \tan \alpha.$$

3.7. b) $c = - \frac{P}{2I_y}, \quad f(z) = \frac{P(z-l)}{I_y}, \quad (I_y = \frac{4}{3} a^3 b).$

c) $e_{xx} = e_{yy} = - \frac{\nu P}{EI} (z-l)x, \quad e_{zz} = \frac{P}{EI} (z-l)x,$

$$e_{xz} = \frac{(1+\nu)P}{2EI} (a^2 - x^2), \quad e_{xy} = e_{yz} = 0.$$

3.8. Zie collegedictaat: § 2.7.

Hoofdstuk 4

$$4.1. \quad t_{\theta z} = \frac{2Mr}{\pi(R_2^4 - R_1^4)}, \quad (\approx \frac{M}{2\pi R^2 d}, \quad d \ll R),$$

hoekverdraaiing:

$$\frac{2Ml}{\pi G(R_2^4 - R_1^4)}, \quad (\approx \frac{Ml}{2\pi GR^3 d}, \quad d \ll R),$$

$$D = \frac{\pi}{2} G(R_2^4 - R_1^4), \quad (\approx 2\pi GR^3 d, \quad d \ll R).$$

$$4.2. \quad t_{\theta z} = \frac{2M_w}{\pi R^4} r, \quad \alpha_1 = \frac{2M_w}{\pi G_1 R^4}, \quad \alpha_2 = \frac{2M_w}{\pi G_2 R^4},$$

$$D = \frac{\pi R^4 G_1 G_2}{2(G_1 + G_2)}.$$

$$4.3. \quad t_{\theta z}^{(1)} = \frac{2M}{\pi R_1^4} r, \quad \alpha_1 = \frac{2M}{\pi G R_1^4},$$

$$t_{\theta z}^{(2)} = \frac{2M}{\pi R_2^4} r, \quad \alpha_2 = \frac{2M}{\pi G R_2^4},$$

$$D = \frac{\pi G R_1^4 R_2^4}{2(R_1^4 + R_2^4)}.$$

$$4.4. \quad t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = 0, \quad t_{xz} = -\frac{2Mx}{\pi R^4}, \quad t_{yz} = \frac{2My}{\pi R^4}, \quad t_{zz} = \frac{N}{\pi R^2},$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu N}{\pi E R^2}, \quad e_{xy} = 0, \quad e_{xz} = -\frac{Mx}{\pi G R^4}, \quad e_{yz} = \frac{My}{\pi G R^4}, \quad e_{zz} = \frac{N}{\pi E R^2}.$$

$$u = -\frac{2M}{\pi R} xz - \frac{\nu N}{\pi ER} x, \quad v = \frac{2M}{\pi R} yz - \frac{\nu N}{\pi ER} y, \quad w = \frac{N}{\pi ER} z,$$

$$\tau_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi R^3} (NR + 2M), & \text{als } NR > 2M, \\ \frac{2M}{\pi R^3}, & \text{als } NR < 2M. \end{cases}$$

4.5.

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0, \quad t_{xz} = -\frac{2M_z}{\pi R} x, \quad t_{yz} = \frac{2M_z}{\pi R} y, \quad t_{zz} = \frac{4M_x}{\pi R} y,$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\nu e_{zz}, \quad e_{zz} = \frac{4M_x}{\pi ER} y,$$

$$e_{xz} = \frac{-M_z}{\pi GR} x, \quad e_{yz} = \frac{M_z}{\pi GR} y,$$

$$u = -\frac{2M_z}{\pi R} xz - \frac{4\nu M_x}{\pi ER} xy,$$

$$v = \frac{2M_z}{\pi R} yz - \frac{2M_x}{\pi ER} (z^2 - \nu x^2 + \nu y^2),$$

$$w = \frac{4M_x}{\pi ER} yz,$$

$$\tau_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^3} (2M_x + M_z), & \text{als } M_z < 2M_x, \\ \frac{2M_z}{\pi R^3}, & \text{als } M_z > 2M_x. \end{cases}$$

4.6. (I)

$$M_w = \frac{\pi GR^4}{2l} \theta(l), \quad P_y = \frac{3\pi a ER^4}{4l^3} \theta(l),$$

(II)

$$M_w = M_w(I), \quad P_y = \frac{3\pi a ER^4}{5l^3} \theta(l), \quad M_x = \frac{3\pi a ER^4}{2l^2} \theta(l).$$

Hoofdstuk 5

5.1. a) $t_{xz} = - \frac{2M}{\pi ab^3} y$,

$$t_{yz} = \frac{2M}{\pi a^3 b} x$$
 ,

$$\alpha = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi G a^3 b^3}$$
 ,

$$D = \frac{\pi G a^3 b^3}{(a^2 + b^2)}$$

b) Stel $a > b$:

in $(x,y) = (0, \pm b)$: $\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi ab^2}$.

c) $I_p = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)$.

d) $w = \frac{(b^2 - a^2)M}{\pi G a^3 b^3} xy$.

e) $t_{xz} = - \frac{2M}{\pi ab^3} y$,

$$t_{yz} = 0 \left(\frac{b^2}{a} \right) t_{xz}$$
 ,

$$\alpha \approx \frac{M}{\pi G ab^3} , \quad D \approx \pi G ab^3$$
 .

5.2. a) $y + \frac{1}{6} a\sqrt{3} = 0$, $y\sqrt{3} + 3x - a = 0$, $y\sqrt{3} - 3x - a = 0$.

b) $\tilde{F}(x,y) = -\frac{1}{6a\sqrt{3}}(3y^3 - \frac{3}{2} ay^2\sqrt{3} - \frac{1}{6} a^3\sqrt{3} - 9x^2y - \frac{3}{2} x^2a\sqrt{3})$,

c) $t_{xz} = \frac{G\alpha}{a\sqrt{3}}(3y^2 - 3x^2 - ay\sqrt{3})$,

$t_{yz} = \frac{G\alpha}{a\sqrt{3}}(6xy + ax\sqrt{3})$,

$t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{zz} = 0$.

d) $D = -8G \int_{y=-\frac{1}{6}a\sqrt{3}}^{\frac{1}{3}a\sqrt{3}} \int_{x=0}^{\frac{1}{3}(a-y\sqrt{3})} \tilde{F}(x,y) dx dy = \frac{Ga^4\sqrt{3}}{80}$.

5.3. Zie collegedictaat (§ 2.6)

5.4. - .

Hoofdstuk 6

6.1. a) V.S.T. ; b) V.V.T. ($\Pi := pR_1^2 / (R_2^2 - R_1^2)$)

$t_{rr} = \Pi(1 - \frac{R_2^2}{r^2})$, $t_{\theta\theta} = \Pi(1 + \frac{R_2^2}{r^2})$,

$t_{zz} = \begin{cases} 0, & \text{a) ,} \\ 2\nu\Pi, & \text{b) .} \end{cases}$

a) $e_{rr} = \frac{\Pi}{E}[(1 - \nu) - (1 + \nu)\frac{R_2^2}{r^2}]$, $e_{\theta\theta} = \frac{\Pi}{E}[(1 - \nu) + (1 + \nu)\frac{R_2^2}{r^2}]$,

$e_{zz} = -\frac{2\nu\Pi}{E}$.

b) $e_{rr} = \frac{(1 + \nu)\Pi}{E}[(1 - 2\nu) - \frac{R_2^2}{r^2}]$, $e_{\theta\theta} = \frac{(1 + \nu)\Pi}{E}[(1 - 2\nu) + \frac{R_2^2}{r^2}]$, $e_{zz} = 0$.

Limietwaarden:

$$t_{rr} = -p \left[1 - \frac{R_2 - r}{t} \right], \quad t_{\theta\theta} = \frac{pR}{t} \quad (>> |t_{rr}|).$$

6.2. i) $T = \frac{\epsilon}{\alpha R_1}.$

ii) buis:

$$t_{rr} = t_{\theta\theta} = \frac{E\epsilon}{2R_1} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right),$$

cylinder:

$$t_{rr} = \frac{E\epsilon R_1}{2R_2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right); \quad t_{\theta\theta} = \frac{E\epsilon R_1}{2R_2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right).$$

$$t_{r\theta} = t_{rz} = t_{\theta z} = t_{zz} = 0 \quad (\text{overall}).$$

6.3. i) (VST). Hint: ga uit van Airy-functie: $U = -\frac{1}{2}c_1x^2 - \frac{1}{6}c_2x^3.$

$$t_{xx} = t_{xy} = 0, \quad t_{yy} = -c_1 - c_2x, \quad t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0,$$

$$e_{xx} = e_{zz} = \frac{\nu}{E}(c_1 + c_2x), \quad e_{yy} = -\frac{1}{E}(c_1 + c_2x), \quad e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0.$$

$$u = \frac{\nu}{E}(c_1x + \frac{1}{2}c_2x^2) - \frac{\nu}{2E}c_2z^2 - \frac{c_2}{2E}y^2,$$

$$v = -\frac{1}{E}(c_1 + c_2x)y; \quad w = \frac{\nu}{E}(c_1 + c_2x)z.$$

ii) (V.V.T.) $t_{xx} = t_{xy} = 0, \quad t_{yy} = -c_1 - c_2x, \quad t_{xz} = t_{yz} = 0, \quad t_{zz} = -\nu(c_1 + c_2x)$

$$e_{xx} = \frac{\nu(1+\nu)}{E}(c_1 + c_2x); \quad e_{yy} = -\frac{(1-\nu^2)}{E}(c_1 + c_2x); \quad e_{xy} = e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = 0$$

$$u = \frac{\nu(1+\nu)}{E}(c_1x + \frac{1}{2}c_2x^2) + \frac{(1-\nu^2)}{E}c_2y^2,$$

$$v = -\frac{(1-\nu^2)}{E}(c_1 + c_2x)y, \quad w = 0.$$

6.4. a) (VST)

i) $t_{xx} = -\alpha ET$, overige $t_{ij} = 0$.

ii) $\Delta h = (1 + \nu)\alpha Th$.

b) (VVT)

i) $t_{xx} = t_{zz} = -\frac{\alpha ET}{(1 - \nu)}$, overige $t_{ij} = 0$.

ii) $\Delta h = \frac{\alpha Th}{(1 - \nu)}$.

6.5. ii) $t_{xy} = -\tau$, overige $t_{ij} = 0$.

iii) $e_{xy} = -\frac{\tau}{2G}$, overige $e_{ij} = 0$.

v) $\sigma_1 = -\tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \tau$, onder 45° met x- en y-as.

vi) $w = \frac{abl\tau^2}{G}$.

Hoofdstuk 7

7.1. $t_{xx} = \sigma$, $t_{yy} = -\sigma$, overige $t_{ij} = 0$.

$$e_{xx} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma , \quad e_{yy} = -\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma , \quad e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = e_{xy} = 0 .$$

Dikte onveranderd.

7.2. i) Goede verdeling als: $\alpha(z) = \alpha = \text{constant}$.

$$t_{yy} = \alpha x , \quad \text{overige } t_{ij} = 0 .$$

ii) $N_x = N_{xy} = 0$, $N_y = x \int_{-h}^h \alpha(z) dz$.

iii) i) \equiv ii) als $\alpha(z) = \alpha$.

$$7.3. \text{ i) } \underline{y = 0} : t_{yy} = -\frac{3P\ell}{4a^3 h} x, \quad t_{xy} = -\frac{3P}{8a^3 h} (x^2 - a^2),$$

$$\underline{y = \ell} : t_{yy} = 0, \quad t_{xy} = -\frac{3P}{8a^3 h} (x^2 - a^2).$$

$$\text{ii) } U(x,y) = \frac{P}{4a^3} (y - \ell) (x^2 - 3a^2)x.$$

$$\text{iii) } t_{xx} = 0, \quad t_{yy} = -\frac{3P}{4a^3 h} (\ell - y)x, \quad t_{xy} = -\frac{3P}{8a^3 h} (x^2 - a^2).$$

$$\text{iv) } e_{xx} = \frac{3\nu P}{4Ea^3 h} (\ell - y)x, \quad e_{yy} = -\frac{3P}{4Ea^3 h} (\ell - y)x,$$

$$e_{xy} = -\frac{3(1 + \nu)P}{8Ea^3 h} (x^2 - a^2).$$

$$7.4. \text{ ii) } \underline{y = \pm \ell} : t_{yy} = \sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad t_{xy} = 0.$$

$$\underline{x = \pm a} : t_{xx} = t_{xy} = 0.$$

$$\text{iii) } t_{xx} (x = \pm a) \neq 0.$$

$$f(\pm \ell) = -\frac{a^2 \sigma}{\pi^2}, \quad f'(\ell) = 0.$$

$$\text{iv) } f(y) = A \cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right) + B \frac{y}{\ell} \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right).$$

$$\text{v) } A = -\frac{a^2 \sigma}{\pi^2} \frac{(\sinh \beta + \beta \cosh \beta)}{(\beta + \sinh \beta \cosh \beta)}, \quad B = \frac{a^2 \sigma}{\pi^2} \frac{\beta \sinh \beta}{(\beta + \sinh \beta \cosh \beta)},$$

$$\beta = \frac{\pi \ell}{a}.$$

$$\text{vi) } f(y) = -\frac{2a^2 \sigma}{\pi^2} e^{-\beta} \left\{ (\beta + 1) \cosh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) - \frac{\beta y}{\ell} \sinh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) \right\} (1 + o(e^{-\beta})).$$

$$\text{vii) } t_{xx} = -2e^{-\beta} \left[(\beta - 1) \cosh\left(\frac{\beta y}{l}\right) - \frac{\beta y}{l} \sinh\left(\frac{\beta y}{l}\right) \right] \sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right),$$

$$t_{xy} = 2e^{-\beta} \left[\beta \sinh\left(\frac{\beta y}{l}\right) - \frac{\beta y}{l} \cosh\left(\frac{\beta y}{l}\right) \right] \sigma \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right),$$

$$t_{yy} = 2e^{-\beta} \left[(\beta + 1) \cosh\left(\frac{\beta y}{l}\right) - \frac{\beta y}{l} \sinh\left(\frac{\beta y}{l}\right) \right] \sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) !$$

7.5. a) ii) $t_{rr} = t_{\theta\theta} = \sigma$, overige $t_{ij} = 0$.

iii) $u_r = \frac{(1-\nu)\sigma}{E} r$, $u_\theta = 0$, $u_z = -\frac{2\nu\sigma}{E} z$.

$$(\text{dikte})_{na} = \left(1 - \frac{2\nu\sigma}{E}\right) (\text{dikte})_{voor}.$$

b) i) $t_{rr} = \frac{\sigma R^2}{(R^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$, $t_{\theta\theta} = \frac{\sigma R^2}{(R^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$, $t_{r\theta} = 0$.

ii) 2.

7.6. i) $U(r, \theta) = A_1 \log r + C_1 r^2 + [A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2] \cos 2\theta$.

ii) $A_1 = C_2 = D_2 = 0$.

$$C_1 = \frac{\sigma}{4}, \quad A_2 = -\frac{\sigma}{4}, \quad B_2 = \frac{\sigma}{12R^2}.$$

iii) $t_{rr} = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta)$, $t_{r\theta} = \frac{\sigma}{2} \left(-1 + \frac{r^2}{R^2}\right) \sin 2\theta$,

$$t_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2} \left\{1 - \left(1 + \frac{2r^2}{R^2}\right) \cos 2\theta\right\};$$

$$e_{rr} = \frac{\sigma}{2E} \left[1 - \nu + \left(1 + \nu + \frac{2\nu r^2}{R^2}\right) \cos 2\theta\right],$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2E} \left[1 - \nu - \left(1 - \nu + \frac{2\nu r^2}{R^2}\right) \cos 2\theta\right],$$

$$e_{r\theta} = \frac{(1+\nu)\sigma}{2E} \left[-1 + \frac{r^2}{R^2} \sin 2\theta\right].$$

$$\text{iv)} \quad \frac{2\sigma R}{E} \left(1 + \frac{\nu}{3}\right).$$

$$7.7. \text{ a) i)} \quad \rho f_r = \rho \omega^2 r, \quad \rho f_\theta = 0.$$

$$\text{ii)} \quad t_{rr} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 (R^2 - r^2), \quad t_{\theta\theta} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 R^2 - \frac{(1 + 3\nu)}{8} \rho \omega^2 r^2.$$

$$\text{iii)} \quad \text{op } r = 0 : t_{rr}(0) = t_{\theta\theta}(0) = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 R^2.$$

$$\text{b) i)} \quad t_{rr} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 \left(R^2 + a^2 - \frac{a^2 R^2}{r^2} - r^2 \right),$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 \left\{ R^2 + a^2 + \frac{a^2 R^2}{r^2} - \frac{(1 + 3\nu)}{(3 + \nu)} r^2 \right\}.$$

ii) 2 .

$$7.8. \text{ i)} \quad t_{rr} = t_{\theta\theta} = 0, \quad t_{r\theta} = -\frac{M_z}{2\pi h} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

$$\text{ii)} \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{(1 + \nu) M_z}{2\pi h R^2 E} \left(r - \frac{R^2}{r} \right).$$

$$\text{iii)} \quad \frac{(1 + \nu)(R^2 - a^2)}{2\pi h a^2 R^2 E} M_z.$$

$$\text{iv)} \quad |(t_{r\theta})_{\max}| = \frac{M_z}{2\pi h a^2}, \quad \text{voor } r = a.$$

$$7.9. \text{ i)} \quad t_{rr} = B \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad t_{\theta\theta} = B \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right),$$

met

$$B = -\frac{\alpha T E R_1^2}{[(1 - \nu) R_1^2 + (1 + \nu) R_2^2]}.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{R_2^2 + \nu(R_2^2 - R_1^2)}{[(1 - \nu)R_1^2 + (1 + \nu)R_2^2]} \alpha T R_2 .$$

$$7.10. \text{ i)} \quad -\alpha E T / (1 - \nu) .$$

$$\text{ii)} \quad t_{rr} = -\frac{\alpha E T}{(1 - \nu)} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) , \quad t_{\theta\theta} = -\frac{\alpha E T}{(1 - \nu)} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) , \quad t_{r\theta} = 0 .$$

$$\text{iii)} \quad 2 .$$

HOOFDSTUK 8

$$8.1. \text{ a) i)} \quad t_{xx} = -\frac{3M_1}{2h^3} z , \quad t_{yy} = -\frac{3M_2}{2h^3} z , \quad t_{xy} = t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0 .$$

$$\text{ii)} \quad e_{xx} = -\frac{3}{2Eh^3} (M_1 - \nu M_2) z , \quad e_{yy} = -\frac{3}{2Eh^3} (M_2 - \nu M_1) z ,$$

$$e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0 , \quad e_{zz} = \frac{3\nu}{2Eh^3} (M_1 + M_2) .$$

$$\text{iii)} \quad \frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{3}{2Eh^3} (M_1 - \nu M_2) , \quad \frac{1}{R_y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{3}{2Eh^3} (M_2 - \nu M_1) .$$

$$\text{b) i)} \quad M_{xx} = -M_1 , \quad M_{yy} = -M_2 , \quad M_{xy} = Q_x = Q_y = 0 .$$

$$w(x, y) = \frac{3}{4Eh^3} [(M_1 - \nu M_2)x^2 - (M_2 - \nu M_1)y^2] .$$

$$8.2. \text{ a) i)} \quad w(x, y) = \frac{16a^4 b^4 q_0}{\pi^4 (a^2 + b^2)^2 D} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) .$$

$$\text{ii)} \quad M_{xx} = \frac{4a^2 b^2 q_0}{\pi^2 (a^2 + b^2)^2} (b^2 + \nu a^2) \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) ,$$

$$M_{yy} = \frac{4a^2 b^2 q_0}{\pi^2 (a^2 + b^2)^2} (a^2 + \nu b^2) \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) ,$$

$$M_{xy} = \frac{4(1-\nu)a^3b^3}{\pi^2(a^2+b^2)^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right),$$

$$Q_x = -\frac{2ab^2q_0}{\pi(a^2+b^2)} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right),$$

$$Q_y = -\frac{2a^2bq_0}{\pi(a^2+b^2)} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right).$$

iii)
$$w(0,0) = \frac{16a^4b^4q_0}{\pi^4(a^2+b^2)^2D}.$$

b) i)
$$w(x,y) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2b}\right),$$

met

$$B_{mn} = -\frac{256q_0}{D\pi^6} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+n)}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}.$$

ii)
$$M_{xx} = D \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \nu \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \right] B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2b}\right),$$

$$M_{yy} = D \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[\nu \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \right] B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2b}\right),$$

$$M_{xy} = (1-\nu)D \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{mn\pi^2}{4ab} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2b}\right),$$

$$Q_x = -D \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{m\pi}{2a} \left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \right] B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2b}\right),$$

$$Q_y = -D \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n\pi}{2b} \left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \right] B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2b}\right).$$

iii)
$$w(0,0) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} B_{mn} = \frac{256a^4b^4q_0}{\pi^6(a^2+b^2)^2D} + \dots$$

8.3. i) $x = \pm a : w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 ,$

$y = \pm b : \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 .$

iii) $C_1 = \frac{q}{24D} , \quad C_2 = -\frac{q}{4D} , \quad C_3 = \frac{5q}{24D} .$

$W_m(y) = A_1^{(m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{2a}\right) + A_2^{(m)} \frac{y}{b} \sinh\left(\frac{m\pi y}{2a}\right) ,$

Randvoorwaarden:

$W_m''(b) - \nu \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 W_m(b) = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{16\nu q a^2}{D m^3 \pi^3} , \quad *$

$W_m'''(b) - (2 - \nu) \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 W_m'(b) = 0 .$

Eerste term:

$$W_m^{(y)} = \frac{64\nu q a^4}{D(m\pi)^5 \{(3 + \nu)C_m S_m - (1 - \nu)m\beta\}} \left\{ \left[\frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} S_m - m\beta C_m \right] \cosh\left(\frac{m\beta y}{b}\right) + \frac{m\beta y}{b} S_m \sinh\left(\frac{m\beta y}{b}\right) \right\} ,$$

met:

$C_m = \cosh(\beta m) , \quad S_m = \sinh(\beta m) , \quad \beta = \frac{\pi b}{2a} .$

iv) $w(x,y) = \frac{q}{24D} (x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4) + \frac{64\nu^2 q a^4}{(1 - \nu^2) D \pi^5} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) .$

v) $w(x,y) = \frac{q}{24D} (x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4) + \frac{64\nu q a^4}{(3 + \nu) D \pi^5} e^{-\beta} \left\{ \left[\frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} - \beta \right] \cosh\left(\frac{\beta y}{b}\right) + \frac{\beta y}{b} \sinh\left(\frac{\beta y}{b}\right) \right\} (1 + o(e^{-\beta}))$

*)

m.b.v.: $(x^2 - a^2) = \sum_{m=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)} \frac{32a^2}{m^3 \pi^3} \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right) .$

$$\text{vi)} \quad M(x) = \frac{\nu}{2} q(x^2 - a^2) .$$

$$8.4. \text{ a) i)} \quad r = R : w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r) = -\frac{M}{D} , \quad \frac{d}{dr} (\Delta w(r)) = 0 .$$

$$\text{ii)} \quad w(r) = \frac{M}{2(1+\nu)D} (R^2 - r^2) .$$

$$\text{iii)} \quad M_{rr} = M_{\theta\theta} = M , \quad Q_r = 0 .$$

$$\text{b)} \quad w(r) = \frac{MR^2}{2(1+\nu)D} \frac{(R^2 - r^2)}{(R^2 - a^2)} - \frac{MR^2 a^2}{(1-\nu)D(R^2 - a^2)} \log\left(\frac{r}{R}\right) .$$

$$8.5. \text{ i)} \quad \underline{r = R} : w(r) = w'(r) = 0 ,$$

$$\underline{r = a} : w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r) = 0 , \quad \frac{d}{dr} (\Delta w(r)) = -\frac{P}{2\pi a D} .$$

$$\text{ii)} \quad w(r) = -\frac{PR^2}{8\pi D} \left\{ \frac{(1-\nu)R^2 + a^2[2(1+\nu)\log(a/R) + 3 + \nu]}{2[(1-\nu)R^2 + (1+\nu)a^2]} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{2a^2[(1+\nu)\log(a/R) + 1]}{[(1-\nu)R^2 + (1+\nu)a^2]} \log\left(\frac{r}{R}\right) + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \log\left(\frac{r}{R}\right) \right\} .$$

$$8.6. \quad w(r) = -\frac{PR^2}{8\pi D} \left\{ \frac{[(3+\nu)R^2 + (1-\nu)a^2(2\log(a/R) + 1)]}{2[(1+\nu)R^2 + (1-\nu)a^2]} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{2a^2[1 - \log(a/R)]}{[(1+\nu)R^2 + (1-\nu)a^2]} \log\left(\frac{r}{R}\right) + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \log\left(\frac{r}{R}\right) \right\} .$$

$$8.7. \text{ a)} \quad w(r) = \frac{q}{64D} \left[\frac{(5+\nu)}{(1+\nu)} R^4 - \frac{2(3+\nu)}{(1+\nu)} r^2 R^2 + r^4 \right] ,$$

$$M_{rr}(r) = \frac{(3+\nu)q}{16} (R^2 - r^2) , \quad M_{\theta\theta}(r) = \frac{q}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2] ,$$

$$Q_r(r) = -\frac{1}{2}qr .$$

b)

$$w(r) = -\frac{q}{64D} [R^4 - r^4 - \left\{ \frac{2(3+\nu)}{(1+\nu)}(R^2 - a^2) + \frac{8a^4}{(R^2 - a^2)} \log\left(\frac{a}{R}\right) \right\} (R^2 - r^2) + \frac{4a^2 R^2}{(1-\nu)} \{ (3+\nu) + \frac{4(1+\nu)a^2}{(R^2 - a^2)} \log\left(\frac{a}{R}\right) \} \log\left(\frac{r}{R}\right) + 8a^2 r^2 \log\left(\frac{r}{R}\right)] .$$

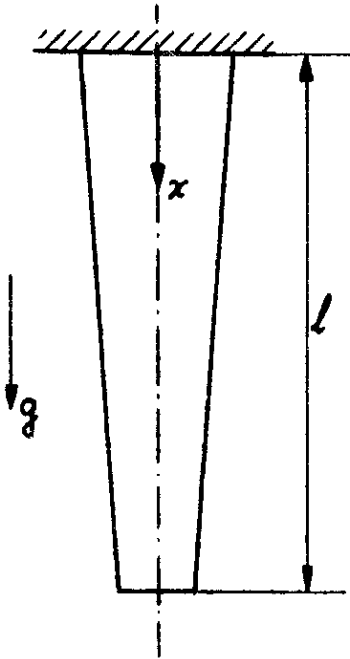
8.8.

$$N = -\frac{\alpha l T}{\left(\frac{R^2}{8\pi D} + \frac{l}{EF}\right)} , \quad \Delta l = \frac{\alpha l T}{\left(1 + \frac{8\pi D l}{EFR^2}\right)} .$$

TENTAMENS

De nu volgende tentamens zijn deeltoetsen Fysica 40 over de vakken:
Variatieprincipes (Menken; 1^o opgave) en Elastostatica en Plasticiteitstheorie (Alblas).

1.



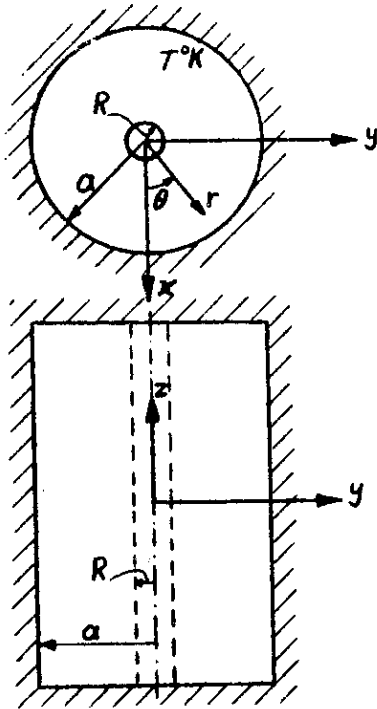
Een elastische taps staaf is bij $x = 0$ verticaal opgehangen en wordt belast door zijn eigen gewicht. De lengte in onbelaste toestand is l , de elasticiteitsmodulus E , de massa per volume-eenheid ρ en de versnelling van de zwaartekracht g . De tapsheid is zo gering, dat een lijnspanningstoestand verondersteld mag worden. Voor het oppervlak $A(x)$ van een dwarsdoorsnede ter plaatse x geldt

$$A(x) = A(0) \left(1 - \frac{x}{2l}\right).$$

De axiale verplaatsing is $u(x)$. De rekken zijn zo gering dat de lineaire elasticiteitstheorie gebruikt mag worden.

- i) Formuleer de potentiële energie functionaal en definieer het kinematisch toelaatbaar stelsel.
- ii) Leidt hiermee de in de axiale spanning t_{xx} uitgedrukte lokale evenwichtsrelatie af.
- iii) Hoe luidt de in $u(x)$ uitgedrukte Euler-Lagrange-vergelijking en de natuurlijke randvoorwaarde.
- iv) Benader $u(x)$ met de functie
$$u(x) = bx$$
en bepaal met de methode van Ritz de waarde van b .
- v) Geef een uitdrukking voor de bij deze benadering behorende spanning t_{xx} welke consistent is met het variatieprincipe.
- vi) Bepaal met de stelling van Castigliano een zo eenvoudig mogelijke integraaluitdrukking voor de verplaatsing $u(l)$.

2.



Een dikwandige buis, binnenstraal R , buitenstraal a , van een homogeen, isotroop, lineair thermo-elastisch materiaal zit alzijdig opgesloten in een onvervormbaar gat. De buis wordt $T^{\circ}\text{K}$ in temperatuur verhoogd.

De buitenafmetingen van de buis zijn zo groot ($a \gg R$), dat $O(R/a)$ -termen verwaarloosd mogen worden. Dit houdt in dat op $r = a$ een uniforme normaalspanningstoestand heerst welke onafhankelijk van het gat is.

i) Heerst in de buis een:

vlakke vervormingstoestand, vlakspanningstoestand, of een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand?

Geef de definitie van de door U gekozen toestand.

ii) Bepaal de spanningen in de buis.

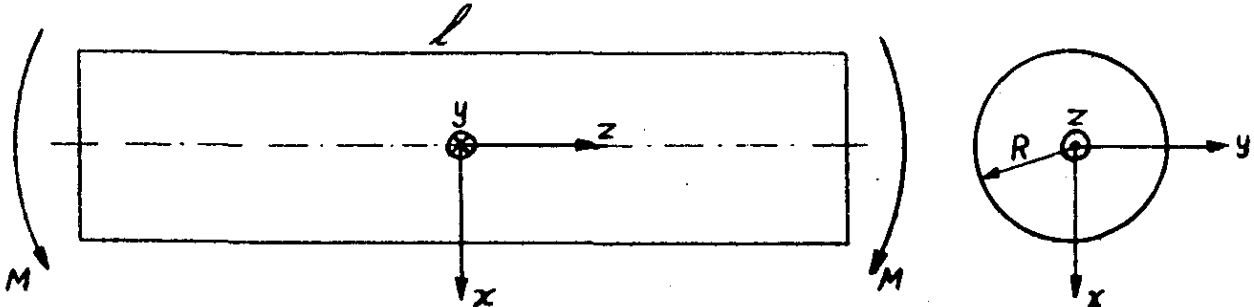
iii) Hoe groot is de binnenstraal van de buis na de deformatie?

iv) Bepaal de spanningsconcentratiefactor; dit is de waarde van het quotiënt

$$\frac{[\tau_{\theta\theta}(r = R)]_{\text{met gat}}}{[\tau_{\theta\theta}(r = R)]_{\text{zonder gat}}},$$

voor $R \rightarrow 0$.

3.



Een cylinder, lengte l , met cirkelvormige doorsnede, straal R , van een homogeen, isotroop, lineair elastisch-ideaal plastisch materiaal wordt in de einddoorsneden belast door buigende momenten M . De cylindermantel is onbelast. De spanningen in de einddoorsneden zijn "goed verdeeld" (we beschouwen alleen het gerelaxeerde probleem).

i) Druk het moment M uit in de spanningen in een loodrechte doorsnede.

Beschouw voor de vragen ii) t/m v) alleen elastische deformaties ($M < M^*$).

ii) Bepaal de spanningsverdeling.

iii) Waar treedt de maximale spanning op?

iv) Schrijf voor dit probleem de vloeivoorwaarde van von Mises uit.

Waar treedt voor het eerst vloeien op?

v) Bepaal de waarde M^* van M waarvoor vloeien begint.

Beschouw voor de vragen vi) t/m x) elasto-plastische deformaties ($M^* < M < M^{**}$).

vi) Verdeel de doorsnede in een plastisch en een elastisch gebied. Waar zal het plastisch gebied liggen?

vii) Bepaal de spanningen in het elastische en in het plastische gebied.

viii) Uit welke conditie kunt u de grens van het plastische gebied bepalen?

Schrijf deze voorwaarde uit (zonder de integralen uit te werken!)

ix) Bepaal het bezwijkmoment M^{**} .

x) We ontlasten de balk. Verklaar waarom er na het ontlasten nog residu-spanningen in de balk kunnen optreden en bepaal deze residu-spanningen.

Schets het verloop van deze spanningen over de doorsnede.

BASISVERGELIJKINGEN ELASTO- & PLASTOSTATICA

Verband deformaties en verplaatsingen:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Evenwichtsvergelijkingen:

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 .$$

Constitutieve vergelijkingen (lineair (thermo)elastisch)

$$\frac{1}{2G} t_{ij} = e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk} \left(- \frac{1+\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \alpha T \right) ,$$

met

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} .$$

Compatibiliteitsvergelijkingen:

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} , \quad (\text{cyclisch}) ,$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) , \quad (\text{cyclisch}) .$$

Rotatie-symmetrische problemen: uitwerking in cylindercoördinaten:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} , \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} , \quad e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) .$$

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = 0 .$$

en (compatibiliteit)

$$\frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{e_{rr} - e_{\theta\theta}}{r} = 0 ,$$

$$2 \frac{\partial^2 e_{rz}}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial r^2} .$$

Vloeivoorwaarde van von Mises:

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{xz}^2) = 6k^2 .$$

ANTWOORDEN TENTAMEN 17 - 6 - 1978

1. iv) $b = \frac{4\rho g l}{9E}$, v) $t_{xx} = \frac{4}{9} \rho g l$.

vi) $u(l) = \frac{\rho g}{2E} \int_0^l \frac{(3l^2 - 4xl + 4l^2)}{(2l - x)} dx \quad (= \frac{\rho g l^2}{2E} (\frac{3}{2} - \log 2))$.

2. ii) $t_{rr} = - \frac{\alpha E T}{(1-2\nu)} (1 - \frac{R^2}{r^2})$, $t_{\theta\theta} = - \frac{\alpha E T}{(1-2\nu)} (1 + \frac{R^2}{r^2})$, $t_{zz} = - \frac{\alpha E T}{(1-2\nu)}$

$t_{r\theta} = t_{rz} = t_{\theta z} = 0$.

iii) $[1 - \frac{(1+\nu)\alpha T}{(1-2\nu)}]R$, iv) 2.

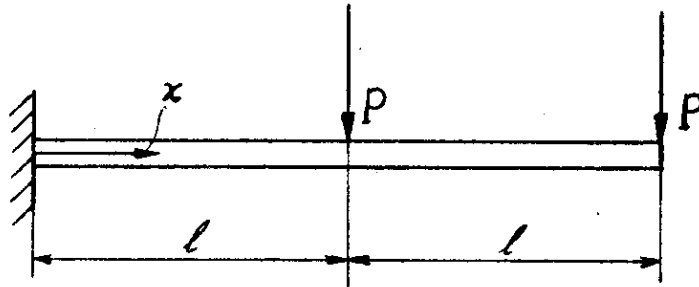
3. ii) $t_{zz} = - \frac{4M}{\pi R^4} x$, v) $M^* = \frac{\pi}{4} k R^3 \sqrt{3}$.

ix) $M^{**} = \frac{4}{3} k R^3 \sqrt{3}$.

x) $t_{zz}^{(res)} = k\sqrt{3} + \frac{4M}{\pi R^4} x$, $-R \leq x \leq -a$,
 $= - \frac{k\sqrt{3}}{a} x + \frac{4M}{\pi R^4} x$, $-a \leq x \leq a$,
 $= - k\sqrt{3} + \frac{4M}{\pi R^4} x$, $a \leq x \leq R$,

met: $x = \pm a$: grens tussen elastische en plastische gebied.

1.



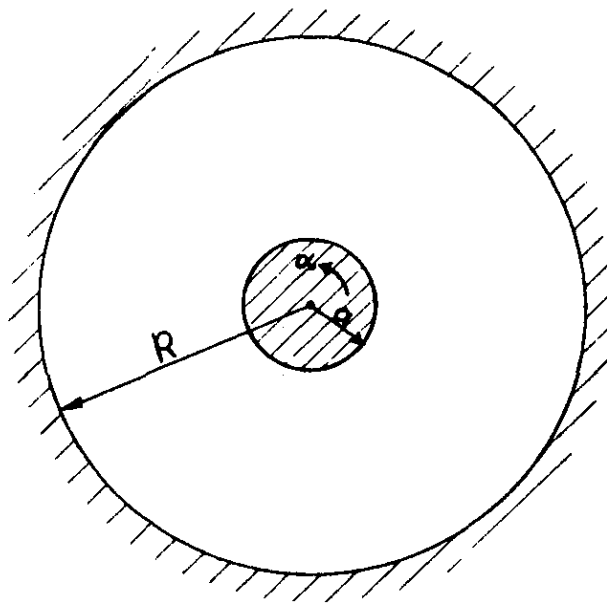
Een ingeklemde balk met constante buigstijfheid EI wordt belast door twee even grote krachten P (zie figuur). Onder invloed van deze belasting vormt de balk in het vlak van de tekening.

- i) Bereken de doorbuiging van het rechteruiteinde van de balk met de methode Ritz bij een veronderstelde doorbuigingsvorm

$$w(x) = a(1 - \cos \frac{\pi x}{4l}) .$$

- ii) Bereken deze doorbuiging ook met de stelling van Castigliano.
iii) Geef in een grafiek het bij de aanpakken i) en ii) behorende verloop van het buigend moment en interpreteer de verschillen.

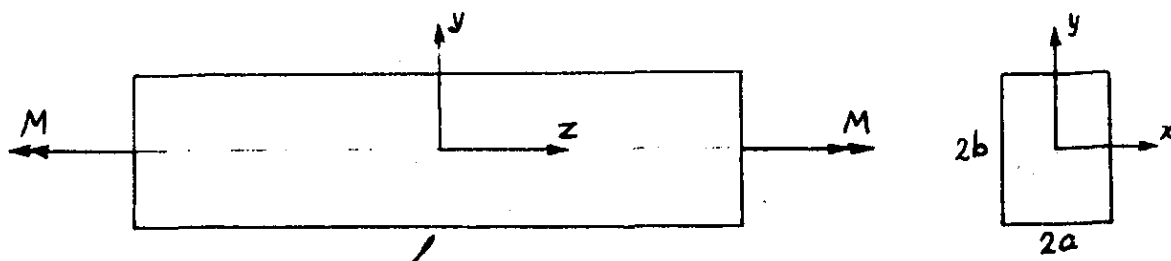
2.



Een dunne, cirkelvormige plaat met een gat, dikte h , buitenstraal R , binnenstraal a , is aan de buitenrand ingeklemd. De binnenrand is vast verbonden aan een starre schijf met straal a . De schijf wordt in het vlak van de plaat verdraaid over een gegeven hoek α om zijn middelpunt. De plaat is van een lineair elastisch materiaal en het probleem mag worden beschouwd als een generaliseerde vlakspanningstoestand.

- i) Welke zijn de onbekenden bij dit probleem? Van welke coördinaat zullen deze onbekenden alleen afhangen? Geef de benodigde vergelijkingen. Formuleer de randvoorwaarden.
- ii) Bepaal de verplaatsingen in het vlak van de plaat. Laat zien dat deze verplaatsingen zuiver tangentieel zijn.
- iii) Bepaal de spanningsverdeling in de plaat.
- iv) Bereken het moment dat op de schijf moet worden uitgeoefend om deze over een hoek α te verdraaien.
- v) Waar zal voor het eerst vloeien optreden? Bereken het moment, met de bijbehorende verdraaiing α , bij het begin van vloeien, onder de vloeivoorwaarde van von Mises.

3.



Een lineair elastische cylinder, lengte l , met rechthoekige doorsnede, $2a \times 2b$, wordt in de einddoorsneden belast door wringende momenten M . De cylindermantel is onbelast. (We beschouwen alleen het gerelaxeerde probleem: de spanningen in de einddoorsneden zijn dus "goed verdeeld").

Ga uit van de volgende veronderstelling voor het spanningsveld:

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = t_{zz} = 0.$$

- i) Bewijs, m.b.v. de evenwichtsvergelijkingen, dat t_{xz} en t_{yz} onafhankelijk van z zijn.
- ii) Druk t_{xz} en t_{yz} uit in een spanningsfunctie $F(x,y)$, zodanig dat identiek aan de evenwichtsvergelijkingen is voldaan.
- iii) Formuleer de randvoorwaarden op de mantel in t_{xz} en t_{yz} en in $F(x,y)$.
- iv) Stel:

$$F(x,y) = C(c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2 + x^2 y^2),$$

en bepaal c_1 , c_2 en c_3 uit de randvoorwaarden op de mantel (C is nog willekeurig).

Bepaal de bijbehorende spanningen.

- v) Geef het verband tussen C en M .
- vi) Waarom vormt het hierboven gevonden stelsel niet de echte oplossing? Bewijs Uw antwoord.

BASISVERGELIJKINGEN

Verband deformaties en verplaatsingen:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Evenwichtsvergelijkingen:

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 .$$

Constitutieve vergelijkingen (wet van Hooke):

$$\frac{1}{2G} t_{ij} = e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk}, \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)} .$$

Compatibiliteitsvergelijkingen:

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}, \text{ (cyclisch) ,}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \text{ (cyclisch) .}$$

Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand: uitwerking in poolcoördinaten

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2t_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 ,$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E}(t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}), \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}) ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{(1+\nu)}{E} t_{r\theta} ,$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) ,$$

$$(u = u_r, \quad v = u_\theta) .$$

Vloeivoorwaarde van von Mises:

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{xz}^2) = 6k$$

ANTWOORDEN, TENTAMEN 28 - 10 - 1978

1. i)
$$w(2\ell) = \frac{128(4 - \sqrt{2})}{\pi^4} \frac{P\ell^3}{EI} \left(\approx 3,37 \frac{P\ell^3}{EI} \right) .$$

ii)
$$w(2\ell) = \frac{7}{2} \frac{P\ell^3}{EI} .$$

2. ii)
$$u_r = 0 , \quad u_\theta = - \frac{\alpha a^2}{(R^2 - a^2)} \left(r - \frac{R^2}{r} \right) .$$

iii)
$$\tau_{r\theta} = - \frac{\alpha a^2 E}{(1 + \nu)(R^2 - a^2)} \frac{R^2}{r^2} .$$

iv)
$$M = \frac{2\pi a^2 h R^2 E}{(1 + \nu)(R^2 - a^2)} \alpha .$$

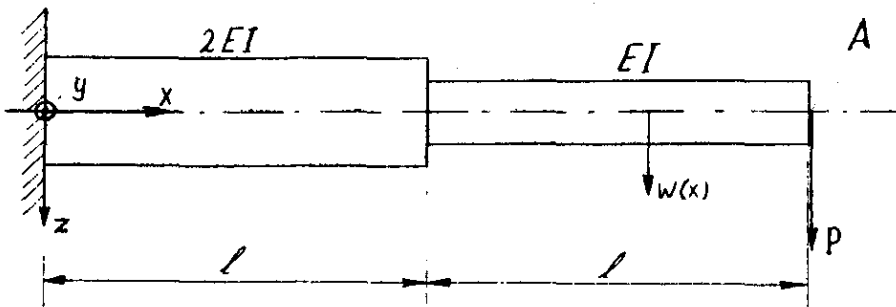
v)
$$M^* = 2\pi a^2 h k .$$

3. iv)
$$F(x,y) = C(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) ,$$

$$\tau_{xz} = -2Cy(a^2 - x^2) , \quad \tau_{yz} = 2Cx(b^2 - y^2) .$$

v)
$$C = \frac{9M}{32a^3 b^3} .$$

1. (Variatieprincipes).



Gegeven de in de figuur getekende, bij $x = 0$ ingeklemde balk met verspringende dikte. Onder invloed van de kracht P ter plaatse $x = 2l$ vervormt de balk in het vlak van tekening. De relevante buigstijftheden zijn EI en $2EI$ (zie figuur).

- i) Bereken de zakking $w(2l)$ van punt A met de stelling van Castigliano.
- ii) Geef ook de benaderde zakking van punt A met het principe van de minimale potentiële energie bij een aangenomen zakkingsfunctie:

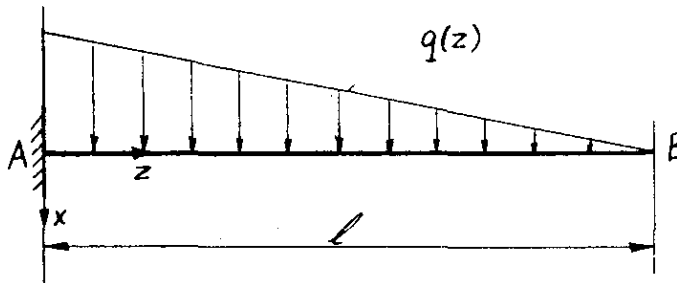
$$w = a + bx + cx^2,$$

welke geldt voor het gehele gebied $[0, 2l]$.

- iii) Teken in één figuur de werkelijke momentenlijn en de bij de in ii) verkregen benadering horende momentenlijn.
- iv) Beredeneer de betrekkelijk grote discrepantie tussen de bij i) en ii) gevonden resultaten

2. Beschouw een rechte, slanke balk (lengtecoördinaat z) met een normale belasting per lengte-eenheid: $q(z)$ in x -richting. De buigstijfheid van de balk is EI . De doorbuiging geven we aan met $u(z)$

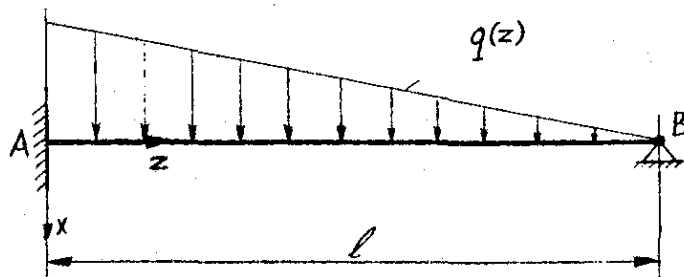
- i) Leid de globale evenwichtsvergelijkingen af.
- ii) Geef de in de technische balkentheorie gebruikelijke constitutieve vergelijking voor het buigende moment.
- iii) Leidt uit i) en ii) de balkenvergelijking af.



Een balk AB, lengte l , is in A ($z = 0$) ingeklemd en in B ($z = l$) vrij. De belasting van de balk is:

$$q(z) = q\left(1 - \frac{z}{l}\right), \quad (q : \text{constant}) .$$

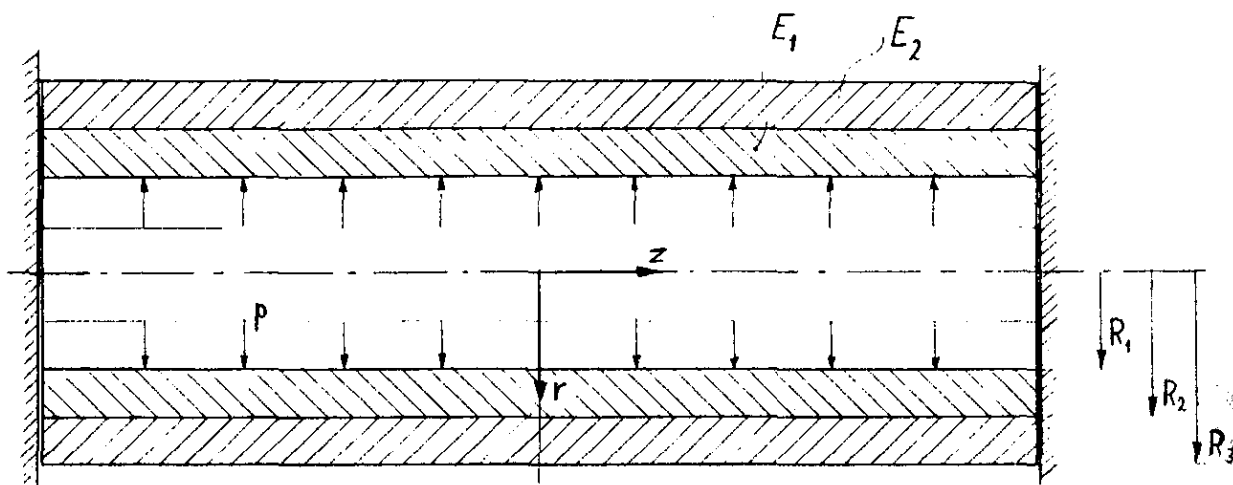
- iv) Bepaal de uitbuigingslijn van de balk.
- v) Bereken de zakking van B.
- vi) Bereken het maximale buigende moment in de balk en de plaats waar dit optreedt.



Beschouw dezelfde balk als hiervoor, maar nu ondersteund in B.

- vii) Bepaal de reactiekracht in B.

3.



Een dikwandige buis, waarvan in de einddoorsneden de axiale verplaatsingen zijn verhinderd, wordt belast door een constante inwendige druk p . De buis is opgebouwd uit twee cylinders met verschillende elasticiteitsmoduli:

$$R_1 \leq r < R_2 : E = E_1 ,$$

$$R_2 < r \leq R_3 : E = E_2 .$$

De dwarscontractiecoëfficiënt ν is overal gelijk.

Ga er van uit dat de spanningsverdeling in een homogene buis met binnenstraal a en buitenstraal b en met een inwendige druk p_i en een uitwendige druk p_u bekend is, en wel gegeven door:

$$t_{rr} = \frac{a^2 p_i - b^2 p_u}{(b^2 - a^2)} + \frac{a^2 b^2 (p_u - p_i)}{(b^2 - a^2)} \cdot \frac{1}{r^2} ,$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{a^2 p_i - b^2 p_u}{(b^2 - a^2)} - \frac{a^2 b^2 (p_u - p_i)}{(b^2 - a^2)} \cdot \frac{1}{r^2} ,$$

$$t_{zz} = \frac{2\nu(a^2 p_i - b^2 p_u)}{(b^2 - a^2)} , \quad t_{rz} = t_{r\theta} = t_{\theta z} = 0 .$$

- i) Bepaal hiermee een spanningsverdeling voor de hier boven beschreven gelagerde buis, waarin nog één onbekende parameter voorkomt. Wat stelt deze parameter voor? Geef aan (zonder dit al in detail uit te werken) hoe U deze parameter kunt bepalen.
- ii) Bepaal voor het geval dat het materiaal van de buis incompressibel is ($\nu = \frac{1}{2}$) en dat R_1 , R_2 en R_3 zijn gegeven door

$$R_1 = R, \quad R_2 = 2R, \quad R_3 = R\sqrt{7},$$

de spanningsverdeling in de buis.

- iii) Formuleer de vloeivoorwaarde van von Mises voor dit probleem (met de numerieke waarden volgens ii)). Voor welke waarden van de verhouding

$$e := E_2/E_1$$

treedt het begin van vloeien niet op aan de binnenrand $r = R_1 = R$?
Waar begint het vloeien dan?

- iv) Bepaal de waarde van p (p^*) waarvoor de buis begint te vloeien.
(Bedenk dat deze waarde afhankelijk is van e).

BASISVERGELIJKINGEN

Vlakke vervormingstoestand, rotatie-symmetrisch:

$$\frac{dt_{rr}}{dr} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad e_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r},$$

$$e_{rr} = \frac{(1 + \nu)}{E} [(1 - \nu)t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}], \quad e_{\theta\theta} = \frac{(1 + \nu)}{E} [(1 - \nu)t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}]$$

$$t_{zz} = \nu(t_{rr} + t_{\theta\theta}).$$

.....
Vloeivoorwaarde van von Mises:

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{xz}^2 + t_{yz}^2) = 6k^2.$$

ANTWOORDEN, TENTAMEN 20-1-1979.

1. i) $w(2\ell) = \frac{3P\ell^3}{2EI}$. ii) $w(2\ell) = \frac{4P\ell^3}{3EI}$.

2. iv) $u(z) = \frac{q\ell^4}{120EI} \left[10\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 - 10\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 + 5\left(\frac{z}{\ell}\right)^4 - \left(\frac{z}{\ell}\right)^5 \right]$.

v) $\frac{q\ell^4}{30EI}$. vi) $\frac{1}{6} q\ell^2$. vii) $\frac{1}{10} q\ell$.

3. ii) $R \leq r < 2R$:

$$t_{rr} = \frac{p}{3(e+7)} \left(7 - 3e - \frac{28R^2}{r^2} \right) , \quad (e = E_2/E_1) ,$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{p}{3(e+7)} \left(7 - 3e + \frac{28R^2}{r^2} \right) ,$$

$$t_{zz} = \frac{(7-3e)}{3(e+7)} p , \quad t_{r\theta} = t_{\theta z} = t_{rz} = 0 ;$$

$2R < r \leq R\sqrt{7}$

$$t_{rr} = \frac{4ep}{3(e+7)} \left(1 - \frac{7R^2}{r^2} \right) ,$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{4ep}{3(e+7)} \left(1 + \frac{7R^2}{r^2} \right) ,$$

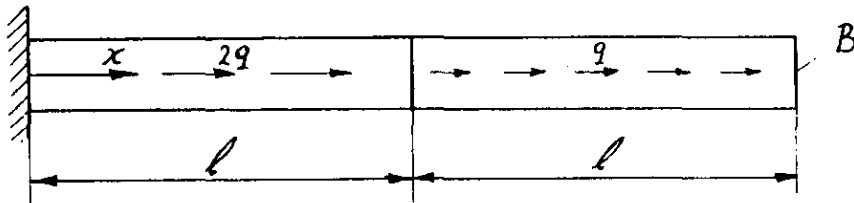
$$t_{zz} = \frac{4ep}{3(e+7)} , \quad t_{r\theta} = t_{\theta z} = t_{rz} = 0 .$$

iii) iv) Vloeien op:

$$r = R_1 = R , \quad \text{als } \frac{E_2}{E_1} < 4 , \quad \text{voor } p = \frac{3(e+7)}{28} k ;$$

$$r = R_2 = 2R , \quad \text{als } \frac{E_2}{E_1} > 4 , \quad \text{voor } p = \frac{3(e+7)}{7e} k .$$

1. (Variatieprincipes).



Gegeven de in de figuur getekende, bij $x = 0$ ingeklemde homogene, cilindrische trekstaaf. De elasticiteitsmodulus is E en de oppervlakte van de dwarsdoorsnede A . Op de staaf werkt een verdeelde belasting met de grootte per lengteëenheid $2q$ voor $x \in (0, l)$ en q voor $x \in (l, 2l)$ (zie figuur). De axiale kracht in de staaf geven we aan met $N = N(x)$.

- i) Bereken de axiale verplaatsing $u(2l)$ van het punt B met de stelling van Castigliano.
- ii) Geef ook de benaderde verplaatsing van het punt B met het principe van de minimale potentiële energie en een aangenomen verplaatsing:

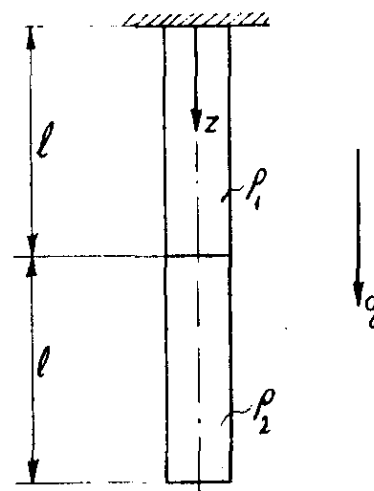
$$u = a + bx ,$$

welke geldt voor het gehele gebied $[0, 2l]$.

- iii) Teken in een grafiek met de assen $N/q\ell$ en x/ℓ :
 - het werkelijke verloop $N/q\ell$.
 - de bij ii) horende benadering voor $N/q\ell$.
- iv) Beredeneer de discrepantie tussen beide resultaten.

2. Een rechte, slanke staaf, lengte 2ℓ , met constante doorsnede, oppervlak S , en met elasticiteitsmodulus E en dwarscontractiecoëfficiënt ν , is verticaal opgehangen in zijn bovenste punt. De massaverdeling in de staaf is niet homogeen, maar verdeeld volgens:

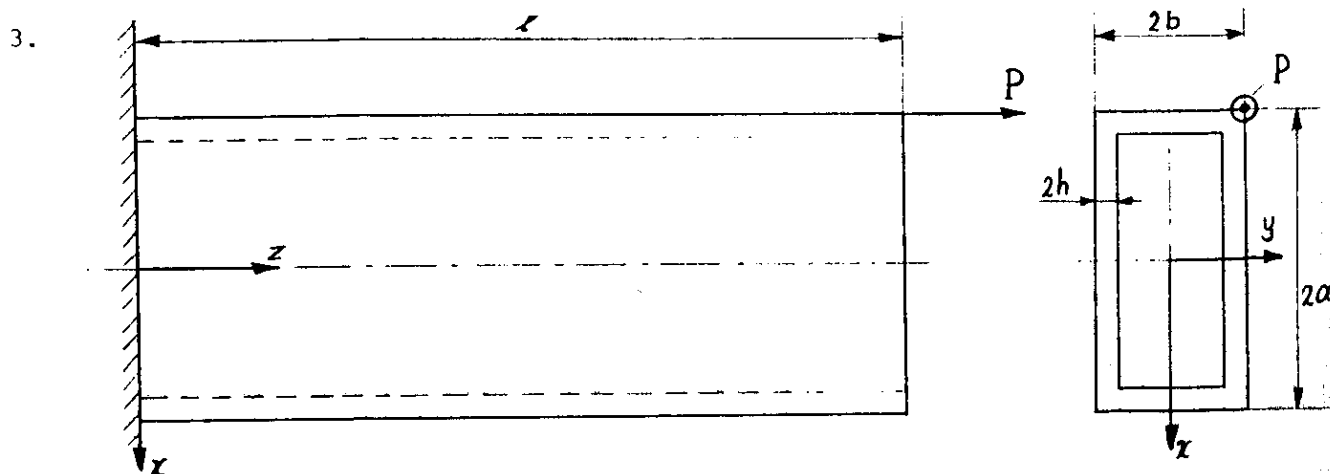
$$\begin{aligned}\rho &= \rho_1, \text{ voor } 0 \leq z < \ell, \\ \rho &= \rho_2, \text{ voor } \ell < z \leq 2\ell.\end{aligned}$$



(z is de axiale coördinaat, zie figuur).

De staaf deformeert onder invloed van zijn eigen gewicht; de versnelling van de zwaartekracht is g . We beschouwen alleen het gerelaxeerde probleem.

- i) Welke spanningen, deformaties en verplaatsingen neemt U ongelijk aan nul? Geef de bijbehorende vergelijkingen. Formuleer de (gerelaxeerde) randvoorwaarden en aansluitcondities.
- ii) Bepaal de spanningsverdeling.
- iii) Bepaal de deformaties van de staaf. Zijn deze deformaties compatibel? Blijven loodrechte doorsneden bij deze deformatie vlak?
- iv) Bepaal de axiale verplaatsingen van de zwaartepunten van de doorsneden als functie van $z(w(z))$.
- v) Bepaal de totale verlenging van de staaf.
- vi) Bespreek het verschil tussen de gerelaxeerde oplossing en de exacte oplossing. Aan welke exacte vergelijkingen, randvoorwaarden en aansluitcondities zal de gerelaxeerde oplossing niet voldoen? In hoeverre werken de afwijkingen in de gerelaxeerde oplossing door en op grond waarvan? Waaraan moeten de afmetingen van de staaf dan voldoen?



Een holle cylinder met rechthoekige doorsnede, buitenafmetingen $2a \times 2b$, wanddikte h , lengte l , wordt in een hoekpunt van zijn einddoorsnede belast door een normaalkracht P (zie figuur). De begindoorsnede is ingeklemd. *)

- i) Formuleer het gerelaxeerde probleem. (Beantwoord alle volgende vragen voor dit gerelaxeerde probleem.)
- ii) Bepaal de spanningsverdeling.
- iii) Bereken de deformaties.
- iv) Geef een vergelijking, waaruit de meetkundige plaats van de neutrale lijn is te bepalen. Gaat de neutrale lijn door het zwaartepunt van de doorsnede? Teken, voor $a = 2b$, in een doorsnede de meetkundige plaats van de snijpunten van de neutrale lijn met deze doorsnede.
- v) Bepaal de hoek tussen de component in de doorsnede van de verplaatsing van het zwaartepunt van de einddoorsnede en de werklijn van het buigend moment in deze doorsnede. Wanneer is deze hoek gelijk aan $\pi/2$?
- vi) Op welke plaats(en) is de spanning maximaal en hoe groot is hij daar? Bepaal met de vloeivoorwaarde van von Mises de waarde P^* van P waarvoor de cylinder begint te vloeien.

*) Het doorsnede-oppervlak S en de traagheidsmomenten I_x en I_y zijn gegeven door ($h \ll a(b)$):

$$S \approx 4(a + b)h; \quad I_x \approx \frac{4}{3}hb^2(3a + b); \quad I_y = \frac{4}{3}ha^2(a + 3b) .$$

Basisvergelijkingen

Verband deformaties en verplaatsingen:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Evenwichtsvergelijkingen:

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 .$$

Constitutieve vergelijkingen (wet van Hooke):

$$e_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[t_{ij} - \frac{\nu}{(1 + \nu)} \delta_{ij} t_{kk} \right] .$$

Compatibiliteitsvergelijkingen:

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} , \quad (\text{cyclisch})$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) , \quad (\text{cyclisch}) .$$

Vloeivoorwaarde van von Mises:

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{xz}^2) = 6k^2$$

ANTWOORDEN, TENTAMEN 30-3-1979.

1. i) $\frac{5ql^2}{2EA}$. ii) $\frac{5ql^2}{2EA}$.

2. ii) $0 \leq z \leq l$: $t_{zz} = -\rho_1 g(z - l) + \rho_2 gl$;

$l \leq z \leq 2l$: $t_{zz} = -\rho_2 g(z - 2l)$.

iii) $(e_{zz} = \frac{1}{E} t_{zz})$.

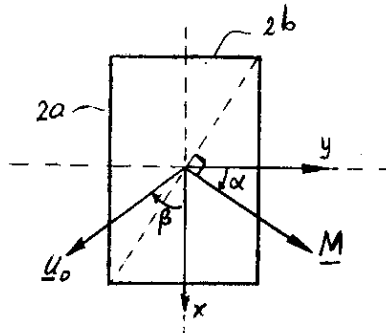
iv) $0 \leq z \leq l$: $w(z) = -\frac{\rho_1 g}{2E} z^2 + \frac{(\rho_1 + \rho_2)gl}{E} z$;

$l \leq z \leq 2l$: $w(z) = -\frac{\rho_2 g}{2E} z^2 + \frac{2\rho_2 gl}{E} z + \frac{(\rho_1 - \rho_2)gl^2}{2E}$.

v) $w(2l) = \frac{(\rho_1 + 3\rho_2)gl^2}{2E}$.

3. ii) $t_{zz} = \frac{P}{4(a+b)h} \left[1 + \frac{3(a+b)}{(3a+b)} \frac{y}{b} - \frac{3(a+b)}{(a+3b)} \frac{x}{a} \right]$.

iii) $e_{zz} = \frac{1}{E} t_{zz}$, $e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu}{E} t_{zz}$.

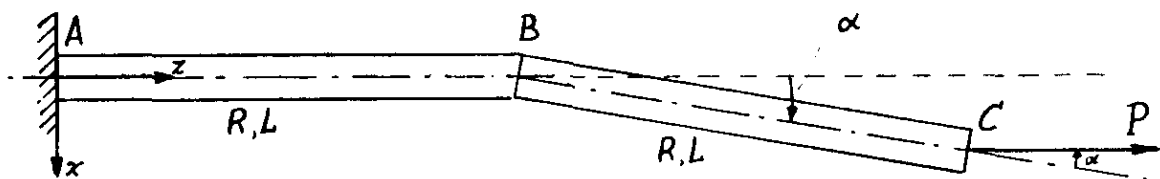


$\tan \beta = \frac{a(a+3b)}{b(3a+b)}$,

$\beta = \alpha$, als $a = b$.

vi) $P^* = \frac{(a+b)(3a+b)(a+3b)}{(15a^2 + 34ab + 15b^2)} 4kh\sqrt{3}$.

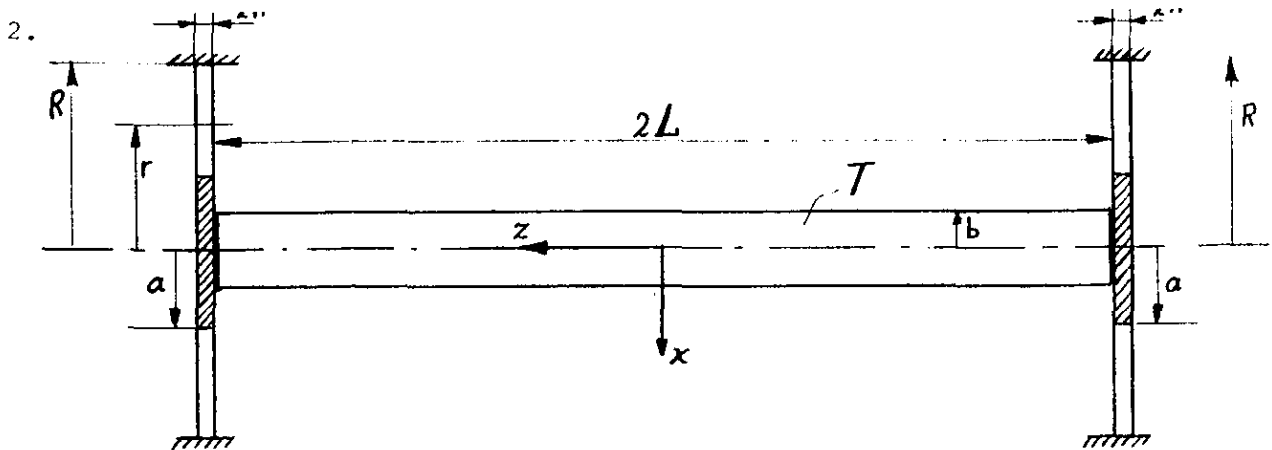
1. *)



Twee identieke, slanke staven AB en BC met cirkelvormige doorsnede, lengte L , straal R , zijn in B aan elkaar gelast. De staaf AB is in A ingeklemd. De assen van de staven liggen niet exact in elkaars verlengde, maar maken een kleine hoek α ($\alpha \ll 1$) met elkaar (zie figuur). Het stelsel wordt in C belast door een kracht P in de richting AB.

- i) Bepaal de spanningen in AB, uitgedrukt in P , α , R , L en x . [2]
- ii) Bepaal de maximale waarde van deze spanning: σ_{\max} . [2]
- iii) Bereken het quotiënt $q = (\sigma_{\max})_{\alpha \neq 0} / (\sigma_{\max})_{\alpha = 0}$. [2]
- iv) Geef de numerieke waarde van q voor het geval dat $\alpha = \frac{1}{60}$ rad ($\sim 1^\circ$) en $(R/L) = \frac{1}{15}$. [2]

*) Voor de opgaven 1 en 2 was ± 1.5 uur beschikbaar.



Een thermoelastische staaf met cirkelvormige doorsnede, lengte $2L$, straal b , is ingeklemd tussen twee identieke cirkelvormige platen, straal R , dikte $2h$ ($h \ll R$). De staafas gaat door de middelpunten van de platen. De platen zijn aan de buitenrand ($r = R$) ingeklemd en bevatten een cirkelvormige, concentrische starre kern met straal a ($a > b$), waarbij $a = R/\sqrt{e}$ ($e = 2,718$; $\log e = 1$).

Vanuit de spanningsloze, ongedeformeerde toestand wordt de staaf T °C in temperatuur verhoogd; de temperatuur van de plaat verandert niet. De lineaire uitzettingscoëfficiënt van de staaf is α . De elasticiteitscoëfficiënten (E, ν) van staaf en plaat zijn gelijk.

- i) Beschrijf kort in woorden wat er met de constructie zal gebeuren t.g.v. de temperatuursverhoging van de staaf. [1]
- ii) Welke zijn de onbekenden voor de staaf en welke vergelijkingen heeft U hiervoor? [1]
- iii) Idem voor de platen. [1]
- iv) Welke aansluitcondities heeft U nog nodig om het probleem volledig te kunnen oplossen (tussen de staaf en de starre kernen van de platen is geen wrijving). [1]
- v) Geef de algemene oplossing van de plaatvergelijking voor een rotatiesymmetrische uitbuiging $w(r)$ van een cirkelvormige plaat (hint: druk w uit in (r/R)). [2]
- vi) Formuleer de randvoorwaarden voor $w(r)$. [1]
- vii) Noem de totale verlenging van de staaf $2\Delta L$ (bedenk dat ΔL nog onbekend is). Druk de spanningen in de staaf uit in ΔL . [2]
- viii) Bepaal de expliciete uitdrukking voor $w(r)$ als functie van ΔL . [2]
- ix) Bepaal de dwarskracht in de plaat als functie van ΔL . [2]
- x) Geef de expliciete uitdrukking voor de nog benodigde aansluitconditie en bepaal hiermee ΔL als functie van T . [4]

BASISVERGELIJKINGEN (Elastostatica)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad t_{ij,j} = 0,$$

$$e_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \left[t_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} t_{kk} \right] + \alpha T \delta_{ij};$$

cirkelvormige plaat met rotatie-symmetrische uitbuiging $w(r)$:

plaatvergelijking:

$$\Delta \Delta w(r) = 0, \quad (\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}).$$

buigend moment:

$$M_{rr} = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

dwarskracht:

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} (\Delta w).$$

ANTWOORDEN, TENTAMEN 8-6-1979.

1. i)
$$t_{zz} = \frac{P}{\pi R^2} + \frac{4\alpha PL}{\pi R^4} x .$$

ii)
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\pi R^2} \left(1 + \frac{4\alpha L}{R}\right) .$$

iii)
$$q = 1 + \frac{4\alpha L}{R} .$$

iv)
$$q = 2 .$$

2. vii)
$$t_{zz} = \frac{E\Delta L}{L} - \alpha ET .$$

viii)
$$w(r) = \left\{1 + \frac{2}{e} \log\left(\frac{r}{R}\right) - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^2 \log\left(\frac{r}{R}\right)\right\} \epsilon \Delta L ,$$

met

$$\epsilon = \frac{e^2}{(e^2 - 3e + 1)} .$$

ix)
$$Q_r = - \frac{8D}{rR^2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \epsilon \Delta L .$$

x)
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\alpha T}{\left\{1 + \frac{16DL}{Eb^2 R^2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \epsilon\right\}}$$