

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

ELASTOSTATICA

bij het College van

Prof. Dr. J.B. Alblas

Voorjaarssemester 1981

Verzorgd door

Dr.ir. A.A.F. van de Ven



Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.294

Prijs f. 7,00

Bibbe / Mag

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Vraagstukken

behorende bij het college speciale problemen uit de

Elastostatica

Onderdeel van Fysica 40

Aspecten van de continuummechanica

van prof.dr. J.B. Alblas
verzorgd door dr.ir. A.A.F. van de Ven

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij Elastostatica

1. Rek van balken	1
2. Buiging van Balken	3
3. Een-dimensionale buigingstheorie	5
4. Torsie van een cirkelcilinder	7
5. Energieprincipes	10
6. Torsie van een cilinder met willekeurige doorsnede	14
7. Vlakke vervormings- en vlakspanningstoestand	20
8. Rek van platen. Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand	22
Antwoorden van 1.	38
Antwoorden van 2.	39
Antwoorden van 3.	42
Antwoorden van 4.	45
Antwoorden van 5.	47
Antwoorden van 6.	50
Antwoorden van 7.	52
Antwoorden van 8.	54
Tentamens 1978 - 1980	63
Antwoorden Tentamens	99

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

VRAAGSTUKKEN

behorende bij het college speciale problemen uit de

ELASTOSTATICA

Onderdeel van Fysica 40

ASPECTEN VAN DE CONTINUUMSMECHANICA

van Prof. Dr. J.B. Alblas

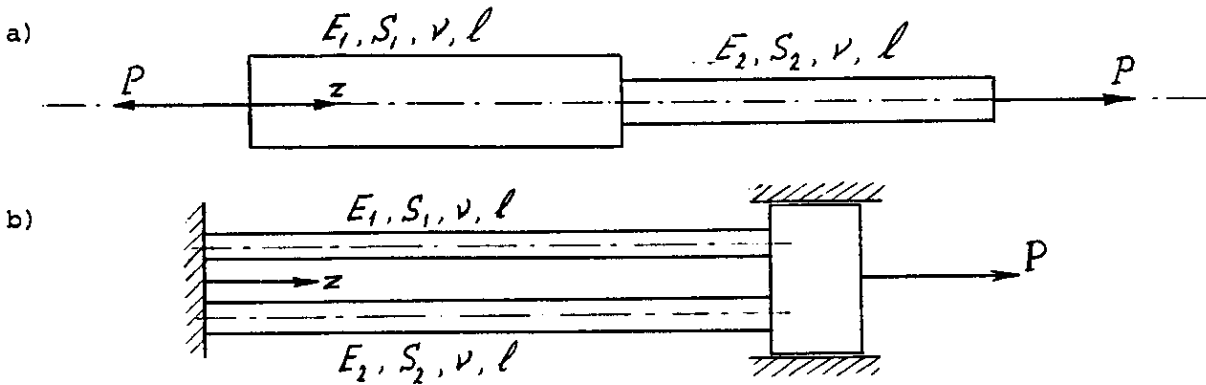
verzorgd door Dr.Ir. A.A.F. v.d. Ven

Voorjaarssemester 1981

1. REK VAN BALKEN

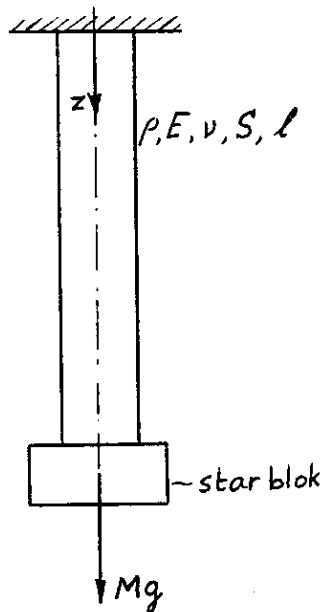
Beschouw voor de vraagstukken uit deze paragraaf alleen de gerelaxeerde (één-dimensionale) problemen.

1.1. Beschouw



- i) Bepaal de spanningsverdeling in de staven.
- ii) Bepaal de uitrekkingen en de totale stijfheid.
- iii) Bepaal de totale elastische energie. Vergelijk deze met de door P verrichte arbeid.

1.2. Bereken de spanningsverdeling en de axiale verplaatsing van:

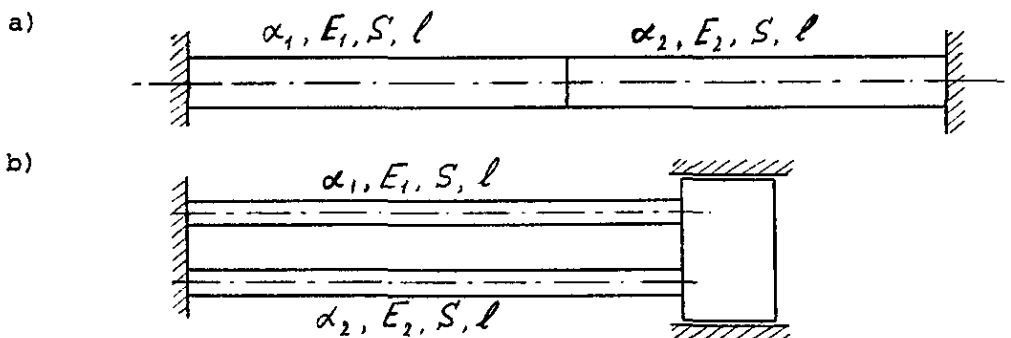


1.3. Een cilindrische staaf met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) wordt in de einddoorsneden belast door een gelijkmatig verdeelde normaaldruk p en op de zijvlakken (mantel) door een gelijkmatig verdeelde normaaldruk: ap .

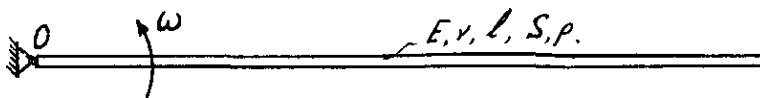
Gevraagd:

- de spanningen, deformaties en verplaatsingen in de staaf;
- de waarde van α opdat de axiale verplaatsingen van de einddoorsneden nul zijn;
- de waarde van α opdat de normale verplaatsingen van de zijvlakken nul zijn;
- voor welke waarde van ν zowel b) als c) geldt.

1.4. De volgende constructies, waarin α_1 en α_2 lineaire uitzettingscoëfficiënten zijn, worden uniform TK in temperatuur verhoogd. Bereken de spanningsverdelingen en de axiale, verplaatsingen.



1.5.

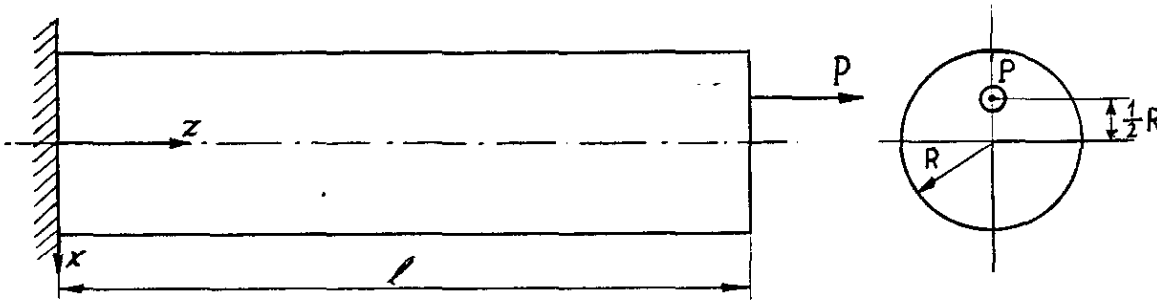


Een slanke staaf roteert met constante hoeksnelheid ω om een vast punt 0.

- Zet de rotatie stil en bepaal de t.g.v. de traagheidskrachten optredende volumekrachten.
- Bereken de normaalspanningsverdeling in de staaf.
- Bereken de uitrekking van de staaf.

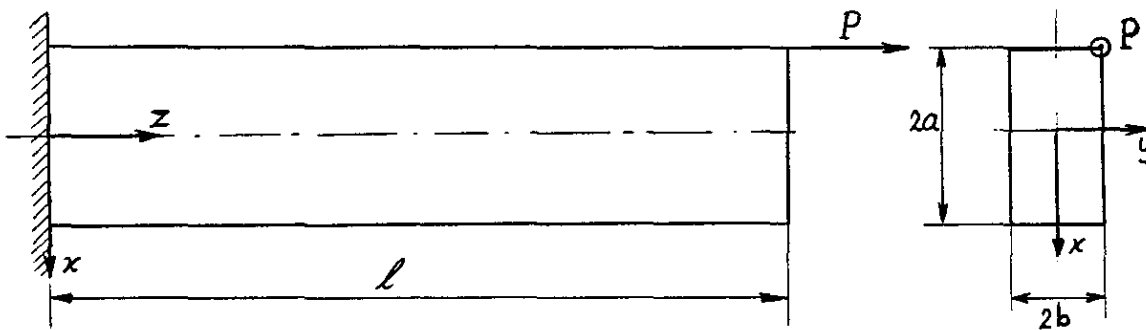
2. BUIGING VAN BALKEN

2.1. Beschouw een cirkelcylinder, welke in de doorsnede $z = 0$ is ingeklemd en in $z = l$ wordt belast door een normaalkracht P , welke aangrijpt op een halve straal van het middelpunt van de doorsnede.



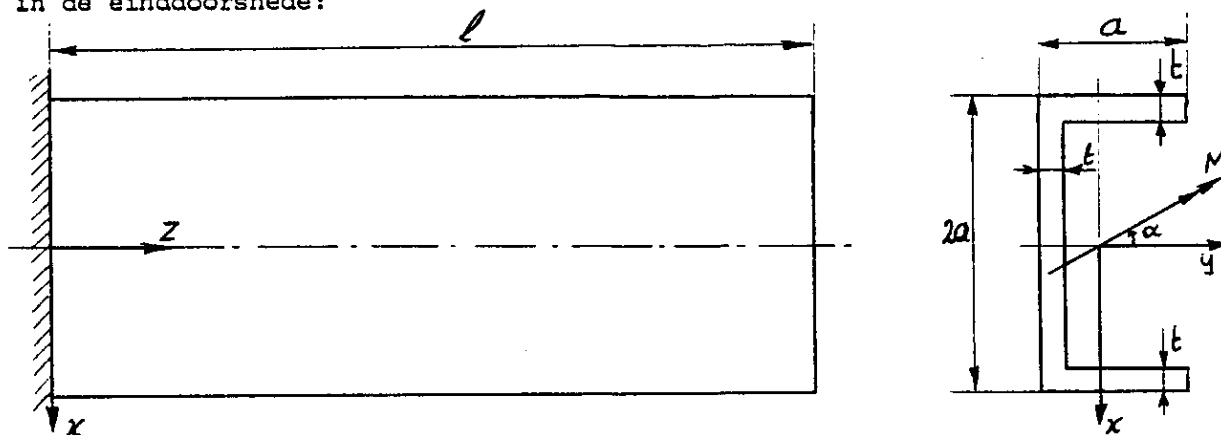
- Formuleer het gerelaxeerde probleem.
- Bepaal de spanningen, de deformaties en de verplaatsingen.
- Bepaal de plaats van de neutrale lijn.
- Bereken de totale elastische energie (als functie van P).

2.2. Beschouw een cylinder met rechthoekige doorsnede, in $z = 0$ ingeklemd en in $z = l$ belast door een normaalkracht, aangrijpend in een hoekpunt van de doorsnede.



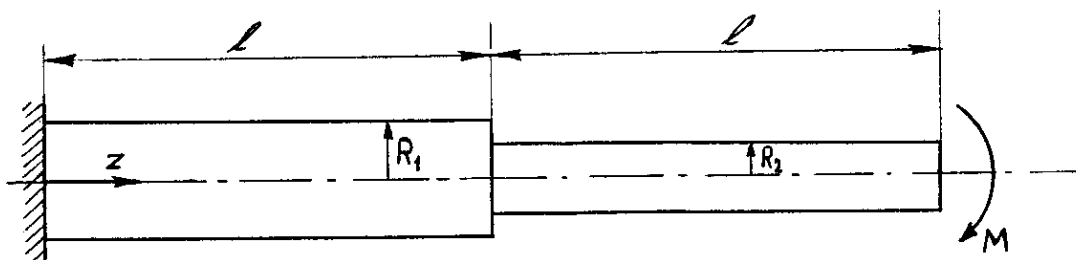
- Formuleer het gerelaxeerde probleem.
- Bepaal de spanningen, de deformaties en de verplaatsingen.
- Bepaal de plaats van de neutrale lijn.
- Bepaal de verplaatsing van het middelpunt van de einddoorsnede. Valt de projectie van deze verplaatsing op het x - y -vlak langs de diagonaal door P ?
- Bereken de totale elastische energie (als functie van P).

2.3. Beschouw de hieronder getekende U-balk, belast door een buigend moment in de einddoorsnede:



- Bepaal het centrale hoofdtraagheidsassenstelsel van de doorsnede en bereken de oppervlaktetraagheidsmomenten I_x en I_y . Neem hierbij: $t \ll a$ (Verwaarloos $O(t/a)$ -termen).
- Bepaal de spanningen.
- Bepaal de snijlijn van het neutrale vlak met de doorsnede. Valt deze samen met de richting van \underline{M} ?
- Bereken de verplaatsing van het zwaartepunt van de einddoorsnede. Staat deze loodrecht op het neutrale vlak of op \underline{M} ?
- Neem $\alpha = 0$ en bereken de hoekverdraaiing van de einddoorsnede.
- Bereken (voor $\alpha \neq 0$) de totale elastische energie van de balk (als functie van M en α).

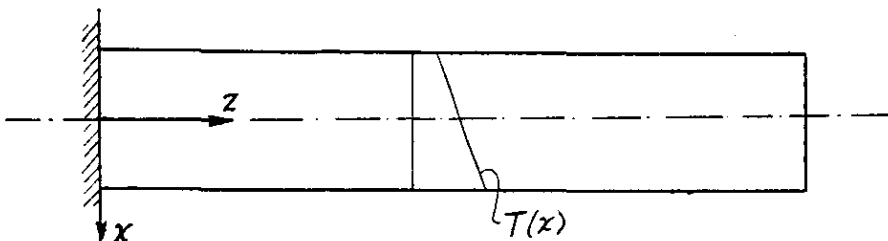
2.4. Beschouw onderstaande constructie van twee aan elkaar gelaste cirkelcilinders met verschillende stralen maar van hetzelfde materiaal.



- Geef de gerelaxeerde formulering. Bepaal de bijbehorende spanningsverdeling.
- Bepaal de doorbuiging van de neutrale lijn.

2.5. Een eenzijdig ingeklemde balk krijgt een temperatuursverhoging $T(x)$, met

$$T(x,y,z) = a + bx .$$



a) Bepaal de deformaties in de balk

Hint. Gebruik:

$$e_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} t_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} t_{kk} + \alpha T \delta_{ij} .$$

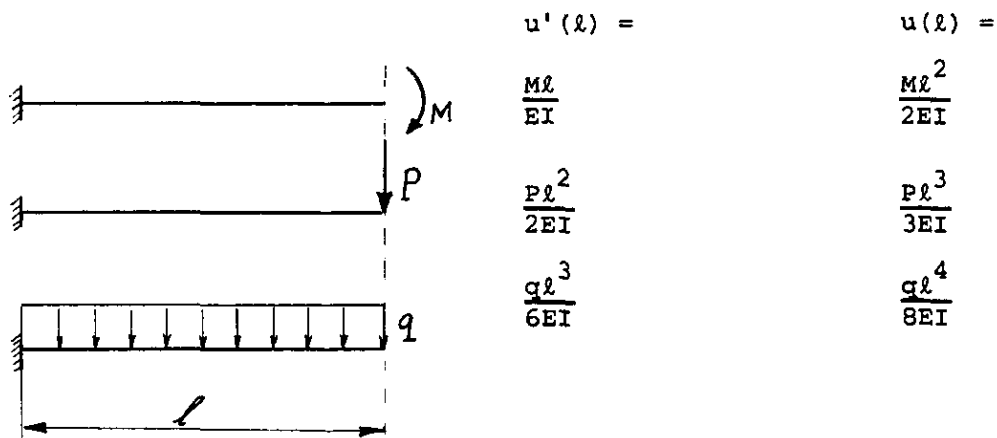
Hoe groot is in dit probleem t_{ij} ?

b) Bepaal de neutrale lijn.

c) Neem $a = 0$ en laat zien dat het deformatieveld dan overeenkomt met dat van een zuivere momentenbuiging voor het geval $\nu = -1$.

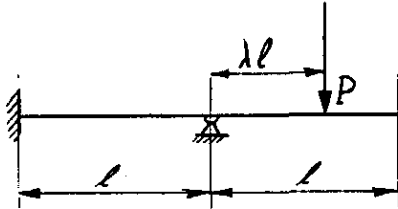
3. EEN-DIMENSIONALE BUIGINGSTHEORIE (FACULTATIEF)

3.1. Leidt m.b.v. de balkenvergelijking af de zogenaamde "vergeet-mij-nietjes":

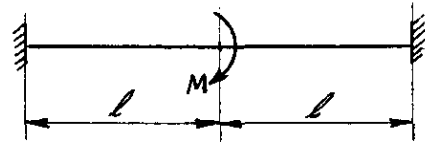


3.2. Bepaal van:

a)



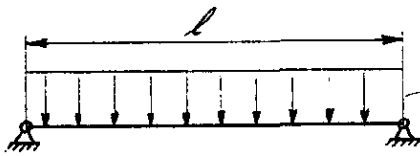
b)



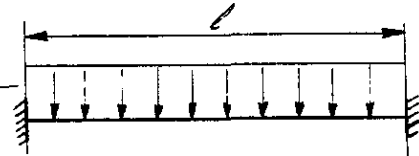
- i) de reactiekrachten;
- ii) de doorbuigingslijn;
- iii) de plaats en de grootte van de maximale trekspanning.

3.3. Bepaal van de volgende horizontale balken, welke belast worden door hun eigen gewicht:

a)

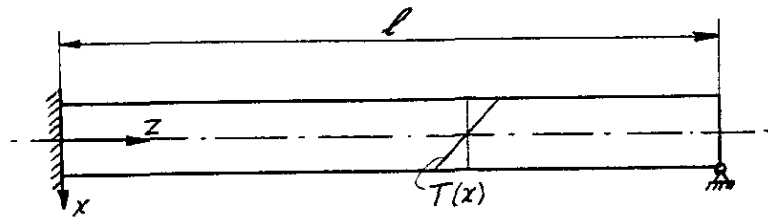


b)



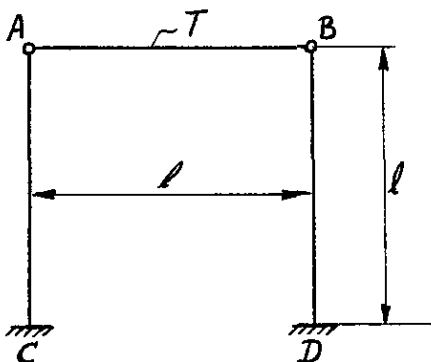
de reactiekrachten, de doorbuigingslijn en de maximale trekspanning.

3.4. Een balk aan een zijde ingeklemd en aan de andere zijde ondersteund krijgt een temperatuursverhoging T volgens: $T = T(x) = ax$, (a : constant).



Bepaal de reactiekrachten en de doorbuigingslijn.

3.5.



Van nevenstaande constructie wordt de balk AB uniform $T^{\circ}K$ verwarmd. Gevraagd wordt

- a) de spanningsverdeling in en de lengteverandering van AB;
- b) de normaalspanningsverdeling in en de uitbuigingslijn van AC en BD.

3.6. Een ingeklemde balk met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) wordt in zijn vrije uiteinde belast door een dwarskracht P welke een hoek α met de x -as maakt. Bepaal de hoek tussen $u_0(l)$ en de werklijn van P .

3.7. Beschouw weer een ingeklemde balk met rechthoekige doorsnede belast door een dwarskracht P in de x -richting. Stel:

$$t_{zz} = f(z)x, \quad t_{xz} = c(x^2 - a^2), \quad \text{overige } t_{ij} = 0.$$

- Laat zien dat deze spanningsverdeling voldoet aan de randvoorwaarden op de mantel.
- Bepaal c en $f(z)$ zodanig dat aan de locale en de globale evenwichtsvergelijkingen is voldaan.
- Bepaal de deformaties.
- Bewijs dat bovenstaande aanname voor $\nu \neq 0$ niet overeenkomt met de exacte oplossing, maar voor $\nu = 0$ wel (kunt U hier een fysische verklaring voor geven).

3.8. Beschouw hetzelfde probleem als bij 3.7, maar nu voor een cirkelvormige doorsnede.

Bepaal hiervoor de exacte spanningsverdeling.

Waarom moet hierbij (voor $y \neq 0$) de spanning t_{yz} ongelijk aan nul zijn?

Hint: Ga uit van:

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0, \quad t_{zz} = -\frac{P(l-z)x}{I}, \quad t_{xz} = t_{xz}(x,y),$$
$$t_{yz} = t_{yz}(x,y).$$

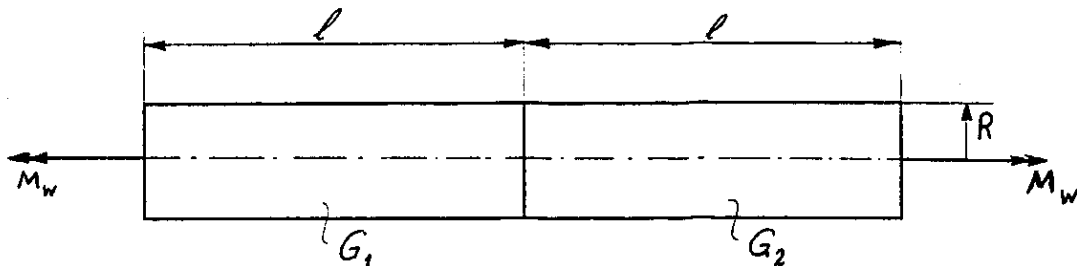
4. TORSIE VAN EEN CIRKELCYLINDER

4.1. Een holle cirkelvormige buis, binnenstraal R_1 , buitenstraal R_2 , wordt belast door een wringend moment M .

Bepaal de spanningsverdeling in de buis, de hoekverdraaiing van de einddoorsneden t.o.v. elkaar en de torsiestijfheid.

Bekijk het geval dat $R_2 - R_1 = d \ll R_2$.

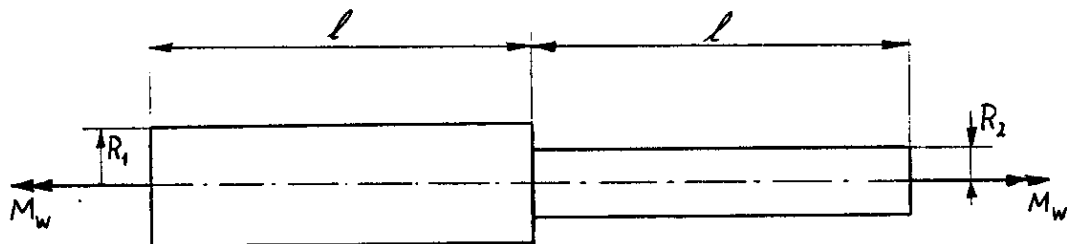
4.2.



Twee cirkelcilinders met verschillende afschuifmoduli, G_1 resp. G_2 , maar overigens gelijk, zijn aan elkaar gelast en worden belast door een wringend moment M_w .

Bepaal de spanningsverdeling, de hoekverdraaiing per lengte-eenheid en de totale torsiestijfheid.

4.3.



Als 4.2, maar nu met verschillende doorsneden, stralen R_1 resp. R_2 , maar gelijke G 's.

Bepaal, voor het gerelaxeerde probleem, de spanningsverdeling, de hoekverdraaiing per lengte-eenheid en de totale torsiestijfheid.

Waar zullen de grootste verschillen tussen de exacte en de gerelaxeerde oplossing optreden?

Wanneer zal de "gerelaxeerde" torsiestijfheid een goede benadering voor de "echte" torsiestijfheid zijn?

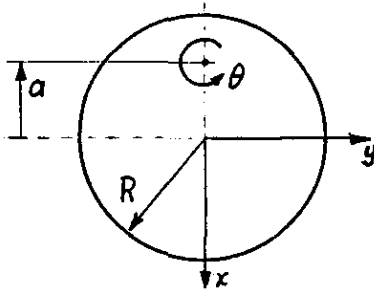
4.4. Een cirkelcilinder wordt belast door een wringend moment M en een normaalkracht N .

Bepaal de spanningen, deformaties en verplaatsingen van de cilinder.

Op welke plaats(en) zullen de grootste spanningen optreden? Bepaal hier de hoofdspansingen en de maximale schuifspanning τ_{\max} .

4.5. Beantwoord dezelfde vragen als bij 4.4 voor een cirkelcylinder belast door een wringend moment M_z en een buigend moment M_x .

4.6. (facultatief; zie § 3).



Beschouw een cirkelcylinder, waarvan de begindoorsnede op zijn plaats wordt gehouden, terwijl de einddoorsnede $z = l$ wordt gedwongen te roteren om het punt $(x,y) = (-a,0)$ over een hoek $\theta(l)$ volgens:

$$u(x,y,l) = -\theta(l)y ; \quad v(x,y,l) = \theta(l)(x + a) ,$$

terwijl we verder de normaalspanningen in deze doorsnede nul nemen:

$$(I) \quad t_{zz}(x,y,l) = 0 .$$

Laat zien dat deze deformatie niet tot stand kan worden gebracht door een wringend moment alleen, en geef aan welke andere belastingsgrootte hiervoor dan nog benodigd is.

Vervang de voorwaarde (I) door:

$$(II) \quad w(x,y,l) = 0 .$$

Welke extra belastingsgrootte moet U nu dan nog invoeren?

Bepaal, binnen het kader van de technische balkentheorie, de waarden (uitgedrukt in $\theta(l)$ en a) van de belastingsgrootheden zowel voor (I) als voor (II).

Vergelijk bovenstaand probleem met een ingeklemde cirkelcylinder, in zijn vrije einddoorsnede belast door een dwarskracht P in y -richting, die aangrijpt in $(-a,0)$. Bepaal hiervoor de spanningsverdeling. Voor welke waarde van a is er "torsievrije" buiging?

5. ENERGIEPRINCIPES

Beschouw voor deze vraagstukken (tenzij uitdrukkelijk anders vermeld) alleen de gerelaxeerde problemen.

5.1. Beschouw vraagstuk 1.1. Neem P voorgeschreven. Bereken met de principes van de minimale potentiële en complementaire energie de effectieve trekstijfheden ($\equiv P$ gedeeld door de relatieve lengteverandering) van beide constructies.

Wat valt er te zeggen over de nauwkeurigheid van deze oplossingen?

5.2. Beschouw vraagstuk 2.4. Neem $M (= M_y)$ voorgeschreven. Bereken boven- en ondergrenzen voor de effectieve buigstijfheid ($= M/\varphi/2l$), φ : hoekverdraaiing van einddoorsnede). Wat valt er te zeggen van de nauwkeurigheid van de gevonden waarde(n) voor de buigstijfheid.

Hint: Kies voor \bar{S} : (zie verg. (38), § 2.3, C.D.)

$$\bar{u}_x = \frac{1}{2} C_1 (z^2 + vx^2 - vy^2), \bar{u}_y = vC_1 xy, \bar{u}_z = -C_1 xz, \text{ voor } 0 \leq z < l,$$

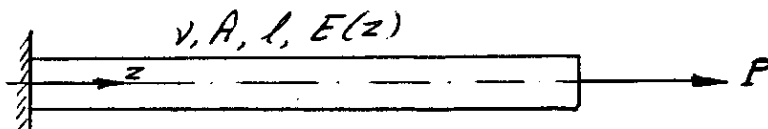
en analoog met $C_1 \rightarrow C_2$ voor $l < z \leq 2l$.

5.3. Beschouw:

- a) vraagstuk 4.2,
- b) vraagstuk 4.3.

Neem M_w voorgeschreven. Bereken boven- en ondergrenzen voor de effectieve torsiestijfheid ($= M_w/(\varphi/2l)$, φ : hoekverdraaiing van einddoorsnede). Wat valt er te zeggen over de nauwkeurigheid van de gevonden waarde(n).

5.4.



Beschouw een staaf (lengte l , doorsnede A) onder uniforme rek (normaalkracht P). De einddoorsnedes zijn schuifspanningsvrij en de axiale verplaatsing van de doorsnede $z = 0$ is nul. De elasticiteitsmodulus E hangt af van z volgens

$$E = E(z) = E_0 \left(1 - \frac{\alpha z}{l}\right), \quad (\alpha \ll 1).$$

- i) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel van de vorm

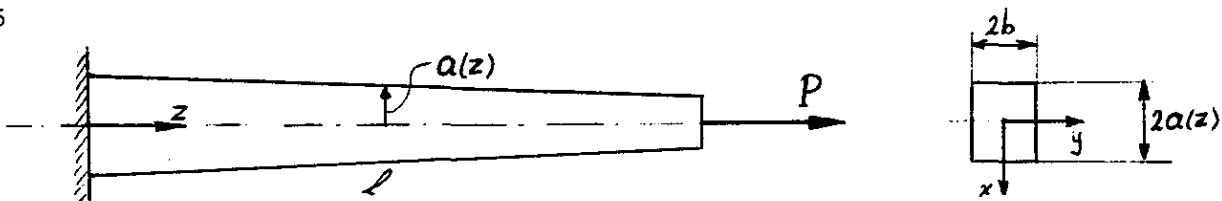
$$\bar{u}_x = -vu'(z)x, \quad \bar{u}_y = -vu'(x)y, \quad \bar{u}_z = u(z) .$$

Neem $u(z)$ lineair in z .

Bepaal de beste hierbij behorende waarde voor de potentiële energiefunctionaal $U(\bar{S})$. Bereken hiermee een bovengrens voor de effectieve trekstijfheid c_e .

- ii) Kies een statisch toelaatbaar stelsel en bereken hiermee een ondergrens voor de effectieve trekstijfheid.
 iii) Hoeveel verschillen beide grenzen?
 iv) Bepaal de bij i) en ii) behorende \bar{t}_{zz} resp. t_{zz} .
 Wat is het maximale verschil tussen beide.

5.5



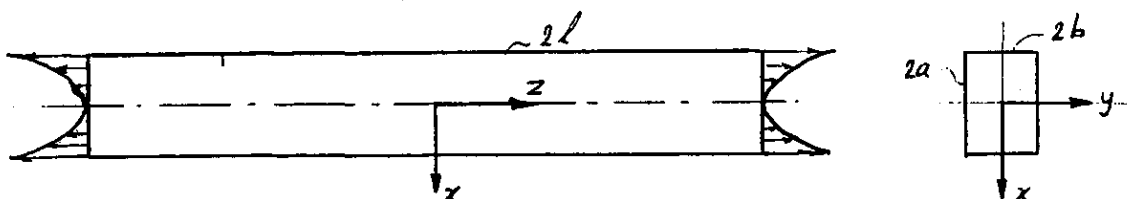
Een staaf met lengte l en met rechthoekige doorsnede met breedte $2b$ en met een in z -richting verlopende hoogte $2a(z)$, volgens

$$a(z) = a\left(1 - \frac{\alpha z}{l}\right), \quad \alpha \ll 1,$$

wordt uniform gerekt met een kracht P .

- i) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel (zie 5.4. i) en bepaal hiermee een bovengrens voor de effectieve trekstijfheid c_e .
 ii) Tracht een statisch toelaatbaar stelsel te construeren. (Welke condities voor \underline{S} geven hierbij moeilijkheden?).

5.6.



Een cilindrische staaf, lengte $2l$, met rechthoekige doorsnede, $2a \times 2b$, wordt in zijn einddoorsneden $z = \pm l$ belast door normaalspanningen, welke zijn verdeeld volgens

$$t_{zz} = \frac{3\sigma}{a} x^2, \quad (z = \pm \ell).$$

De schuifspanningen in de einddoorsneden zijn willekeurig verdeeld, maar wel statisch equivalent met een nulbelasting (gerelaxeerd probleem).

- i) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel van dezelfde vorm als in 5.4. i) (met $u(z)$ lineair). Bepaal de beste $U(\bar{S})$. Bereken benaderingen voor $u_z(0,0,\ell)$ en \bar{t}_{zz} .
- ii) Kies een statisch toelaatbaar stelsel van de vorm:

$$t_{zz} = \frac{3\sigma}{a} x^2, \quad \text{overige } t_{ij} = 0.$$

Bepaal $U^*(\underline{S})$ en beschouw het verschil met $-U(\bar{S})$ volgens i).

- iii) Verbeter het statisch toelaatbaar stelsel door de volgende keuze:

$$t_{zz} = \sigma + f(x)e^{-(\ell-z)/a},$$

$$t_{xz} = g(x,z), \quad t_{xx} = h(x,z),$$

$$t_{xy} = t_{yy} = t_{yz} = 0.$$

Bepaal $f(x)$, $g(x,z)$ en $h(x,z)$, zodanig dat dit stelsel statisch toelaatbaar is. Geef een fysische interpretatie van het verloop van deze spanningen.

Bereken $U^*(\underline{S})$, maar verwaarloos hierbij $O(a/\ell)$ -termen. Wat kunt U nu zeggen van een vergelijking met i).

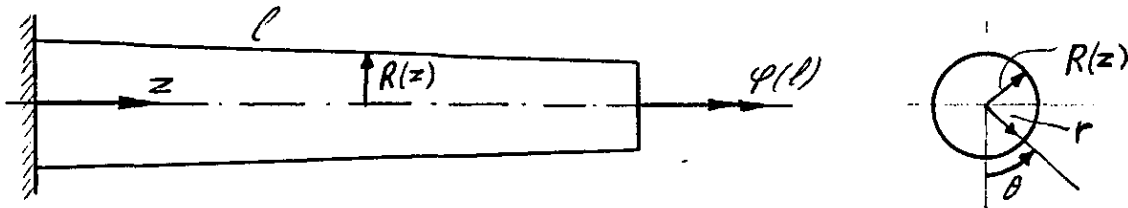
- iv) Vergelijk het verloop van de benaderde spanningen \bar{t}_{zz} (volgens i)) en t_{zz} (volgens iii)). Hoe groot is het maximale verschil en waar treedt dit op?

5.7. Beschouw vraagstuk 1.2. Neem de doorsnede rechthoekig: $2a \times 2b$.

- i) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel van de vorm 5.4. i), maar met $u(z)$ nog willekeurig. Geef de algemene uitdrukking voor $U(\bar{S})$.
- ii) Kies $u(z)$ lineair in z . Bepaal de beste waarde van $U(\bar{S})$. Bereken de hierbij behorende waarden voor $u_z(0,0,\ell)$ en \bar{t}_{ij} .

- iii) Kies $u(z)$ kwadratisch in z en beantwoord dezelfde vragen als bij i).
 Vergelijk de antwoorden op i) en ii).
 iv) Kies een statisch toelaatbare toestand met alleen $t_{zz} \neq 0$. Bepaal $U^*(\underline{S})$. Vergelijk de resultaten met die van i) en ii).

5.8.



Een staaf met een cirkelvormige, in z -richting verlopende doorsnede, met straal $R(z)$, wordt getordeerd. Hierbij is de hoekverdraaiing van de einddoorsnede: $\varphi(l)$ voorgeschreven.

- i) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel van de vorm

$$\bar{u}_x = -\varphi(z)y, \quad \bar{u}_y = \varphi(z)x, \quad \bar{u}_z = 0.$$

Aan welke eisen moet $\varphi(z)$ dan voldoen?

Bepaal, voor algemene $R(z)$ en $\varphi(z)$, een uitdrukking voor $U(\bar{S})$.

- ii) Kies een statisch toelaatbaar stelsel, zodanig dat

$$t_{\theta z} = \frac{C}{R^4(z)} r,$$

(laat zien dat dit een constant (dwz. onafhankelijk van z) wringend moment oplevert) en

$$t_{r\theta} = \tau(r,z), \quad \text{overige } t_{ij} = 0.$$

Bepaal $\tau(r,z)$ en daarna $U^*(\underline{S})$.

- iii) Neem voor de nu volgende vragen

$$R(z) = R_0 \left(1 - \frac{\alpha z}{l}\right), \quad 0 < \alpha \ll l.$$

Bepaal nu de beste $U^*(\underline{S})$ en bereken de bijbehorende spanningen. Verwaarloos hierbij $O(\alpha^2)$ -termen.

- iv) Kies $\varphi(z)$ linear (let op dat $\varphi(\ell)$ is voorgeschreven). Bepaal $U(\bar{S})$, wederom onder verwaarlozing van $O(\alpha^2)$ -termen. Bereken de bijbehorende spanningen en vergelijk het resultaat met iii).
- v) Bereken boven- en ondergrenzen voor de torsiestijfheid D .

6. TORSIE VAN EEN CYLINDER MET WILLEKEURIGE DOORSNEDE

6.1. Een cylinder met ellipsvormige doorsnede, waarvan de rand gegeven is door:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

wordt belast door een wringend moment M .

- a) Bepaal de spanningsverdeling, de hoekverdraaiing per lengte-eenheid en de torsiestijfheid D .
- b) Bepaal de plaats(en) waar de maximale schuifspanning optreedt en bereken daar de hoofdspansingen en τ_{\max} .
- c) In de technische balkentheorie wordt de torsiestijfheid meestal gelijk genomen aan: GI_p , waarin I_p het polaire oppervlaktetraagheidsmoment is:

$$I_p = \int_S (x^2 + y^2) dS .$$

Bepaal I_p voor een ellipsvormige doorsnede. Vergelijk GI_p met de bij a) gevonden waarde voor D . Geef voor $b/a = 1; 0,9; 0,75; 0,5$ de procentuele afwijkingen tussen GI_p en D .

- d) Bepaal de werving van de doorsnede. Bewijs dat zowel de gemiddelde werving als zijn eerste momenten nul zijn, d.w.z. bewijs dat

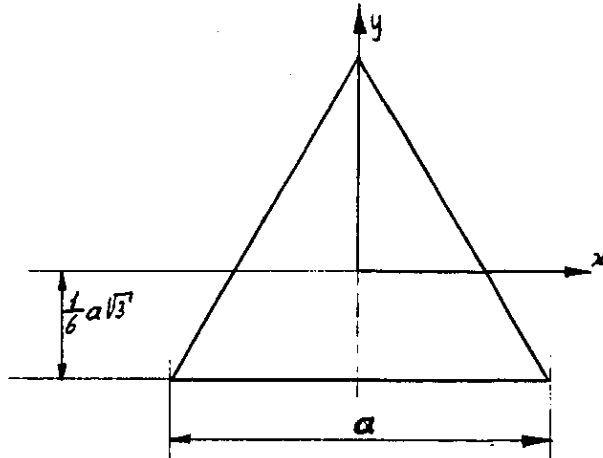
$$\int_S w(x,y,z) dS = \int_S xw(x,y,z) dS = \int_S yw(x,y,z) dS = 0 .$$

(Hint: gebruik verband tussen F en Φ).

- e) Beantwoord vraag a): voor het limietgeval $b \ll a$.

Door een foutieve nummering ontbreekt deze bladzijde.

6.2.



Een cylinder met een doorsnede in de vorm van een gelijkzijdige driehoek, zijde a , wordt getordeerd. De hoekverdraaiing per lengte-eenheid is α .

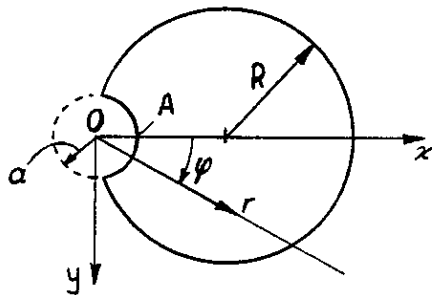
- Geef de voorstellingen in x - en y -coördinaten van de rechten waaruit de omtrek van de driehoek is opgebouwd.
- Geef met behulp hiervan een uitdrukking voor de spanningsfunctie $\tilde{F}(x,y)$, welke identiek aan de randvoorwaarde $\tilde{F} = 0$ voldoet.
- Bepaal hieruit de spanningsverdeling in de cylinder (als functie van α).
- Laat zien dat de grootheid τ gedefinieerd door

$$\tau = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2},$$

maximaal wordt op het midden van de zijden.

- Geef een uitdrukking in integraalvorm voor de torsiestijfheid.

6.3. Beschouw de torsie van een cirkelcylinder met een cirkelvormige inkeping volgens onderstaande figuur (let op keuze van de oorsprong van het assenkruis).



- Bewijs dat de spanningsfunctie $F(x,y)$ hier gelijk is aan:

$$F = -2\alpha \left(\frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{R}{2}x + \frac{a^2 R x}{2(x^2 + y^2)} - \frac{a^2}{4} \right) =$$

$$= -2\alpha \left(\frac{r^2}{4} - \frac{R}{2} r \cos \varphi + \frac{a^2 R \cos \varphi}{2r} - \frac{a^2}{4} \right).$$

(r, φ : poolcoördinaten volgens figuur).

- b) Bepaal de spanningsverdeling.
- c) Bewijs dat de maximale schuifspanning τ_{\max} optreedt in het punt A: $(a,0)$ en bereken de waarde van τ_{\max} .
Bepaal voor het geval dat $a \ll R$ de spanningsconcentratie in A; dit is de waarde van τ_{\max} voor de doorsnede met inkeping gedeeld door de τ_{\max} voor een zuiver cirkelvormige doorsnede.

6.4. Beschouw een cilinder met een ellipsvormige doorsnede, waarvan de rand R wordt gegeven door

$$R : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

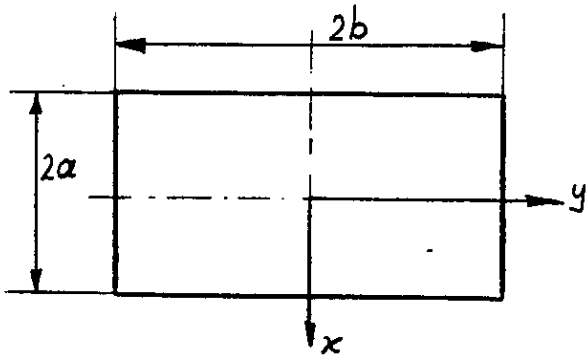
De balk wordt getordèerd, waarbij de hoekverdraaiing van de einddoorsnede $\varphi(\ell)$ (of $\alpha = \varphi(\ell)/\ell$) is voorgeschreven.

- i) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel, waarin de welvingsfunctie $\Phi(x,y)$ nul genomen wordt. Bepaal hiermee $U(\bar{S})$ en een bovengrens voor de torsiestijfheid D.
- ii) Kies een statisch toelaatbaar stelsel mbv. een spanningsfunctie $F(x,y)$, zodanig dat $F(x,y)$ triviaal nul is op de rand R, en bereken de bijbehorende $U^*(\underline{S})$. Indien dit spanningsveld nog een willekeurige constante bevat, hoe bepaalt U dan de beste waarde van deze constante? Bepaal hiermee de optimale $U^*(\underline{S})$ en een ondergrens voor de torsiestijfheid D.
- iii) Vergelijk de antwoorden op i) en ii). Voor welke waarden van (a/b) zijn de verschillen tussen i) en ii) het kleinst en hoe groot zijn ze dan?
Kunt U dit antwoord verklaren?
- iv) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel als bij i) maar met

$$\Phi(x,y) = \frac{(b^2 - a^2)}{(b^2 + a^2)} xy .$$

Bepaal weer $U(\bar{S})$ en \bar{D} en vergelijk weer met ii). Wat kunt U nu zeggen over het gekozen welvingsveld?

6.5.



Beschouw de torsie van een cylinder met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$), waarbij $\alpha = \varphi(l)/l$ is voorgeschreven.

i) Toon aan dat het spanningsveld

$$\underline{t}_{xz} = Cy(x^2 - a^2), \quad \underline{t}_{yz} = -Cx(y^2 - b^2), \quad \underline{t}_{xx} = \underline{t}_{yx} = \underline{t}_{yy} = \underline{t}_{zz} = 0,$$

statisch toelaatbaar is. Welke spanningsfunctie $F(x,y)$ hoort hierbij?

- ii) Bereken $U^*(S)$ behorende bij het veld volgens i). Bepaal de beste waarde voor C . Geef de bijbehorende ondergrens voor D .
- iii) Bepaal een bovengrens voor D door uit te gaan van een kinematisch toelaatbaar stelsel \bar{S} met $\phi(x,y) = 0$. Beschouw het verschil tussen de resultaten van ii) en iii) als functie van (a/b) .
- iv) Verbeter het resultaat van iii) voor een vierkante doorsnede ($b=a$) dmv. de keuze

$$\phi(x,y) = c(yx^3 - xy^3).$$

Bepaal de optimale c en bereken de bijbehorende bovengrens voor D .

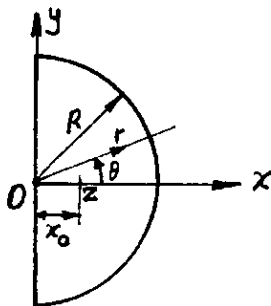
Vergelijk dit met de bij ii) gevonden ondergrens voor D .

v) Neem voor een smalle rechthoek ($a \ll b$):

$$\phi(x,y) = xy.$$

Verwaarloos $O(a/b)$ -termen en bereken boven- en ondergrenzen (met ii)) voor D .

6.6.



Beschouw de torsie van een cylinder met een doorsnede in de vorm van een halve cirkel, straal R , waarbij $\alpha = \varphi(l)/l$ is voorgeschreven. Elke doorsnede draait om zijn zwaartepunt Z .

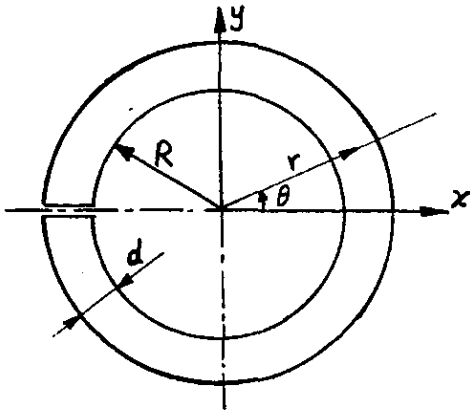
- i) Bepaal de x-coördinaat van Z (= x_0).
- ii) Geef een kinematisch toelaatbaar stelsel met $\phi = 0$. Bereken hiermee een bovengrens voor de torsiestijfheid D.
- iii) Toon aan dat de spanningsfunctie

$$F = C(r^2 - R^2)r \cos \theta = Cx(x^2 + y^2 - R^2) ,$$

tot een statisch toelaatbaar stelsel leidt. Bereken de bijbehorende $U^*(\bar{S})$. Bepaal de gunstigste C en bereken de optimale ondergrens voor D. Vergelijk dit resultaat met ii) en met de exacte waarde:

$$D_{\text{exact}} = 0,294 GR^4 .$$

6.7.



Een dunwandige, opengesneden buis, binnenstraal R, wanddikte d ($d/R \ll 1$), wordt getordeerd, waarbij $\alpha = \phi(\ell)/\ell$ is voorgescreven.

- i) Kies een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld (in poolcoördinaten) als

$$\bar{u}_r = 0, \quad \bar{u}_\theta = \alpha r z, \quad \bar{u}_z = \alpha \phi(r, \theta) .$$

Bewijs dat de bijbehorende potentiële $U(\bar{S})$ kan worden geschreven als

$$U(\bar{S}) = \frac{1}{2} G \alpha^2 \ell \int_S \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + r \right)^2 \right] r dr d\theta .$$

- ii) Bereken met i) en voor $\phi = 0$ een bovengrens voor de torsiestijfheid D. Ontwikkel naar (d/R) .

iii) Idem voor

$$\phi = cR^2\theta .$$

Vergelijk Uw antwoorden op ii) en iii). Verklaar het grote verschil tussen beide antwoorden.

iv) Bewijs dat voor een spanningsfunctie $F = F(r, \theta)$ met $F = 0$ op R ,

$$U^*(S) = \frac{1}{2} G \ell \int_S \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 - 4\alpha F \right] r dr d\theta .$$

v) Neem $F(r, \theta)$ uit de klasse

$$F(r, \theta) = Cr \cos(\lambda\theta) (r^2 + a_1 r + a_2) ,$$

en kies λ , a_1 en a_2 zodanig dat F leidt tot een statisch toelaatbaar spanningsstelsel (C is dan nog willekeurig). Bereken hiermee een ondergrens voor D en vergelijk het resultaat met iii) (de nauwkeurigheid van Uw antwoord moet weer $O(d/R)$ zijn.)

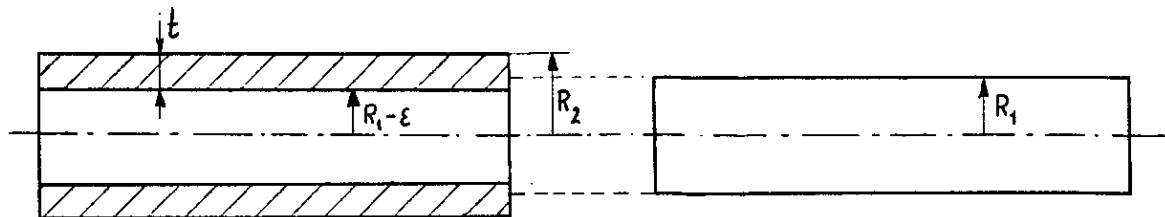
Hint: Ontwikkel F eerst naar $\rho := (r - R)/R$, ($0 \leq \rho \leq d/R$) en naar δ ($\delta := d/R \ll 1$) en substitueer pas daarna in $U^*(S)$.

7. VLAKKE VERVORMINGS- EN VLAKSPANNINGSTOESTAND

7.1. Een lange, cirkelvormige buis, binnendiameter R_1 , buitendiameter R_2 , wordt belast door een inwendige druk p . Bepaal voor het geval dat de einddoorsneden: a) vrij, b) ingeklemd, zijn: de spanningen en de deformaties in de buis.

Bepaal de limietwaarden voor $t := R_2 - R_1 \ll R_1$.

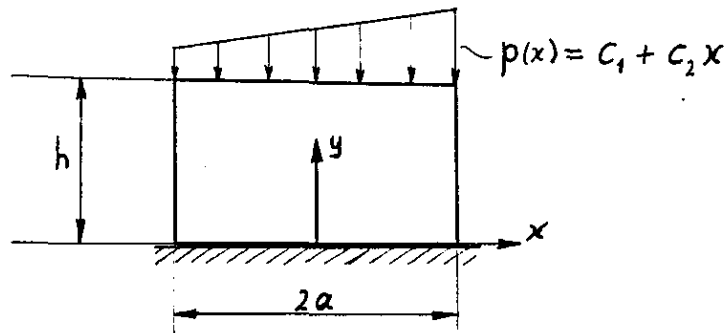
7.2.



Gegeven een cirkelcylinder, straal R_1 , en een cirkelvormige buis, binnenstraal $R_1 - \epsilon$, $0 < \epsilon \ll R_1$, buitenstraal R_2 .

- i) Hoeveel $^{\circ}\text{K}$ moet de buis worden verhit, opdat zijn binnenstraal gelijk is aan R_1 ?
- ii) De buis wordt nu over de cylinder geschoven en het geheel wordt afgekoeld tot de oorspronkelijke temperatuur. Hoe groot zijn nu de spanningen in de cylinder en de buis? Aangenomen mag worden dat de krimpverbinding alleen aanleiding geeft tot normaalspanningen.

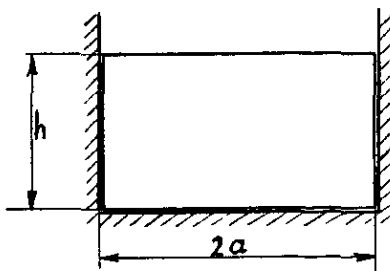
7.3.



Op een glad star vlak ligt vrij een balk, lengte l , met rechthoekige doorsnede, hoogte h , breedte $2a$. Het bovenvlak van de balk wordt belast door een lineair verlopende, normale druk $p(x)$.

- i) Bepaal de spanningen, deformaties en verplaatsingen in de balk.
- ii) Beantwoord dezelfde vragen als bij i) voor het geval de axiale verplaatsingen van de balk in zijn uiteinden verhinderd zijn.

7.4.

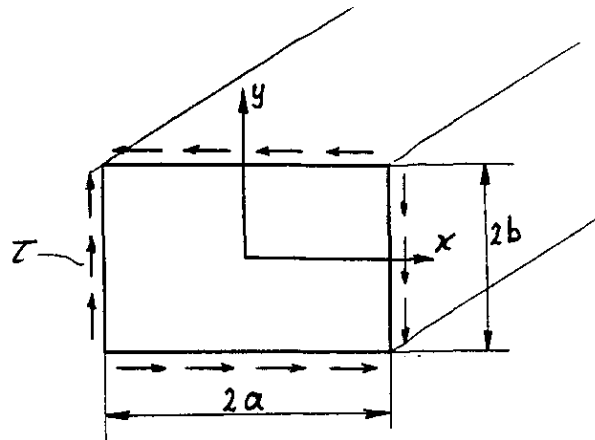


De in 6.3 beschreven balk zit nu ingeklemd tussen drie starre gladde wanden en wordt $T^{\circ}\text{K}$ in temperatuur verhoogd. Beantwoord zowel voor het geval dat de axiale verplaatsingen aan de uiteinden:

a) vrij, b) verhinderd, zijn de volgende vragen.

- i) Hoe groot zijn de spanningen in de balk?
- ii) Hoeveel is de hoogte van de balk toegenomen?

7.5.

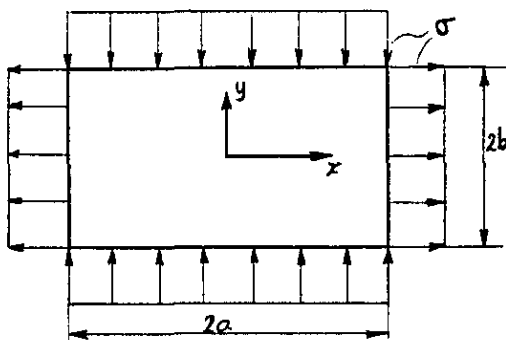


Een lange balk met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) wordt aan zijn manteloppervlak belast door loodrecht op de as van de balk staande schuifspanningen τ , welke constant van grootte zijn en verdeeld volgens bovenstaande figuur.

- i) Bewijs dat het systeem globaal in evenwicht is.
- ii) Bepaal de spanningen.
- iii) Bepaal de deformaties.
- iv) Schets de vorm van de doorsnede na deformatie.
- v) Hoe groot zijn de hoofdspansingen en in welk vlak treden zij op?
- vi) Bepaal de totale elastische energie van de balk (lengte van balk is l .)

7. REK VAN PLATEN. GEGENERALISEERDE VLAKSPANNINGSTOESTAND

8.1.

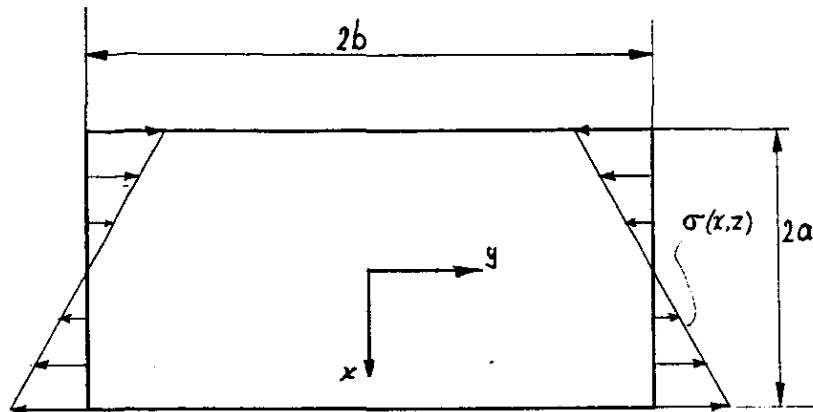


Een rechthoekige plaat ($2a \times 2b$) wordt langs de randen $x = \pm a$ en $y = \pm b$ belast door een uniforme trekspanning σ resp. drukspanning σ .

Bewijs dat in de plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst en bepaal de spanningen en deformaties in de plaat.

Wat is de dikte van de plaat na de deformatie?

8.2.



Een rechthoekige plaat ($2a \times 2b$) wordt langs de randen $y = \pm b$ belast door een normaalspanning $\sigma(x,z)$ welke lineair is in x :

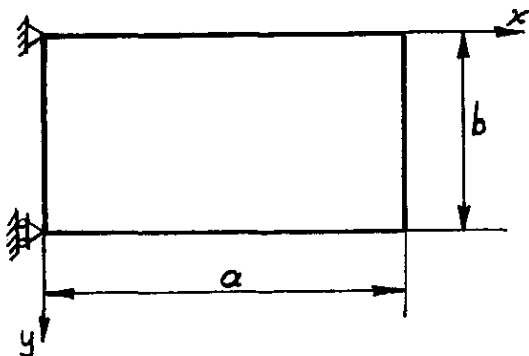
$$\sigma(x,z) = \alpha(z)x .$$

- i) Neem aan dat $\sigma(x,z)$ in z -richting "goed" verdeeld is, d.w.z. zodanig verdeeld dat in de plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst. Bepaal deze "goede" verdeling en bereken de bijbehorende spanningsverdeling in de plaat.
- ii) Beschouw dit probleem als een gegeneraliseerd vlakspanningsprobleem. Bepaal de doorsnedegrootheden N_x , N_y en N_{xy} en de spanningen als de gemiddelden van deze grootheden, dus

$$t_{xx} = \frac{1}{2h} N_x \quad \text{etc.}$$

- iii) Vergelijk de resultaten van i) en ii).

8.3.



Een dunne, rechthoekige plaat, $a \times b$, dikte $2h$, wordt langs zijn randen belast door spanningen welke in dikte-richting (d.i. z -richting) constant zijn. Deze spanningen zijn verder voorgeschreven als: (β is een positieve constante; voor x en y zie figuur)

$$\begin{aligned}
 \text{op } x = 0 : & \quad t_{xx} = 6\beta y \quad , \quad t_{xy} = 0 \quad , \\
 x = a : & \quad t_{xx} = 6\beta y \quad , \quad t_{xy} = -2\beta a \quad , \\
 y = 0 : & \quad t_{yy} = 0 \quad , \quad t_{xy} = -2\beta x \quad , \\
 y = b : & \quad t_{yy} = 2\beta b \quad , \quad t_{xy} = -2\beta x \quad .
 \end{aligned}$$

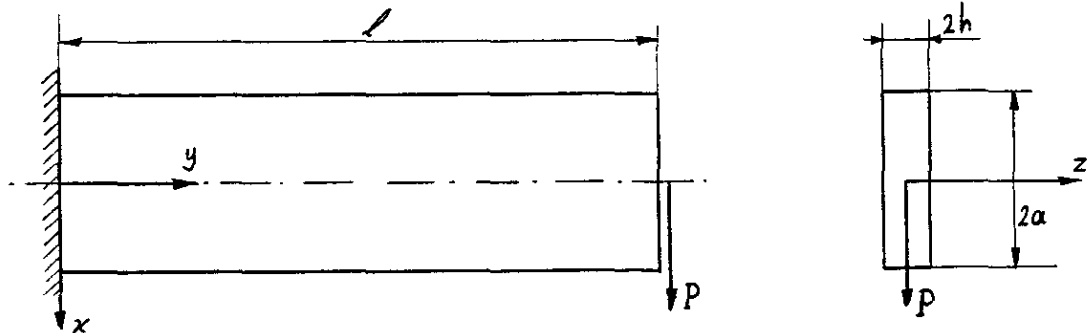
- i) Teken deze randspanningen in de figuur.
- ii) Laat zien dat de plaat in zijn geheel in evenwicht is.
- iii) Bepaal de bij dit probleem behorende Airy-functie^{*)} en bereken hiermee de spanningen in de plaat.
- iv) Bereken de deformaties in het vlak van de plaat.
- v) Bepaal de verplaatsingen in het vlak van de plaat (voor de opleggingen: zie figuur). Schets voor het geval dat $v = 1/3$ de gedeformeerde plaat.

^{*)} Hint: Ga uit van de volgende voorstelling voor de Airy-functie $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \sum_{\substack{(k+l) \leq 4 \\ k, l = 0}} A_{kl} x^k y^l \quad , \quad (A_{22} = 0) \quad .$$

Bewijs dat elke term van deze reeks op zichzelf (met uitzondering van de term met A_{22}) aan de bi-potentiaalvergelijking voldoet. Bereken hieruit de spanningen en bepaal dan mbv. de randvoorwaarden welke van de coëfficiënten A_{kl} ongelijk aan nul moeten worden genomen.

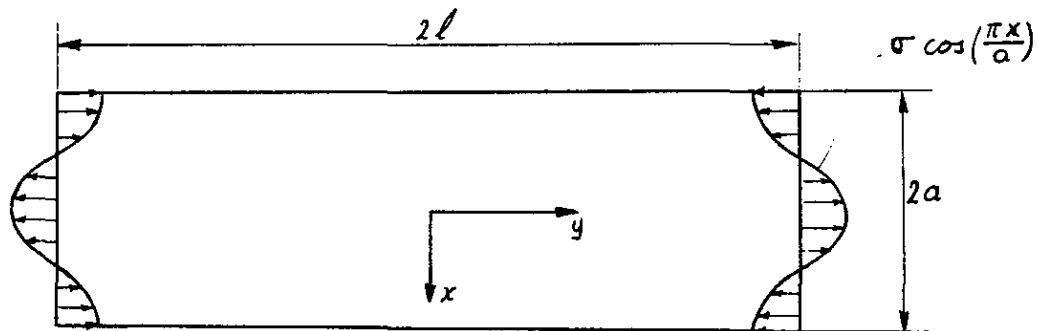
8.4.



Een rechthoekige plaat ($2a \times 2l$) is op $y = 0$ ingeklemd en op $y = l$ belast door een dwarskracht P in x -richting. Beschouw dit probleem als een generaliseerde vlakspanningstoestand. Neem aan dat de spanningen in de doorsneden $y = 0$ en $y = l$ goed verdeeld zijn, d.w.z. dat de normaalspanning t_{yy} een lineaire en de schuifspanning t_{xy} een kwadratische functie in x is.

- i) Bepaal de expliciete vorm van deze verdelingen.
- ii) Bepaal de Airy-functie voor dit probleem (ga hier voor uit van de bij i) gevonden vorm voor de spanningen aan de rand).
- iii) Bepaal de spanningen in de plaat.
- iv) Bepaal de deformaties. Laat zien dat de doorsnede $y = 0$ niet vlak blijft, zodat dus niet exact aan de voorwaarde dat de plaat op $y = 0$ is ingeklemd kan worden voldaan.

8.5.



Een rechthoekige plaat ($2a \times 2l$) wordt langs de zijden $y = \pm l$, belast door normaalspanningen, welke verdeeld zijn volgens:

$$\sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad (-a \leq x \leq a).$$

De randen $x = \pm a$ zijn vrij.

- i) Toon aan dat bovenstaande spanningsverdeling een nulbelasting vormt.
- ii) Formuleer de randvoorwaarden op $y = \pm l$ en $x = \pm a$.
- iii) Kies een Airy-functie $U(x,y)$ van de volgende vorm

$$U(x,y) = f(y) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

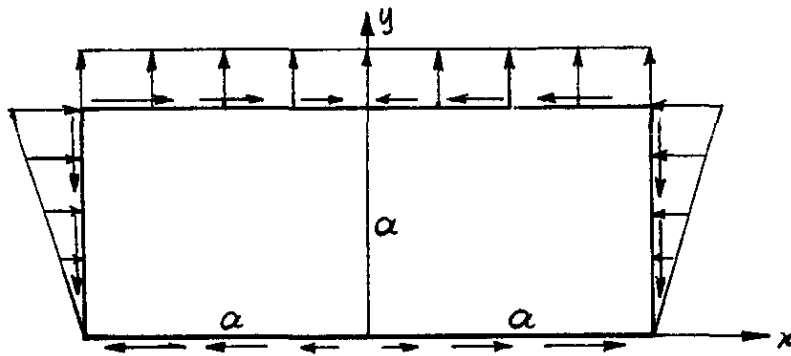
Laat zien dat hiermee aan alle randvoorwaarden op één na kan worden voldaan. Welke is deze ene, en aan welke eisen moet $f(y)$ voldoen opdat aan de andere is voldaan.

- iv) Bepaal de algemene vorm van $f(y)$ opdat $U(x,y)$ aan de bi-potentiaal-

vergelijking voldoet. Bedenk hierbij dat $f(y)$ symmetrisch in y moet zijn.

- v) Bepaal de in de onder iv) gevonden uitdrukking voor $f(y)$ voorkomende constanten.
- vi) Naem $l \gg a$. Bepaal nu een benaderde uitdrukking voor $f(y)$ door daarin termen van $O(e^{-\beta})$, met $\beta := \pi l/a$, te verwaarlozen.
- vii) Bepaal met het resultaat van vi) de spanningen in de plaat. Laat zien dat deze voor $|y| < l$ zeer snel uitsterven. Met welk algemeen principe is dit resultaat in overeenstemming.

8.6.



Een dunne, rechthoekige plaat $2a \times a$, dikte $2h$, wordt langs zijn randen belast door spanningen welke constant zijn in dikte-richting en verder zijn voorgeschreven als (σ : constant; voor x en y zie figuur)

$$y = 0 : t_{xy} = -\frac{\sigma}{a}x, \quad t_{yy} = 0,$$

$$y = a : t_{xy} = -\frac{\sigma}{a}x, \quad t_{yy} = \sigma,$$

$$x = \pm a : t_{xx} = -\frac{\sigma}{a}y, \quad t_{xy} = \mp \sigma.$$

- i) Bepaal t_x^* en t_y^* langs de verschillende stukken van de rand R en werk hiermee de uitwendige arbeidsterm:

$$A_u^{(p)} = 2h \int_R (t_x^* u + t_y^* v) ds, \quad (u = \bar{u}_x, \quad v = \bar{u}_y),$$

verder uit.

ii) Kies als kinematisch toelaatbaar stelsel

$$\bar{S} : u = c_1 xy, \quad v = c_2 (x^2 - y^2).$$

Bereken de hierbij behorende $U(\bar{S})$. Bepaal de beste waarden voor c_1 en c_2 en de optimale $U(\bar{S})$.

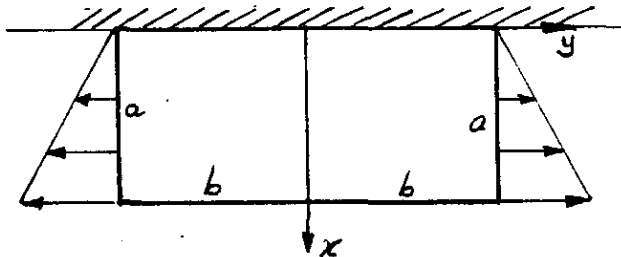
iii) Zoek een statisch toelaatbaar stelsel door uit te gaan van een Airy-functie $U(x,y)$ van de vorm

$$U(x,y) = d_1 x^2 y + d_2 y^3.$$

Bepaal d_1 en d_2 zodanig dat $U(x,y)$ inderdaad leidt tot een statisch toelaatbaar stelsel. Bereken de bijbehorende complementaire energie $U^*(\underline{S})$.

iv) Vergelijk de resultaten van ii) en iii). Welke conclusie kunt U hieruit trekken?

8.7.



Een dunne, rechthoekige plaat, $a \times 2b$, dikte $2h$, is langs zijn rand $x = 0$ ingeklemd (zie figuur). De randen $y = \pm b$ worden belast door een normaalspanning: $\frac{\sigma}{a}x$. Neem $\nu = 1/3$.

- i) Schrijf de randvoorwaarden in formulevorm. Geef aan welk deel van de rand S_p - en welk deel S_u -oppervlak is. Bepaal \underline{t}^* op S_p .
- ii) Kies voor een statisch toelaatbaar stelsel de eenvoudigst mogelijke Airy-functie uit de klasse

$$U(x,y) = A_{k\ell} x^k y^\ell, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Bereken de hierbij behorende $U^*(\underline{S})$. Bereken, mbv. Hooke, de bij \underline{t}_{ij} behorende deformaties. Zijn deze compatibel? Zo ja, bereken dan de verplaatsingen. Ga na of U aldus de exacte oplossing gevonden heeft.

iii) Neem als kinematisch toelaatbaar stelsel

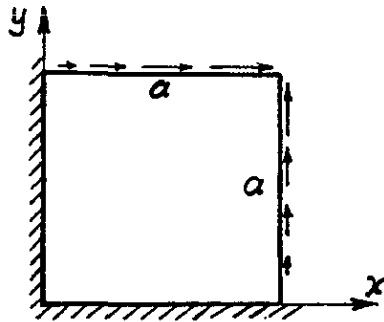
$$u = c_1 x \quad , \quad v = c_2 xy \quad .$$

Bereken $U(\bar{S}) = U(c_1, c_2)$, bepaal c_1 en c_2 en bereken de optimale $U(\bar{S})$.

iv) Vergelijk de resultaten van ii) en iii). Voor welke waarden van b/a krijgt U de beste overeenstemming en voor welke de slechtste? Geef hiervoor een verklaring.

v) Neem de plaat vierkant: $a = 2b$. Hoe groot is nu het relatieve verschil tussen $U(\bar{S})$ en $-U^*(\underline{S})$. Bereken de bij \underline{S} en \bar{S} (volgens ii) en iii)) behorende spanningen en vergelijk met elkaar. Hoe groot is het maximale verschil?

8.8.



Een dunne, vierkante plaat, zijde a , dikte $2h$, is langs de randen $x = 0$ en $y = 0$ ingeklemd (zie figuur). De randen $x = a$ en $y = a$ worden belast door lineair verdeelde schuifspanningen: $\frac{\tau}{a}y$ resp. $\frac{\tau}{a}x$. Neem $\nu = 1/3$.

- i) Schrijf de randvoorwaarden in formulevorm. Geef aan welk deel van de rand S_p - en welk deel S_u -oppervlak is. Bepaal \underline{t}^* op S_p .
- ii) Ga voor een statisch toelaatbaar stelsel uit van een Airy-functie van de vorm:

$$U(x,y) = A_1 xy + A_2 x^2 + A_3 y^2 + A_4 x^2 y + A_5 xy^2 \quad .$$

Kies A_1 t/m A_5 zodanig dat $U(x,y)$ inderdaad tot een statisch toelaatbaar stelsel leidt. Bereken de bijbehorende $U^*(\underline{S})$

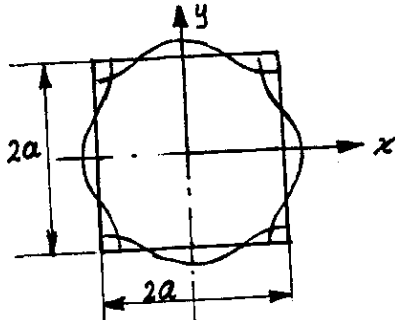
iii) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel van de vorm

$$u = c_1 xy \quad , \quad v = c_2 xy \quad .$$

Toon aan dat op grond van de symmetrie in het probleem (welke?) moet gelden: $c_1 = c_2 = c$. Bereken $U(\bar{S}) = U(c)$, bepaal de beste c en bereken de optimale $U(\bar{S})$.

- iv) Vergelijk de resultaten van ii) en iii). Vergelijk ook de bij ii) en iii) behorende spanningen (\underline{t}_{ij} resp. \bar{t}_{ij}). Geef aan hoe U het verschil tussen beide benaderingen kunt verkleinen.

8.9.



Een dunne, vierkante plaat, zijde $2a$, dikte $2h$, wordt langs zijn rand belast door normaalspanningen, welke zijn verdeeld volgen:

$$x = \pm a : t_{xx} = \sigma \cos \frac{\pi y}{a}, \quad (t_{xy} = 0),$$

$$y = \pm a : t_{yy} = \sigma \cos \frac{\pi x}{a}, \quad (t_{xy} = 0).$$

Neem $\nu = 1/3$.

- i) Bepaal de meest eenvoudige Airy-functie $U(x,y)$, welke leidt tot een statisch toelaatbaar stelsel. Bereken de bijbehorende $U^*(\underline{S})$.
- ii) Kies als kinematisch toelaatbaar stelsel:

$$u = c_1 x + c_2 x y^2, \quad v = c_3 y + c_4 x^2 y.$$

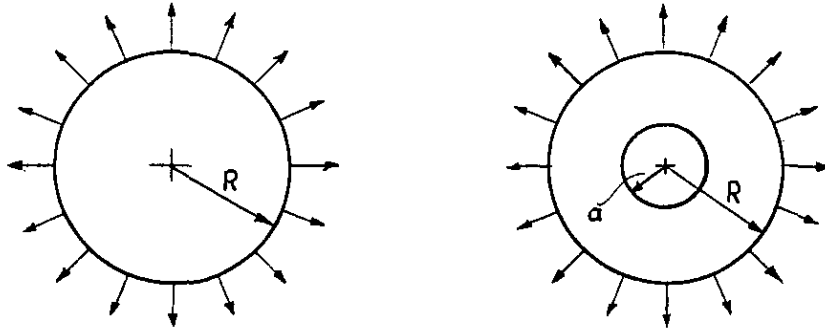
Toon aan dat op grond van de symmetrie moet gelden:

$$c_3 = c_1 \quad \text{en} \quad c_4 = c_2.$$

Bereken $U(\bar{S}) = U(c_1, c_2)$, bepaal c_1 en c_2 en bereken de optimale $U(\bar{S})$.

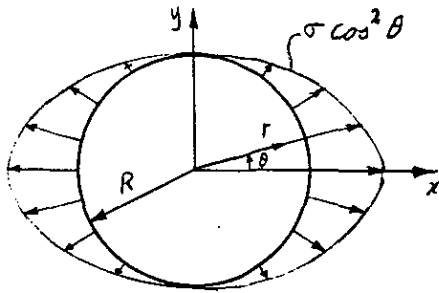
- iii) Vergelijk de resultaten van i) en ii), en speciaal de daarbij te vinden spanningen, met elkaar.

8.10.



- a) Een cirkelvormige plaat, straal R , wordt aan zijn rand belast door een uniforme trekspanning σ .
- i) Laat zien dat in deze plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst.
 - ii) Bepaal de spanningsverdeling.
 - iii) Bepaal de verplaatsingen. Hoe groot is de dikte van de plaat na de deformatie?
- b) Hetzelfde probleem als hierboven maar nu voor een plaat met een gat. De rand van het gat is vrij. Dit probleem (en alle nu volgende in dit hoofdstuk) mag worden opgelost als een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.
- i) Bepaal de spanningen in de plaat.
 - ii) Neem de limiet $(a/R) \rightarrow 0$. Komt deze limiet overeen met probleem a)? Zo neen, hoe groot is dan de spanningsconcentratie?

8.11.

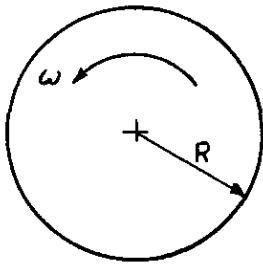


Een cirkelvormige plaat, straal R , wordt langs zijn rand belast door een normaalspanning volgens:

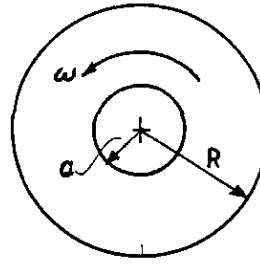
$$t_{rr} = \sigma \cos^2 \theta, \quad \text{op } r = R.$$

- i) Bepaal de algemene vorm van de Airy-functie.
- ii) Welke term(en) moet U in deze functie verwerpen omdat de plaat het punt $r = 0$ bevat? Bepaal de coëfficiënten van de overige termen uit de randvoorwaarden.
- iii) Bereken de spanningen en de deformaties.
- iv) Bepaal de verlenging van de middellijn langs $\theta = 0$.

8.12.



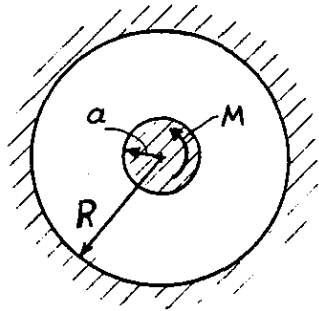
a)



b)

- a) Een cirkelvormige plaat roteert met een constante hoeksnelheid ω om een as loodrecht op zijn vlak.
 - i) Zet de rotatie stil en bepaal de van de centrifugaalkrachten afkomstige volumekracht.
 - ii) Bepaal de spanningen in de schijf.
 - iii) Waar zijn deze spanningen maximaal en hoe groot zijn ze daar?
- b) Als bij a) maar nu met een gat met straal a .
 - i) Beantwoord dezelfde vragen als bij a).
 - ii) Beschouw de limiet $(a/R) \rightarrow 0$. Is deze gelijk aan de oplossing van a)? Zo nee, hoe groot is dan de spanningsconcentratie?

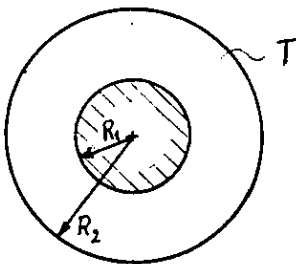
8.13.



Een cirkelvormige plaat, straal R , met een gat, straal a , is aan de buitenrand ingeklemd. De binnenrand is vast verbonden aan een starre schijf met straal a . De schijf wordt loodrecht op zijn vlak belast door een moment M .

- i) Bepaal de spanningsverdeling.
- ii) Bepaal de verplaatsingen.
- iii) Hoe groot is de hoekverdraaiing van de schijf?
- iv) Waar treedt de maximale spanning op en hoe groot is deze.

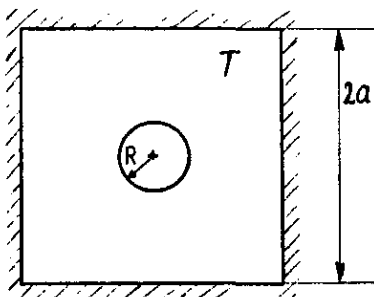
8.14.



Een cirkelvormige plaat met een gat, binnenstraal R_1 , buitenstraal R_2 , waarvan de binnenrand is ingeklemd en de buitenrand vrij is, wordt T K in temperatuur verhoogd.

- i) Bepaal de spanningen.
- ii) Bepaal de toename van de buitenstraal.
- iii) Beschouw de limiet $(R_1/R_2) \rightarrow 0$.

8.15.



In het midden van een vierkante plaat, zijde $2a$, zit een cirkelvormig gat, straal R . De rand van het gat is vrij en de buitenranden van de plaat zijn zodanig opgelegd dat normale verplaatsingen verhinderd zijn. De plaat wordt T K in temperatuur verhoogd.

We nemen de afmetingen van de plaat zo groot ($a \gg R$, in feite $a \rightarrow \infty$) dat we aan mogen nemen dat langs de buitenrand van de plaat een uniforme normaalspanning heerst.

- i) Bepaal deze uniforme spanning (is onafhankelijk van het gat).
- ii) Bepaal de spanningen in de plaat.
- iii) Bepaal de spanningsconcentratiefactor.

8.16. Een dunne, cirkelvormige plaat, straal R , wordt aan zijn rand belast door een constante normaalspanning σ . De dikte van de plaat, $2h(r)$, is verloopend volgens

$$h(r) = h_0 \left(1 - \epsilon \frac{r}{R}\right), \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad *)$$

- i) Kies als kinematisch toelaatbare toestand

$$u = cr, \quad v = 0.$$

Bereken $U(\bar{S}) = U(c)$, bepaal c en bereken de optimale $U(\bar{S})$, alles onder verwaarlozing van $O(\epsilon^2)$ -termen.

- ii) Kies als statisch toelaatbaar stelsel

$$\underline{t}_{rr} = \underline{t}_{\theta\theta} = \frac{h(R)}{h(r)} \sigma; \quad \underline{t}_{r\theta} = 0.$$

(Bedenk dat dit overeenkomt met

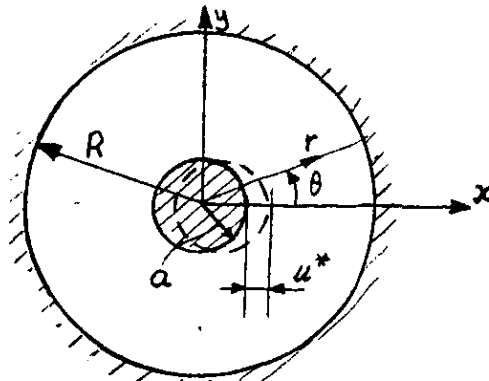
$$N_{rr}(r) = N_{\theta\theta}(r) = \text{constant} = 2h(R)\sigma.)$$

Bereken $U^*(\underline{S})$.

- iii) Laat zien dat de bij i) en ii) gevonden $U(\bar{S})$ en $U^*(\underline{S})$ hoogstens $O(\epsilon^2)$ verschillen. Vergelijk ook de bij i) en ii) behorende spanningen ($\bar{\epsilon}$ de gemiddelde spanningen over de dikte van de plaat). Verschillen deze ook slechts $O(\epsilon^2)$?

) Bij een plaat met zwak verloopende dikte mogen de standaardformules voor U en U^ worden gebruikt, alleen met $h(r)$ onder het integraalteken.

8.17.



Een dunne, cirkelvormige plaat, straal R , dikte $2h$, is langs zijn rand ingeklemd. De plaat bevat een starre, cirkelvormige kern, straal a (a klein tov. R). De kern ondergaat een voorgeschreven verplaatsing u^* naar rechts. Neem $\nu = 1/3$.

i) Ga voor de keuze van een kinematisch toelaatbaar stelsel uit van

$$\bar{u}_r = u = (A_1 + A_2 \ln r) \cos \theta ; \bar{u}_\theta = v = (B_1 + B_2 \ln r) \sin \theta .$$

Bepaal A_1, A_2, B_1 en B_2 zodanig dat deze verplaatsingen inderdaad kinematisch toelaatbaar zijn. Bereken de bijbehorende waarden van $U(\bar{S})$.

ii) Kies een statisch toelaatbaar stelsel van de vorm

$$\underline{t}_{rr} = \frac{A}{r} \cos \theta , \quad \underline{t}_{\theta\theta} = \frac{B}{r} \cos \theta , \quad \underline{t}_{r\theta} = \frac{C}{r} \sin \theta .$$

Bewijs dat, wil dit stelsel inderdaad statisch toelaatbaar zijn, moet gelden $C = B$.

Druk de arbeid tgv. de voorgeschreven verplaatsingen ($A_u^{(u)}(\underline{S})$) uit in A en B . Bereken $U(\underline{S}) = U^*(A, B)$. Bepaal A en B en bereken de optimale $U^*(\bar{S})$.

iii) Noem de kracht benodigd om de kern te verplaatsen: P . Voer in de stijfheidscoëfficiënt c door $c = P/u^*$. Geef aan hoe U met bovenstaande resultaten onder- en bovengrenzen voor c kunt vinden (gebruik hiervoor $U(S) + U^*(S) = 0$ en $2W(S) = A_u(S)$).

8.18. Een dunne, cirkelvormige plaat, straal R , dikte $2h$, met een vaste, starre kern, straal a , wordt langs zijn buitenrand belast door een constante schuifspanning τ . De elasticiteitsmodulus van de plaat is verlopend volgens

$$E(r) = E_0 \left(1 - \epsilon \frac{r}{R}\right) , \quad (0 < \epsilon \ll 1) .$$

Poisson's ratio ν is constant.

- i) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel dat in vorm gelijk is aan de oplossing behorende bij uniforme E, dwz. ga uit van

$$\bar{u}_r = u = 0, \quad \bar{u}_\theta = v = \frac{A}{r} + Br,$$

ga na welke van de constanten A en B U kunt bepalen uit de eisen voor kinematische toelaatbaarheid, bepaal de eventuele overblijvende constante(n) uit het principe minimum potentiële energie en bereken de bijbehorende potentiële energie tot op $O(\epsilon^2)$.

- ii) Kies een statisch toelaatbaar stelsel gelijk aan de exacte spanningsverdeling bij uniforme E. Bereken de bijbehorende complementaire energie tot op $O(\epsilon^2)$.

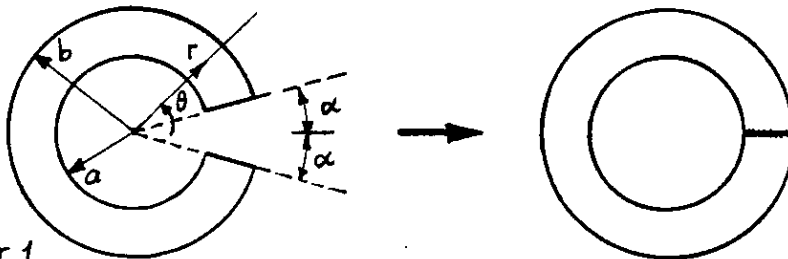
- iii) Laat zien dat de bij i) en ii) berekende $U(\bar{S})$ en $-U^*(\underline{S})$ slechts $O(\epsilon^2)$ verschillen. Bereken de bij i) en ii) behorende spanningsverdelingen; ga na of deze ook slechts $O(\epsilon^2)$ verschillen.

- iv) Noem de hoekverdraaiing van de buitenrand van de schijf: φ . Definieer de effectieve elasticiteitsmodulus \hat{E} als:

$$\hat{E} = \frac{(1 + \nu)(R^2 - a^2)}{a^2} \cdot \frac{\tau}{\varphi}.$$

(Vergelijk dit met het exacte verband tussen E en τ/φ voor uniforme E). Bewijs dat \hat{E} omgekeerd evenredig is met $U(\underline{S})$ en leidt mbv. bovenstaande resultaten een uitdrukking af voor \hat{E} , welke tot op $O(\epsilon^2)$ nauwkeurig is.

8.19.



figuur 1

figuur 2

Van een dunne plaat in de vorm van een open ring, dikte $2h$, binnenstraal a , buitenstraal b , staan de einddoorsneden een hoekje 2α uiteen ($\alpha \ll 1$).

(figuur 1). Deze twee eindvlakken worden nu tegen elkaar gebracht en vastgelast (figuur 2). De randen $r = a$ en $r = b$ zijn spanningsvrij.

- i) Formuleer de bij dit probleem behorende randvoorwaarden.
 ii) Kies een kinematisch toelaatbaar stelsel van de vorm

$$\bar{u}_r = u = A, \quad \bar{u}_\theta = v = c_1 \theta r + c_2 r.$$

Bepaal c_1 en c_2 zodanig dat het veld inderdaad kinematisch toelaatbaar is. Bereken dan $U(\bar{S}) = U(A)$, bepaal de beste A en bereken hiermee de optimale $U(\bar{S})$. Noem $(b - a) = t$ en veronderstel $t \ll a$. Geef nu een benadering voor $U(\bar{S})$ tot op $O(t/a)$.

- iii) Kies een statisch toelaatbaar spanningsveld van de vorm:

$$\underline{t}_{rr} = C_1 r^2 + C_2 r + C_3; \quad \underline{t}_{\theta\theta} = C_4 r^2 + C_5 r + C_6; \quad \underline{t}_{r\theta} = 0.$$

Laat zien dat uit de eisen voor statisch toelaatbaarheid volgt dat er van C_1 t/m C_6 nog slechts één onafhankelijke constante overblijft en dat het bovenstaande veld dan overgaat in

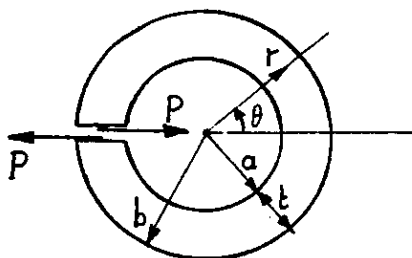
$$\begin{aligned} \underline{t}_{rr} &= C(r - a)(r - b) = C\rho(\rho - t), \\ \underline{t}_{\theta\theta} &= C[3r^2 - 2(a + b)r + ab] = C[2a\rho - at + 3\rho^2 - 2\rho t], \\ \underline{t}_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

met $\rho = r - a$ en $t = b - a$, ($0 \leq \rho \leq t$).

Bereken de bij dit spanningsveld behorende potentiële energie van de voorgeschreven verplaatsingen ($-A_u^{(u)}(\underline{S})$). Ontwikkel deze term tot op $O(t/a)$.

- iv) Bereken $W^{(t)}(\underline{S})$ behorende bij het veld volgens iii) tot op $O(t/a)$ nauwkeurig. (Gebruik hiervoor de formulering voor \underline{t}_{ij} in ρ en t en schat eerst, voordat U de integraal uitrekent, de integrand af; bedenk hierbij dat ρ en t klein van dezelfde orde zijn). Bepaal hiermee de benaderde $U^*(\underline{S}) = U^*(C)$, de beste waarde voor C en de optimale $U^*(\bar{S})$.
- v) Vergelijk de resultaten van ii) en v). Vergelijk ook de bij beide stelsels te vinden spanningen.

8.20.



Een dunne plaat in de vorm van een open ring, dikte $2h$, binnenstraal a , buitenstraal b , wordt in de twee einddoorsneden belast door twee tegengestelde, in het vlak van deze doorsnede gelegen krachten ter grootte van P . De verdeling van P over deze doorsnede is vrij en de overige randen van de plaat zijn onbelast.

i) Beschouw de spanningsverdeling

$$\begin{aligned} t_{r\theta} &= \tau(r - a)(r - b) \cos \theta, \\ t_{\theta\theta} &= -\tau[4r^2 - 3(a + b)r + 2ab] \sin \theta, \\ t_{rr} &= -\tau(r - a)(r - b) \sin \theta. \end{aligned}$$

Bepaal τ uit de conditie dat deze spanningsverdeling de krachten P moet leveren. Toon daarna aan dat deze spanningsverdeling aan alle eisen voor statisch toelaatbaarheid voldoet.

ii) Bereken de bij het veld volgens i) behorende $U^*(S)$. Doet dit tot op $O(t/a) = O((b - a)/a)$ na (voer weer in $\rho = r - a$ en $t = b - a$ en benader eerst de integrand).

iii) Noem de verplaatsing van het aangrijppunt van P in de richting van P : δ . Voer in de stijfheidscoëfficiënt c door $c = P/\delta$. Bewijs dat $U^*(S)$ omgekeerd evenredig is met c . Bepaal met ii) een benadering voor c . Vergelijk dit met het volgende resultaat, afkomstig van een technische-mechanica-benadering voor slanke gekromde balken, dat stelt

$$\delta = \frac{6\pi a^3}{Eht^3} P.$$

ANTWOORDEN

Hoofdstuk 1

1.1. a) i) $0 \leq z < \ell: t_{zz} = \frac{P}{S_1}, \quad \ell < z \leq 2\ell: t_{zz} = \frac{P}{S_2}.$

ii) $0 \leq z < \ell: w = \frac{Pz}{E_1 S_1}, \quad \ell < z \leq 2\ell: w = \frac{P\ell}{E_1 S_1} + \frac{P}{E_2 S_2} (z - \ell).$

Stijfheid: $c = \frac{E_1 E_2 S_1 S_2}{(E_1 S_1 + E_2 S_2) \ell}.$

iii) $W = \frac{(E_1 S_1 + E_2 S_2) P^2 \ell}{2 E_1 E_2 S_1 S_2} \quad (= \frac{P^2 \ell}{2c}).$

b) i) staaf 1 : $t_{zz} = \frac{E_1 P}{(E_1 S_1 + E_2 S_2)},$

staaf 2 : $t_{zz} = \frac{E_2 P}{(E_1 S_1 + E_2 S_2)}.$

ii) $w = \frac{Pz}{(E_1 S_1 + E_2 S_2)}.$

Stijfheid: $c = \frac{E_1 S_1 + E_2 S_2}{\ell}.$

iii) $W = \frac{P^2 \ell}{2(E_1 S_1 + E_2 S_2)} \quad (= \frac{P^2 \ell}{2c}).$

1.2. $t_{zz} = \rho g (\ell - z) + \frac{Mg}{S}; \quad w(0,0,z) = (\rho g \ell + \frac{Mg}{S}) \frac{z}{E} - \frac{\rho g}{2E} z^2.$

1.3. a) $t_{xx} = t_{yy} = -\alpha p, \quad t_{zz} = -p, \quad t_{xy} = t_{yz} = t_{xz} = 0,$
 $e_{xx} = e_{yy} = [v - \alpha(1 - v)] \frac{p}{E}, \quad e_{zz} = (2v\alpha - 1) \frac{p}{E},$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0 ,$$

$$u = [v - \alpha(1 - v)] \frac{Px}{E} , \quad v = [v - \alpha(1 - v)] \frac{Py}{E} , \quad w = (2v\alpha - 1) \frac{Pz}{E} .$$

b) $\alpha = \frac{1}{2v} , \quad c) \alpha = \frac{v}{1 - v} , \quad d) v = \frac{1}{2} .$

1.4. a)
$$t_{zz} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) E_1 E_2 T}{(E_1 + E_2)} ,$$

$$w = \frac{\alpha_1 (E_1 - E_2) + E_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{(E_1 + E_2)} Tz , \quad \text{voor } 0 \leq z \leq \ell$$

$$= \frac{\alpha_1 (E_1 - E_2) + E_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{(E_1 + E_2)} T\ell + \frac{\alpha_2 (E_2 - E_1) + E_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}{(E_1 + E_2)} T(z - \ell) ,$$

voor $\ell \leq z \leq 2\ell .$

b) Staaf 1:
$$t_{zz} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) E_1 E_2 T}{(E_1 + E_2)} ,$$

Staaf 2:
$$t_{zz} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E_1 E_2 T}{(E_1 + E_2)} .$$

$$w = \frac{(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2)}{(E_1 + E_2)} Tz .$$

1.5. a)
$$\rho f_z = \rho \omega^2 z .$$

b)
$$t_{zz} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (\ell^2 - z^2) .$$

c)
$$w = \frac{\rho \omega^2}{6E} (3\ell^2 - z^2) z .$$

Hoofdstuk 2.

2.1. b)
$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = t_{xz} = t_{yz} = 0 , \quad t_{zz} = \frac{P}{\pi R^2} \left(1 - \frac{2x}{R}\right) ;$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu P}{\pi ER^2} \left(1 - \frac{2x}{R}\right), \quad e_{zz} = \frac{P}{\pi ER^2} \left(1 - \frac{2x}{R}\right),$$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0,$$

$$u = -\frac{\nu Px}{\pi ER^2} + \frac{P}{\pi ER^3} [z^2 + \nu(x^2 - y^2)],$$

$$v = -\frac{\nu Py}{\pi ER^2} + \frac{2\nu Pxy}{\pi ER^3},$$

$$w = \frac{Pz}{\pi ER^2} - \frac{2Pxz}{\pi ER^3}.$$

c) $x_0 = \frac{1}{2}R.$ d) $W = \frac{P^2 l}{\pi ER^2}.$

2.2. b) $t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{xz} = t_{yz} = 0,$

$$t_{zz} = \frac{P}{4ab} \left(1 + \frac{3y}{b} - \frac{3x}{a}\right).$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu P}{4abE} \left(1 + \frac{3y}{b} - \frac{3x}{a}\right), \quad e_{zz} = \frac{P}{4abE} \left(1 + \frac{3y}{b} - \frac{3x}{a}\right),$$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0,$$

$$u = -\frac{\nu Px}{4abE} - \frac{3\nu Pxy}{4a^2bE} + \frac{3P}{8a^2bE} [z^2 + \nu(x^2 - y^2)],$$

$$v = -\frac{\nu Py}{4abE} + \frac{3\nu Pxy}{4a^2bE} - \frac{3P}{8ab^2E} [z^2 - \nu(x^2 - y^2)],$$

$$w = \frac{Pz}{4abE} - \frac{3Pxz}{4a^2bE} + \frac{3Pyz}{4ab^2E}.$$

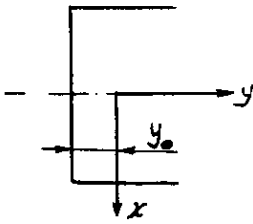
c) Neutrale lijn (x_0, y_0) uit: $\frac{3x_0}{a} - \frac{3y_0}{b} = 1.$

d)
$$\underline{u}(0,0,l) = \frac{Pl}{4abE} \left(\frac{3}{2} \frac{l}{a}, -\frac{3}{2} \frac{l}{b}, 1 \right).$$

Neeen (mits $a \neq b$).

e)
$$W = \frac{7P^2 l}{8abE}.$$

2.3. a)



$y_0 = 4a,$

$I_x = \frac{5}{12} a^3 t, \quad I_y = \frac{8}{3} a^3 t.$

b)
$$t_{zz} = \frac{M}{a^3 t} \left[\frac{3}{8} x \cos \alpha + \frac{12}{5} y \sin \alpha \right], \quad \text{overige } t_{ij} = 0.$$

c) Noem β hoek tussen snijlijn en y-as:

$$\tan \beta = \frac{32}{5} \tan \alpha.$$

d)
$$u_{0x} = \frac{3M \cos \alpha}{16Ea^3 t} z^2, \quad u_{0y} = \frac{6M \sin \alpha}{5Ea^3 t} z^2.$$

e)
$$\varphi(l) = -\frac{3Ml}{8Ea^3 t}.$$

f)
$$W = \frac{M^2 l}{Ea^3 t} \left(\frac{3}{16} \cos^2 \alpha + \frac{6}{5} \sin^2 \alpha \right).$$

2.4. a)

$$0 \leq z < l: t_{zz} = -\frac{4M}{\pi R_1^4} x,$$

$$l < z \leq 2l: t_{zz} = -\frac{4M}{\pi R_2^4} x,$$

overige $t_{ij} = 0.$

b) $0 \leq z \leq \ell: u_0(z) = \frac{2M}{\pi ER_1^4} z^2,$

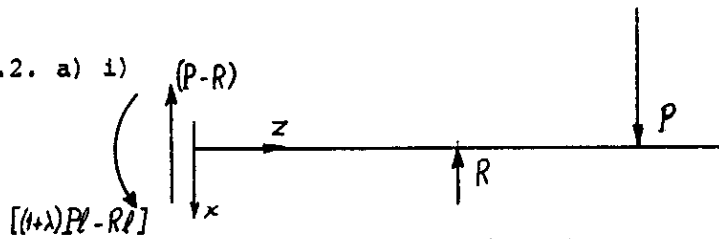
$\ell \leq z \leq 2\ell: u_0(z) = \frac{2M\ell^2}{\pi ER_1^4} \left(1 + \frac{2(z-\ell)}{\ell}\right) + \frac{2M}{\pi ER_2^4} (z-\ell)^2.$

2.5. a) $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \alpha(a + bx), \quad e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0.$

b) $x_0 = -\frac{a}{b}.$

Hoofdstuk 3.

3.2. a) i)



$R = (1 + \frac{3}{2}\lambda)P.$

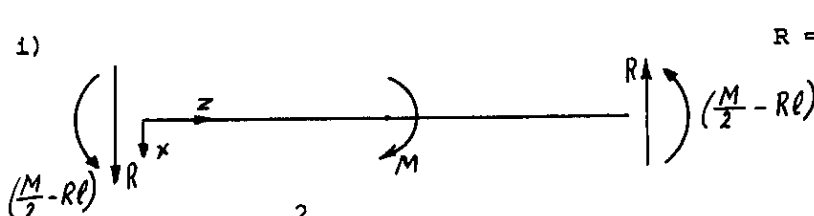
ii) $u(z) = -\frac{\lambda P}{4EI} (\ell z^2 - z^3), \quad 0 \leq z < \ell,$

$= \frac{P}{6EI} [3(1 + \lambda)\ell z^2 - z^3 + (1 + \frac{3}{2}\lambda)\ell^2(\ell - 3z)], \quad \ell < z < (1 + \lambda)\ell$

$= \frac{\lambda P \ell^2}{12EI} [(9 + 6\lambda + 2\lambda^2)\ell + 3(1 + 2\lambda)z], \quad (1 + \lambda)\ell < z \leq 2\ell.$

iii) $(t_{zz})_{\max} = \frac{\lambda P \ell}{I} x_{\max}, \quad \text{t.p.v. } z = \ell.$

b) i)



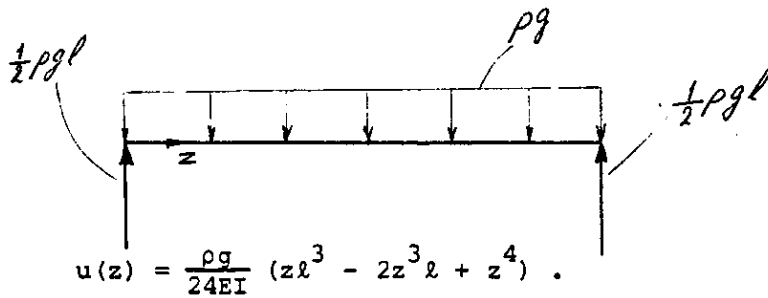
$R = \frac{3M}{4\ell}.$

ii) $u(z) = \frac{Mz^2}{8EI\ell} (z - \ell), \quad 0 \leq z < \ell$

$= -\frac{M}{8EI\ell} (4\ell^3 - 8\ell^2 z + 5\ell z^2 - z^3), \quad \ell < z \leq 2\ell.$

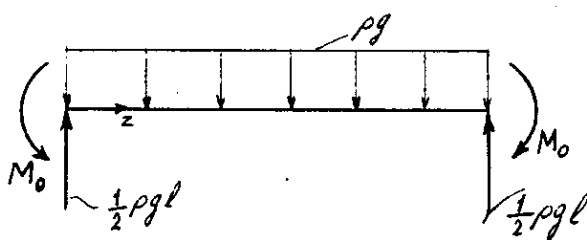
iii) $(t_{zz})_{\max} = \frac{M}{2I} x_{\max}$, t.p.v. $z = l$.

3.3. a)



$(t_{zz})_{\max} = \frac{pgl^2}{8I} x_{\max}$, t.p.v. $z = \frac{l}{2}$.

b)

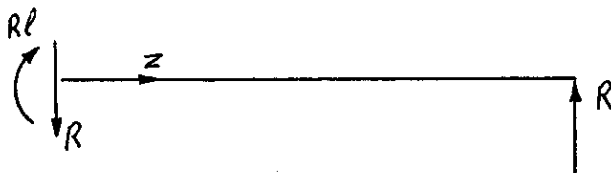


$M_0 = \frac{1}{12} pgl^2$.

$u(z) = \frac{pg}{24EI} (z^4 - 2lz^3 + l^2z^2)$.

$(t_{zz})_{\max} = \frac{pgl^2}{12I} x_{\max}$, t.p.v. $z = 0, \text{ of } l$.

3.4.



$R = -\frac{3\alpha a}{2l} EI$.

$u(z) = \frac{\alpha a}{4l} (lz^2 - z^3)$.

3.5. a) In AB normaalspanning σ volgens:

$$\sigma = - \frac{3EI\alpha T}{Sl^2 \left(1 + \frac{3I}{2Sl^2}\right)},$$

$$(\Delta l)_{AB} = \frac{\alpha T l}{\left(1 + \frac{3I}{2Sl^2}\right)}$$

(N.B. voor slanke balken: $1 + \frac{3I}{2Sl^2} \approx 1$).

b) (z-as langs CA)

$$t_{zz} = - \frac{3\alpha ET}{l^2 \left(1 + \frac{3I}{2Sl^2}\right)} (l - z)x,$$

$$u(z) = \frac{\alpha T}{2l^2 \left(1 + \frac{3I}{2Sl^2}\right)} (3z^3 - z^2 l).$$

3.6. Noem hoek tussen $u_0(l)$ en x-as: β .

Dan

$$\tan \beta = \frac{a^2}{b^2} \tan \alpha.$$

3.7. b) $c = - \frac{P}{2I_y}$, $f(z) = \frac{P(z - l)}{I_y}$, $(I_y = \frac{4}{3} a^3 b)$.

c) $e_{xx} = e_{yy} = - \frac{\nu P}{EI} (z - l)x$, $e_{zz} = \frac{P}{EI} (z - l)x$,

$$e_{xz} = \frac{(1 + \nu)P}{2EI} (a^2 - x^2), \quad e_{xy} = e_{yz} = 0.$$

3.8. Zie collegedictaat: § 2.7.

Hoofdstuk 4

$$4.1. \quad t_{\theta z} = \frac{2Mr}{\pi(R_2^4 - R_1^4)}, \quad (\approx \frac{M}{2\pi R^2 d}, \quad d \ll R),$$

hoekverdraaiing:

$$\frac{2Ml}{\pi G(R_2^4 - R_1^4)}, \quad (\approx \frac{Ml}{2\pi G R^3 d}, \quad d \ll R),$$

$$D = \frac{\pi}{2} G(R_2^4 - R_1^4), \quad (\approx 2\pi G R^3 d, \quad d \ll R).$$

$$4.2. \quad t_{\theta z} = \frac{2M_w}{\pi R^4} r, \quad \alpha_1 = \frac{2M_w}{\pi G_1 R^4}, \quad \alpha_2 = \frac{2M_w}{\pi G_2 R^4},$$

$$D = \frac{\pi R^4 G_1 G_2}{2(G_1 + G_2)}.$$

$$4.3. \quad t_{\theta z}^{(1)} = \frac{2M}{\pi R_1^4} r, \quad \alpha_1 = \frac{2M}{\pi G R_1^4},$$

$$t_{\theta z}^{(2)} = \frac{2M}{\pi R_2^4} r, \quad \alpha_2 = \frac{2M}{\pi G R_2^4},$$

$$D = \frac{\pi G R_1^4 R_2^4}{2(R_1^4 + R_2^4)}.$$

$$4.4. \quad t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = 0, \quad t_{xz} = -\frac{2My}{\pi R^4}, \quad t_{yz} = \frac{2Mx}{\pi R^4}, \quad t_{zz} = \frac{N}{\pi R^2},$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu N}{\pi E R^2}, \quad e_{xy} = 0, \quad e_{xz} = -\frac{2My}{\pi G R^4}, \quad e_{yz} = \frac{2Mx}{\pi G R^4}, \quad e_{zz} = \frac{N}{\pi E R^2},$$

$$u = -\frac{2M}{\pi R G} xz - \frac{\nu N}{\pi ER} x, \quad v = \frac{2M}{\pi R G} yz - \frac{\nu N}{\pi ER} y, \quad w = \frac{N}{\pi ER} z,$$

$$\tau_{\max} = \frac{N}{2\pi R^2} \sqrt{1 + \left(\frac{4M}{NR}\right)^2}$$

4.5.

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0, \quad t_{xz} = -\frac{2M}{\pi R^4} z x, \quad t_{yz} = \frac{2M}{\pi R^4} z y, \quad t_{zz} = \frac{4M}{\pi R^4} x y,$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\nu e_{zz}, \quad e_{zz} = \frac{4M}{\pi ER} \frac{x}{4} y,$$

$$e_{xz} = \frac{-M}{\pi GR} \frac{z}{4} x, \quad e_{yz} = \frac{M}{\pi GR} \frac{z}{4} y,$$

$$u = -\frac{2M}{\pi R G} \frac{z}{4} yz - \frac{4\nu M}{\pi ER} \frac{x}{4} xy,$$

$$v = \frac{2M}{\pi R G} \frac{z}{4} yz - \frac{2M}{\pi ER} \frac{x}{4} (z^2 - vx^2 + vy^2),$$

$$w = \frac{4M}{\pi ER} \frac{x}{4} yz,$$

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi R^3} \sqrt{1 + \left(\frac{M}{M_x} \frac{z}{x}\right)^2}$$

4.6. (I)

$$M_w = \frac{\pi GR^4}{2l} \theta(l), \quad P_y = \frac{3\pi a ER^4}{4l^3} \theta(l),$$

(II)

$$M_w = M_w(I), \quad P_y = \frac{3\pi a ER^4}{l^3} \theta(l), \quad M_x = \frac{3\pi a ER^4}{2l^2} \theta(l).$$

Hoofdstuk 5

5.1. a) $c_e (= \frac{P}{W(2\ell)/2\ell}) = \frac{2E_1E_2S_1S_2}{(E_1S_1 + E_2S_2)}$.

b) $c_e (= \frac{P}{W(\ell)/\ell}) = E_1S_1 + E_2S_2$.

5.2. $c_e = \frac{\pi E}{2} \frac{R_1^4 R_2^4}{(R_1^4 + R_2^4)}$.

5.3. a) $c_e = \pi R^4 \frac{G_1 G_2}{(G_1 + G_2)}$; b) $c_e = \pi G \frac{R_1^4 R_2^4}{(R_1^4 + R_2^4)}$.

5.4. i) $U(\bar{S}) = - \frac{P^2 \ell}{AE_0(2 - \alpha)}$; $c_e \leq AE_0(1 - \frac{\alpha}{2})$.

ii) $U^*(\underline{S}) = - \frac{P^2 \ell}{2\alpha AE_0} \ln(1 - \alpha)$; $c_e \geq \frac{\alpha AE_0}{\ln(1 - \alpha)}$.

iii) $O(\alpha^2)$.

iv) $|\bar{t}_{zz} - \underline{t}_{zz}| \leq \frac{\alpha}{2}$.

5.5. i) $c_e \leq 8abE(1 - \frac{\alpha}{2})$.

ii) Een mogelijke S is:

$$\underline{t}_{zz} = \frac{P}{4ab(1 - \frac{\alpha z}{\ell})} , \quad \underline{t}_{xz} = - \frac{\alpha Px}{4abl(1 - \frac{\alpha z}{\ell})^2} ,$$

$$\underline{t}_{xx} = \frac{\alpha^2 Px^2}{4abl^2(1 - \frac{\alpha z}{\ell})^3} , \quad \underline{t}_{xy} = \underline{t}_{yy} = \underline{t}_{yz} = 0 .$$

$$(\Rightarrow U^*(\underline{S}) = - \frac{P^2 \ell}{8abE} \cdot \frac{\ln(1 - \alpha)}{\alpha} \cdot (1 + O(\alpha^2/\ell^2)) . .)$$

5.6. i)
$$U(\bar{S}) = - \frac{4abl\sigma^2}{E} ,$$

$$\bar{u}_z(0,0,l) = \frac{\sigma l}{E} , \quad \bar{t}_{zz} = \sigma .$$

ii)
$$U^*(\underline{S}) = 7,2 \frac{abl\sigma^2}{E} .$$

iii)
$$f(x) = \sigma \left(\frac{3x^2}{a^2} - 1 \right) , \quad g(x,z) = - \frac{\sigma x}{a^3} (x^2 - a^2) e^{-(l-z)/a} ,$$

$$h(x,z) = \frac{\sigma}{4a^4} (x^2 - a^2)^2 e^{-(l-z)/a} ,$$

$$U^*(\underline{S}) = \frac{4abl\sigma^2}{E} (1 + O(a/l)) .$$

5.7. i)
$$U(\bar{S}) = 2Eab \int_0^l u'(z)^2 dz + \frac{Ev^2}{3(1+\nu)} ab(a^2 + b^2) \int_0^l u''(z)^2 dz +$$

$$- 4\rho gab \int_0^l u(z) dz - Mgu(l) .$$

ii)
$$U(\bar{S}) = - \frac{1}{2E} \left[ab\rho^2 g^2 l^3 + \rho Mg^2 l^2 + \frac{M^2 g^2 l}{4ab} \right] .$$

$$\bar{u}_z(0,0,l) = \frac{\rho gl^2}{2E} + \frac{Mgl}{4Eab} ,$$

$$\bar{t}_{zz} = \frac{2\rho gabl + Mg}{4ab} , \quad \text{overige } \bar{t}_{ij} = 0 .$$

iii)
$$U(\bar{S}) = - \frac{1}{2E} \left[\frac{4}{3} \rho^2 g^2 abl^3 + \rho Mg^2 l^2 + \frac{M^2 g^2 l}{4ab} \right] (1 + O(a^2/l^2))$$

$$\bar{u}_z(0,0,l) = \left(\frac{\rho gl^2}{2E} + \frac{Mgl}{4Eab} \right) (1 + O(a^2/l^2)) ,$$

$$\bar{t}_{zz} = \rho gl + \frac{Mg}{4ab} - \rho gz ,$$

$$\bar{t}_{xz} = \frac{\nu}{2(1+\nu)} \rho gx , \quad \bar{t}_{yz} = \frac{\nu}{2(1+\nu)} \rho gy , \quad \bar{t}_{xx} = \bar{t}_{xy} = \bar{t}_{yy} = 0 .$$

$$\text{iv)} \quad U^*(\underline{S}) = \frac{1}{2E} \left[\frac{4}{3} \rho^2 g^2 ab l^3 + \rho M g^2 l^2 + \frac{M^2 g^2 l}{4ab} \right] .$$

$$5.8. \text{ i)} \quad U(\bar{S}) = \frac{\pi}{4} G \int_0^l R^4(z) \varphi'(z)^2 dz .$$

$$\text{ii)} \quad \tau(r, z) = \frac{CR'(z)}{R^5(z)} \cdot r^2 ,$$

$$U^*(\underline{S}) = \frac{\pi C^2}{4G} \int_0^l \frac{[1 + \frac{2}{3}R'(z)^2]}{R^4(z)} dz - \frac{\pi}{2} \varphi C .$$

$$\text{iii)} \quad U^*(\underline{S}) = -(1 - 2\alpha) \frac{\pi}{4l} GR_0^4 \varphi^2 ,$$

$$\bar{t}_{\theta z} = \left[1 - 2\alpha \left(1 - \frac{2z}{l} \right) \right] G\varphi \cdot \frac{r}{l} ,$$

$$\bar{t}_{r\theta} = -\alpha G\varphi \cdot \left(\frac{r}{l} \right)^2 .$$

$$\text{iv)} \quad U(\bar{S}) = (1 - 2\alpha) \frac{\pi}{4l} GR_0^4 \varphi^2 ,$$

$$\bar{t}_{\theta z} = G\varphi \cdot \frac{r}{l} , \text{ overige } \bar{t}_{ij} = 0 .$$

$$\text{v)} \quad D = (1 - 2\alpha + O(\alpha^2)) \frac{\pi}{2} GR_0^4 .$$

Hoofdstuk 6

6.1. a)
$$t_{xz} = - \frac{2M}{\pi ab^3} y ,$$

$$t_{yz} = \frac{2M}{\pi a^3 b} x ,$$

$$\alpha = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi Ga^3 b^3} ,$$

$$D = \frac{\pi Ga^3 b^3}{(a^2 + b^2)}$$

b) Stel $a > b$:

$$\text{in } (x,y) = (0, \pm b) : \tau_{\max} = \frac{2M}{\pi ab^2} .$$

c)
$$I_p = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2) .$$

d)
$$w = \frac{(b^2 - a^2)M}{\pi Ga^3 b^3} xy .$$

e)
$$t_{xz} = - \frac{2M}{\pi ab^3} y ,$$

$$t_{yz} = 0 \left(\frac{b^2}{a} \right) t_{xz} ,$$

$$\alpha \approx \frac{M}{\pi Gab^3} , \quad D \approx \pi Gab^3 .$$

6.2. a) $y + \frac{1}{6} a\sqrt{3} = 0$, $y\sqrt{3} + 3x - a = 0$, $y\sqrt{3} - 3x - a = 0$.

b) $\tilde{F}(x,y) = -\frac{1}{6a\sqrt{3}}(3y^3 - \frac{3}{2} ay^2\sqrt{3} - \frac{1}{6} a^3\sqrt{3} - 9x^2y - \frac{3}{2} x^2a\sqrt{3})$,

c) $t_{xz} = \frac{G\alpha}{a\sqrt{3}}(3y^2 - 3x^2 - ay\sqrt{3})$,

$t_{yz} = \frac{G\alpha}{a\sqrt{3}}(6xy + ax\sqrt{3})$,

$t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{zz} = 0$.

d) $D = -8G \int_{y=-\frac{1}{6}a\sqrt{3}}^{\frac{1}{3}a\sqrt{3}} \int_{x=0}^{\frac{1}{3}(a-y\sqrt{3})} \tilde{F}(x,y) dx dy (= \frac{Ga^4\sqrt{3}}{80})$.

6.3. Zie collegedictaat (§ 2.6)

6.4. i) $D \leq \frac{\pi}{4} Gab(a^2 + b^2)$.

ii) $D \geq \frac{\pi Ga^3 b^3}{(a^2 + b^2)}$.

iii) Voor: $a = b$.

iv) $\bar{D} = \frac{\pi Ga^3 b^3}{(a^2 + b^2)}$ (= D_{exact}) .

6.5. i) $F(x,y) = \frac{c}{2G}(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$.

ii) $D \geq \frac{40}{9} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} G$.

iii) $D \leq \frac{4}{3} (a^2 + b^2) abG$.

iv) $2,22 a^4 G \leq D \leq 2,25 a^4 G$.

v) $4,44 a^3 bG \leq D \leq 5,33 a^3 bG$.

6.6. i) $x_0 = \frac{4}{3\pi} R$.

ii) $\bar{u}_x = -\alpha yz$, $\bar{u}_y = \alpha(x - x_0)z$, $\bar{u}_z = 0$.

$D \leq 0,502 GR^4$.

iii) $D \geq 0,272$.

6.7. ii) $D \leq 2\pi GR^3 d$.

iii) $D \leq \frac{2\pi}{3} GR^3 d = 2,1 GRd^3$.

v) $\lambda = \frac{1}{2}$, $a_1 = -(2R + d)$, $a_2 = R(R + d)$,

$D \geq \frac{16}{3\pi} GRd^3 = 1,7 GRd^3$.

Hoofdstuk 7

7.1. a) V.S.T. ; b) V.V.T. ($\Pi := pR_1^2 / (R_2^2 - R_1^2)$)

$$t_{rr} = \Pi \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right) , \quad t_{\theta\theta} = \Pi \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right) ,$$

$$t_{zz} = \begin{cases} 0, & \text{a) ,} \\ 2\nu\Pi, & \text{b) .} \end{cases}$$

a) $e_{rr} = \frac{\Pi}{E} \left[(1 - \nu) - (1 + \nu) \frac{R_2^2}{r^2} \right] , \quad e_{\theta\theta} = \frac{\Pi}{E} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{R_2^2}{r^2} \right] ,$

$e_{zz} = -\frac{2\nu\Pi}{E}$.

b) $e_{rr} = \frac{(1 + \nu)\Pi}{E} \left[(1 - 2\nu) - \frac{R_2^2}{r^2} \right] , \quad e_{\theta\theta} = \frac{(1 + \nu)\Pi}{E} \left[(1 - 2\nu) + \frac{R_2^2}{r^2} \right] , \quad e_{zz} = 0$

Limietwaarden:

$$t_{rr} = -p \left[1 - \frac{R_2 - r}{t} \right], \quad t_{\theta\theta} = \frac{pR}{t} \quad (>> |t_{rr}|).$$

7.2. i) $T = \frac{\epsilon}{\alpha R_1}.$

ii) buis:

$$t_{rr} = t_{\theta\theta} = \frac{E\epsilon}{2R_1} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right),$$

cylinder:

$$t_{rr} = \frac{E\epsilon R_1}{2R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right); \quad t_{\theta\theta} = \frac{E\epsilon R_1}{2R_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right).$$

$$t_{r\theta} = t_{rz} = t_{\theta z} = t_{zz} = 0 \quad (\text{overall}).$$

7.3. i) (VST). Hint: ga uit van Airy-functie: $U = -\frac{1}{2}c_1x^2 - \frac{1}{6}c_2x^3.$

$$t_{xx} = t_{xy} = 0, \quad t_{yy} = -c_1 - c_2x, \quad t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0,$$

$$e_{xx} = e_{zz} = \frac{\nu}{E}(c_1 + c_2x), \quad e_{yy} = -\frac{1}{E}(c_1 + c_2x), \quad e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0.$$

$$u = \frac{\nu}{E}(c_1x + \frac{1}{2}c_2x^2) - \frac{\nu}{2E}c_2z^2 - \frac{c_2}{2E}y^2,$$

$$v = -\frac{1}{E}(c_1 + c_2x)y; \quad w = \frac{\nu}{E}(c_1 + c_2x)z.$$

ii) (V.V.T.) $t_{xx} = t_{xy} = 0, \quad t_{yy} = -c_1 - c_2x, \quad t_{xz} = t_{yz} = 0, \quad t_{zz} = -\nu(c_1 + c_2x)$

$$e_{xx} = \frac{\nu(1+\nu)}{E}(c_1 + c_2x); \quad e_{yy} = -\frac{(1-\nu^2)}{E}(c_1 + c_2x); \quad e_{xy} = e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = 0,$$

$$u = \frac{\nu(1+\nu)}{E}(c_1x + \frac{1}{2}c_1x^2) + \frac{(1-\nu^2)}{E}c_2y^2,$$

$$v = -\frac{(1-\nu^2)}{E}(c_1 + c_2x)y, \quad w = 0.$$

7.4. a) (VST)

i) $t_{xx} = -\alpha ET$, overige $t_{ij} = 0$.

ii) $\Delta h = (1 + \nu)\alpha Th$.

b) (VVT)

i) $t_{xx} = t_{zz} = -\frac{\alpha ET}{(1 - \nu)}$, overige $t_{ij} = 0$.

ii) $\Delta h = \frac{\alpha T(1 + 2\nu)}{(1 - \nu)} h$.

7.5. ii) $t_{xy} = -\tau$, overige $t_{ij} = 0$.

iii) $e_{xy} = -\frac{\tau}{2G}$, overige $e_{ij} = 0$.

v) $\sigma_1 = -\tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \tau$, onder 45° met x- en y-as.

vi) $W = \frac{ab\tau^2}{G}$.

Hoofdstuk 8

8.1. $t_{xx} = \sigma$, $t_{yy} = -\sigma$, overige $t_{ij} = 0$.

$$e_{xx} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma , \quad e_{yy} = -\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma , \quad e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = e_{xy} = 0 .$$

Dikte onveranderd.

8.2. i) Goede verdeling als: $\alpha(z) = \alpha = \text{constant}$.

$t_{yy} = \alpha x$, overige $t_{ij} = 0$.

ii) $N_x = N_{xy} = 0$, $N_y = x \int_{-h}^h \alpha(z) dz$.

iii) i) \equiv ii) als $\alpha(z) = \alpha$.

8.3. iii) $U(x,y) = \beta y^3 + \beta x^2 y$; $t_{xx} = 6\beta y$, $t_{yy} = 2\beta y$, $t_{xy} = -2\beta x$.

iv) $e_{xx} = \frac{2(3-\nu)\beta}{E} y$, $e_{yy} = \frac{2(1-3\nu)\beta}{E} y$, $e_{xy} = -\frac{2(1+\nu)\beta}{E} x$.

v) $u(x,y) = \frac{2(3-\nu)\beta}{E} xy$, $v(x,y) = \frac{\beta}{E} [(1-3\nu)y^2 - (5+\nu)x^2]$.

8.4. i) $y=0$: $t_{yy} = -\frac{3Pl}{4a^3 h} x$, $t_{xy} = -\frac{3P}{8a^3 h} (x^2 - a^2)$,

$y=l$: $t_{yy} = 0$, $t_{xy} = -\frac{3P}{8a^3 h} (x^2 - a^2)$.

ii) $U(x,y) = \frac{P}{4a^3} (y-l)(x^2 - 3a^2)x$.

iii) $t_{xx} = 0$, $t_{yy} = -\frac{3P}{4a^3 h} (l-y)x$, $t_{xy} = -\frac{3P}{8a^3 h} (x^2 - a^2)$.

iv) $e_{xx} = \frac{3\nu P}{4Ea^3 h} (l-y)x$, $e_{yy} = -\frac{3P}{4Ea^3 h} (l-y)x$,

$e_{xy} = -\frac{3(1+\nu)P}{8Ea^3 h} (x^2 - a^2)$.

8.5. ii) $y = \pm l$: $t_{yy} = \sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, $t_{xy} = 0$.

$x = \pm a$: $t_{xx} = t_{xy} = 0$.

iii) $t_{xx} (x = \pm a) \neq 0$.

$f(\pm l) = -\frac{a^2 \sigma}{\pi^2}$, $f'(l) = 0$.

iv) $f(y) = A \cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right) + B \frac{y}{l} \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)$.

v) $A = -\frac{a^2 \sigma}{\pi^2} \frac{(\sinh \beta + \beta \cosh \beta)}{(\beta + \sinh \beta \cosh \beta)}$, $B = \frac{a^2 \sigma}{\pi^2} \frac{\beta \sinh \beta}{(\beta + \sinh \beta \cosh \beta)}$,

$\beta = \frac{\pi l}{a}$.

$$\text{vi)} \quad f(y) = -\frac{2a^2\sigma}{\pi^2} e^{-\beta} \left\{ (\beta + 1) \cosh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) - \frac{\beta y}{\ell} \sinh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) \right\} (1 + O(e^{-\beta})) .$$

$$\text{vii)} \quad t_{xx} = -2e^{-\beta} \left[(\beta - 1) \cosh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) - \frac{\beta y}{\ell} \sinh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) \right] \sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) ,$$

$$t_{xy} = 2e^{-\beta} \left[\beta \sinh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) - \frac{\beta y}{\ell} \cosh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) \right] \sigma \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) ,$$

$$t_{yy} = 2e^{-\beta} \left[(\beta + 1) \cosh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) - \frac{\beta y}{\ell} \sinh\left(\frac{\beta y}{\ell}\right) \right] \sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) .$$

$$8.6. \text{ i)} \quad \underline{y=0} : t_x^* = \frac{\sigma}{a} x; \quad t_y^* = 0 ,$$

$$\underline{y=a} : t_x^* = -\frac{\sigma}{a} x, \quad t_y^* = \sigma ,$$

$$\underline{x=\pm a} : t_x^* = \pm \frac{\sigma}{a} y; \quad t_y^* = -\sigma .$$

$$A_u(p) = \frac{2h\sigma}{a} \left\{ \int_{-a}^a [x\{u(x,0) - u(x,a)\} + av(x,a)] dx + \int_0^a [y\{u(a,y) - u(-a,y)\} + a\{v(a,y) + v(-a,y)\}] dy \right\} .$$

$$\text{ii)} \quad c_1 = 2c_2 = \frac{(1 + \nu)\sigma}{aE} .$$

$$U(\underline{S}) = -\frac{8(1 + \nu)ha^2\sigma^2}{3E} .$$

$$\text{iii)} \quad d_1 = \frac{\sigma}{2a}; \quad d_2 = -\frac{\sigma}{6a}; \quad U^*(\underline{S}) = \frac{8(1 + \nu)ha^2\sigma^2}{3E} .$$

$$8.7. \text{ i)} \quad x=0 : u_x = u_y = 0 . \quad (S_u) ,$$

$$x=a : t_{xx} = t_{xy} = 0, \quad t_y^* = 0, \quad (S_p) ,$$

$$y=\pm b : t_{xy} = 0, \quad t_{yy} = \frac{\sigma}{a} x; \quad t_x^* = 0, \quad t_y^* = \pm \frac{\sigma}{a} x, \quad (S_p) .$$

$$\text{ii)} \quad U(x,y) = \frac{\sigma}{6a} x^3 \Rightarrow t_{xx} = t_{xy} = 0, \quad t_{yy} = \frac{\sigma}{a} x ;$$

$$e_{xx} = -\frac{\nu\sigma}{aE} x, \quad e_{yy} = \frac{\sigma}{aE} x, \quad e_{xy} = 0 .$$

$$\underline{u}_x = -\frac{\sigma}{2aE} (\nu x^2 + y^2); \quad \underline{u}_y = \frac{\sigma}{aE} xy .$$

Niet exact: voldoet niet aan $\underline{u}_x(0,y) = 0$.

$$\text{iii)} \quad c_2 = -\frac{6}{a} c_1 = \frac{32\sigma a}{3(11a^2 + 4b^2)E} ,$$

$$U(\bar{S}) = -\frac{64ha^3 b\sigma^2}{9(11a^2 + 4b^2)E} .$$

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad \underline{t}_{xx} &= 0 ; \quad \bar{t}_{xx} = \left(\frac{x}{b} - 1\right)\frac{\sigma}{6} , \\ \underline{t}_{yy} &= \frac{x}{2b}\sigma ; \quad \bar{t}_{yy} = \left(\frac{x}{2b} - \frac{1}{18}\right)\sigma , \\ \underline{t}_{xy} &= 0 ; \quad \bar{t}_{xy} = \frac{y}{6b}\sigma . \\ \text{Maximale verschil: } &\frac{1}{6}\sigma . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{8.8. i)} \quad x = 0; y = 0 : \quad u = v = 0 , \quad (S_u) , \\ x = a : \quad t_{xx} = 0, \quad t_{xy} = \frac{\tau}{a}y; \quad t_x^* = 0, \quad t_y^* = \frac{\tau}{a}y , \quad (S_p) , \\ y = a : \quad t_{xy} = \frac{\tau}{a}x, \quad t_{yy} = 0; \quad t_x^* = \frac{\tau}{a}x, \quad t_y^* = 0 , \quad (S_p) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad A_1 = \tau, \quad A_2 = A_3 = \frac{\tau}{2} , \quad A_4 = A_5 = -\frac{\tau}{2a} . \\ U^*(\underline{S}) = 0,944 \frac{h\tau^2 a^2}{E} . \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad c = \frac{16}{33} \frac{\tau}{aE} ; \quad U(\underline{S}) = -0,323 \frac{h\tau a^2}{E} .$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad \underline{t}_{xx} &= \tau\left(1 - \frac{x}{a}\right); \quad \bar{t}_{xx} = \frac{2}{11}\left(\frac{x}{a} + 3\frac{y}{a}\right)\tau , \\ \underline{t}_{yy} &= \tau\left(1 - \frac{y}{a}\right); \quad \bar{t}_{yy} = \frac{2}{11}\left(3\frac{x}{a} + \frac{y}{a}\right)\tau , \\ \underline{t}_{xy} &= \tau\left(-1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{a}\right); \quad \bar{t}_{xy} = \frac{2}{11}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a}\right)\tau . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{8.9. i)} \quad U(x,y) &= +\frac{a^2}{\pi^2}\sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) . \\ U^*(\underline{S}) &= \frac{4h\sigma^2 a^2}{E} . \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad c_1 = \frac{20\sigma}{13\pi^2 E} , \quad c_2 = -\frac{60\sigma}{13\pi^2 a^2 E} ; \quad U^*(\bar{S}) = -2,274 \frac{h\sigma^2 a^2}{E} .$$

$$\text{iii)} \quad \bar{t}_{xx} = \bar{t}_{yy} = -\sigma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right); \quad \bar{t}_{xy} = -\sigma \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right).$$

$$\bar{t}_{xx} = 0,175\sigma\left(\frac{4}{3} - \frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{a^2}\right), \quad \bar{t}_{yy} = 0,175\sigma\left(\frac{4}{3} - 3\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}\right),$$

$$\bar{t}_{xy} = 0,701\sigma \frac{xy}{a^2}.$$

$$8.10. \text{ a) ii)} \quad t_{rr} = t_{\theta\theta} = \sigma, \quad \text{overige } t_{ij} = 0.$$

$$\text{iii)} \quad u_r = \frac{(1-\nu)\sigma}{E} r, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = -\frac{2\nu\sigma}{E} z.$$

$$(\text{dikte})_{na} = \left(1 - \frac{2\nu\sigma}{E}\right) (\text{dikte})_{voor}.$$

$$\text{b) i)} \quad t_{rr} = \frac{\sigma R^2}{(R^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad t_{\theta\theta} = \frac{\sigma R^2}{(R^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad t_{r\theta} = 0.$$

$$\text{ii)} \quad 2.$$

$$8.11. \text{ i)} \quad U(r, \theta) = A_1 \log r + C_1 r^2 + [A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2] \cos 2\theta.$$

$$\text{ii)} \quad A_1 = C_2 = D_2 = 0.$$

$$C_1 = \frac{\sigma}{4}, \quad A_2 = -\frac{\sigma}{4}, \quad B_2 = \frac{\sigma}{12R^2}.$$

$$\text{iii)} \quad t_{rr} = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad t_{r\theta} = \frac{\sigma}{2} \left(-1 + \frac{r^2}{R^2}\right) \sin 2\theta,$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2} \left\{1 - \left(1 + \frac{2r^2}{R^2}\right) \cos 2\theta\right\};$$

$$e_{rr} = \frac{\sigma}{2E} \left[1 - \nu + \left(1 + \nu + \frac{2\nu r^2}{R^2}\right) \cos 2\theta\right],$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2E} \left[1 - \nu - \left(1 - \nu + \frac{2r^2}{R^2}\right) \cos 2\theta\right],$$

$$e_{r\theta} = \frac{(1+\nu)\sigma}{2E} \left[-1 + \frac{r^2}{R^2} \sin 2\theta\right].$$

$$\text{iv)} \quad \frac{2\sigma R}{E} \left(1 + \frac{\nu}{3}\right) .$$

$$8.12. \text{ a) i)} \quad \rho f_r = \rho \omega^2 r, \quad \rho f_\theta = 0 .$$

$$\text{ii)} \quad t_{rr} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 (R^2 - r^2), \quad t_{\theta\theta} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 R^2 - \frac{(1 + 3\nu)}{8} \rho \omega^2 r^2 .$$

$$\text{iii)} \quad \text{op } r = 0 : t_{rr}(0) = t_{\theta\theta}(0) = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 R^2 .$$

$$\text{b) i)} \quad t_{rr} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 \left(R^2 + a^2 - \frac{a^2 R^2}{r^2} - r^2 \right),$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 \left\{ R^2 + a^2 + \frac{a^2 R^2}{r^2} - \frac{(1 + 3\nu)}{(3 + \nu)} r^2 \right\} .$$

ii) 2 .

$$8.13. \text{ i)} \quad t_{rr} = t_{\theta\theta} = 0, \quad t_{r\theta} = -\frac{M_z}{2\pi h} \cdot \frac{1}{r^2} .$$

$$\text{ii)} \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{(1 + \nu) M_z}{2\pi h R^2 E} \left(\frac{R^2}{r} - r \right) .$$

$$\text{iii)} \quad \frac{(1 + \nu)(R^2 - a^2)}{2\pi h a^2 R^2 E} M_z .$$

$$\text{iv)} \quad |(t_{r\theta})_{\max}| = \frac{M_z}{2\pi h a^2}, \quad \text{voor } r = a .$$

$$8.14. \text{ i)} \quad t_{rr} = B \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad t_{\theta\theta} = B \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right),$$

met

$$B = -\frac{\alpha T E R_1^2}{[(1 - \nu) R_1^2 + (1 + \nu) R_2^2]} .$$

$$ii) \quad \frac{R_2^2 + \nu(R_2^2 - R_1^2)}{[(1 - \nu)R_1^2 + (1 + \nu)R_2^2]} \alpha \tau R_2 \quad .$$

$$9.15. \quad i) \quad -\alpha ET / (1 - \nu) \quad .$$

$$ii) \quad t_{rr} = -\frac{\alpha ET}{(1 - \nu)} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \quad t_{\theta\theta} = -\frac{\alpha ET}{(1 - \nu)} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right), \quad t_{r\theta} = 0 \quad .$$

iii) 2.

$$8.16. \quad i) \quad c = \frac{(1 - \nu)\sigma}{E} \left(1 + \frac{1}{3}\epsilon + O(\epsilon^2)\right); \quad U(\underline{S}) = -\frac{2\pi(1 - \nu)\sigma^2 h_0 R^2}{E} \left(1 + \frac{4}{3}\epsilon + O(\epsilon^2)\right)$$

$$ii) \quad U^*(\underline{S}) = \frac{2\pi(1 - \nu)\sigma^2 h_0 R^2}{E} \left(1 + \frac{4}{3}\epsilon + O(\epsilon^2)\right) \quad .$$

$$iii) \quad \bar{t}_{rr} = \bar{t}_{\theta\theta} = \sigma \left(1 - \frac{1}{3}\epsilon\right), \quad \underline{t}_{rr} = \underline{t}_{\theta\theta} = \sigma \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{R}\right)\epsilon\right] \quad .$$

$$8.17. \quad i) \quad \bar{S} : u = -\frac{u^*}{\ln(R/a)} \ln(r/R) \cos \theta \quad ,$$

$$v = \frac{u^*}{\ln(R/a)} \ln(r/R) \sin \theta \quad ,$$

$$U(\bar{S}) = \frac{3\pi h E u^{*2}}{2 \ln(R/a)} \quad .$$

$$ii) \quad A_u^{(u)}(\underline{S}) = 2\pi h u^* (A - B); \quad A = \frac{15}{16}\lambda, \quad B = -\frac{3}{16}\lambda, \quad (\lambda = \frac{E u^*}{\ln(R/a)}) \quad .$$

$$U^*(\underline{S}) = -\frac{9}{8} \frac{\pi h E u^{*2}}{\ln(R/a)} \quad .$$

$$iii) \quad \frac{9\pi h E}{8 \ln(R/a)} \leq c \leq \frac{3\pi h E}{2 \ln(R/a)} \quad .$$

$$8.18. \quad i) \quad B = -\frac{1}{a^2} A; \quad A = -\frac{(1 + \nu)\tau R^2}{E_0} \left[1 + \frac{2a}{(R + a)}\epsilon + O(\epsilon^2)\right] \quad ,$$

$$U(\bar{S}) = -\frac{2\pi h (1 + \nu)\tau^2}{E_0} (R^2 - a^2) \frac{R^2}{a^2} \left[1 + \frac{2a}{(R + a)}\epsilon + O(\epsilon^2)\right] \quad .$$

ii) $U^*(\underline{S}) = -U(\bar{S})$ (volgens i) .

iii) $\bar{S} : \bar{t}_{rr} = \bar{t}_{\theta\theta} = 0$, $\bar{t}_{r\theta} = \frac{R^2 \tau}{r^2} [1 - (\frac{2a}{R+a} - \frac{r}{R})\epsilon + O(\epsilon^2)]$,

$\underline{S} : t_{rr} = t_{\theta\theta} = 0$, $t_{r\theta} = \frac{R^2 \tau}{r^2}$.

iv) $\hat{E} = E_0 (1 + \frac{2a}{(R+a)} \epsilon + O(\epsilon^2))$.

8.19. i) $\underline{r} = a$ en $\underline{r} = b : t_{rr} = t_{r\theta} = 0$,

$\underline{\theta} = 0 : u_{\theta} = -\alpha r$, $t_{r\theta} = 0$.

$\underline{\theta} = \pi : u_{\alpha} = \alpha r$, $t_{r\theta} = 0$.

ii) $c_1 = \frac{\alpha}{\pi}$, $c_2 = -\alpha$; $A = -\frac{\alpha(b-a)}{\pi \ln(b/a)}$,

$$U(\bar{S}) = \frac{hE\alpha^2(b-a)}{\pi(1-\nu^2)\ln(b/a)} \{ (b+a)\ln(b/a) - 2(b-a) \} =$$

$$= \frac{hE\alpha^2 t^3}{6\pi(1-\nu^2)a} (1 + O(t/a)) .$$

iii) $A_u^{(u)}(\underline{S}) = 4h\alpha C \left[\frac{3}{4}(b^4 - a^4) - \frac{2}{3}(a+b)(b^3 - a^3) + \frac{1}{2}ab(b^2 - a^2) \right] =$

$$= -\frac{2}{3} h\alpha t^3 (1 + O(t/a)) C .$$

iv) $W^{(t)}(\underline{S}) = \frac{2\pi h a^3 t^3}{3E} C^2$; $C = \frac{\alpha E}{2\pi a^2}$,

$U^*(\underline{S}) = -\frac{Eht^3}{6\pi a} \alpha^2$.

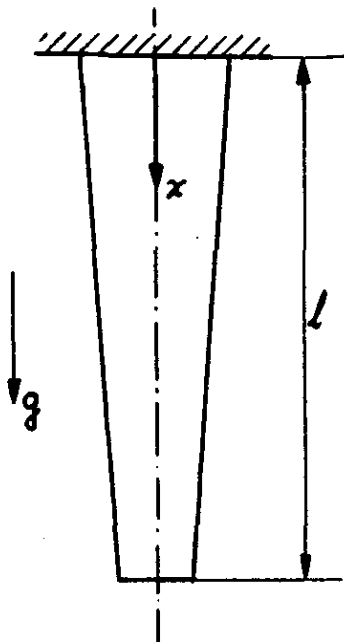
v) $\bar{t}_{rr} = \frac{\nu}{(1-\nu^2)} \frac{\alpha E}{\pi a} \rho$; $\bar{t}_{\theta\theta} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{\alpha E}{\pi a} \cdot \rho$; $\bar{t}_{r\theta} = 0$,

$t_{rr} = \frac{\alpha E}{2\pi a^2} \rho(\rho - t)$; $t_{\theta\theta} = \frac{\alpha E}{\pi a} (\rho - \frac{1}{2}t)$; $t_{r\theta} = 0$.

(alles tot op $O(t/a)$).

Tentamen 17-6-1978

*)



Een elastische taps staaf is bij $x = 0$ verticaal opgehangen en wordt belast door zijn eigen gewicht. De lengte in onbelaste toestand is l , de elasticiteitsmodulus E , de massa per volume-eenheid ρ en de versnelling van de zwaartekracht g . De tapsheid is zo gering, dat een lijnspanningstoestand verondersteld mag worden. Voor het oppervlak $A(x)$ van een dwarsdoorsnede ter plaatse x geldt

$$A(x) = A(0) \left(1 - \frac{x}{2l}\right).$$

De axiale verplaatsing is $u(x)$. De rekken zijn zo gering dat de lineaire elasticiteitstheorie gebruikt mag worden.

- i) Formuleer de potentiële energie functionaal en definieer het kinematisch toelaatbaar stelsel.
- ii) Leidt hiermee de in de axiale spanning t_{xx} uitgedrukte lokale evenwichtsrelatie af.
- iii) Hoe luidt de in $u(x)$ uitgedrukte Euler-Lagrange-vergelijking en de natuurlijke randvoorwaarde.
- iv) Benader $u(x)$ met de functie

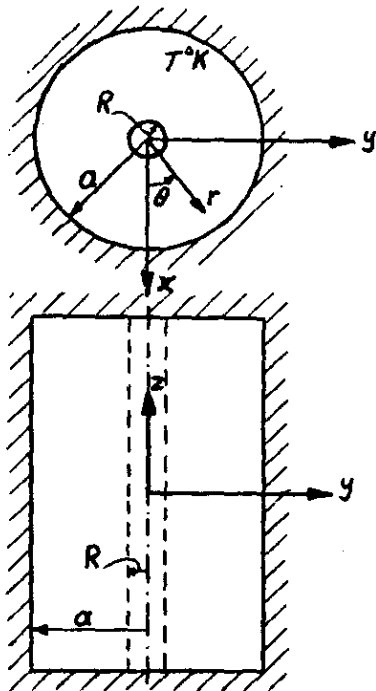
$$u(x) = bx$$

en bepaal met de methode van Ritz de waarde van b .

- v) Geef een uitdrukking voor de bij deze benadering behorende spanning t_{xx} welke consistent is met het variatieprincipe.
- vi) Bepaal met de stelling van Castigliano een zo eenvoudig mogelijke integraaluitdrukking voor de verplaatsing $u(l)$.

*) Behoort bij variatieprincipes.

2.



Een dikwandige buis, binnenstraal R , buitenstraal a , van een homogeen, isotroop, lineair thermo-elastisch materiaal zit alzijdig opgesloten in een onvervormbaar gat. De buis wordt $T^{\circ}K$ in temperatuur verhoogd.

De buitenafmetingen van de buis zijn zo groot ($a \gg R$), dat $O(R/a)$ -termen verwaarloosd mogen worden. Dit houdt in dat op $r = a$ een uniforme normaalspanningstoestand heerst welke onafhankelijk van het gat is.

i) Heerst in de buis een:

vlakke vervormingstoestand,
 vlakspanningstoestand, of een
 gegeneraliseerde vlakspanningstoestand?

Geef de definitie van de door U gekozen toestand.

ii) Bepaal de spanningen in de buis.

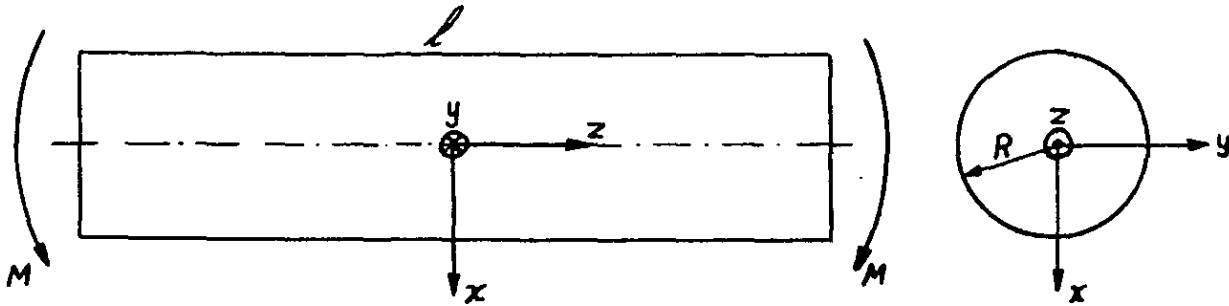
iii) Hoe groot is de binnenstraal van de buis na de deformatie?

iv) Bepaal de spanningsconcentratiefactor; dit is de waarde van het quotiënt

$$\frac{[\tau_{\theta\theta}(r = R)]_{\text{met gat}}}{[\tau_{\theta\theta}(r = R)]_{\text{zonder gat}}},$$

voor $R \rightarrow 0$.

3.



Een cylinder, lengte l , met cirkelvormige doorsnede, straal R , van een homogeen, isotroop, lineair elastisch-ideaal plastisch materiaal wordt in de einddoorsneden belast door buigende momenten M . De cylindermantel is onbelast. De spanningen in de einddoorsneden zijn "goed verdeeld" (we beschouwen alleen het gerelaxeerde probleem).

i) Druk het moment M uit in de spanningen in een loodrechte doorsnede.

Beschouw voor de vragen ii) t/m v) alleen elastische deformaties ($M < M^*$).

ii) Bepaal de spanningsverdeling.

iii) Waar treedt de maximale spanning op?

iv) Schrijf voor dit probleem de vloeivoorwaarde van von Mises uit.

Waar treedt voor het eerst vloeien op?

v) Bepaal de waarde M^* van M waarvoor vloeien begint.

Beschouw voor de vragen vi) t/m x) elasto-plastische deformaties ($M^* < M < M^{**}$).

vi) Verdeel de doorsnede in een plastisch en een elastisch gebied. Waar zal het plastisch gebied liggen?

vii) Bepaal de spanningen in het elastische en in het plastische gebied.

viii) Uit welke conditie kunt U de grens van het plastische gebied bepalen?

Schrijf deze voorwaarde uit (zonder de integralen uit te werken!)

ix) Bepaal het bezwijkmoment M^{**} .

x) We ontlasten de balk. Verklaar waarom er na het ontlasten nog residu-spanningen in de balk kunnen optreden en bepaal deze residu-spanningen.

Schets het verloop van deze spanningen over de doorsnede.

BASISVERGELIJKINGEN ELASTO- & PLASTOSTATICA

Verband deformaties en verplaatsingen:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Evenwichtsvergelijkingen:

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 .$$

Constitutieve vergelijkingen (lineair (thermo)elastisch)

$$\frac{1}{2G} t_{ij} = e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk} \left(- \frac{1+\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \alpha T \right) ,$$

met

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} .$$

Compatibiliteitsvergelijkingen:

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} , \quad (\text{cyclisch}) ,$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) , \quad (\text{cyclisch}) .$$

Rotatie-symmetrische problemen: uitwerking in cylindercoördinaten:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} , \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} , \quad e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) .$$

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = 0 .$$

en (compatibiliteit)

$$\frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{e_{rr} - e_{\theta\theta}}{r} = 0 ,$$

$$2 \frac{\partial^2 e_{rz}}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial r^2} .$$

Vloeivoorwaarde van von Mises:

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{xz}^2) = 6k^2 .$$

ANTWOORDEN TENTAMEN 17 - 6 - 1978

1. iv) $b = \frac{4\rho g l}{9E}$, v) $t_{xx} = \frac{4}{9} \rho g l$.

vi) $u(l) = \frac{\rho g}{2E} \int_0^l \frac{(3l^2 - 4xl + 4l^2)}{(2l - x)} dx$ $(= \frac{\rho g l^2}{2E} (\frac{3}{2} - \log 2))$.

2. ii) $t_{rr} = - \frac{\alpha ET}{(1-2\nu)} (1 - \frac{R^2}{r^2})$, $t_{\theta\theta} = - \frac{\alpha ET}{(1-2\nu)} (1 + \frac{R^2}{r^2})$, $t_{zz} = - \frac{\alpha ET}{(1-2\nu)}$,

$t_{r\theta} = t_{rz} = t_{\theta z} = 0$.

iii) $[1 - \frac{(1+\nu)\alpha T}{(1-2\nu)}]R$, iv) 2 .

3. ii) $t_{zz} = - \frac{4M}{\pi R^4} x$. v) $M^* = \frac{\pi}{4} kR^3 \sqrt{3}$.

ix) $M^{**} = \frac{4}{3} kR^3 \sqrt{3}$.

x) $t_{zz}^{(res)} = k\sqrt{3} + \frac{4M}{\pi R^4} x$, $-R \leq x \leq -a$,

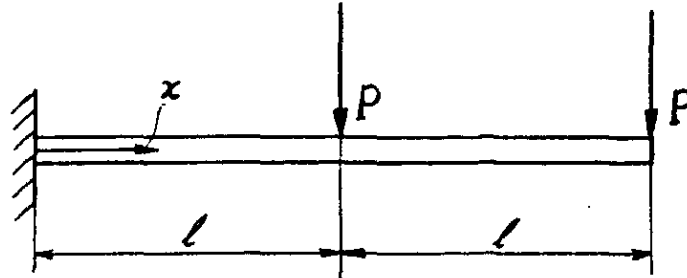
$= - \frac{k\sqrt{3}}{a} x + \frac{4M}{\pi R^4} x$, $-a \leq x \leq a$,

$= - k\sqrt{3} + \frac{4M}{\pi R^4} x$, $a \leq x \leq R$,

met: $x = \pm a$: grens tussen elastische en plastische gebied.

Tentamen 28-10-1978.

1. *)



Een ingeklemde balk met constante buigstijfheid EI wordt belast door twee even grote krachten P (zie figuur). Onder invloed van deze belasting vervormt de balk in het vlak van de tekening.

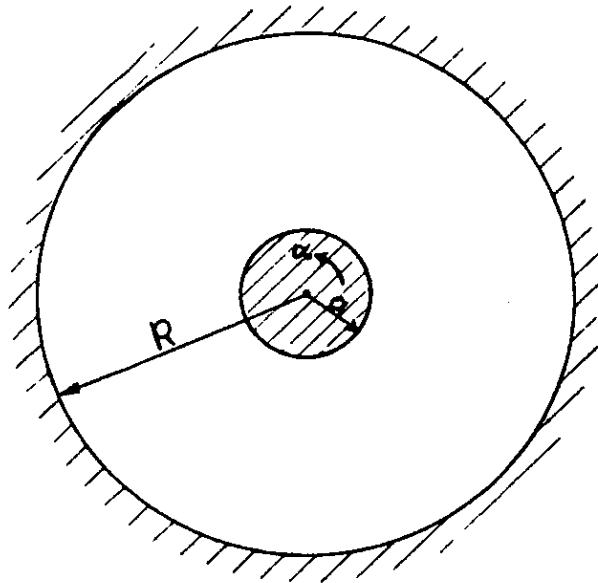
- i) Bereken de doorbuiging van het rechteruiteinde van de balk met de methode Ritz bij een veronderstelde doorbuigingsvorm

$$w(x) = a(1 - \cos \frac{\pi x}{4l}) .$$

- ii) Bereken deze doorbuiging ook met de stelling van Castigliano.
iii) Geef in een grafiek het bij de aanpakken i) en ii) behorende verloop van het buigend moment en interpreteer de verschillen.

*) Behoort bij variatiesprincipes.

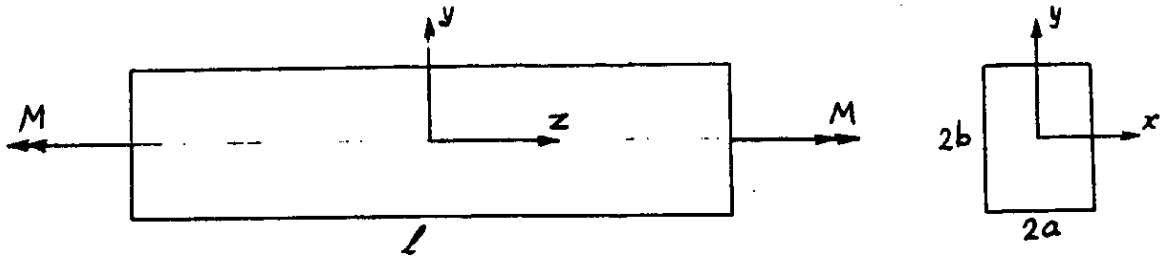
2.



Een dunne, cirkelvormige plaat met een gat, dikte h , buitenstraal R , binnenstraal a , is aan de buitenrand ingeklemd. De binnenrand is vast verbonden aan een starre schijf met straal a . De schijf wordt in het vlak van de plaat verdraaid over een gegeven hoek α om zijn middelpunt. De plaat is van een lineair elastisch materiaal en het probleem mag worden beschouwd als een generaliseerde vlakspanningstoestand.

- i) Welke zijn de onbekenden bij dit probleem? Van welke coördinaat zullen deze onbekenden alleen afhangen? Geef de benodigde vergelijkingen. Formuleer de randvoorwaarden.
- ii) Bepaal de verplaatsingen in het vlak van de plaat. Laat zien dat deze verplaatsingen zuiver tangentieel zijn.
- iii) Bepaal de spanningsverdeling in de plaat.
- iv) Bereken het moment dat op de schijf moet worden uitgeoefend om deze over een hoek α te verdraaien.
- v) Waar zal voor het eerst vloeien optreden? Bereken het moment, met de bijbehorende verdraaiing α , bij het begin van vloeien, onder de vloeivoorwaarde van von Mises.

3.



Een lineair elastische cylinder, lengte l , met rechthoekige doorsnede, $2a \times 2b$, wordt in de einddoorsneden belast door wringende momenten M . De cylindermantel is onbelast. (We beschouwen alleen het gerelaxeerde probleem: de spanningen in de einddoorsneden zijn dus "goed verdeeld"). Ga uit van de volgende veronderstelling voor het spanningsveld:

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = t_{zz} = 0 .$$

- i) Bewijs, m.b.v. de evenwichtsvergelijkingen, dat t_{xz} en t_{yz} onafhankelijk van z zijn.
- ii) Druk t_{xz} en t_{yz} uit in een spanningsfunctie $F(x,y)$, zodanig dat identiek aan de evenwichtsvergelijkingen is voldaan.
- iii) Formuleer de randvoorwaarden op de mantel in t_{xz} en t_{yz} en in $F(x,y)$.
- iv) Stel:

$$F(x,y) = C(c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2 + x^2 y^2) ,$$

en bepaal c_1 , c_2 en c_3 uit de randvoorwaarden op de mantel (C is nog willekeurig).

Bepaal de bijbehorende spanningen.

- v) Geef het verband tussen C en M .
- vi) Waarom vormt het hierboven gevonden stelsel niet de echte oplossing? Bewijs Uw antwoord.

BASISVERGELIJKINGEN

Verband deformaties en verplaatsingen:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Evenwichtsvergelijkingen:

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 .$$

Constitutieve vergelijkingen (wet van Hooke):

$$\frac{1}{2G} t_{ij} = e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk}, \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)} .$$

Compatibiliteitsvergelijkingen:

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}, \text{ (cyclisch) ,}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \text{ (cyclisch) .}$$

Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand: uitwerking in poolcoördinaten

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2t_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 ,$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E}(t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}), \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}) ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{(1+\nu)}{E} t_{r\theta} ,$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) ,$$

$$(u = u_r, \quad v = u_\theta) .$$

Vloeivoorwaarde van von Mises:

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{xz}^2) = 6k^2 .$$

ANTWOORDEN, TENTAMEN 28 - 10 - 1978

1. i) $w(2l) = \frac{128(4 - \sqrt{2})}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} \left(\approx 3,37 \frac{Pl^3}{EI} \right) .$

ii) $w(2l) = \frac{7}{2} \frac{Pl^3}{EI} .$

2. ii) $u_r = 0 , \quad u_\theta = - \frac{\alpha a^2}{(R^2 - a^2)} \left(r - \frac{R^2}{r} \right) .$

iii) $t_{r\theta} = - \frac{\alpha a^2 E}{(1 + \nu)(R^2 - a^2)} \frac{R^2}{r^2} .$

iv) $M = \frac{2\pi a^2 h R^2 E}{(1 + \nu)(R^2 - a^2)} \alpha .$

v) $M^* = 2\pi a^2 h k .$

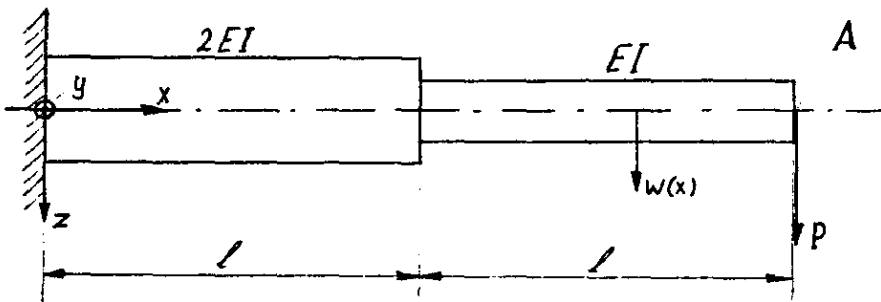
3. iv) $F(x,y) = C(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) ,$

$$t_{xz} = -2Cy(a^2 - x^2) , \quad t_{yz} = 2Cx(b^2 - y^2) .$$

v) $C = \frac{9M}{32a^3 b^3} .$

Tentamen 20-1-1979.

1. (Variatieprincipes).



Gegeven de in de figuur getekende, bij $x = 0$ ingeklemde balk met verspringende dikte. Onder invloed van de kracht P ter plaatse $x = 2l$ vervormt de balk in het vlak van tekening. De relevante buigstijfheden zijn EI en $2EI$ (zie figuur).

- i) Bereken de zakking $w(2l)$ van punt A met de stelling van Castigliano.
- ii) Geef ook de benaderde zakking van punt A met het principe van de minimale potentiële energie bij een aangenomen zakkingsfunctie:

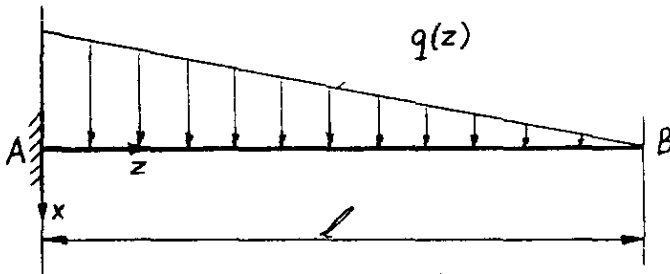
$$w = a + bx + cx^2,$$

welke geldt voor het gehele gebied $[0, 2l]$.

- iii) Teken in één figuur de werkelijke momentenlijn en de bij de in ii) verkregen benadering horende momentenlijn.
- iv) Beredeneer de betrekkelijk grote discrepantie tussen de bij i) en ii) gevonden resultaten

2. Beschouw een rechte, slanke balk (lengtecoördinaat z) met een normale belasting per lengte-eenheid: $q(z)$ in x -richting. De buigstijfheid van de balk is EI . De doorbuiging geven we aan met $u(z)$

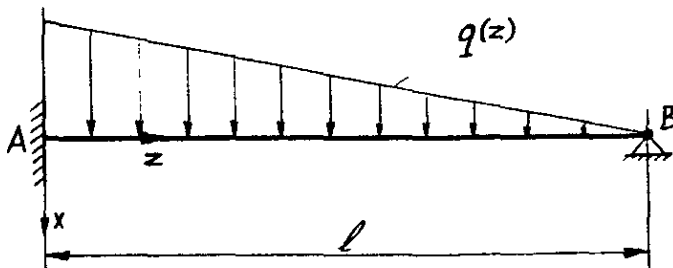
- i) Leid de globale evenwichtsvergelijkingen af.
- ii) Geef de in de technische balkentheorie gebruikelijke constitutieve vergelijking voor het buigende moment.
- iii) Leidt uit i) en ii) de balkenvergelijking af.



Een balk AB, lengte l , is in A ($z = 0$) ingeklemd en in B ($z = l$) vrij. De belasting van de balk is:

$$q(z) = q\left(1 - \frac{z}{l}\right), \quad (q : \text{constant}) .$$

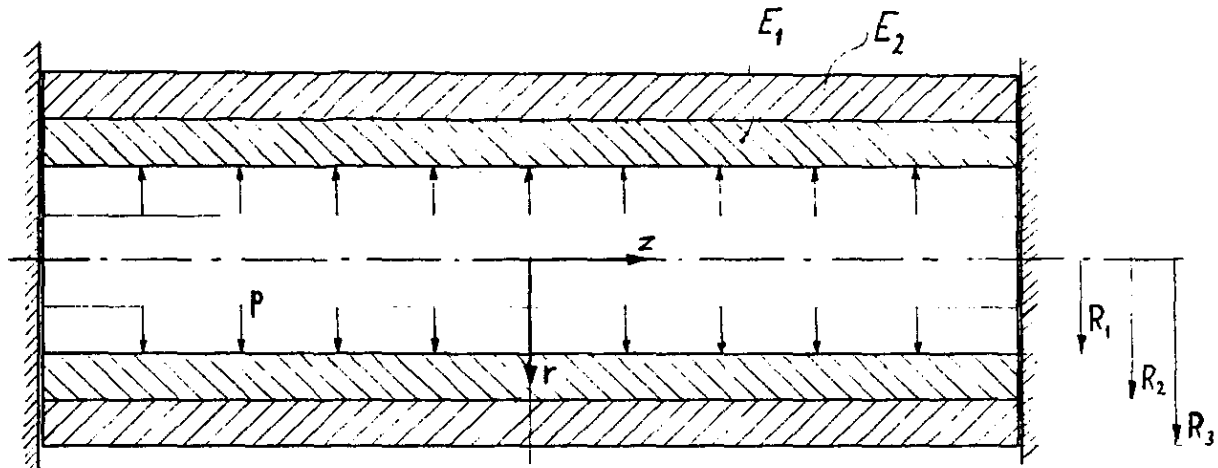
- iv) Bepaal de uitbuigingslijn van de balk.
- v) Bereken de zakking van B.
- vi) Bereken het maximale buigende moment in de balk en de plaats waar dit optreedt.



Beschouw dezelfde balk als hiervoor, maar nu ondersteund in B.

- vii) Bepaal de reactiekracht in B.

3.



Een dikwandige buis, waarvan in de einddoorsneden de axiale verplaatsingen zijn verhinderd, wordt belast door een constante inwendige druk p . De buis is opgebouwd uit twee cylinders met verschillende elasticiteitsmoduli:

$$R_1 \leq r < R_2 : E = E_1 ,$$

$$R_2 < r \leq R_3 : E = E_2 .$$

De dwarscontractiecoëfficiënt ν is overal gelijk.

Ga er van uit dat de spanningsverdeling in een homogene buis met binnenstraal a en buitenstraal b en met een inwendige druk p_i en een uitwendige druk p_u bekend is, en wel gegeven door:

$$t_{rr} = \frac{a^2 p_i - b^2 p_u}{(b^2 - a^2)} + \frac{a^2 b^2 (p_u - p_i)}{(b^2 - a^2)} \cdot \frac{1}{r^2} ,$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{a^2 p_i - b^2 p_u}{(b^2 - a^2)} - \frac{a^2 b^2 (p_u - p_i)}{(b^2 - a^2)} \cdot \frac{1}{r^2} ,$$

$$t_{zz} = \frac{2\nu(a^2 p_i - b^2 p_u)}{(b^2 - a^2)} , \quad t_{rz} = t_{r\theta} = t_{\theta z} = 0 .$$

i) Bepaal hiermee een spanningsverdeling voor de hier boven beschreven gelagerde buis, waarin nog één onbekende parameter voorkomt. Wat stelt deze parameter voor? Geef aan (zonder dit al in detail uit te werken) hoe U deze parameter kunt bepalen.

ii) Bepaal voor het geval dat het materiaal van de buis incompressibel is ($\nu = \frac{1}{2}$) en dat R_1 , R_2 en R_3 zijn gegeven door

$$R_1 = R, \quad R_2 = 2R, \quad R_3 = R\sqrt{7},$$

de spanningsverdeling in de buis.

iii) Formuleer de vloeivoorwaarde van von Mises voor dit probleem (met de numerieke waarden volgens ii)). Voor welke waarden van de verhouding

$$e := E_2/E_1$$

treedt het begin van vloeien niet op aan de binnenrand $r = R_1 = R$?
Waar begint het vloeien dan?

iv) Bepaal de waarde van p (p^*) waarvoor de buis begint te vloeien.
(Bedenk dat deze waarde afhankelijk is van e).

BASISVERGELIJKINGEN

Vlakke vervormingstoestand, rotatie-symmetrisch:

$$\frac{dt_{rr}}{dr} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad e_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r},$$

$$e_{rr} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}], \quad e_{\theta\theta} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}],$$

$$t_{zz} = \nu(t_{rr} + t_{\theta\theta}).$$

.....

Vloeivoorwaarde van von Mises:

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{xz}^2 + t_{yz}^2) = 6k^2.$$

ANTWOORDEN, TENTAMEN 20-1-1979.

1. i) $w(2l) = \frac{3Pl^3}{2EI}$. ii) $w(2l) = \frac{4Pl^3}{3EI}$.

2. iv) $u(z) = \frac{ql^4}{120EI} [10(\frac{z}{l})^2 - 10(\frac{z}{l})^3 + 5(\frac{z}{l})^4 - (\frac{z}{l})^5]$.

v) $\frac{ql^4}{30EI}$. vi) $\frac{1}{6} ql^2$. vii) $\frac{1}{10} ql$.

3. ii) $R \leq r < 2R$:

$$t_{rr} = \frac{p}{3(e+7)} \left(7 - 3e - \frac{28R^2}{r^2}\right) , \quad (e = E_2/E_1) ,$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{p}{3(e+7)} \left(7 - 3e + \frac{28R^2}{r^2}\right) ,$$

$$t_{zz} = \frac{(7-3e)}{3(e+7)} p , \quad t_{r\theta} = t_{\theta z} = t_{rz} = 0 ;$$

$2R < r \leq R\sqrt{7}$

$$t_{rr} = \frac{4ep}{3(e+7)} \left(1 - \frac{7R^2}{r^2}\right) ,$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{4ep}{3(e+7)} \left(1 + \frac{7R^2}{r^2}\right) ,$$

$$t_{zz} = \frac{4ep}{3(e+7)} , \quad t_{r\theta} = t_{\theta z} = t_{rz} = 0 .$$

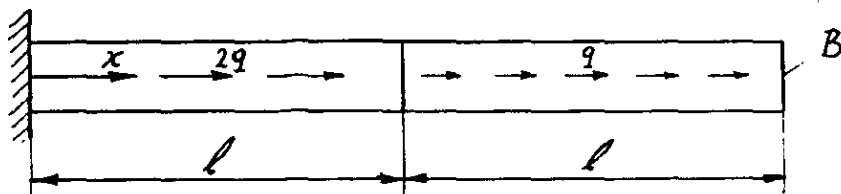
iii) iv) Vloeien op:

$$r = R_1 = R , \quad \text{als } \frac{E_2}{E_1} < 4 , \quad \text{voor } p = \frac{3(e+7)}{28} k ;$$

$$r = R_2 = 2R , \quad \text{als } \frac{E_2}{E_1} > 4 , \quad \text{voor } p = \frac{3(e+7)}{7e} k .$$

Tentamen 30-3-1979.

1. (Variatieprincipes).



Gegeven de in de figuur getekende, bij $x = 0$ ingeklemde homogene, cilindrische trekstaaf. De elasticiteitsmodulus is E en de oppervlakte van de dwarsdoorsnede A . Op de staaf werkt een verdeelde belasting met de grootte per lengteëenheid $2q$ voor $x \in (0, l)$ en q voor $x \in (l, 2l)$ (zie figuur). De axiale kracht in de staaf geven we aan met $N = N(x)$.

- i) Bereken de axiale verplaatsing $u(2l)$ van het punt B met de stelling van Castigliano.
- ii) Geef ook de benaderde verplaatsing van het punt B met het principe van de minimale potentiële energie en een aangenomen verplaatsing:

$$u = a + bx ,$$

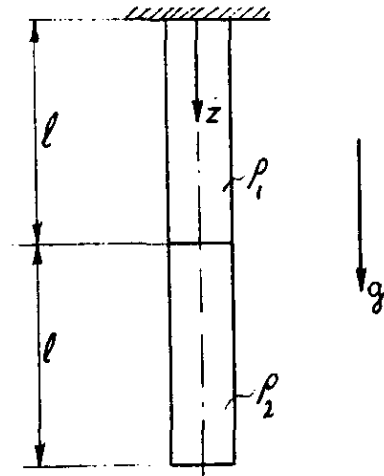
welke geldt voor het gehele gebied $[0, 2l]$.

- iii) Teken in een grafiek met de assen $N/q\ell$ en x/ℓ :
 - het werkelijke verloop $N/q\ell$.
 - de bij ii) horende benadering voor $N/q\ell$.
- iv) Beredeneer de discrepantie tussen beide resultaten.

2. Een rechte, slanke staaf, lengte 2ℓ , met constante doorsnede, oppervlak S , en met elasticiteitsmodulus E en dwarscontractiecoëfficiënt ν , is verticaal opgehangen in zijn bovenste punt. De massaverdeling in de staaf is niet homogeen, maar verdeeld volgens:

$$\rho = \rho_1, \text{ voor } 0 \leq z < \ell,$$

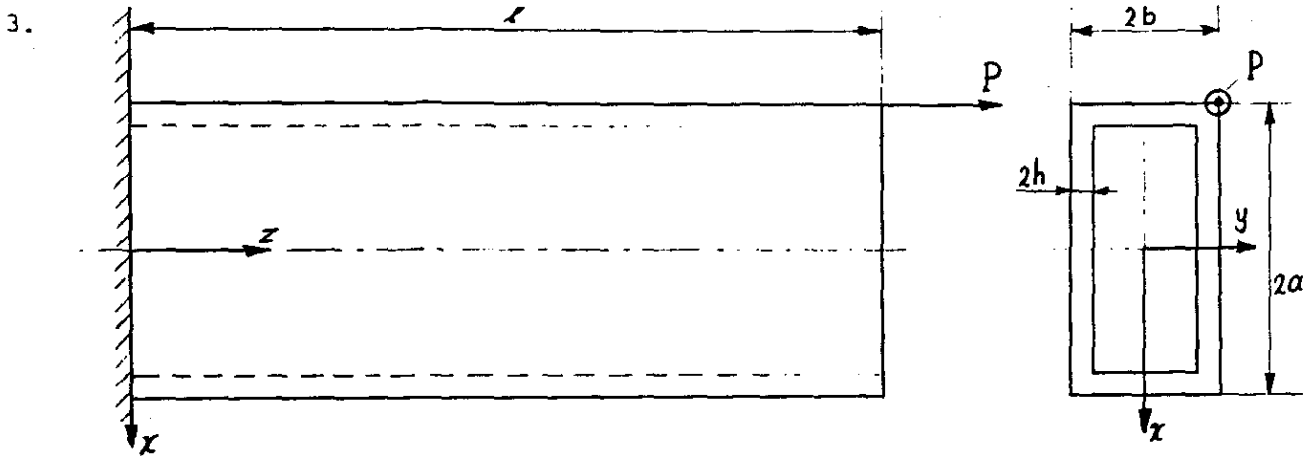
$$\rho = \rho_2, \text{ voor } \ell < z \leq 2\ell.$$



(z is de axiale coördinaat, zie figuur).

De staaf deformeert onder invloed van zijn eigen gewicht; de versnelling van de zwaartekracht is g . We beschouwen alleen het gerelaxeerde probleem.

- i) Welke spanningen, deformaties en verplaatsingen neemt U ongelijk aan nul? Geef de bijbehorende vergelijkingen. Formuleer de (gerelaxeerde) randvoorwaarden en aansluitcondities.
- ii) Bepaal de spanningsverdeling.
- iii) Bepaal de deformaties van de staaf. Zijn deze deformaties compatibel? Blijven loodrechte doorsneden bij deze deformatie vlak?
- iv) Bepaal de axiale verplaatsingen van de zwaartepunten van de doorsneden als functie van z ($w(z)$).
- v) Bepaal de totale verlenging van de staaf.
- vi) Bespreek het verschil tussen de gerelaxeerde oplossing en de exacte oplossing. Aan welke exacte vergelijkingen, randvoorwaarden en aansluitcondities zal de gerelaxeerde oplossing niet voldoen? In hoeverre werken de afwijkingen in de gerelaxeerde oplossing door en op grond waarvan? Waaraan moeten de afmetingen van de staaf dan voldoen?



Een holle cylinder met rechthoekige doorsnede, buitenafmetingen $2a \times 2b$, wanddikte h , lengte l , wordt in een hoekpunt van zijn einddoorsnede belast door een normaalkracht P (zie figuur). De begindoorsnede is ingeklemd. *)

- i) Formuleer het gerelaxeerde probleem. (Beantwoord alle volgende vragen voor dit gerelaxeerde probleem.)
- ii) Bepaal de spanningsverdeling.
- iii) Bereken de deformaties.
- iv) Geef een vergelijking, waaruit de meetkundige plaats van de neutrale lijn is te bepalen. Gaat de neutrale lijn door het zwaartepunt van de doorsnede? Teken, voor $a = 2b$, in een doorsnede de meetkundige plaats van de snijpunten van de neutrale lijn met deze doorsnede.
- v) Bepaal de hoek tussen de component in de doorsnede van de verplaatsing van het zwaartepunt van de einddoorsnede en de werklijn van het buigend moment in deze doorsnede. Wanneer is deze hoek gelijk aan $\pi/2$?
- vi) Op welke plaats(en) is de spanning maximaal en hoe groot is hij daar? Bepaal met de vloeivoorwaarde van von Mises de waarde P^* van P waarvoor de cylinder begint te vloeien.

*) Het doorsnede-oppervlak S en de traagheidsmomenten I_x en I_y zijn gegeven door ($h \ll a(b)$):

$$S \approx 4(a + b)h; \quad I_x \approx \frac{4}{3}hb^2(3a + b); \quad I_y = \frac{4}{3}ha^2(a + 3b).$$

Basisvergelijkingen

Verband deformaties en verplaatsingen:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Evenwichtsvergelijkingen:

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 .$$

Constitutieve vergelijkingen (wet van Hooke):

$$e_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[t_{ij} - \frac{\nu}{(1 + \nu)} \delta_{ij} t_{kk} \right] .$$

Compatibiliteitsvergelijkingen:

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} , \quad (\text{cyclisch})$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) , \quad (\text{cyclisch}) .$$

Vloeivoorwaarde van von Mises:

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{xz}^2) = 6k^2 .$$

ANTWOORDEN, TENTAMEN 30-3-1979.

1. i) $\frac{5q\ell^2}{2EA}$. ii) $\frac{5q\ell^2}{2EA}$.

2. ii) $0 \leq z \leq \ell$: $t_{zz} = -\rho_1 g(z - \ell) + \rho_2 g\ell$;

$\ell \leq z \leq 2\ell$: $t_{zz} = -\rho_2 g(z - 2\ell)$.

iii) $(e_{zz} = \frac{1}{E} t_{zz})$.

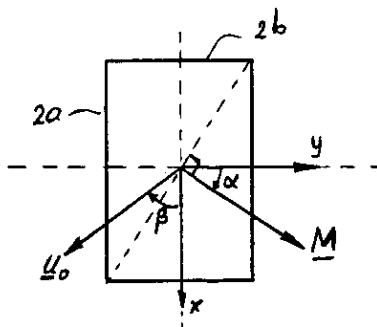
iv) $0 \leq z \leq \ell$: $w(z) = -\frac{\rho_1 g}{2E} z^2 + \frac{(\rho_1 + \rho_2) g\ell}{E} z$;

$\ell \leq z \leq 2\ell$: $w(z) = -\frac{\rho_2 g}{2E} z^2 + \frac{2\rho_2 g\ell}{E} z + \frac{(\rho_1 - \rho_2) g\ell^2}{2E}$.

v) $w(2\ell) = \frac{(\rho_1 + 3\rho_2) g\ell^2}{2E}$.

3. ii) $t_{zz} = \frac{P}{4(a+b)h} \left[1 + \frac{3(a+b)}{(3a+b)} \left(\frac{y}{b}\right) - \frac{3(a+b)}{(a+3b)} \left(\frac{x}{a}\right) \right]$.

iii) $e_{zz} = \frac{1}{E} t_{zz}$, $e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu}{E} t_{zz}$.



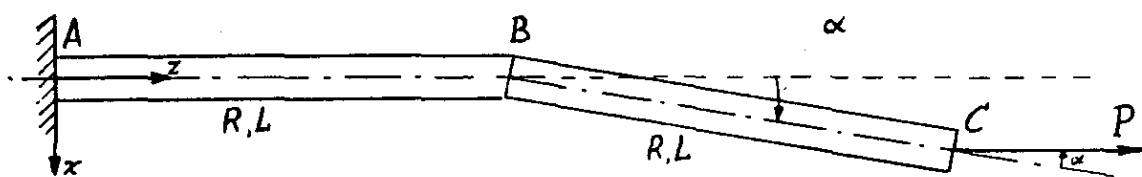
$\tan \beta = \frac{a(a+3b)}{b(3a+b)}$,

$\beta = \alpha$, als $a = b$.

vi) $P^* = \frac{(a+b)(3a+b)(a+3b)}{(15a^2 + 34ab + 15b^2)} 4kh\sqrt{3}$.

Tentamen 8-6--1979. (Elastostatica-deel)

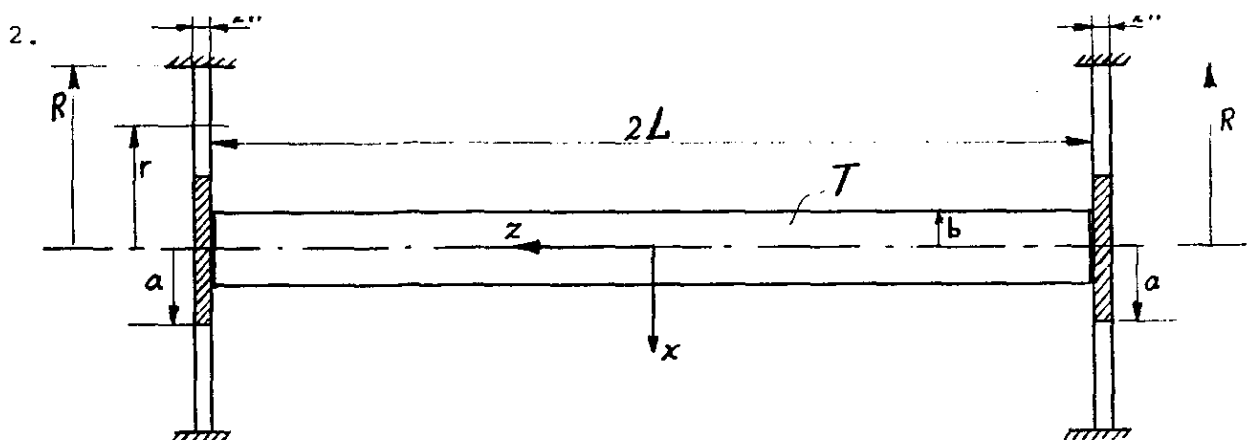
1. *)



Twee identieke, slanke staven AB en BC met cirkelvormige doorsnede, lengte L , straal R , zijn in B aan elkaar gelast. De staaf AB is in A ingeklemd. De assen van de staven liggen niet exact in elkaars verlengde, maar maken een kleine hoek α ($\alpha \ll 1$) met elkaar (zie figuur). Het stelsel wordt in C belast door een kracht P in de richting AB.

- i) Bepaal de spanningen in AB, uitgedrukt in P , α , R , L en x . [2]
- ii) Bepaal de maximale waarde van deze spanning: σ_{\max} . [2]
- iii) Bereken het quotiënt $q = (\sigma_{\max})_{\alpha \neq 0} / (\sigma_{\max})_{\alpha = 0}$. [2]
- iv) Geef de numerieke waarde van q voor het geval dat $\alpha = \frac{1}{60}$ rad ($\approx 1^\circ$) en $(R/L) = \frac{1}{15}$. [2]

*) Voor de opgaven 1 en 2 was ± 1.5 uur beschikbaar.



Een thermoelastische staaf met cirkelvormige doorsnede, lengte $2L$, straal b , is ingeklemd tussen twee identieke cirkelvormige platen, straal R , dikte $2h$ ($h \ll R$). De staafas gaat door de middelpunten van de platen. De platen zijn aan de buitenrand ($r = R$) ingeklemd en bevatten een cirkelvormige, concentrische starre kern met straal a ($a > b$), waarbij $a = R/\sqrt{e}$ ($e = 2,718$; $\log e = 1$).

Vanuit de spanningsloze, ongedeformeerde toestand wordt de staaf T °C in temperatuur verhoogd; de temperatuur van de plaat verandert niet. De lineaire uitzettingscoëfficiënt van de staaf is α . De elasticiteitscoëfficiënten (E, ν) van staaf en plaat zijn gelijk.

- i) Beschrijf kort in woorden wat er met de constructie zal gebeuren t.g.v. de temperatuursverhoging van de staaf. [1]
- ii) Welke zijn de onbekenden voor de staaf en welke vergelijkingen heeft U hiervoor? [1]
- iii) Idem voor de platen. [1]
- iv) Welke aansluitcondities heeft U nog nodig om het probleem volledig te kunnen oplossen (tussen de staaf en de starre kernen van de platen is geen wrijving). [1]
- v) Geef de algemene oplossing van de plaatvergelijking voor een rotatiesymmetrische uitbuiging $w(r)$ van een cirkelvormige plaat (hint: druk w uit in (r/R)). [2]
- vi) Formuleer de randvoorwaarden voor $w(r)$. [1]
- vii) Noem de totale verlenging van de staaf $2\Delta L$ (bedenk dat ΔL nog onbekend is). Druk de spanningen in de staaf uit in ΔL . [2]
- viii) Bepaal de expliciete uitdrukking voor $w(r)$ als functie van ΔL . [2]
- ix) Bepaal de dwarskracht in de plaat als functie van ΔL . [2]
- x) Geef de expliciete uitdrukking voor de nog benodigde aansluitconditie en bepaal hiermee ΔL als functie van T . [4]

BASISVERGELIJKINGEN (Elastostatica)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad t_{ij,j} = 0,$$

$$e_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \left[t_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} t_{kk} \right] + \alpha T \delta_{ij};$$

cirkelvormige plaat met rotatie-symmetrische uitbuiging $w(r)$:

plaatvergelijking:

$$\Delta \Delta w(r) = 0, \quad (\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}).$$

buigend moment:

$$M_{rr} = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

dwarskracht:

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} (\Delta w).$$

ANTWOORDEN, TENTAMEN 8-6-1979.

1. i)
$$t_{zz} = \frac{P}{\pi R^2} + \frac{4\alpha PL}{\pi R^4} x .$$

ii)
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\pi R^2} \left(1 + \frac{4\alpha L}{R}\right) .$$

iii)
$$q = 1 + \frac{4\alpha L}{R} .$$

iv)
$$q = 2 .$$

2. vii)
$$t_{zz} = \frac{E\Delta L}{L} - \alpha ET .$$

viii)
$$w(r) = \left\{1 + \frac{2}{e} \log\left(\frac{r}{R}\right) - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^2 \log\left(\frac{r}{R}\right)\right\} \epsilon \Delta L ,$$

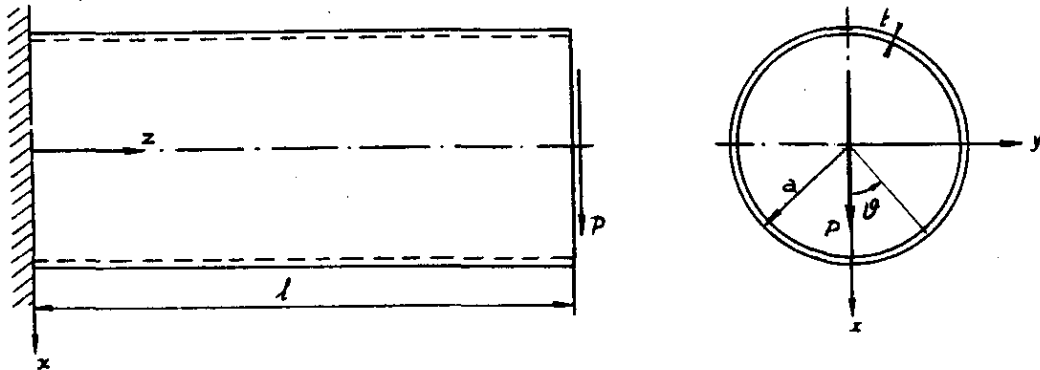
met

$$\epsilon = \frac{e^2}{(e^2 - 3e + 1)} .$$

ix)
$$Q_r = - \frac{8D}{rR^2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \epsilon \Delta L .$$

x)
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\alpha T}{\left\{1 + \frac{16DL}{2^2 R^2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \epsilon\right\} E b R}$$

Tentamen 6-10-1979. (Elastostatica-deel)



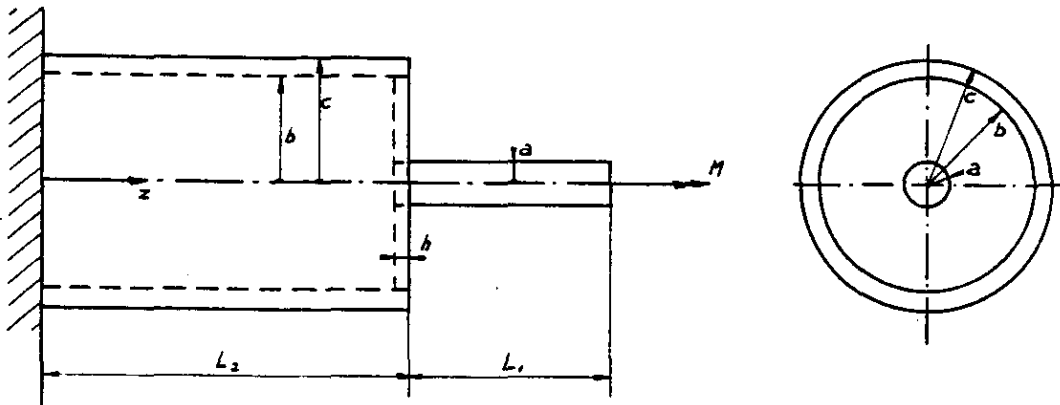
1. Een ingeklemde, dunwandige cirkelvormige pijp (lengte l , straal a , wanddikte t ; $l \gg a$, $t \ll a$) wordt in zijn vrije uiteinde belast door een dwarskracht P , aangrijpend in het middelpunt van de doorsnede. Voor het gerelaxeerde probleem wordt de volgende spanningsverdeling gegeven (voor x, y, z en θ : zie figuur).

$$\begin{aligned}
 t_{xx} &= t_{xy} = t_{yy} = 0, \\
 t_{xz} &= \frac{P}{\pi a t} \sin^2 \theta \approx \frac{P}{\pi a^3 t} y^2, \\
 t_{yz} &= -\frac{P}{\pi a t} \sin \theta \cos \theta \approx -\frac{P}{\pi a^3 t} xy, \\
 t_{zz} &= -\frac{P(l-z)}{\pi a^2 t} \cos \theta \approx -\frac{P(l-z)}{\pi a^3 t} x.
 \end{aligned}$$

Ga na in hoeverre deze verdeling aan de volgende condities voldoet: (beargumenteer Uw antwoorden en geef de bijbehorende berekeningen):

- i) De spanningen zijn in globaal evenwicht met de krachten en momenten in een doorsnede ter plaatse z ($0 \leq z \leq l$). [3]
- ii) De spanningen voldoen aan de lokale evenwichtsvergelijkingen. [3]
- iii) De spanningen voldoen aan de randvoorwaarden op de mantel. [3]
- iv) De bij deze spanningen behorende deformaties zijn compatibel. [3]

2.



Een dunne cirkelvormige plaat, straal b , dikte h , met een gat, straal a , is aan de binnenrand vastgelast aan een staaf met een cirkelvormige doorsnede, lengte L_1 , straal a , en aan de buitenrand aan een cirkelvormige buis, lengte L_2 , binnenstraal b , buitenstraal c . De buis en de staaf liggen in elkaars verlengde. De buis is ingeklemd en de staaf wordt in zijn vrije uiteinde belast door een wringend moment M . Voor de nu volgende vragen mag, voor wat de staaf en de buis betreft, worden volstaan met de gerelaxeerde oplossing.

- i) Bepaal de spanningsverdeling en de hoekverdraaiing per lengte-eenheid van de staaf. [3]
- ii) Bepaal de spanningsverdeling, de hoekverdraaiing per lengte-eenheid en de hoekverdraaiing van de einddoorsnede ($z = L_2$) van de buis. [3]
- iii) Bepaal de spanningsverdeling en de verplaatsingen van de plaat. [5]
- iv) Bepaal de hoekverdraaiing van de einddoorsnede van de staaf ($z = L_1 + L_2$) . [2]

BASISVERGELIJKINGEN (Elastostatica)

Locale evenwichtsvergelijkingen (geen volumekracht)

$$t_{ij,j} = 0 .$$

Idem, in cylindercoördinaten

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (t_{rr} - t_{\theta\theta}) = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial t_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} t_{r\theta} = 0 , \quad (I)$$

$$\frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} t_{rz} = 0 .$$

Wet van Hooke

$$e_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[t_{ij} - \frac{\nu}{(1 + \nu)} \delta_{ij} t_{kk} \right] , \quad \left(\frac{E}{2(1 + \nu)} = G \right) .$$

Compatibiliteitsvergelijkingen .

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} , \quad (\text{cyclisch})$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) , \quad (\text{cyclisch})$$

Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand ; in poolcoördinaten

Evenwichtsvergelijkingen:

$$\text{zie (I) met: } t_{rz} = t_{\theta z} = t_{zz} = 0 .$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E} (t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}) , \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}) ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{(1 + \nu)}{E} t_{r\theta} ,$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} , \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$$

$$(u = u_r , \quad v = u_\theta)$$

ANTWOORDEN, Tentamen 6-10-1979.

1. i), ii) en iii) wel; iv) niet.

2. i)
$$t_{xz} = -\frac{2My}{\pi a^4}, \quad t_{yz} = \frac{2Mx}{\pi a^4}, \quad (\text{of: } t_{\theta z} = \frac{2Mr}{\pi a^4}), \quad \alpha = \frac{2M}{\pi G a^4}.$$

ii)
$$t_{xz} = -\frac{2My}{\pi(c^4 - b^4)}, \quad t_{yz} = \frac{2Mx}{\pi(c^4 - b^4)}, \quad (\text{of: } t_{\theta z} = \frac{2Mr}{\pi(c^4 - b^4)}),$$

$$\alpha = \frac{2M}{\pi G(c^4 - b^4)}, \quad \varphi(z = L_2) = \frac{2ML_2}{\pi G(c^4 - b^4)}.$$

iii)
$$t_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi hr^2}, \quad (\text{overige } t_{ij} = 0),$$

$$v = -\frac{M}{4\pi Ghb^2} \left(r - \frac{b^2}{r} \right) + b\varphi(L_2), \quad u = 0.$$

iv)
$$\varphi(L_1 + L_2) = \varphi(L_2) + \frac{Ma}{4\pi Ghb^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{2ML_1}{\pi G a^4}.$$

Tentamen 19-1-1980. (Elastostatica-deel)

1. Een cylinder, lengte l , met een enkelvoudig samenhangende maar verder willekeurige doorsnede wordt in zijn einddoorsneden belast door een wringend moment M_w . De torsiehoek per lengte-eenheid noemen we α .
Neem de z -as axiaal en door de zwaartepunten van de doorsneden en de x - en y -as langs hoofdtraagheidsassen van de doorsnede.

i) Neem voor de spanningsverdeling aan dat

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0 .$$

Toon aan dat op grond van de evenwichtsvergelijkingen de overblijvende spanningen t_{xz} en t_{yz} zijn uit te drukken in één spanningsfunctie $F(x,y)$ en geef deze uitdrukkingen. (Neem hierbij F dimensieloos door hem te normeren op G .)

[2]

ii) Bepaal uit de randvoorwaarde: de mantel is spanningsvrij, de waarde van $F(x,y)$ op de rand R van de doorsnede.

[2]

iii) Veronderstel dat de verplaatsingen zijn te schrijven als

$$u_x = u = -\alpha yz, \quad u_y = v = \alpha xz, \quad u_z = w = \alpha \phi(x,y).$$

Bewijs dat dan de volgende relaties tussen ϕ en F moeten bestaan

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -x - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial x} .$$

[2]

iv) Bewijs verder, er van uitgaande dat er een tweemaal continu differentieerbare $F(x,y)$ bestaat, dat het voor het bestaan van $\phi(x,y)$ noodzakelijk is dat

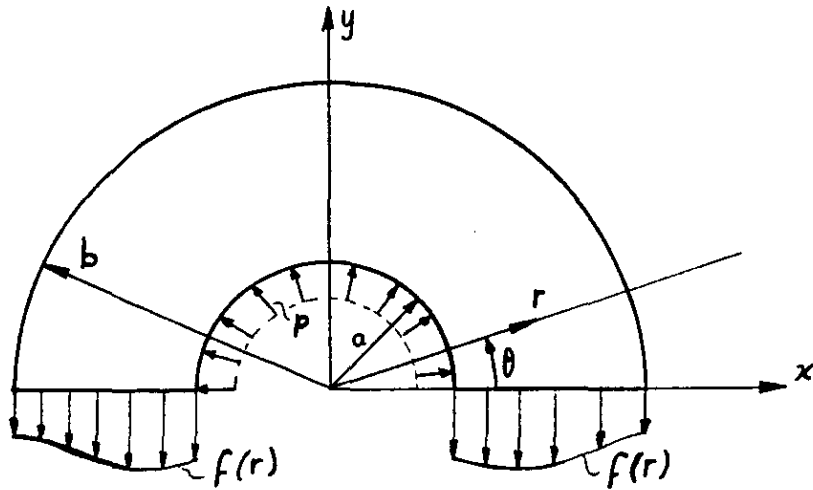
$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 .$$

[2]

v) Leid op analoge wijze, uitgaande van het bestaan van $\phi(x,y) \in C^2$, een differentiaalvergelijking voor $F(x,y)$ af.

[2]

2.



Een dunne plaat, dikte h , heeft de vorm van een halve cirkelvormige ring met binnenstraal a en buitenstraal b . De plaat wordt aan de binnenrand ($r = a$) belast door een uniforme druk p , terwijl de buitenrand ($r = b$) spanningsvrij is. In de einddoorsneden $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ werkt een normaalspanning, verdeeld volgens een nog onbekende functie $f(r)$, maar wel zodanig dat de plaat in evenwicht is. Langs de totale rand van de plaat zijn de schuifspanningen nul.

- i) Als verder gegeven is dat de normaalspanningsverdeling $f(r)$ zodanig is dat de oplossing in de plaat volledig onafhankelijk is van θ , bereken dan de spanningen in de plaat en bepaal deze $f(r)$. [6]
- ii) Bereken de resulterende krachten en momenten in de einddoorsneden ($\theta = 0$ en $\theta = \pi$) afkomstig van $f(r)$. Controleer of inderdaad aan het globale evenwicht voldaan is. [5]
- iii) Bepaal de verplaatsingen in het vlak van de plaat. Blijven de loodrechte doorsneden (d.w.z. de doorsneden $\theta = \text{constant}$) na de deformatie vlak? Zijn de einddoorsneden $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ na de deformatie nog evenwijdig aan de x -as? Bereken de toename van de binnenstraal van de plaat. Schets, in één figuur, de gedeformeerde en de ongedeformeerde plaat. [4]

BASISVERGELIJKINGEN (Elastostatica).

Locale evenwichtsvergelijkingen (geen volumekracht)

$$t_{ij,j} = 0 .$$

Wet van Hooke

$$t_{ij} = 2G(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk}) , \quad (G = \frac{E}{2(1+\nu)}) .$$

Verband deformaties en verplaatsingen

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand: in poolcoördinaten.

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(t_{rr} - t_{\theta\theta}) = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} t_{r\theta} = 0 ,$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E}(t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}) , \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}) ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{(1+\nu)}{E} t_{r\theta} ,$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) ,$$

$$(u = u_r, v = u_\theta) .$$

ANTWOORDEN, Tentamen 19-1-1980.

1. i) $t_{xz} = G \frac{\partial F}{\partial y}, t_{yz} = -G \frac{\partial F}{\partial x},$

ii) $F = 0$ langs $R.$

v) $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2\alpha.$

2. i) $t_{rr} = \frac{a^2 p}{(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), t_{\theta\theta} = \frac{a^2 p}{(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), t_{r\theta} = 0,$

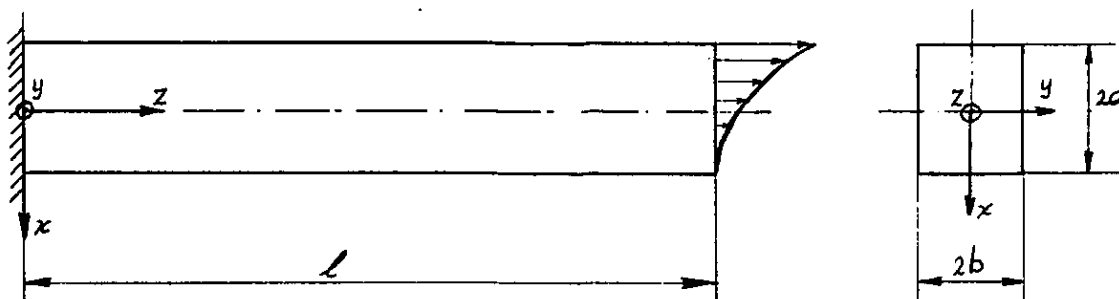
$$f(r) = \frac{a^2 p}{(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right).$$

ii) $N = aph, M = -\frac{1}{2} abph \left\{1 - \frac{2ab}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right\}.$

iii) $u = \frac{a^2 p}{E(b^2 - a^2)} \left\{ (1 - \nu)r + (1 + \nu)\frac{b^2}{r} \right\}, \nu = 0.$

Proeftentamen Elastostatica 26-4--1980.

1.

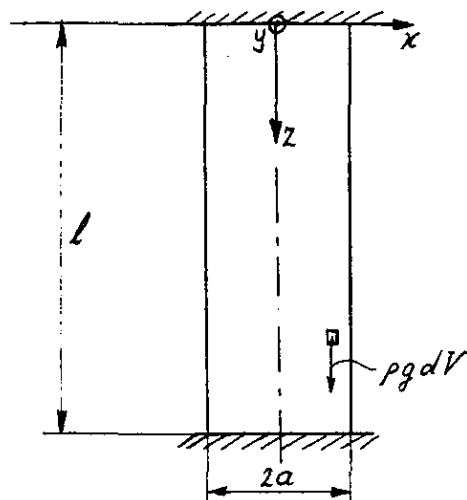


Een ingeklemde cilindrische staaf, lengte l , met rechthoekige doorsnede, $2a \times 2b$, wordt in zijn vrije einddoorsnede ($z = l$; zie figuur) belast door normaalspanningen welke zijn verdeeld volgens

$$t_{zz} = \frac{3}{4} \sigma \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 .$$

- i) Bepaal de snedegrootheden in een doorsnede ter plaatse z . [
- ii) Formuleer het gerelaxeerde probleem en geef hiervan de oplossing. [
- iii) Bepaal de neutrale lijn. [
- iv) Bereken het maximale verschil op $z = l$ tussen de spanning t_{zz} behorende bij de exacte oplossing en de gerelaxeerde waarde. Wat valt er te zeggen van het verschil tussen de exacte en de gerelaxeerde oplossing? [

2.



sneden zijn dus schuifspanningsvrij). De staaf wordt belast door zijn eigen gewicht (volumekracht : $\underline{f} = \rho g \underline{e}_z$).

Een cilindrische staaf met (ongedeformeerde) lengte l en een vierkante doorsnede, $2a \times 2a$, staat verticaal en is ingeklemd tussen twee vaste horizontale vlakken, die op een afstand l van elkaar staan. De inklemming is zodanig, dat in de doorsneden $z = 0$ en $z = l$ de axiale verplaatsingen (d.i. in z -richting) volledig zijn verhinderd, maar de verplaatsingen in het vlak van de doorsnede vrij zijn (de einddoorsneden zijn dus schuifspanningsvrij).

i) Kies een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld van de volgende vorm

$$\bar{u}_x = -vw'(z)x ; \bar{u}_y = -vw'(z)y ; \bar{u}_z = w(z), \quad (' = \frac{d}{dz}) .$$

Aan welke eisen moet $w(z)$ dan nog voldoen ? [1]

ii) Bepaal de potentiële energie functionaal $U(\bar{S})$, uitgedrukt in $w(z)$. [2]

iii) Neem voor $w(z)$ een tweedegraads polynoom in z . Bepaal de hierbij behorende beste waarde voor $U(\bar{S})$. [1]

iv) Neem een statisch toelaatbaar spanningsveld volgens

$$t_{zz} = \sigma(z) , \quad t_{xx} = t_{xy} = t_{xz} = t_{yy} = t_{yz} = 0 .$$

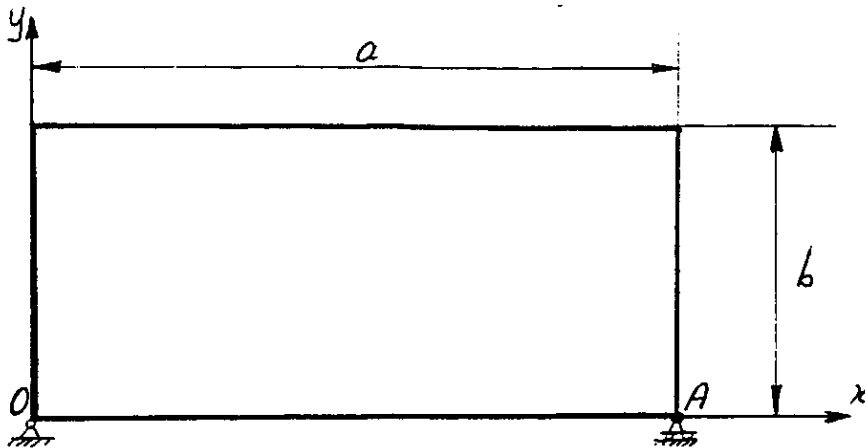
Geef een expliciete uitdrukking voor $\sigma(z)$, waarin echter nog wel één of meer nader te bepalen constanten mogen voorkomen. [2]

v) Bepaal hiermee de complementaire energie functionaal $U^*(\underline{S})$ en bereken de gunstigste waarde hiervan. [2]

vi) Vergelijk de waarden van $U(\bar{S})$ en $U^*(\underline{S})$ volgens iii) en v) met elkaar. Welke conclusie kunt U hieruit trekken omtrent de exactheid van \bar{S} en \underline{S} ? [1]

vii) Bereken de spanningen behorende bij \bar{S} en \underline{S} en vergelijk deze met elkaar. Indien deze spanningen verschillen, van welke orde van grootte is dit verschil dan? [1]

3.



Een dunne, rechthoekige plaat, $a \times b$, dikte $2h$, wordt langs zijn randen belast door spanningen, welke in dikte-richting (d.i. z -richting) constant zijn. De verdeling van deze spanningen is (β, c_1 en c_2 zijn constanten; voor x en y zie figuur) :

$$\begin{aligned} \text{op } x = 0 & : t_{xx} = 0, \quad t_{xy} = -2\beta y, \\ y = 0 & : t_{xy} = 0, \quad t_{yy} = c_1 x, \\ x = a & : t_{xx} = c_2, \quad t_{xy} = -2\beta y, \\ y = b & : t_{xy} = -2\beta b, \quad t_{yy} = 6\beta x \end{aligned}$$

De plaat is globaal in evenwicht. Voor de oplossing mag worden volstaan met die behorende bij een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.

- i) Teken de spanningen in de figuur en bepaal c_1 en c_2 als functie van β uit de eis, dat de plaat globaal in evenwicht moet zijn. [2]
- ii) Bepaal de bij dit probleem behorende Airy-functie en bereken hiermee de spanningen in de plaat. [3]
- iii) Bereken de deformaties in het vlak van de plaat. [2]
- iv) Bepaal de verplaatsingen in het vlak van de plaat. Schets de gedefor-meerde plaat. Hierbij mag worden aangenomen, dat het punt $O: (x,y) = (0,0)$ op zijn plaats blijft en dat het punt $A: (x,y) = (a,0)$ alleen in x -richting kan verplaatsen. Verder mag $\nu = \frac{1}{3}$ worden genomen. [3]

BASISVERGELIJKINGEN

Locale evenwichtsvergelijkingen

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

Wet van Hooke

$$t_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk} \right) \Leftrightarrow e_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \left(t_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} t_{kk} \right)$$

Verband deformaties en verplaatsingen

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Potentiële energie

$$U = W^{(e)} - \int_V \rho f_i u_i dV - \int_{S_p} t_i u_i dS ,$$

met

$$W^{(e)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left\{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{kk} e_{ll} \right\} dV .$$

Complementaire energie

$$U^* = W^{(t)} - \int_{S_u} t_i u_i dS ,$$

met

$$W^{(t)} = \frac{1}{2E} \int_V \left\{ (1+\nu) t_{ij} t_{ij} - \nu t_{kk} t_{ll} \right\} dV .$$

Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand ($t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$)

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0 , \quad (\underline{f} = \underline{0}) ,$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E} (t_{xx} - \nu t_{yy}) , \quad e_{yy} = \frac{1}{E} (t_{yy} - \nu t_{xx}) , \quad e_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E} t_{xy} ,$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) , \quad (u = u_x , v = u_y) .$$

Airy-functie : $U = U(x,y)$,

$$t_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} , \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} , \quad t_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} ,$$

met

$$\Delta \Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 .$$

ANTWOORDEN, Tentamen 26-4-1980.

1. i) $N = 4\sigma ab, \quad M_Y = 2\sigma a^2 b, \quad Q_x = Q_y = M_x = M_z = 0 .$

ii) $t_{zz} = \sigma(1 - \frac{3x}{2a}), \quad \text{overige } t_{ij} = 0 .$

$$u = \frac{v\sigma}{E}(-x + \frac{3x^2}{4a} - \frac{3y^2}{4a}) ,$$

$$v = -\frac{v\sigma}{E}(y - \frac{3xy}{2a}) ,$$

$$w = \frac{\sigma}{E}(z - \frac{3xz}{a}) .$$

iii) N.L.: $x = \frac{2a}{3} .$

iv) $\max | t_{zz}^{(\text{exact})} - t_{zz}^{(\text{relax})} | = \frac{\sigma}{2} .$

2. i) $w(0) = w(l) = 0 .$

ii) $U(\underline{S}) = 2a^2 E \int_0^l [w'(z)^2 + \frac{2v^2 a^2}{3(1+v)} w''(z)^2] dz - 4a^2 \int_0^l \rho g w(z) dz .$

iii) $U(\underline{S}) = -\frac{\rho^2 g^2 a^2 l^3}{6E \{1 + \frac{4v^2}{(1+v)} \frac{a^2}{l^2}\}} .$

iv) $\bar{t}_{zz} = -\rho g z + c, \quad (c = ?) .$

v) $U^*(\underline{S}) = \frac{\rho^2 g^2 a^2 l^3}{6E} .$

vii) $\bar{t}_{xx} = \bar{t}_{xy} = \bar{t}_{yy} = 0, \quad \bar{t}_{xz} = \alpha \frac{\rho g v}{2(1+v)} x, \quad \bar{t}_{yz} = \alpha \frac{\rho g v}{2(1+v)} y ,$

$$\bar{t}_{zz} = \alpha \rho g (\frac{l}{2} - z) , \quad (\alpha = \frac{1}{1 + \frac{4v^2}{(1+v)} \frac{a}{l}} = 1 + O(a/l))$$

$\bar{t}_{zz} = \rho g (\frac{l}{2} - z) , \quad \text{overige } \bar{t}_{ij} = 0 .$

3. i) $c_1 = 6\beta$, $c_2 = 2\beta a$.

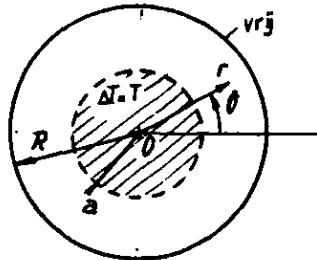
ii) $U(x,y) = \beta xy^2 + \beta x^3$,

$$t_{xx} = 2\beta x, \quad t_{yy} = 6\beta x, \quad t_{xy} = -2\beta y .$$

iii) $e_{xx} = \frac{2\beta x}{E}(1 - 3\nu)$, $e_{yy} = \frac{2\beta x}{E}(3 - \nu)$, $e_{xy} = -\frac{2\beta y}{E}(1 + \nu)$.

iv) $u = \frac{\beta x^2}{E}(1 - 3\nu) - \frac{\beta y^2}{E}(5 + \nu)$, $v = \frac{2\beta xy}{E}(3 - \nu)$.

Tentamen 16-6-1980.

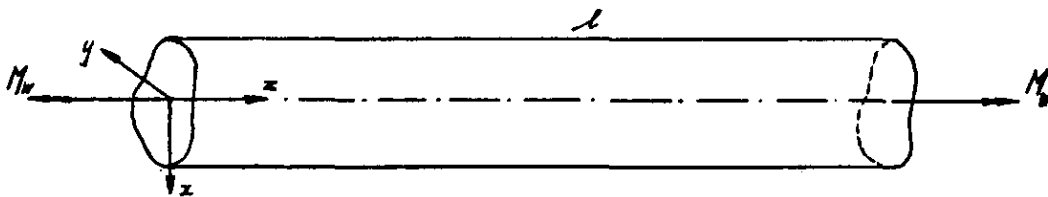


Een dunne cirkelvormige schijf, middelpunt O , straal R , dikte h , heeft een vrije rand. Een om O gelegen cirkelvormig deel van de plaat met straal a ($a < R$) wordt $T^{\circ}C$ verwarmd (de rest van de plaat blijft op de oorspronkelijke temperatuur).

Voor de oplossing van dit probleem mag worden volstaan met de benadering binnen het kader van de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.

- i) Wat zijn de onbekenden van dit probleem en welke vergelijkingen heeft U daarvoor tot U_w beschikking? [2]
- ii) Bereken de spanningsverdeling in de plaat en de verplaatsingen in het vlak van de plaat. [5]
- iii) Hoeveel is de straal van de plaat toegenomen? [1]
- iv) Stel $R \gg a$. Bepaal de spanningsverdeling in de plaat voor de limiet $(R/a) \rightarrow \infty$. Kunt U dit resultaat verklaren? [2]

2.



Een cylinder, lengte l , met een enkelvoudig samenhangende maar verder willekeurige doorsnede, doorsnede-oppervlak S , wordt in zijn einddoorsnede belast door een wringende moment M_w . De torsiehoek per lengte-eenheid is α . De cylindermantel R is spanningsvrij. Neem de z -as axiaal en de x - en y -as in het vlak van de doorsnede.

i) Neem voor de spanningsverdeling aan dat

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0 .$$

Bewijs dat aan de drie evenwichtsvergelijkingen is voldaan als

$$t_{xz} = G \frac{\partial F}{\partial y} , \quad t_{yz} = - G \frac{\partial F}{\partial x} , \quad F = F(x,y) . \quad [1]$$

ii) Aan welke conditie(s) moet de in i) gegeven spanningsverdeling nog voldoen opdat ze statisch toelaatbaar is en tot welke conditie(s) voor $F(x,y)$ leidt dit? Onderscheid hierbij de gevallen:

- a) het wringende moment M_w is voorgeschreven;
- b) de hoekverdraaiing van de einddoorsneden ten opzichte van elkaar is voorgeschreven, dat wil zeggen α is voorgeschreven. [2]

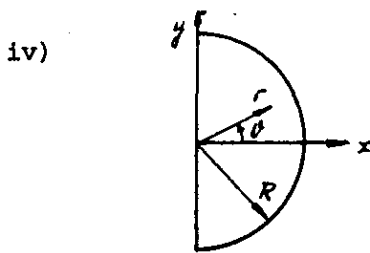
NEEM VOOR DE NU VOLGENDE VRAGEN α VOORGESCHREVEN.

iii) Bewijs dat de torsiestijfheid D , gedefinieerd door

$$D = \frac{M_w}{\alpha} ,$$

evenredig is met de potentiële energie $U(S)$ van de exacte oplossing en druk deze evenredigheids-constante uit in α en ℓ . (Gebruik hiervoor de relatie:

$$U(S) + U^*(S) = 0) . \quad [2]$$



Beschouw een cylinder met een doorsnede in de vorm van een halve cirkel met straal R (zie nevenstaande figuur).

Laat zien dat de spanningsfunctie

$$F(x,y) = Cx(x^2 + y^2 - R^2) ,$$

een statisch toelaatbaar spanningsveld

$$\underline{S} = \{ t_{-xz} = G \frac{\partial F}{\partial y} , t_{-yz} = - G \frac{\partial F}{\partial x} \quad t_{-xx} = t_{-yy} = t_{-zz} = t_{-xy} = 0 \} ,$$

geeft voor elke waarde van C.

[1]

v) Druk $U^*(\underline{S})$ uit in $F(x,y)$ (zonder de voorkomende integralen uit te werken).

[2]

vi) Geef aan, zonder dit in detail uit te werken, hoe U met behulp van het voorafgaande een benadering voor de torsiestijfheid D kunt vinden. Geef hierbij speciaal aan hoe U de constante C kunt bepalen.

Vindt U op deze wijze een grotere of een kleinere waarde voor D?

[2]

BASISVERGELIJKINGEN: Elastostatica-Plasticiteit.

Locale evenwichtsvergelijkingen

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 .$$

Wet van Hooke

$$t_{ij} = 2G(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk}) , \quad (G = \frac{E}{2(1+\nu)}) .$$

of

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} (t_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} t_{kk}) .$$

Verband deformaties en verplaatsingen

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand: in poolcoördinaten, (thermo-elastisch).

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (t_{rr} - t_{\theta\theta}) = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} t_{r\theta} = 0 ,$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E} (t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}) + \alpha T, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}) + \alpha T ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{(1+\nu)}{E} t_{r\theta} ,$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) ,$$

$$(u = u_r, v = u_\theta) .$$

Potentiële energie

$$U(S) = W(S) - A_u^{(b)}(S) = W(S) - \int_V \rho f_i^* u_i dv - \int_{Sp} t_i^* u_i ds .$$

Complementaire energie

$$U^*(S) = W(S) - A_u^{(u)}(S) = W(S) - \int_{S_u} t_{ij} n_j u_i^* ds$$

met

$$\begin{aligned} W(S) &= \frac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij} dV = G \int_V \left\{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk})^2 \right\} dV = \\ &= \frac{1}{4G} \int_V \left\{ t_{ij} t_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} (t_{kk})^2 \right\} dV . \end{aligned}$$

ANTWOORDEN, Tentamen 16-6-1980.

1. ii) $\underline{r < a}$: $t_{rr} = t_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)\alpha ET$, $t_{r\theta} = 0$,

$$u = \frac{1}{2}\left[(1 + \nu) + (1 - \nu)\frac{a^2}{R^2}\right]\alpha Tr, \quad \nu = 0.$$

$\underline{r > a}$: $t_{rr} = \frac{a^2}{2R^2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\alpha ET$, $t_{\theta\theta} = \frac{a^2}{2R^2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\alpha ET$, $t_{r\theta} = 0$,

$$u = \frac{a^2}{2R^2}\left[(1 - \nu) + (1 + \nu)\frac{R^2}{r^2}\right]\alpha Tr.$$

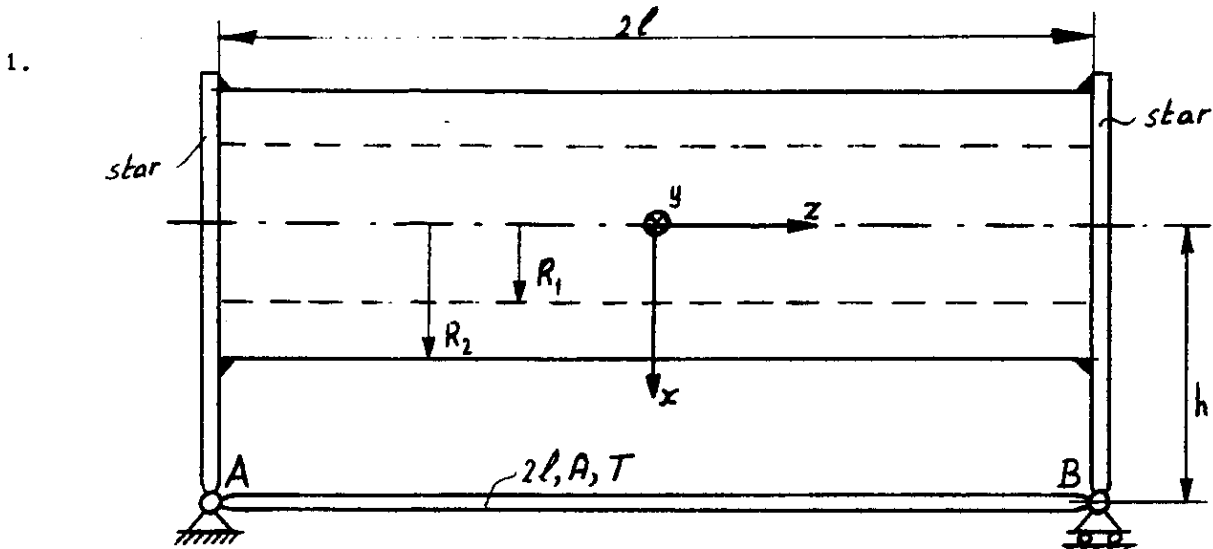
iii) $R_{na} = \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\alpha T\right)R$.

2. ii) a) $F = 0$, op \underline{R} ; $\int_S F dS = \frac{M_w}{2G}$.

b) $F = 0$, op R .

v) $U^*(\underline{S}) = \frac{1}{2}G\ell \int_S \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 4\alpha F \right\} dx dy$.

Tentamen 4-10-1980. (Elastostatica-deel)



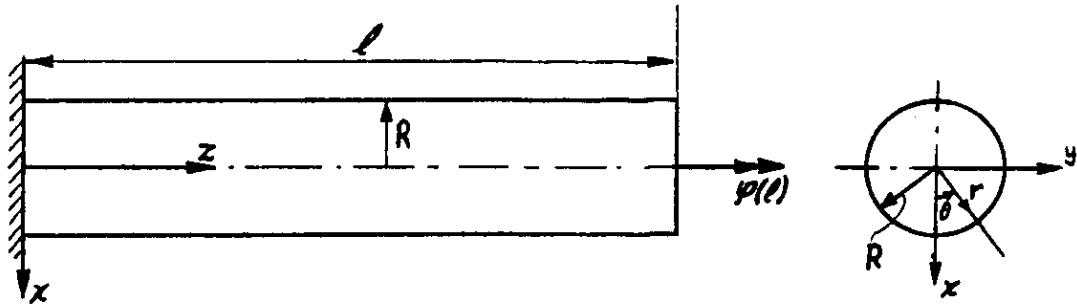
Aan een cirkelvormige buis, binnenstraal R_1 , buitenstraal R_2 , zijn twee starre platen gelast. Een slanke staaf AB, lengte $2l$, oppervlak van de doorsnede A, is scharnierend verbonden met beide platen. De staaf AB is evenwijdig aan de hartlijn van de buis. De afstand tussen AB en deze hartlijn is $h > R_2$. De buis en de staaf zijn van hetzelfde materiaal. Het stelsel is oorspronkelijk spanningsvrij. De staaf AB wordt dan $T^\circ\text{C}$ verwarmd.

- i) Noem de normaalkracht in de staaf AB voorlopig N . Druk de spanningsverdeling in de buis en in de staaf uit in N . (U kunt steeds volstaan met de gerelaxeerde oplossing). [3]
- ii) Druk de verplaatsingen in z -richting van de punten A en B, opgevat achtereenvolgens als punten van de buis en als punten van de staaf, uit in N en, eventueel, T . [2]
- iii) Geef eerst aan hoe U de normaalkracht N kunt bepalen en bereken daarna deze kracht als functie van T . [3]
- iv) Indien gegeven is dat de staaf AB knikt als

$$-N \geq \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

bepaal dan als functie van (EI/l^2) de maximaal toelaatbare T waarvoor de staaf AB niet knikt. [2]

2.



Een eenzijdig ingeklemde, cylinderische staaf, lengte l , met cirkelvormige doorsnede, straal R , wordt getordeerd. Hierbij is de hoekverdraaiing van de vrije einddoorsnede, $\varphi(l)$, voorgeschreven. Het materiaal van de cylinder is niet homogeen; de glijdingsmodulus G hangt op de volgende wijze van de plaats af

$$G = G(r) = G_0 \left(1 + \epsilon \frac{r}{R} \right),$$

met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $0 < \epsilon \ll 1$.

Gevraagd worden onder- en bovengrenzen voor de torsiestijfheid D ($D = M/\alpha$; $\alpha = \varphi(l)/l$), welke hoogstens $O(\epsilon^2)$ van elkaar verschillen.

i) Bewijs hiertoe eerst dat

$$-\frac{2}{\alpha^2 l} U^*(\underline{S}) \leq D \leq \frac{2}{\alpha^2 l} U(\bar{S}). \quad [3]$$

ii) Kies kinematisch toelaatbare verplaatsingen en statisch toelaatbare spanningen, welke in vorm overeenkomen met de oplossing behorende bij uniforme G . Geef, voor het geval dat deze velden nog één of meer willekeurige constanten bevatten, aan hoe U deze constanten kunt bepalen.

Bereken de bijbehorende potentiële en complementaire energie. [5]

iii) Bepaal met de resultaten van i) en ii) onder- en bovengrenzen voor D .

Laat zien dat deze hoogstens $O(\epsilon^2)$ verschillen. [2]

BASISVERGELIJKINGEN: Elastostatica-Plasticiteit.

Locale evenwichtsvergelijkingen.

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 .$$

Wet van Hooke (lineair thermo-elastisch)

$$e_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) t_{ij} - \nu \delta_{ij} t_{kk} \right] + \alpha T \delta_{ij} .$$

Verband deformaties en verplaatsingen

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{j,i}) .$$

Potentiële energie

$$U(S) = W(S) - A_u^{(b)}(S) = W(S) - \int_V \rho f_i^* u_i dv - \int_{S_p} t_i^* u_i ds .$$

Complementaire energie

$$U^*(S) = W(S) - A_u^{(u)}(S) = W(S) - \int_{S_u} t_{ij} n_j u_i^* ds$$

met

$$\begin{aligned} W(S) &= \frac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij} dv = G \int_V \left\{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (e_{kk})^2 \right\} dv = \\ &= \frac{1}{4G} \int_V \left\{ t_{ij} t_{ij} - \frac{\nu}{(1 + \nu)} (t_{kk})^2 \right\} dv . \end{aligned}$$

Insluittheorema

$$-U^*(\underline{S}) \leq -U^*(S) = U(S) \leq U(\bar{S}) .$$

ANTWOORDEN, Tentamen 4-10-1980.

1. i) Buis: $t_{zz}^{(1)} = \frac{N}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left\{ 1 + \frac{4hx}{(R_2^2 + R_1^2)} \right\}$,

Staaaf: $t_{zz}^{(2)} = -\frac{N}{A}$, ($N > 0$) (overige $t_{ij} = 0$).

ii) Buis: $w_B^{(1)} = \frac{2N\ell}{\pi E(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{8N\ell h^2}{\pi E(R_2^4 - R_1^4)}$,

Staaaf: $w_B^{(2)} = -\frac{2N\ell}{EA} + 2\alpha T\ell$.

iii)
$$N = \frac{\pi EA(R_2^4 - R_1^4)\alpha T}{(4h^2 + R_2^2 + R_1^2)A + \pi(R_2^4 - R_1^4)} =: nT$$

iv) Knik als $T \geq \frac{\pi^2 EI}{n\ell^2}$, (n volgens iii)).

2. ii) $\bar{S} : \bar{u}_x = -\alpha yz, \bar{u}_y = \alpha xz, \bar{u}_z = 0$,

$$U(\bar{S}) = \frac{\pi}{4} \alpha^2 \ell G_0 R^4 \left(1 + \frac{4}{5} \epsilon \right).$$

$\underline{S} : \underline{t}_{xz} = -cy, \underline{t}_{yz} = cx$, (of $\underline{t}_{\theta z} = cr$), overige $\underline{t}_{ij} = 0$,

$$U^*(\underline{S}) = -\frac{\pi}{4} \alpha^2 \ell G_0 R^4 \left(1 + \frac{4}{5} \epsilon + O(\epsilon^2) \right).$$

iii) $D = \frac{\pi}{2} G_0 R^4 \left(1 + \frac{4}{5} \epsilon + O(\epsilon^2) \right).$